

## درس اول : مفهوم تابع و بازنمایی های آن

بسیاری از پدیده های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. نوعی خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می شود. به مثال های زیر توجه کنید.

دمایی که به ساعت معینی در روز نسبت داده می شود.

قیمتی که به اجناس یک فروشگاه نسبت داده می شود.

نمره هایی که به یک دانش آموز در دروس مختلف تعلق می گیرد.

عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می شود.

### فعالیت ۱

در جدول های زیر مثال های بالا و مواردی دیگر با روشی متفاوت ارائه شده اند. هر جا لازم است جدول ها را کامل کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل نمایید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می توان به آن نسبت داد. در مورد بقیه جدول ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	

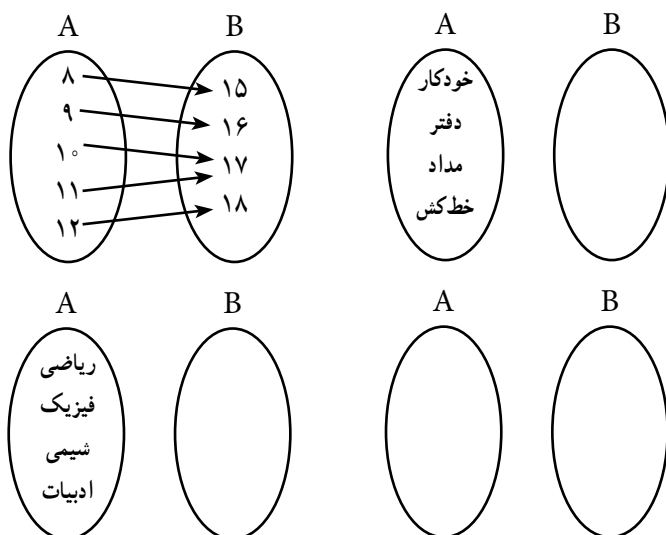
خط کش	مداد	دفتر	خودکار	کالا
۱۵۰۰	۱۰۰۰	۳۰۰۰	۱۵۰۰	قیمت

ادبیات	شیمی	فیزیک	ریاضی	درس
۱۸	۱۷	۱۶	۱۸	نمره

رستگار	کشاورز	احسانی	امیدی	افراد
پنج شنبه	شنبه	دوشنبه	شنبه	روز تولد


## فعالیت ۲

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آنها را به هم مربوط می‌کنند مشخص کرد. به این نمودارها، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



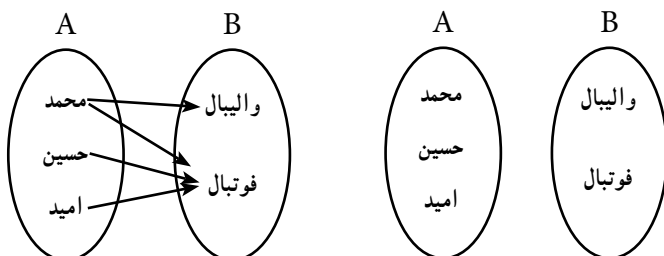
توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. در ریاضیات اینگونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند.

یک تابع رابطه‌ای بین دو مجموعه A و B است که در آن به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود.

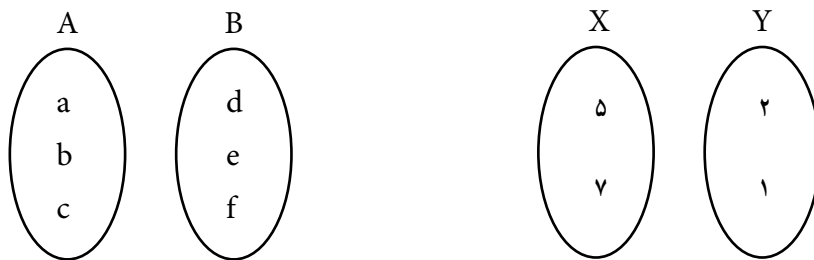
در فعالیت ۱، همه مثال‌های ارائه شده تابع‌هایی هستند که به صورت جدول نشان داده شده‌اند.

## کار در کلاس

۱- مجموعه A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل ورزش‌های مورد علاقه آنهاست. چرا رابطه داده شده در سمت چپ تابع نیست؛ در سمت راست نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که رابطه به دست آمده یک تابع باشد.

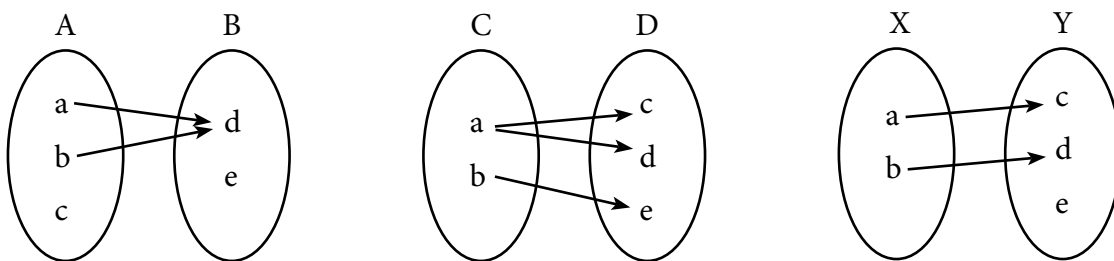


۲- بین دو مجموعه A و B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. برای دو مجموعه X و Y این کار را به گونه ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد.



پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

۳- آ) آیا رابطه ای که به افراد سن آنها را نسبت می دهد یک تابع است؟ رابطه ای که به افراد وزن آنها را نسبت می دهد چگونه؟  
 ب) آیا رابطه ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می دهد یک تابع است؟ توضیح دهید.  
 ج) کدامیک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟

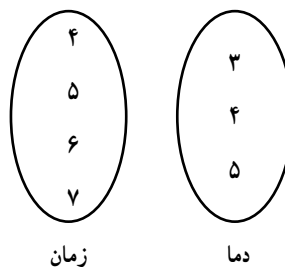
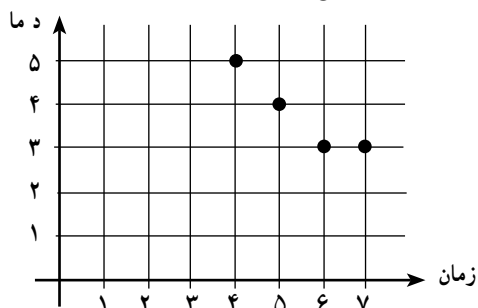


## فعالیت

نمایش تابع به صورت زوج های مرتب و نمودار مختصاتی

در نمودار زیر دمای هوا در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان داده شده است.

رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟



اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

$(۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳), (۷, ۳)$

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های  $(۴, ۵)$  و  $(۵, ۴)$  برابر نیستند و دو نقطه متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا یک «زوج» مرتب می‌گوییم.

اگر همه زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده بین زمان و دما به دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام‌گذاری این مجموعه جدید از حروفی مانند  $f$  و  $g$  استفاده می‌کنیم.

$$f = \{(۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳), (۷, ۳)\}$$

مجموعه  $f$  یک تابع است.

برای ساعت‌های دیگر دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

## کار در کلاس

۱- نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید.

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز
جمعیت (میلیون نفر)						

رابطه بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب هم نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟

۲- در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل کنید و معلوم کنید که آیا رابطه داده شده یک تابع است؟

جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
		$\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
		$\{(2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$	
			به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.

۱- کدامیک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

(آ) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع محیط مربع را نسبت می‌دهد.

(ب) رابطه‌ای که به هر فرد دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

(ج) رابطه‌ای که به هر فرد گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

(د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز دوستان او را نسبت می‌دهد.

(ه) رابطه‌ای که به هر عدد ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

۲- مجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{1, 2\}$  داده شده‌اند.

(آ) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از  $A$  به  $B$  ارائه کنید که تابع باشند.

(ب) دو رابطه هم ارائه کنید که تابع نباشند.

(ج) چهار رابطه به‌دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نیز نمودار نمایش دهید.

۳- (آ) کدامیک از دو رابطه زیر یک تابع است؟ چرا؟

$$g = \{(1, 5), (2, 9), (2, 5), (3, 10)\}$$

$$f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 10)\}$$

(ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به‌صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود معیاری به‌دست آورید :

اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن ..... .

۴- کدامیک از مجموعه‌های زیر یک تابع است :

$$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$$

$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$$

$$k = \{(2, 5)\}$$

$$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$$

## درس دوم : دامنه و برد توابع

### فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چندضلعی	مثث	مربع	لوزی	پنج ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	$180^\circ$			

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{ (\text{پنج ضلعی}), (\text{لوزی}), (\text{مربع}), (\text{مثث}) \}$$

چرا  $f$  یک تابع است؟

مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

در فعالیت بالا :  $f = \{ \text{پنج ضلعی و لوزی و مربع و مثث} \}$  دامنه  $f$

$$f \text{ برد} = \{ 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ \}$$

### کاردر کلاس

۱- در جدول رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است.

جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{3}{4}$	۲		
محیط	۲	۴				۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

۲- (آ) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

(ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد.

۱- دنباله شکل‌های زیر را در نظر بگیرید :

شکل اول



شکل دوم



شکل سوم



شکل چهارم



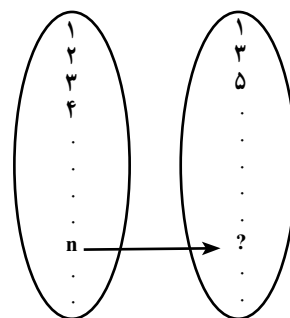
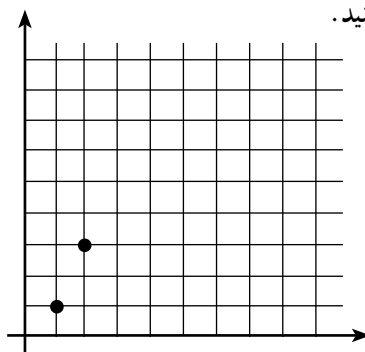
جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	.....	۱۰۰	.....	n	.....
تعداد دایره‌ها	۱	۳					.....		.....		.....

چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (100, \dots), \dots, (n, \dots)\}$$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.



دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

همان گونه که از نمایش‌های مختلف تابع دیده می‌شود عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می‌شود. به جای این می‌توان با یک قرارداد کار را ساده‌تر کرد. معمولاً می‌نویسند  $f(1)=1$ ,  $f(2)=3$  و گفته می‌شود که مقدار تابع  $f$  در نقطه ۱ برابر ۲ است و یا مقدار تابع  $f$  در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت :

$$f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1, \dots$$

رابطه بین دامنه و برد تابع  $f$  را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل  $f(n)=2n-1$  نوشت که در آن  $n$  یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می‌نامند. برای مشخص کردن تابع  $f$  به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم.

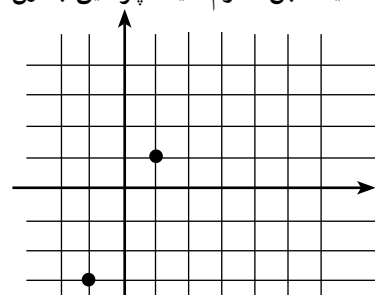
در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.

# کار در کلاس

نمودار خط  $y=2x-1$  را رسم کنید. از جدول زیر برای رسم نمودار استفاده کنید. جدول را کامل کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	
y	۱	۳	۵	-۳				

آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل معلوم کنید؟ چرا این جدول هم یک تابع را معلوم می‌کند؟ این تابع را  $g$  بنامید. نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع  $f(n)=2n-1$  که در آن  $n \in \mathbb{N}$  مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید.



$$g\left(\frac{2}{7}\right) =$$

$$g(0) =$$

$$g\left(-\frac{1}{5}\right) =$$

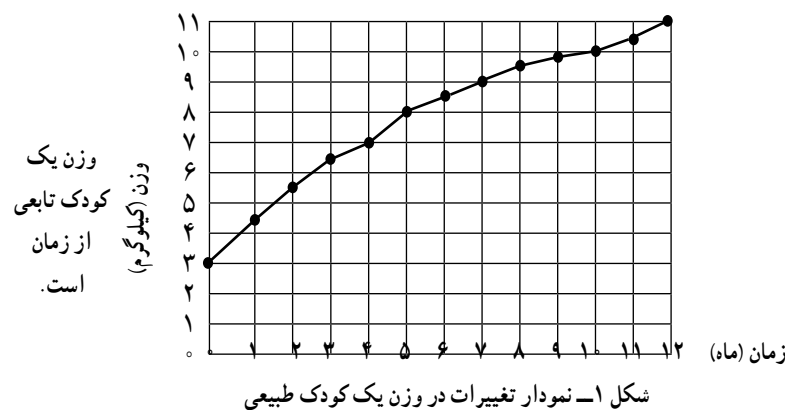
$$f(x) =$$

$$g(10) =$$

نمایش جبری تابع داده شده در این کار در کلاس را بنویسید.  
که در آن  $x$  یک عدد ..... است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل  $y=ax+b$  نمایش داد یک تابع خطی نامیده می‌شود.

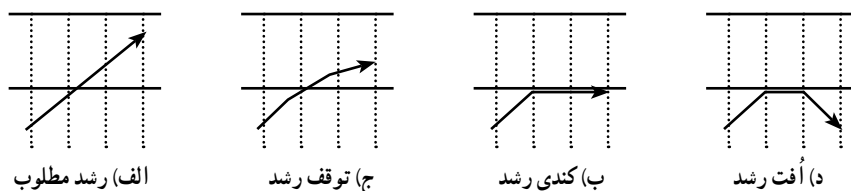
شاید بیشتر شما نمودارهای وزن و یا قد یک کودک از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه را دیده باشید. شکل (۱) نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد.<sup>۱</sup>



۱- برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.



هنگامی که پزشکان می‌خواهند در مورد رشد یک کودک اظهار نظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسه نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲

## فعالیت

جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که در پایان هر ماه طی یک سال، توسط پزشک (یا یک مرکز بهداشتی) ثبت شده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

(الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

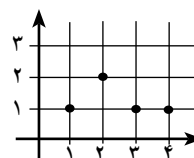
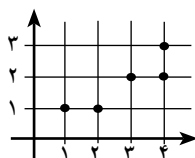
(ب) در چه فاصله زمانی وزن او ثابت مانده است؟

(ج) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

اگر چه وزن کودک در فاصله بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید. (د) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

## کار در کلاس ۱

کدامیک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.

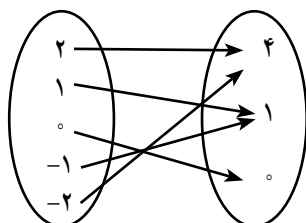
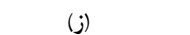
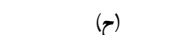
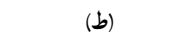
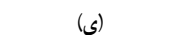
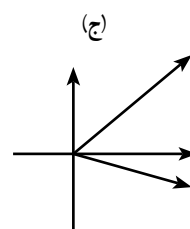
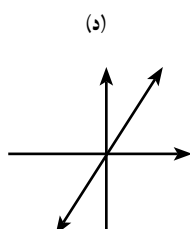
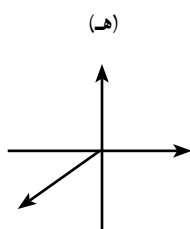
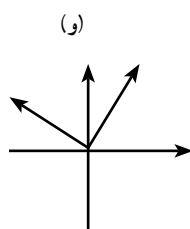
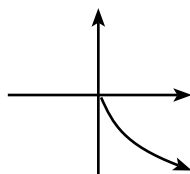
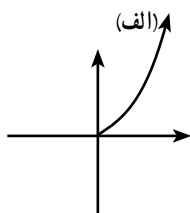
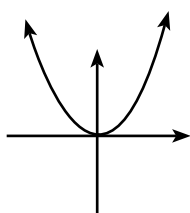
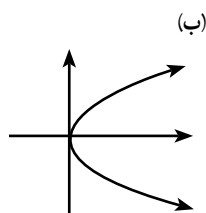
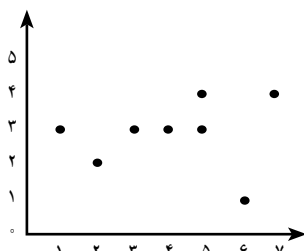
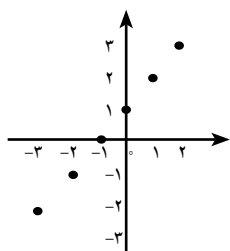


می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام که تابع است را معلوم کنید.  
با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود به دست آورید.

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار در یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در ..... قطع کند.

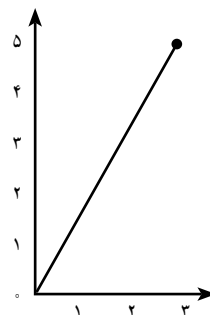
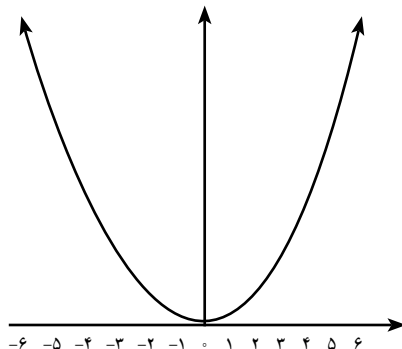
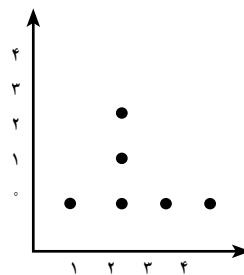
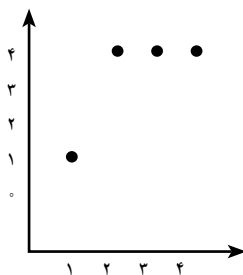
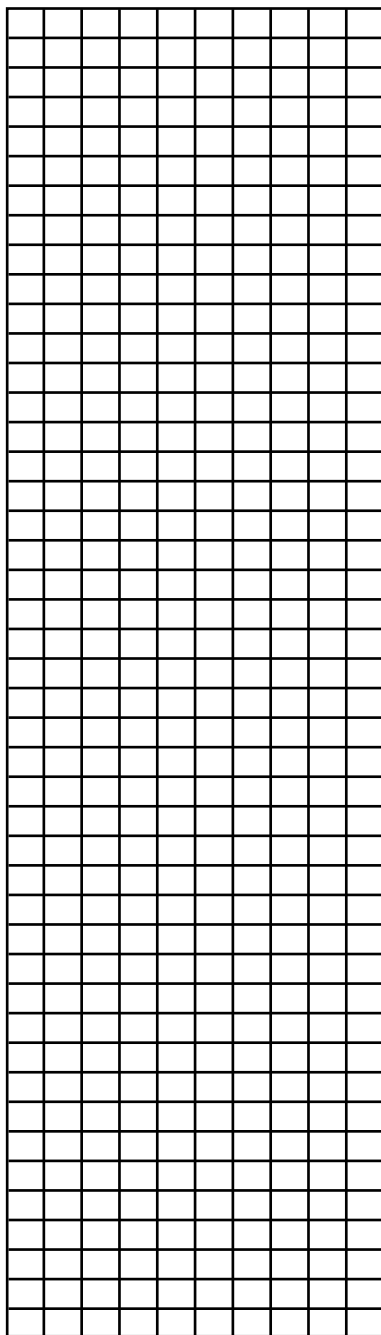
## کار در کلاس ۲

کدامیک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



## تمرین

۱- کدامیک تابع است؟



دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

۲- تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

ج) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.

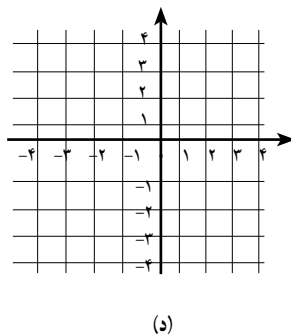
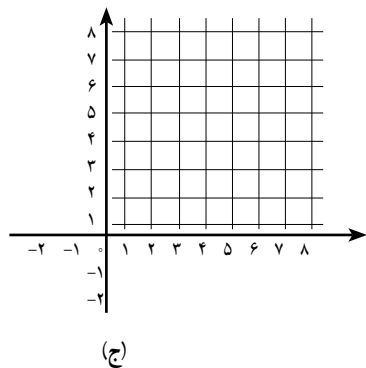
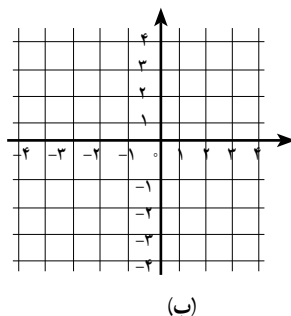
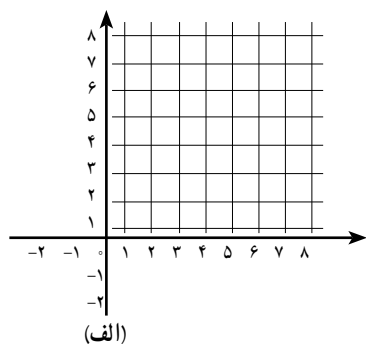
د) دامنه آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

هـ) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳- جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی که در جدول، توصیف شده‌اند را

رسم کنید.

	(ب)	(د)
تابع	$g(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	مجموعه اعداد حقیقی	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی



برد

مجموعه اعداد حقیقی

۴- یک شمع  $20^\circ$  سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت  $4^\circ$  سانتی متر می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در طی ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

نمودار این تابع را رسم کنید.  
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۵- آیا خط  $x = 2$  را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ در مورد خط  $y = 5$  چه طور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟  
۶- معادله ای برای هر یک از توابع خطی داده شده با جدول های زیر بنویسید.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶



**سایت ویژه ریاضیات** [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)