بنام خدا

اصول مثلثات

Fundamentals of Trigonometry

تألیف و ترجمه

انوشیروان صراف

دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز

(سال های ۱۳۴۲ ـ۱۳۶۵)

مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری

(سال های ۱۹۹۶ـ۲۰۰۹)

آدرس ایمیل

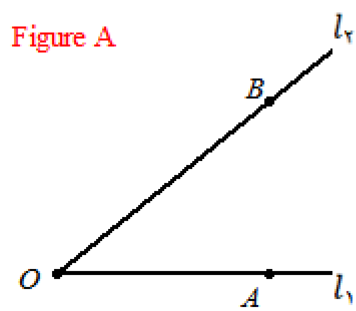
John_Sarraf@yahoo.com

بنام خدا
فصل اول
توابع مثلثاتی

مقدمه - مثلثات بیش از ۲۰۰۰ سال قبل توسط یونانینان کشف شد. آنها مثلثات را برای پیدا کردن اندازه دقیق زاویه ها و اضلاع مثلث بکار می بردند. گر چه روش اندازه گیری یونانیها در بعضی از رشته های علوم و مهندسی هنوز هم کار برد دارد ، اما کار برد های جدید مثلثات بستگی به مفهوم زاویه ندارد.

۱.۱ - زاویه ها Angles

در هندسه یک زاویه بوسیله دو نیم خط l_1 و l_2 مشخص می شود که هر دو دارای یک نقطه اولیه O هستند. اگر A روی l_1 و B روی l_2 باشد ، پس $\boldsymbol{AOB}$ را **زاویه** می نامیم.
تصویر A



همچنین یک زاویه را می توان دو پاره خط محدود در نظر گرفت با یک نقطه انتهایی مشترک.
در مثلثات ، اغلب زاویه را به طریق دیگری تعریف می کنیم. : با یک اشعه l_1 که دارای نقطه انتهایی O است شروع می کنیم ، و آنرا در روی یک صفحه حول O دوران می دهیم تا در محل l_2 قرار گیرد. تصویر B

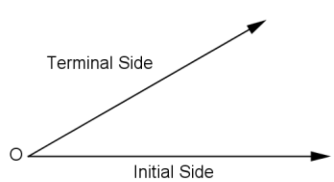
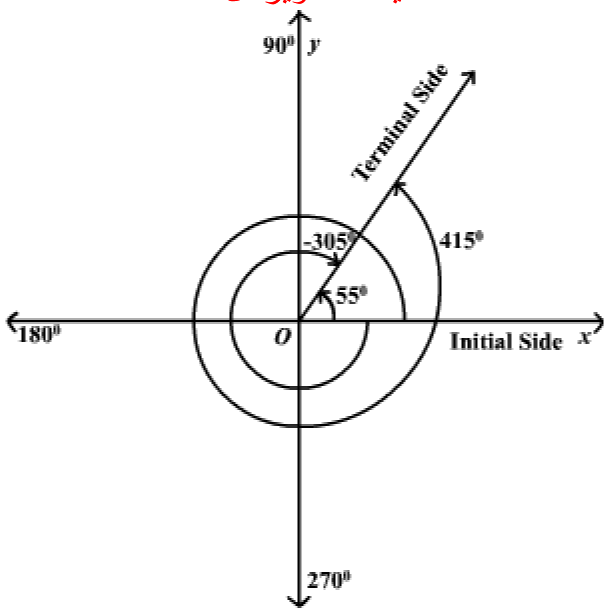


Figure B

اشعه l_1 را **ضلع ابتدایی Initial Side** و l_2 را **ضلع انتهایی Terminal Side**. و O را **راس Vertex** زاویه AOB می نامیم. تعداد داوران و جهت داوران هم محدود نیست. پس ممکن است l_1 را چند مرتبه و در هر جهت دلخواه دوران دهیم تا در محل l_2 قرار گیرد.

توجه داشته باشید که چندین زاویه مختلف ممکن است ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی همسان وهمانند داشته باشند. دو زاویه با این مشخصات را زوایای **هم انتها** **Coterminal** می نامند. تصویر C

یک تصویر C

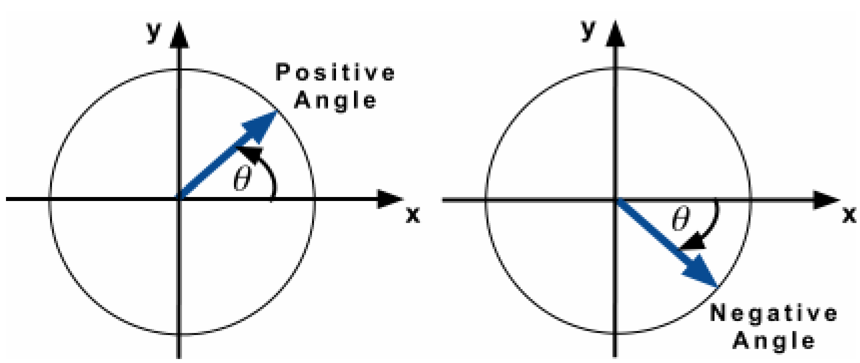


اگر سیستم محور های مختصات دکارتی بکار می بریم ، پس **محل متعارف Standard Position** زاویه به این ترتیب است. راس زاویه را روی مبدا مختصات قرار می دهیم ، و ضلع ابتدایی l_1 را درجهت مثبت محور x

اگر l_1 خلاف جهت عقربه ساعت دوران کند تا به محل l_2 برسد ، زاویه **مثبت Positive**

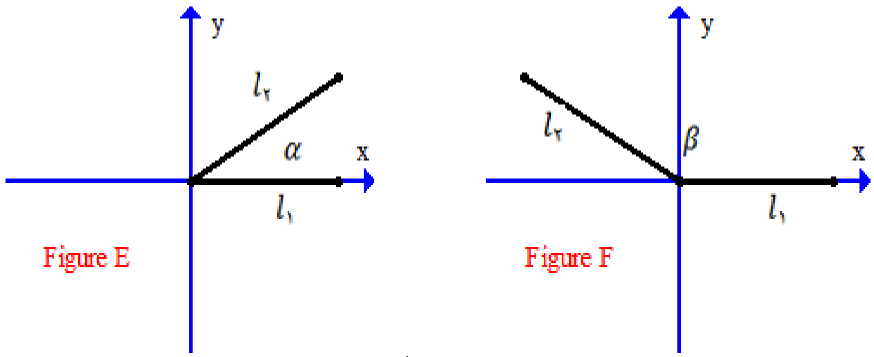
اگر l_1 در جهت عقربه ساعت دوران کند تا به محل l_2 برسد ، زاویه **منفی Negative** تصویر D

تصویر D

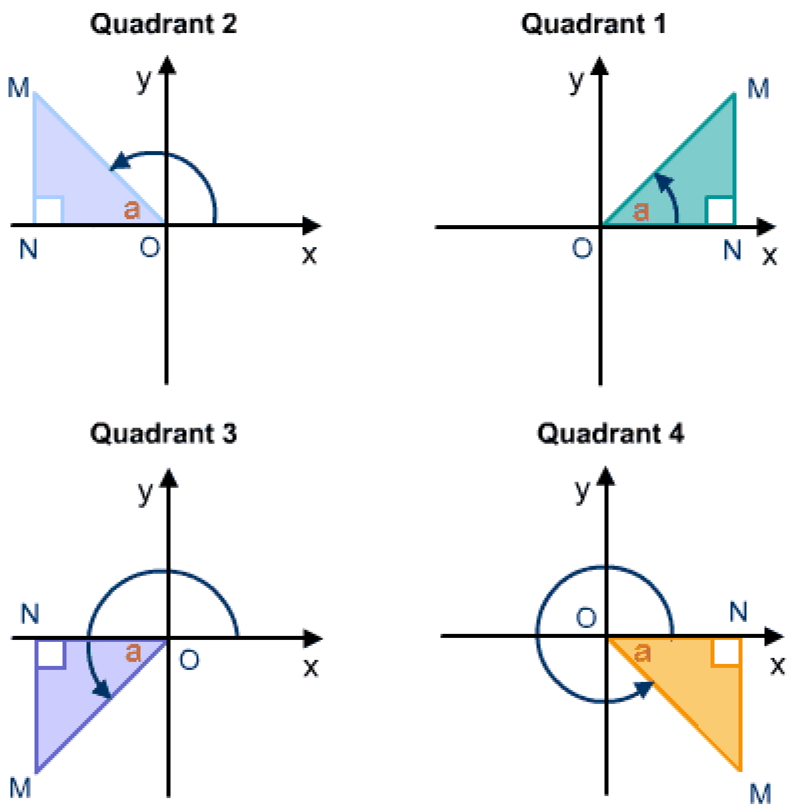


زاویه را معمولا با حروف لاتین نام گذاری می کنیم ، مانند α, β, γ،θ تصویر D

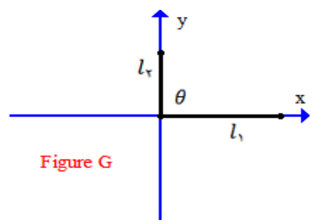
جهت دوران را هم با کمان جهت دار مشخص می کنیم.تصویر D
اگرضلع انتهایی یک زاویه , درمحل متعارف ، در یکی از ربع صفحه ها Quadrant قرار گیرد ، می گوییم آن زاویه در آن ربع صفحه قرار دارد . مثلا در تصویر E زاویه α در ربع صفحه اول است و زاویه β در تصویر F در ربع صفحه دوم است.



تصاویر زیر هم زاویه ها را در ربع صفحه های چهار گانه نشان می دهند.

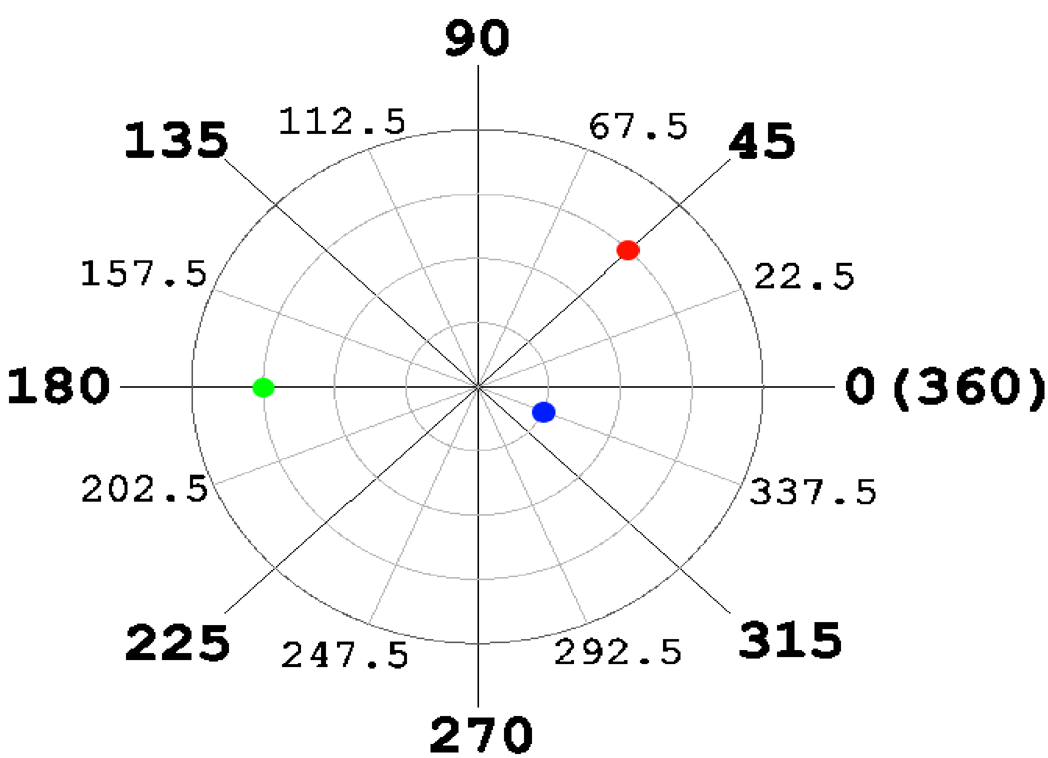


اگر ضلع انتهایی یک زاویه روی یکی از محور ها قرار گیرد ، به آن زاویه می گویند **زاویه مرزی Quadrantal Angle** تصویر G



یکی از واحد های اندازه گیری زاویه ، **درجه Degree** است.
هنگامی که یک زاویه روی محور های مختصات درمحل متعارف قرار گرفته باشد ، زاویه یک درجه اندازه زاویه ای است که از دوران $\frac{۱}{۳۶۰}$ خلاف جهت عقربه ساعت ایجاد شده باشد یا به عبارت دیگر $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دائره . نماد ∘ برای نشان دادن درجه یک زاویه بکار می رود.

تصویر زاویه با درجات مختلف



یک زاویه ۹۰° را **زاویه قائمه Right Angle** می نامند.

یک زاویه θ **تند Acute** است اگر $0^\circ < \theta < ۹۰^\circ$ باشد و **منفرجه Obtuse** است اگر $۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$ باشد.

دو زاویه حاد متمم **Complementary** هستند ، اگر مجموع آنها ۹۰° باشد.

دو زاویه مثبت **مکمل Supplementary** هستند ، اگر مجموع آنها ۱۸۰° باشد.

اگر اندازه های کمتر از درجه لازم باشد ، درجه را بر ۶۰ تقسیم می کنیم و هر قسمت را **دقیقه Minute** می نامیم. دقیقه را با نماد $'$ نشان می دهیم. پس

$$۱' = \frac{۱}{۶۰}^\circ$$

واحد کوچک تر، **ثانیه Second** است. یک ثانیه $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه است. ثانیه را با نماد $''$ نشان می دهیم. پس

$$۱'' = \frac{۱}{۶۰}' = \frac{۱}{۳۶۰۰}^\circ$$

مثلا

$$\theta = ۷۳^\circ\ ۵۶'\ ۱۸''$$

یعنی اندازه زاویه θ برابر است با ۷۳ درجه و ۵۶ دقیقه و ۱۸ ثانیه.

مثال ۱ – اگر $\theta = ۶۰^\circ$ باشد ، دو زاویه مثبت و دو زاویه منفی پیدا کنید که با θ هم ترمینال باشند .

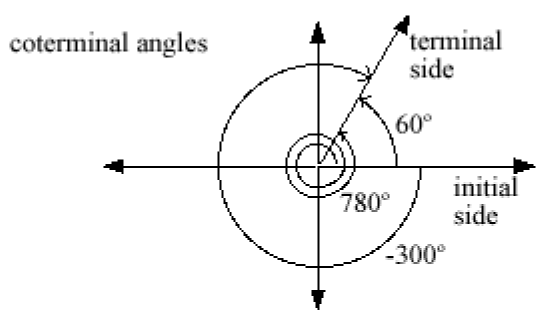
پاسخ

برای پیدا کردن زوایای مثبت هم ترمینال اعداد ۳۶۰ و ۷۲۰ و یا هر ضریب دیگر ۳۶۰ اضافه می کنیم.

$$۶۰^\circ + ۳۶۰^\circ = ۴۲۰^\circ \quad و \quad ۶۰^\circ + ۷۲۰^\circ = ۷۸۰^\circ$$

برای پید ا کردن زوایای منفی هم ترمینال ، اعداد -۳۶۰° و -۷۲۰° و یا هر مضربی از -۳۶۰° اضافه می کنیم.

$$۶۰^\circ + \left(-۳۶۰^\circ\right) = -۳۰۰^\circ \quad و \quad ۶۰^\circ + \left(-۷۲۰^\circ\right) = -۶۶۰^\circ$$



مثال ۲ – زاویه ای که متمم زاویه θ باشد ، پید ا کنید.

$$a)\ \theta = 25^{\circ}\,43'\,37'' \qquad b)\ \theta = 73.26^{\circ}$$

پاسخ

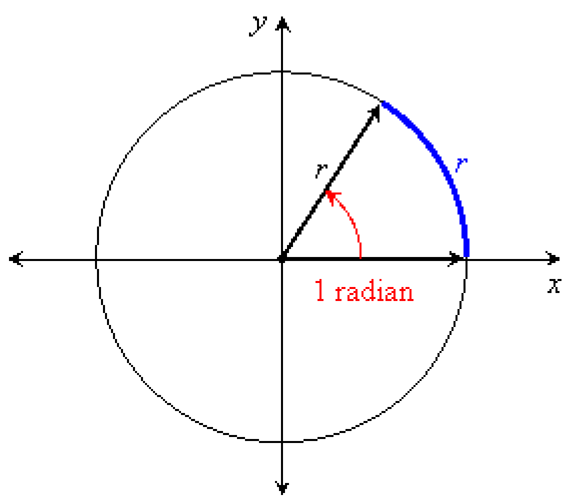
ملاحظه می کنید که قسمت b به صورت اعشاری داده شده ، نه به صورت دقیقه و ثانیه.

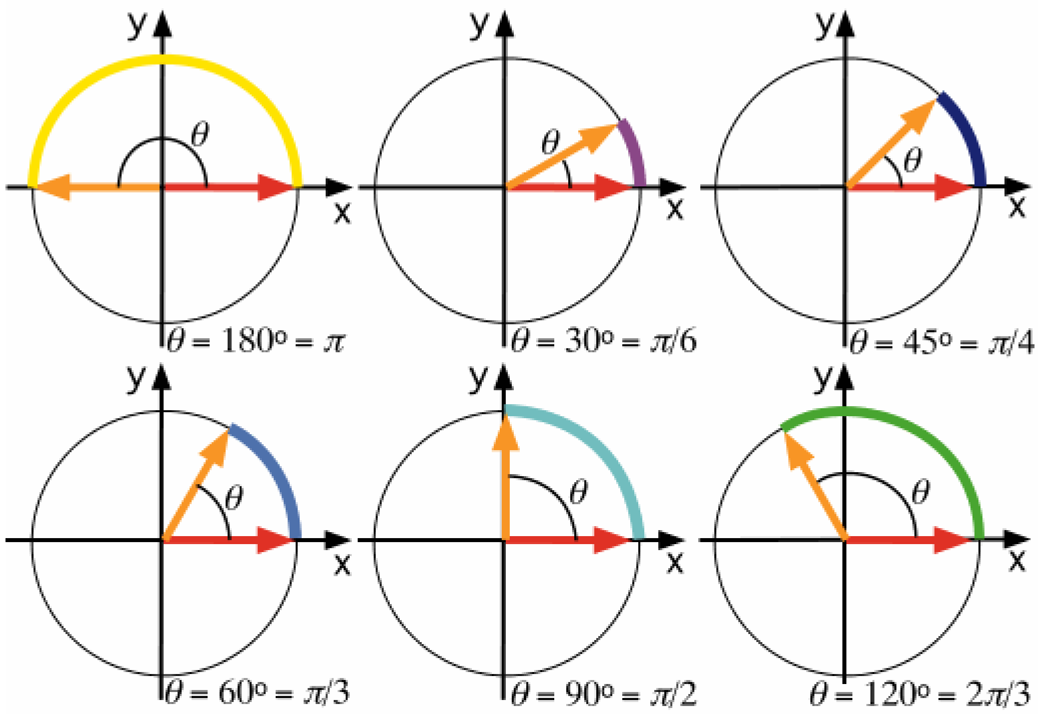
$$a)\ \begin{array}{r} 90^{\circ} = 89^{\circ}59'60'' \\ \theta = 25^{\circ}43'37'' \\ \hline 90^{\partial^{\circ}} - \theta = 64^{\circ}16'23'' \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{r} 90^{\circ} = 90.00^{\circ} \\ \theta = 73.26^{\circ} \\ \hline 90^{\circ} - \theta = 16.74^{\circ} \end{array}$$

درجه برای اندازه گیری زاویه در دریا نوردی ، هواپیمایی ، نقشه برداری و ابزار مکانیکی کار برد دارد.

در علومی که به حسابان احتیاج است ، رادیان $Radian$ برای اندازه گیری زاویه بکار برده می شود.

تعریف رادیان ا گر راس زاویه ای روی مرکز محور های مختصات قرار دهیم ، و طول کمان دائره که آن زاویه در میان می گیرد مساوی شعاع دائره باشد ، اندازه آن زاویه یک رادیان است.





می دانیم که محیط دائره $2\pi r$ است. پس یک زاویه 2π رادیان معادل 360° است .این حقیقت روابط زیر را به ما می دهد.

$$1 \text{ رادیان} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ رادیان} \qquad 180^\circ = \pi \text{ رادیان}$$

قضیه

الف - برای تبدیل رادیان به درجه ، آنرا در $\frac{180}{\pi}$ ضرب کنید.

ب –برای تبدیل درجه به رادیان آنرا در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنید.

اگر زاویه بر حسب رادیان باشد ، واحد اندازه گیری را بکار نمی نویسیم . مثلا اگر اندازه یک زاویه ۵ رادیان باشد ، می نویسیم $\theta = 5$

اگر زاویه بر حسب درجه باشد ، می نویسیم $\theta = 5^\circ$

مثال ۳ –

الف –اگر $\theta = 150^\circ$ و $\theta = 225^\circ$ باشد ، اندازه زاویه بر حسب رادیان پیدا کنید.

ب –اگر $\theta = \frac{7\pi}{4}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ باشد ، اندازه زاویه بر حسب درجه پیدا کنید.

پاسخ
الف

$$۱۵۰^\circ = ۱۵۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{۵\pi}{۶}$$

$$۲۲۵^\circ = ۲۲۵\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{۵\pi}{۴}$$

ب –

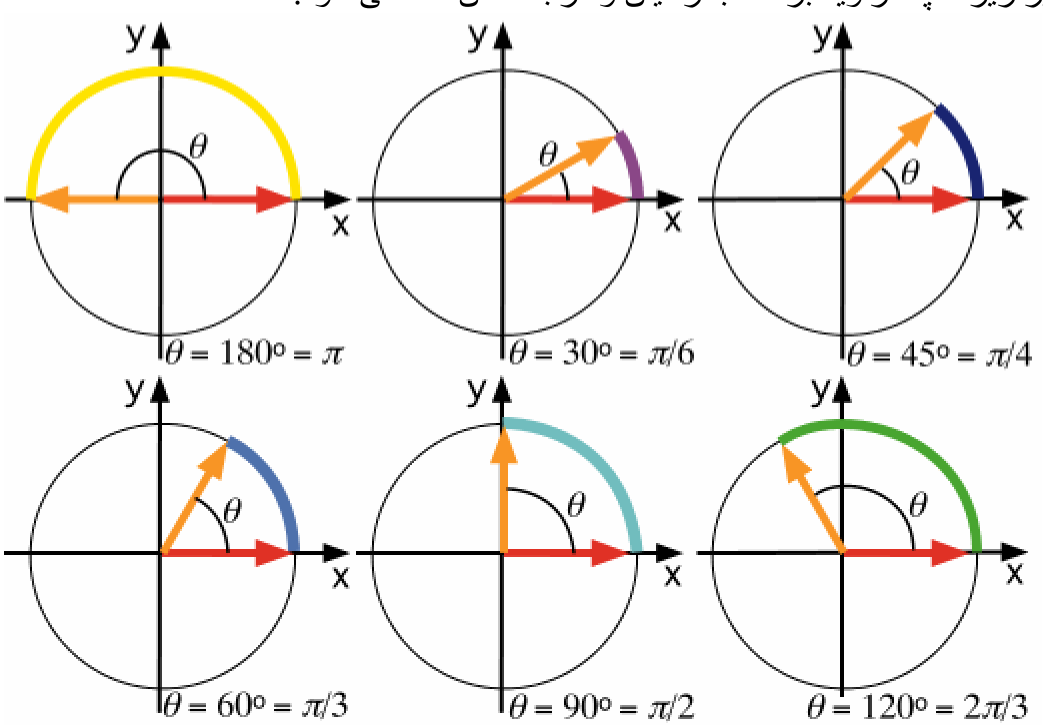
$$\frac{۷\pi}{۴} = \frac{۷\pi}{۴}\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = ۳۱۵^\circ$$

$$\frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = ۶۰^\circ$$

جدول زیر رابطه بین رادیان و درجه چند زاویه متداول ، نشان می دهد.

رادیان	0	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
درجه	0	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°

در تصویر زیر ، چند زاویه بر حسب رادیان و درجه نشان داده می شود.



مثال ۴ – اگر زاویه $\theta = ۳$ رادیان باشد ، اندازه تقریبی آن بر حسب درجه ، دقیقه و ثانیه پیدا کنید.
پاسخ

$$۳ \text{ رادیان } \approx ۳\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right)^{\circ} \approx ۱۷۱/۸۸۷۳۴^{\circ} = ۱۷۱^{\circ} + \left(۰/۸۸۷۳۴\right)^{\circ}$$

چون $۱^{\circ} = ۶۰'$ است ، پس

$$\left(۰/۸۸۷۳۴\right)^{\circ} = \left(۰/۸۸۷۳۴\right)\left(۱^{\circ}\right) = \left(۰/۸۸۷۳۴\right)\left(۶۰'\right) = ۵۳/۲۴۰۴'$$
$$= ۵۳' + ۰/۲۴۰۴'$$

چون $۱' = ۶۰''$ است ، پس

$$۰/۲۴۰۴' = \left(۰/۲۴۰۴\right)\left(۱'\right) = \left(۰/۲۴۰۴\right)\left(۶۰''\right) = ۱۴/۴۲۴'' \approx ۱۴''$$

پس

$$۳ \text{ رادیان } \approx ۱۷۱^{\circ}\, ۵۳'\, ۱۴''$$

مثال ۵- $۱۹^{\circ}\, ۴۷'\, ۲۳''$ را به صورت اعشاری بنویسید. با تقریب چهار رقم اعشاری
پاسخ
چون

$$۱' = \frac{۱}{۶۰}^{\circ} \quad \text{و} \quad ۱'' = \frac{۱}{۳۶۰۰}^{\circ}$$

است ، پس

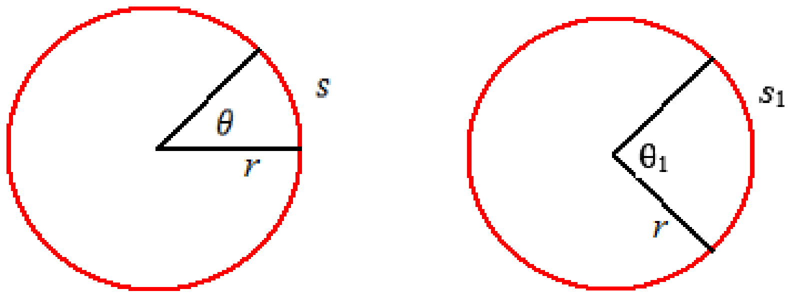
$$۱۹^{\circ}\, ۴۷'\, ۲۳'' = ۱۹^{\circ} + \left(\frac{۴۷}{۶۰}\right)^{\circ} + \left(\frac{۲۳}{۳۶۰۰}\right)^{\circ}$$
$$\approx ۱۹^{\circ} + ۰/۷۸۳۳^{\circ} + ۰/۰۰۶۴^{\circ}$$
$$= ۱۹/۷۸۹۷^{\circ}$$

زاویه مرکزی Central Angle زاویه ای است که راس آن روی مرکز دائره باشد.

قضیه - اگر θ یک زاویه مرکزی دائره ای به شعاع r باشد ، و s طول کمانی باشد که این زاویه در بر می گیرد ، پس اندازه این زاویه θ بر حسب رادیان مطابق زیر بدست می آید.

$$\theta = \frac{s}{r}$$

اثبات



در هندسه خوانده ایم اگر دو زاویه مرکزی θ و $\theta_۱$ در یک دائره به شعاع r داشته باشیم و کمان هایی که این دو زاویه در بر می گیرند به ترتیب s و $s_۱$ باشند ، تصویر بالا ، و اگر هردو زاویه بر حسب رادیان باشند ، پس داریم

$$\frac{\theta}{\theta_۱} = \frac{s}{s_۱}$$

حال اگر فرض کنیم $\theta_۱ = ۱$ رادیان باشد ، پس طبق تعریف رادیان داریم $s_۱ = r$ و لذا

$$\frac{\theta}{۱} = \frac{s}{r}$$

و در نتیجه

$$\theta = \frac{s}{r}$$

مثال ۶ - زاویه مرکزی θ یک کمان به طول ۱۰ سانتی متر از یک دائره به شعاع ۴ سانتی متر را در بر می گیرد. اندازه زاویه θ را بر حسب رادیان و درجه پیدا کنید.

پاسخ

بر اساس قضیه بالا داریم

$$\theta = \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵ \text{ رادیان}$$

$$\theta = (۲/۵)\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = \left(\frac{۴۵۰}{\pi}\right)^{\circ} \approx ۱۴۳/۲۴^{\circ}$$

در فرمول $\theta = \frac{s}{r}$ اندازه یک زاویه بر حسب رادیان ، بستگی به اندازه دائره ندارد. مثلا اگر $r = ۴$ سانتی متر و $s = ۸$ سانتی متر باشد

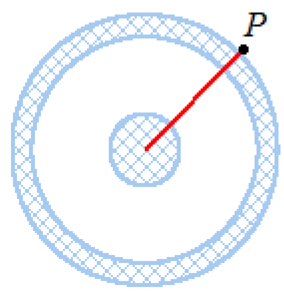
$$\theta = \frac{\text{سانتی متر } ۸}{\text{سانتی متر } ۴} = ۲$$

اگر $r = ۵$ کیلو متر و $s = ۱۰$ کیلو متر باشد

$$\theta = \frac{\text{کیلو متر } ۱۰}{\text{کیلو متر } ۵} = ۲$$

محاسبات بالا نشان می دهد که رادیان **بعد Dimension** ندارد. پس می توان آنرا یک عدد حقیقی تلقی کرد.

مثال ۷



سرعت زاویه ای Angular Speed یک چرخ که با سرعت یک نواخت می چرخد ، عبارت است از زاویه ای که در یک واحد زمان بوسیله یک پاره خط از مرکز چرخ تا یک نقطه P روی محیط ایجاد می شود. یا به عبارت ساده ترسرعت زاویه ای عبارت است از زاویه ای که یک چرخ دوار در واحد زمان طی می کند. تصویر بالا.

فرض کنید یک ماشین که دارای یک چرخ به قطر ۳ فوت است با سرعت ۱۶۰۰ دور در دقیقه می چرخد.

الف - سرعت زاویه ای چرخ را پیدا کنید.

ب – سرعت حرکت نقطه P روی محیط چرخ را پیدا کنید.

پاسخ

الف - فرض می کنیم O مرکز چرخ و P یک نقطه روی محیط چرخ باشد. چون تعداد دوران ۱۶۰۰ در دقیقه است و چون هر دوران یک زاویه به اندازه ۲π رادیان ایجاد می کند، پس زاویه ای که بوسیله پاره خط OP در یک دقیقه ایجاد می شود $(۲\theta)(۱۶۰۰)$ است. یعنی

$$\text{سرعت زاویه ای} = (۱۶۰۰)(۲\pi) = ۳۲۰۰\pi \text{ رادیان در دقیقه}$$

ملاحظه می کنید که قطر چرخ برای پیدا کردن سرعت زاویه ای بی اثر است.

ب – برای پیدا کردن سرعت نقطه P باید حساب کنیم که این نقطه در یک دقیقه چه مسافتی را طی می کند. این سرعت را **سرعت خطی Linear Speed** می نامند.این مسافت از فرمول $s = r\theta$ بدست می آید.

$$s = r\theta = \frac{۳}{۲}\left(۳۲۰۰\ \pi\right) = ۴۸۰۰\ \pi \text{ فوت در دقیقه}$$

تمرینات بخش ۱.۱

در تمرینات زیر زاویه های داده شده را در محل متعارف روی محور های مختصات قرار دهید ، دو زاویه مثبت و دو زاویه منفی هم انتها را پیدا کنید.

۱) ۱۲۰° ۲) ۱۳۵° ۳) -۳۰° ۴) ۶۲۰° ۵) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۶) $-\frac{\pi}{۴}$

در تمرینات زیر درجه را به رادیان تبدیل کنید.

۷) ۱۵۰° ۸) -۶۰° ۹) ۲۲۵° ۱۰) ۴۵۰° ۱۱) ۷۲° ۱۲) ۱۰۰°

در تمرینات زیر رادیان را به درجه تبدیل کنید.

۱۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۱۴) $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ۱۵) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۱۶) $-\frac{۷\pi}{۲}$ ۱۷) ۷π ۱۸) $\frac{\pi}{۹}$

در تمرینات زیر اندازه تقریبی زاویه θ را بر حسب درجه ، دقیقه و ثانیه پیدا کنید .

۱۹) $\theta = ۲$ ۲۰) $\theta = ۵$

در تمرینات زیر درجه ها را به اعشاری بنویسید. تا چهار رقم اعشاری .

۲۱) $۳۷^\circ\ ۴۱'$ ۲۲) $۱۱۵^\circ\ ۲۶'\ ۲۷''$

در تمرینات زیر اندازه زاویه را به درجه ، دقیقه و ثانیه بنویسید .

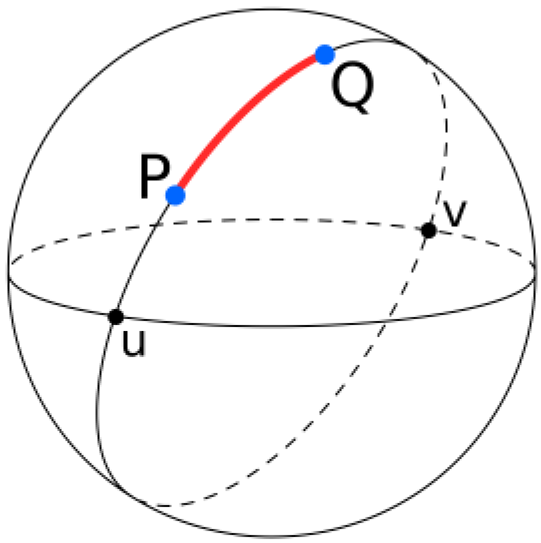
۲۳) $۶۳/۱۶۹^\circ$ ۲۴) $۳۱۰/۶۲۱۵^\circ$

۲۵ – زاویه مرکزی θ یک کمان ۷ سانتی متری روی یک دائره به شعاع ۴ سانتی متری را در بر می گیرد. اندازه تقریبی زاویه را به رادیان و درجه پیدا کنید.

۲۶ – مطلوب است طول تقریبی کمانی از دائره ای به قطر ۱۶ متر که توسط یک زاویه مرکزی ۵۰° در بر گرفته شده است.

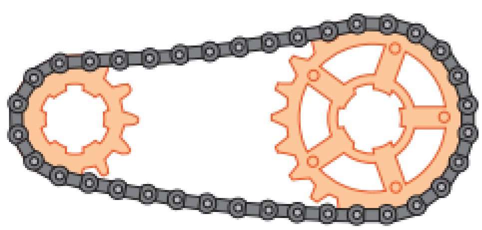
۲۷ – اگر یک زاویه مرکزی ۲۰ درجه ای θ توسط یک کمان ۳ کیلو متری در بر گرفته شده باشد، شعاع آن دائره را پیدا کنید.

۲۸ – فاصله بین دو نقطه روی کره زمین از طریق یک دائره فرضی به مرکز C که روی مرکز کره زمین قراردارد و شعاع آن مساوی است با شعاع کره زمین محاسبه می شود. اگر قطر کره زمین تقریبا ۸۰۰۰ مایل باشد ، فاصله بین نقطه P و Q را پیدا کنید. ، اگر $PCQ = ۶۰°$ باشد.



۲۹ – یک ساعت عتیقه با پاندولی به طول ۴ فوت در طول یک کمان ۶ اینچی نوسان می کند. مطلوب است اندازه تقریبی زاویه ای که این پاندول در هر نوسان طی می کند. اندازه زاویه بر حسب درجه پیدا کنید.

۳۰ – در تصویر زیر زنجیر و چرخ دنده های یک دو چرخه را ملاحظه می کنید. اگر چرخ دنده B به شعاع $r_۱$ به اندازه $\theta_۱$ رادیان داوران کند ، مطلوب است زاویه چرخش چرخ دنده A با شعاع $r_۲$

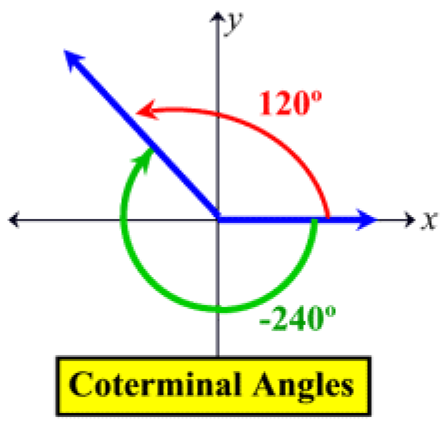


پاسخ تمرینات ۱.۱
در تمرینات زیر زاویه های داده شده را در محل متعارف روی محور های مختصات قرار دهید ، دو زاویه مثبت و دو زاویه منفی هم انتها را پیدا کنید.

۱) ۱۲۰°

پاسخ

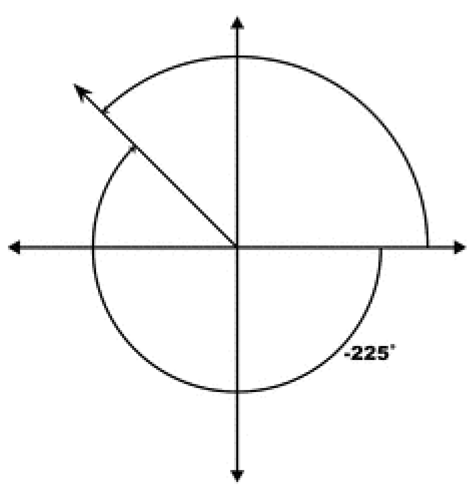
۱۲۰° + ۳۶۰° = ۴۸۰°
۱۲۰° + ۷۲۰° = ۸۴۰°
۱۲۰° − ۳۶۰° = −۲۴۰°
۱۲۰° − ۷۲۰° = −۶۰۰°



۲) ۱۳۵°

پاسخ

۴۹۵°, ۸۵۵°, −۲۲۵°, −۵۸۵°



$۳)\ -۳۰^\circ$

پاسخ

$$۳۳۰^\circ, ۶۹۰^\circ, -۳۹۰^\circ, -۷۵۰^\circ$$

$۴)\ ۶۲۰^\circ$

پاسخ

$$۲۶۰^\circ, ۹۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ, ۴۶۰^\circ$$

$۵)\ \frac{۵\pi}{۶}$

پاسخ

$$\frac{۱۷\pi}{۶}, \frac{۲۹\pi}{۶}, -\frac{۷\pi}{۶}, -\frac{۱۹\pi}{۶}$$

$۶)\ -\frac{\pi}{۴}$

پاسخ

$$\frac{۷\pi}{۴}, \frac{۱۵\pi}{۴}, -\frac{۹\pi}{۴}, -\frac{۱۷\pi}{۴}$$

در تمرینات زیر درجه را به رادیان تبدیل کنید.

$۷)\ ۱۵۰^\circ$

پاسخ

$$۱۵۰^\circ = ۱۵۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{۵\pi}{۶}$$

$۸)\ -۶۰^\circ$

پاسخ

$$-۶۰^\circ = -۶۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = -\frac{\pi}{۳}$$

$۹)\ ۲۲۵^\circ$

پاسخ

$$۲۲۵^\circ = ۲۲۵\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{۵\pi}{۴}$$

$۱۰)\ ۴۵۰^\circ$

پاسخ

$$۴۵۰^\circ = ۴۵۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{۵\pi}{۲}$$

۱۱) ۷۲°

پاسخ

$$۷۲^\circ = ۷۲\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{۲\pi}{۵}$$

۱۲) ۱۰۰°

پاسخ

$$۱۰۰^\circ = ۱۰۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{۵\pi}{۹}$$

در تمرینات زیر رادیان را به درجه تبدیل کنید.

۱۳) $\frac{۲\pi}{۳}$　　۱۴) $\frac{۱۱\pi}{۶}$　　۱۵) $\frac{۳\pi}{۴}$　　۱۶) $-\frac{۷\pi}{۲}$　　۱۷) ۷π　　۱۸) $\frac{\pi}{۹}$

پاسخ

$$۱۳)\quad \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = ۱۲۰^\circ$$

$$۱۴)\quad \frac{۱۱\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶}\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = ۳۳۰^\circ$$

$$۱۵)\quad \frac{۳\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۲}\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = ۱۳۵^\circ$$

$$۱۶)\quad -\frac{۷\pi}{۲} = -\frac{۷\pi}{۲}\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = -۶۳۰^\circ$$

$$۱۷)\quad ۷\pi = ۷\pi\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = ۱۲۶۰^\circ$$

$$۱۸)\quad \frac{\pi}{۹} = \frac{\pi}{۹}\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) = ۲۰^\circ$$

در تمرینات زیر اندازه تقریبی زاویه θ را بر حسب درجه ، دقیقه و ثانیه پیدا کنید .

۱۹) $\theta = ۲$　　۲۰) $\theta = ۵$

پاسخ

$$۱۹)\ ۲\ \text{رادیان} \approx ۲\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right)^\circ = ۱۱۴/۵۹۱۵۵۹^\circ = ۱۱۴^\circ + ۰/۵۹۱۵۵۹^\circ$$

$$(۰/۵۹۱۵۵۹)^\circ = (۰/۵۹۱۵۵۹)(۱^\circ) = (۰/۵۹۱۵۵۹)(۶۰') = ۳۵/۴۹۳۴۵'$$

$$= ۳۵' + ۰/۴۹۳۵۴'$$

$$۰/۴۹۳۵۴' = (۰/۴۹۳۵۴)(۱') = (۰/۴۹۳۵۴)(۶۰'') = ۲۹/۶۱۲۴'' \approx ۳۰''$$

در نهایت

$$\text{رادیان } ۲ \approx ۱۱۴^\circ\, ۳۵'\, ۳۰''$$

به همین طریق برای شماره ۲۰ عمل می کنیم.

$$۲۰)\ \text{رادیان } ۵ \approx ۲۸۶^\circ\, ۲۸'\, ۴۴''$$

در تمرینات زیر درجه ها را به اعشاری بنویسید. تا چهار رقم اعشاری.

$۲۱)\ ۳۷^\circ\, ۴۱'$　　　$۲۲)\ ۱۱۵^\circ\, ۲۶'\, ۲۷''$

پاسخ

$$۲۱)\ ۳۷^\circ\, ۴۲' = ۳۷^\circ + \left(\frac{۴۱}{۶۰}\right)^\circ \approx ۳۷/۶۸۳۳^\circ$$

$$۲۲)\ ۱۱۵^\circ\, ۲۶'\, ۲۷'' = ۱۱۵^\circ + \left(\frac{۲۶}{۶۰}\right)^\circ + \left(\frac{۲۷}{۳۶۰۰}\right)^\circ \approx ۱۱۵/۴۴۰۸^\circ$$

در تمرینات زیر اندازه زاویه را به درجه ، دقیقه و ثانیه بنویسید .

$۲۳)\ ۶۳/۱۶۹^\circ$　　　$۲۴)\ ۳۱۰/۶۲۱۵^\circ$

پاسخ

$$۲۳)\ ۶۳/۱۶۹^\circ = ۶۳^\circ + ۰/۱۶۹^\circ$$

$$۰/۱۶۹^\circ(۶۰)' = ۱۰' + ۰/۱۴'$$

$$۰/۱۴'(۶۰)'' = ۸/۴''$$

پس

$$۶۳/۱۶۹^\circ = ۶۳^\circ\, ۱۰'\, ۸''$$

به همین طریق

$$۲۴)\ ۳۱۰/۶۲۱۵^\circ = ۳۱۰^\circ\, ۳۷'\, ۱۷''$$

۲۵ – زاویه مرکزی θ یک کمان ۷ سانتی متری روی یک دائره به شعاع ۴ سانتی متری را در بر می گیرد. اندازه تقریبی زاویه را به رادیان و درجه پیدا کنید.

پاسخ

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{۷}{۴} = ۱/۷۵ \text{ رادیان}$$

۲۶ – مطلوب است طول تقریبی کمانی از دائره ای به قطر ۱۶ متر که توسط یک زاویه مرکزی ۵۰° در بر گرفته شده است.

پاسخ

$$\text{شعاع } ۸ = ۲ \div ۱۶$$

$$۵۰^\circ = ۵۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{۵\pi}{۱۸} \text{ رادیان}$$

$$\theta = \frac{s}{r} \Rightarrow s = r\theta = ۸\left(\frac{۵\pi}{۱۸}\right) = ۴\frac{۵\pi}{۹} = \frac{۲۰\pi}{۹} = ۶/۹۸ \text{ متر}$$

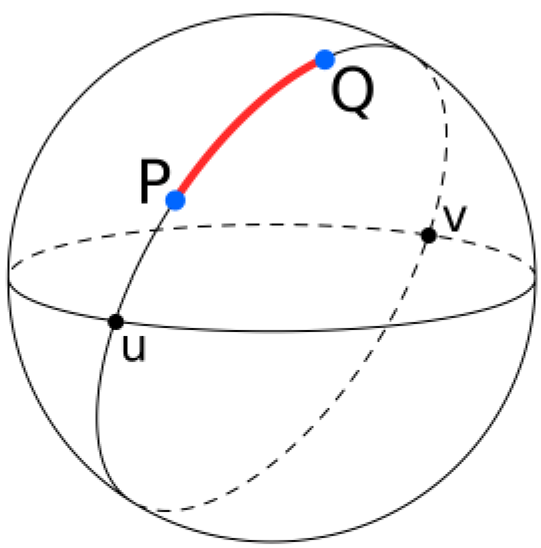
۲۷ – اگر یک زاویه مرکزی ۲۰ درجه ای θ توسط یک کمان ۳ کیلو متری در بر گرفته شده باشد، شعاع آن دائره را پیدا کنید.

پاسخ

$$۲۰^\circ = ۲۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{\pi}{۹} \text{ رادیان}$$

$$r = \frac{s}{\theta} = \frac{۳}{\frac{\pi}{۹}} = \frac{۲۷}{\pi} = ۸/۵۹ \text{ کیلو متر}$$

۲۸ – فاصله بین دو نقطه روی کره زمین از طریق یک دائره فرضی به مرکز C که روی مرکز کره زمین قراردارد و شعاع آن مساوی است با شعاع کره زمین محاسبه می شود. اگر قطر کره زمین تقریبا ۸۰۰۰ مایل باشد ، فاصله بین نقطه P و Q را پیدا کنید. ، اگر $PCQ = ۶۰^\circ$ باشد.



پاسخ

$$s = \theta r = \left(\frac{\pi}{۳}\right)(۴۰۰۰) \approx ۴۱۸۹ \text{ مایل}$$

۲۹ – یک ساعت عتیقه با پاندولی به طول ۴ فوت در طول یک کمان ۶ اینچی نوسان می کند. مطلوب است اندازه تقریبی زاویه ای که این پاندول در هر نوسان طی می کند. اندازه زاویه بر حسب درجه پیدا کنید.

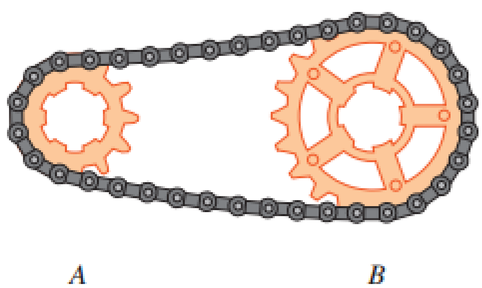
پاسخ

$$۴ * ۱۲ = ۴۸ \text{ اینچ}$$

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{۶}{۴۸} = \frac{۱}{۸} \text{ رادیان}$$

$$\frac{۱}{۸}\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right) \approx ۷/۱۶۲^{\circ}$$

۳۰ – در تصویر زیر زنجیر و چرخ دنده های یک دو چرخه را ملاحظه می کنید. اگر چرخ دنده B به شعاع $r_{۱}$ به اندازه $\theta_{۱}$ رادیان داوران کند ، مطلوب است زاویه چرخش چرخ دنده A با شعاع $r_{۲}$



پاسخ

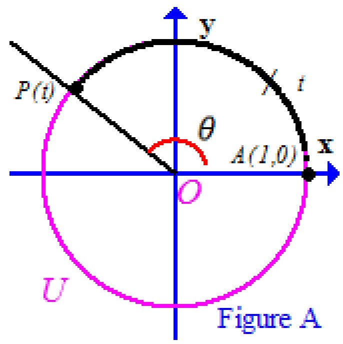
برای پیدا کردن طول کمان چرخ دنده B داریم $s = r_{۱}\theta_{۱}$ و چون طول کمان های هر دو چرخ دنده که در اثر کشش زنجیر ایجاد می شود ، مساوی است پس داریم $s = r_{۲}\theta_{۲}$
لذا

$$r_{۱}\theta_{۱} = r_{۲}\theta_{۲}$$

$$\theta_{۲} = \frac{r_{۱}}{r_{۲}}\theta_{۱}$$

۱.۲ - توابع مثلثاتی The Trigonometric Functions

دو روش برای تعریف توابع مثلثاتی وجود دارد. یکی از طریق یک دائره با شعاع واحد و دیگری از طریق مثلث های قائم الزویه .در این بخش در مورد توابع مثلثاتی از طریق دائره واحد بحث می کنیم و در بخش ۱.۴ در مورد مثلثات مثلث قائم الزویه صحبت می کنیم.



فرض می کنیم U یک دائره واحد باشد ، یعنی یک دائره با شعاع ۱ که مرکز آن روی مبدا سیستم مختصات است. تصویر A

پس U نمودار معادله $x^۲ + y^۲ = ۱$ است. اگر t یک عدد حقیقی باشد ، فرض می کنیم θ یک زاویه در مکان متعارف باشد بطوری که اندازه آن t رادیان است. لذا داریم $0 < \theta < ۲\pi$ و $P(t)$ محل تلاقی ضلع انتهایی θ با دایره U است. با استفاده از فرمول $s = r\theta$ از بخش ۱.۱

با $r = ۱$ ملاحظه می کنید که کمان AP که زاویه θ را در بر می گیرد ، دارای طول $s = t$ است. لذا عدد حقیقی t یا می تواند اندازه زاویه θ بر حسب رادیان باشد و یا طول کمان AP روی دائره U تلقی شود.

برای هر $t > 0$ می توان تصور کرد θ زاویه ای است که از دوران قسمت مثبت محور x حول مرکز O خلاف جهت عقربه ساعت بوجود آمده است. در این صورت ، t مسافتی است که $P(t)$ روی دائره U پیموده تا به مکان نهایی خود برسد. اگر $t < 0$ باشد ، پس $|t|$ مسافتی است که $P(t)$ پیموده است.

از بحث بالا نتیجه می گیریم که چگونه می توان برای هر عدد حقیقی t یک نقطه منحصر به فرد $P(t)$ روی U در نظر گرفت. $P(t)$ را **نقطه مربوط به t روی دائره واحد U** می نامیم.
مختصات (x,y) نقطه $P(t)$ را می توان برای تعریف شش **تابع مثلثاتی** بکار برد.
این توابع عبارتند از**سینوس** ، **کسینوس** ، **تانژانت** ، **کتانژنت** ، **سکانت** ، **کسکانت** و نماد های آنها به ترتیب **sin , cos , tan , cot, sec, csc** هستند .اگر t یک عدد حقیقی باشد ، پس سینوس t را با نماد $\sin(t)$ و یا $\sin t$ نشان می دهیم. تابع سینوس اندازه یک زاویه را به عنوان متغیر می پذیرد و اندازه سینوس آن زاویه را پس می دهد که این خود یک عدد حقیقی است. پنج تابع دیگر هم به همین طریق.

هنگامی که میخواهیم مختصات نقطه $P(t)$ را نشان دهیم ، نماد $P(x,y)$ بکار می بریم.

فراموش نشود که در صفحه قبل گفتیم t اندازه زاویه θ بر حسب رادیان است و یا طول کمانی که زاویه θ در بر می‌گیرد.
همچنین گفتیم $P(t)$ نقطه تلاقی ضلع انتهایی زاویه θ با دائره واحد است.

توابع مثلثاتی بر حسب یک دایره واحد

Trigonometric Functions in Terms of a Unit Circle

اگر t یک عدد حقیقی باشد و $P(x,y)$ نقطه روی دایره U در رابطه با t باشد ، پس

$$\sin t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y}, (y \neq 0)$$

$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x}, (x \neq 0)$$

$$\tan t = \frac{y}{x}, (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y}, (y \neq 0)$$

چون فرمول های بالا مقادیری بر حسب مختصات یک نقطه روی دائره واحد نشان می دهند ، توابع مثلثاتی را گاهی به عنوان **توابع دورانی Circular Functions** نامیده می شوند.

دامنه سینوس و کسینوس کلیه اعداد حقیقی است. زیر $\sin t = y$ و $\cos t = x$ برای کلیه اعداد حقیقی وجود دارند.

در تعریف توابع تانژانت و سکانت ، x در مخرج کسر است ، پس $x \neq 0$ باید باشد. یعنی مقادیری از t که به ما نقاط $(0,1)$ و $(0,-1)$ روی محور y می دهد را باید حذف کنیم. پس دامنه تانژانت و سکانت کلیه اعداد حقیقی است بجز $\frac{\pi}{2} + n\pi$ یا به عبارت دیگر باید

$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$$

را در نظر نگیریم.

برای کتانژانت و کسکانت چون y در مخرج کسر ظاهر می شود ، باید نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ را در نظر نگیریم. پس دامنه کتانژانت و کسکانت شامل کلیه اعداد حقیقی هستند بجز

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$$

و یا بطور کلی $n\pi$ را باید از دامنه حذف کنیم.

توجه دارید که $P(x,y)$ یک نقطه روی دیره واحد U است. و لذا $|x| \le ۱$ و $|y| \le ۱$ است. این یعنی

$$|\sin t| \le ۱\,, \quad |\cos t| \le ۱, \quad |\csc t| \ge ۱\,, \quad |\sec t| \ge ۱$$

است ، برای هر مقدار از t در دامنه تابع مربوطه.

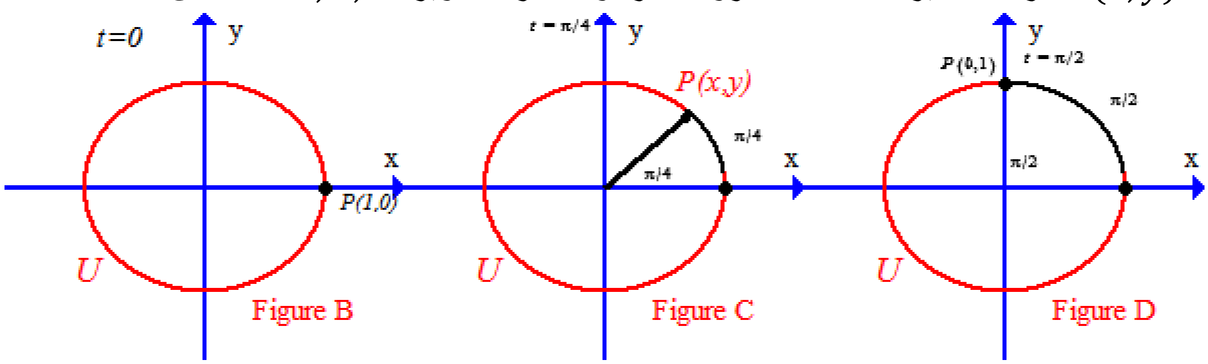
مثال ۱ – مقادیر توابع مثلثاتی را در

$$a)\ t = 0 \qquad b)\ t = \frac{\pi}{۴} \qquad c)\ t = \frac{\pi}{۲}$$

را پدا کنید.

پاسخ

نقاط $P(x,y)$ برای مقادیر داده شده t روی دائره واحد در تصاویر B, C, D مشخص شده اند.



(a)

اگر $t = 0$ باشد ، نقطه P دارای مختصات $(۱, 0)$ است. پس $x = ۱$ است و $y = 0$ است. لذا

$$\sin 0 = 0\,, \qquad \cos 0 = ۱\,, \qquad \tan 0 = \frac{0}{۱} = 0\,, \quad \sec 0 = \frac{۱}{۱}$$

ملاحظه می کنید که $\cot 0$ و $\csc 0$ تعریف نشدنی هستند.چون $y = 0$ در مخرج کسر ظاهر می شود.

(b)

اگر $t = \frac{\pi}{۴}$ باشد ، پس زاویه $\frac{\pi}{۴}$ رادیان و یا ۴۵ درجه که در تصویر C نشان داده شده است ربع اول را نصف می کند . لذا نقطه P مختصات به شکل (x,x) دارد. چون $P(x,x)$ هم روی دائره $x^۲ + y^۲ = ۱$ قرار دارد ، پس داریم

$$x^۲ + x^۲ = ۱ \quad \text{یا} \quad ۲x^۲ = ۱$$

معادله بدست آمده را برای x حل می کنیم

$$x = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس P نقطه $\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ است. پس $x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ لذا داریم

$$\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \csc\frac{\pi}{۴} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \sec\frac{\pi}{۴} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$\tan\frac{\pi}{۴} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱ \qquad \cot\frac{\pi}{۴} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱$$

(c)

اگر $t = \frac{\pi}{۲}$ باشد ،، پس P مختصات $(0, ۱)$ دارد. همان طور که در تصویر D ملاحظه می کنید $x = 0$ و $y = ۱$ است. پس داریم

$$\sin\frac{\pi}{۲} = ۱ \qquad \cos\frac{\pi}{۲} = 0 \quad \csc\frac{\pi}{۲} = \frac{۱}{۱} = ۱ \qquad \cot\frac{\pi}{۲} = \frac{0}{۱} = 0$$

توابع تانژانت و سکانت تعریف نشدنی هستند.

جدول زیر خلاصه نتایج بدست آمده از مثال ۱ است. خط ____ یعنی تابع برای آن مقدار t تعریف نشده است.

t	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$
0	0	۱	0	____	۱	____
$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۱	$\sqrt{۲}$	$\sqrt{۲}$
$\frac{\pi}{۲}$	۱	0	____	0	____	۱

مثال ۲ – مقادیر توابع مثلثاتی را در

$$a)\ \ t = \frac{۳\pi}{۴} \qquad b)\ \ t = \pi$$

را پیدا کنید.

پاسخ

$$(a)$$

مختصات نقطه P در رابطه با $t = \frac{۳\pi}{۴}$ را می توان از طریق قرینه نقطه $\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ که در مثال ۱ برای $t = \frac{\pi}{۴}$ پیدا کردیم ، بدست آورد. که در نتیجه $P\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ را به ما می دهد. تصویر E

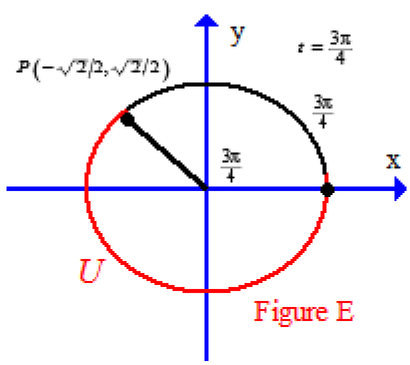


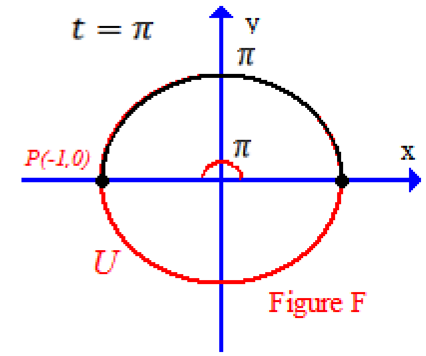
Figure E

پس $x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ مقادیر توابع مثلثاتی مربوطه در جدول زیر ملاحظه می کنید.

t	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$
$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	-۱	-۱	$-\sqrt{۲}$	$\sqrt{۲}$

(b)

اگر $t = \pi$ باشد نقطه $P(-۱,0)$ را بدست می آوریم. تصویر F



پس $x = -۱$ و $y = 0$ است. مقادیر توابع مثلثاتی مربوطه در جدول زیر ملاحظه می کنید.

t	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$	$\cot t$	$\sec t$	$\csc t$
π	0	-۱	0	___	-۱	___

مشخص کردن علامت های توابع مثلثاتی مشکل نیست. مثلا اگر $P(t) = P(x,y)$ در ربع دوم باشد در این صورت x منفی است و y مثبت است. پس $\sin t = y$ و $\csc t = \frac{۱}{y}$ مثبت هستند و بقیه منفی. جدول زیر علامت توابع مثلثاتی در چهار ربع نشان می دهد.

Signs of the Trigonometric Functions علامت توابع مثلثاتی

Quadrant شامل $P(۱)$	تابع مثبت	تابع منفی
I	تمام	هیچ کدام
II	$\sin t, \csc t$	$\cos t, \sec t, \tan t, \cot t$
III	$\tan t, \cot t$	$\sin t, \csc t, \cos t, \sec t$
IV	$\cos t, \sec t$	$\sin t, \csc t, \tan t, \cot t$

مثال ۳ – اگر $\sin t < 0$ و $\cos t > 0$ باشد، صفحه ای که $P(t)$ در آن واقع است پیدا کنید.

پاسخ

با توجه به جدول بالا مشاهده می کنیم که $\sin t < 0$ است، اگر $P(t)$ در $QIII$ یا QIV باشد.

و $\cos t > 0$ است اگر $P(t)$ در QI و یا در QIV باشد. پس برای اینکه هر دو شرط بر قرار باشد ، $P(t)$ باید در QIV باشد.

چند فرمولی که در چهار گوشه زیر می آوریم ، بی تردید مهم ترین اتحاد های مثلثات است. به همین خاطر به آن می‌گویند **اتحاد های اساسی Fundamental Identities**

همانی های مثلثاتی را هم اتحاد های مثلثاتی می نامند.

سه تای از این اتحاد ها شامل توان دوم هستند ، مانند $(\sin t)^۲$ و $(\cos t)^۲$

بطور کلی اگر n یک عدد صحیح بجز -۱ باشد ، توان هایی مانند $(\cos t)^n$ به شکل $\cos^n t$ نوشته می شوند. نماد های $\sin^{-1} t$ و $\cos^{-1} t$ برای معکوس توابع مثلثاتی در نظر گرفته می شوند که در فصل های بعدی در مورد آنها صحبت می کنیم. بنا بر این

$$\cos^۲ t = (\cos t)^۲ = (\cos t)(\cos t)$$

$$\tan^۳ t = (\tan t)^۳ = (\tan t)(\tan t)(\tan t)$$

اتحاد های اساسی The Fundamental Identities

$$\sin^۲ t + \cos^۲ t = ۱ \qquad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{۱}{\sin t}$$

$$۱ + \tan^۲ t = \sec^۲ t \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} \qquad \sec t = \frac{۱}{\cos t}$$

$$۱ + \cot^۲ t = \csc^۲ t \qquad \cot t = \frac{۱}{\tan t}$$

اثبات

اثبات از تعاریف توابع مثلثاتی بدست می آید. پس

$$\csc t = \frac{۱}{y} = \frac{۱}{\sin t}\ , \quad \sec t = \frac{۱}{x} = \frac{۱}{\cos t}\ , \quad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{۱}{\frac{y}{x}} = \frac{۱}{\tan t}\ ،$$

$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}\ , \quad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{\cos t}{\sin t}$$

در صورتی که هیچ یک از مخرج های کسر ها صفر نباشند.

اگر (x, y) یک نقطه روی دایره واحد U باشد ، پس

$$x^۲ + y^۲ = ۱$$

چون $y = \sin t$ و $x = \cos t$ است ، پس

$$(\sin t)^{۲} + (\cos t)^{۱} = ۱$$
$$\sin^{۲} t + \cos^{۲} t = ۱$$

اگر $\cos t \neq 0$ باشد ، پس اگر هر دو طرف آخرین معادله بر $\cos^{۲} t$ تقسیم کنیم ، داریم

$$\frac{\sin^{۲} t}{\cos^{۲} t} + ۱ = \frac{۱}{\cos^{۲} t}$$
$$\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^{۲} + ۱ = \left(\frac{۱}{\cos t}\right)^{۲}$$

چون

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{و} \quad \sec t = \frac{۱}{\cos t}$$

است ، پس

$$\tan^{۲} t + ۱ = \sec^{۲} t$$

اثبات آخرین فرمول را در تمرینات همین بخش خواهیم دید.

فرمول $\sin^{۲} t + \cos^{۲} t = ۱$ را می توان برای نوشتن $\sin t$ بر حسب $\cos t$ و بر عکس بکار برد.

$$\sin^{۲} t = ۱ - \cos^{۲} t$$
$$\sin t = \pm\sqrt{۱ - \cos^{۲} t}$$

اگر $\sin t > 0$ باشد ، نماد $+$ را بکار می بریم و اگر $\sin t < 0$ باشد ، نماد $-$ بکار می بریم.
به همین طریق داریم

$$\cos t = \pm\sqrt{۱ - \sin^{۲} t}$$

اگر $\cos t > 0$ باشد ، نماد $+$ و اگر $\cos t < 0$ باشد ، نماد $-$ بکار می بریم.

مثال ۴ – اگر $\sin t = \frac{۳}{۵}$ و $\tan t < 0$ باشد ، با استفاده از اتحاد های اساسی ، مقادیر بقیه توابع مثلثاتی را پیدا کنید.

پاسخ

چون $\sin t = \frac{۳}{۵} > 0$ و $\tan t < 0$ پس نقطه P در رابطه با t در QII قراردارد چون $\cos t$ منفی است پس

$$\cos t = -\sqrt{۱ - \sin^{۲} t} = -\sqrt{۱ - \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}} = -\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۴}{۵}$$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}} = -\frac{۳}{۴}$$

$$\csc t = \frac{۱}{\sin t} = \frac{۱}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۵}{۳}$$

$$\sec t = \frac{۱}{\cos t} = -\frac{۵}{۴}$$

$$\cot t = \frac{۱}{\tan t} = -\frac{۴}{۳}$$

هر کدام از توابع مثلثاتی را می توان بر حسب هر یک از توابع دیگر مثلثاتی نوشت.

مثال ۵- $\tan t$ را بر حسب $\cos t$ بنویسید ، اگر $0 < t < \frac{\pi}{۲}$ باشد.

پاسخ

می دانیم که

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\sin^{۲} t = ۱ - \cos^{۲} t \quad ,0 < t < \frac{\pi}{۲}$$

پس

$$\sin t = \sqrt{۱ - \cos^{۲} t}$$

لذا

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sqrt{۱ - \cos^{۲} t}}{\cos t}$$

تمرینات ۱.۲

در تمرینات زیر

الف –مختصات نقطه مربوط به عدد حقیقی داده شده t را روی دائره واحد پیدا کنید.

ب –مقادیر توابع مثلثاتی در t را پیدا کنید.

۱) ۲π

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $-\pi$

۴) -۷π

۵) ۹۸π

۶) $-\frac{۹\pi}{۲}$

۷) $\frac{۵\pi}{۴}$

۸) $-\frac{۱۳\pi}{۴}$

۹) $-\frac{۹\pi}{۴}$

۱۰) $\frac{۱۱\pi}{۴}$

اگر $P(t)$ دارای مختصات داده شده در تمرینات ۱۳ – ۱۱ باشد ، مطلوب است

الف - $P(t+\pi)$

ب - $P(t-\pi)$

ج - $P(-t)$

د - $P(-t-\pi)$

۱۱) $\left(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵}\right)$

۱۲) $\left(-\frac{۸}{۱۷},\frac{۱۵}{۱۷}\right)$

۱۳) $(-۱,0)$

در تمرینات زیر ربع صفحه ای که $P(t)$ در آن قرار دارد ، با توجه به شرایط داده شده ، پیدا کنید.

۱۴) $\cos t > 0$ و $\sin t < 0$

۱۵) $\sin t < 0$ و $\cot t > 0$

۱۶) $\csc t > 0$ و $\sec t < 0$

۱۷) $\sec t < 0$ و $\tan t > 0$

۱۸) $\cos t > 0$ و $\tan t > 0$

در تمرینات زیر با استفاده از اتحاد های اساسی مثلثات ، مقادیر شش تابع مثلثاتی را برای شرایط داده شده پیدا کنید.

۱۹) $\tan t = -\frac{۳}{۴}$ و $\sin t > 0$

۲۰) $\sin\ t = -\frac{۵}{۱۳}$ و $\sec\ t > 0$

۲۱) $\cos t = -\frac{۱}{۳}$ و $\sin t < 0$

۲۲) $\sec t = -۴$ و $\csc t > 0$

در تمرینات زیر ، اولین عبارت را برد حسب عبارت دوم بنویسید.

۲۳) $\cot t, \sin t$

۲۴) $\sec t, \sin t$

۲۵) $\tan t, \sec t$

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

۲۶) $۱ + \cot^{۲} t = \csc^{۲} t$

۲۷ -آیا یک عدد حقیقی پیدا می شود بطوری که $۷ \sin t = ۹$ باشد ؟ توضیح دهید.

۲۸ – اگر $f(t) = \cos t$ و $g(t) = \frac{t}{۴}$ باشد ، مطلوب است $f\big(g(\pi)\big)$ و $g\big(f(\pi)\big)$

۲۹ – نشان دهید اگر $P(t)$ روی محور y نباشد ، پس $(\cos t)(\sec t) = ۱$ است.

۳۰ – نشان دهید برای هر عدد صحیح n نقطه $P(t)$ روی دائره واحد U مربوط به $t = n\,\pi$ یا $(-۱,0)$ است و یا $(۱,0)$ و لذا $\sin n\,\pi = 0$ و $\cos n\,\pi = (-۱)^n$ است.

پاسخ تمرینات ۱.۲

در تمرینات زیر

الف –مختصات نقطه مربوط به عدد حقیقی داده شده t را روی دائره واحد پیدا کنید.

ب –مقادیر توابع مثلثاتی در t را پیدا کنید.

توضیح :نماد – یعنی تعریف نشدنی

۱) ۲π

$$P(t) = (۱, 0)$$

$$\sin t = 0, \cos t = ۱, \tan t = 0, \csc t = -, \sec t = ۱, \cot t = -$$

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

$$P(t) = (0, -۱)$$

$$\sin t = -۱, \cos t = 0, \tan t = -, \csc t = -۱, \sec t = -, \cot t = 0$$

۳) $-\pi$

$$P(t) = (-۱, 0)$$

$$\sin t = 0, \cos t = -۱, \tan t = 0, \csc t = -, \sec t = -۱, \cot t = -$$

۴) -۷π

$$P(t) = (-۱, 0)$$

$$\sin t = 0, \cos t = -۱, \tan t = 0, \csc t = -, \sec -۱, \cot t = -$$

۵) ۹۸π

$$P(t) = (۱, 0)$$

$$\sin t = 0, \cos t = ۱, \tan t = 0, \csc t = -, \sec t = ۱, \cot t = -$$

۶) $-\frac{۹\pi}{۲}$

$$P(t) = (0, -۱)$$

$$\sin t = -۱, \cos t = 0, \tan t = -, \csc t = -۱, \sec t = -, \cot t = 0$$

۷) $\frac{۵\pi}{۴}$

$$P(t)=\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\sin t=-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\cos t=-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\tan t=۱,\csc t=-\sqrt{۲},\sec t=-\sqrt{۲},\cot t=۱$$

۸) $-\frac{۱۳\pi}{۴}$

$$P(t)=\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\sin t=\frac{\sqrt{۲}}{۲},\cos t=-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\tan t=-۱,\csc t=\sqrt{۲},\sec t=-\sqrt{۲},\cot t=-۱$$

۹) $-\frac{۹\pi}{۴}$

$$P(t)=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\sin t=-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\cos t=\frac{\sqrt{۲}}{۲},\tan t=-۱,\csc t=-\sqrt{۲},\sec t=\sqrt{۲},\cot t=-۱$$

۱۰) $\frac{۱۱\pi}{۴}$

$$P(t)=\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\sin t=\frac{\sqrt{۲}}{۲},\cos t=-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\tan t=-۱,csct=\sqrt{۲},\sec t=-\sqrt{۲},\cot t=-۱$$

اگر $P(t)$ دارای مختصات داده شده در تمرینات ۱۳ — ۱۱ باشد ، مطلوب است

الف - $P(t+\pi)$

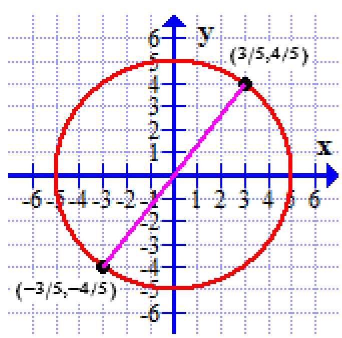
ب - $P(t-\pi)$

ج - $P(-t)$

د - $P(-t-\pi)$

۱۱) $\left(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵}\right)$

الف - برای راهنمایی به تصویر زیر توجه کنید. اگر نقطه $\left(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵}\right)$ به اندازه π دوران دهیم ، به $\left(-\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۵}\right)$ می رسیم. توجه داشته باشید که تصویر زیرتصویر یک دائره واحد است ، اما برای درک بیشتر شعاع را به پنج قسمت تقسیم کرده ایم. برای دو تمرین دیگر هم می توان به همین طریق عمل کرد.



ب $\left(-\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۵}\right)$

ج $\left(\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۵}\right)$

د $\left(-\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵}\right)$

۱۲) $\left(-\frac{۸}{۱۷},\frac{۱۵}{۱۷}\right)$

الف $\left(\frac{۸}{۱۷},-\frac{۱۵}{۱۷}\right)$

ب $\left(\frac{۸}{۱۷},-\frac{۱۵}{۱۷}\right)$

ج $\left(-\frac{۸}{۱۷},-\frac{۱۵}{۱۷}\right)$

د $\left(\frac{۸}{۱۷},\frac{۱۵}{۱۷}\right)$

۱۳) $(-۱,0)$

الف $(۱,0)$

ب $(۱,0)$

ج $(-۱,0)$

د $(۱,0)$

در تمرینات زیر ربع صفحه ای که $P(t)$ در آن قرار دارد ، با توجه به شرایط داده شده ، پیدا کنید.

۱۴) $\cos t > 0$ و $\sin t < 0$

QIV

۱۵) $\sin t < 0$ و $\cot t > 0$

$QIII$

۱۶) $\csc t > 0$ و $\sec t < 0$

QII

۱۷) $\sec t < 0$ و $\tan t > 0$

$QIII$

۱۸) $\cos t > 0$ و $\tan t > 0$

QI

در تمرینات زیر با استفاده از اتحاد های اساسی مثلثات ، مقادیر شش تابع مثلثاتی را برای شرایط داده شده پیدا کنید.

۱۹) $\tan t = -\frac{۳}{۴}$ و $\sin t > 0$

$$۱ + \tan^{۲} t = \sec^{۲} t$$

$$۱ + \left(-\frac{۳}{۴}\right)^{۲} = \sec^{۲} t$$

$$۱ + \frac{۹}{۱۶} = \sec^{۲} t$$

$$\sec^{۲} t = \frac{۲۵}{۱۶}$$

$$\sec t = \pm\frac{۵}{۴}$$

چون داریم $\tan t = -\frac{۳}{۴} < 0$ و $\sin t > 0$ پس باید $\cos t < 0$ باشد و لذا $\sec t = -\frac{۵}{۴}$ است.

در نتیجه

$$\sin t = \frac{۳}{۵}, \cos t = -\frac{۴}{۵}, \tan t = -\frac{۳}{۴}, \csc t = \frac{۵}{۳}, \sec t = -\frac{۵}{۴}, \cot t = -\frac{۴}{۳}$$

۲۰) $\sin\ t = -\frac{۵}{۱۳}$ و $\sec\ t > 0$

از فرمول $\cos t = \sqrt{۱ - \sin^{۲} t}$ استفاده کنید.

$$\sin t = -\frac{۵}{۱۳}, \cos t = \frac{۱۲}{۱۳}, \tan t = -\frac{۵}{۱۲}, \csc t = -\frac{۱۳}{۵}, \sec t = \frac{۱۳}{۱۲}, \cot t = -\frac{۱۲}{۵}$$

۲۱) $\cos t = -\frac{۱}{۳}$ و $\sin t < 0$

از فرمول $\sin t = -\sqrt{۱ - \cos^{۲} t}$ استفاده کنید.

$$\sin t = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}, \cos t = -\frac{۱}{۳}, \tan t = ۲\sqrt{۲}, \csc t = -\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}, \sec t = -۳, \cot t = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۲۲) $\sec t = -۴$ و $\csc t > 0$

ابتدا از فرمول $۱ + \tan^{۲} t = \sec^{۲} t$ استفاده کنید تا $\tan t$ بدست آید. سپس با معکوس کردن سکانت ، کسینوس را بدست آورید و در نهایت از طریق تانژانت ، سینوس را بدست آورید.

$$\sin t = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}, \cos t = -\frac{۱}{۴}, \tan t = -\sqrt{۱۵}, \csc t = \frac{۴\sqrt{۱۵}}{۱۵}, \sec t = -۴, \cot t = -\frac{\sqrt{۱۵}}{۱۵}$$

در تمرینات زیر ، اولین عبارت را برد حسب عبارت دوم بنویسید.

۲۳) $\cot t, \sin t$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{۱ - \sin^{۲} t}}{\sin t}$$

۲۴) $\sec t, \sin t$

$$\sec t = \frac{۱}{\cos t} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^{۲} t}}$$

۲۵) $\tan t, \sec t$

$$۱ + \tan^{۲} t = \sec^{۲} t$$

$$\tan t = \sqrt{\sec^{۲} t - ۱}$$

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

۲۶) $۱ + \cot^۲ t = \csc^۲ t$

$$۱ + \cot^۲ t = ۱ + \frac{۱}{\tan^۲ t} = ۱ + \frac{۱}{\frac{\sin^۲ t}{\cos^۲ t}} = ۱ + \frac{\cos^۲ t}{\sin^۲ t} = \frac{\sin^۲ t + \cos^۲ t}{\sin^۲ t}$$
$$= \frac{۱}{\sin^۲ t} = \csc^۲ t$$

۲۷ -آیا یک عدد حقیقی پیدا می شود بطوری که $۷\sin t = ۹$ باشد ؟ توضیح دهید.

پاسخ

خیر ، زیرا $|\sin t| \le ۱$ است.

۲۸ – اگر $f(t) = \cos t$ و $g(t) = \frac{t}{۴}$ باشد ، مطلوب است $f\big(g(\pi)\big)$ و $g\big(f(\pi)\big)$

$$f\big(g(\pi)\big) = f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$g\big(f(\pi)\big) = g(\cos\pi) = g(-۱) = -\frac{۱}{۴}$$

۲۹ – نشان دهید اگر $P(t)$ روی محور y نباشد ، پس $(\cos t)(\sec t) = ۱$ است.

$$(\cos t)(\sec t) = \cos t\left(\frac{۱}{\cos t}\right) = ۱$$

۳۰ – نشان دهید برای هر عدد صحیح n نقطه $P(t)$ روی دائره واحد U مربوط به $t = n\pi$ یا $(-۱, 0)$ است و یا $(۱, 0)$ و لذا $\sin n\pi = 0$ و $\cos n\pi = (-۱)^n$ است.

پاسخ

اگر n زوج باشد ، پس $P(n\pi) = (۱, 0)$ واگر n فرد باشد ، پس $P(n\pi) = (-۱, 0)$ است.

۱.۳ – تغییر توابع مثلثاتی Variation of the Trigonometric Functions

دائره واحد U در تصویر A در نظر بگیرید.

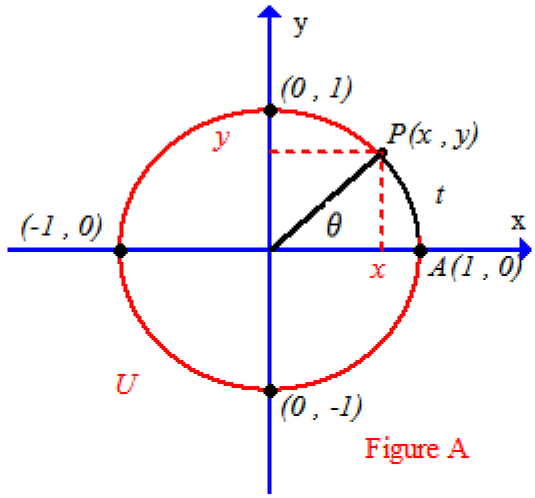


Figure A

در تصویر عدد حقیقی t می تواند اندازه زاویه θ بر حسب رادیان باشد و یا طول کمان AP باشد.
اگر t از صفر به ۲ π افزایش پیدا کند ، پس نقطه $P(x,y)$ مربوط به t دائره U را یک مرتبه خلاف حرکت عقربه ساعت می پیماید .

چون $\sin t = y$ است ، پس می توانیم مقادیر مربوط به تابع سینوس را با تمرکز بر مختصات y نقطه P مورد مطالعه قرار دهیم. به همین طریق ، چون $\cos t = x$ است ، پس مقادیر تابع کسینوس را می توان با در نظر گرفتن مختصات x نقطه P مورد مطالعه قرار داد. جدول زیر نشان می دهد چگونه $\sin t$ و $\cos t$ تغییر می کند ، هنگامی که t از صفر به ۲ π تغییر می کند.

t	$P(x,y)$	$\sin t = y$	$\cos t = x$
$0 \rightarrow \frac{\pi}{۲}$	$(۱,0) \rightarrow (0,۱)$	$0 \rightarrow ۱$	$۱ \rightarrow 0$
$\frac{\pi}{۲} \rightarrow \pi$	$(0,۱) \rightarrow (-۱,0)$	$۱ \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -۱$
$\pi \rightarrow \frac{۳\pi}{۲}$	$(-۱,0) \rightarrow (0,-۱)$	$0 \rightarrow -۱$	$-۱ \rightarrow 0$
$\frac{۳\pi}{۲} \rightarrow ۲\,\pi$	$(0,-۱) \rightarrow (۱,0)$	$-۱ \rightarrow 0$	$0 \rightarrow ۱$

نماد $0 \rightarrow \frac{\pi}{۲}$ یعنی t از صفر به $\frac{\pi}{۲}$ افزایش پیدا می کند. و نماد $(۱,0) \rightarrow (0,۱)$ تغییرات $P(x,y)$ را روی دائره U نشان می دهد. ملاحظه می کنید هنگامی که t از صفر به $\frac{\pi}{۲}$ افزایش می یابد ، $\sin t$ از صفر به ۱ افزایش پیدا می کند. و این را با نماد $0 \rightarrow ۱$ نشان می دهیم.
به علاوه $\sin t$ تمام مقادیر بین صفر و یک را در بر می گیرد. هنگامی که t از $\frac{\pi}{۲}$ به π

افزایش پیدا می کند ، $\sin t$ از یک به صفر نقصان می یابد. بقیه اطلاعات جادول به همین طریق تفسیر می شود. جدول زیر چند مقادیر سینوس و کسینوس برای $0 \leq t \leq ۲\pi$ را نشان می دهد.

t	0	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	0	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	0
$\cos t$	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	0	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	0	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱

هنگامی که t از ۲π به ۴π افزایش پیدا می کند ، $P(x,y)$ یک مرتبه دیگر دائره واحد U را طی می کند و $\sin t$ و $\cos t$ همان مقادیر را تکرار می کنند ، یعنی

$$\sin(t + ۲\pi) = \sin t \quad و \quad \cos(t + ۲\pi) = \cos t$$

بخاطراین تکرار تغییر ، می گوییم سینوس و کسینوس ، توابع تناوبی Periodic Functions هستند .بطور کلی تعریف زیر را داریم.

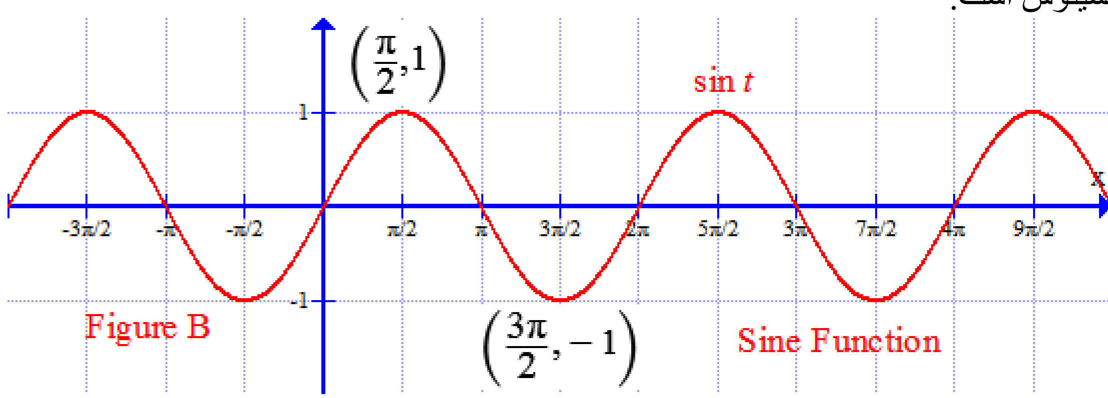
تابع f **تناوبی Periodic** است اگر یک عدد حقیقی مثبت k وجود داشته باشد بطوری که

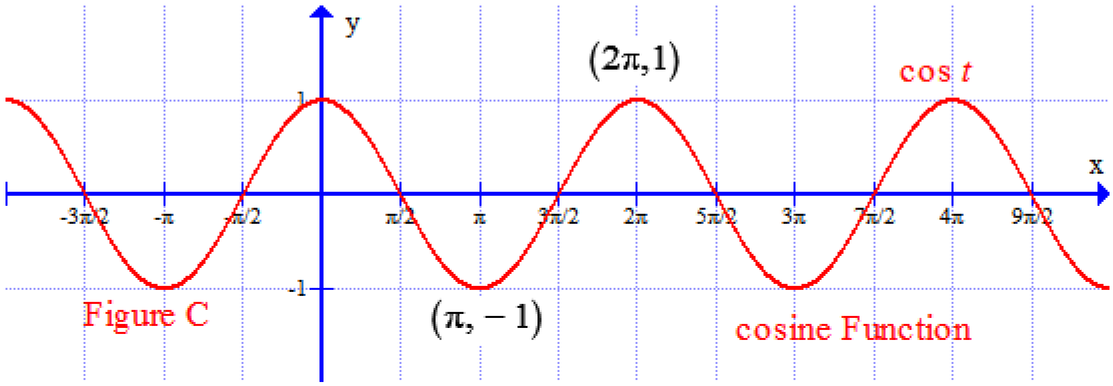
$$f(t + k) = f(t)$$

باشد ، برای تمام t ها در دامنه f

کمترین مقدار این عدد حقیقی مثبت k را دوره تناوب Period می نامند

دوره تناوب سینوس و کسینوس ۲π . است. تصویر B نمایش تابع سینوس و تصویر C نمایش تابع کسینوس است.





در تصاویر بالا چند نقطه به اشکال $(t, \sin t)$ و $(t, \cos t)$ مشخص شده است. چون دوره تناوب این توابع π ۲ است ، پس نمودار آنها هر π ۲ واحد در طول محور افقی تکرار می شود.

توابع سکانت و کسکانت هم دارای دوره تناوب π ۲ هستند ، اما تانژانت و کتانژانت دارای دوره تناوب π هستند. نمودار آنها را در بخش ۱.۶ خواهیم دید.

برد توابع سینوس و کسینوس کلیه اعداد حقیقی در بازه $[-۱, ۱]$ است. چون $\csc t = \frac{۱}{\sin t}$ و $\sec t = \frac{۱}{\cos t}$ است ، پس برد این دو تابع شامل کلیه اعداد حقیقی است بطوری که قدر مطلق آنها مساوی یا بزرگ تر از یک باشد.

برد توابع تانژانت و کتانژانت شامل کلیه اعداد حقیقی است. نمودار آنها را هم در بخش ۱.۶ خواهیم دید.

در خاتمه این بخش فرمول های توابع مثلثاتی برای $-t$ را بدست می آوریم.

فرمول های منفی Formulas for Negatives

$$\sin(-t) = -\sin t$$
$$\cos(-t) = \cos t$$
$$\tan(-t) = -\tan t$$

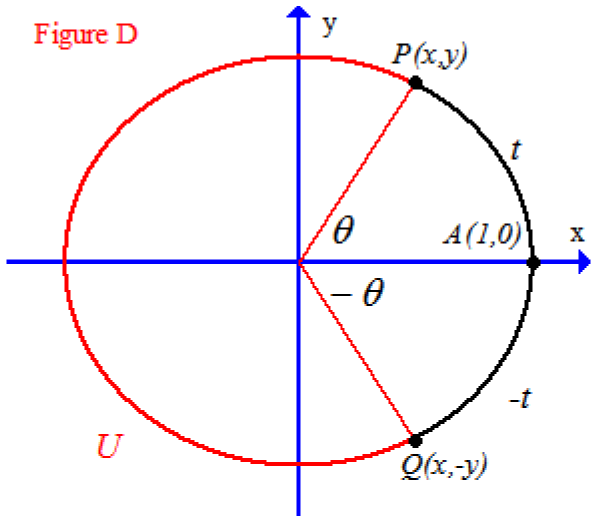
اثبات

دائره واحد در تصویر D را ملاحظه کنید.

هنگامی که t از صفر به π ۲ افزایش می یابد نقطه $P(x, y)$ که مربوط به t است دائره واحد U را یک مرتبه خلاف عقربه ساعت می پیماید . در صورتی که نقطه $Q(x, -y)$ که مربوط به $-t$ است دائره واحد را یک مرتبه موافق حرکت عقربه ساعت طی می کند. با استفاده از فرمول های توابع مثلثاتی بر حسب دائره واحد داریم.

$$\sin(-t) = -y = -\sin t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$
$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$



مثال – با استفاده از فرمول های منفی ، مقادیر دقیق $\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$ و $\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

با استفاده از فرمول های مثال ۱ بخش ۱.۲ داریم.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -۱$$

اگر $f(t) = \cos t$ باشد ، پس

$$f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t)$$

و لذا تابع کسینوس یک تابع زوج است و همان طور که در کتاب کامل جبر گفتیم ، نمودار کسینوس نسبت به محور y قرینه است. به همین طریق اگر $f(t) = \sin t$ باشد ، پس

$$f(-t) = \sin(-t) = -\sin t = -f(t)$$

پس تابع سینوس یک تابع فرد است و لذا نسبت به مبدا مختصات ، قرینه است.

تمرینات ۱.۳

در تمرینات ۳ — ۱ با استفاده از فرمول های منفی ، مقادیر دقیق سینوس و کسینوس برای مقادیر داده شده t پیدا کنید.

۱) $-\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\pi$

۴ - ثابت کنید که الف ، ب ، ج برای تمام t ها در دامنه تابع ، صحیح است.

الف - $\csc(-t) = -\csc t$

ب - $\sec(-t) = \sec t$

ج - $\cot(-t) = -\cot t$

۵ – ثابت کنید که تابع سینوس ، دارای دوره تناوب ۲ π است.

۶ – ثابت کنید که تابع کسکانت دارای دور تناوب ۲ π است.

۷ – ثابت کنید که برد تابع تانژانت کلیه اعداد حقیقی است. برای این کار نشان دهید که اگر a یک عدد حقیقی باشد ، پس یک نقطه مانند $P(t)$ روی U وجود دارد بطوری که $\tan t = a$ است.

راهنمایی : اگر $P(x,y)$ روی U باشد معادله $\tan t = \frac{y}{x} = a$ را در نظر بگیرید و همچنین $x^۲ + y^۲ = ۱$

پاسخ تمرینات ۱.۳

در تمرینات ۳ — ۱ با استفاده از فرمول های منفی ، مقادیر دقیق سینوس و کسینوس برای مقادیر داده شده t پیدا کنید.

۱) $-\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\pi$

$$۱)\quad \sin\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right) = -\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ ، } \cos\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$۲)\quad \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) = -۱ \text{ ، } \cos\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۲}\right) = 0$$

$$۳)\quad \sin(-\pi) = -\sin(\pi) = 0 \text{ ، } \cos(-\pi) = \cos(\pi) = -۱$$

۴ - ثابت کنید که الف ، ب ، ج برای تمام t ها در دامنه تابع ، صحیح است.

الف - $\csc(-t) = -\csc t$

$$\csc(-t) = \frac{۱}{\sin(-t)} = \frac{۱}{-\sin(t)} = -\frac{۱}{\sin t} = -\csc t$$

ب - $\sec(-t) = \sec t$

$$\sec(-t) = \frac{۱}{\cos(-t)} = \frac{۱}{\cos t} = \sec t$$

ج - $\cot(-t) = -\cot t$

$$\cot(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t$$

۵ – ثابت کنید که تابع سینوس ، دارای دوره تناوب ۲π است.

اثبات

فرض می کنیم یک عدد حقیقی مثبت مانند $k < ۲\pi$ وجود دارد ، بطوری که

$$\sin(t+k) = \sin t$$

باشد ، برای تمام t ها.

اگر $t = 0$ باشد پس $\sin k = \sin 0 = 0$ است. چون $0 < k < ۲\pi$ است ، پس $k = \pi$ است و لذا $\sin(t+\pi) = \sin t$ است برای تمام t ها. اگر مخصوصا $t = \frac{\pi}{۲}$ باشد ، پس داریم $\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۲}\right)$ است ، یعنی $۱ = -۱$ است و این بی معنی است.

۶ – ثابت کنید که تابع کسکانت دارای دور تناوب ۲π است.

اثبات

میدانیم که $\csc t = \frac{۱}{\sin t}$ است. بر اساس تمرین شماره ۵ که در بالا ثابت کردیم ، دور تناوب سینوس ۲π است ، پس دور تناوب کسکانت هم ۲π است.

۷ – ثابت کنید که برد تابع تانژانت کلیه اعداد حقیقی است. برای این کار نشان دهید که اگر a یک عدد حقیقی باشد ، پس یک نقطه مانند $P(t)$ روی U وجود دارد بطوری که $\tan t = a$ است.

راهنمایی: اگر $P(x,y)$ روی U باشد معادله $\tan t = \frac{y}{x} = a$ را در نظر بگیرید و همچنین $x^۲ + y^۲ = ۱$

اثبات

اگر $a = \frac{y}{x}$ باشد و همچنین داشته باشیم $x^۲ + y^۲ = ۱$ پس $a = \frac{\pm\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ است. و لذا

$$a^۲ = \frac{۱-x^۲}{x^۲} \quad \text{و} \quad ۱ - x^۲ = a^۲x^۲ \quad \text{یا} \quad ۱ = a^۲x^۲ + x^۲ = x^۲\left(۱+a^۲\right)$$

در نتیجه

$$x^۲ = \frac{۱}{۱ + a^۲} \quad \text{یا} \quad x = \pm \frac{۱}{\sqrt{a^۲ + ۱}}$$

اگر $a > 0$ باشد ، نقطه $P(x, y)$ روی U انتخاب می کنیم بطوری که $x = \frac{۱}{\sqrt{a^۲+۱}}$ باشد

اگر $a < 0$ باشد ، نقطه $P(x, y)$ طوری انتخاب می کنیم که $x = -\frac{۱}{\sqrt{a^۲+۱}}$ باشد.

در نتیجه همیشه یک نقطه $P(x, y)$ روی U وجود دارد ، بطوری که $\frac{y}{x} = a$ است.

۱.۴ - توابع مثلثاتی زوایا Trigonometric Functions of Angles

در بعضی موارد ، مناسب تر است اگر دامنه توابع مثلثاتی را از مجموعه اعداد حقیقی به مجموعه زاویه ها تغییر دهیم. این کار آسان است. اگر θ یک زاویه باشد ، می نویسیم $\cos\theta$, $\sin\theta$ و غیرو. فقط کافی است مقدار θ را بر حسب رادیان بنویسیم.

تعریف توابع مثلثاتی زاویه ها Definition of Trigonometric Functions of Angles

اگر θ یک زاویه به اندازه t رادیان باشد ، پس مقدار هر یک از توابع مثلثاتی در θ مقدار آن تابع در عدد حقیقی t است.

مثلا اگر t اندازه زاویه θ بر حسب رادیان باشد ، پس

$$\sin\theta = \sin t \quad ,\cos\theta = \cos t \quad ,\tan\theta = \tan t$$

و غیرو. ما عبارت "*توابع مثلثاتی*" را بدون در نظر گرفتن آیا دامنه آنها شامل زاویه است و یا اعداد , بکار می بریم. نماد های $\sin ۶۰°$ و $\tan ۱۵۰°$ را هنگامی بکار می بریم که اندازه زاویه بر حسب درجه باشد. اگر اعداد بدون نماد مشخص کننده باشند ، مانند $\cos ۳$ یا $\csc\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ منظور این است که اندازه زاویه بر حسب رادیان است. این با گفته قبلی ما مغایرت ندارد. مثلا گفتیم $\cos ۳$ یعنی مقدار تابع کسینوس در عدد حقیقی ۳ زیرا طبق تعریف بالا ، کسینوس زاویه ۳ رادیانی همان کسینوس عدد حقیقی ۳ است.

مثال ۱ -مقدار توابع زیر را پیدا کنید.

$$\sin ۹۰° \ ,\cos ۴۵° \ ,\tan ۷۲۰°$$

پاسخ

$$۹۰° = ۹۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{\pi}{۲} \qquad ۴۵° = ۴۵\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = \frac{\pi}{۴} \qquad ۷۲۰° = ۷۲۰\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right) = ۴\pi$$

$$\sin ۹۰° = \sin\frac{\pi}{۲} = ۱$$

$$\cos ۴۵° = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

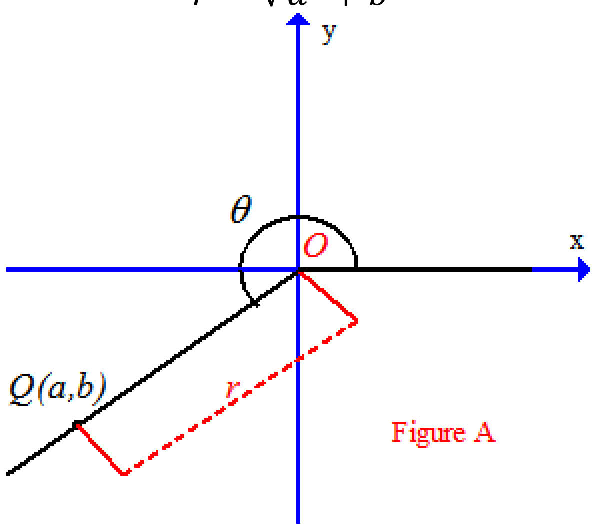
$$\tan ۷۲۰° = \tan ۴\pi = \tan 0 = 0$$

در بخش بعد ، روشی ارائه می دهیم که بتوان مقادیرتقریبی توابع مثلثاتی هر زاویه ای را بدست آورد.

مقادیر توابع مثلثاتی هر زاویه را می توان بوسیله یک نقطه روی ضلع انتهایی آن زاویه معین کرد. برای اثبات این حقیقت ، فرض کنید θ زاویه ای است در مکان متعارف. و فرض کنید $Q(a,b)$ یک نقطه روی ضلع انتهایی θ باشد ، البته بجز مبدا مختصات، همان طور که در تصویر A ملاحظه

می کنید. فرض کنید r مسدفت بین O و Q باشد ، یعنی $r = d(O,Q)$ است. با استفاده از فرمول مسافت داریم.

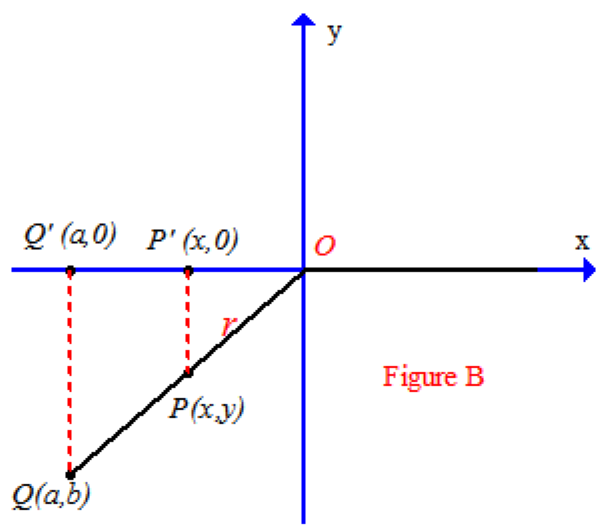
$$r = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$



نقطه $Q(a,b)$ الزاما روی دائره واحد U نیست , چون r می تواند مقداری بجز یک باشد. اگر فرض کنیم $P(x,y)$ یک نقطه روی ضلع انتهایی θ باشد ، بطوری که $d(O,P) = ۱$ باشد ، پس $P(x,y)$ روی دائره واحد U است. اگر t اندازه زاویه θ بر حسب رادیان باشد ، پس طبق تعریف داریم.

$$\sin\theta = \sin t = y$$
$$\cos\theta = \cos t = x$$

همان طور که در تصویر B ملاحظه می کنید خطوط عمودی که از نقاط Q و P می گذارند ، محور x را در نقاط $Q'(a,0)$ و $P'(x,0)$ قطع می کنند. چون مثلث های OQQ' و OPP' متشابه هستند ، پس داریم



$$\frac{d(P',P)}{d(O,P)} = \frac{d(Q',Q)}{d(O,Q)} \quad \text{یا} \quad \frac{|y|}{۱} = \frac{|b|}{r}$$

چون b و y همیشه یک علامت دارند ، پس داریم

$$y = \frac{b}{r} \quad \text{و در نتیجه} \quad \sin\theta = y = \frac{b}{r}$$

به همین طریق داریم

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

و با استفاده از اتحاد های اساسی ، داریم

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{b}{r}}{\frac{a}{r}} = \frac{b}{a}$$

بقیه توابع مثلثاتی هم می توانیم از فرمول های بالا بدست آوریم. از مطالب گفته شده بالا قضیه زیر بدست می آید.

قضیه نسبت های مثلثاتی یا
توابع مثلثاتی به صورت نسبت ها Theorem on Trigonometric Functions as Ratios

فرض کنید θ یک زاویه در مکان متعارف روی محور های مختصات باشد و فرض کنید $Q(a,b)$ یک نقطه روی ضلع انتهایی θ باشد ، البته بجز مبدا مختصات. اگر

$$d(O,Q) = r = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

باشد ، پس

$$\sin\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b}, (b \neq 0)$$
$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}, (a \neq 0)$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}, (a \neq 0) \quad \cot\theta = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$$

اگر $r = ۱$ باشد ، فرمول های بالا به تعریف توابع مثلثاتی که در بخش ۱.۲ گفتیم تبدیل می شوند با $a = x$ و $b = y$

قضیه بالا موارد استفاده زیادی دارد. در بخش ۱.۹ از آن برای حل مسائلی که شامل مثلث های قائم الزویه هستند استفاده می کنیم. همچنین به استفاده قضیه بالا در مثال ۲ توجه کنید.

نسبت های مثلثاتی در رابطه با مثلث قائم الزویه هستند.

مثال ۲– زاویه θ زاویه ای است در مکان متعارف روی محور های مختصات قراردارد . اگر نقطه $Q(-۱۵,۸)$ روی ضلع انتهایی θ باشد ، مقادیرنسبت های مثلثاتی یا توابع مثلثاتی θ را پیدا کنید.

پاسخ

نقطه $Q(-۱۵,۸)$ در تصویر C ملاحظه می کنید. با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$r = d(O,Q) = \sqrt{(-۱۵)^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۲۲۵ - ۶۴} = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$$

با استفاده از قضیه بالا با $a = -۱۵$ و $b = ۸$ و $r = ۱۷$ داریم.

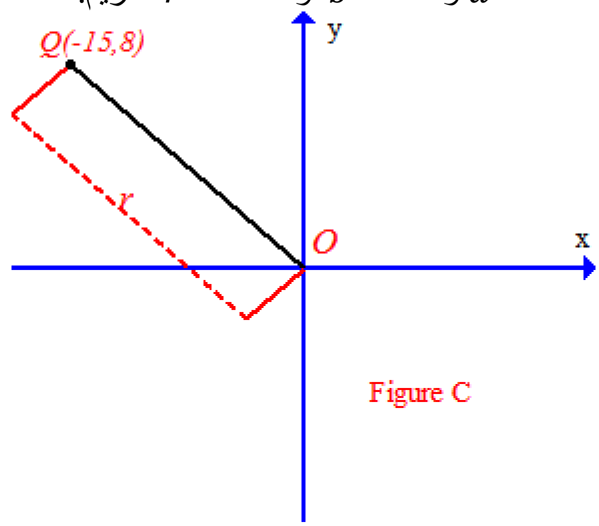


Figure C

$$\sin\theta = \frac{۸}{۱۷} \qquad \csc\theta = \frac{۱۷}{۸}$$

$$\cos\theta = -\frac{۱۵}{۱۷} \qquad \sec\theta = -\frac{۱۷}{۱۵}$$

$$\tan\theta = -\frac{۸}{۱۵} \qquad \cot\theta = -\frac{۱۵}{۸}$$

مثا ل ۳ ــ زاویه θ در مکان متعارف روی محور های مختصات قرار دارد. اگر ضلع انتهایی در ناحیه سه یعنی $QIII$ و روی خط $y = ۳x$ باشد ، مقادیر نسبت های مثلثاتی یا توابع مثلثاتی θ را پیدا کنید.

پاسخ

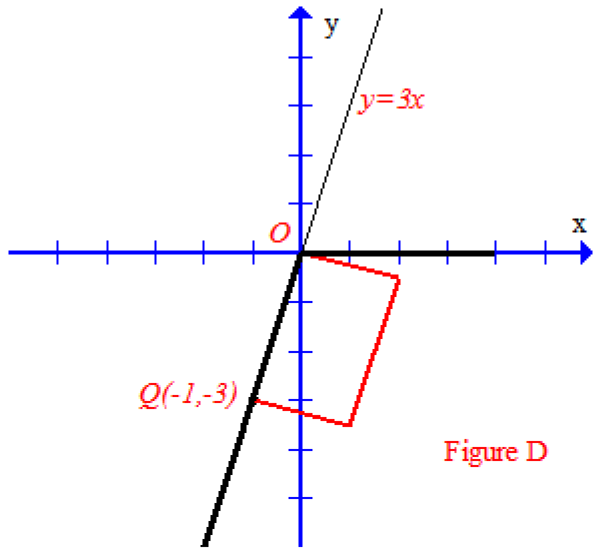
نمودار خط $y = ۳x$ در تصویر D ملاحظه می کنید. ضلع اولیه و ثانویه θ با خطوط ضخیم تر با رنگ سیاه نشان داده شده است. چون ضلع ثانوی در $QIII$ قرار دارد ، نقطه مناسبی که روی خط $y = ۳x$ باشد انتخاب می کنیم ، این نقطه $Q(-۱,-۳)$ است. با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$r = d(O.Q) = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۳)^۲} = \sqrt{۱0}$$

با استفاده از قضیه بالا با $a = -۱$ و $b = -۳$ و $r = \sqrt{۱0}$ داریم.

$$\sin\theta = \frac{-۳}{\sqrt{۱0}} = -\frac{۳\sqrt{۱0}}{۱0} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{۱0}}{-۳} = -\frac{\sqrt{۱0}}{۳}$$

$$\cos\theta = \frac{-۱}{\sqrt{۱0}} = -\frac{\sqrt{۱0}}{۱0} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{۱0}}{-۱} = -\sqrt{۱0}$$



در قضیه نسبت های مثلثاتی ، فرض کردیم که ضلع انتهایی زاویه روی محور ها نیست. مثال بعدی نشان می دهد اگر ضلع انتهایی هم روی محور ها باشد ، باز هم قضیه بر قرار است.

مثال ۴ ــ اگر $\theta = ۲۷۰^\circ$ باشد ، مقادیر توابع مثلثاتی را پیدا کنید.

پاسخ

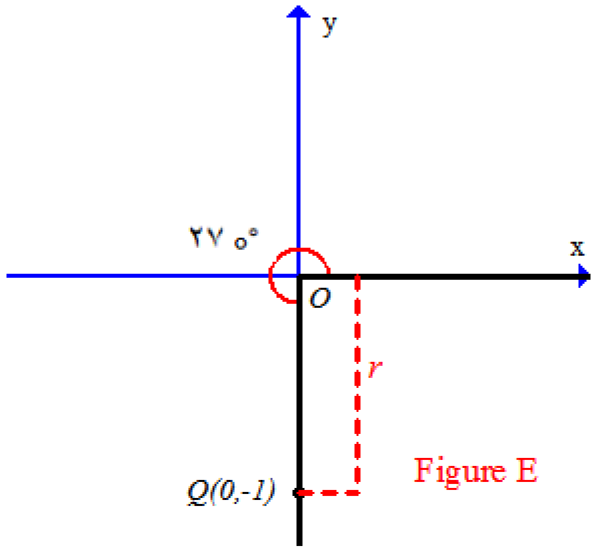
با قرار دادن θ در مکان متعارف ، ضلع انتهایی θ بر روی قسمت منفی محور y منطبق می شود ، همان طور که در تصویر E ملاحظه می کنید. برای استفاده از قضیه مربوطه می توان هر نقطه ای را روی ضلع انتهایی θ انتخاب کرد. برای سادگی کار نقطه $Q(0,-۱)$ را انتخاب می کنیم.

در این صورت $a = 0$ و $b = -۱$ و $r = ۱$ است. لذا داریم.

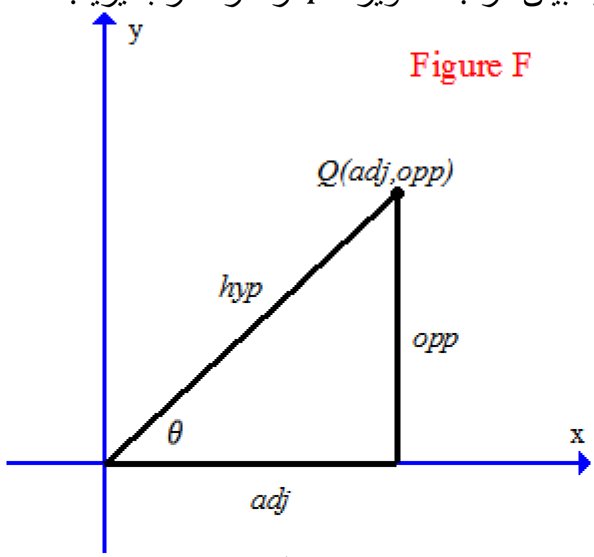
$$\sin ۲۷۰^\circ = \frac{-۱}{۱} = -۱ \qquad \csc ۲۷۰^\circ = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

$$\cos ۲۷۰^\circ = \frac{0}{-۱} = 0 \qquad \cot ۲۷۰^\circ = \frac{0}{-۱} = 0$$

توابع تانژانت و سکانت تعریف نشدنی هستند.



در پایان نشان می دهیم برای زوایای حاد ، مقادیر توابع مثلثاتی رامی توان به صورت نسبت های طول اضلاع یک مثلث قائم الزویه بیان کرد. تصویر F را در نظر بگیرید.



اگر θ یک زاویه حاد Acute باشد, پس می توان آنرا به عنوان یک زاویه از یک مثلث قائم الزویه در نظر گرفت. میدانیم که در یک مثلث قائم الزویه ، ضلع روبروی زاویه θ را ضلع مقابل Opposite و ضلع دیگر را ضلع مجاور Adjacent و ضلع سوم که روبروی زاویه قائمه است ، وتر Hypotenuse می نامند. پس اگر به ترتیب Opp و Adj و Hyp بکار می بریم منظور طول اضلاع نام برده هستند. با مراجعه به تصویر F ملاحظه می کنید که طول ضلع مجاور θ مختصات x و طول ضلع مقابل θ مختصات y یک نقطه مانند Q روی ضلع انتهایی θهستند. با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی داریم.

$$\sin\theta = \frac{opp}{hyp} = \qquad \csc\theta = \frac{hyp}{opp}$$

$$\cos\theta = \frac{adj}{hyp} \qquad \sec\theta = \frac{hyp}{adj}$$

$$\tan\theta = \frac{opp}{adj} \qquad \cot\theta = \frac{adj}{opp}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

فرمول های بالا برای کار با مثلث های قائم الزویه مهم هستند و باید حفظ شوند.

مثال ۵ – مطلوب است مقادیر نسبت های مثلثاتی ، مربوط به هر یک از زوایای زیر.

$a)\ \theta = ۶۰^\circ \qquad b)\ \theta = ۳۰^\circ \qquad c)\ \theta = ۴۵^\circ$

پاسخ

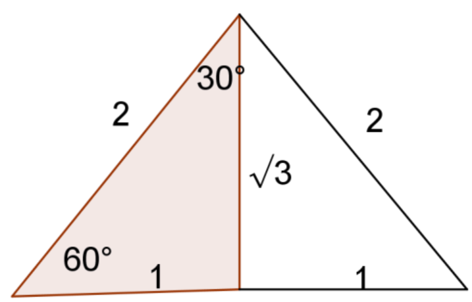


Figure G

مثلث متساوی الاضلاع در تصویر G ملاحظه کنید ، که طول هر یک از اضلاع آن ۲ واحد است.
عمود منصف از هر یک ازراس های مثلث به ضلع مقابل ، زاویه آن راس را نصف می کند. بر اساس قضیه فیثاغورث ، ضلع مقابل زاویه ۶۰° در مثلث قائم الزویه سایه دار ، دارای طول $\sqrt{۳}$ واحد است. با استفاده از فرمول های بالا در مورد مثلث قائم الزویه داریم.

$$a) \qquad \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \csc ۶۰^\circ = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} \qquad \sec ۶۰^\circ = \frac{۲}{۱} = ۲$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳} \qquad \cot ۶۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$b)$ $$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \qquad \csc ۳۰^\circ = \frac{۲}{۱} = ۲$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \sec ۳۰^\circ = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \cot ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

برای پیدا کردن مقادیر نسبت های مثلثاتی $\theta = ۴۵^\circ$ ،مثلث قائم الزویه متساوی الساقین تصویر H را ملاحظه کند.

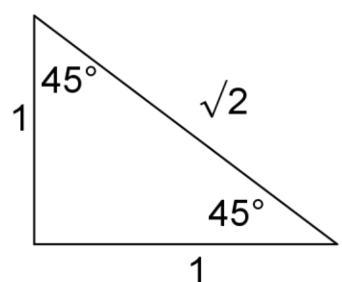


Figure H

بر اساس قضیه فیثاغورث طول وتر $\sqrt{۲}$ واحد است. لذا

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos ۴۵^\circ \qquad \tan ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} =$$

$$\csc ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۱} = \sqrt{۲} = \sec ۴۵^\circ \qquad \cot ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱$$

در ذیل خلاصه نتایج مثال ۵ را در یک جدول می آوریم. چون این مقادیر زیاد مورد استفاده قرار می گیرند ، بد نیست اگر آنها را حفظ کنید و یا قادر باشید به طریقی ، سریع آنها را بخاطر بیاورید.

مقادیر چند تابع مثلثاتی خاص
یا
مقادیرنسبت های مثلثاتی خاص
Special Values of the Trigonometric Functions

θ بر حسب رادیان	θ بر حسب درجه	$\sin \partial\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$\frac{\pi}{۶}$	۳۰°	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$	۲
$\frac{\pi}{۴}$	۴۵°	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۱	$\sqrt{۲}$	$\sqrt{۲}$
$\frac{\pi}{۳}$	۶۰°	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۲	$\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

مثال ۶ – یک مهندس متوجه شد که در یک نقطه بنام A ، تا پایه یک تیرک پرچم بنام B ، بیست و پنج فوت فاصله دارد. اگر زاویه ایجاد شده از نقطه A تا بالای تیرک پرچم ۳۰° باشد ، طول تقریبی تیرک را تا یک رقم اعشاری پیدا کنید. این زاویه را زاویه فرازه نما می‌نامند . $Angle\ of\ elevation$

پاسخ

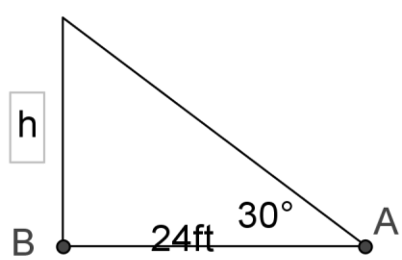


Figure I

. اگر ارتفاع تیرک را h فوت فرض کنیم ، با توجه به تصویر I خواهیم داشت.

$$\tan ۳۰° = \frac{h}{۲۵} \quad \text{یا} \quad h = ۲۵ \tan ۳۰°$$

$$h = ۲۵\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) \approx ۱۴/۴۳۳ = ۱۴/۴ \ \text{فوت}$$

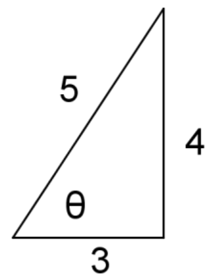
تا کنون دو روش برای تعریف توابع مثلثاتی بکار برده ایم. یکی تعریف از طریق دائره واحد با تاکید بر این که دامنه توابع مثلثاتی ، شامل اعداد حقیقی است. این نوع توابع در حسابان کاربرد دارند. علاوه بر این ، روش دائره واحد برای رسم نمودار ها و پیدا کردن اتحاد های مثلثاتی مفید است.
روش دوم تعریف توابع مثلثاتی بر حسب زوایا و نسبت ها بود. این روش کاربرد ها ی زیادی در علوم و مهندسی دارد. باید سعی کنید در هر دو روش مهارت پیدا کنید.

تمرینات ۱.۴

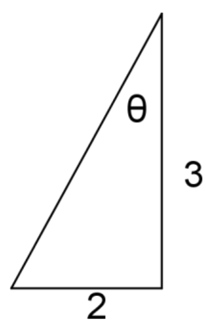
در تمرینات ۱ – ۱۰ با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی ، مقادیر شش نسبت مثلثاتی θ پیدا کنید. فرض کنید θ در مکان متعارف قرار دارد.

۱ – نقطه $P(۴,-۳)$ روی ضلع انتهایی θ قرار دارد.
۲ - نقطه $P(-۲,-۵)$ روی ضلع انتهایی θ قرار دارد.
۳ – ضلع انتهایی θ در ناحیه دوم یعنی QII و روی خط $y = -۴x$ قرار دارد.
۴ – ضلع انتهایی θ در ناحیه سه یعنی $QIII$ و روی خط $۲y - ۷x = 0$ قرار دارد.
۵ – ضلع انتهایی θ در ناحیه یک یعنی QI و روی خط $۳y = ۴x$ قرار دارد.
۶- $\theta = ۴۵۰°$ است.
۷- $\theta = ۱۳۵^{\circ}$ است.
۸- $\theta = -۴۵^{\circ}$ است.
۹- $\theta = ۳۶۰°$ است.
۱۰- $\theta = ۲۱۰°$ است.

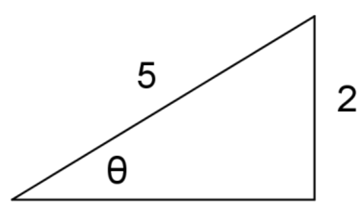
در تمرینات ۱۵ – ۱۱ مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه θ در مثلث قائم الزاویه داده شده پیدا کنید.
۱۱



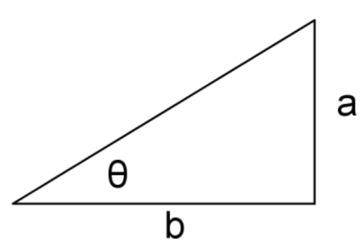
۱۲



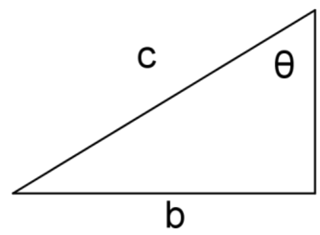
۱۳ –



۱۴ -



۱۵ –



۱۶ – در جنگل های آفریقا ، درخت هایی می روید که ارتفاع حیرت انگیزی دارند. یک جنگل بان در مسافت ۲۰۰ فوتی یک چنین درختی ایستاده و نوک درخت را با زاویه فرازه نمای ۶۰° می بیند. ارتفاع تقریبی درخت را حساب کنید.

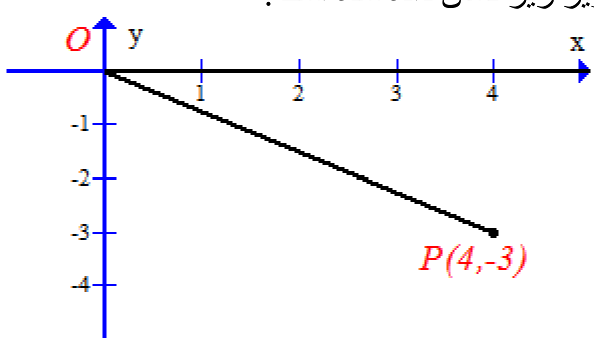
پاسخ تمرینات ۱.۴

در تمرینات ۱ – ۱۰ با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی ، مقادیر شش نسبت مثلثاتی θ پیدا کنید. فرض کنید θ در مکان متعارف قرار دارد.

۱ – نقطه $P(۴,-۳)$ روی ضلع انتهایی θ قرار دارد.

پاسخ

نقطه $P(۴,-۳)$ در تصویر زیر نشان داده شده است.



با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$r = d(O,P) = \sqrt{(۴)^۲ + (-۳)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

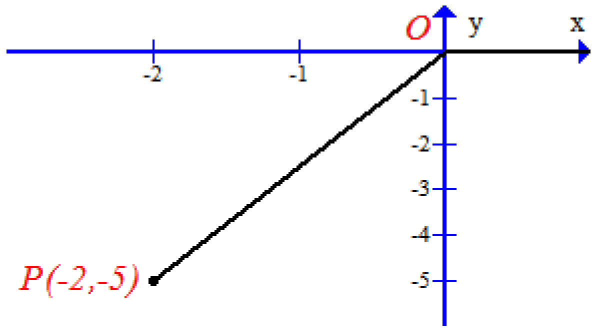
با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی با $a = ۴$ و $b = -۳$ داریم.

$$\sin\theta = \frac{-۳}{۵} \text{ ، } \cos\theta = \frac{۴}{۵} \text{ ، } \tan\theta = \frac{-۳}{۴} \text{ ، } \csc\theta = -\frac{۵}{۳} \text{ ، } \sec\theta = \frac{۵}{۴} \text{ ، } \cot\theta = -\frac{۴}{۳}$$

۲ - نقطه $P(-۲,-۵)$ روی ضلع انتهایی θ قرار دارد.

پاسخ

نقطه $P(-۲,-۵)$ در تصویر زیر نشان داده شده است.



با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$r = d(O,P) = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۵)^۲} = \sqrt{۴ + ۲۵} = \sqrt{۲۹}$$

با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی با $a = -۲$ و $b = -۵$ داریم.

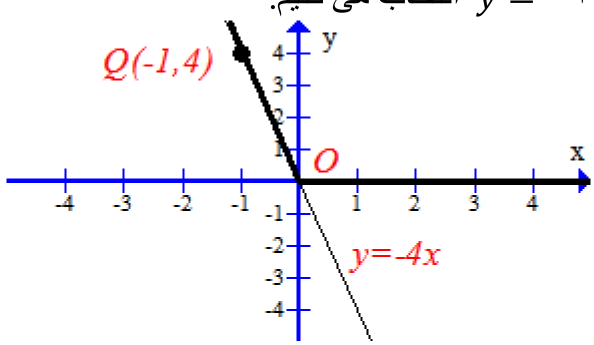
$$\sin\theta = -\frac{۵}{\sqrt{۲۹}} = -\frac{۵\sqrt{۲۹}}{۲۹} \text{ ، } \cos\theta = -\frac{۲}{\sqrt{۲۹}} = -\frac{۲\sqrt{۲۹}}{۲۹}$$

$$\tan\theta = \frac{۵}{۲} \text{ ، } \csc\theta = -\frac{\sqrt{۲۹}}{۵} \text{ ، } \sec\theta = -\frac{\sqrt{۲۹}}{۲} \text{ ، } \cot\theta = \frac{۲}{۵}$$

۳ – ضلع انتهایی θ در ناحیه دوم یعنی QII و روی خط $y = -۴x$ قرار دارد.

پاسخ

در تصویر زیر نمودار $y = -۴x$ رسم شده است و ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی θ پر رنگ تر نمایش داده شده. چون ضلع انتهایی در ربع صفحه دوم قرار دارد ، یک نقطه در ربع صفحه دوم یعنی $Q(-۱,۴)$ روی خط $y = -۴x$ انتخاب می کنیم.



با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$r = d(O,Q) = \sqrt{(-۱)^۲ + (۴)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی با $a = -۱$ و $b = ۴$ داریم.

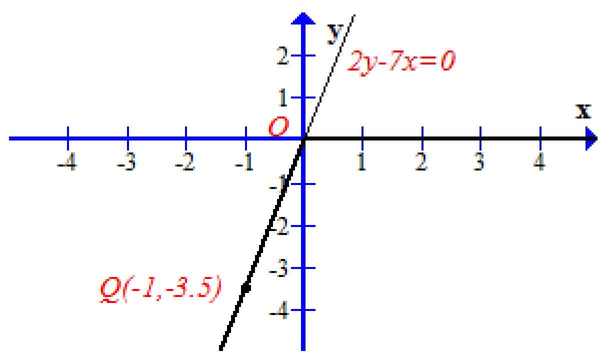
$$\sin\theta = \frac{۴}{\sqrt{۱۷}} = \frac{۴\sqrt{۱۷}}{۱۷} \text{ ، } \cos\theta = -\frac{۱}{\sqrt{۱۷}} = -\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}$$

$$\tan\theta = -۴ \text{ ، } \csc\theta = \frac{\sqrt{۱۷}}{۴} \text{ ، } \sec\theta = -\sqrt{۱۷}\ , \cot\theta = -\frac{۱}{۴}$$

۴ – ضلع انتهایی θ در ناحیه سه یعنی $QIII$ و روی خط $۲y - ۷x = 0$ قرار دارد.

پاسخ

در تصویر زیر نمودار $۲y - ۷x = 0$ رسم شده است و ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی θ پر رنگ تر نمایش داده شده. چون ضلع انتهایی در ربع صفحه سوم قرار دارد ، یک نقطه در ربع صفحه سوم یعنی $Q\left(-۱,-\frac{۷}{۲}\right)$ روی خط $۲y - ۷x = 0$ انتخاب می کنیم.



با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$r = d(O,Q) = \sqrt{(-۱)^۲ + \left(-\frac{۷}{۲}\right)^۲} = \sqrt{\frac{۵۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۵۳}}{۲}$$

با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی با $a = -۱$ و $b = -\frac{۷}{۲}$ داریم.

$$\sin\theta = \frac{-\frac{۷}{۲}}{\frac{\sqrt{۵۳}}{۲}} = -\frac{۷}{\sqrt{۵۳}} = -\frac{۷\sqrt{۵۳}}{۵۳}$$

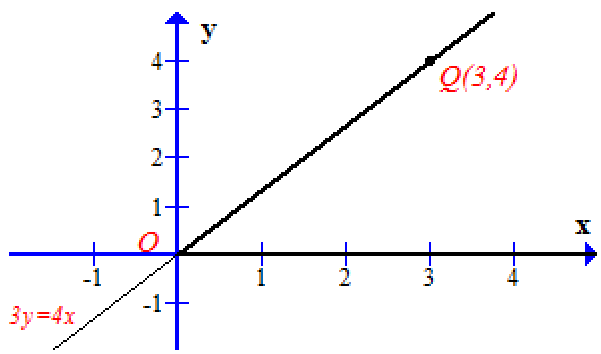
$$\cos\theta = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۵۳}}{۲}} = \frac{-۲}{\sqrt{۵۳}} = -\frac{۲\sqrt{۵۳}}{۵۳}$$

$$\tan\theta = \frac{۷}{۲} \text{ ، } \csc\theta = -\frac{\sqrt{۵۳}}{۷} \text{ ، } \sec\theta = -\frac{\sqrt{۵۳}}{۲} \text{ ، } \cot\theta = \frac{۲}{۷}$$

۵ – ضلع انتهایی θ در ناحیه یک یعنی QI و روی خط $۳y = ۴x$ قرار دارد.

پاسخ

در تصویر زیر نمودار $۳y = ۴x$ رسم شده است و ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی θ پر رنگ تر نمایش داده شده. چون ضلع انتهایی در ربع صفحه اول قرار دارد ، یک نقطه در ربع صفحه اول یعنی $Q(۳,۴)$ روی خط $۳y = ۴x$ انتخاب می کنیم.



با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$r = d(O,Q) = \sqrt{(۳)^۲ + (۴)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی با $a = ۳$ و $b = ۴$ داریم.

$$\sin\theta = \frac{۴}{۵} \text{ ، } \cos\theta = \frac{۳}{۵} \text{ ، } \tan\theta = \frac{۴}{۳} \text{ ، } \csc\theta = \frac{۵}{۴} \text{ ، } \sec\theta = \frac{۵}{۳} \text{ ، } \cot\theta = \frac{۳}{۴}$$

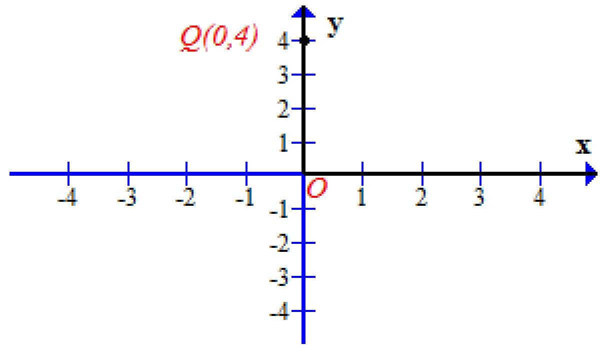
۶- $\theta = ۴۵۰°$ است.

پاسخ

زاویه $۴۵۰°$ هم ترمینال است با زاویه $۹۰°$ پس ضلع انتهایی θ روی قسمت مثبت محور y قرار دارد. لذا نقطه $(0,۱)$ را انتخاب می کنیم. لذا $r = ۱$ و $a = 0$ و $b = ۱$ است.

$$\sin\theta = ۱ \text{ ، } \cos\theta = 0 \text{ ، } \tan\theta - \text{ ، } \csc\theta = ۱ \text{ ، } \sec\theta - \text{ ، } \cot\theta = 0$$

در فرمول های بالا نماد – یعنی نسبت مثلثاتی تعریف نشدنی است. تصویر زیر



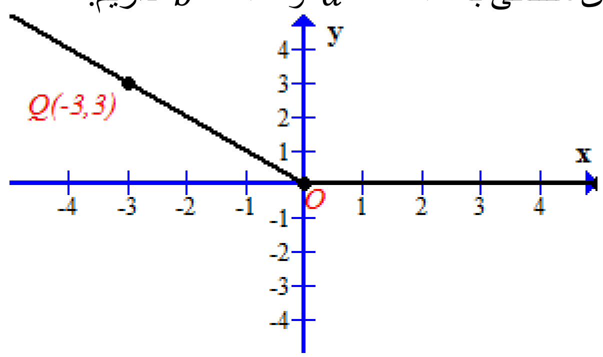
۷- $\theta = ۱۳۵^{\circ}$ است.

پاسخ

ضلع انتهایی زاویه ۱۳۵° در ربع صفحه دوم قرار دارد بطوری که ربع صفحه دوم را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. و یا به عبارت دیگر ، ضلع انتهایی روی خط $y = -x$ در ربع صفحه دوم است. با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$r = d(O,Q) = \sqrt{(-۳)^{۲} + ۳^{۲}} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

با استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی با $a = -۳$ و $b = ۳$ داریم.



$$\sin\theta = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ ، } \cos\theta = \frac{-۳}{۳\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\theta = -۱ \text{ ، } \csc\theta = \sqrt{۲} \text{ ، } \sec\theta = -\sqrt{۲} \text{ ، } \cot\theta = -۱$$

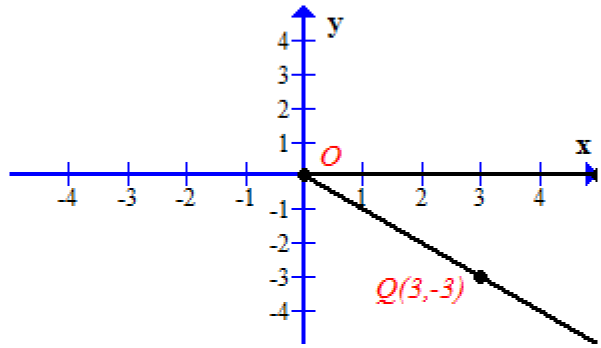
۸- $\theta = -۴۵^{\circ}$ است.

پاسخ

ضلع انتهایی زاویه -۴۵° در ربع صفحه چهارم روی خط $y = -x$ قرار دارد ، لذا نقطه $Q(۳,-۳)$ را روی ضلع انتهایی انتخاب می کنیم. پس داریم

$$r = d(O,Q) = \sqrt{(-۳)^{۲} + ۳^{۲}} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

همچنین $a = ۳$ و $b = -۳$ است.



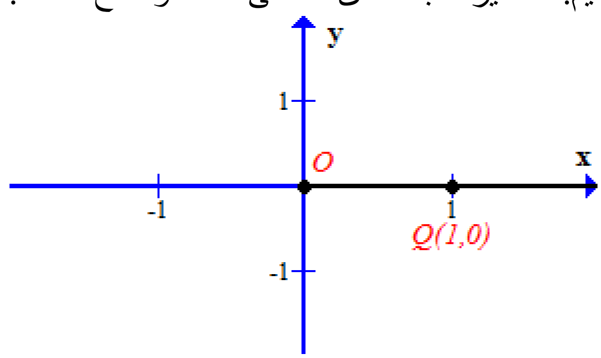
$$\sin\theta = \frac{-۳}{۳\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ ، } \cos\theta = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\theta = -۱ \text{ ، } \csc\theta = -\sqrt{۲} \text{ ، } \sec\theta = \sqrt{۲} \text{ ، } \cot\theta = -۱$$

۹- $\theta = ۳۶۰°$ است.

پاسخ

ضلع ابتدایی و انتهایی روی هم در قسمت مثبت محور x قرار دارد. پس $r = ۱$ و نقطه $Q(۱,0)$ را انتخاب می کنیم. مقادیر نسبت های مثلثاتی کاملا واضح هستند.



$$\sin\theta = 0 \text{ ، } \cos\theta = ۱ \text{ ، } \tan\theta = 0 \text{ ، } \csc\theta - \text{ ، } \sec\theta = ۱ \text{ ، } \cot\theta -$$

۱۰- $\theta = ۲۱۰°$ است.

پاسخ

همان طور که در تصویر زیر ملاحظه می کنید ، ضلع انتهایی زاویه $۲۱۰°$ در ربع صفحه سوم قرار دارد ، پس هم مختصات x و هم مختصات y هر نقطه ای روی این ضلع ، منفی است. همچنین می دانید که

$$۲۱۰° - ۱۸۰° = ۳۰°$$

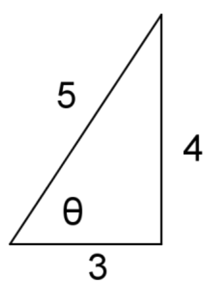
در مثال پنج همین بخش نسبت های مثلثاتی زاویه ۳۰ درجه را پیدا کردیم. پس می توانیم با تغییر علامت های نسبت های مثلثاتیزاویه ۳۰ نسبت های مثلثاتی زاویه ۲۱۰ را پیدا کنیم.

$$\sin\theta=-\frac{۱}{۲}\ ،\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ ،\ \tan\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ ،$$

$$\csc\theta=-۲\ ،\ \sec\ \theta=-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\ ،\ \cot\theta=\sqrt{۳}$$

در تمرینات ۱۵ — ۱۱ مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه θ در مثلث قائم الزاویه داده شده پیدا کنید.

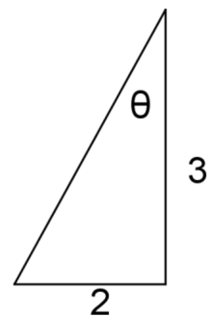
۱۱-



پاسخ

$$\sin\theta=\frac{۴}{۵}\ ،\ \cos\theta=\frac{۳}{۵}\ ،\tan\theta=\frac{۴}{۳}\ ,\ \csc=\frac{۵}{۴}\ ،\ \sec\theta=\frac{۵}{۳}\ ،\ \cot\theta=\frac{۳}{۴}$$

۱۲



پاسخ

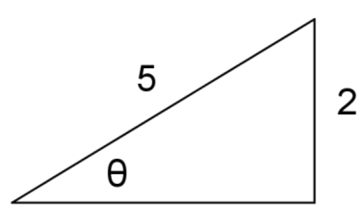
ابتدا از طریق قضیه فیثاغورث ، اندازه وتر را پیدا می کنیم.

$$\text{وتر} = \sqrt{۲^{۲} + ۳^{۲}} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$$

$$\sin\theta = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۲\sqrt{۱۳}}{۱۳} \text{ ، } \cos\theta = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

$$\tan\theta = \frac{۲}{۳} \text{ ، } \csc\theta = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲} \text{ ، } \csc = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲} \text{ ، } \sec\theta = \frac{\sqrt{۱۳}}{۳} \text{ ، } \cot\theta = \frac{۳}{۲}$$

۱۳ _



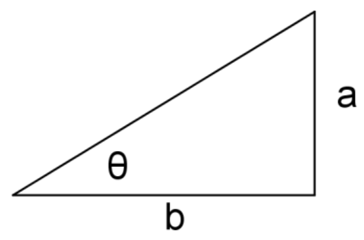
ابتدا اندازه ضلع مجاور را پید ا می کنیم.

$$\text{ضلع مجاور} = \sqrt{۵^{۲} - ۲^{۲}} = \sqrt{۲۱}$$

$$\sin\theta = \frac{۲}{۵} \text{ ، } \cos\theta = \frac{\sqrt{۲۱}}{۵} \text{ ، } \tan\theta = \frac{۲\sqrt{۲۱}}{۲۱} \text{ ، } \cot\theta = \frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$$

$$\csc\theta = \frac{۵}{۲} \text{ ، } \sec\theta = \frac{۵}{\sqrt{۲۱}} = \frac{۵\sqrt{۲۱}}{۲۱} \text{ ،}$$

۱۴ -



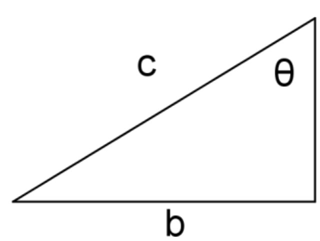
ابتدا اندازوتر را پیدا می کنیم.

$$\text{وتر} = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \text{ ، } \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \text{ ، } \tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\csc\theta = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲}}{a} \text{ ، } \sec\theta = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲}}{b} \text{ ، } \cot\theta = \frac{b}{a}$$

۱۵ _



ابتدا اندازه ضلع مجاور را پیدا می کنیم.

$$\text{ضلع مجاور} = \sqrt{c^۲ - b^۲}$$

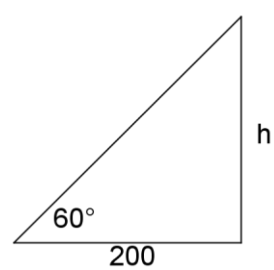
$$\sin\theta = \frac{b}{c} \text{ ، } \cos\theta = \frac{\sqrt{c^۲ - b^۲}}{c} \text{ ، } \tan\theta = \frac{b}{\sqrt{c^۲ - b^۲}}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} \text{ ، } \sec\theta = \frac{c}{\sqrt{c^۲ - b^۲}} \text{ ، } \cot\theta = \frac{\sqrt{c^۲ - b^۲}}{b}$$

۱۶ – در جنگل های آفریقا ، درخت هایی می روید که ارتفاع حیرت انگیزی دارند. یک جنگل بان در مسافت ۲۰۰ فوتی یک چنین درختی ایستاده و نوک درخت را با زاویه فرازه نمای ۶۰° می بیند. ارتفاع تقریبی درخت را حساب کنید.

پاسخ

تصویر زیر را ملاحظه نمایید. اگر ارتفاع درخت را h بنامیم , خواهیم داشت.



$$\tan ۶۰^\circ = \frac{h}{۲۰۰}$$

$$h = \tan ۶۰^\circ (۲۰۰) = \left(\sqrt{۳}\right)(۲۰۰) \approx ۳۴۶/۴ \text{ فوت}$$

۱ .۵ - زاویه مرجع Reference Angle

در کتب درسی این بخش از مثلثات مورد بحث قرار نگرفته است .
اما این بخش مهمی است ، زیرا از طریق زاویه مرجع ، میتوانیم
نسبت های مثلثاتی کلیه زوایا را پیدا کنیم.
در بعضی از کتب انگلیسی زبان این بخش بنام زیر آمده است.
مقادیر توابع مثلثاتی

Values of Trigonometric Functions

در بخش های قبل مقادیر چند تابع مثلثاتی خاص را پیدا کردیم. حالا به این مساله فکر کنید که چگونه می توان **مقادیر کلیه توابع مثلثاتی را پیدا کنیم.**

چون تابع سینوس دارای دور تناوب ۲π است ، پس کافی است مقادیر سینوس برای $0 \le t \le ۲\pi$ را بدانیم ، زیرا این مقادیر در هر tبازه به طول ۲π تکرار می شوند. این موضوع برای دیگر توابع مثلثاتی هم صادق است. در حقیقت ، مقدار هر تابع مثلثاتی می توانیم پیدا کنیم ، اگر مقدار آن تابع را برای $0 \le t \le \frac{\pi}{۲}$ بدانیم. برای اثبات این موضوع ، ابتدا به تعریف زیر توجه کنید.

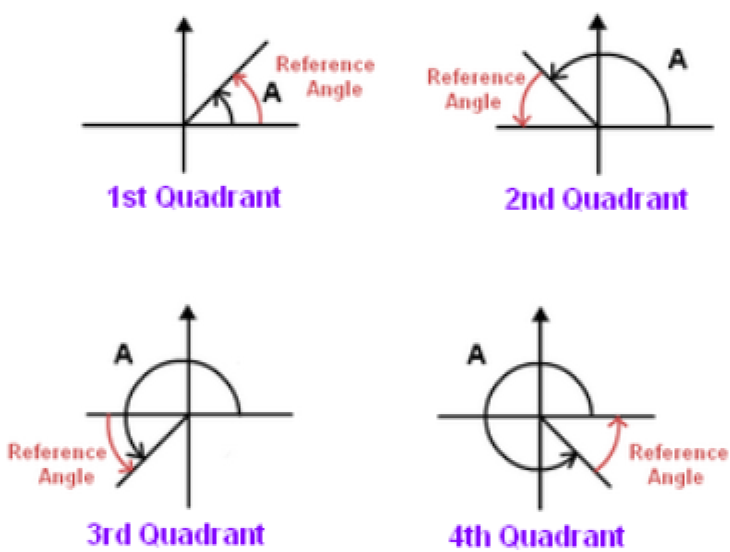
تعریف Definition

فرض کنید t یک عدد حقیقی باشد ، و فرض کنید θ یک زاویه در مکان متعارف و اندازه آن t رادیان باشد ، فرض کنید P یک نقطه روی دائره واحد U در رابطه با t باشد.

۱ - **عدد مرجع** در رابطه با t عبارت است از کوتاه ترین طول کمان t' روی U بین P و محور x

۲ - **زاویه مرجع** در رابطه با θ عبارت است از زاویه حادی که ضلع انتهایی θ با قسمت مثبت یا منفی محور x ایجاد می کند. این زاویه را θ' نام میدهیم. یا کوچک ترین زاویه ای که ضلع انتهایی زاویه داده شده با محور x ایجاد می کند.

در تصویر های زیر، کمان های سیاه رنگ زاویه اصلی یا اولیه است و کمان های قرمز رنگ زاویه مرجع است.



توجه داشته باشید که عدد مرجع و زاویه مرجع توسط محور x اندازه گیری می شوند و همیشه باید نا مساوی های زیر بر قرار باشند.

$$\mathbf{0 \leq t' \leq \frac{\pi}{۲} \qquad 0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{۲}}$$

برای هر مقداری از t و θ

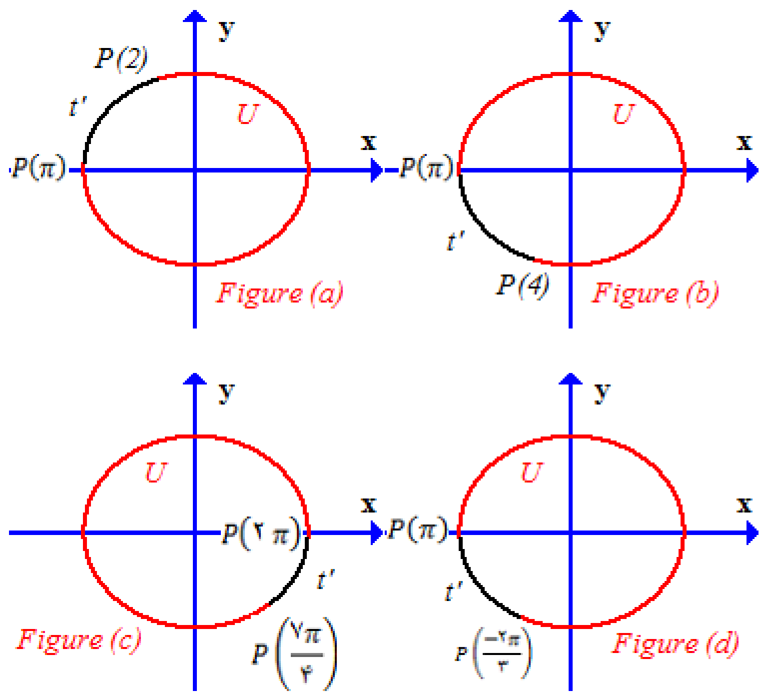
مثال ۱ – عدد مرجع t' را پیدا کنید ، اگر

$$a)\ t = ۲ \quad ,b)\ t = ۴ \quad ,c)\ t = \frac{۷\pi}{۴} \quad ، d)\ t = -\frac{۲\pi}{۳}$$

باشد.

پاسخ

فرض می کنیم $P(t)$ نقطه ای در رابطه با t روی دائره واحد U باشد.



$a)\ t' = \pi - ۲ \approx ۳/۱۴۱۶ - ۲ = ۱ / ۱۴۱۶$

$b)\ t' = ۴ - \pi \approx ۴ - ۳/۱۴۱۶ = ۰/ ۸۵۸۴$

$$c)\ t' = ۲\,\pi - \frac{۷\pi}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

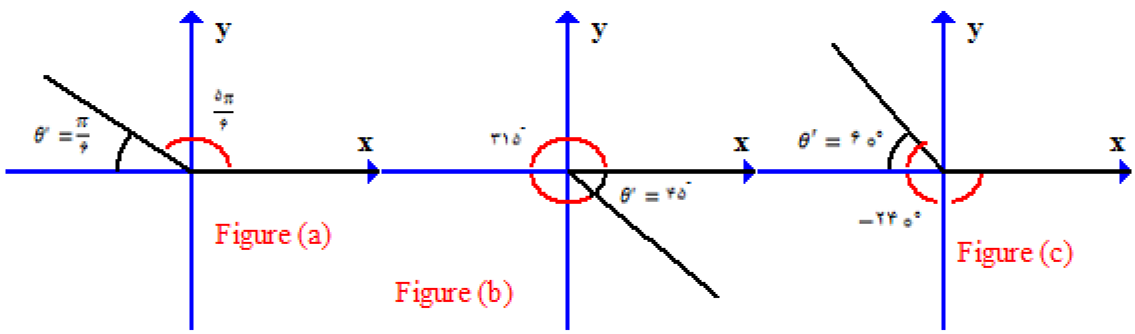
$$d)\ t' = \pi - \frac{۲\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}$$

مثال ۲ – زاویه مرجع θ' را رسم کنید و اندازه آنرا هم بر حسب رادیان و هم بر حسب درجه بیان کنید ، اگر

$$a)\ \theta = \frac{۵\pi}{۶} \ ، \ b)\ \theta = ۳۱۵^{\circ} \ ، \ c)\ \theta = -۲۴۰^{\circ}$$

باشد.

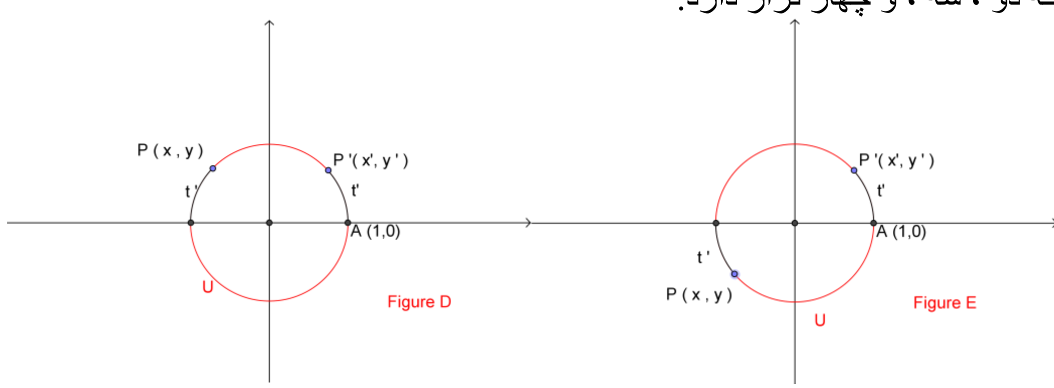
پاسخ

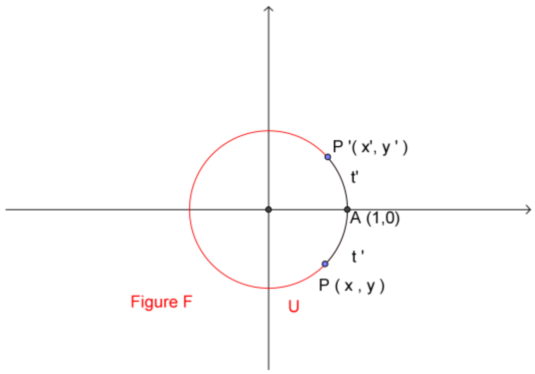


$$a)\ \theta' = \pi - \frac{۵\pi}{۶} = \frac{\pi}{۶} = ۳۰^{\circ} \ ، \ b)\ \theta' = ۳۶۰^{\circ} - ۳۱۵^{\circ} = ۴۵^{\circ} = \frac{\pi}{۴} \ ،$$

$$c)\ \theta' = ۱۸۰^{\circ} - ۱۲۰^{\circ} = ۶۰^{\circ} = \frac{\pi}{۳}$$

حالا نشان می دهیم که چگونه با استفاده از اعداد مرجع و زاویه های مرجع ، مقادیر توابع مثلثاتی را پیدا کنیم. فرض کنید $P(x,y)$ نقطه ای در رابطه با t روی دائره واحد U باشد. اگر P روی محور ها قرار نداشته باشد ، و t' عدد مرجع t باشد ، پس $0 < t' < \frac{\pi}{۲}$ است. نقطه $A(۱,0)$ را در نظر بگیرید. و فرض کنید $P'(x',y')$ نقطه ای روی دائره واحد U در ربع صفحه اول باشد بطوری $\widehat{AP'} = t'$ باشد. در تصاویر $D، E ,F$ نقطه $P(x,y)$ به ترتیب در ربع صفحه دو ، سه ، و چهار قرار دارد.





ملاحظه می کنید که در تمام حالت ها داریم.

$$x' = |x| \quad , \quad y' = |y|$$

و لذا

$$|\cos t| = |x| = x' = \cos t'$$
$$|\sin t| = |y| = y' = \sin t'$$
$$|\tan t| = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|} = \frac{y'}{x'} = \tan t'$$

بر حسب زاویه ها ، اگر θ' زاویه مرجع θ باشد ، پس

$$|\sin\theta| = \sin\theta' \quad ، \quad |\cos\theta| = \cos\theta'$$

سایر توابع مثلثاتی هم به همین طریق بدست می ایند.

قواعد پیدا کردن مقادیر توابع مثلثاتی

Rules for Finding Values of Trigonometric Functions

۱ - برای پیدا کردن مقدار تابع مثلثاتی یک عدد حقیقی t ابتدا مقدار تابع مثلثاتی t' مربوط به t را پیدا کنید و سپس علامت مناسب مثبت یا منفی جلو آن بگذارید.

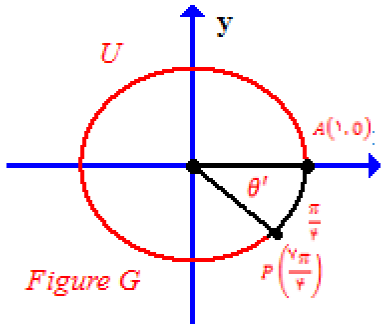
۲ - برای پیدا کردن مقدار تابع مثلثاتی یک زاویه θ ابتدا مقدار تابع مثلثاتی θ' مربوط به θ را پیدا کنید و سپس علامت مناسب مثبت یا منفی جلو آن بگذارید.

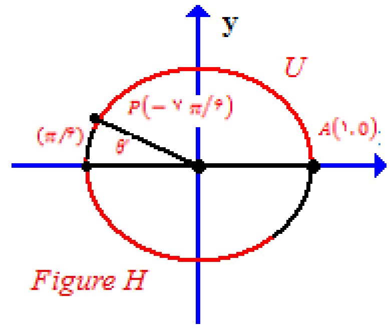
برای پیدا کردن علامت مناسب به جدول مندرج در بخش ۱.۲ مراجعه کنید.

مثال ۳ – مطلوب است $\sin\left(\frac{۷\pi}{۴}\right)$ و $\cos\left(-\frac{۷\pi}{۶}\right)$

پاسخ

می توانیم $\frac{۷\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۶}$ –را یا به عنوان اعداد حقیقی تعبیر کنیم و یا به عنوان اندازه زوایا .تصویر G نمایش زاویه $\frac{۷\pi}{۴}$ و مرجع آن ، تصویر H نمایش زاویه $\frac{۷\pi}{۶}$ – و مرجع آن است.





با استفاده از قاعده بالا داریم.

$$\sin\frac{۷\pi}{۴} = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

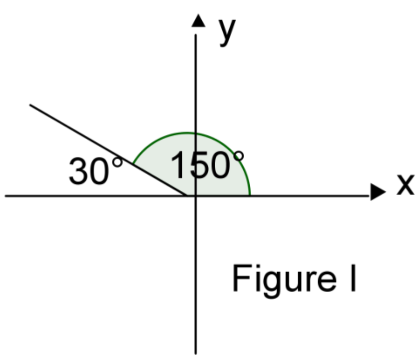
$$\cos\left(-\frac{۷\pi}{۶}\right) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

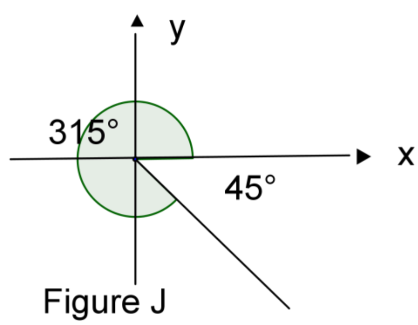
مثال ۴ – مقادیر توابع زیر را پیدا کنید.

$a)\ \sin ۱۵۰^\circ$ ، $\tan ۳۱۵^\circ$ ، $\sec(-۲۴۰^\circ)$

پاسخ

زاویه ها و زوایای مرجع در تصویر J, K ، I نشان داده شده اند.





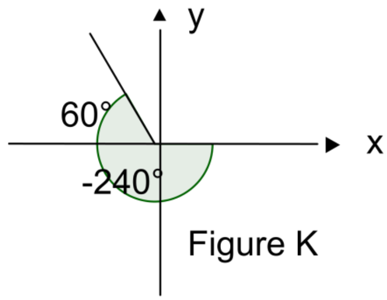


Figure K

با استفاده از قاعده بالا داریم.

$$a)\ \sin ۱۵۰° = \sin ۳۰° = \frac{۱}{۲}$$
$$b)\ \tan ۳۱۵^{\circ} = -\tan ۴۵^{\circ} = -۱$$
$$c)\ \sec(-۲۴۰°) = -\sec ۶۰° = -۲$$

تمرینات ۱.۵

در تمرینات ۳ – ۱ عدد مرجع t' را برای عدد داده شده t پیدا کنید.

۱) $(a) t = \frac{۳\pi}{۴}$ $(b) t = \frac{۴\pi}{۳}$ $(c) t = -\frac{\pi}{۶}$

۲) $(a) t = \frac{۹\pi}{۴}$ $(b) t = \frac{۷\pi}{۶}$ $(c) t = -\frac{۲\pi}{۳}$

۳) $(a) t = ۱/۵$ $(b) t = ۵$

در تمرینات ۵ – ۴ زاویه مرجع θ' را برای زاویه داده شده θ پیدا کنید.

۴) $(a)\theta = ۲۴۰°$ $(b)\theta = ۳۴۰°$ $(c)\theta = -۱۱۰°$

۵) $(a)\theta = ۱۳۰°\ ۴۰'$ $(b)\theta = -۴۰۵^{\circ}$ $(c)\theta = -۲۶۰°\ ۳۵'$

در تمرینات ۸ – ۶ مقدار دقیق توابع زیر را بدون استفاده از ماشین حساب پیدا کنید.

۶) $(a) \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)$ $(b) \sin\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)$

۷) $(a) \tan\left(-\frac{۵\pi}{۴}\right)$ $(b) \cot ۳۱۵^{\circ}$

۸) $(a) \csc ۳۰۰°$ $(b) \sec(-۱۲۰°)$

پاسخ تمرینات ۱.۵

در تمرینات ۳ — ۱ عدد مرجع t' را برای عدد داده شده t پیدا کنید.

۱) $(a)t=\frac{۳\pi}{۴}$　$(b)t=\frac{۴\pi}{۳}$　$(c)t=-\frac{\pi}{۶}$

پاسخ

$$(a)\ t'=\pi-\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}$$

$$(b)\ t'=\frac{۴\pi}{۳}-\pi=\frac{\pi}{۳}$$

چون باید داشته باشیم $0\le t'\le\frac{\pi}{۲}$ پس

$$(c)\ t'=\frac{\pi}{۶}$$

۲) $(a)t=\frac{۹\pi}{۴}$　$(b)t=\frac{۷\pi}{۶}$　$(c)t=-\frac{۲\pi}{۳}$

پاسخ

$$(a)\ t'=\frac{۹\pi}{۴}-۲\pi=\frac{\pi}{۴}$$

$$(b)\ t'=\frac{۷\pi}{۶}-\pi=\frac{\pi}{۶}$$

$$(c)\ t'=\pi-\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$$

۳) $(a)t=۱/۵$　$(b)t=۵$

پاسخ

$$(a)\ t'=\pi-۱/۵$$
$$(b)\ t'=۲\pi-۵$$

در تمرینات ۵ — ۴ زاویه مرجع θ' را برای زاویه داده شده θ پیدا کنید.

۴) $(a)\theta=۲۴۰^\circ$　$(b)\theta=۳۴۰^\circ$　$(c)\theta=-۱۱۰^\circ$

پاسخ

$$(a)\ \theta'=۲۴۰^\circ-۱۸۰^\circ=۶۰^\circ$$
$$(b)\ \theta'=۳۶۰^\circ-۳۴۰^\circ=۲۰^\circ$$
$$(c)\ \theta'=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ$$

۵) $(a)\theta = ۱۳۰^{\circ}\ ۴۰'$ $\quad (b)\theta = -۴۰۵^{\circ}$ $\quad (c)\theta = -۲۶۰^{\circ}\ ۳۵'$

پاسخ

$$(a)\ \theta' = ۱۷۹^{\circ}\ ۶۰' - ۱۳۰^{\circ}\ ۴۰' = ۴۹^{\circ}\ ۲۰'$$
$$(b)\ \theta' = ۴۰۵^{\circ} - ۳۶۰^{\circ} = ۴۵^{\circ}$$
$$(c)\ \theta' = ۲۶۰^{\circ}\ ۳۵' - ۱۸۰^{\circ}\ ۰۰' = ۸۰^{\circ}\ ۳۵'$$

در تمرینات ۸ – ۶ مقدار دقیق توابع زیر را بدون استفاده از ماشین حساب پیدا کنید.

۶) $(a) \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)$ $\quad (b) \sin\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)$

پاسخ

$$(a) \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$(b) \sin\left(\frac{۴\pi}{۳}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۷) $(a) \tan\left(-\frac{۵\pi}{۴}\right)$ $\quad (b) \cot ۳۱۵^{\circ}$

پاسخ

$$\tan\left(-\frac{۵\pi}{۴}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -۱$$
$$(b) \cot\left(۳۱۵^{\circ}\right) - \cot ۴۵^{\circ} = -۱$$

۸) $(a) \csc ۳۰۰^{\circ}$ $\quad (b) \sec\left(-۱۲۰^{\circ}\right)$

پاسخ

$$(a) \csc ۳۰۰^{\circ} = -\csc ۶۰^{\circ} = -\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$
$$(b) \sec\left(-۱۲۰^{\circ}\right) = -\sec\left(۶۰^{\circ}\right) = -۲$$

۱.۶ - نمودار های توابع مثلثاتی Graphs of the Trigonometric Functions

در بخش های قبل $\sin t$ و یا $\sin\theta$ برای نشان دادن مقادیر تابع سینوس در t و θ بکار بردیم.
حالا چون می خواهیم نمودار تابع سینوس را روی سیستم مختصات xy رسم کنیم ، معادله هایی به شکل $y = \sin x$ در نظر می گیریم. اینجا x یک عدد حقیقی است و یا اندازه یک زاویه بر حسب رادیان .
متغیر x را که اینجا بکار می بریم با x که در بخش ۱.۲ بکار بردیم اشتباه نشود. در آن بخش مراد از x مختصات x یک نقطه مانند P روی دائره واحد U بود. این موضوع در مورد دیگر توابع مثلثاتی هم در نظر بگیرید.

حالا اگر مثلا بخواهیم نمودار $y = \sin x$ رسم کنیم ، بایستی چند نقطه روی نمودار پیدا کنیم و سپس آن نقاط را به یک دیگر می کنیم. همان گونه که در جبر مثلا برای رسم $y = x^۲$ عمل می کردیم. البته لازم است از ماشین حساب کمک بگیرید.

برای مثال $\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \approx ۰/۷۰۷$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \approx ۰/۸۶۶$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۱}{۲}$
در تصویر A نمودار $y = \sin x$ و در تصویر B نمودار $y = \cos x$ را ملاحظه می کنید.

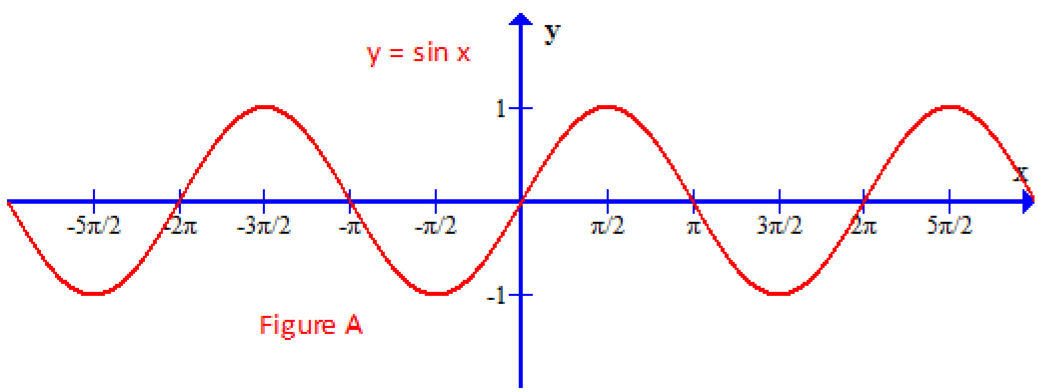


Figure A

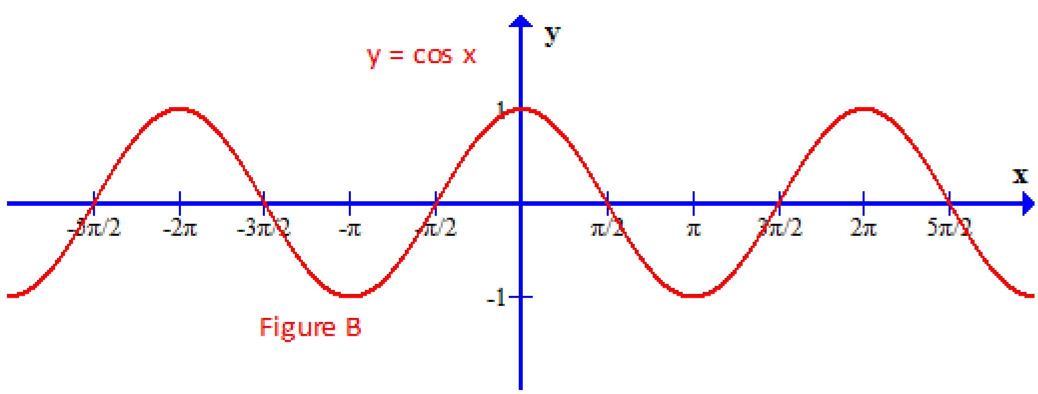


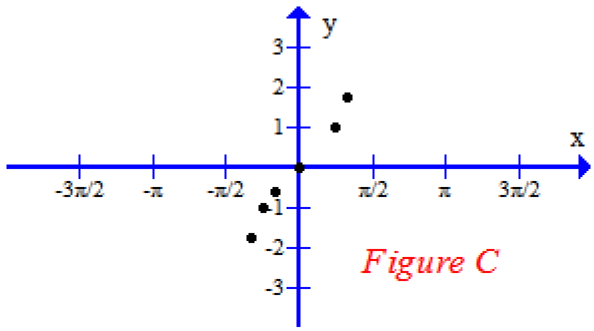
Figure B

آن قسمت از نمودار در بازه $[0, ۲\pi]$ را یک **دور تناوب** ***Cycle*** می نامند. برای تابع سینوس به این دور تناوب ، می گویند **موج سینوسی یا حرکت سینوسی** ***sine wave***

چند مقدار تابع تانژانت در جدول زیر ملاحظه می کنید.

x	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۶}$	0	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$
$\tan x$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	0	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$

در تصویر C نقاط بدست آمده را در صفحه مختصات مشخص می کنیم.



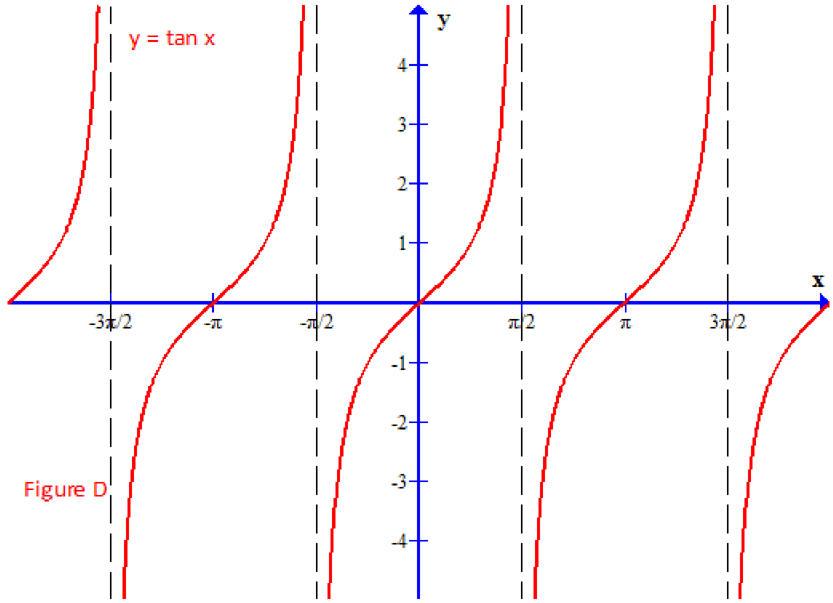
لازم است به مقادیر $\tan x$ در نزدیکی $x = \frac{\pi}{۲}$ توجه بیشتری شود. می دانید که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است. هنگامی که x به طرف $\frac{\pi}{۲}$ افزایش پیدا می کند ، صورت کسر یعنی $\sin x$ به یک نزدیک می شود. در صورتی که مخرج کسر یعنی $\cos x$ به صفر نزدیک می شود. در نتیجه $\tan x$ بتدریج بزرگ تر و بزرگ تر می شود.می دانید که $\frac{\pi}{۲} \approx \frac{۱}{۲}(۳/۱۴۱۶) = ۱/۵۷۰۸$

جدول زیر مقادیر $\tan x$ برای x نزدیک $\frac{\pi}{۲}$ با استفاده از ماشین حساب بدست آورده ایم.

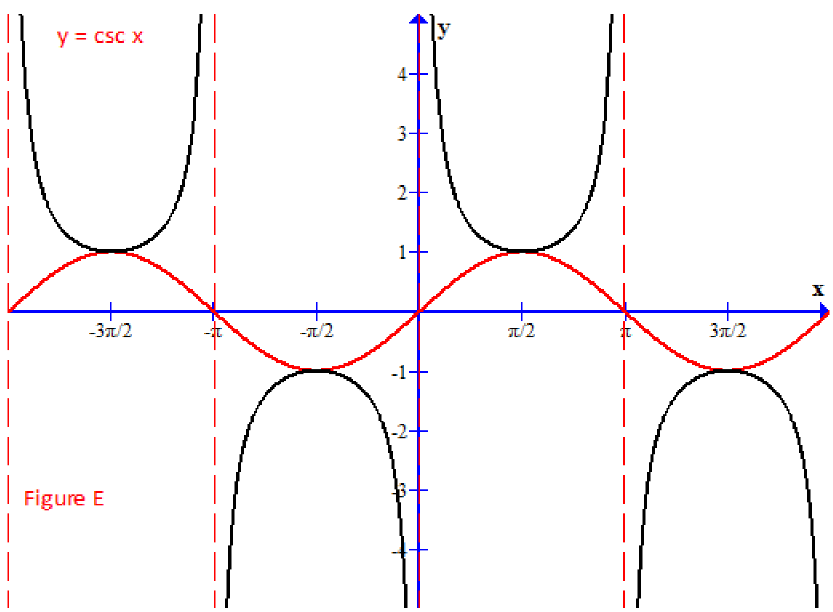
$$\tan(۱/۵۷۰۰) \approx ۱۲۵۵/۸$$
$$\tan(۱/۵۷۰۳) \approx ۲۰۱۴/۸$$
$$\tan(۱/۵۷۰۶) \approx ۵۰۹۳/۵$$
$$\tan(۱/۵۷۰۷) \approx ۱۰۳۸۱/۳$$
$$\tan(۱/۵۷۰۷۹) \approx ۱۵۸۰۵۹/۹$$

ملاحظه می کنید که $\tan x$ با چه سرعتی افزایش می یابد ، هنگامی که x به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می شود.

می گوییم هنگامی که x از مقادیر کمتر از $\frac{\pi}{۲}$ به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می شود ، $\tan x$ بطور نا محدود افزایش می یابد. به همین طریق اگر x از مقادیر بزرگ تر از $-\frac{\pi}{۲}$ به $-\frac{\pi}{۲}$ نزدیک شود ، پس $\tan x$ بطور نا محدود کوچک می شود. این حالت $\tan x$ در بازه $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ در تصویر D نشان داده شده است. مسلم است که این موضوع در بازه های $\left(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right)$ و $\left(\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}\right)$ و بازه های مشابه به طول π تکرار می شود. لذا تابع تانژانت دارای دور تناوب π است. نمودار تانژانت دارای مجانب های عمودی است ، همان طور که در تصویر نشان داده شده است.



چون $\tan(-x) = -\tan x$ پس تابع تانژانت یک تابع فرد است. لذا نمودار نسبت به مبدا قرینه است.
نمودار بقیه توابع مثلثاتی را می توان به اسانی رسم کرد. مثلا ، چون $\csc x = \frac{۱}{\sin x}$ است ، پس می توان مختصات y یک نقطه روی نمودارتابع کسکانت را با معکوس کردن مختصات y نقطه مربوطه روی نمودار تابع سینوس پیدا کرد. این کار عملی است بجز برای $n \in \mathbb{Z}$ ، $x = n\pi$ زیرا در این صورت $\sin x = 0$ و لذا $\frac{۱}{\sin x}$ تعریف نشده است. برای آسان شدن کار ,می توان ابتدا نمودار تابع سینوس رارسم کرد ، نمودار قرمز رنگ در تصویر E ، و سپس مختصات y روی نمودار سینوس را معکوس کرد تا نقاط روی نمودار کسکانت بدست آورد.



به رفتار تابع کسکانت توجه داشته باشد. تابع کسکانت بطور نا محدود افزایش و یا کاهش پیدا می کند هنگامی که x به $n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$ نزدیک می شود. تابع کسکانت هم دارای مجانب های عمودی است.
چون $\sec x = \frac{۱}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{۱}{\tan x}$ پس نمودار آنها را هم می توان به همان طریق بالا رسم کرد. نمودار سکانت در تصویر F و نمودار کتانژانت را در تصویر G ملاحظه می کنید.

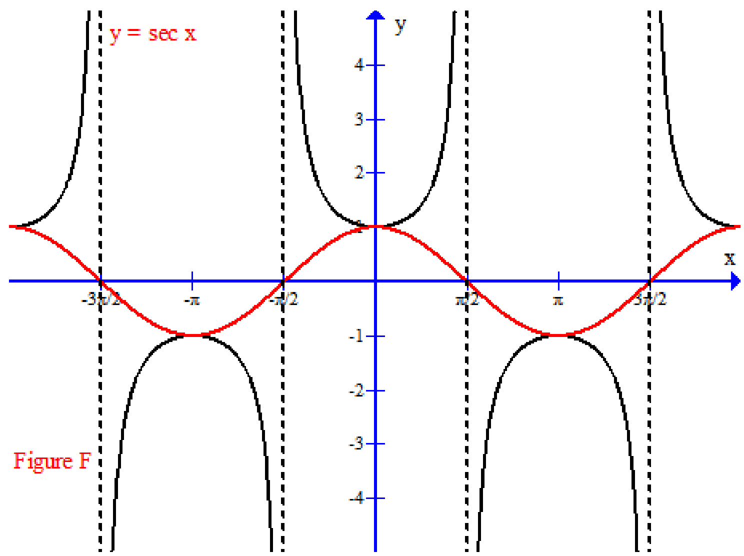


Figure F

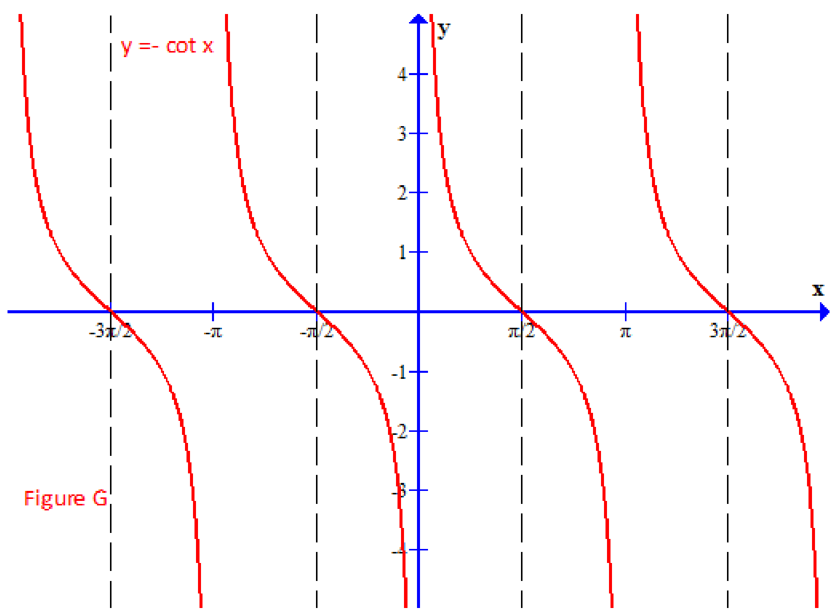
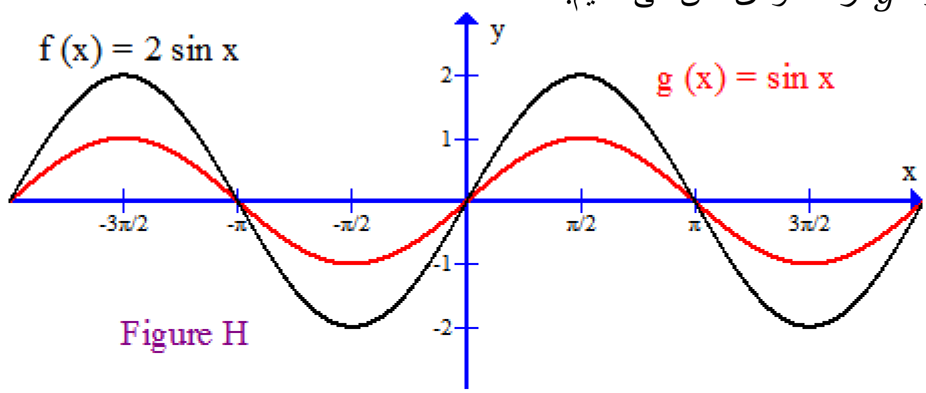


Figure G

مثال – نمودار $f(x) = ۲\sin x$ را رسم کنید.

پاسخ

اگر فرض کنیم $g(x) = \sin x$ باشد ، ملاحظه می کنید که برای هر یک از مختصات x در تابع f مختصات y در تابع f دو برابر مختصات y مربوطه در نمودار g است. پس با روش ساده که در ابتدای همین بخش ذکر شد ، نمودار تابع g را رسم می کنیم. ، نمودار قرمز رنگ ، و سپس هر یک از مختصات y را مضاعف می کنیم تا نقاط روی نمودار f پیدا شوند. تصویر H ، به عبارت دیگر ، نمودار g را عمودی کش می دهیم.



تمرینات ۱.۶

۱ - در کدام بازه ها بین -۲π و ۲π ، تابع سکانت در حا ل افزایش است؟

۲ – در کدام بازه ها بین -۲π و ۲π ، تابع سکانت در حا ل کاهش است؟

۳ - با کمک ماشین حساب تغییرات $\sec x$ را مورد بحث قرار دهید ، هنگامی که x از هر دو طرف به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می شود. یعنی هم از طرف راست و هم از طرف چپ $\frac{\pi}{۲}$

۴ - در مورد قرینه نمودار تابع سکانت بحث کنید.

۵ - نمودار $f(x) = ۴\sin x$ را رسم کنید.

۶ - نمودار $f(x) = \frac{۱}{۲}\sin x$ را رسم کنید.

۷ - نمودار $f(x) = ۲\cos x$ را رسم کنید.

۸ - نمودار $f(x) = \frac{۱}{۲}\cos x$ را رسم کنید.

۹ - نمودار $f(x) = -\sin x$ را رسم کنید.

پاسخ تمرینات ۱.۶

۱ - در کدام بازه ها بین -۲π و ۲π ، تابع سکانت در حال افزایش است؟

پاسخ

$$\left[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}\right) ، \left(-\frac{۳\pi}{۲},-\pi\right] ، \left[0,\frac{\pi}{۲}\right) ، \left(\frac{\pi}{۲},\pi\right]$$

۲ – در کدام بازه ها بین -۲π و ۲π ، تابع سکانت در حال کاهش است؟

پاسخ

$$\left[-\pi,-\frac{\pi}{۲}\right),\left(-\frac{\pi}{۲},0\right] ، \quad \left[\pi,\frac{۳\pi}{۲}\right),\left(\frac{۳\pi}{۲}، ۲\pi\right]$$

۳ - با کمک ماشین حساب تغییرات $\sec x$ را مورد بحث قرار دهید ، هنگامی که x از هر دو طرف به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می شود. یعنی هم از طرف راست و هم از طرف چپ $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ

هنگامی که x از طرف چپ به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می شود ، $\sec x$ به طرف ∞ می رود.

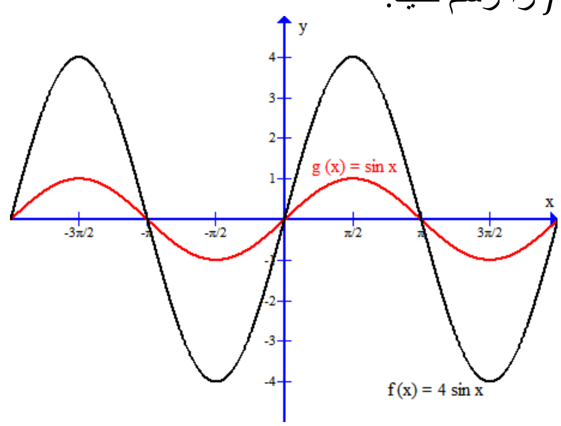
هنگامی که x از طرف راست به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می شود ، $\sec x$ به طرف $-\infty$ می رود.

۴ - در مورد قرینه نمودار تابع سکانت بحث کنید.

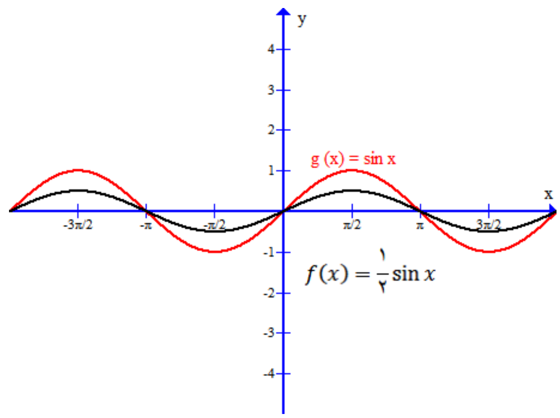
پاسخ

تابع سکانت نسبت به محور y قرینه است.

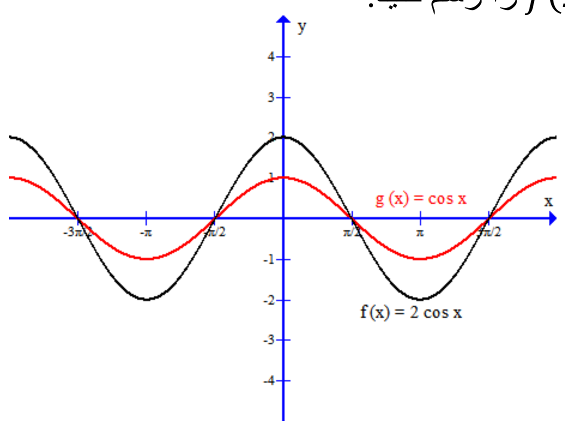
۵ - نمودار $f(x) = ۴\sin x$ را رسم کنید.



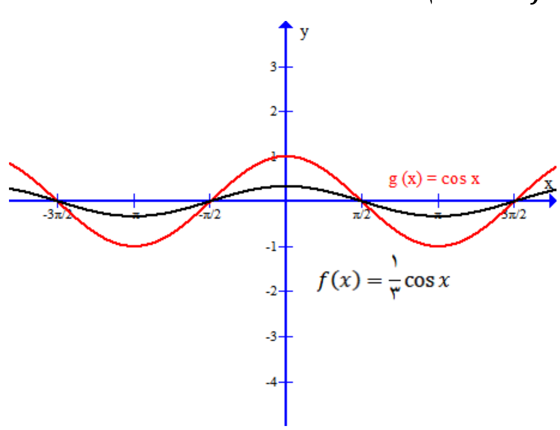
۶ - نمودار $f(x) = \frac{۱}{۲} \sin x$ را رسم کنید.



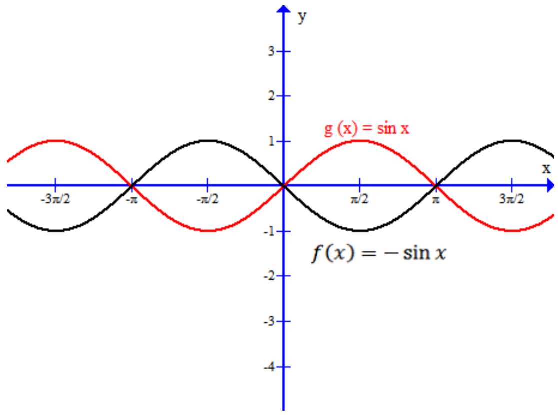
۷ - نمودار $f(x) = ۲ \cos x$ را رسم کنید.



۸ - نمودار $f(x) = \frac{۱}{۳} \cos x$ را رسم کنید.



۹ - نمودار $f(x) = -\sin x$ را رسم کنید.



۱.۷ - نمودار های مثلثاتی Trigonometric Graphs

در این بخش نمودار های معادله های

$$y = a\sin(bx + c) \quad \text{و} \quad y = a\cos(bx + c) \qquad (۱)$$

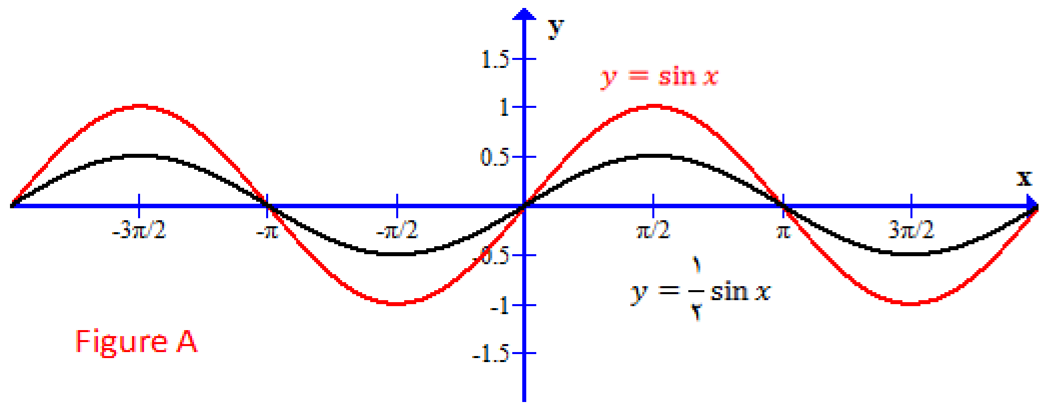
را مورد بحث قرار می دهیم. در معادله های بالا a، b , c اعداد حقیقی هستند. هدف ما این است که یک نمودار رسم کنیم ، بدون این که نقاط زیادی را روی صفحه مختصات مشخص کنیم. برای این کار از نمودار های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ کمک می گیریم.

ابتدا ، فرض می کنیم $c = 0$ و $b = ۱$ باشد ، پس داریم.

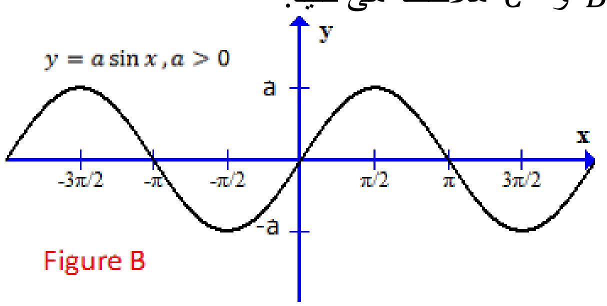
$$y = a\sin x \quad \text{و} \quad y = a\cos x \qquad (۲)$$

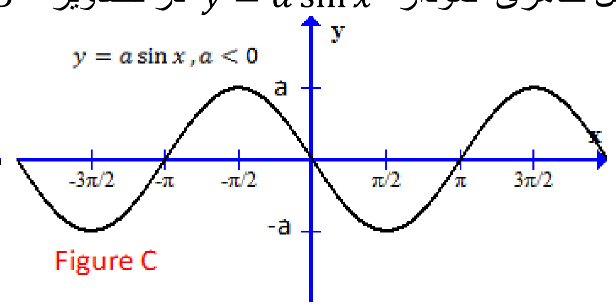
می توانیم مختصات y نقاط روی نمودار های معادله های شماره (۲) را با ضرب کردن مختصات y نقاط روی نمودار های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در a پیدا کنیم.

نمودار $y = ۲\sin x$ را در بخش ۱.۶ رسم کردیم. نمودار $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را در تصویر A ملاحظه می کنید. نمودار $y = \sin x$ قرمز رنگ است و نمودار $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ سیاه رنگ است.



شکل ظاهری نمودار $y = a\sin x$ در تصاویر B و C ملاحظه می کنید.





بیش ترین مقدار $|a|$ را **دامنه نوسان Amplitude** نمودار می نامند. و یا دامنه نوسان تابع

$$f(x) = a\sin x$$

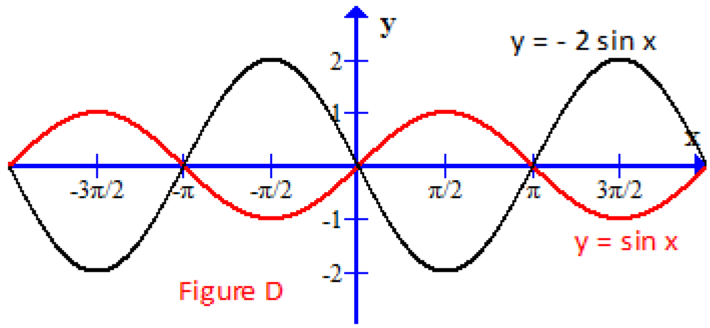
مثلا دامنه نوسان تصویر A عبارت است از $\frac{۱}{۲}$

اگر $a < 0$ باشد ، پس مختصات y نقاط روی نمودار $y = a\sin x$ منفی مختصات y مربوطه روی نمودار $y = |a|\sin x$ است. نمودار تصویر C انعکاس تصویر B روی محور x است.

مثال ۱ – دامنه نوسان $y = -۲ \sin x$ را پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

پاسخ

چون $a = -۲ < 0$ است ، پس نمودار آن شبیه ظاهر کلی نمودار تصویر C است. ابتدا نمودار $y = \sin x$ رسم می کنیم ، نمودار قرمز رنگ ، و سپس هر یک از مختصات y را در -۲ ضرب می کنیم. این نمودار سیاه رنگ در تصویر D را به ما می دهد. دامنه نوسان $|-۲| = ۲$ است.

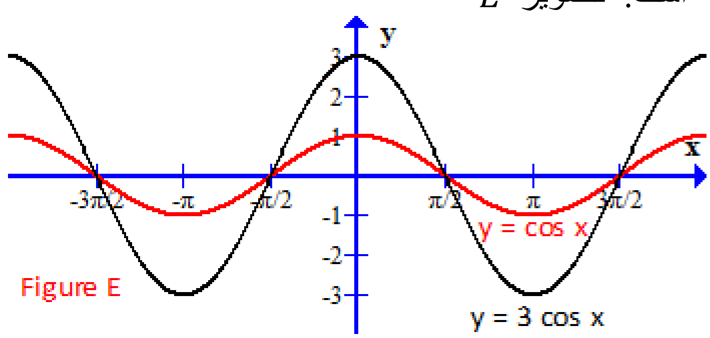


روش دیگر این است که نمودار $y = ۲ \sin x$ را روی محور x منعکس کنیم.

مثال – نمودار $y = ۳ \cos x$ را رسم کنید.

پاسخ

ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می کنیم ، و سپس مختصات y را در ۳ ضرب می کنیم. در این حالت ، دامنه نوسان ۳ است. تصویر E



حالا در مورد $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$ صحبت می کنیم ، در صورتی که $b \neq 0$ باشد. همان طور که قبلا هم گفته شد ، دامنه $|a|$ است. قضیه زیر دوره های تناوب این نمودار ها را توضیح می دهد.

قضیه – اگر $f(x) = a \sin bx$ یا $f(x) = a \cos bx$ باشد ، و $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ، پس دره تناوب تابع $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

اثبات – اگر فرض کنیم bx از صفر به ۲π افزایش پیدا کند ، دقیقا یک دور تناوب برای f بدست می آوریم. برای $b > 0$ داریم ، شرط لازم و کافی برای این که $0 \leq bx \leq ۲\pi$ باشد ، این است که $0 \leq x \leq \frac{۲\pi}{b}$ باشد ، و برای $b < 0$ داریم ، شرط لازم و کافی برای این که $0 \leq bx \leq ۲\pi$

باشد ، این است که $0 \le x \le \frac{۲\pi}{b}$ باشد. در هر دو حالت فقط یک دور تناوب در یک بازه به طول $\frac{۲\pi}{|b|}$ وجود دارد.

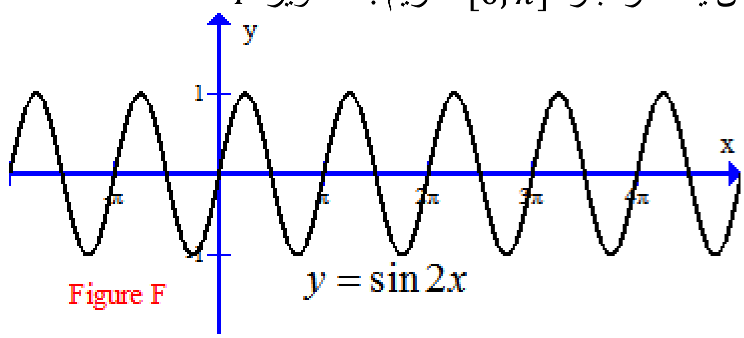
مثال ۳ – دامنه نوسان و دور تناوب f را پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم نمائید.

$$(a)\ f(x) = \sin ۲x \qquad (b)\ f(x) = \sin \frac{۱}{۲} x$$

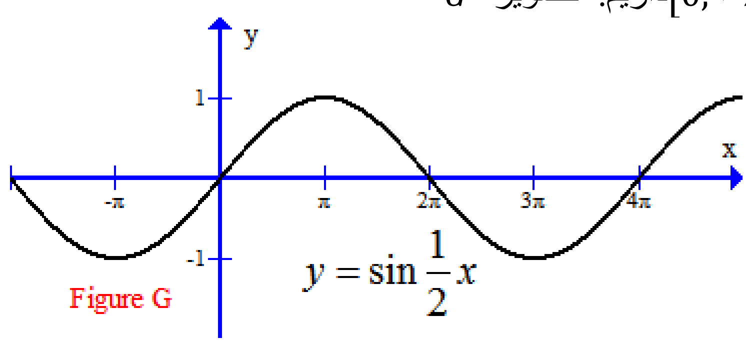
پاسخ

چون هر دو تابع به شکل $f(x) = a \sin bx$ است ، پس $a = ۱$ و دامنه نوسان هر کدام از نمودار ها یک است.

در تابع (a) داریم $b = ۲$ و لذا دور تناوب $\frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ است ، این یعنی فقط یک موج سینوسی با دامنه نوسان یک در بازه $[0, \pi]$ داریم . تصویر F



در تابع (b) داریم $b = \frac{۱}{۲}$ و لذا دور تناوب $\frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi$ است. یک موج سینوسی با دامنه نوسان یک در بازه $[0, ۴\pi]$داریم. تصویر G



اگر $f(x) = a \sin bx$ باشد و اگر b یک عدد مثبت بزرگ باشد ، پس دور تناوب $\frac{۲\pi}{b}$ کوچک است و لذا امواج سینوسی نزدیک هم هستند. در حقیقت تعداد b موج سینوسی در بازه $[0, ۲\pi]$ وجود دارد. مثلا در تصویر F داریم $b = ۲$ و لذا دو موج سینوسی در بازه $[0, ۲\pi]$ وجود دارد.

اگر b کوچک باشد ، پس $\frac{۲\pi}{b}$ بزرگ است و لذا امواج از هم فاصله دارند. مثلا اگر داشته باشیم $y = \sin \frac{۱}{۱۰} x$ پس $\frac{۱}{۱۰}$ موج سینوسی در بازه $[0, ۲\pi]$ وجود دارد و یک بازه به طول ۲۰π

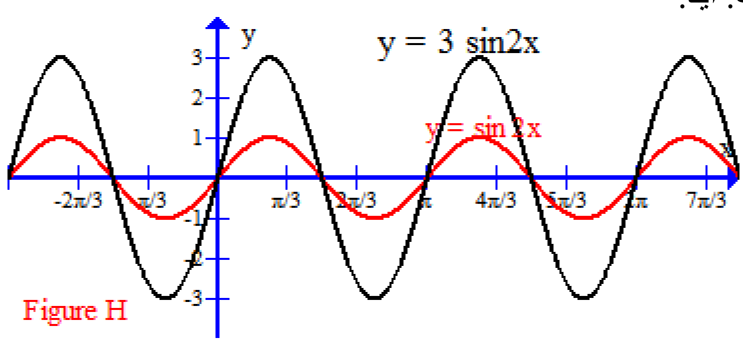
لازم است تا یک موج سینوسی کامل داشته باشیم. به تصویر G توجه کنید ، داریم $y=\sin\frac{۱}{۲}x$ لذا ملاحظه می کنید که در بازه $[0,۲\pi]$ نصف موج سینوسی داریم.

اگر $b<0$ باشد ، چون می دانیم که $\sin(-x)=-\sin x$ است ، پس با استفاده از این حقیقت می توانیم نمودار $y=a\sin bx$ را رسم کنیم. به عبارت دیگر ، نمودار $y=\sin(-۲x)$ مانند نمودار $y=-\sin ۲x$ است.

مثال ۴– دامنه نوسان و دور تناوب $f(x)=۳\sin ۲x$ را پیدا کنید و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

پاسخ

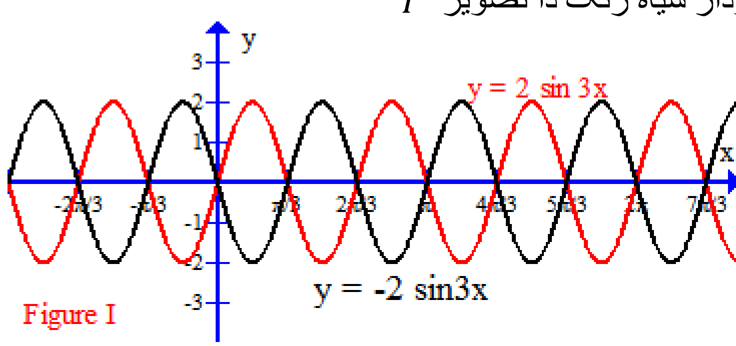
دامنه نوسان f سه است و دور تناوب $\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ است. ابتدا نمودار $y=\sin ۲x$ را رسم می کنیم ، نمودار قرمز رنگ ، و سپس مختصات هر کدام از نقاط را در سه ضرب می کنیم ، تا نمودار سیاه رنگ در تصویر H بدست آید.



مثال ۵ – دامنه نوسان و دور تناوب $f(x)=۲\sin(-۳x)$ را پیدا کنید ، و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

پاسخ

چون $f(x)=۲\sin(-۳x)=-۲\sin ۳x$ است ، پس دامنه نوسان $|-۲|=۲$ است و دورتناوب $\frac{۲\pi}{۳}$ است. پس یک موج سینوسی در بازه به طول $\frac{۲\pi}{۳}$ وجود دارد. علامت منفی دلالت بر این دارد که یک انعکاس حول محور x داریم. برای رسم نمودار ، بازه $\left[0,\frac{۲\pi}{۳}\right]$ را در نظر بگیرید ، یک موج سینوسی با دامنه نوسان ۲ رسم کنید , نمودار قرمز رنگ ، و سپس آنرا حول محور x منعکس کنید. نمودار سیاه رنگ دا تصویر I



در نهایت نمودار تابع زیر را مورد بحث قرار می دهیم.

$$\boldsymbol{f(x) = a\ \sin(bx + c)}$$

طبق معمول دامنه نوسان $|a|$ است. یک موج سینوسی بدست می آید ، اگر

$$0 \le bx + c \le ۲\,\pi$$

و یا

$$-c \le bx \le ۲\,\pi - c$$

باشد. لذا اگر $b > 0$ باشد ، پس یک موج سینوسی ایجاد می شود هنگامی که x در بازه های زیر تغییر کند.

$$\left[-\frac{c}{b}, \frac{۲\,\pi - c}{b}\right] \quad \text{یا} \quad \left[-\frac{c}{b}, -\frac{c}{b} + \frac{۲\pi}{b}\right]$$

اگر $-\frac{c}{b} < 0$ باشد ، این یعنی جا بجا کردن نمودار $y = a\sin bx$ به اندازه $\left|-\frac{c}{b}\right|$ به طرف چپ. اگر $-\frac{c}{b} > 0$ باشد ، جا بجا یی به سمت راست است. لذا دور تناوب تابع $\frac{۲\pi}{b}$ است. عدد $-\frac{c}{b}$ را **گام جا بجا یی Phase Shift** تابع می نامند. همین بحث را می توان ادامه داد ، اگر $b < 0$ باشد و یا اگر $f(x) = a\cos(bx + c)$ باشد. لازم نیست فرمول پیدا کردن گام جا بجا یی را حفظ کنیم. در هر مساله ای برای پیدا کردن بازه ای که شامل فقط یک دوره تناوب باشد ، می توانیم با حل دو معادله زیر بدست آوریم.

$$bx + c = 0 \quad \text{و} \quad bx + c = ۲\,\pi$$

مثال ۶ – نمودار $f = ۳\sin\left(۲x + \frac{\pi}{۲}\right)$ را رسم کنید و گام جا بجا یی را پیدا کنید.

پاسخ

در این مثال $c = \frac{\pi}{۲}$ ، $b = ۲$ ، $a = ۳$ است. پس نمودار دارای دامنه نوسان سه و دور تناوب $\frac{۲\pi}{۲} = \pi$ است. برای پیدا کردن یک بازه که شامل فقط یک موج سینوسی باشد ، فرض می کنیم $۲x + \frac{\pi}{۲}$ از صفر تا $۲\,\pi$ متغیر باشد ، لذا نقاط انتهایی این بازه با حل کردن دو معادله زیر بدست می آید.

$$۲x + \frac{\pi}{۲} = 0 \quad \text{و} \quad ۲x + \frac{\pi}{۲} = ۲\,\pi$$

در نتیجه

$$x = -\frac{\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x = \frac{۳\pi}{۴}$$

بدست می آوریم. لذا یک موج سینوسی با دامنه نوسان سه در بازه $\left[-\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}\right]$ اتفاق می افتد.

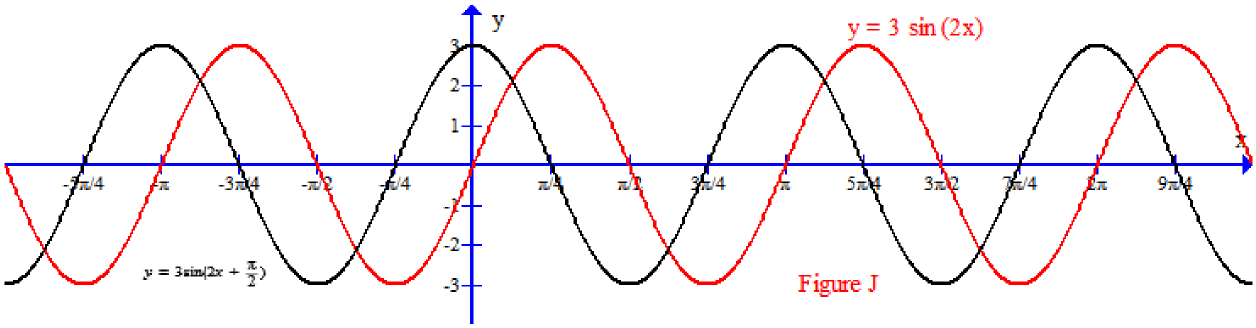
چون داریم

$$-\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲} = -\frac{\pi}{۴} < 0$$

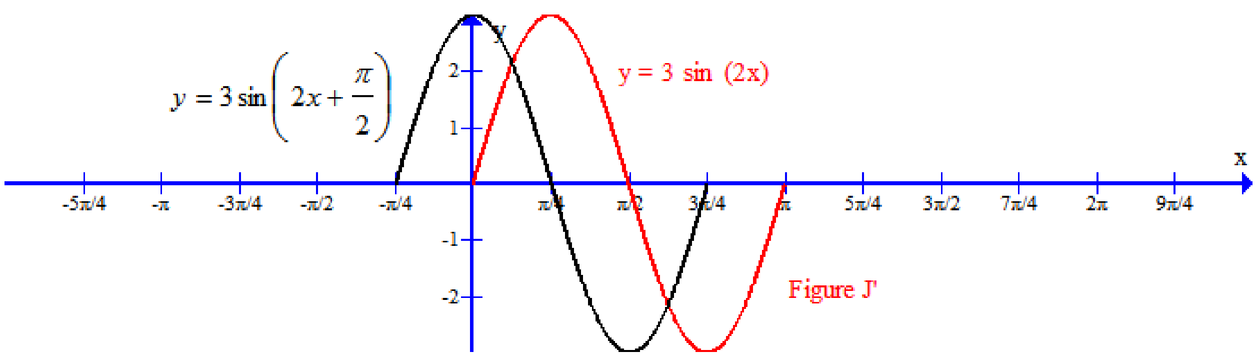
است ، پس برای رسم نمودار f ، نمودار $y = ۳\sin(۲x)$ را رسم نموده ، نمودار قرمز رنگ در تصویر J , و سپس به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ به طرف چپ جا بجا می کنیم. نمودار سیاه رنگ در تصویر J

$$\left|-\frac{c}{b}\right| = \frac{\pi}{۴}$$

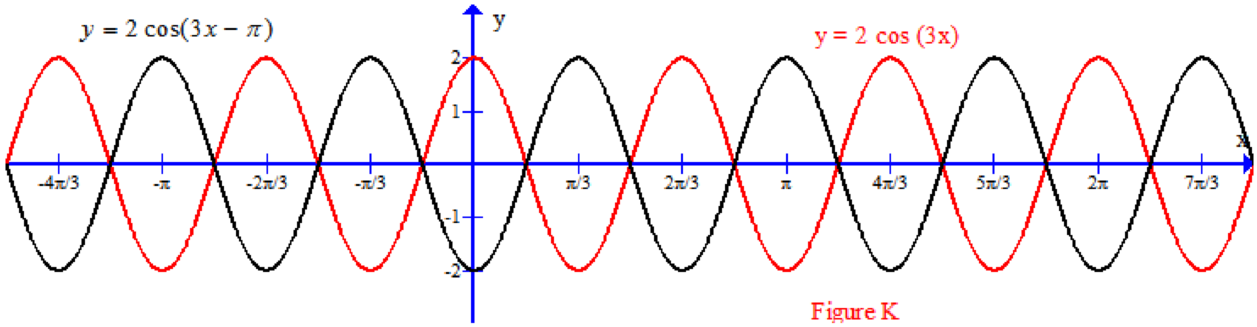
پس گام جا بجا یی $-\frac{\pi}{۴}$ است .



تصویر J' یک دور کامل $y = ۳\sin(۲x)$ قرمز رنگ
و یک دور کامل $y = ۳\sin\left(۲x + \frac{\pi}{۲}\right)$ سیاه رنگ را نشان می دهد. ملاحظه می کنید که نمودار سیاه رنگ همان نمودار قرمز رنگ است که به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ به سمت چپ جا بجا شده است.



مثال ۷ - نمودار $f(x) = ۲\cos(۳x - \pi)$ را رسم کنید و گام جا بجا یی را پید کنید.
پاسخ



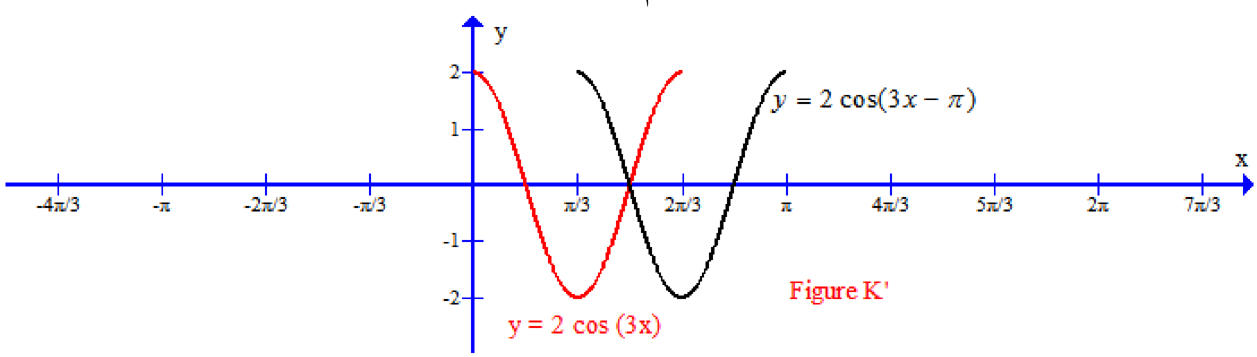
در این مثال $c = -\pi$, $b = ۳$ ، $a = ۲$ است. پس دامنه نوسان ۲ و دور تناوب $\frac{۲\pi}{۳}$ است.
برای پیدا کردن بازه ای که فقط یک چرخه یا دوره کامل کسینوس باشد ، فرض می کنیم $۳x - \pi$ از صفر تا ۲π متغیر باشد. نقاط انتهایی این بازه ریشه های معادلات زیر هستند.

$$۳x - \pi = 0 \quad \text{و} \quad ۳x - \pi = ۲\pi$$

در نتیجه

$$x = \frac{\pi}{۳} \quad \text{و} \quad x = \frac{۳\pi}{۳} = \pi$$

لذا یک دور کامل کسینوس با دامنه نوسان ۲ در بازه $\left[\frac{\pi}{۳}, \pi\right]$ اتفاق می افتد. برای رسم نمودار f ابتدا نمودار $y = ۲\cos(۳x)$ را رسم می کنیم، نمودار قرمز رنگ در تصویر K ، و چون $-\frac{c}{b} = \frac{\pi}{۳} > 0$ است ، نمودار قرمز رنگ را به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ به سمت راست جا بجا می کنیم. لذا گام جا بجا یی $\frac{\pi}{۳}$ است. نمودار سیاه رنگ نمودار f است.
تصویر K' یک دور کامل $y = ۲\cos(۳x)$ قرمز رنگ
و یک دور کامل $y = ۲\cos(۳x - \pi)$ سیاه رنگ را نشان می دهد. ملاحظه می کنید که نمودار سیاه رنگ همان نمودار قرمز رنگ است که به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ به سمت راست جا بجا شده است.



اگر $f(x) = a\tan(bx + c)$ باشد ، دور تناوب $\frac{\pi}{|b|}$ است ، زیرا تابع تانژانت دارای دور تناوب π است. چون حد و حدودی برای مختصات y نقاط وجود ندارد ، پس نمی توانیم دامنه نوسان تانژانت را مشخص کنیم. اما در هر حال برای پیدا کردن مختصات y تابع $y = a\tan(bx + c)$ مانند آنچه در مورد سینوس و کسینوس گفته شد عمل می کنیم گام جابجا یی هم در مورد $y = a\tan(bx + c)$ ذکر نمی کنیم.

بسیاری از پدیده ها در طبیعت، حالت تناوبی و ریتمیک دارند. چنین پدیده هایی را می توان بوسیله توابع مثلثاتی بیان کرد. به مثال ۸ توجه کنید.

تناوبی :Cyclic

ریتمیک :Rhythmic

مثال ۸ – مراحل مختلف تنفس عبارت است از بطور تناوبی فرو بردن هوا و سپس بیرون دادن هوا است. یعنی دم و بازدم. یک دور کامل دم و بازدم معمولا هر پنج ثانیه اتفاق می افتد. اگر F میزان جریان هوا بر حسب لیتر در ثانیه در زمان t باشد و اگر ماکسیمم میزان جریان هوا ۰/۶ لیتر در ثانیه باشد ، یک فرمول $F = a\sin bt$ پیدا کنید که متناسب با اطلاعات داده شده باشد.

مراحل مختلف :Process

تناوب :Alternate

متناوب :Alternating

دم –فرو بردن هوا :Inhale

بازدم –بیرون دادن هوا :Exhale

پاسخ

میزان جریان هوا F یک تابع بر حسب t است ، یعنی $F = f(t)$. اگر $f(t) = a\sin bt$ باشد و $b > 0$ ،پس دور تناوب f می شود $\frac{۲\pi}{b}$. در این مثال دور تناوب ۵ ثانیه است. و لذا

$$\frac{۲\pi}{b} = ۵ \Rightarrow b = \frac{۲\pi}{۵}$$

چون حد اکثر جریان هوا ، مربوط می شود به دامنه نوسان a ،پس داریم.

$$F = ۰/۶ \sin\left(\frac{۲\pi}{۵}t\right)$$

تمرینات ۱.۷

۱ - در تمرینات زیر نمودار هر تابع را رسم کنید و دامنه نوسان و دور تناوب آنرا مشخص کنید.

$a)\ f(x) = ۴\sin x$

$b)\ f(x) = \sin ۴x$

$c)\ f(x) = \frac{۱}{۴}\sin x$

$d)\ f(x) = \sin\left(\frac{۱}{۴}x\right)$

$e)\ f(x) = ۲\sin\left(\frac{۱}{۴}x\right)$

$f)\ f(x) = \frac{۱}{۲}\sin ۴x$

$g)\ f(x) = -۴\sin x$

$h)\ f(x) = \sin(-۴x)$

۲ - در تمرینات زیر نمودار f را رسم کنید و دامنه نوسان و دور تناوب را مشخص کنید.

$a)\ f(x) = ۳\cos x$

$b)\ f(x) = \cos ۳x$

$c)\ f(x) = \frac{۱}{۳}\cos x$

$d)\ f(x) = \cos\frac{۱}{۳}x$

$e)\ f(x) = ۲\cos\left(\frac{۱}{۳}x\right)$

$f)\ f(x) = \frac{۱}{۳}\cos ۲x$

$g)\ f(x) = -۳\cos x$

$h)\ f(x) = \cos(-۳x)$

در تمرینات ۲۲ – ۳ نمودار هر یک از معادله ها را رسم کنید.

۳) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{۲}\right)$

۴) $y = ۳\sin\left(x - \frac{\pi}{۳}\right)$

۵) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)$

۶) $y = ۴\cos\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)$

۷) $y = \sin(۳x + \pi)$

۸) $y = -۲\sin(۳x + \pi)$

۹) $y = ۵\sin\left(۳x - \frac{\pi}{۲}\right)$

۱۰) $y = ۶\sin(\pi x)$

۱۱) $y = ۲\cos\frac{\pi}{۲}x$

۱۲) $y = \frac{۱}{۲}\sin ۲\pi x$

۱۳) $y = \frac{۱}{۲}\sec x$

۱۴) $y = -۲\csc x$

۱۵) $y = \sec ۲x$

۱۶) $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$

۱۷) $y = \tan\frac{۱}{۲}x$

۱۸) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{۲}\right)$

۱۹) $y = \frac{۱}{۲}\cot x$

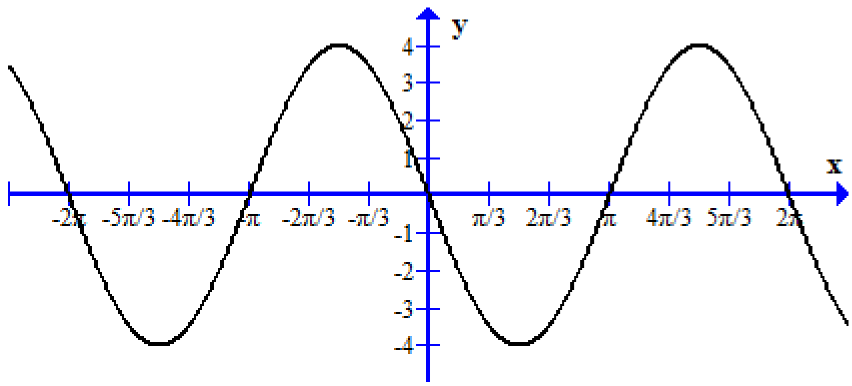
۲۰) $y = \tan(-x)$

۲۱) $y = ۲\sin\left(x - \frac{\pi}{۲}\right)$

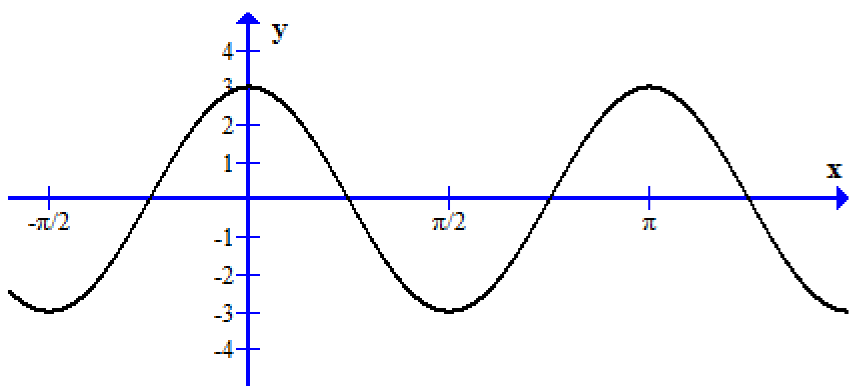
۲۲) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{۲}\right)$

در تمرینات ۲۴ – ۲۳ نمودار توابع مثلثاتی را ملاحظه می کنید. برای هر یک
الف – دامنه نوسان و دور تناوب را پیدا کنید.
ب – یک معادله به شکل $y = a\sin(bx + c)$ بنویسید.
ج – گام جا بجا یی را پیدا کنید.

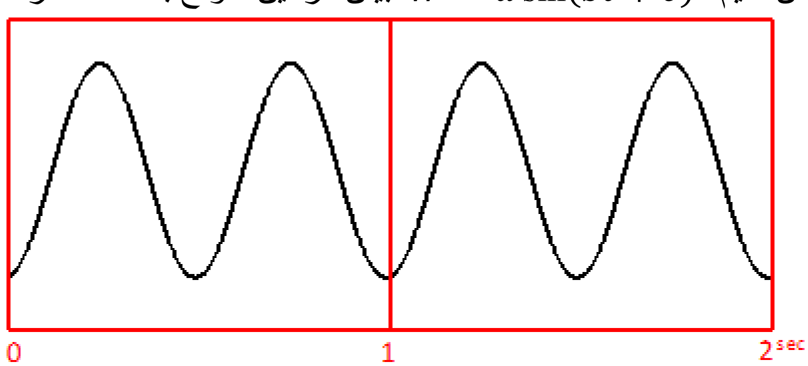
۲۳



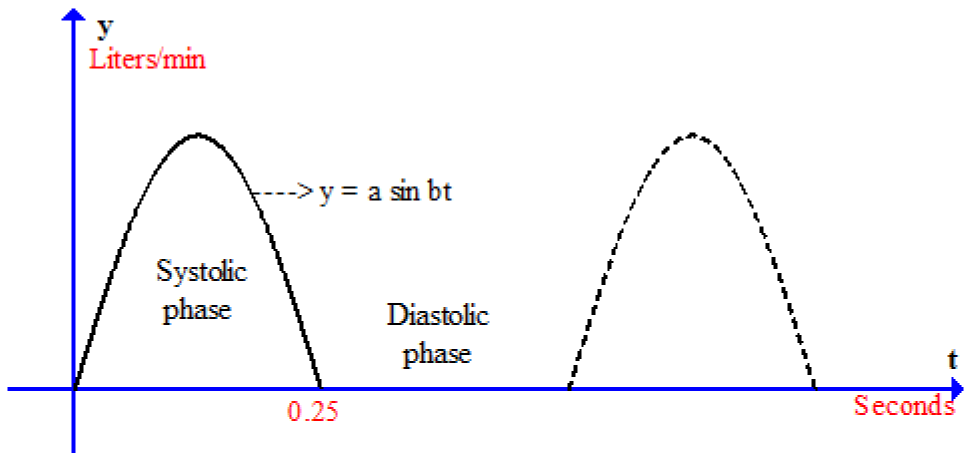
۲۴



۲۵ - در تصویر زیر امواج ثبت شده توسط مغز نگار الکتریکی مغز انسان هنگام خوب عمیق ملاحظه می کنید. اگر فرض کنیم $W = a\sin(bt + c)$ بیان گر این امواج باشد ، مقدار b را پیدا کنید.



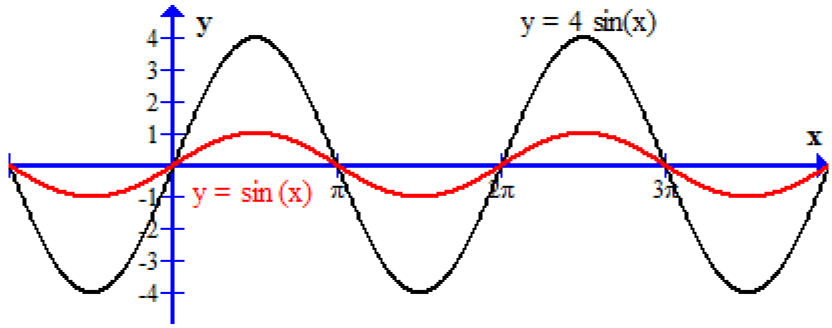
۲۶ – ضربان قلب انسان شامل مرحله سیستو لیک $Systolic\ phase$ است که در این مرحله خون از بطن قلب به آئورت جریان می‌یابد و مرحله دیاستو لیک $Distolic\ phase$ است که در این مرحله ماهیچه قلب استراحت می کند. یک تابع که نمودار آن در ذیل مشاهده می کنید اغلب برای نشان دادن یک دور کامل این جریان بکار می رود. برای یک شخص معین مرحله سیستو لیک $\frac{۱}{۴}$ ثانیه طول می کشد. و حد اکثر میزان جریان خون ۸ لیتر در ثانیه است. مطلوب است a و b.



پاسخ تمرینات ۱.۷

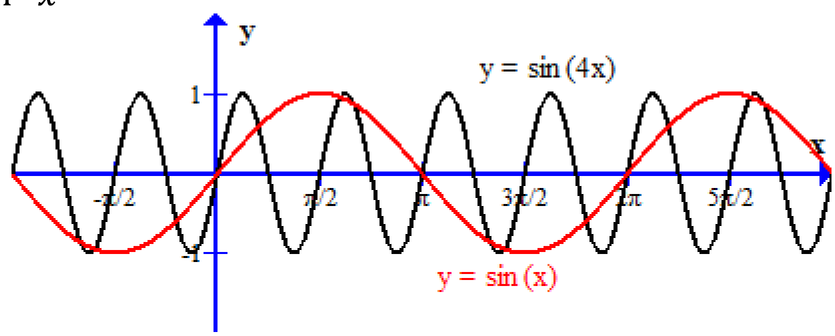
۱ - در تمرینات زیر نمودار هر تابع را رسم کنید و دامنه نوسان و دور تناوب آنرا مشخص کنید.

$a)\ f(x) = ۴\sin x$



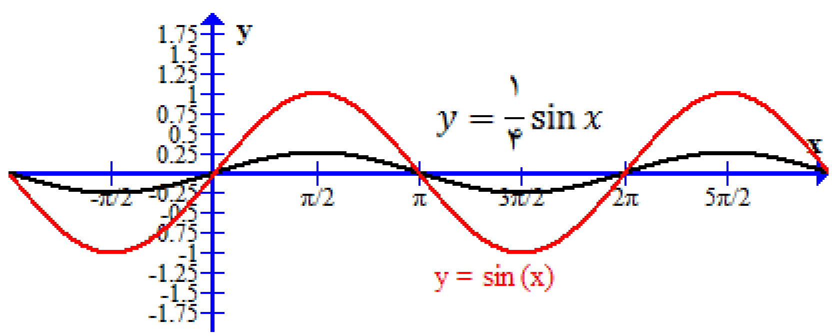
دور تناوب = ۲π ، دامنه نوسان = ۴

$b)\ f(x) = \sin ۴x$



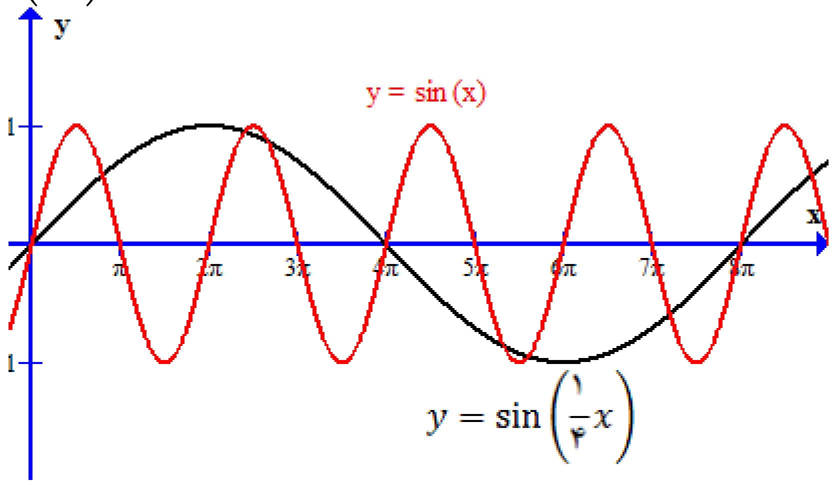
دور تناوب = $\frac{\pi}{۲}$ ، دامنه نوسان = ۱

$c)\ f(x) = \frac{۱}{۴}\sin x$



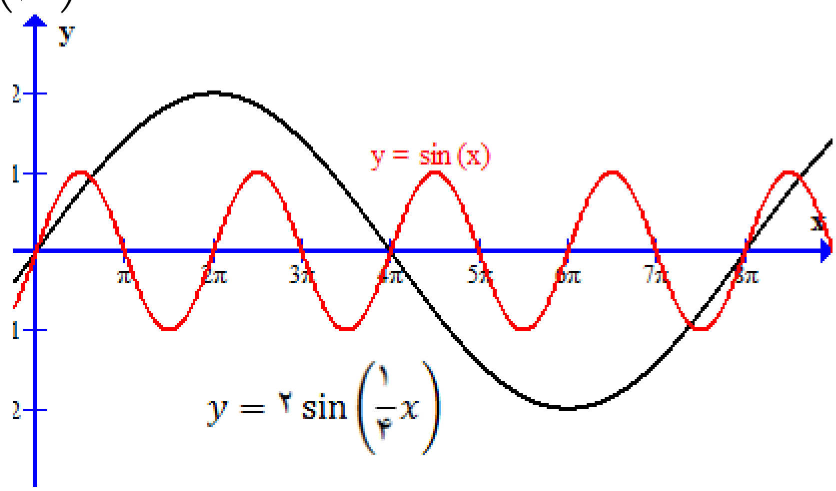
دور تناوب = ۲ π ، دامنه نوسان = $\frac{۱}{۴}$

$d)\ f(x) = \sin\left(\frac{۱}{۴}x\right)$



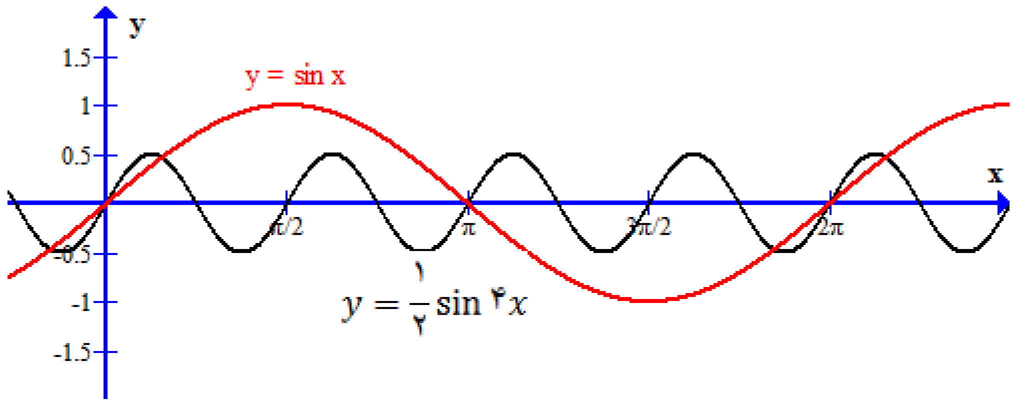
π ۸ = دور تناوب   ،   ۱ = دامنه نوسان

$e)\ y = ۲\sin\left(\frac{۱}{۴}x\right)$



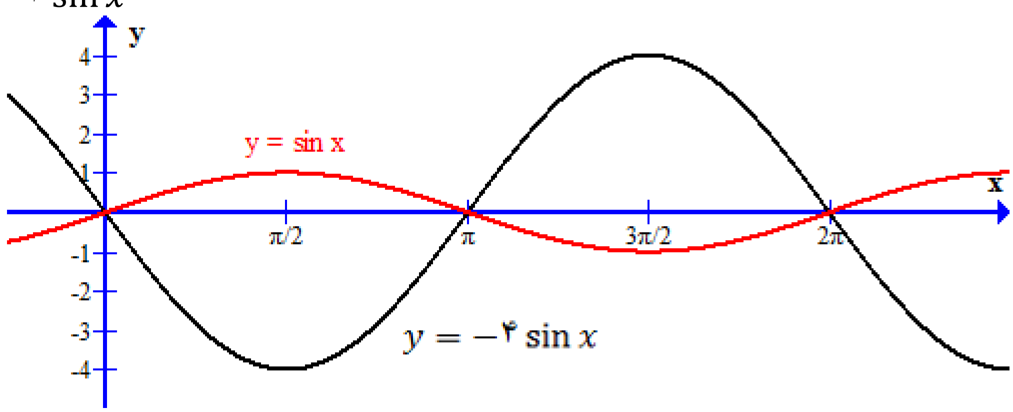
π ۸ = دور تناوب   ،   ۲ = دامنه نوسان

$f)\ f(x) = \frac{۱}{۲}\sin ۴x$



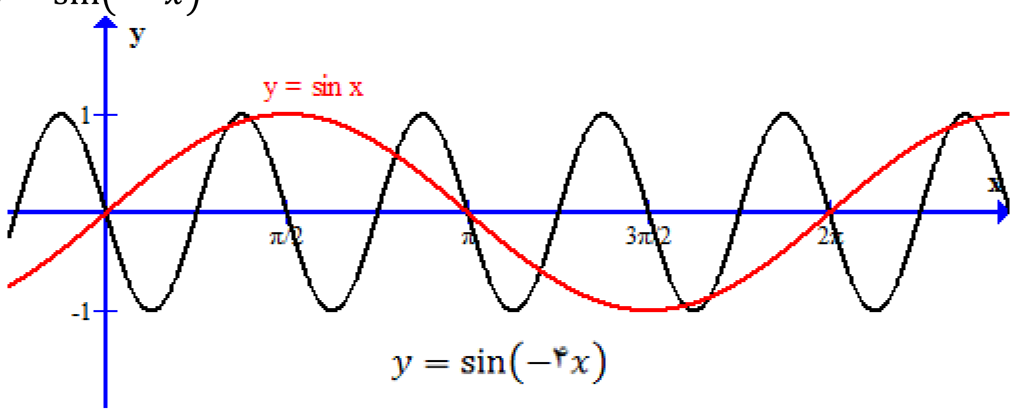
$\frac{۱}{۲} =$ دامنه نوسان　　،　　$\frac{\pi}{۲} =$ دور تناوب

$g)\ y = -۴\sin x$



$۴ =$ دامنه نوسان　　،　　$۲\pi =$ دور تناوب

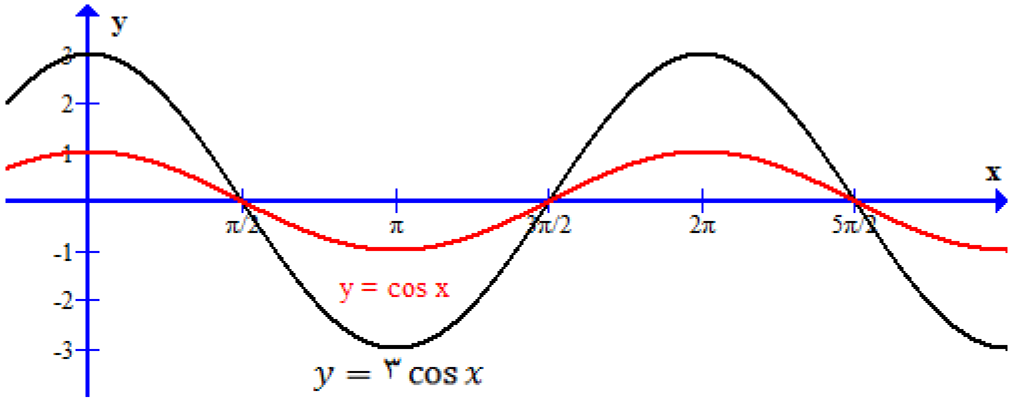
$h)\ f(x) = \sin(-۴x)$



$۱ =$ دامنه نوسان　　،　　$\frac{\pi}{۲} =$ دور تناوب

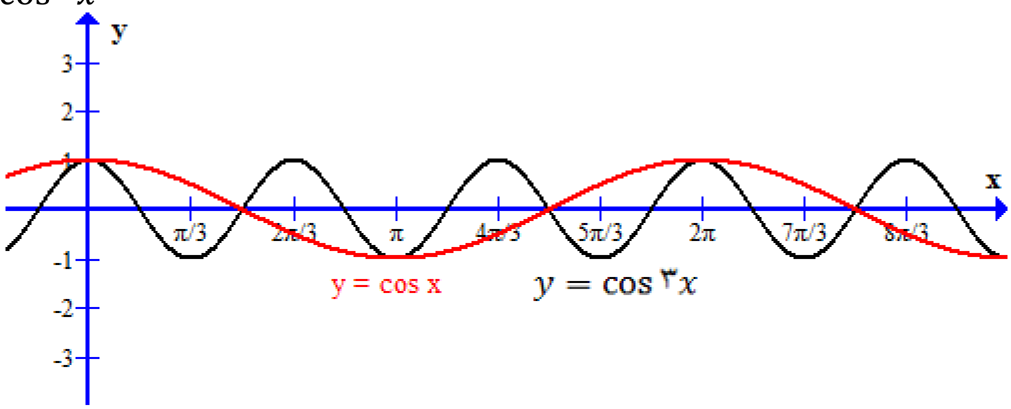
۲ - در تمرینات زیر نمودار f را رسم کنید و دامنه نوسان و دور تناوب را مشخص کنید.

$a)\ f(x) = ۳\cos x$



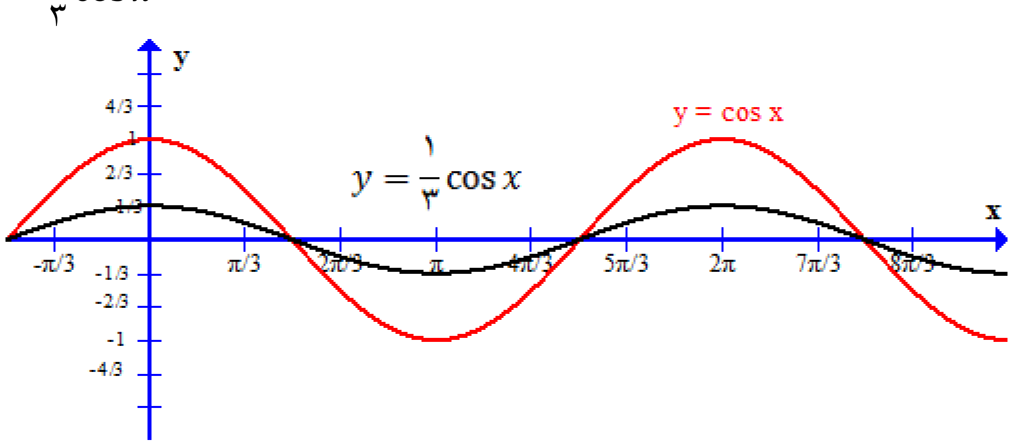
۲π = دور تناوب ، ۳ = دامنه نوسان

$b)\ y = \cos ۳x$



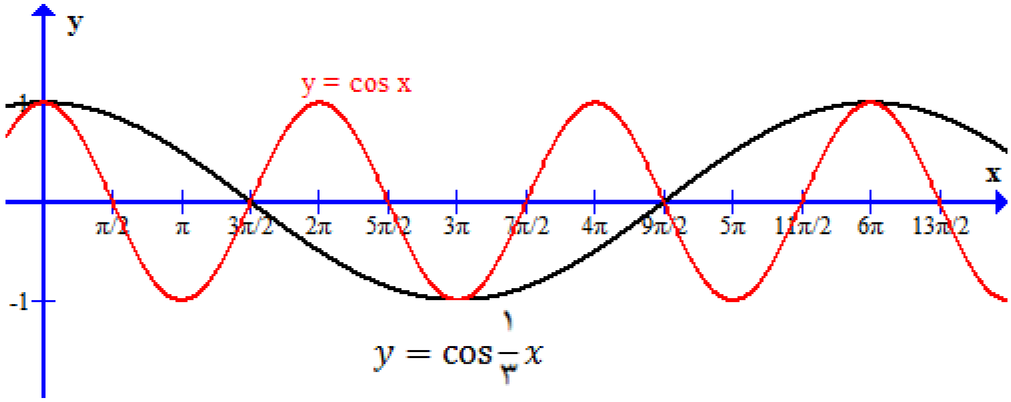
$\frac{۲\pi}{۳}$ = دور تناوب ، ۱ = دامنه نوسان

$c)\ f(x) = \frac{۱}{۳}\cos x$



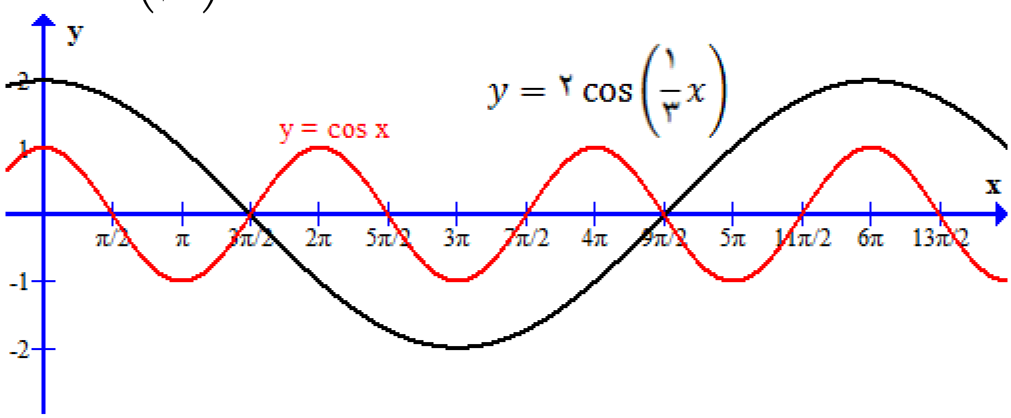
۲π = دور تناوب ، $\frac{۱}{۳}$ = دامنه نوسان

$d)\ y = \cos\frac{۱}{۳}x$



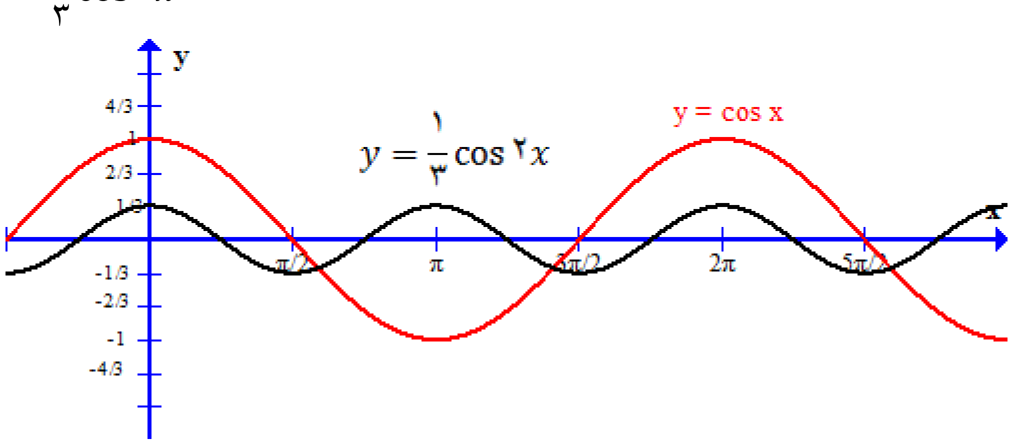
دور تناوب $= ۶\pi$ ، دامنه نوسان $= ۱$

$e)\ f(x) = ۲\cos\left(\frac{۱}{۳}x\right)$



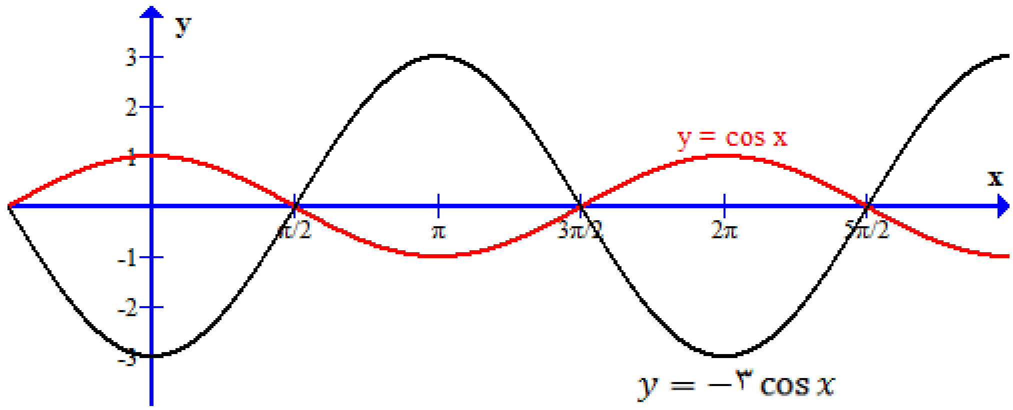
دور تناوب $= ۶\pi$ ، دامنه نوسان $= ۲$

$f)\ f(x) = \frac{۱}{۳}\cos ۲x$



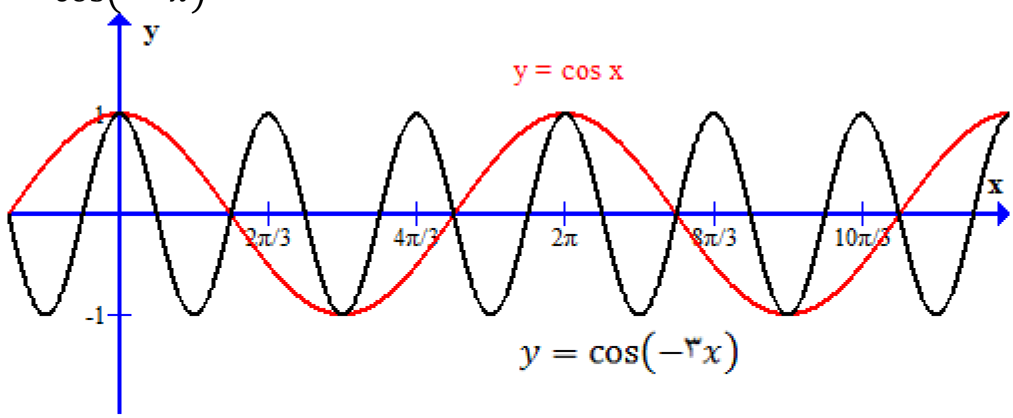
دور تناوب $= \pi$ ، دامنه نوسان $= \frac{۱}{۳}$

$g)\ f(x) = -۳\cos x$



۲π = دور تناوب ، ۳ = دامنه نوسان

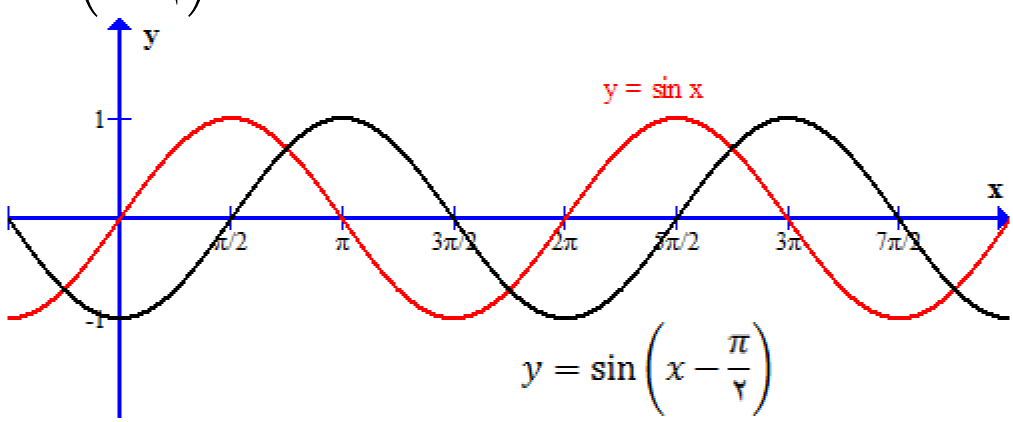
$h)\ f(x) = \cos(-۳x)$



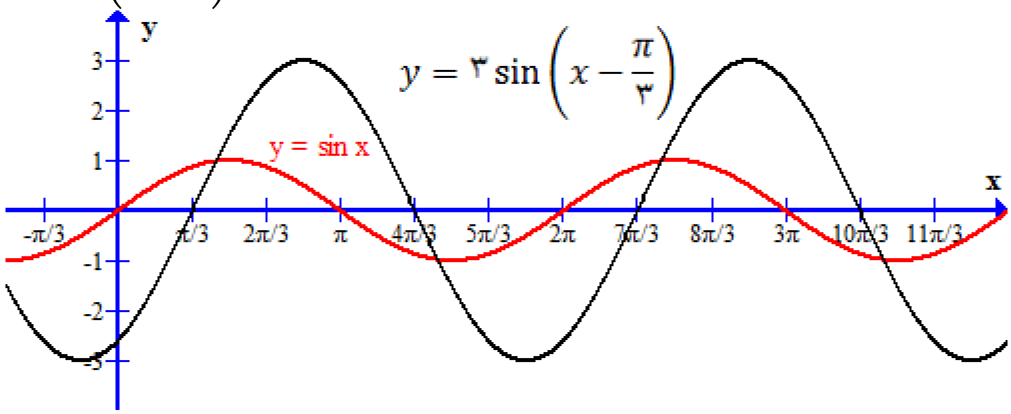
$\frac{۲\pi}{۳}$ = دور تناوب ، ۱ = دامنه نوسان

در تمرینات ۲۲ – ۳ نمودار هر یک از معادله ها را رسم کنید.

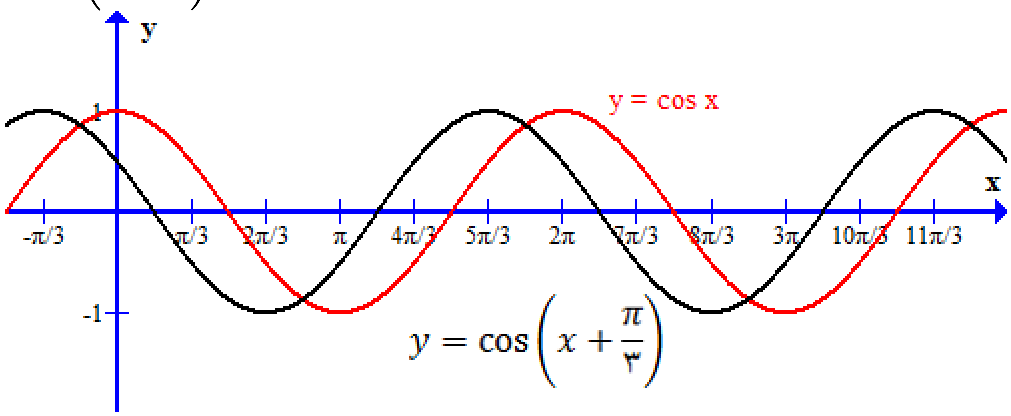
۳) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{۲}\right)$



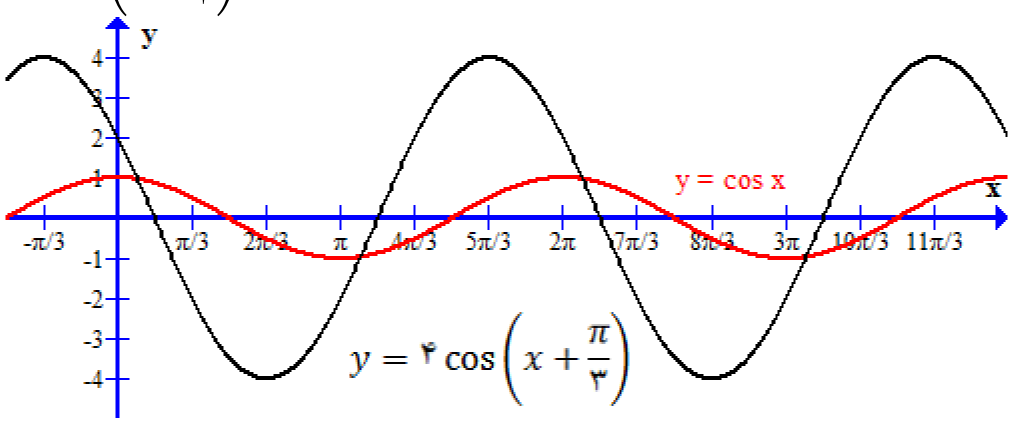
۴) $y = ۳\sin\left(x - \frac{\pi}{۳}\right)$



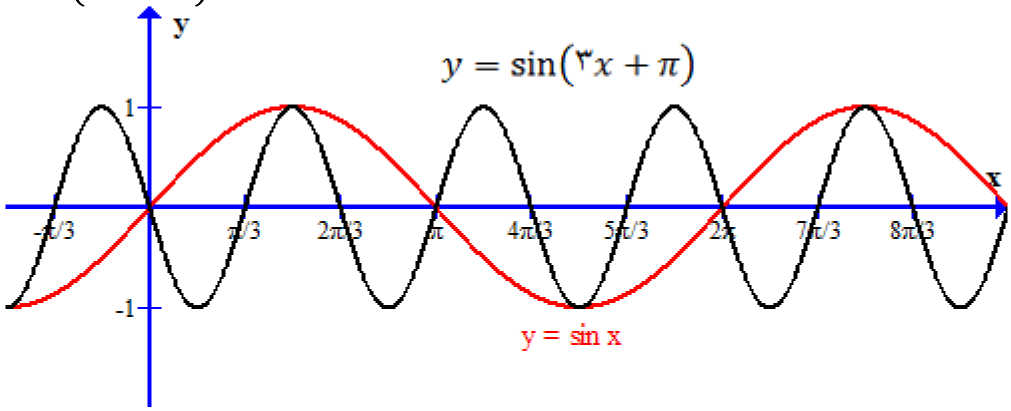
۵) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)$



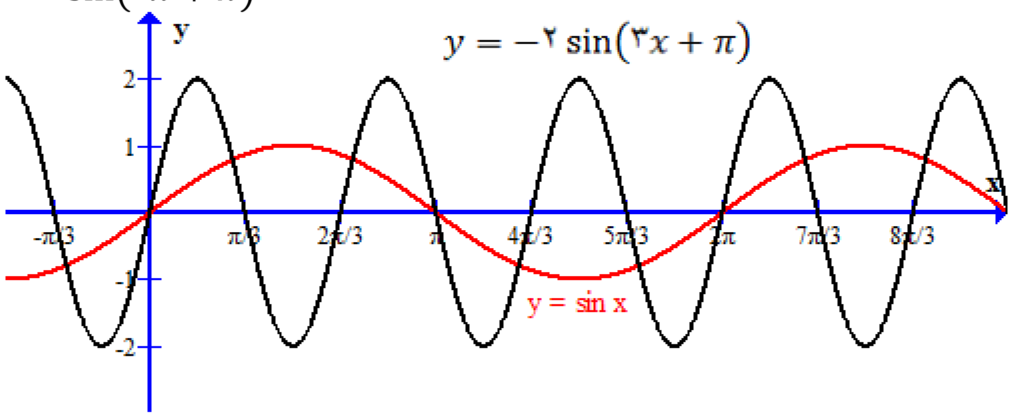
۶) $y = ۴\cos\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)$



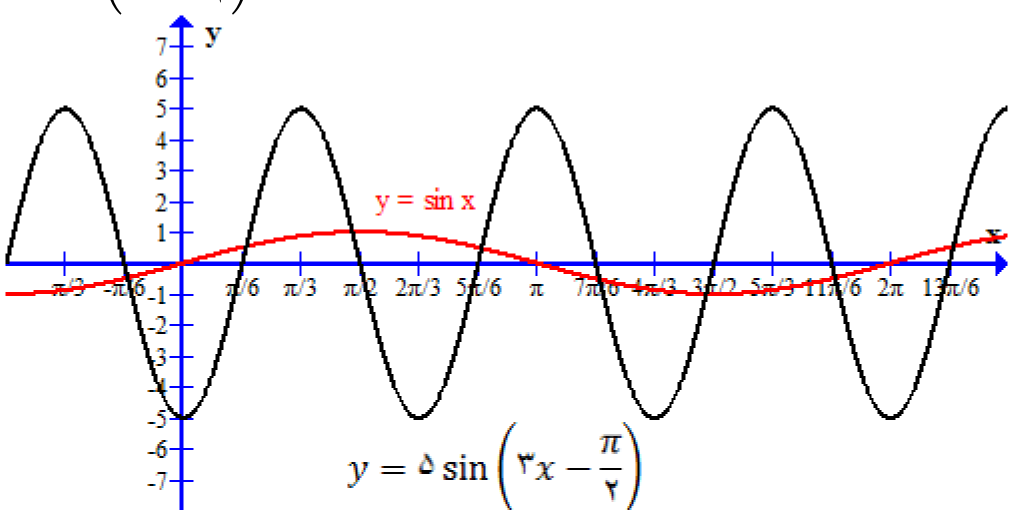
۷) $y = \sin(۳x + \pi)$



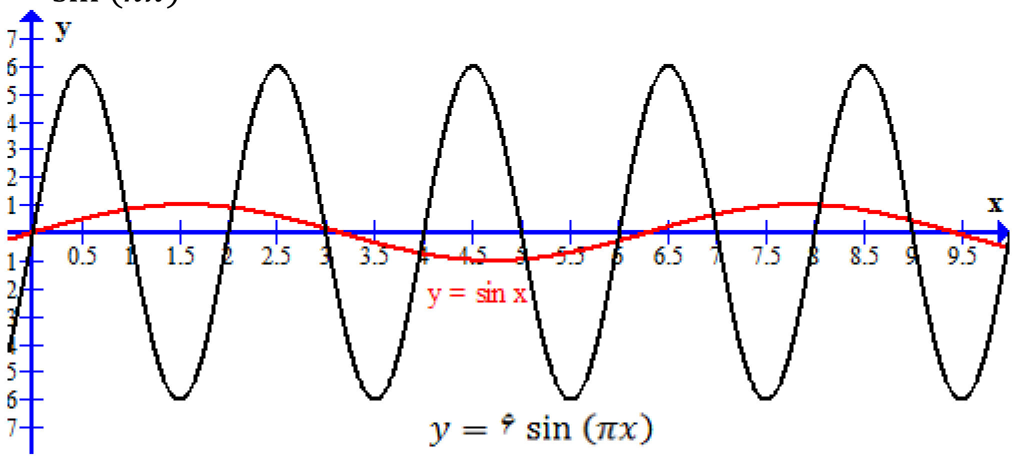
۸) $y = -۲\sin(۳x + \pi)$



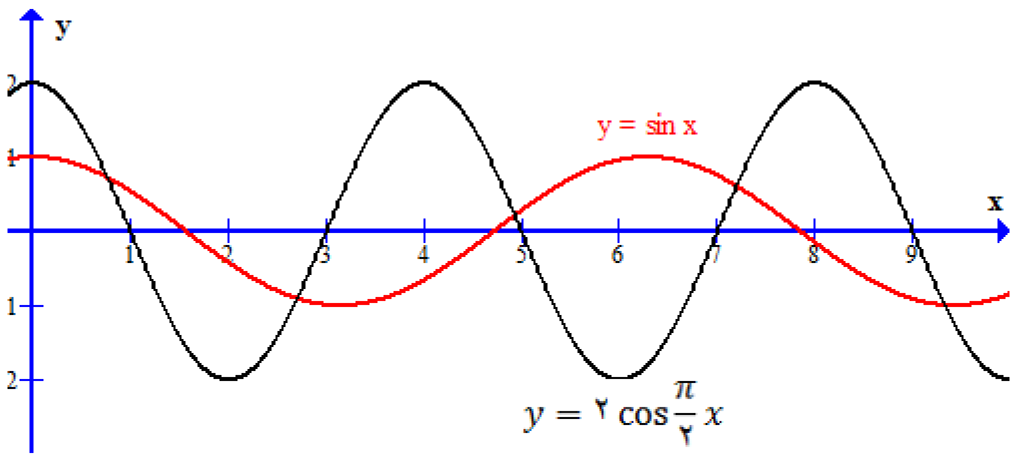
۹) $y = ۵\sin\left(۳x - \frac{\pi}{۲}\right)$



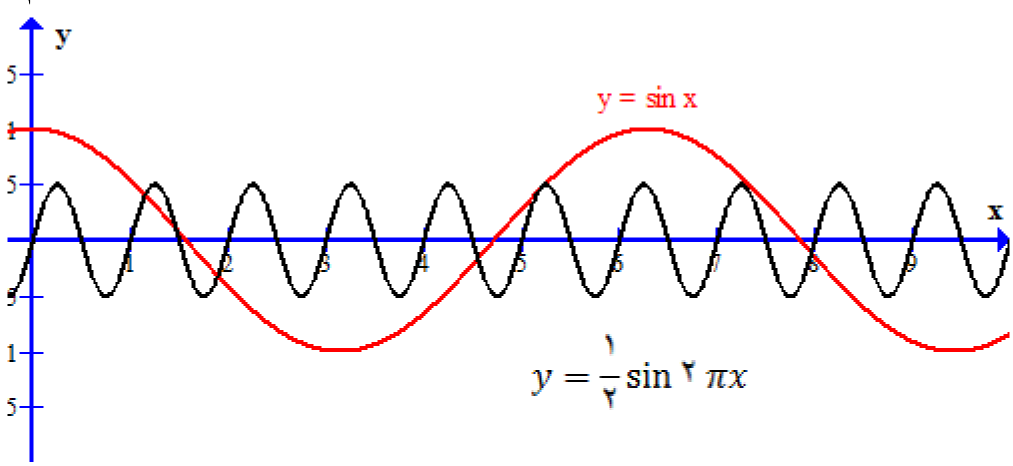
۱۰) $y = ۶ \sin(\pi x)$



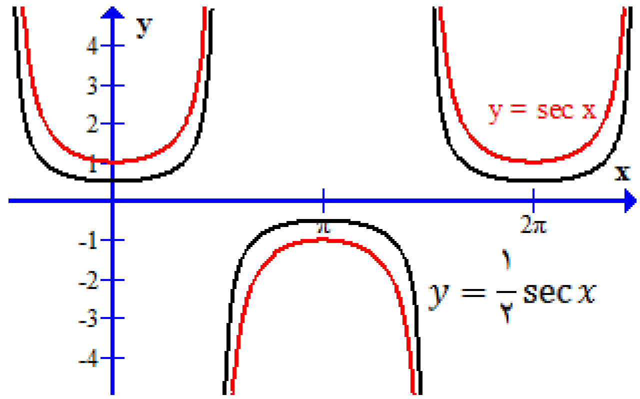
۱۱) $y = ۲ \cos \frac{\pi}{۲} x$



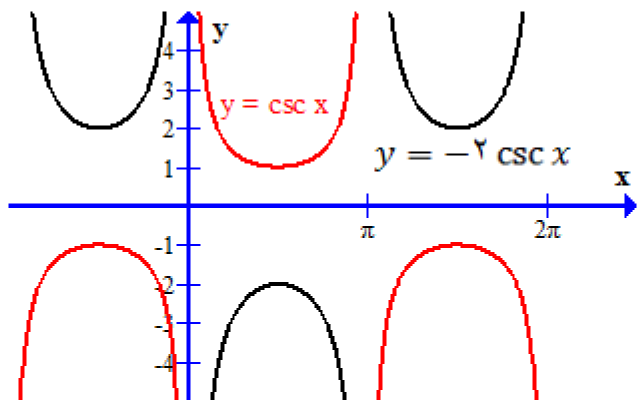
۱۲) $y = \frac{۱}{۲} \sin ۲ \pi x$



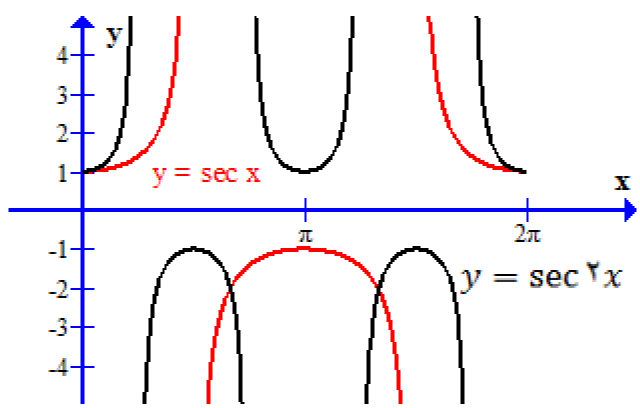
۱۳) $y = \frac{۱}{۲} \sec x$



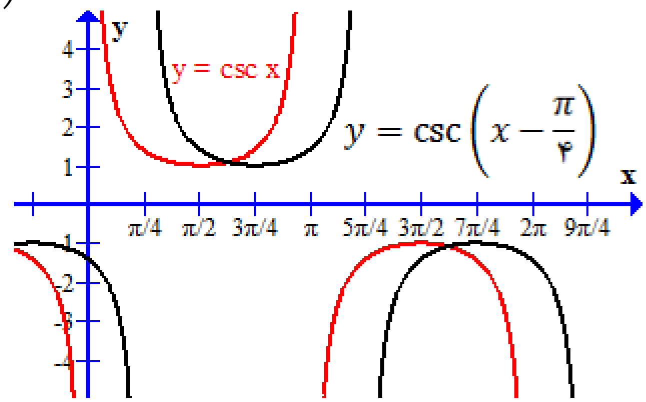
۱۴) $y = -۲ \csc x$



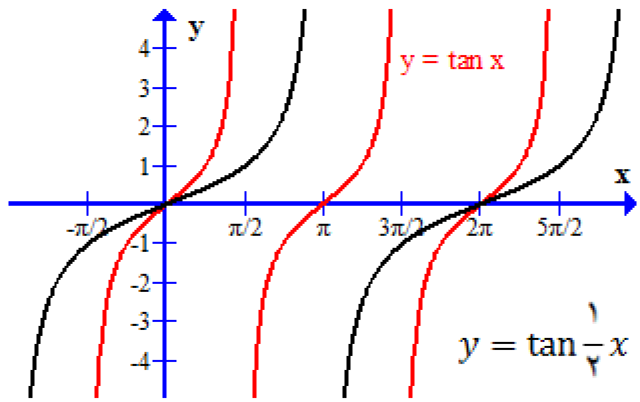
۱۵) $y = \sec ۲x$



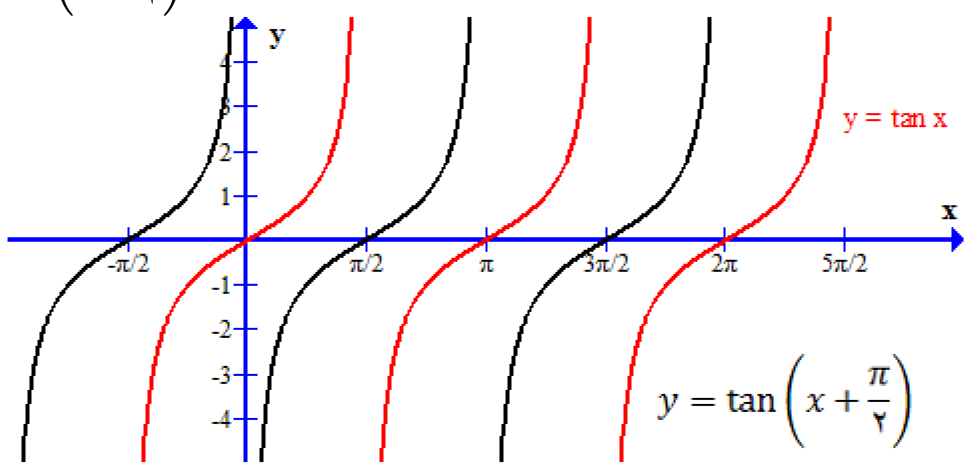
۱۶) $y=\csc\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$



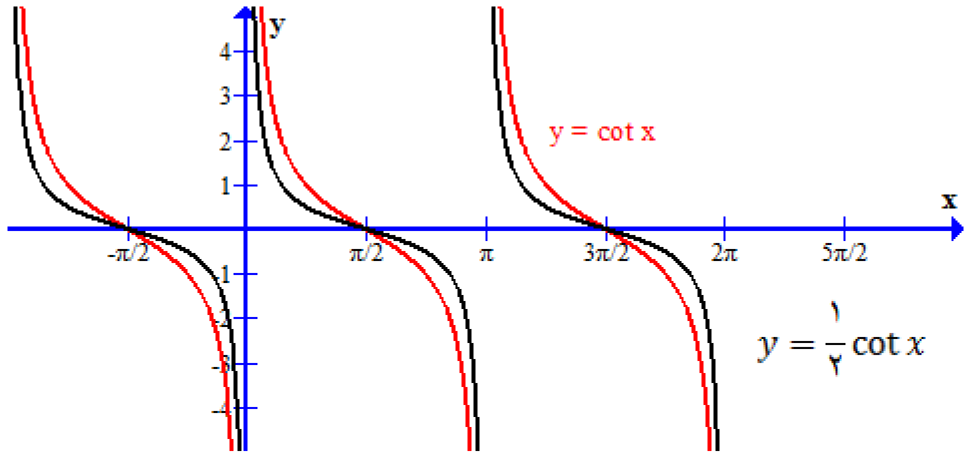
۱۷) $y=\tan\frac{۱}{۲}x$



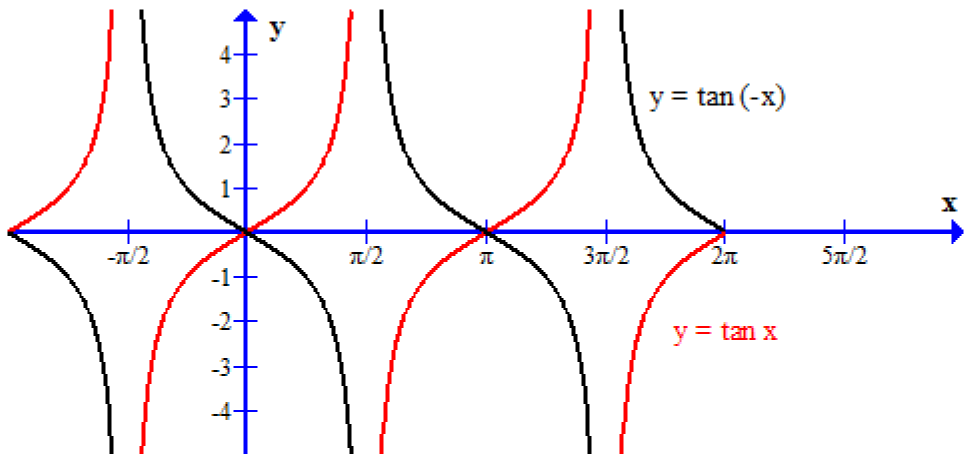
۱۸) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)$



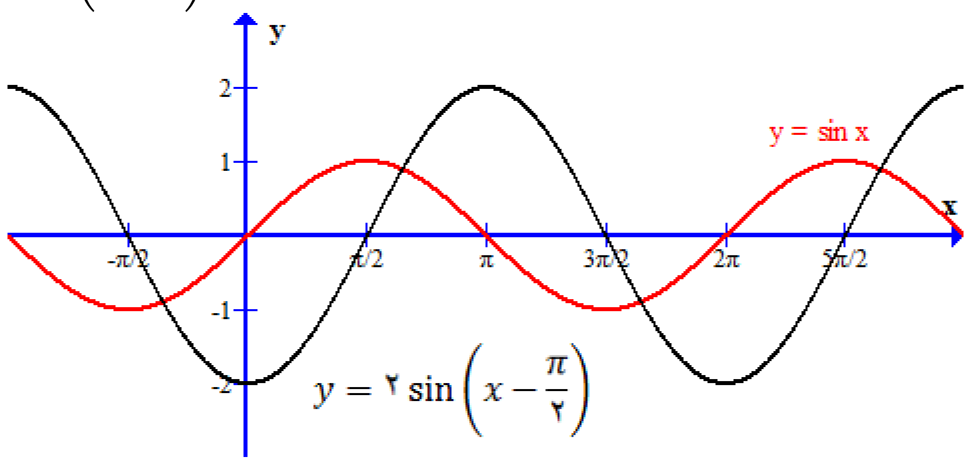
۱۹) $y = \frac{۱}{۲}\cot x$



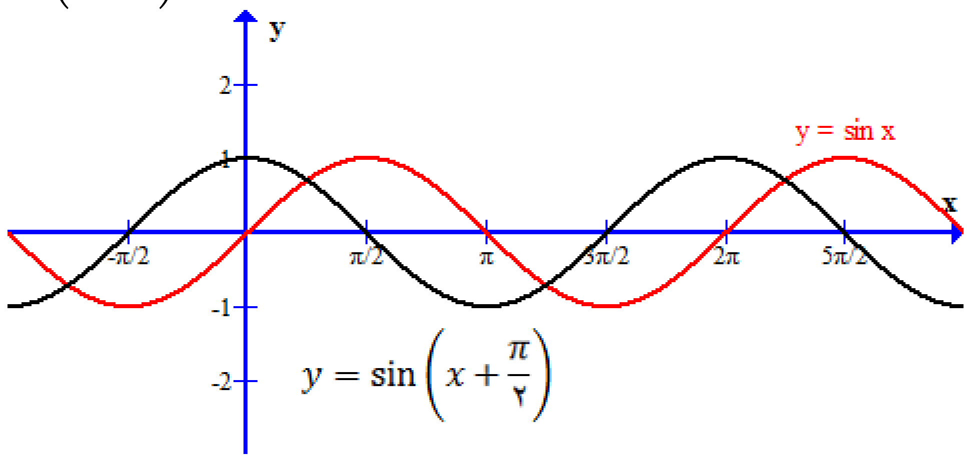
۲۰) $y = \tan(-x)$



۲۱) $y = ۲\sin\left(x - \frac{\pi}{۲}\right)$

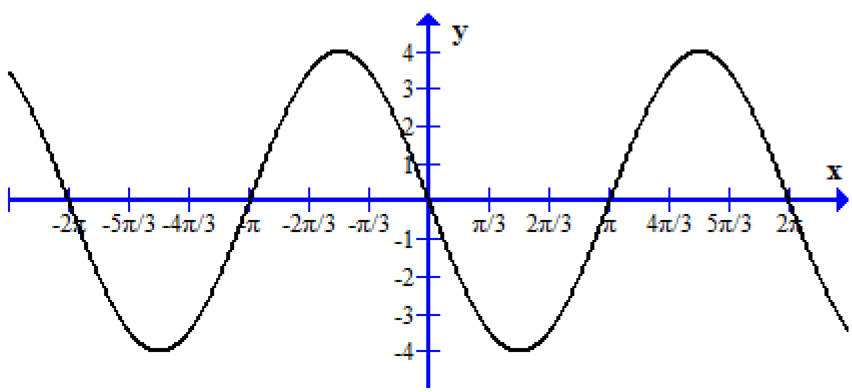


۲۲) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{۲}\right)$



در تمرینات ۲۴ – ۲۳ نمودار توابع مثلثاتی را ملاحظه می کنید. برای هر یک
الف – دامنه نوسان و دور تناوب را پیدا کنید.
ب – یک معادله به شکل $y = a\sin(bx + c)$ بنویسید.
ج – گام جا بجا یی را پیدا کنید.

۲۳



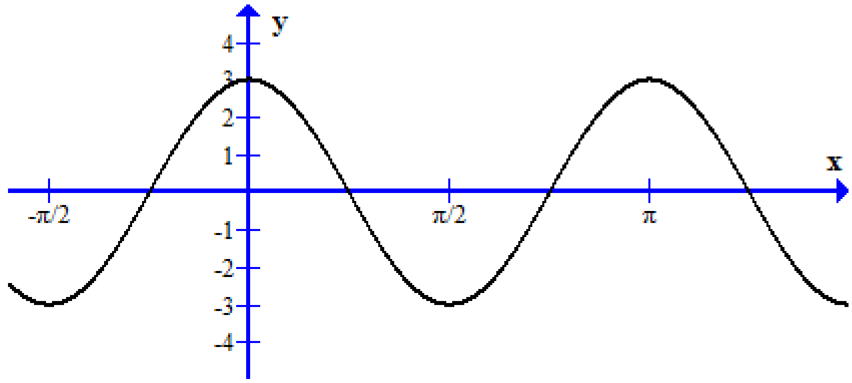
پاسخ

π ۲ = دور تناوب ، ۴ = دامنه نوسان

$y = ۴\sin(x - \pi)$

π = گام جابجائی

۲۴



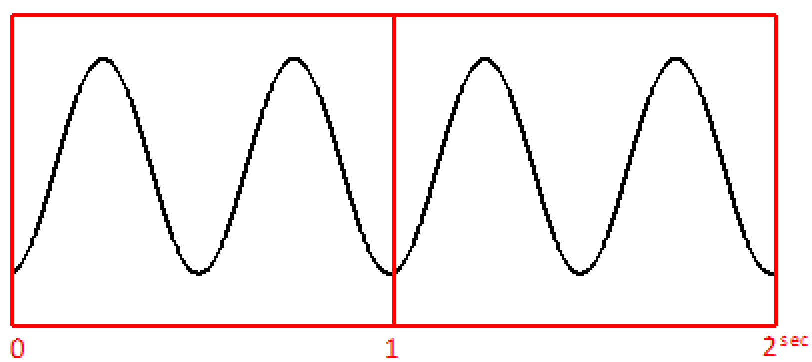
پاسخ

$$\pi = \text{دور تناوب} \quad ، \quad ۳ = \text{دامنه نوسان}$$

$$y = ۳\sin\left(۲x - \frac{۳\pi}{۲}\right)$$

$$\frac{۳\pi}{۴} = \text{گام جابجائی}$$

۲۵ - در تصویر زیر امواج ثبت شده توسط مغز نگار الکتریکی مغز انسان هنگام خوب عمیق ملاحظه می کنید. اگر فرض کنیم $W = a\sin(bt + c)$ بیان گر این امواج باشد ، مقدار b را پیدا کنید.

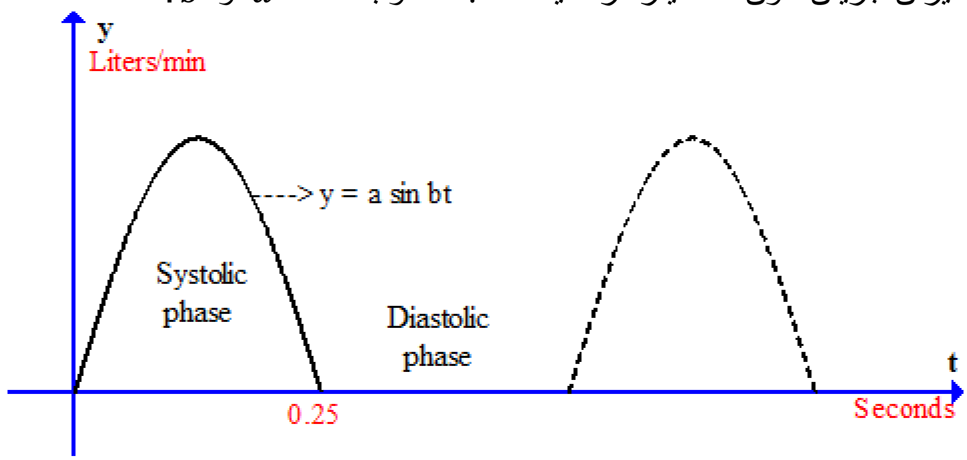


پاسخ

ملاحظه می کنید که دور تناوب مساوی $\frac{۱}{۲}$ است. و طبق فرض مساله $W = a\sin(bx + c)$ است.
پس داریم.

$$\frac{۲\pi}{b} = \frac{۱}{2} \quad \Rightarrow b = ۴\,\pi$$

۲۶ ـ ضربان قلب انسان شامل مرحله سیستو لیک $Systolic\ phase$ است که در این مرحله خون از بطن قلب به آئورت جریان می‌یابد و مرحله دیاستو لیک $Distolic\ phase$ است که در این مرحله ماهیچه قلب استراحت می کند. یک تابع که نمودار آن در ذیل مشاهده می کنید اغلب برای نشان دادن یک دور کامل این جریان بکار می رود. برای یک شخص معین مرحله سیستو لیک $\frac{۱}{۴}$ ثانیه طول می کشد. و حد اکثر میزان جریان خون ۸ لیتر در ثانیه است. مطلوب است a و b.



پاسخ

بر اساس تصویر داده شده ، تابع به صورت $y = a \sin bt$ است. و یک مرحله سیستو لیک $\frac{۱}{۴}$ ثانیه طول می کشد ، پس داریم

$$\frac{\pi}{b} = \frac{۱}{۴} \quad \Rightarrow \quad b = ۴\,\pi$$

اشتباه نشود ، اینجا یک موج سینوسی کامل نداریم ، بلکه نصف یک دور سینوسی داریم.

و چون حد اکثر جریان خون ۸ لیتر در ثانیه است ، پس $a = ۸$ و در نهایت داریم

$$y = ۸ \sin(۴\,\pi t)$$

۱.۸ - رسم نمودار مجموع دو تابع
Sketching the Graph of Sum of Two Functions

کار برد های ریاضی اغلب شامل تابع هایی هستند که توسط مجموع و یا حاصل ضرب توابع دیگر تعریف می شوند. مثلا

$$f(x) = \sin ۲x + \cos x \quad \text{یا} \quad f(x) = ۲^{-x} \sin x$$

برای مجموع توابع ، روش **جمع مختصات** y می تواند مفید باشد. این روش نه تنها برای توابع مثلثاتی بلکه برای هر تابع دیگری هم کار برد دارد. اگر f مجموع دو تابع g و h باشد و هر دو دارای دامنه D باشند ، پس

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

است برای تمام x ها در D . نمودار f را می توان از نمودار های g و h بدست آورد. ابتدا از رسم نمودار های $y = g(x)$ و $y = h(x)$ روی یک صفحه مختصات شروع می کنیم.
چون $f(x_۱) = g(x_۱) + h(x_۱)$ است برای تمام $x_۱$ ها در D , پس مختصات y هر نقطه روی نمودار $y = g(x) + h(x)$ عبارت است از مجموع مختصات y توابع g و h آن نقطه مربوطه.

مثال ۱ - اگر $f(x) = \cos x + \sin x$ باشد ، نمودار f را رسم کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $g(x) = \cos x$ و $h(x) = \sin x$ باشد. پس $f(x) = g(x) + h(x)$ است.
ابتدا نمودار های g و h را رسم می کنیم. نمودار های قرمز رنگ در تصویر A. برای پیدا کردن نقاطی روی نمودار f مختصات y هر نقطه روی g و h را باهم جمع می کنیم. و سپس نقاط بدست آمده را به یک دیگر متصل می کنیم. ، نمودار سیاه رنگ. در ذیل چند نقطه را روی نمودار f پیدا می کنیم. نقاط قرمز رنگ روی نمودار سیاه رنگ تصویر A

$$f\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}, \left(-\frac{\pi}{۶}, \frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = 0, \left(-\frac{\pi}{۴}, 0\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۳}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}, \left(-\frac{\pi}{۳}, \frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

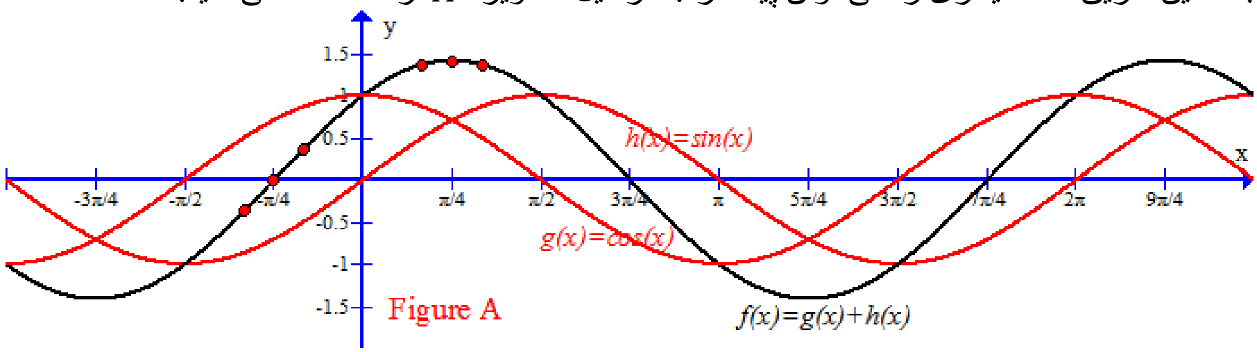
$$f(0) = \cos(0) + \sin(0) = ۱ + 0 = ۱, (0, ۱)$$

$$f\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}, \left(\frac{\pi}{۶}, \frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}, \left(\frac{\pi}{۴}, \sqrt{۲}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۳}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}, \left(\frac{\pi}{۳}, \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

به همین طریق نقاط دیگری را می توان پیدا کرد. در ذیل تصویر A را ملاحظه می کنید.

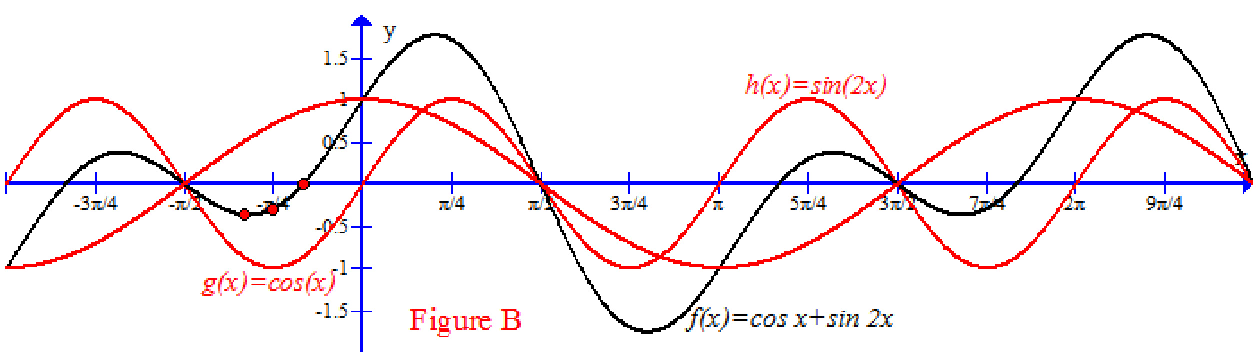


مثال ۲ – نمودار $f(x) = \cos x + \sin ۲x$ را رسم کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $g(x) = \cos x$ و $h(x) = \sin ۲x$ باشد ، پس $f(x) = g(x) + h(x)$ است. ابتدا نمودار های g و h رسم می کنیم، نمودار های قرمز رنگ در تصویر B و سپس مانند مثال ۱ نقاطی را روی نمودار $f(x) = \cos x + \sin ۲x$ پیدا می کنیم و نقاط را به یک دیگر وصل می کنیم. نمودار سیا ه رنگ.

$$f\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} = 0$$



$$f\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱ = \frac{\sqrt{۲}-۲}{۲}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۳}\right) + \sin\left(-\frac{۲\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲}$$

یاد آوری ۱

$$\mathbf{cos}(-x) = \mathbf{cos}\, x \quad ، \quad \mathbf{sin}(-x) = -\,\mathbf{sin}\, x$$

یاد آوری ۲ – برای پیدا کردن مقادیر مثلثاتی زاویه هایی مانند $\frac{۲\pi}{۳}$ یا $\frac{۵\pi}{۲}$ و غیرو به بخش ۱.۵ زاویه مرجع مراجعه کنید. مثلا زاویه مرجع $\frac{۲\pi}{۳}$ زاویه $\frac{\pi}{۳}$ است.

نقاطی را که در بالا پیدا کردیم روی نمودار سیاه رنگ به صورت نقاط قرمز رنگ مشاهده می کنید.

تمرینات ۱.۸

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = \cos x + ۳\sin x$

۲) $y = ۲\cos x + ۳\sin x$

۳) $y = \sin x + \cos ۲x$

۴) $y = \cos x - \sin x$

۵) $y = ۲\cos x - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$

۶) $y = ۱ + \sin x$

۷) $y = \frac{۱}{۲}x + \sin x$

۸) $y = ۲^{x} + \sin x$

۹) $y = ۲ + \sec x$

۱۰) $y = \cos\ x - ۱$

پاسخ تمرینات ۱.۸

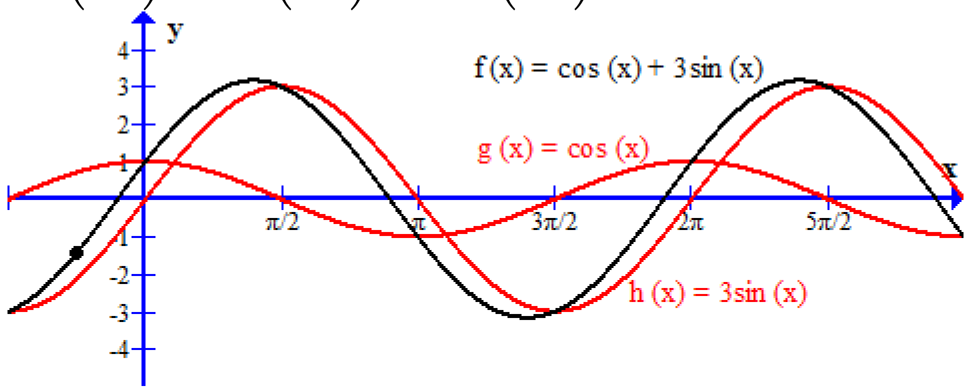
نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = \cos x + ۳ \sin x$

فرض می کنیم $g(x) = \cos x$ و $h(x) = ۳ \sin x$ و $f(x) = g(x) + h(x)$ باشد.

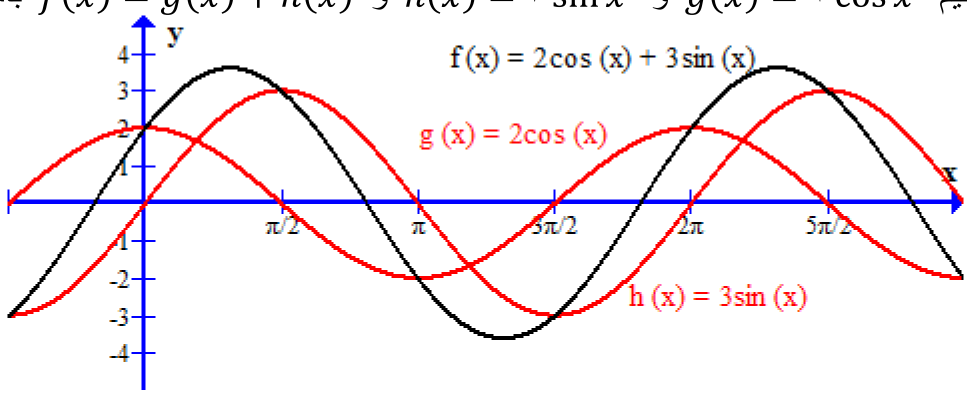
$$f\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۳}\right) + ۳ \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱ - ۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right) + ۳ \sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} = -\sqrt{۲}$$



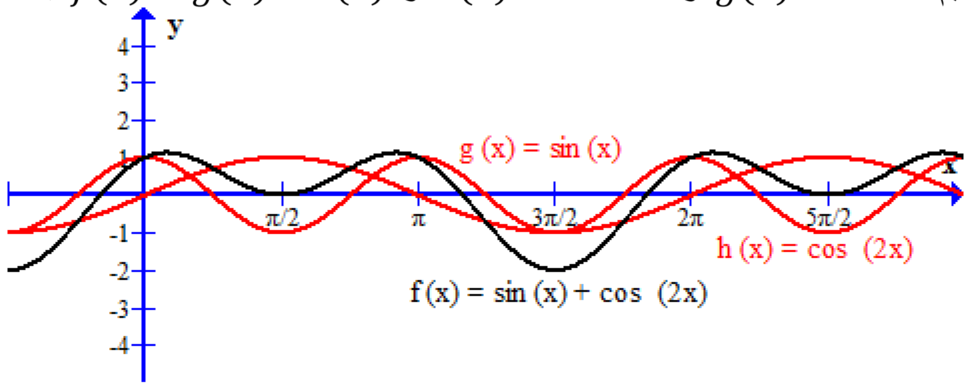
۲) $y = ۲ \cos x + ۳ \sin x$

فرض می کنیم $g(x) = ۲ \cos x$ و $h(x) = ۳ \sin x$ و $f(x) = g(x) + h(x)$ باشد.



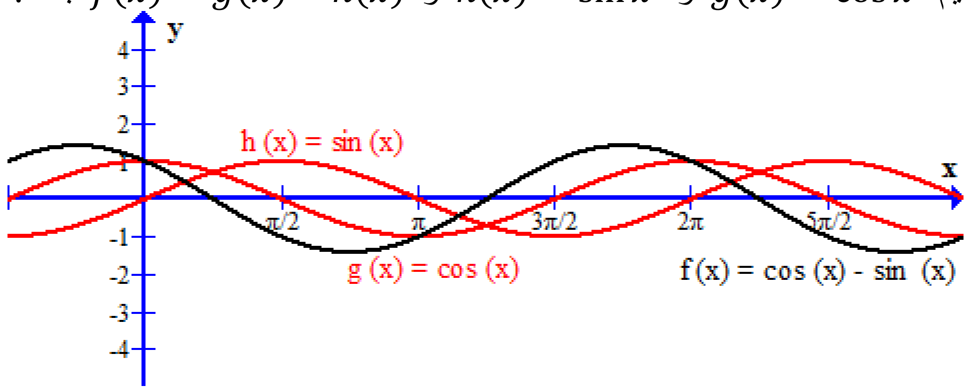
۳) $y = \sin x + \cos ۲x$

فرض می کنیم $g(x) = \sin x$ و $h(x) = \cos ۲\, x$ و $f(x) = g(x) + h(x)$ باشد.



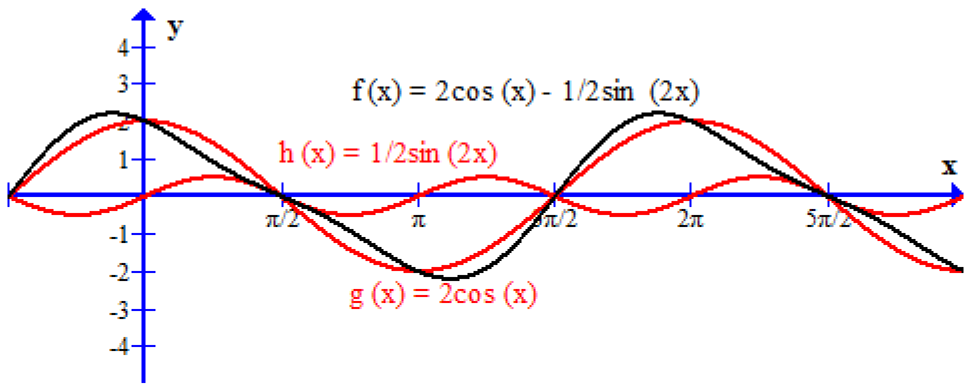
۴) $y = \cos x - \sin x$

فرض می کنیم $g(x) = \cos x$ و $h(x) = \sin x$ و $f(x) = g(x) - h(x)$ باشد.



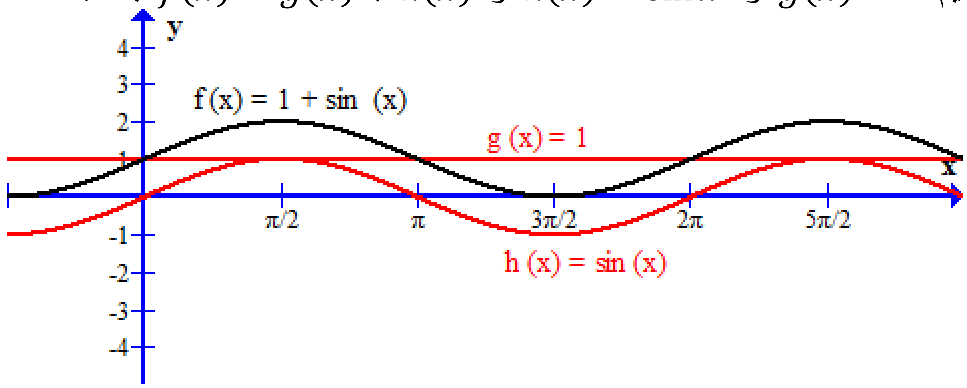
۵) $y = ۲\cos x - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$

فرض می کنیم $g(x) = ۲\cos x$ و $h(x) = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$ و $f(x) = g(x) - h(x)$ باشد.



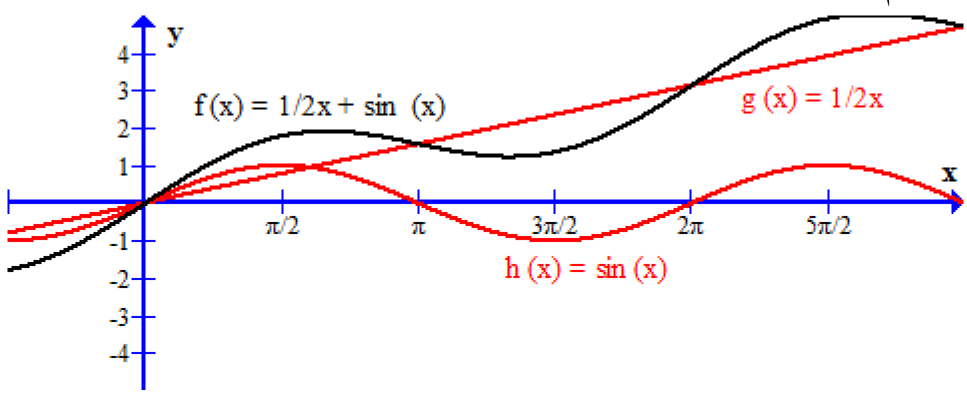
۶) $y = ۱ + \sin x$

فرض می کنیم $g(x) = ۱$ و $h(x) = \sin x$ و $f(x) = g(x) + h(x)$ باشد.



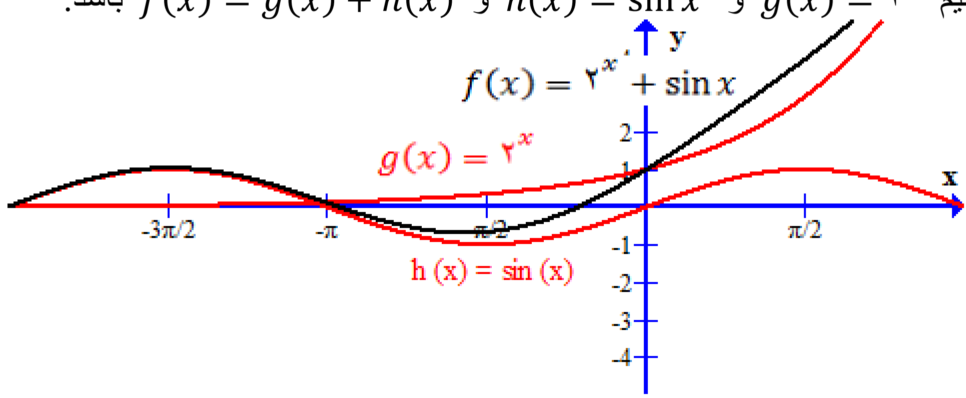
۷) $y = \frac{۱}{۲}x + \sin x$

فرض می کنیم $g(x) = \frac{۱}{۲}x$ و $h(x) = \sin x$ و $f(x) = g(x) + h(x)$ باشد.



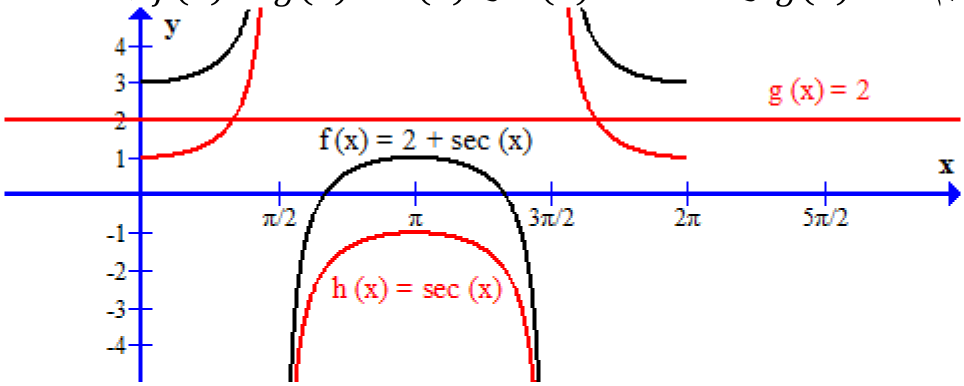
۸) $y = ۲^x + \sin x$

فرض می کنیم $g(x) = ۲^x$ و $h(x) = \sin x$ و $f(x) = g(x) + h(x)$ باشد.



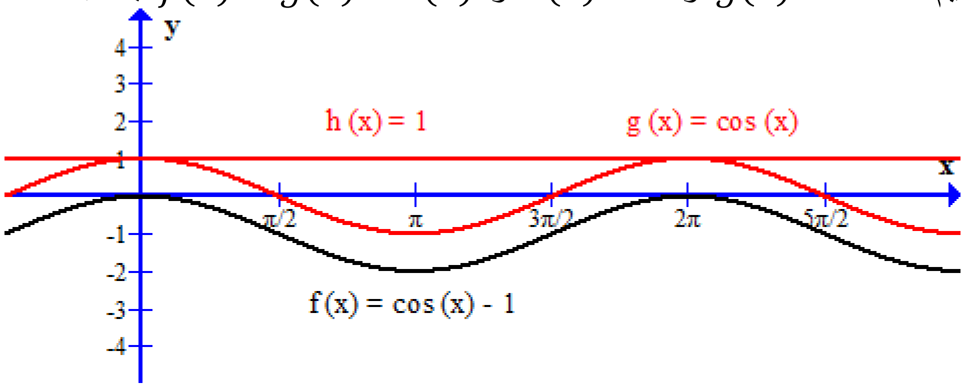
۹) $y = ۲ + \sec x$

فرض می کنیم $g(x) = ۲$ و $h(x) = \sec x$ و $f(x) = g(x) + h(x)$ باشد.



۱۰) $y = \cos\ x - ۱$

فرض می کنیم $g(x) = \cos x$ و $h(x) = ۱$ و $f(x) = g(x) - h(x)$ باشد.

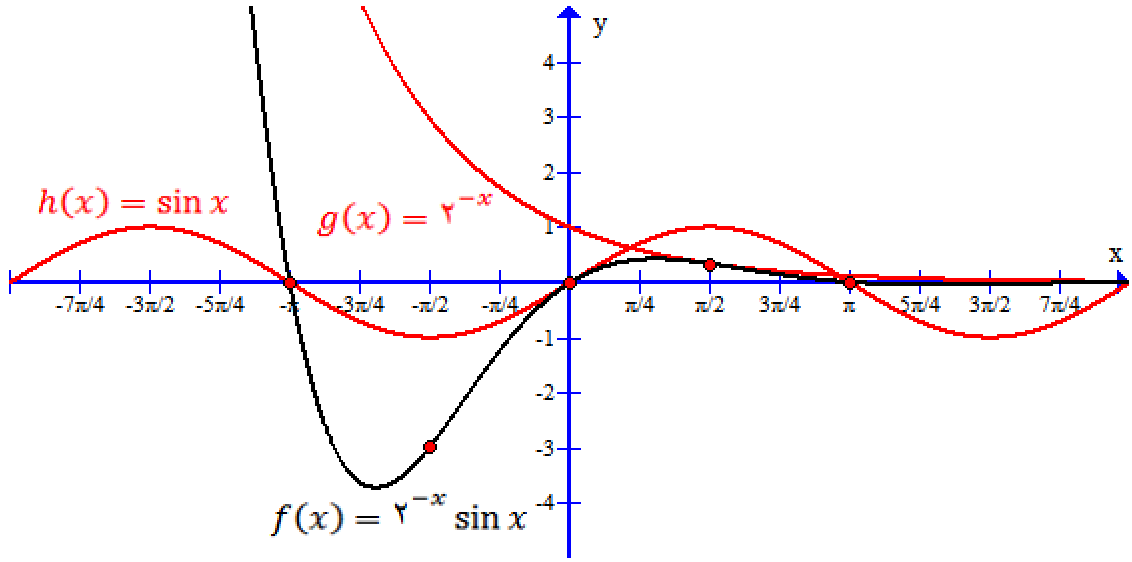


۱.۹ - رسم نمودار حاصل ضرب دو تابع
Sketching Graph of Product of Two Functions

برای حاصل ضرب توابع ، روش **ضرب مختصات** y را بکار می بریم.
اگر f حاصل ضرب دو تابع g و h باشد و هر دو دارای دامنه D باشند ، پس
$$f(x) = g(x) * h(x)$$
است برای تمام x ها در D.
نمودار f را می توان از نمودار های g و h بدست آورد. از رسم نمودار های $y = g(x)$ و $y = h(x)$ شروع می کنیم. چون $f(x_۱) = g(x_۱) * h(x_۱)$ است برای تمام $x_۱$ ها در D پس مختصات y هر نقطه روی نمودار $y = g(x) * h(x)$ عبارت است از حاصل ضرب مختصات y توابع g و h آن نقطه مربوطه.

مثال –نمودار $f(x) = ۲^{-x} \sin x$ را رسم کنید.
پاسخ
فرض می کنیم $g(x) = ۲^{-x}$ و $h(x) = \sin x$ باشد. پس $f(x) = g(x) * h(x)$ است.
واضح است که دامنه g و h کلیه اعداد حقیقی است. نمودار های g و h را رسم می کنیم.
نمودار های قرمز رنگ در تصویر زیر. سپس مختصات y هر نقطه از نمودار های g و h را در هم ضرب می کنیم تا مختصات y نقاط متناظر روی نمودار f بدست آید. و سپس آن نقاط را به یک دیگر وصل می کنیم. نمودار f در تصویر زیر سیاه رنگ است و نقاط بدست آمده روی آن قرمز رنگ است.

$$f(-\pi) = g(-\pi) * h(-\pi) = ۲^{\pi} * \sin(-\pi) = ۲^{\pi} * 0 = 0, (-\pi, 0)$$
$$f\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = g\left(-\frac{\pi}{۲}\right) * h\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = ۲^{\frac{\pi}{۲}} * \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = ۲^{\frac{\pi}{۲}} * (-۱), \left(-\frac{\pi}{۲}, -۲^{\frac{\pi}{۲}}\right)$$
$$f(0) = g(0) * h(0) = ۲^{0} * \sin(0) = ۱ * 0 = 0, (0,0)$$
$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = g\left(\frac{\pi}{۲}\right) * h\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲^{-\frac{\pi}{۲}} * \sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲^{-\frac{\pi}{۲}} * (۱), \left(\frac{\pi}{۲}, ۲^{-\frac{\pi}{۲}}\right)$$
$$f(\pi) = g(\pi) * h(\pi) = ۲^{-\pi} * \sin(\pi) = ۲^{-\pi} * 0 = 0, (\pi, 0)$$



تمرینات ۱.۹

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = ۲^{-x} \cos x$

۲) $f(x) = |x| \sin x$

۳) $f(x) = \frac{۱}{۲} x^{۲} \sin x$

۴) $f(x) = |\sin x|$

۵) $f(x) = \sin|x|$

پاسخ تمرینات ۱.۹

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = ۲^{-x}\cos x$

پاسخ

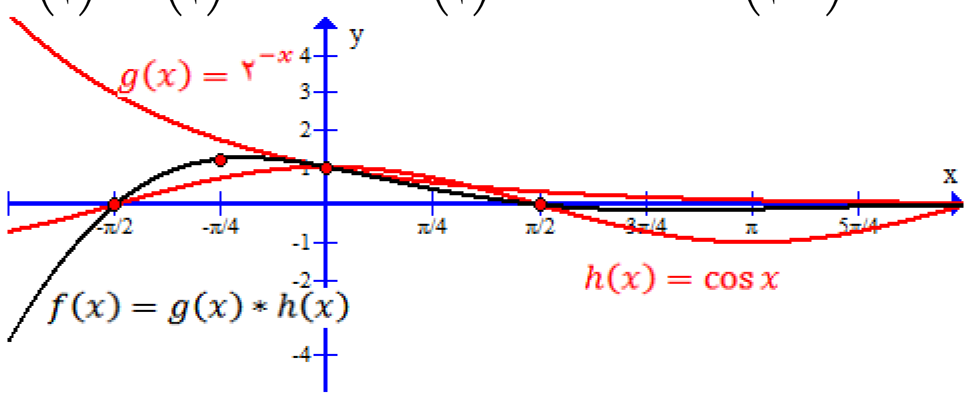
فرض می کنیم $g(x) = ۲^{-x}$ و $h(x) = \cos x$ باشد ، پس $f(x) = g(x) * h(x)$ است.

$$f\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = g\left(-\frac{\pi}{۲}\right) * h\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = ۲^{\frac{\pi}{۲}} * \cos\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = ۲^{\frac{\pi}{۲}} * (0), \left(-\frac{\pi}{۲}, 0\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = g\left(-\frac{\pi}{۴}\right) * h\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = ۲^{-\frac{\pi}{۴}} * \cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۲^{-\frac{\pi}{۴}} * \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \left(-\frac{\pi}{۴}, ۲^{-\frac{\pi}{۴}} * \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$f(0) = g(0) * h(0) = ۲^{0} * \cos(0) = ۱ * ۱ = ۱, (0,)$$

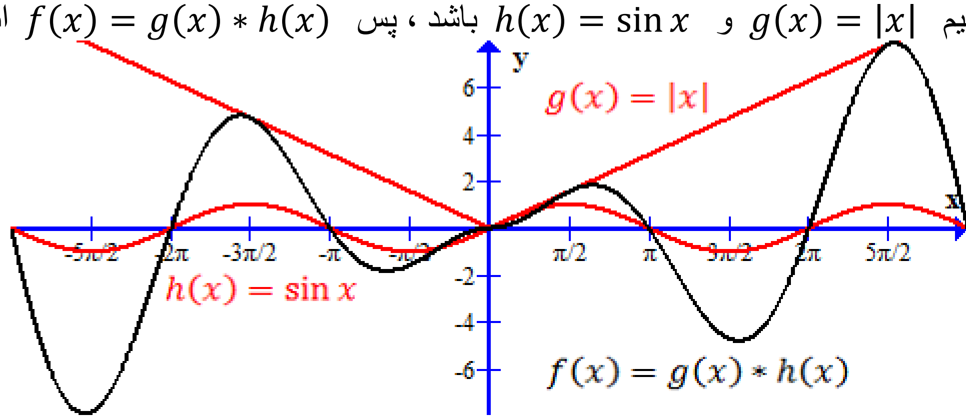
$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = g\left(\frac{\pi}{۲}\right) * h\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲^{-\frac{\pi}{۲}} * \cos\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲^{-\frac{\pi}{۲}} * 0 = 0, \left(\frac{\pi}{۲}, 0\right)$$



۲) $f(x) = |x|\sin x$

پاسخ

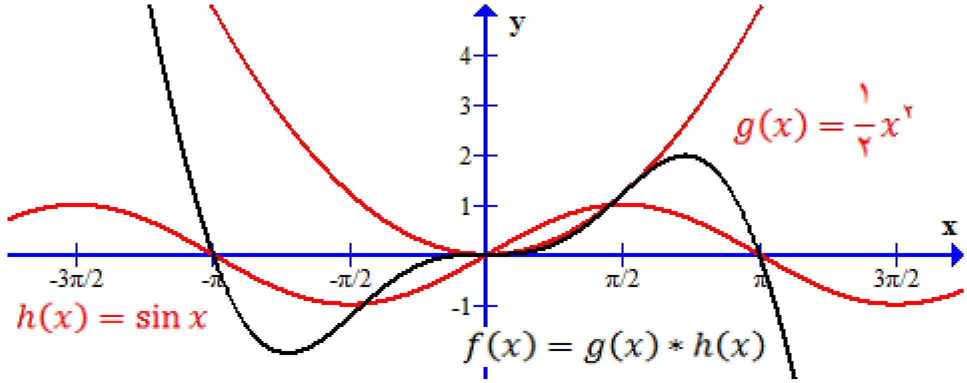
فرض می کنیم $g(x) = |x|$ و $h(x) = \sin x$ باشد ، پس $f(x) = g(x) * h(x)$ است.



۳) $f(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲} \sin x$

پاسخ

فرض می کنیم $g(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲}$ و $h(x) = \sin x$ باشد ، پس $f(x) = g(x) * h(x)$ است.

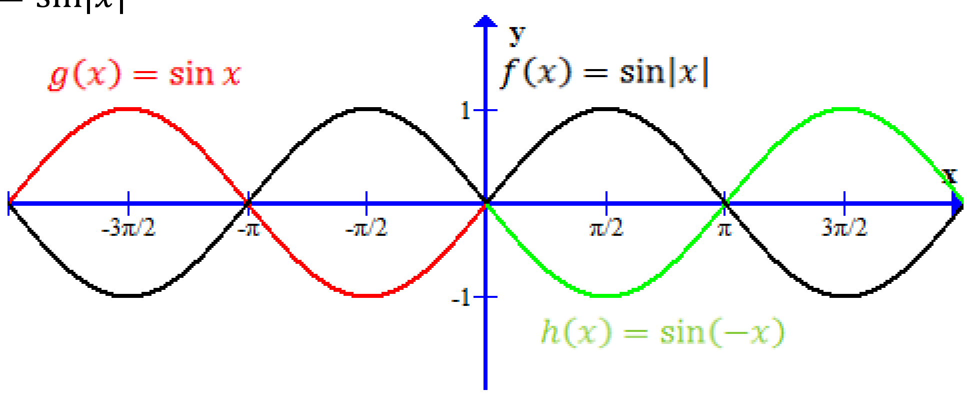


۴) $f(x) = |\sin x|$

پاسخ

نمودار قرمز رنگ که فقط قسمت زیرین محور x نمایان است ، نمودار $\sin x$ است.
نمودار سبز رنگ که فقط قسمت زیرین محور x نمایان است ، نمودار $\sin x$ — است.
نمودار سیاه رنگ که قسمت بالای محور x قرار گرفته ، نمودار $|\sin x|$ است.

۵) $f(x) = \sin|x|$

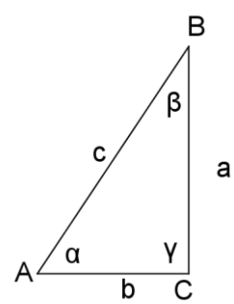


کار برد های مثلث های قائم الزاویه Applications Involving Right Triangles

مثلثات برای حل مسائل مربوط به زاویه ها و طول اضلاع مثلث ها بوجود آمد و توسعه یافت. اما امرزه این کاربرد ها مورد استفاده چندانی ندارند. با وجود این ، سوال هایی در مورد مثلث ها هنوز درعلوم طبیعی پیش می آید. در این بخش فقط در مورد مثلث های قائم الزاویه صحبت می کنیم. مثلث هایی که دارای زاویه قائمه نیستند در فصل های بعد مورد بحث قرار می دهیم.
معمولا علامت های زیر را بکار می بریم.
راس های یک مثلث را بوسیله حروف $A، B, C$ نشان می دهیم. زوایایی که در راس $A، B، C$ قرار دارند به ترتیب $\alpha، \beta، \gamma$ نامگذاری می کنیم. و طول اضلاع روبروی این زوایا را با $a، b، c$ نمایش می دهیم. مثلث را هم مثلث ABC می نامیم.

مثال ۱ – اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\gamma = ۹۰^\circ$ و $\alpha = ۳۴^\circ$ و $b = ۱۰/۵$ ،بقیه قسمت های مثلث را بطور تقریب بدست آورید.

تصویر A



پاسخ

چون مجموع زوایای یک مثلث برابر است با ۱۸۰° و $\alpha + \gamma = ۱۲۴^\circ$ پس $\beta = ۵۶^\circ$ است. با توجه به تصویر A داریم.

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\tan ۳۴^\circ = \frac{\alpha}{۱۰/۵}$$

$$\alpha = (۱۰/۵) \tan ۳۴^\circ \approx ۷/۱$$

برای پیدا کردن ضلع c می توان یا از کسینوس و یا سکانت استفاده کرد.

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\cos ۳۴^\circ = \frac{۱۰/۵}{c}$$

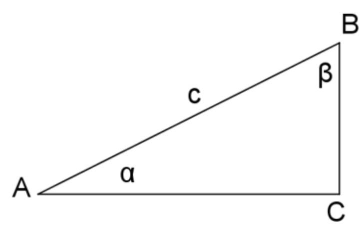
$$c = \frac{۱۰/۵}{\cos ۳۴^\circ} \approx ۱۲/۷$$

توجه –برای پیدا کردن مقادیر مثلثاتی زوایایی مانند ۳۴° باید از ماشین حساب استفاده کرد.

مثال ۲– اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم $b = ۳۱/۶$ ، $a = ۱۲/۳$, $\gamma = ۹۰^\circ$ بقیه اجزا را پیدا کنید.

پاسخ

تصویر B



$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۱۲/۳}{۳۱/۶} \approx ۰/۳۸۹۲$$

توضیح :میدانید که سینوس ۹۰° یک است. حالا اگر بدانید سینوس یک زاویه یک است ، پس نتیجه می گیرید اندازه آن زاویه ۹۰° است. به این کار می گویند پیدا کردن معکوس سینوس در کتب مختلف برای معکوس سینوس نماد های مختلفی بکار می برند. از جمله $sin^{-۱}$ و یا $arcsin$ و یا $INVsin$
روی ماشین حساب های علمی هم یکی از این کلید ها را ممکن است پیدا کنید. در فصل های آینده در مورد معکوس توابع مثلثاتی صحبت خواهیم کرد.

با استفاده از ماشین حساب ، مقدار α را پیدا می کنیم. برای این کار عدد $۰/۳۸۹۲$ را وارد کنید.این عدد تانژانت زاویه آلفا است که در بالا پیدا کردم. سپس کلید زیر را فشار دهید.

$$tan^{-۱}$$

و یا هر نماد دیگری که روی ماشین حساب شما برای معکوس تانژانت نوشته شده است. با این کار اندازه زاویه ای که تانژانت آن $۰/۳۸۹۲$ بدست می آید. ماشین حساب به شما عدد $۲۱/۶۵۹۲$ را می دهد. شما می توانید با استفاده از بخش یک قسمت اعشاری را به دقیقه تبدیل کنید.

مقدار زاویه آلفا $\alpha \approx ۲۱^\circ ۲۰'$ بدست می آید

$$\beta \approx ۹۸^\circ ۶۰' - ۲۱^\circ ۲۰' = ۶۸^\circ ۴۰'$$

با توجه به تصویر B

$$\sec\alpha = \frac{c}{۳۱/۶}$$

$$c = (۳۱/۶)\sec\alpha$$

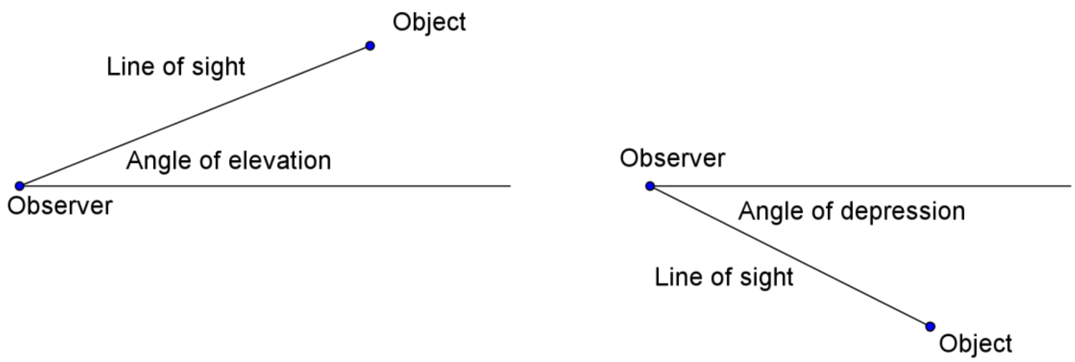
$$c \approx (۳۱/۶)\sec ۲۱^\circ\, ۲۰' \approx (۳۱/۶)(۱/۰۷۳۶) \approx ۳۳/۹$$

برای پیدا کردن c می توانیم از توابع مثلثات دیگری کمک بگیریم. مثلا

$$\cos\alpha = \frac{۳۱/۶}{c}$$

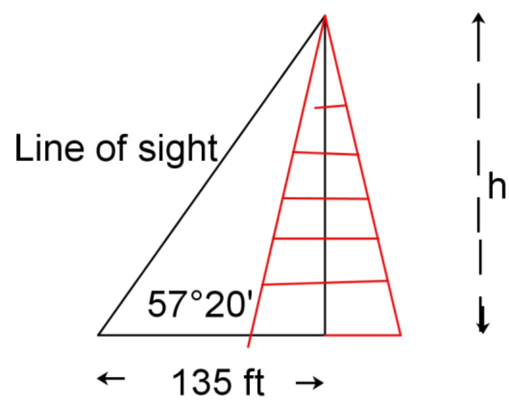
$$c = \frac{۳۱/۶}{\cos(۲۱^\circ\, ۲۰')} \approx \frac{۳۱/۶}{۰/۹۳۱۵} \approx ۳۳/۹$$

همان طور که در تصویر C ملاحظه می کنید ، اگر یک **ناظر Observer** یک **شئی Object** را **رویت کند Sight** پس زاویه ای که **خط رویت Line of Sight** باخط افق می سازد بنام **زاویه فراز Angle of Elevation** یا **زاویه نشیب Angle of Depression** نامیده می شود.
اگر شئی بالای خط افق باشد، زاویه فراز ، و اگر شئی پایین تر از خط افق باشد ، زاویه نشیب داریم.
تصویر C



مثال ۳ -روی یک زمین افقی ، فاصله یک نقطه تا پایه یک برج ۱۳۵ فوت است و زاویه فراز تا بالای برج $57^\circ 20'$ است. ارتفاع برج را بطور تقریب بدست آورید.

تصویر D



پاسخ

اگر ارتفاع برج را h فرض کنیم ، با توجه به تصویر D داریم.

$$\tan 57^\circ 20' = \frac{h}{135}$$

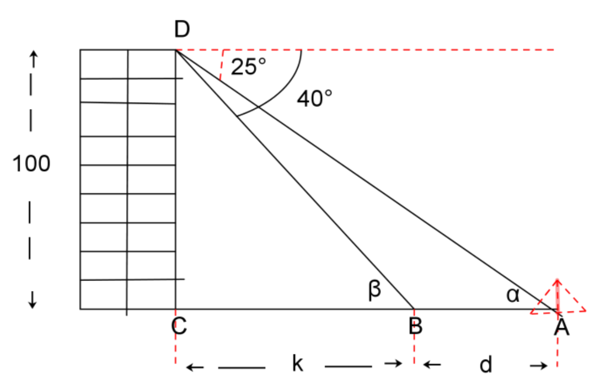
$$h = (135) \tan 57^\circ 20'$$

با استفاده از ماشین حساب و توجه به نحوه کار برد ماشین حساب که در مثال ۲ گفته شد ، داریم.

$$d \approx (135)(1/560) \approx 210/6 \approx 211 ft$$

مثال ۴ – از بالای یک ساختمان مشرف به یک اقیانوس ، یک نفر مشاهده می کند که یک کشتی به طرف او در حال حرکت است. اگر آن شخص ۱۰۰ فوت نسبت به سطح اقیانوس بالا تر قرار گرفته باشد ، و اگردر طول مشاهده ، زاویه نشیب کشتی از 25° به 40° تغییر کند ، مسافتی را که کشتی در این مدت طی می کنند به طور تقریب بدست آورید.

تصویر E



پاسخ
همان طور که در تصویر E ملاحظه می کنید ، فرض می کنیم A و B به ترتیب ، مکان های کشتی در رابطه با زوایای ۲۵° و ۴۰° باشند. فرض می کنیم آن شخص درنقطه D قرار دارد و C نقطه ای ۱۰۰ فوت مستقیما زیر نقطه D باشد.همچنین فرض می کنیم d مسافت جا بجا یی کشتی و k فاصله بین B و C باشد. اگر α و β به ترتیب زوایای DAC و DBC باشند ، پس بر اساس آنچه در هندسه آموخته ایم $\alpha = ۲۵^\circ$ و $\beta = ۴۰^\circ$ هستند. از مثلث BCD داریم.

$$\cot\beta = \cot ۴۰^\circ = \frac{k}{۱۰۰} \implies k = ۱۰۰ \cot ۴۰^\circ$$

از مثلث DAC داریم.

$$\cot\alpha = \cot ۲۵^\circ = \frac{d+k}{۱۰۰} \implies d+k = ۱۰۰ \cot ۲۵^\circ$$

در نتیجه

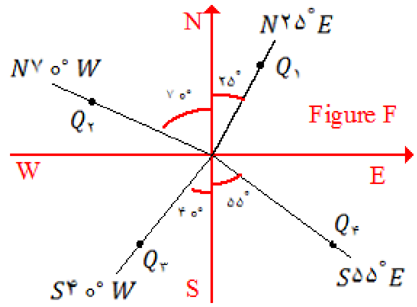
$$d = ۱۰۰ \cot ۲۵^\circ - k = ۱۰۰ \cot ۲۵^\circ - ۱۰۰ \cot ۴۰^\circ = ۱۰۰ \left(\cot ۲۵^\circ - \cot ۴۵^\circ\right)$$
$$\approx ۱۰۰ \left(۲/۱۴۵ - ۱/۹۲۱\right) = ۱۰۰ \left(۰/۹۵۳\right) = ۹۵/۳$$

لذا

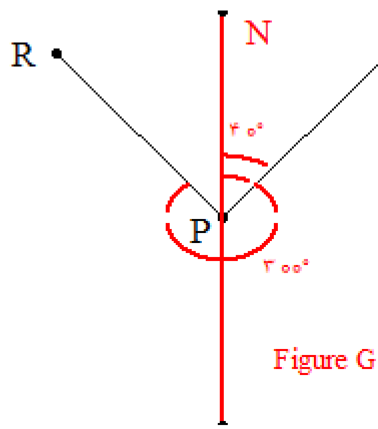
$$d \approx ۹۵ \text{ فوت}$$

در مسائل مربوط به نقشه برداری و راه یابی کشتی ها ، **جهت Direction** یا **موقعیت Bearing** **از** نقطه P تا نقطه Q چنین تعریف می کنیم.
زاویه حادی که از نیم خط PQ و یک خط شمالی جنوبی ایجاد می شود. نیم خط PQ ممکن است در شرق یا غرب آن خط شمالی جنوبی باشد.
. در تصویر F چهار نمونه از چنین خطوطی را ملاحظه می کنید. خط شمالی جنوبی با حروف NS وخط شرقی غربی رابا حروف EW نشان می دهیم.
موقعیت از نقطه P تا نقطه $Q_۱$ عبارت است از ۲۵° شمال شرقی است و با نماد $N۲۵^\circ E$ نشان داده می شود. جهت را هم با نماد $N۲۵^\circ E$ نشان می دهیم و مراد جهت از P به $Q_۱$ است.
موقعیت های از P تا $Q_۲, Q_۳, Q_۴$ نیز به همین طریق نشان می دهیم.

شمال: North
جنوب: South
مشرق: East
مقرب: West

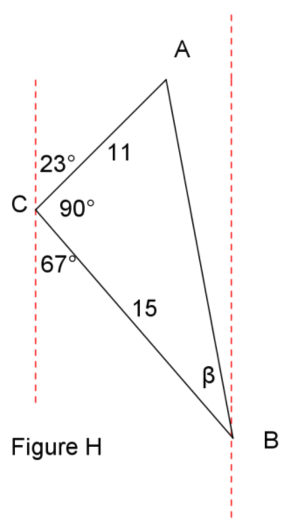


در راه یابی هوایی ، جهت ها و موقعیت ها چنین تعریف می شود.
اندازه زاویه ای که از شمال شروع می شود و در جهت عقربه ساعت حرکت می کند.
در این صورت مقدار زاویه مثبت است ,بر خلاف آنچه تا کنون دیده ایم. با توجه به نمودار G ملاحظه می کنید که جهت PQ زاویه ۴۰° است و جهت PR زاویه ۳۰۰° است.



مثال ۵ – دو کشتی بنام های A و B در یک زمان بندر را ترک می کنند ، کشتی A در مسیر $N۲۳^\circ E$ با سرعت ۱۱ مایل در ساعت و کشتی B در مسیر $S۶۷^\circ E$ با سرعت ۱۵ مایل در ساعت طی طریق می کنند.موقعیت از کشتی B تا کشتی A بعد از یک ساعت بطور تقریب بدست آورید.

پاسخ



تصویر H مکان های کشتی های A و B را بعد از یک ساعت نشان می دهد. نقطه C بندری است که کشتی ها از آن خارج شده اند.

$$\angle ACB = ۱۸۰^\circ - \left(۲۳^\circ + ۶۷^\circ\right) = ۹۰^\circ$$

پس مثلث ABC یک مثلث قائم الزویه است. پس داریم.

$$\tan\beta = \frac{۱۱}{۱۵} \approx ۰/۷۳۳۳$$

برای پیدا کردن اندازه زاویه β عدد ۰/۷۳۳۳ در ماشین حساب وارد کنید و سپس کلید arctan و یا $\tan^{-1}$ فشار دهید. با این کار ماشین به شما اندازه زاویه ای می دهد که تانژانت

$$\beta \approx ۳۶^\circ$$

حالا با توجه به تصویر I داریم.

$$\angle CBD = ۹۰^\circ - ۶۷^\circ = ۲۳^\circ$$
$$\angle ABD \approx ۳۶^\circ + ۲۳^\circ = ۳۱^\circ$$

یعنی جهت از B تا A تقریبا $N۳۱^\circ W$ است یا ۲۵ درجه شمال غربی

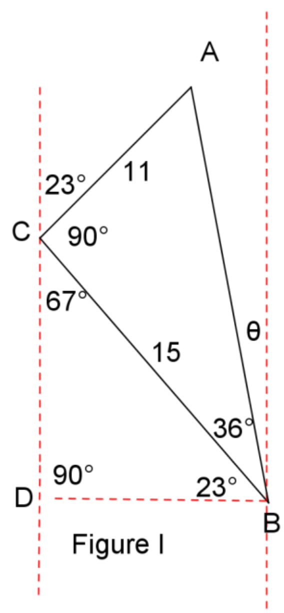


Figure I

تمرینات ۱.۱۰

مثلث قائم الزویه ABC مفروض است. زاویه $\gamma = ۹۰^\circ$ است. در تمرینات زیر با توجه به قسمت های داده شده ، بقیه قسمت های مثلث را پید ا کنید.

۱) $\alpha = ۳۰^\circ$ ، $b = ۲۰$

۲) $\beta = ۵۲^\circ$ ، $a = ۱۵$

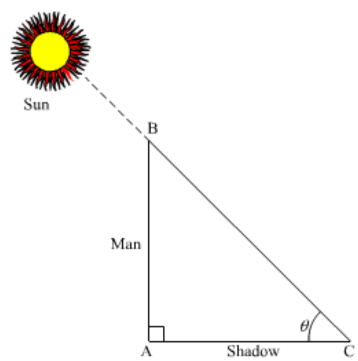
۳) $\alpha = ۱۷^\circ\, ۴۰'$ ، $a = ۴/۵۰$

۴) $\beta = ۷۱^\circ\, ۵۱'$ ، $b = ۲۴۰$

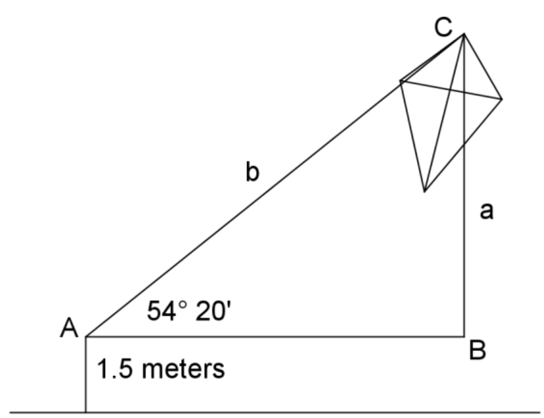
۵) $a = ۲۵$ ، $b = ۴۵$

۶ – مطلوب است زاویه فراز خورشید ، اگر شخصی با پنج فوت قد ، سایه ای به طول چهار فوت روی زمین مسطح ایجاد می کند. تصویر زیر

سایه : Shadow



۷ - یک پسر بچه در حال هوا کردن یک باد بادک است بطوری که ابتدای ریسمان ۱/۵ از زمین فاصله دارد و زاویه ای که این ریسمان نسبت به سطح افق می سازد $۵۴^\circ\, ۲۰'$ است. اگر فرض کنیم که این ریسمان کاملا کشیده و صاف است و طول آن ۸۵ متر است ، مطلوب است ارتفاع باد باد ک نسبت به سطح زمین. تصویر زیر



۸ - یک هشت ضلعی منظم در یک دایره باشعاع ۱۲ سانتی متر محاط شده است. محیط هشت ضلعی را بطور تقریب بدست آورید.

۹ - یک راکت در ساحل دریا با زاویه ۷۵° به مسافت ۱۰۰۰۰ فوتی پرتاب می شود. اگر زاویه پرتاب در تمام مدت ثابت باشد ، ارتفاع راکت را بطور تقریب بدست آورید.

۱۰ - یک هوا پیما که در ارتفاع ۱۰۰۰۰ فوتی پرواز می کند مسقیما از بالای یک شئیثابت که روی زمین قرار دارد ، می گذرد. یک دقیقه بعد ، زاویه نشیب شئی ۴۲° است. سرعت هوا پیما را بطور تقریب پیدا کنید. هر مایل مساوی ۵۲۸۰ فوت است.

۱۱ - یک خلبان می خواهد با زاویه نشیب ۱۰° به فرود گاه نزدیک شود. اگر اکنون در ارتفاع ۵۰۰۰ فوتی در حال پرواز باشد ، در چه مسافتی از فرود گاه باید فرود را شروع کند؟

۱۲ - یک کشتی ساعت یک بعد از ظهر بندر را در جهت $N۳۴^\circ W$ با سرعت ۲۴ مایل در ساعت ترک می کند. یک کشتی دیگر در ساعت ۱:۳۰ بعد از ظهر در جهت $N۵۶^\circ E$ با سرعت ۱۸ مایل در ساعت بندر را ترک می کند. بطور تقریب در ساعت سه بعد از ظهر این دو کشتی چقدر با هم فاصله دارند. موقعیت از کشتی اول تا کشتی دوم را پیدا کنید.

۱۳ - یک هوا پیما با سرعت ۳۶۰ ما یل در ساعت از نقطه A در جهت ۱۳۷° به مدت ۳۰ دقیقه پرواز می کند و سپس با همان سرعت در جهت ۲۲۷° به مدت ۴۵ دقیقه به پرواز ادامه می دهد. این نقطه انتهای را B می نامیم. فاصله A تا B را بطور تقریب بدست آورید.

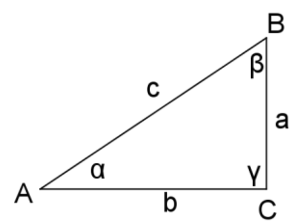
پاسخ تمرینات ۱.۱۰

مثلث قائم الزویه ABC مفروض است. زاویه $\gamma = ۹۰^\circ$ است. در تمرینات زیر با توجه به قسمت های داده شده ، بقیه قسمت های مثلث را پید ا کنید.

۱) $\alpha = ۳۰^\circ$ ، $b = ۲۰$

پاسخ

برای تمرینات ۵ – ۱ از تصویر زیر استفاده می کنیم.



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b(\tan\alpha) = ۲۰\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)$$

$$\beta = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos(۶۰^\circ)} = \frac{۲۰\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}{\frac{۱}{۲}} = ۴۰\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)$$

۲) $\beta = ۵۲^\circ$ ، $a = ۱۵$

$$\alpha = ۹۰^\circ - ۵۲^\circ = ۳۸^\circ$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\tan\alpha} = \frac{۱۵}{\tan(۳۸^\circ)} \approx ۱۹$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{۱۵}{\sin(۳۸^\circ)} \approx ۲۴$$

۳) $\alpha = ۱۷^\circ\ ۴۰'$ ، $a = ۴ / ۵۰$

$$\alpha = ۸۹^\circ\ ۶۰' - ۱۷^\circ ۴۰' = ۷۲^\circ ۲۰'$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\tan\alpha} = \frac{۴ / ۵}{\tan\left(۱۷^\circ\ ۴۰'\right)} \approx ۱۴ / ۱$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{۴ / ۵}{\sin\left(۱۷^\circ\ ۴۰'\right)} \approx ۱۴ / ۸$$

۴) $\beta = ۷۱^\circ\ ۵۱'$ ، $b = ۲۴۰$

$$\alpha = ۸۹^\circ\ ۶۰^\circ - ۷۱^\circ ۵۱' = ۱۸^\circ ۹'$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\tan\alpha = (۲۴۰)(\tan(۱۸^\circ ۹')) \approx ۷۸ / ۶۷$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{۷۸ / ۶۷}{\sin\left(۱۸^\circ ۹'\right)} \approx ۲۵۲ / ۶$$

۵) $a = ۲۵$ ، $b = ۴۵$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{۲۵}{۴۵} ۰/ ۵۵$$

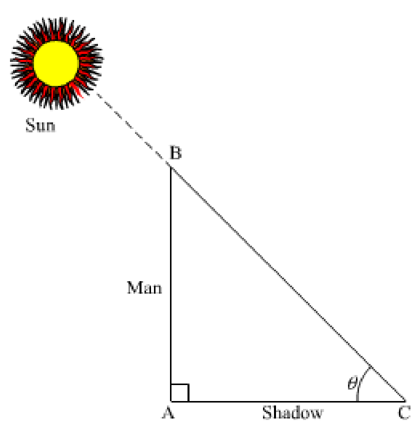
$$\alpha = \arcsin(۰/ ۵۵) \approx ۲۹^\circ$$

$$\beta \approx ۹۰^\circ - ۲۹^\circ \approx ۶۱^\circ$$

$$C = \sqrt{a^۲ + b^۲} = \sqrt{۲۵^۲ + ۴۵^۲} \approx ۵۱$$

۶ – مطلوب است زاویه فراز خورشید ، اگر شخصی با پنج فوت قد ، سایه ای به طول چهار فوت روی زمین مسطح ایجاد می کند. تصویر زیر

سایه : Shadow

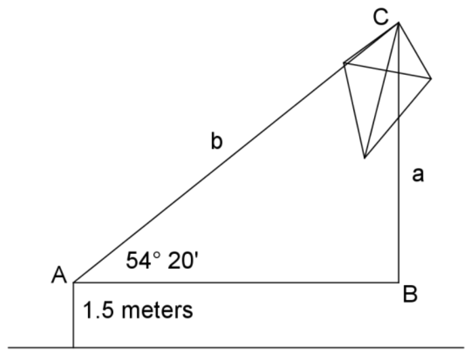


پاسخ

$$\tan\theta = \frac{۵}{۴}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۵}{۴}\right) = ۵۱^{\circ}$$

۷ - یک پسر بچه در حال هوا کردن یک باد بادک است بطوری که ابتدای ریسمان ۱/۵ از زمین فاصله دارد و زاویه ای که این ریسمان نسبت به سطح افق می سازد $۵۴^{\circ}\ ۲۰'$ است. اگر فرض کنیم که این ریسمان کاملا کشیده و صاف است و طول آن ۸۵ متر است ، مطلوب است ارتفاع باد باد ک نسبت به سطح زمین. تصویر زیر



پاسخ

اگر زاویه CAB را α بنامیم ، پس خواهیم داشت.

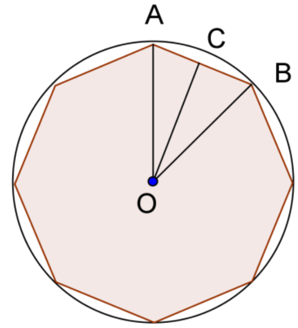
$$\sin\left(۵۴^{\circ}\ ۲۰'\right) = \sin\left(۵۴/۳۳^{\circ}\right) = \frac{a}{b}$$

$$a = \sin\left(۵۴/۳۳^{\circ}\right)۸۵ = ۶۹/۰۵$$

$$\text{ارتفاع نسبت به زمین} = ۶۹/۰۵ + ۱/۵ = ۷۰/۶ \ \text{متر}$$

۸ ـ یک هشت ضلعی منظم در یک دایره باشعاع ۱۲ سانتی متر محاط شده است. محیط هشت ضلعی را بطور تقریب بدست آورید.

پاسخ



با توجه به تصویر بالا مساله را حل می کنیم.
مثلث AOB یک مثلث متساوی الساقین است ، زیرا اضلاع OA و OB هر دو ، شعاع دائره هستند. پس $\angle A = \angle B$ است. نیمساز زاویه AOB را رسم می کنیم. این نیمساز ضلع AB را در نقطه C قطع می کند. بر اساس آنچه در هندسه خوانده ایم ، داریم $\angle AOC = \angle BOC$
همچنین $AC = BC$ و $\angle ACO = BCO$ است. پس در حقیقت مثلث های ACO و BCO هم نهشت هستند. این حقیقت که این دو مثلث هم نهش هستند موضوع مهمی است که بزودی از آن استفاده می کنیم. از طرف دیگر ملاحظه می کنید که هشت مثلث هم نهشت داریم که یکی از آنها همان مثلث AOB است. این هم حقیقت جالب دیگر است ، زیرا می توانیم اندازه زاویه AOB را پیدا کنیم. چرا ؟
زیرا محیط دائره $۳۶۰°$ است ،پس $\angle AOB = ۳۶۰° \div ۸ = ۴۵^{\circ}$ و در نتیجه

$$\angle AOC = ۴۵^{\circ} \div ۲ = ۲۲ / ۵^{\circ}$$

چون نقاط B ، C ، A روی یک خط قرار دارند پس $\angle BCO + \angle ACO = ۱۸۰°$ است. و چون دو مثلث AOC و BOC هم نهشت هستند پس $\angle ACO = ۹۰°$ و لذا مثلث AOC قائم الزاویه است. حالا محاسبات را شروع می کنیم.

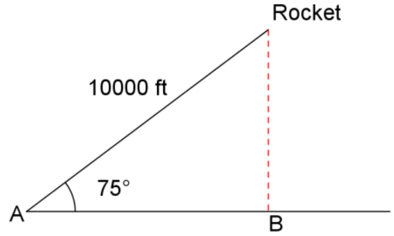
$$\sin\left(۲۲ / ۵^{\circ}\right) = \frac{AC}{AO}$$

$$AC = AO\left(\sin\left(۲۲ / ۵^{\circ}\right)\right)$$

چون $AB = ۲AC$ است ، پس $AB = ۲AO(\sin(۲۲ / ۵^{\circ}))$
چون هشت مثلث هم نهشت داریم ، پس

$$\text{محیط هشت ضلعی} = ۸ * ۲AO\sin\left(۲۲/۵^{\circ}\right) = ۱۶(۱۲)\sin\left(۲۲/۵^{\circ}\right) \approx ۷۳/۵ \text{ سانتی متر}$$

۹ ـ یک راکت در ساحل دریا با زاویه ۷۵° به مسافت ۱۰۰۰۰ فوتی پرتاب می شود. اگر زاویه پرتاب در تمام مدت ثابت باشد ، ارتفاع راکت را بطور تقریب بدست آورید.
پاسخ

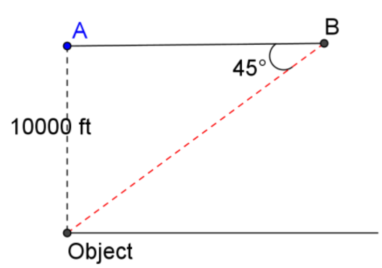


باتوجه به تصویر بالا داریم.

$$\sin\left(۷۵^{\circ}\right)=\frac{BR}{AR}=\frac{BR}{۱۰۰۰۰}$$

$$\text{ارتفاع راکت}=\left(۱۰۰۰۰\right)\sin\left(۷۵^{\circ}\right)\approx ۹۶۵۹\ \text{فوت}$$

۱۰ ـ یک هوا پیما که در ارتفاع ۱۰۰۰۰ فوتی پرواز می کند مسقیما از بالای یک شئی‌ثابت که روی زمین قرار دارد ، می گذرد. یک دقیقه بعد ، زاویه نشیب شئی ۴۲° است. سرعت هوا پیما را بطور تقریب پیدا کنید. هر مایل مساوی ۵۲۸۰ فوت است.
پاسخ



در تصویر بالا فرض می کنیم O حرف اول $Object$ یعنی شئی باشد. نقطه A مکان هوا پیما در زمان صفر در بالای شئی ، و نقطه B مکان هوا پیما بعد از یک دقیقه است.

$$\tan ۴۲^{\circ}=\frac{۱۰۰۰۰}{AB}$$

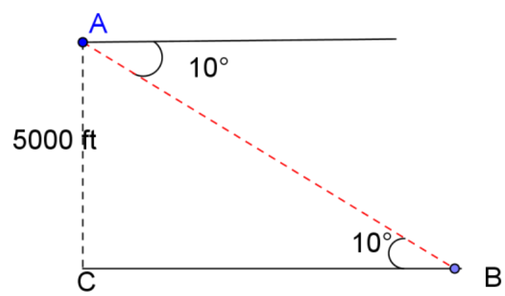
$$AB=\frac{۱۰۰۰۰}{\tan\left(۴۲^{\circ}\right)}\approx ۱۱۱۰۶\ \text{فوت در دقیقه}$$

$$\text{سرعت هوا پیما}=\frac{۱۱۱۰۶}{۵۲۸۰}\approx ۲\ \text{مایل در دقیقه}$$

$$\text{سرعت هوا پیما}=\left(۶۰\right)۲=۱۲۶\ \text{مایل در ساعت}$$

۱۱ - یک خلبان می خواهد با زاویه نشیب ۱۰° به فرود گاه نزدیک شود. اگر اکنون در ارتفاع ۵۰۰۰ فوتی در حال پرواز باشد ، در چه مسافتی از فرود گاه باید فرود را شروع کند؟

پاسخ



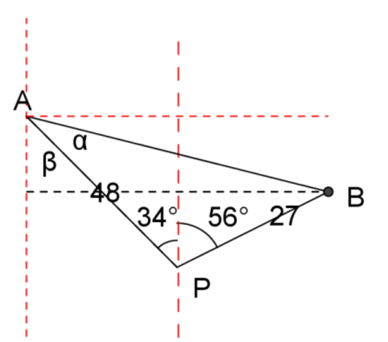
فرض می کنیم A مکان هوا پیما در ارتفاع ۵۰۰۰ فوتی باشد. و B فرودگاه مورد نظر.

$$\tan(۱۰^\circ) = \frac{۵۰۰۰}{BC}$$

$$\text{فاصله هواپیما تا فرودگاه} = BC = \frac{۵۰۰۰}{\tan(۱۰^\circ)} \approx ۲۸۴۰۰ \text{ فوت}$$

۱۲ - یک کشتی ساعت یک بعد از ظهر بندر را در جهت $N۳۴^\circ W$ با سرعت ۲۴ مایل در ساعت ترک می کند. یک کشتی دیگر در ساعت ۱:۳۰ بعد از ظهر در جهت $N۵۶^\circ E$ با سرعت ۱۸ مایل در ساعت بندر را ترک می کند. بطور تقریب در ساعت سه بعد از ظهر این دو کشتی چقدر با هم فاصله دارند. موقعیت از کشتی اول تا کشتی دوم را پیدا کنید.

پاسخ



با توجه به تصویر بالا فرض می کنیم A موقعیت کشتی اول در ساعت سه بعد از ظهر باشد. و B موقعیت کشتی دوم در ساعت سه بعد از ظهر باشد. P هم بندر مورد نظر است. فاصله این دو کشتی در ساعت سه بعد از ظهر مطابق زیر بدست می آوریم.

$$\text{فاصله دو کشتی} = \sqrt{AP^۲ + BP^۲} = \sqrt{(۲۴ * ۲)^۲ + (۱۸ * ۱/۵)^۲} = ۵۵ \text{ مایل}$$

ملاحظه می کنید که در ساعت سه بعد از ظهر کشتی دوم جنوب شرقی کشتی اول است ، برای پیدا کردن زاویه ، فرض می کنیم $\theta = \alpha + \beta$ باشد. بر اساس آنچه در هندسه خوانده ایم $\beta = ۳۴^\circ$ است.
حالا باید α را پیدا کنیم.

$$\tan\alpha = \frac{۲۷}{۴۸} = ۰/۵۶۲۵$$

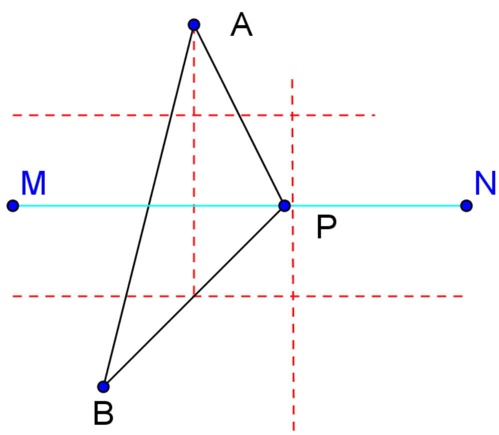
$$\alpha = \arctan(۰/۵۶۲۵) \approx ۲۹^\circ$$

$$\theta = \alpha + \beta = ۲۹^\circ + ۳۴^\circ = ۶۳^\circ$$

لذا موقعیت از کشتی اول تا کشتی دوم ۶۳ درجه جنوب شرقی است و یا $S۶۳^\circ E$

۱۳ - یک هوا پیما با سرعت ۳۶۰ مایل در ساعت از نقطه A در جهت ۱۳۷° به مدت ۳۰ دقیقه پرواز می کند و سپس با همان سرعت در جهت ۲۲۷° به مدت ۴۵ دقیقه به پرواز ادامه می دهد. این نقطه انتهای را B می نامیم. فاصله A تا B را بطور تقریب بدست آورید.

پاسخ



هوا پیما از نقطه A حرکت می کند و در جهت ۱۳۷° با سرعت ۳۶۰ مایل در ساعت پرواز می کند و پس از ۳۰ به نقطه P می رسد. این مسافت $AP = (۳۶۰)(۰/۵) = ۱۸۰$ مایل است. و زاویه ای که خط AP با خط سبز رنگ MN می سازد $\angle APM = ۱۸۰^\circ - ۱۳۷^\circ = ۴۳^\circ$ است.
سپس از نقطه P با همان سرعت در جهت ۲۲۷° به پرواز ادامه می دهد و پس از ۴۵ دقیقه به نقطه B می‌رسد ، این مسافت $PB = (۳۶۰)(۰/۷۵) = ۲۷۰$ مایل است. و زاویه ای که خط PB با خط سبز رنگ MN می سازد $\angle BPM = ۲۲۷^\circ - ۱۸۰^\circ = ۴۷^\circ$ است. پس

$$\angle APB = ۴۳^\circ + ۴۷^\circ = ۹۰^\circ$$

لذا مثلث APB یک مثلث قائم الزویه است. و در نهایت فاصله A تا B مطابق زیر بدست می آوریم.

$$AB = \sqrt{۱۸۰^۲ + ۲۷۰^۲} = ۳۲۴ \text{ مایل}$$

فصل دوم
مثلثات تحلیلی
Analytic Trigonometry

۳.۱ - اتحاد های مثلثاتی Trigonometric Identities

یک عبارت ریاضی که شامل نماد هایی مانند $\tan\theta$, $\cos\beta$, $\sin x$ و غیرو باشد ، را **عبارت مثلثاتی Trigonometric Expression** می نامند. در این عبارت ها θ ، β , x متغیر هستند.
مثال

$$x+\sin x \text{ ، } \frac{\sqrt{\theta}+۲^{\sin\theta}}{\cot\theta} \text{ ، } \frac{\cos(۳y+۱)}{x^۲+\tan^۲(z-y^۲)}$$

همان طور که در مورد عبارت های جبری عمل کردیم ، فرض می کنیم دامنه هر یک از متغیر ها مجموعه اعداد حقیقی و یا زوایا هستند بطوری که آن عبارت معنی دار باشد.

اتحاد های مثلثاتی که در بخش ۱.۲ ذکر کردیم ، می توانند برای ساده کردن عبارت های مثلثاتی پیچیده مفید باشند. اینجا همان اتحاد ها را دوباره می آوریم و چند مثال برای بکار گیری آنها ذکر می کنیم.

اتحاد های اساسی Fundamental Identities

$$\csc t=\frac{۱}{\sin t} \text{ ، } \tan t=\frac{\sin t}{\cos t} \text{ ، } \sin^۲ t+\cos^۲ t=۱$$

$$\sec t=\frac{۱}{\cos t} \text{ ، } \cot t=\frac{\cos t}{\sin t} \text{ , } ۱+\tan^۲ t=\sec^۲ t$$

$$\cot t=\frac{۱}{\tan t} \text{ . } ۱+\cot^۲ t=\csc^۲ t$$

مثال ۱ – عبارت زیر را ساده کنید.

$$(\sec\theta+\tan\theta)(۱-\sin\theta)$$

پاسخ

$$(\sec\theta+\tan\theta)(۱-\sin\theta)=\left(\frac{۱}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(۱-\sin\theta)$$

$$=\left(\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}\right)(۱-\sin\theta)=\frac{۱-\sin^۲\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

البته راه های دیگری هم هست.

مثال ۲– درستی معادله زیر را نشان دهید.

$$\frac{\tan t + \cos t}{\sin t} = \sec t + \cot t$$

پاسخ

$$\frac{\tan t + \cos t}{\sin t} = \frac{\tan t}{\sin t} + \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\sin t} + \cot t$$
$$= \frac{۱}{\cos t} + \cot t = \sec t + \cot t$$

مثال ۳ - درستی معادله زیر را نشان دهید.

$$\sec \propto - \cos \propto = \sin \propto \tan \propto$$

پاسخ

$$\sec \propto - \cos \propto = \frac{۱}{\cos \propto} - \cos \propto = \frac{۱ - \cos^{۲} \propto}{\cos \propto}$$
$$= \frac{\sin^{۲} \propto}{\cos \propto} = \sin \propto \left(\frac{\sin \propto}{\cos \propto}\right) = \sin \propto \tan \propto$$

مثال ۴ - درستی معادله زیر را نشان دهید.

$$\frac{\cos x}{۱ - \sin x} = \frac{۱ + \sin x}{\cos x}$$

پاسخ

$$\frac{\cos x}{۱ - \sin x} = \frac{\cos x}{۱ - \sin x} * \frac{۱ + \sin x}{۱ + \sin x} = \frac{\cos x(۱ + \sin x)}{۱ - \sin^{۲} x}$$
$$= \frac{\cos x(۱ + \sin x)}{\cos^{۲} x} = \frac{۱ + \sin x}{\cos x}$$

مثال ۵ – درستی معادله زیر را نشان دهید.

$$(\tan \theta - \sec \theta)^{۲} = \frac{۱ - \sin \theta}{۱ + \sin \theta}$$

پاسخ

اینجا نشان می دهیم که هر دو طرف معادله را می آوان به یک عبارت تبدیل کرد.

$$(\tan \theta - \sec \theta)^{۲} = \tan^{۲} \theta - ۲ \tan \theta \sec \theta + \sec^{۲} \theta$$
$$= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^{۲} - ۲\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)\left(\frac{۱}{\cos \theta}\right) + \left(\frac{۱}{\cos \theta}\right)^{۲}$$

$$= \frac{\sin^۲ \theta}{\cos^۲ \theta} - \frac{۲ \sin \theta}{\cos^۲ \theta} + \frac{۱}{\cos^۲ \theta} = \frac{\sin^۲ \theta - ۲ \sin \theta + ۱}{\cos^۲ \theta}$$

حال سمت راست را تغییر می دهیم.

$$\frac{۱ - \sin \theta}{۱ + \sin \theta} = \frac{۱ - \sin \theta}{۱ + \sin \theta} * \frac{۱ - \sin \theta}{۱ - \sin \theta}$$

$$= \frac{۱ - ۲ \sin \theta + \sin^۲ \theta}{۱ - \sin^۲ \theta} = \frac{\sin^۲ \theta - ۲ \sin \theta + ۱}{\cos^۲ \theta}$$

مثال ۶ – عبارت $\sqrt{a^۲ - x^۲}$ را به صورت یک تابع مثلثاتی بدون رادیکال بنویسید. برای این کار عبارت $x = a \sin \theta$. جانشین کنید.

اینجا $a > 0$ و $-\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}$ است.

پاسخ

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} = \sqrt{a^۲ - (a \sin \theta)^۲} = \sqrt{a^۲ - a^۲ \ \sin^۲ \theta}$$

$$= \sqrt{a^۲\left(۱ - \sin^۲ \theta\right)} = \sqrt{a^۲ \cos^۲ \theta} = a \cos \theta$$

تمرنت ۲.۱
درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

۱) $\cos\theta\sec\theta = ۱$
۲) $\tan\beta\cot\beta = ۱$
۳) $\sin\theta\sec\theta = \tan\theta$
۴) $\sin\alpha\cot\alpha = \cos\alpha$
۵) $\dfrac{\csc x}{\sec x} = \cot x$
۶) $\cot\beta\sec\beta = \csc\beta$
۷) $(۱+\cos\alpha)(۱-\cos\alpha) = \sin^۲\alpha$
۸) $\cos^۲ x\left(\sec^۲ x - ۱\right) = \sin^۲ x$
۹) $\cos^۲ t - \sin^۲ t = ۲\cos^۲ t - ۱$
۱۰) $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^۲\theta$
۱۱) $\dfrac{\sin t}{\csc t} + \dfrac{\cos t}{\sec t} = ۱$
۱۲) $۱ - ۲\sin^۲ x = ۲\cos^۲ x - ۱$
۱۳) $(۱+\sin\alpha)(۱-\sin\alpha) = \dfrac{۱}{\sec^۲\alpha}$
۱۴) $\left(۱-\sin^۲ t\right)\left(۱+\tan^۲ t\right) = ۱$
۱۵) $\sec\beta - \cos\beta = \tan\beta\sin\beta$
۱۶) $\dfrac{\sin w + \cos w}{\cos w} = ۱ + \tan w$
۱۷) $\dfrac{\csc^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta} = \cot^۲\theta$
۱۸) $\sin x + \cos x\cot x = \csc x$
۱۹) $\sin t(\csc t - \sin t) = \cos^۲ t$
۲۰) $\cot t + \tan t = \csc t sec\, t$

پاسخ تمرینات ۲.۱

درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

۱) $\cos\theta\sec\theta = 1$

$$\cos\theta\sec\theta = \cos\theta * \frac{1}{\cos\theta} = 1$$

۲) $\tan\beta\cot\beta = 1$

$$\tan\beta\cot\beta = \tan\beta * \frac{1}{\tan\beta} = 1$$

۳) $\sin\theta\sec\theta = \tan\theta$

$$\sin\theta\sec\theta = \sin\theta * \frac{1}{\cos\theta} = \tan\theta$$

۴) $\sin\alpha\cot\alpha = \cos\alpha$

$$\sin\alpha\cot\alpha = \sin\alpha * \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\beta$$

۵) $\dfrac{\csc x}{\sec x} = \cot x$

$$\frac{\csc x}{\sec x} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin s} = \cot x$$

۶) $\cot\beta\sec\beta = \csc\beta$

$$\cot\beta\sec\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} * \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{\sin\beta} = csc\beta$$

۷) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = \sin^2\alpha$

$$(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

۸) $\cos^2 x\left(\sec^2 x - 1\right) = \sin^2 x$

$$\cos^2 x\left(\sec^2 x - 1\right) = \frac{1}{\sec^2 x}\left(\sec^2 x - 1\right) = 1 - \frac{1}{\sec^2 x} = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

۹) $\cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$

$$\cos^2 t - \sin^2 2 = \cos^2 t - \left(1 - \cos^2 t\right) = 2\cos^2 t - 1$$

۱۰) $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$

$$(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \tan^2\theta + \cot\theta\tan\theta = \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

۱۱) $\frac{\sin t}{\csc t}+\frac{\cos t}{\sec t}=۱$

$$\frac{\sin t}{\csc t}+\frac{\cos t}{\sec t}=\frac{\sin t}{\frac{۱}{\sin t}}+\frac{\cos t}{\frac{۱}{\cos t}}=\sin^۲ t+\cos^۲ t=۱$$

۱۲) $۱-۲\sin^۲ x=۲\ \cos^۲ x-۱$

$$۱-۲\ \sin^۲ x=۱-۲\left(۱-\cos^۲ x\right)=۱-۲+۲\cos^۲ x=۲\cos^۲ ۲-۱$$

۱۳) $(۱+\sin\alpha)(۱-\sin\alpha)=\frac{۱}{\sec^۲\alpha}$

$$(۱+\sin\alpha)(۱-\sin\alpha)=۱-\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha=\frac{۱}{\sec^۲\alpha}$$

۱۴) $\left(۱-\sin^۲ t\right)\left(۱+\tan^۲ t\right)=۱$

$$\left(۱-\sin^۲ t\right)\left(۱+\tan^۲ t\right)=\cos^۲ t\sec^۲ t=\cos^۲ t\frac{۱}{\cos^۲ t}=۱$$

۱۵) $\sec\beta-\cos\beta=\tan\beta\sin\beta$

$$\sec\beta-\cos\beta=\frac{۱}{\cos\beta}-\cos\beta=\frac{۱-\cos^۲\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin^۲\beta}{\cos\beta}$$
$$=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}*\sin\beta=\tan\beta\sin\beta$$

۱۶) $\frac{\sin w+\cos w}{\cos w}=۱+\tan w$

$$\frac{\sin w+\cos w}{\cos w}=\frac{\sin w}{\cos w}+\frac{\cos w}{\cos w}=۱+\tan w$$

۱۷) $\frac{\csc^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta}=\cot^۲\theta$

$$\frac{\csc^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta}=\frac{\frac{۱}{\sin^۲\theta}}{\sec^۲\theta}=\frac{\frac{۱}{\sin^۲\theta}}{\frac{۱}{\cos^۲\theta}}=\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\cot^۲\theta$$

۱۸) $\sin x+\cos x\cot x=\csc x$

$$\sin x+\cos x\cot x=\sin x+\cos x*\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x}$$
$$\frac{۱}{\sin x}=\csc x$$

۱۹) $\sin t(\csc t - \sin t) = \cos^۲ t$

$$\sin t(\csc t - \sin t) = \sin t \csc t - \sin^۲ t = \sin t * \frac{۱}{\sin t} - \sin^۲ t$$
$$= ۱ - \sin^۲ t = \cos^۲ t$$

۲۰) $\cot\ t + \tan\ t = \csc t sec\ t$

$$\cot t + \tan t = \frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos^۲ t + \sin^۲ t}{\sin t \cos t} = \frac{۱}{\sin t} * \frac{۱}{\cos t}$$
$$= \csc t \sec t$$

۲.۲ - معادله های مثلثاتی Trigonometric Equations

یاد آوری :فرق بین معادله و اتحاد.

اتحاد یک تساوی است که برای تمام مقادیر متغیر صحیح است. مثلا

$$(x+y)^۲ = x^۲ + ۲xy + y^۲$$

یک اتحاد است زیر اگر هر عدد دلخواهی بجای متغیر ها بگذاریم ، تساوی بر قرار است.

اما در یک معادله فقط برای مقادیری مشخصی تساوی بر قرار است. مثلا $x^۲ - ۴ = 0$ ، فقط برای $x = \pm ۲$ تساوی بر قرار است. ± ۲ را ریشه های معادله می نامند.

یک معادله مثلثاتی یک تساوی است که شامل عبارت های مثلثاتی باشد. ریشه های معادله های مثلثاتی ممکن است بر حسب اعداد حقیقی و یا زوایا بیان شوند. اگر یک معادله مثلثاتی ، یک اتحاد نباشد ، روش حل آن مانند آنچه در جبر عمل می کردیم می باشد. تنهاتفاوت این است که اینجا معادله را برای

$$\sin x ، \cos\theta$$

و غیرو حل می کنیم ، و سپس x و θ را پیدا می کنیم.

مثال ۱ – معادله $\sin\theta\tan\theta = \sin\theta$ را حل کنید.

پاسخ

ممکن است تصور کنیم که اگر دو طرف معادله را بر $\sin\theta$ تقسیم کنیم ، معادله ساده می شود. اما با این کار ریشه $\sin\theta$ را از بین برده ایم. حالا روش صحیح حل معادله.

$$\sin\theta\tan\theta - \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta\left(\tan\theta - ۱\right) = 0$$

$$\sin\theta = 0 \quad \text{یا} \quad \tan\theta - ۱ = 0$$

ریشه های $\sin\theta = 0$ عبارتند از $0 ، \pm\pi ، \pm ۲\pi ، \cdots$ یعنی $\theta = n\pi$ برای هر عدد صحیح n .

چون دور تناوب تانژانت $\pi,$ است ، پس کافی است ریشه های معادله $\tan\theta = ۱$ را در بازه $[0,\pi)$ پیدا کنیم. سپس ضریب های π را اضافه کنیم. تنها ریشه $\tan\theta = ۱$ در بازه $[0,\pi)$ عبارت است از $\frac{\pi}{۴}$ پس تمام ریشه ها شکل زیر را دارند.

$$\theta = \frac{\pi}{۴} + n\pi$$

برای هر عدد صحیح n.لذا ریشه های معادله داده شده کلیه اعداد به شکل زیر هستند.

$$n\pi \quad \text{یا} \quad \frac{\pi}{۴} + n\pi$$

مثال ۲ – معادله $۲\sin^۲ t - \cos t - ۱ = 0$ را حل کنید.

پاسخ

ابتدا معادله را به معادله ای تبدیل می کنیم که فقط شامل $\cos t$ باشد.

$$۲\left(۱ - \cos^۲ t\right) - \cos t - ۱ = 0$$

$$۲ - ۲\cos^۲ t - \cos t - ۱ = 0$$

$$-۲\cos^۲ t - \cos t + ۱ = 0$$
$$۲\cos^۲ t + \cos t - ۱ = 0$$
$$(۲\cos t - ۱)(\cos t + ۱) = 0$$
$$۲\cos t - ۱ = 0 \quad \text{یا} \quad \cos t + ۱ = 0$$
$$\cos t = \frac{۱}{۲} \quad \text{یا} \quad \cos t = -۱$$

کافی است ریشه های دو تساوی بدست آمده را در بازه $[0,۲\pi)$ پیدا کنیم و سپس جواب های بدست آمده را با ضریب های ۲π جمع کنیم. اگر $\cos t = \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس زاویه مرجع $\frac{\pi}{۳}$ و یا ۶0° است.
چون $\cos t$ مثبت است ، زاویه t یا در ربع اول و یا در ربع چهارم است. پس در بازه $[0,۲\pi)$

$$t = \frac{\pi}{۳} \quad \text{یا} \quad t = ۲\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}$$

اگر $\cos t = -۱$ باشد ، پس $t = \pi$ است. لذا ریشه های معادله داده شده مطابق زیر است.

$$\frac{\pi}{۳} + ۲n\pi ، \quad \frac{۵\pi}{۳} + ۲n\pi \quad ، \pi + ۲n\pi$$

برای هر عدد صحیح n.

مثال ۳ – ریشه های معادله $۴\sin^۲ x \tan x - \tan x = 0$ را در بازه $[0,۲\pi)$ پیدا کنید.
پاسخ
از سمت چپ فاکتور می گیریم.

$$\tan x\left(۴\sin^۲ x - ۱\right) = 0$$
$$\tan x = 0 \quad \text{یا} \quad \sin^۲ x = \frac{۱}{۴}$$

یعنی

$$\tan x = 0 ، \quad \sin x = \frac{۱}{۲} \quad ، \sin x = -\frac{۱}{۲}$$

ریشه های $\tan x = 0$ در بازه $[0,۲\pi)$ عبارتند از 0 و π .
ریشه های $\sin x = \frac{۱}{۲}$ عبارتند از $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$
معادله $\sin x = -\frac{۱}{۲}$ منتج به اعداد بین π و ۲π می شود که دارای زاویه مرجع $\frac{\pi}{۶}$ است. یعنی

$$\pi + \frac{\pi}{۶} = \frac{۷\pi}{۶} \quad \text{و} \quad ۲\pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶}$$

و در نهایت ریشه های معادله داده شده در بازه $[0,۲\pi)$ عبارتند از

$$0 \;،\; \pi , \frac{\pi}{۶} \;,\; \frac{۵\pi}{۶} \;،\; \frac{۷\pi}{۶} \;،\; \frac{۱۱\pi}{۶}$$

مثال ۴– ریشه های $\csc^{۴} ۲u - ۴ = 0$ را پیدا کنید.

پاسخ

از سمت چپ فاکتور می گیریم.

$$\left(\csc^{۲} ۲u - ۲\right)\left(\csc^{۲} ۲u + ۲\right) = 0$$

$$\csc^{۲} ۲u - ۲ = 0 \quad \text{یا} \quad \csc^{۲} ۲u + ۲ = 0$$

$$\csc^{۲} ۲u = ۲ \quad \text{یا} \quad \csc^{۲} ۲u = -۲$$

معادله $\csc^{۲} ۲u = -۲$ ریشه حقیقی ندارد. $\csc^{۲} ۲u = ۲$ دارای دو ریشه است.

$$csc\ ۲u = \sqrt{۲} \quad \text{یا} \quad csc\ ۲u = -\sqrt{۲}$$

اگر $csc\ ۲u = \sqrt{۲}$ باشد ، پس

$$۲u = \frac{\pi}{۴} + ۲n\,\pi \;\text{یا}\; ۲u = \frac{۳\pi}{۴} + ۲n\,\pi$$

برای هر عدد صحیح n. دو طرف دو معادله های بالا را بر دو تقسیم می کنیم.

$$u = \frac{\pi}{۸} + n\,\pi \quad \text{یا} \quad u = \frac{۳\pi}{۸} + n\,\pi$$

به همین طریق برای $۲u = -\sqrt{۲}$ داریم

$$۲u = \frac{۵\pi}{۴} + ۲n\,\pi \;\text{یا}\; ۲u = \frac{۷\pi}{۴} + ۲n\,\pi$$

برای هر عدد صحیح n. هر دو طرف معادله بالا را بر دو تقسیم می کنیم.

$$u = \frac{۵\pi}{۸} + n\,\pi \;\text{یا}\; u = \frac{۷\pi}{۸} + n\,\pi$$

با جمع آوری اطلاعات بالا ، ملاحظه می کنید که ریشه های معادله داده شده را می توان به طریق زیر نوشت.

$$u = \frac{\pi}{۸} + \frac{\pi}{۴}n$$

مثال بعدی با استفاده از ماشین حساب معادله را حل می کنیم.

مثال ۵ – معادله زیر را با تقریب نزدیک ترین عدد صحیح حل کنید.

$$۵\sin\theta\tan\theta - ۱0\tan\theta + ۳\sin\theta - ۶ = 0$$

در بازه $[0^\circ, ۳۶0^\circ)$

پاسخ

فاکتور می گیریم.

$$۵\tan\theta(\sin\theta - ۲) + ۳(\sin\theta - ۲) = 0$$
$$(۵\tan\theta + ۳)(\sin\theta - ۲) = 0$$

معادله $\sin\theta = ۲$ ریشه ندارد ، زیرا $\sin\theta \leq ۱$ است برای تمام θ ها. پس ریشه های معادله داده شده مطابق زیر است.

$$\tan\theta = -\frac{۳}{۵} = -۰\,۶$$

حالا مقدار زاویه مرجع را به طور تقریب بدست می آوریم ، یعنی زاویه حادی که تانژانت آن ۰/ ۶ است. یعنی

$$\tan\theta' = \frac{۳}{۵} = ۰/\,۶$$

است. برای این کار از ماشین حساب کمک می گیریم. عدد ۰/ ۶ وارد ماشین حساب کنید و سپس دکمه arctan و یا $\tan^{-1}$ را فشد دهید , با این کار ، ماشین حساب به شما عدد ۳۰/ ۹۶۳۷۵۷ می دهد. این عدد بر حسب درجه است. پس $\theta' \approx ۳۱^\circ$ است. چون θ در ربع دوم و یا ربع چهارم است لذا داریم.

$$\theta = ۱۸۰^\circ - ۳۱^\circ = ۱۴۹^\circ \quad \text{یا} \quad \theta = ۳۶۰^\circ - ۳۱^\circ = ۳۲۹^\circ$$

تمرینات ۲.۲

معادله های زیر را حل کنید.

۱) $۲\cos t + ۱ = 0$

۲) $\tan^۲ x = ۱$

۳) $(\cos\theta - ۱)(\sin\theta + ۱) = 0$

۴) $\sec^۲ \propto -۴ = 0$

۵) $\sqrt{۳} + ۲\sin\beta = 0$

۶) $\cot^۲ x - ۳ = 0$

۷) $(۲\sin\theta + ۱)(۲\cos\theta + ۳) = 0$

۸) $\sin ۲x(\csc ۲x - ۲) = 0$

در تمرینات زیر معادله ها را در بازه $[0, ۲\pi)$ حل کنید و همچنین اندازه هر زاویه را بر حسب درجه پیدا کنید.

۹) $۲ - ۸\cos^۲ t = 0$

۱۰) $۲\sin^۲ u = ۱ - \sin u$

۱۱) $\tan^۲ x \sin x = \sin x$

۱۲) $۲\cos^۲ x + \cos x = 0$

۱۳) $\sin^۲\theta + \sin\theta - ۶ = 0$

۱۴) $۱ - \sin t = \sqrt{۳}\cos t$

۱۵) $\cos \propto + \sin \propto = ۱$

۱۶) $\tan\theta + \sec\theta = ۱$

۱۷) $۲\sin^۳ x + \sin^۲ x - ۲\sin x - ۱ = 0$

۱۸) $۲\tan t \csc t + ۲\csc t + \tan t + ۱ = 0$

پاسخ تمرینات ۲.۲

معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\text{۲} \cos t + \text{۱} = 0$

پاسخ

$$\text{۲} \cos t = -\text{۱}$$

$$\cos t = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

چون $\cos t = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}} < 0$ است ، پس زاویه t یا در ربع دوم و یا ربع سوم قرار دارد . لذا

$$t = \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}} + \text{۲}n\,\pi \quad \text{یا} \quad t = \frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}} + \text{۲}n\,\pi$$

۲) $\tan^{\text{۲}} x = \text{۱}$

پاسخ

$$\tan x = \pm\text{۱}$$

اگر $\tan x = \text{۱}$ باشد ، پس زاویه x یا در ربع اول است و یا در ربع سوم ، در این صورت

$$x = \frac{\pi}{\text{۴}} + n\pi \quad \text{یا} \quad x = \frac{\text{۵}\pi}{\text{۴}} + n\,\pi$$

اگر $\tan x = -\text{۱}$ باشد ، پس زاویه x یا در ربع دوم است و یا در ربع چهارم ، در این صورت

$$x = \frac{\text{۳}\pi}{\text{۴}} + n\,\pi \quad \text{یا} \quad x = \frac{\text{۷}\pi}{\text{۴}} + n\,\pi$$

است. با جمع آوری اطلاعات بالا خواهیم داشت.

$$x = \frac{\pi}{\text{۴}} + \frac{\pi}{\text{۲}}n$$

برای یک عدد صحیح n

۳) $(\cos\theta - \text{۱})(\sin\theta + \text{۱}) = 0$

پاسخ

$$\cos\theta - \text{۱} = 0 \quad \text{یا} \quad \sin\theta + \text{۱} = 0$$

$$\cos\theta = \text{۱} \quad \text{یا} \quad \sin\theta = -\text{۱}$$

اگر $\cos\theta = \text{۱}$ باشد ، پس $\theta = \text{۲}n\,\pi$ است

اگر $\sin\theta = -\text{۱}$ باشد ، پس $\theta = \frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}} + \text{۲}n\,\pi$ است و در نتیجه

$$\theta = \text{۲}n\,\pi \quad \text{یا} \quad \theta = \frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}} + \text{۲}\,n\,\pi$$

است. n یک عدد صحیح است.

۴) $\sec^{۲} \propto -۴ = 0$

پاسخ

$$\sec^{۲} \propto -۴ = 0$$
$$\sec^{۲} \propto = ۴$$
$$\sec \propto = \pm ۲$$

اگر $\sec \propto = ۲$ باشد ، پس زاویه $\propto$ در یا در ربع صفحه اول است و یا در ربع صفحه چهارم ، در این صورت

$$\propto = \frac{\pi}{۳} + ۲n\pi \quad \text{یا} \quad \propto = \frac{۵\pi}{۳} + ۲n\pi$$

اگر $\sec \propto = -۲$ باشد ، پس زاویه $\propto$ در ربع صفحه دوم است و یا در ربع صفحه سوم ، در این صورت

$$\propto = \frac{۲\pi}{۳} + ۲n\pi \quad \text{یا} \quad \propto = \frac{۴\pi}{۳} + ۲n\pi$$

با جمع آوری اطلاعات بالاخواهیم داشت.

$$\propto = \frac{\pi}{۳} + n\pi \quad \text{یا} \quad \propto = \frac{۲\pi}{۳} + n\pi$$

برای هر عدد صحیح n

۵) $\sqrt{۳} + ۲\sin\beta = 0$

$$\sqrt{۳} + ۲\sin\beta = 0$$
$$۲\sin\beta = -\sqrt{۳}$$
$$\sin\beta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

چون $\sin\beta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} < 0$ است ، پس β یا در ربع صفحه سوم است و یا در ربع صفحه چهارم ، در این صورت

$$\beta = \frac{۴\pi}{۳} + ۲n\pi \quad \text{یا} \quad \beta = \frac{۵\pi}{۳} + ۲n\pi$$

۶) $\cot^{۲} x - ۳ = 0$

پاسخ

$$\cot^{۲} x = ۳$$
$$\cot = \pm\sqrt{۳}$$

اگر $0 < \sqrt{۳} = \cot x$ باشد ، پس زاویه x یا در ربع صفحه اول است و یا در ربع صفحه سوم ، در این صورت

$$x = \frac{\pi}{۶} + n\pi$$

اگر $0 > -\sqrt{۳} = \cot x$ باشد ، پس زاویه x یا در ربع صفحه دوم است و یا در ربع صفحه چهارم ، در این صورت

$$x = \frac{۵\pi}{۶} + n\pi$$

فراموش نشود که دور تناوب تانژانت و کتانژانت $n\pi$ است.

۷) $(۲\sin\theta + ۱)(۲\cos\theta + ۳) = 0$

پاسخ

$$۲\sin\theta + ۱ = 0 \quad \text{یا} \quad ۲\cos\theta + ۳ = 0$$
$$\sin\theta = -\frac{۱}{۲} \quad \text{یا} \quad \cos\theta = -\frac{۳}{۲}$$

معادله $\cos\theta = -\frac{۳}{۲}$ جواب ندارد ، زیرا $|\cos\theta| \leq ۱$ است.

اگر $\sin\theta = -\frac{۱}{۲}$ باشد ، پس زاویه θ در ربع صفحه سوم و یا چهارم است ، در این صورت

$$\theta = \frac{۷\pi}{۶} + ۲n\pi \quad \text{یا} \quad \theta = \frac{۱۱\pi}{۶} + ۲n\pi$$

۸) $\sin ۲x(\csc ۲x - ۲) = 0$

پاسخ

$$\sin ۲x = 0 \quad \text{یا} \quad \csc ۲x = ۲$$

اگر $\sin ۲x = 0$ باشد ، پس $۲x = 0$ است ، در این صورت

$$۲x = 0 + ۲n\pi \quad \text{یا} \quad ۲x = \pi + ۲n\pi$$
$$x = n\pi \quad \text{یا} \quad x = \frac{\pi}{۲} + n\pi$$

اما معادله برای $n\pi$ و $\frac{\pi}{۲}+n\pi$ تعریف نشده است.

اگر $\csc ۲x = ۲$ باشد ، پس

$$۲x = \frac{\pi}{۶} + ۲n\pi \quad \text{یا} \quad ۲x = \frac{۵\pi}{۶} + ۲n\pi$$

$$x = \frac{\pi}{۱۲} + n\pi \quad \text{یا} \quad x = \frac{۵\pi}{۱۲} + n\pi$$

در تمرینات زیر معادله ها را در بازه $[0, ۲\pi)$ حل کنید و همچنین اندازه هر زاویه را بر حسب درجه پیدا کنید.

۹) $۲ - ۸\cos^۲ t = 0$

پاسخ

$$-۸\cos^۲ t = -۲$$

$$\cos^۲ t = \frac{۱}{۴}$$

$$\cos t = \pm\frac{۱}{۲}$$

اگر $\cos t = \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس زاویه t یا در ربع صفحه اول است یا در ربع صفحه چهارم ، در این صورت

$$t = \frac{\pi}{۳} \quad \text{یا} \quad t = \frac{۵\pi}{۳}$$

اگر $\cos t = -\frac{۱}{۲}$ باشد ، پس زاویه t در ربع صفحه دوم و یا در ربع صفحه سوم است ، در این صورت

$$t = \frac{۲\pi}{۳} \quad \text{یا} \quad t = \frac{۴\pi}{۳}$$

پس مقدار زاویه بر حسب رادیان به ترتیب زیر است

$$\frac{\pi}{۳} ، \frac{۲\pi}{۳} ، \frac{۴\pi}{۳} ، \frac{۵\pi}{۳}$$

و بر حسب درجه به ترتیب زیر است.

$$۶۰^\circ ، ۱۲۰^\circ ، ۲۴۰^\circ ، ۳۰۰^\circ$$

$۱۰)\ ۲\sin^{۲} u = ۱ - \sin u$

پاسخ

فرض می کنیم $x = \sin u$ باشد ، پس داریم

$$۲x^{۲} = ۱ - x$$
$$۲x^{۲} + x - ۱ = 0$$
$$x^{۲} + \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲} = 0$$
$$(x + ۱)\left(x - \frac{۱}{۲}\right) = 0$$
$$x = -۱ \quad \text{یا} \quad x = \frac{۱}{۲}$$

جانشینی را بر می گردانیم ، پس داریم

$$\sin u = -۱ \quad \text{یا} \quad \sin u = \frac{۱}{۲}$$

اگر $\sin u = -۱$ باشد ، پس

$$u = \frac{۳\pi}{۲}$$

است ، و اگر $\sin u = \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس زاویه u یا در ربع اول است و یا دوم ، لذا

$$u = \frac{\pi}{۶} \quad \text{یا} \quad u = \frac{۵\pi}{۶}$$

پس مقدار زاویه بر حسب رادیان به ترتیب زیر است

$$\frac{\pi}{۶}\ ،\ \frac{۵\pi}{۶}\ ،\ \frac{۳\pi}{۲}$$

و بر حسب درجه به ترتیب زیر است.

۳۰° ، ۱۵۰° ، ۲۷۰*

$۱۱)\ \tan^{۲} x \sin x = \sin x$

پاسخ

$$\tan^{۲} x \sin x - \sin x = 0$$
$$\sin x\left(\tan^{۲} x - ۱\right) = 0$$
$$\sin x(\tan x - ۱)(\tan x + ۱) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \text{یا} \quad \tan x = ۱ \quad \text{یا} \quad \tan x = -۱$$

اگر $\sin x = 0$ باشد ، پس

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \pi$$

اگر $\tan x = ۱$ باشد ، پس زاویه x یا در ربع اول است و یا در ربع سوم ، در این صورت

$$x = \frac{\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad x = \frac{۵\pi}{۴}$$

اگر $\tan x = -۱$ باشد ، پس زاویه x یا در ربع دوم است یا در ربع چهارم ، در این صورت

$$x = \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad x = \frac{۷\pi}{۴}$$

پس مقدار زاویه بر حسب رادیان به ترتیب زیر است

$$0 \text{ ، } \pi \text{ ، } \frac{\pi}{۴} \text{ ، } \frac{۳\pi}{۴} \text{ ، } \frac{۵\pi}{۴} \text{ ، } \frac{۷\pi}{۴}$$

و بر حسب درجه به ترتیب زیر است

$$0^\circ \text{ ، } ۱۸۰^\circ \text{ ، } ۴۵^\circ \text{ ، } ۱۳۵^\circ \text{ ، } ۲۲۵^\circ \text{ ، } ۳۱۵^\circ$$

۱۲) $۲\cos^۲ x + \cos x = 0$

پاسخ

$$\cos x(۲\cos x + ۱) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{یا} \quad \cos x = -\frac{۱}{۲}$$

اگر $\cos x = 0$ باشد ، پس

$$x = \frac{\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad x = \frac{۳\pi}{۲}$$

اگر $\cos x = -\frac{۱}{۲}$ باشد ، پس زاویه x یا در ربع دوم است و یا ربع سوم ، در این صورت

$$x = \frac{۲\pi}{۳} \quad \text{یا} \quad x = \frac{۴\pi}{۳}$$

پس مقدار زاویه بر حسب رادیان به ترتیب زیر است

$$\frac{\pi}{۲} \text{ ، } \frac{۳\pi}{۲} \text{ ، } \frac{۲\pi}{۳} \text{ ، } \frac{۴\pi}{۳}$$

و بر حسب درجه به ترتیب زیر است

$$۹۰^\circ \text{ ، } ۲۷۰^\circ \text{ ، } ۱۲۰^\circ \text{ ، } ۲۴۰^\circ$$

۱۳) $\sin^{۲}\theta + \sin\theta - ۶ = 0$

فرض می کنیم $u - \sin\theta$ باشد ، پس داریم

$$u^{۲} + u - ۶ = 0$$
$$(u + ۳)(u - ۲) = 0$$
$$u = -۳ \quad \text{یا} \quad u = ۲$$

جانشینی را بر می گردانیم .

$$\sin\theta = -۳ \quad \text{یا} \quad \sin\theta = ۲$$

معادله های بالا ریشه ندارند. زیرا $|\sin x| \le ۱$ است.

۱۴) $۱ - \sin t = \sqrt{۳}\cos t$

پاسخ

$$(۱ - sin\ t)^{۲} = \left(\sqrt{۳}\cos t\right)^{۲}$$
$$۱ - ۲\sin t + \sin^{۲} t = ۳\cos^{۲} t$$
$$۱ - ۲\sin t + \sin^{۲} t = ۳\left(۱ - \sin^{۲} t\right)$$
$$۱ - ۲\sin t + \sin^{۲} t = ۳ - ۳\sin^{۲} t$$
$$۴\ \sin^{۲} t - ۲\sin t - ۲ = 0$$
$$\sin^{۲} t - \frac{۱}{۲}\sin t - \frac{۱}{۲} = 0$$
$$(\sin t - ۱)\left(\sin t + \frac{۱}{۲}\right) = 0$$
$$\sin t = ۱ \quad \text{یا} \quad \sin t = -\frac{۱}{۲}$$

اگر $\sin t = ۱$ باشد ، پس $t = \frac{\pi}{۲}$ است.

اگر $\sin t = -\frac{۱}{۲}$ باشد ، پس $t = \frac{۱۱\pi}{۶}$ است.

پس مقدار زاویه بر حسب رادیان به ترتیب زیر است.

$$\frac{۱۱\pi}{۶} \ ، \ \frac{\pi}{۲}$$

و بر حسب درجه به ترتیب زیر است.

$$۳۳۰° \ ، \ ۹۰°$$

۱۵) $\cos\propto+\sin\propto=۱$

$$(\cos\propto+\sin\propto)^{۲}=۱^{۲}$$
$$\cos^{۲}\propto+\sin^{۲}\propto+۲\sin\propto\cos\propto=۱$$
$$۱+۲\sin\propto\cos\propto=۱$$
$$۲\sin\propto\cos\propto=0$$
$$\sin\propto=0 \quad \text{یا} \quad \cos\propto=0$$

اگر $\sin\propto=0$ باشد ، پس

$$\propto=0 \quad \text{یا} \quad \propto=\pi$$

اگر $\cos\propto=0$ باشد ، پس

$$\propto=\frac{\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad \propto=\frac{۳\pi}{۲}$$

پس مقدار زاویه بر حسب رادیان به ترتیب زیر است.

$$0 \text{ ، } \frac{\pi}{۲}$$

و بر حسب درجه به ترتیب زیر است.

$$0^\circ \text{ ، } ۹0^\circ$$

ملاحظه می کنید که زوایای $\propto=\pi$ و $\propto=\frac{۳\pi}{۲}$ حذف کردیم زیرا اگر $\propto=\frac{۳\pi}{۲}$ را در معادله قرار دهیم ، خواهیم داشت

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)+\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=0-۱=-۱$$

معادله بر قرار نیست. به همین ترتیب اگر $\propto=\pi$ در معادله قرار دهیم ، معادله بر قرار نیست. این موضوع منطقی است ، زیرا اگر بخاطر بیاورید ، در جبر خواندیم که اگر هنگام حل یک معادله ، دو طرف معادله را به توان دو برسانیم ، بعضی از جواب های بدست آمده را نمی توانیم قبول کنیم. زیرا در حقیقت آن جوابها کاذب هستند. همیشه باید جوابهای بدست آمده را در معادله اصلی امتحان کنیم.

۱۶) $\tan\theta+\sec\theta=۱$

پاسخ

$$\tan\theta+\sec\theta-۱=0$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{۱}{\cos\theta}-۱=0$$
$$\frac{\sin\theta+۱-\cos\theta}{\cos\theta}=0$$
$$\sin\theta-\cos\theta=-۱$$
$$(\sin\theta-\cos\theta)^{۲}=(-۱)^{۲}$$
$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta-۲\sin\theta\cos\theta=۱$$

$$۱-۲\sin\theta\cos\theta=۱$$
$$-۲\sin\theta\cos\theta=0$$
$$۲\sin\theta\cos\theta=0$$

حالا به همان نتیجه تمرین شماره ۱۵ رسیدیم ، یعنی پاسخ احتمالی مطابق زیر ممکن است باشد.

$$0 \text{ ، } \pi \text{ ، } \frac{\pi}{۲} \text{ ، } \frac{۳\pi}{۲}$$

اما باز به همان دلیل که تمام جواب های بدست آمده ، معادله را بر قرار نمی کنند ، فقط زاویه 0 ردیان یا 0° را قبول می کنیم.

۱۷) $۲\sin^۳ x+\sin^۲ x-۲\sin x-۱=0$

پاسخ

$$\left(۲\sin^۳ x-۲\sin x\right)+\left(\sin^۲ x-۱\right)=0$$
$$۲\sin x\left(\sin^۲ x-۱\right)+\left(\sin^۲ x-۱\right)=0$$
$$\left(\sin^۲ x-۱\right)\left(۲\sin x+۱\right)=0$$
$$\sin^۲ x-۱=0 \quad \text{یا} \quad ۲\sin x+۱=0$$
$$\sin x=\pm۱ \quad \text{یا} \quad \sin x=-\frac{۱}{۲}$$

اگر $\sin x=۱$ باشد ، پس

$$x=\frac{\pi}{۲}$$

اگر $\sin x=-۱$ باشد ، پس

$$x=\frac{۳\pi}{۲}$$

اگر $\sin x=-\frac{۱}{۲}$ باشد ، پس زاویه x در ربع صفحه سوم و یا چهارم قرار دارد. پس

$$x=\frac{۷\pi}{۶} \quad \text{یا} \quad x=\frac{۱۱\pi}{۶}$$

است. پس مقدار زاویه بر حسب رادیان به ترتیب زیر است.

$$\frac{۷\pi}{۶} \text{ ، } \frac{۱۱\pi}{۶} \text{ ، } \frac{\pi}{۲} \text{ ، } \frac{۳\pi}{۲}$$

و بر حسب درجه به ترتیب زیر است.

$$۲۱۰^\circ \text{ ، } ۳۳۰^\circ \text{ ، } ۹۰^\circ \text{ ، } ۲۷۰^\circ$$

۱۸) $۲ \tan t \csc t + ۲ \csc t + \tan t + ۱ = 0$

پاسخ

$$۲ \csc t(\tan t + ۱) + (\tan t + ۱) = 0$$
$$(\tan t + ۱)(۲ \csc t + ۱) = 0$$
$$\tan t + ۱ = 0 \quad \text{یا} \quad ۲ \csc t + ۱ = 0$$

معادله $۲ \csc t + ۱ = 0$ ریشه ندارد.

اگر $\tan t + ۱ = 0$ باشد ، پس $\tan t = -۱$ است. در این صورت t یا در ربع صفحه سوم است و یا چهارم ،پس

$$t = \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad t = \frac{۷\pi}{۴}$$

پس مقدار زاویه بر حسب رادیان به ترتیب زیر است.

$$\frac{۳\pi}{۴} \text{ ، } \frac{۷\pi}{۴}$$

و بر حسب درجه به ترتیب زیر است.

$$۱۳۵^\circ \text{ ، } ۳۱۵^\circ$$

۲.۳ - فرمول های جمع و تفریق دو زاویه The Addition and Subtraction Formulas

در این بخش فرمول های مثلثاتی که شامل $u+v$ یا $u-v$ هستند را به شما معرفی می کنیم.
u و v می توانند اعداد حقیقی و یا زوایا باشند. این فرمول ها به ترتیب بنام فرمول های جمع و تفریق معروف هستند. فرمول هایی که مورد بحث قرار خواهیم داد ممکن است به صورت زیر باشند.

فرمول تفریق دو زاویه برای کسینوس
$$\cos(u-v)=\cos u\cos v+\sin u\sin v$$

اثبات - u و v اعداد حقیقی هستند ، و نقاط $P(u)$ و $P(v)$ روی دائره واحد U که به ترتیب مربوط به u و v هستند در نظر بگیرید . فرض می کنیم $w=u-v$ و فرض می کنیم $P(w)=P(u-v)$ نقطه مربوطه روی U باشد. تصویر A. همچنین فرض می کنیم هم u و هم v بین صفر و ۲ π هستند. و داریم $0\le u-v<v$. اعداد u و v و w را می توان اندازه طول کمان های روی دائره U تصور کرد و یا اندازه زاویه ها بر حسب رادیان.

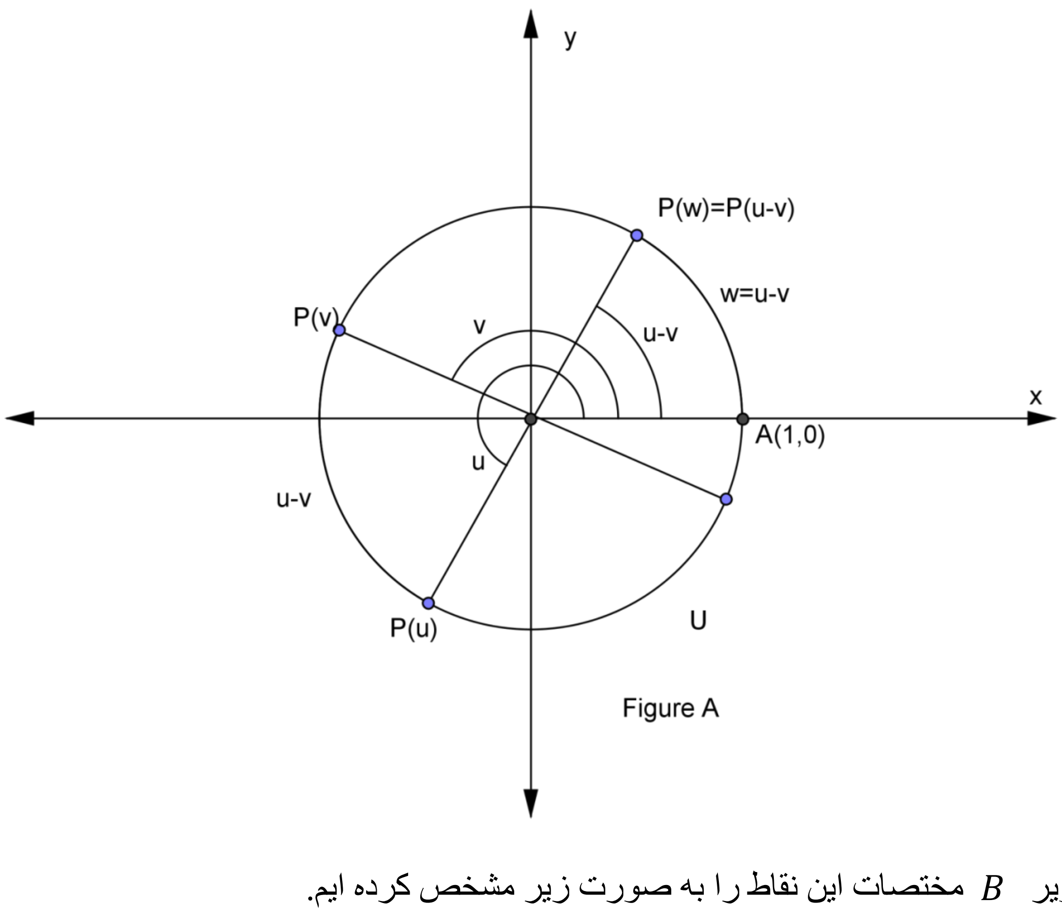


Figure A

در تصویر B مختصات این نقاط را به صورت زیر مشخص کرده ایم.
$$P(u)=(u_۱,u_۲)\ ؛\ P(v)=(v_۱,v_۲)\ ؛\ P(w)=P(u-v)=(w_۱,w_۲)$$

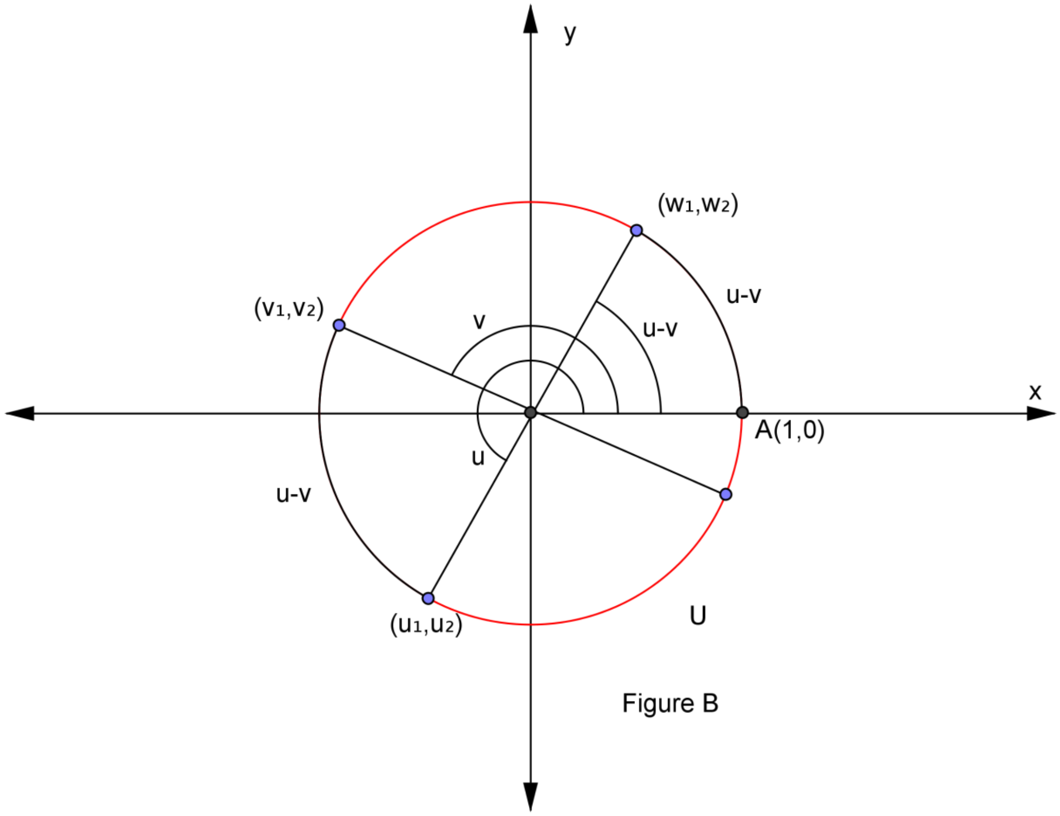


Figure B

بر اساس تعریف توابع مثلثاتی بر حسب دائره واحد داریم.

$$\cos u = u_۱ \qquad \cos v = v_۱ \qquad \cos(u-v) = w_۱$$
$$\sin u = u_۲ \qquad \sin v = v_۲ \qquad \sin(u-v) = w_۲$$

فرمول های بالا را بنام فرمول شماره ۱ نامگذاری می کنیم ، زیرا در قسمت های بعدی به آن اشاره خواهیم داشت.

همچنین ملاحظه می کنید که مسافت بین $A(۱,0)$ و $P(w)$ باید مساوی مسافت بین $P(u)$ و $P(v)$ باشد ، زیرا کمان های مربوطه روی U همان طول $u-v$ را دارند. با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$\sqrt{(w_۱-۱)^۲+(w_۲-0)^۲} = \sqrt{(u_۱-v_۱)^۲+(u_۲-v_۲)^۲}$$

هر دو طرف را به توان دو می رسانیم ، و جملات زیر رادیکال را بسط می دهیم.

$$w_۱^۲ - ۲w_۱ + ۱ + w_۲^۲ = u_۱^۲ - ۲u_۱v_۱ + v_۱^۲ + v_۲^۲ - ۲u_۲v_۲ + v_۲^۲$$

چون نقاط $(u_۱,u_۲)$ و $(v_۱,v_۲)$ و $(w_۱,w_۲)$ روی دائره واحد U قرار دارند و چون معادله دایره واحد $x^۲+y^۲=۱$ است .می توانیم بجای $w_۱^۲+w_۲^۲$ ، $v_۱^۲+v_۲^۲$ ، $u_۱^۲+u_۲^۲$ عدد یک جانشین کنیم. با این کار خواهیم داشت.

$$۲-۲w_۱ = ۲-۲u_۱v_۱-۲u_۲v_۲$$

که خلاصه می شود به

$$w_۱ = u_۱v_۱+u_۲v_۲$$

با جانشین کردن از فرمول های شماره ۱ داریم.

$$\cos(u-v)=\cos u\cos v+\sin u\sin v$$

مثال بعد مورد استفاده این فرمول را نشان می دهد.

مثال ۱ – با استفاده از این حقیقت که $۱۵^\circ = ۶۰^\circ - ۴۵^\circ$, مقدار دقیق $\cos ۱۵^\circ$ را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $u=۶۰^\circ$ و $v=۴۵^\circ$ باشد ، پس

$$\cos ۱۵^\circ=\cos(۶۰^\circ-۴۵^\circ)=\cos ۶۰^\circ\cos ۴۵^\circ+\sin ۶۰^\circ\sin ۴۵^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}*\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}*\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

بدست آوردن فرمول $\cos(u+v)$ هم ساده است. ابتدا $u+v=u-(-v)$ می نویسیم و سپس فرمول تفریق را بکار می بریم. پس داریم.

$$\cos(u+v)=\cos[u-(-v)]=\cos u\cos(-v)+\sin u\sin(-v)$$
$$=\cos u\cos(-v)+\sin u\sin(-v)$$

در بخش ۱.۳ گفتیم $\cos(-v)=\cos v$ ، پس داریم.

فرمول جمع دوزاویه برای کسینوس

$$\boldsymbol{\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v}$$

مثال ۲ – با استفاده از $\frac{۷\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$ مقدار $\cos\left(\frac{۷\pi}{۱۲}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$\cos\frac{۷\pi}{۱۲}=\cos\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}*\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}*\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴}$$

معمولا دو تابع سینوس و کسینوس را **توابع متمم** **Cofunctions** می نامند. به همین طریق تانژانت و کتانژانت هم توابع متمم هستند. همچنین سکانت و کسکانت.

تعریف توابع متمم - تابع f را متمم تابع g می گوییم اگر $f(A) = g(B)$ باشد ، و A و B زوایای متمم باشند .

فرمول تفریق دو زاویه برای کسینوس را می توان برای پیدا کردن سه فرمول زیر در مورد توابع متمم بکار برد. در فرمول های زیر u یا یک عدد حقیقی است و یا اندازه یک زاویه بر حسب رادیان.

فرمول های توابع متمم

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} - u\right) = \sin u \qquad \sin\left(\frac{\pi}{۲} - u\right) = \cos u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲} - u\right) = \cot u$$

فرمول اول را چنین استلال می کنیم.

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} - u\right) = \cos\frac{\pi}{۲}\cos u + \sin\frac{\pi}{۲}\sin u$$

$$= (0)\cos u + (۱)\sin u = \sin u$$

برای بدست آوردن فرمول دوم ، بجای u در فرمول اول ، می گذاریم $\frac{\pi}{۲} - v$, پس داریم.

$$\cos\left[\frac{\pi}{۲} - \left(\frac{\pi}{۲} - v\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - v\right)$$

$$\cos v = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - v\right)$$

چون v یک عدد اختیاری است ، پس می توان نوشت.

$$\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - u\right)$$

و در نهایت

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲} - u\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲} - u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{۲} - u\right)} = \frac{\cos u}{\sin u} = \cot u$$

اگر θ اندازه یک زاویه بر حسب درجه باشد ، پس

$\cos(۹۰^\circ - \theta) = \sin\theta$ ، $\sin(۹۰^\circ - \theta) = \cos\theta$ ، $\tan(۹۰^\circ - \theta) = \cos\theta$

اگر θ یک زاویه حاد باشد ، پس θ و $۹۰^\circ - \theta$ متمم هستند، چون مجموع آنها ۹۰° است.

فرمول های جمع و تفریق دو زاویه برای سینوس و تانژانت

Addition and Subtraction Formulas for Sine and Tangent

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$
$$\sin(u-v) = \sin u cos\, v - \cos u \sin v$$
$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{۱ - \tan u \tan v}$$
$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{۱ + \tan u \tan v}$$

اثبات ــفرمول های اول و سوم را ثابت می کنیم. دو فرمول دیگر را در تمرینات خواهیم دید.

$$\sin(u+v) = \cos\left[\frac{\pi}{۲} - (u+v)\right]$$
$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{۲} - u\right) - v\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{۲} - u\right)\cos v + \sin\left(\frac{\pi}{۲} - u\right)\sin v$$
$$= \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

برای فرمول تانژانت داریم.

$$\tan(u+v) = \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}$$
$$= \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v}$$

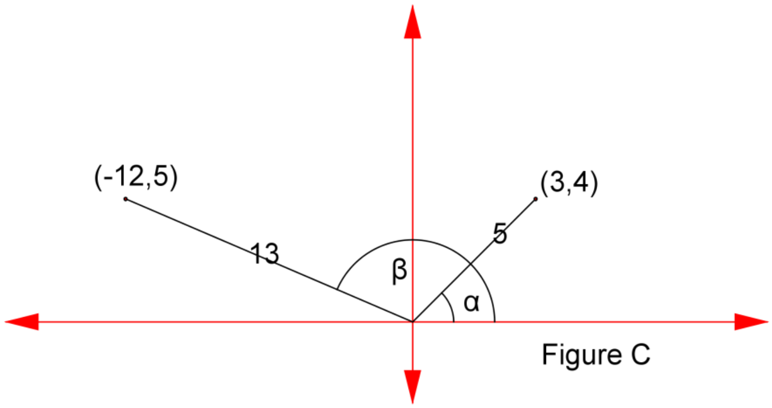
اگر $\cos u \cos v \neq 0$ باشد ، صورت و مخرج را بر $\cos u \cos v$ تقسیم می کنیم. پس داریم.

$$\tan(u+v) = \frac{\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)}{\left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)}$$
$$= \frac{\tan u + \tan v}{۱ - \tan u \tan v}$$

اگر $\cos u \cos v = 0$ باشد ، پس یا $\cos u = 0$ و یا $\cos v = 0$ است. در این صورت یا $\tan u$ و یا $\tan v$ تعریف نشده هستند و فرمول صحیح نیست.

مثال ۳ــ اگر $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ باشد و α یک زاویه در ربع صفحه اول ، و $\cos\beta = -\frac{۱۲}{۱۳}$ باشد و β یک زاویه در ربع صفحه دوم ، مقادیر $\sin(\alpha+\beta)$ و $\tan(\alpha+\beta)$ را پیدا کنید و مشخص کنید $\alpha+\beta$ در کدام ربع صفحه قرار دارد.

پاسخ ــزوایای α و β در تصویر C مشخص شده است.



چون $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ است ، نقطه $(۳,۴)$ را روی ضلع انتهایی α انتخاب می کنیم ، به همین طریق چون $\cos\beta = -\frac{۱۲}{۱۳}$ است ، نقطه $(-۱۲,۵)$ را روی ضلع انتهایی β می کنیم. با توجه به تصویر و استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی ، بخش ۱.۴ , داریم

$$\cos\alpha = \frac{۳}{۵} \quad ، \quad \tan\alpha = \frac{۴}{۳} \quad ، \quad \sin\beta = \frac{۵}{۱۳} \quad ، \quad \tan\beta = -\frac{۵}{۱۲}$$

با استفاده از فرمول های جمع ، داریم.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{۴}{۵}\right)\left(-\frac{۱۲}{۱۳}\right) + \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۵}{۱۳}\right) = -\frac{۳۳}{۶۵}$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{\frac{۴}{۳} + \left(-\frac{۵}{۱۲}\right)}{۱ - \left(\frac{۴}{۳}\right)\left(-\frac{۵}{۱۲}\right)} = \frac{۳۳}{۵۶}$$

چون $\sin(\alpha+\beta)$ منفی است و $\tan(\alpha+\beta)$ مثبت است ، پس $\alpha+\beta$ در ربع صفحه سوم قرار دارد.

مثال ۴ــ اگر $f(x) = \sin x$ باشد و $h \neq 0$ ، ثابت کنید که

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x\left(\frac{\cos h - ۱}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

اثبات ــبا استفاده از تعریف f و فرمول جمع برای سینوس داریم.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$
$$= \frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x(\cos h - ۱) + \cos x \sin h}{h}$$
$$= \sin x\left(\frac{\cos h - ۱}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin x}{h}\right)$$

تمرینات ۲.۳

در تمرینات ۲ – ۱ تابع متمم عبارت داده شده را بنویسید.

۱) $(a)\ \sin ۴۶^\circ\ ۳۷'$ $(b)\ \cos ۷۳^\circ\ ۱۲'$ $(c)\ \tan\frac{\pi}{۶}$ $(d)\ \sec ۱۷/۲۸^\circ$

۲) $(a)\ \cos\frac{۷\pi}{۲۰}$ $(b)\ \sin\frac{۱}{۴}$ $(c)\ \tan ۱$ $(d)\ \csc(۰/۵۳)$

در تمرینات ۵ – ۳ مقادیر دقیق عبارت های داده شده را پیدا کنید.

۳) $(a)\ \cos\frac{\pi}{۴} + \cos\frac{\pi}{۶}$ $(b)\ \cos\frac{۵\pi}{۱۲}$

۴) $(a)\ \tan ۶۰^\circ + \tan ۲۲۵^\circ$ $(b)\ \tan ۲۸۵^\circ$

۵) $(a)\ \sin\frac{۳\pi}{۴} - \sin\frac{\pi}{۶}$ $(b)\ \sin\frac{۷\pi}{۱۲}$

در تمرینات ۸ – ۶ هر کدام از عبارت ها را بر حسب یک تابع یک زاویه ای بنویسید.

۶) $\cos ۴۸^\circ \cos ۲۳^\circ + \sin ۴۸^\circ \sin ۲۳^\circ$

۷) $\cos ۱۰^\circ \sin ۵^\circ - \sin ۱۰^\circ \cos ۵^\circ$

۸) $\cos ۳ \sin(-۲) - \cos ۲ \sin ۳$

۹ – اگر α و β دو زاویه حاد باشند ، بطوری که $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $\tan\beta = \frac{۸}{۱۵}$ باشد ، مطلوب است $\cos(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha+\beta)$ و مشخص کنید $\alpha+\beta$ در کدام ربع صفحه قرار دارد.

۱۰ – اگر $\tan\alpha = -\frac{۷}{۲۴}$ و $\cot\beta = \frac{۳}{۴}$ باشد و α در ربع صفحه دوم و β در ربع صفحه سوم ، مطلوب است

$$\sin(\alpha+\beta) ، \cos(\alpha+\beta) ، \tan(\alpha+\beta),$$
$$\sin(\alpha-\beta) ، \cos(\alpha-\beta) ، \tan(\alpha-\beta)$$

در تمرینات ۲۰ – ۱۱ درستی تساوی های داده شده را نشان دهید.

۱۱) $\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)=\cos x$

۱۲) $\cos\left(\theta+\frac{۳\pi}{۲}\right)=\sin\theta$

۱۳) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{۴}\right)=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(\sin\theta+\cos\theta)$

۱۴) $\tan\left(u+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱+\tan u}{۱-\tan u}$

۱۵) $\tan\left(u+\frac{\pi}{۲}\right)=-\cot u$

۱۶) $\sin(u+v)*\sin(u-v)=\sin^{۲}u-\sin^{۲}v$

۱۷) $\cos(u+v)+\cos(u-v)=۲\cos u\cos v$

۱۸) $\sin ۲u=۲\sin u\cos u$ (راهنمائی : $۲u=u+u$)

۱۹) $\frac{\sin(u+v)}{\cos(u-v)}=\frac{\tan u+\tan v}{۱+\tan u\tan v}$

۲۰) $\frac{\sin(u+v)}{\sin(u-v)}=\frac{\tan u+\tan v}{\tan u-\tan v}$

۲۱ -ثابت کنید

$$(a)\quad \sin(u-v)=\sin u\cos v-\cos u sin\, v$$

$$(b)\quad \tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{۱+\tan u tan\, v}$$

پاسخ تمرینات ۲.۳

در تمرینات ۲ – ۱ تابع متمم عبارت داده شده را بنویسید.

۱) $(a)\ \sin ۴۶^\circ\ ۳۷'$ $\qquad (b)\ \cos ۷۳^\circ\ ۱۲'$

$(c)\ \tan \frac{\pi}{۶}$ $\qquad (d)\ \sec ۱۷\ /\ ۲۸^\circ$

پاسخ

$$(a)\quad ۸۹^\circ\ ۶۰' - ۴۶^\circ\ ۳۷' = ۴۳^\circ\ ۲۳'$$

$$\sin ۴۶^\circ\ ۳۷' = \cos ۴۳^\circ\ ۲۳'$$

$$(b)\quad ۸۹^\circ\ ۶۰' - ۷۳^\circ\ ۱۲' = ۱۶^\circ\ ۴۸'$$

$$\cos ۷۳^\circ\ ۱۲' = \sin ۱۶^\circ\ ۴۸'$$

$$(c)\quad \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۳}$$

$$\tan \frac{\pi}{۶} = \cot \frac{\pi}{۳}$$

$$(d)\quad ۹۰^\circ - ۱۷/۲۸^\circ = ۷۲\ /\ ۷۲^\circ$$

$$\sec ۱۷\ /\ ۲۸^\circ = \csc ۷۲\ /\ ۷۲^\circ$$

۲) $(a)\ \cos \frac{۷\pi}{۲۰}$ $\qquad (b)\ \sin \frac{۱}{۴}$

$(c)\ \tan ۱$ $\qquad (d)\ \csc(۰/\ ۵۳)$

پاسخ

$$(a)\quad \frac{\pi}{۲} - \frac{۷\pi}{۲۰} = \frac{۳\pi}{۲۰}$$

$$\cos \frac{۷\pi}{۲۰} = \sin \frac{۳\pi}{۲۰}$$

$$(b)\quad \frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۲\pi - ۱}{۴}$$

$$\sin \frac{۱}{۴} = \cos\left(\frac{۲\pi - ۱}{۴}\right)$$

$$(c)\quad \frac{\pi}{۲} - ۱ = \frac{\pi - ۲}{۲}$$

$$\tan ۱ = \cot\left(\frac{\pi - ۲}{۲}\right)$$

$$(d)\quad \frac{\pi}{۲}-۰/۵۳=\frac{۱}{۲}\pi-۰/۵۳$$

$$\csc(۰/۵۳)=\sec\left(\frac{۱}{۲}\pi-۰/۵۳\right)$$

در تمرینات ۵ – ۳ مقادیر دقیق عبارت های داده شده را پیدا کنید.

۳) $(a)\ \cos\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۶}$ $(b)\ \cos\frac{۵\pi}{۱۲}$

پاسخ

$$(a)\quad \cos\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$$

$$(b)\quad \cos\frac{۵\pi}{۱۲}=\cos\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۶}\right)=\cos\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۶}-\sin\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)-\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۶}}{۴}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

۴) $(a)\ \tan ۶۰^\circ+\tan ۲۲۵^\circ$ $(b)\ \tan ۲۸۵^\circ$

$$(a)\quad \tan ۶۰^\circ+\tan ۲۲۵^\circ=\sqrt{۳}+۱$$

$$(b)\quad \tan ۲۸۵^\circ=\tan\left(۲۲۵^\circ+۶۰^\circ\right)=\frac{\tan ۲۲۵^\circ+\tan ۶۰^\circ}{۱-\left(\tan ۲۲۵^\circ\right)\left(\tan ۶۰^\circ\right)}$$

$$=\frac{\tan ۴۵^\circ+\tan ۶۰^\circ}{۱-\left(\tan ۴۵^\circ\right)\left(\tan ۶۰^\circ\right)}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-(۱)\left(\sqrt{۳}\right)}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}*\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{\left(۱+\sqrt{۳}\right)^{۲}}{۱-۳}=$$

$$\frac{۱+۲\sqrt{۳}+۳}{-۲}=\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{-۲}=\frac{۲\left(۲+\sqrt{۳}\right)}{-۲}=-۲-\sqrt{۳}$$

پس

$$\tan ۲۸۵^{\circ}=-۲-\sqrt{۳}$$

۵) $(a)\sin\frac{۳\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۶}$ $\qquad(b)\sin\frac{۷\pi}{۱۲}$

پاسخ

$$(a)\quad \sin\frac{۳\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$$

$$(b)\quad \sin\frac{۷\pi}{۱۲}=\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۳}\right)=\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۳}+\cos\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۶}}{۴}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

در تمرینات ۸ – ۶ هر کدام از عبارت ها را بر حسب یک تابع یک زاویه ای بنویسید.

۶) $\cos ۴۸^{\circ}\cos ۲۳^{\circ}+\sin ۴۸^{\circ}\sin ۲۳^{\circ}=\cos\left(۴۸^{\circ}-۲۳^{\circ}\right)=\cos ۲۵^{\circ}$

۷) $\cos ۱۰^{\circ}\sin ۵^{\circ}-\sin ۱۰^{\circ}\cos ۵^{\circ}=\sin ۵^{\circ}\cos ۱۰^{\circ}-\cos ۵^{\circ}\sin ۱۰^{\circ}$

$$=\sin\left(۵^{\circ}-۱۰^{\circ}\right)=\sin\left(-۵^{\circ}\right)$$

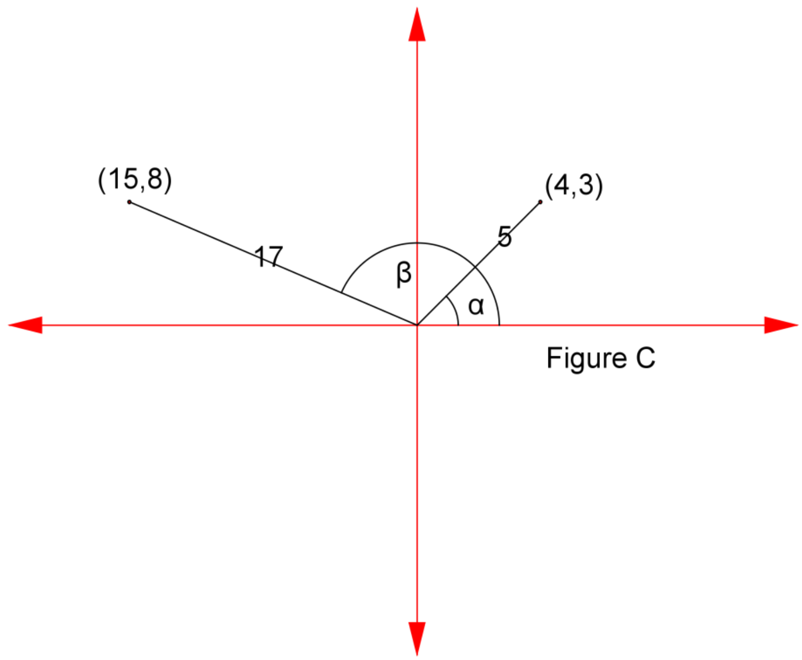
۸) $\cos ۳\sin(-۲)-\cos ۲\sin ۳=\sin(-۲)\cos ۳-\cos ۲\sin ۳=\sin(-۲-۳)$

$$=\sin(-۵)=-\sin ۵$$

۹ – اگر α و β دو زاویه حاد باشند ، بطوری که $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $\tan\beta = \frac{۸}{۱۵}$ باشد ، مطلوب است $\cos(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha+\beta)$ و مشخص کنید $\alpha+\beta$ در کدام ربع صفحه قرار دارد.

پاسخ

با توجه به تصویر زیر



چون $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$ است ، نقطه $(۴,۳)$ را روی ضلع انتهایی α انتخاب می کنیم ، به همین طریق چون $\tan\beta = \frac{۸}{۱۵}$ است ، نقطه $(۱۵,۸)$ را روی ضلع انتهایی β می کنیم. با توجه به تصویر و استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی ، بخش ۱.۴ , داریم

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{۴}{۵}\right)\left(\frac{۱۵}{۱۷}\right) - \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۸}{۱۷}\right) = \frac{۱۲}{۱۷} - \frac{۲۴}{۸۵} = \frac{۶۰ - ۲۴}{۸۵} = \frac{۳۶}{۸۵}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۱۵}{۱۷}\right) + \left(\frac{۴}{۵}\right)\left(\frac{۸}{۱۷}\right) = \frac{۹}{۱۷} + \frac{۳۲}{۸۵} = \frac{۷۷}{۸۵}$$

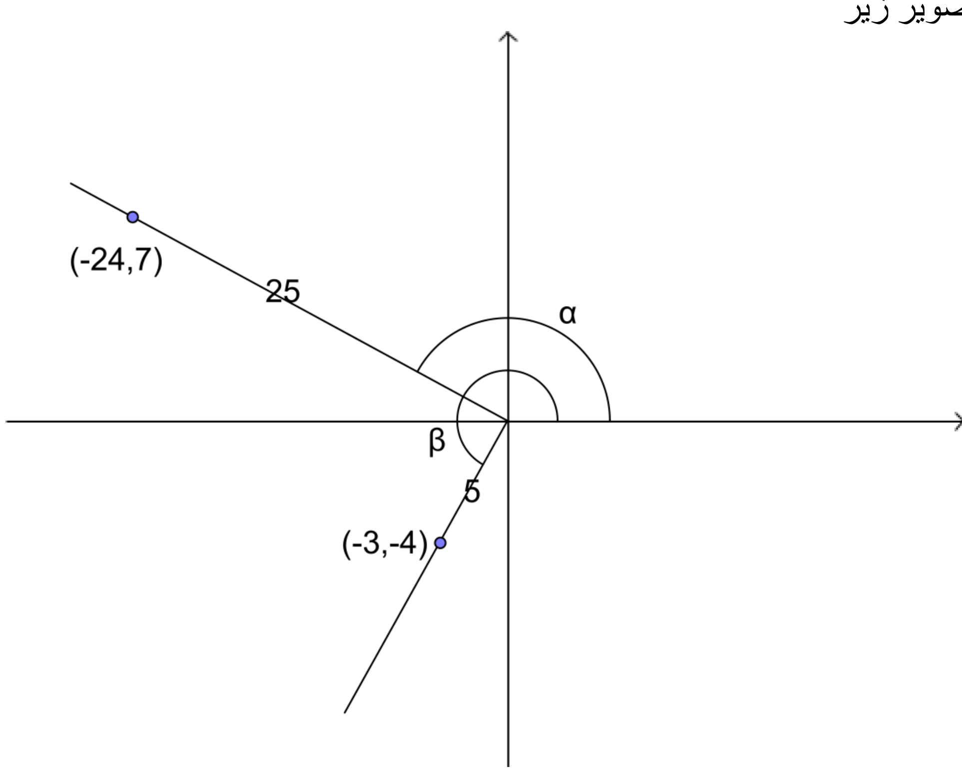
چون هم $\cos(\alpha+\beta)$ وهم $\sin(\alpha+\beta)$ هر دو مثبت هستند ، پس زاویه $\alpha+\beta$ در ربع صفحه اول قرار دارد.

۱۰ – اگر $\tan\alpha = -\frac{۷}{۲۴}$ و $\cot\beta = \frac{۳}{۴}$ باشد و α در ربع صفحه دوم و β در ربع صفحه سوم ، مطلوب است

$$\sin(\alpha+\beta) \text{ ، } \cos(\alpha+\beta) \text{ ، } \tan(\alpha+\beta),$$
$$\sin(\alpha-\beta) \text{ ، } \cos(\alpha-\beta) \text{ ، } \tan(\alpha-\beta)$$

پاسخ

با توجه به تصویر زیر



چون $\tan\alpha = -\frac{۷}{۲۴}$ است ، و طبق فرض مساله ، آلفا در ربع صفحه دوم قرار دارد ، پس سینوس مثبت و کسینوس منفی است. لذا نقطه $(-۲۴,۷)$ را روی ضلع انتهایی α انتخاب می کنیم

، به همین طریق چون $\cot\beta = \frac{۳}{۴}$ است ،و طبق فرض مساله , بتا در ربع صفحه سوم قرار دارد ، پس هم سینوس و هم کسینوس منفی هستند. پس نقطه $(-۳,-۴)$ را روی ضلع انتهایی β می کنیم.

با توجه به تصویر و استفاده از قضیه نسبت های مثلثاتی ، بخش ۱.۴ , داریم

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{۷}{۲۵}\right)\left(\frac{-۳}{۵}\right) + \left(\frac{-۲۴}{۲۵}\right)\left(\frac{-۴}{۵}\right) = \left(\frac{-۲۱}{۱۲۵}\right) + \left(\frac{۹۶}{۱۲۵}\right)$$
$$= \frac{-۲۱+۹۶}{۱۲۵} = \frac{۷۵}{۱۲۵} = \frac{۳}{۵}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\left(\frac{-۲۴}{۲۵}\right)\left(\frac{-۳}{۵}\right)-\left(\frac{۷}{۲۵}\right)\left(\frac{-۴}{۵}\right)=\frac{۷۲}{۱۲۵}+\frac{۲۸}{۱۲۵}$$
$$=\frac{۱۰۰}{۱۲۵}=\frac{۴}{۵}$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{-۷}{۲۴}+\frac{۴}{۳}}{۱-\left(-\frac{۷}{۲۴}\right)\left(\frac{۴}{۳}\right)}=\frac{\frac{-۷+۳۲}{۲۴}}{۱-\left(-\frac{۲۸}{۷۲}\right)}=\frac{\frac{۲۵}{۲۴}}{\frac{۷۲+۲۸}{۷۲}}$$
$$=\frac{\frac{۲۵}{۲۴}}{\frac{۱۰۰}{۷۲}}=\frac{۲۵}{۲۴}*\frac{۷۲}{۱۰۰}=\frac{۳}{۴}$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\left(\frac{۷}{۲۵}\right)\left(\frac{-۳}{۵}\right)-\left(\frac{-۲۴}{۲۵}\right)\left(\frac{-۴}{۵}\right)=-\frac{۲۱}{۱۲۵}-\frac{۹۶}{۱۲۵}=-\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\left(\frac{-۲۴}{۲۵}\right)\left(\frac{-۳}{۵}\right)+\left(\frac{۷}{۲۵}\right)\left(\frac{-۴}{۵}\right)=\frac{۷۲}{۱۲۵}-\frac{۲۸}{۱۲۵}=\frac{۴۴}{۱۲۵}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\left(\frac{۷}{-۲۴}\right)-\left(\frac{-۴}{-۳}\right)}{۱+\left(\frac{۷}{-۲۴}\right)\left(\frac{-۴}{-۳}\right)}=\frac{\frac{-۲۱-۹۶}{۷۲}}{۱+\left(\frac{-۲۸}{۷۲}\right)}=\frac{\frac{-۱۱۷}{۷۲}}{\frac{۷۲-۲۸}{۷۲}}$$
$$=\frac{-\frac{۱۱۷}{۷۲}}{\frac{۴۴}{۷۲}}=-\frac{۱۱۷}{۴۴}$$

در تمرینات ۲۰ – ۱۱ درستی تساوی های داده شده را نشان دهید.

۱۱) $\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)=\cos x$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{۲}+\cos x\sin\frac{\pi}{۲}=\sin x(0)+\cos x(۱)$$
$$=\cos x$$

۱۲) $\cos\left(\theta+\frac{۳\pi}{۲}\right)=\sin\theta$

$$\cos\left(\theta+\frac{۳\pi}{۲}\right)=\cos\theta\cos\frac{۳\pi}{۲}-\sin\theta\sin\frac{۳\pi}{۲}=\cos\theta(0)-\sin\theta(-۱)$$
$$=\sin\theta$$

۱۳) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{۴}\right)=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(\sin\theta+\cos\theta)$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{۴}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{۴}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{۴}$$
$$=\sin\theta\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+\cos\theta\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(\sin\theta+\cos\theta)$$

۱۴) $\tan\left(u+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱+\tan u}{۱-\tan u}$

$$\tan\left(u+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\tan u+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan u\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱+\tan u}{۱-\tan u}$$

۱۵) $\tan\left(u+\frac{\pi}{۲}\right)=-\cot u$

چون $\tan\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است ، پس نمی توانیم از فرمول تانژانت مجموع دو زاویه استفاده کنیم. پس از طریق دیگری عمل می کنیم. چون می دانیم $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ پس می توان نوشت

$$\tan\left(u+\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\sin\left(u+\frac{\pi}{۲}\right)}{\cos\left(u+\frac{\pi}{۲}\right)}=\frac{\sin u\cos\frac{\pi}{۲}+\cos u\sin\frac{\pi}{۲}}{\cos u\cos\frac{\pi}{۲}-\sin u\sin\frac{\pi}{۲}}$$
$$=\frac{\sin u(0)+\cos u(۱)}{\cos u(0)-\sin u(۱)}=\frac{\cos u}{-\sin u}=-\cot u$$

۱۶) $\sin(u+v)*\sin(u-v)=\sin^۲ u-\sin^۲ v$

$$\sin(u+v)*\sin(u-v)=$$
$$(\sin u\cos v+\cos u\sin v)(\sin u\cos v-\cos u\sin v)=$$
$$\sin^۲ u\ \cos^۲ v-\sin u\cos u\sin v\cos v+\sin u\cos u\sin v\cos v-\cos^۲ u\sin^۲ v=$$
$$\sin^۲ u\ \cos^۲ v-\cos^۲ u\ \sin^۲ v=$$
$$\sin^۲ u\left(۱-\sin^۲ v\right)-\sin^۲ v\left(۱-\sin^۲ u\right)=$$
$$=\sin^۲ u-\sin^۲ u\ \sin^۲ v-\sin^۲ v+\sin^۲ u\sin^۲ v$$
$$=\sin^۲ u-\sin^۲ v$$

۱۷) $\cos(u+v)+\cos(u-v)=۲\cos u\cos v$

$$\cos(u+v)+\cos(u-v)=$$
$$\cos u\cos v-\sin u\sin v+\cos u\cos v+\sin u\sin v$$
$$=۲\cos u\cos v$$

۱۸) $\sin ۲u=۲\sin u\cos u$　　(راهنمائی : $۲u=u+u$)

$$\sin ۲u=\sin(u+u)$$
$$=\sin u\cos u+\cos u\sin u=۲\sin u\cos u$$

۱۹) $\dfrac{\sin(u+v)}{\cos(u-v)}=\dfrac{\tan u+\tan v}{۱+\tan u\tan v}$

$$\frac{\sin(u+v)}{\cos(u-v)}=\frac{\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos u\cos v+\sin u\sin v}=$$
$$\frac{\frac{\sin u\cos v}{\cos u\cos v}+\frac{\cos u\sin v}{\cos u\cos v}}{\frac{\cos u\cos v}{\cos u\cos v}+\frac{\sin u\sin v}{\cos u\cos v}}=\frac{\tan u+\tan v}{۱+\tan u\tan v}$$

۲۰) $\dfrac{\sin(u+v)}{\sin(u-v)} = \dfrac{\tan u + \tan v}{\tan u - \tan v}$

$$\frac{\sin(u+v)}{\sin(u-v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\sin u \cos v - \cos u \sin v}$$
$$= \frac{\dfrac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} + \dfrac{\cos u \sin v}{\cos u \cos v}}{\dfrac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} - \dfrac{\cos u \sin v}{\cos u \cos v}} = \frac{\tan u + \tan v}{\tan u - \tan v}$$

۲۱ -ثابت کنید

$$(a) \quad \sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u sin\, v$$
$$(b) \quad \tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{۱ + \tan u \tan v}$$

اثبات

$$(a)\ \sin(u-v) = \sin\big(u + (-v)\big) = \sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v)$$
$$= \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$(b)\ \tan(u-v) = \frac{\sin(u-v)}{\cos(u-v)} = \frac{\sin u \cos v - \cos u \sin v}{\cos u \cos v + \sin u \sin v}$$

اگر $\cos u \cos v \neq 0$ باشد ، صورت و مخرج را بر $\cos u \cos v$ تقسیم می کنیم.

$$\tan(u-v) = \frac{\left(\dfrac{\sin u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\dfrac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\sin v}{\cos v}\right)}{\left(\dfrac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\dfrac{\sin u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\sin v}{\cos v}\right)}$$
$$= \frac{\tan u - \tan v}{۱ + \tan u \tan v}$$

۲.۴ - فرمول های زاویه چند گانه Multiple-Angle Formulas

در این بخش **فرمول های زاویه دو برابر Double-Angle Formulas** و **فرمول های زاویه سه برابر Triple-Angle Formulas** و غیرو را بر رسی می کنیم.

اتحاد های زیر به فرمول های زاویه دو برابر موسوم هستند ، زیرا شامل عبارت $۲u$ هستند.

فرمول های زاویه دو برابر Double-Angle Formulas

$$\sin ۲u = ۲\sin u\cos u$$

$$\cos ۲u = \cos^۲ u - \sin^۲ u = ۱ - ۲\sin^۲ u = ۲\cos^۲ u - ۱$$

$$\tan ۲u = \frac{۲\tan u}{۱ - \tan^۲ u}$$

اثبات

می توانیم فرض کنیم که $u = v$ باشد ، پس اگر فرمول $\sin(u+v)$ را بکار بریم ، خواهیم داشت.

$$\sin ۲u = \sin(u+u) = \sin u\cos u + \cos u\sin u$$
$$= ۲\sin u\cos u$$

به همین طریق اگر فرمول $\cos(u+v)$ بکار بریم ، خواهیم داشت.

$$\cos ۲u = \cos(u+u) = \cos u\cos u - \sin u\sin u$$
$$= \cos^۲ u - \sin^۲ u$$

برای پیدا کردن دو فرمول دیگربرای $\cos ۲u$ اتحاد، $\sin^۲ u + \cos^۲ u = ۱$ را بکار می بریم.

$$\cos ۲u = \cos^۲ u - \sin^۲ u$$
$$= \left(۱ - \sin^۲ u\right) - \sin^۲ u$$
$$= ۱ - ۲\sin^۲ u$$

به همین طریق ، اگر بجای $\sin^۲ u$ از $\cos^۲ u$ استفاده کنیم ، داریم.

$$\cos ۲u = \cos^۲ u - \left(۱ - \cos^۲ u\right)$$
$$= ۲\cos^۲ u - ۱$$

برای بدست آوردن فرمول $\tan ۲u$ در فرمول $\tan(u+v)$ فرض می کنیم $u = v$ باشد.

مثال ۱ – اگر داشته باشیم $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ و α در ربع صفحه اول باشد ، مطلوب است $\sin ۲\alpha$ و $\cos ۲\alpha$

پاسخ

در تمرین شماره ۳ بخش ۲.۳ بدست آوردیم که $\cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ است. پس

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۲\left(\frac{۴}{۵}\right)\left(\frac{۳}{۵}\right) = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha = \frac{۹}{۲۵} - \frac{۱۶}{۲۵} = -\frac{۷}{۲۵}$$

مثال ۲– عبارت $\cos ۳\theta$ را بر حسب $\cos\theta$ بنویسید.

پاسخ

$$\begin{aligned} \cos ۳\theta &= \cos(۲\theta + \theta) = \cos ۲\theta \cos\theta - \sin ۲\theta \sin\theta \\ &= \left(۲\cos^۲\theta - ۱\right)\cos\theta - (۲\sin\theta\cos\theta)\sin\theta \\ &= ۲\cos^۳\theta - \cos\theta - ۲\cos\theta \sin^۲\theta \\ &= ۲\cos^۳\theta - \cos\theta - ۲\cos\theta\left(۱ - \cos^۲\theta\right) \\ &= ۲\cos^۳\theta - \cos\theta - ۲\cos\theta + ۲\cos^۳\theta \\ &= ۴\cos^۳\theta - ۳\cos\theta \end{aligned}$$

سه اتحاد زیر برای ساده کردن عبارت هایی که شامل توان های توابع مثلثاتی هستند ، مفید می باشند.

$$\sin^۲ u = \frac{۱ - \cos ۲u}{۲} \ ، \ \cos^۲ u = \frac{۱ + \cos ۲u}{۲} \ ، \ \tan^۲ u = \frac{۱ - \cos ۲u}{۱ + \cos ۲u}$$

برای پیدا کردن اتحاد های اول و دوم .معادله های زیر را حل می کنیم.

$$\cos ۲u = ۱ - ۲\sin^۲ u \ \text{ و } \ \cos ۲u = ۲\cos^۲ u - ۱$$

اتحاد سوم را می توان با استفاده از $\tan^۲ u = \frac{\sin^۲ u}{\cos^۲ u}$ پیدا کرد.

مثال ۳ - درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^۲ x \cos^۲ x = \frac{۱}{۸}(۱ - \cos ۴x)$$

اثبات –با استفاده از اتحاد های $\sin^۲ x$ و $\cos^۲ x$ که در بالا گفته شد ، داریم.

$$\begin{aligned} \sin^۲ x \cos^۲ x &= \left(\frac{۱ - \cos ۲x}{۲}\right)\left(\frac{۱ + \cos ۲x}{۲}\right) \\ &= \frac{۱}{۴}\left(۱ - \cos^۲ ۲x\right) = \frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x \end{aligned}$$

و در نهایت با استفاده از فرمول $\sin^۲ u = \frac{۱ - \cos ۲u}{۲}$ و استفاده از $u = ۲x$ داریم.

$$\sin^۲ x \cos^۲ x = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱ - \cos ۴x}{۲}\right) = \frac{۱}{۸}(۱ - \cos ۴x)$$

راه دیگر این است که می دانیم $\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$ است ، دو طرف را بر ۲ تقسیم می کنیم.
پس داریم

$$\sin x \cos x = \frac{۱}{۲} \sin ۲x$$

طرفین معادله بالا را به توان ۲ می رسانیم.

$$\sin^۲ x \cos^۲ x = \frac{۱}{۴} \sin^۲ ۲x$$

حالا از بقیه اثبات بالا استفاده می کنیم.

مثال ۴ – عبارت $\cos^۴ t$ را بر حسب مقادیر تابع کسینوس با توان یک بنویسید.

پاسخ

$$\cos^۴ t = \left(\cos^۲ t\right)^۲ = \left(\frac{۱ + \cos ۲t}{۲}\right)^۲$$
$$= \frac{۱}{۴}\left(۱ + ۲\cos ۲t + \cos^۲ ۲t\right)$$

حالا از فرمول $\cos^۲ u = \frac{۱+\cos ۲u}{۲}$ و با استفاده از $u = ۲t$ داریم.

$$\cos^۴ t = \frac{۱}{۴}\left(۱ + ۲\cos ۲t + \frac{۱ + \cos ۴t}{۲}\right)$$
$$= \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۲}\cos ۲t + \frac{۱}{۸}\cos ۴t$$

فرمول های نصف زاویه Half-Angle Formulas

$$\left|\sin \frac{v}{۲}\right| = \sqrt{\frac{۱ - \cos v}{۲}} \quad ، \quad \left|\cos \frac{v}{۲}\right| = \sqrt{\frac{۱ + \cos v}{۲}}$$
$$\left|\tan \frac{v}{۲}\right| = \sqrt{\frac{۱ - \cos v}{۱ + \cos v}}$$

اگر در فرمول های $\sin^۲ u$ و $\cos^۲ u$ و $\tan^۲ u$ که در صفحه قبل ذکر کردیم ، بجای u بگذاریم $\frac{v}{۲}$ پس داریم

$$\sin^۲ \frac{v}{۲} = \frac{۱ - \cos u}{۲} \quad ، \quad \cos^۲ \frac{v}{۲} = \frac{۱ + \cos v}{۲} \quad ، \quad \tan^۲ \frac{v}{۲} = \frac{۱ - \cos v}{۱ + \cos v}$$

اگر از دو طرف معادله های بالا ، ریشه دوم و یا همان جذر بگیریم ، فرمول های داخل مربع زرد رنگ بالا بدست می آیند.

اگر اطلاعات بیشتری در مورد $\frac{v}{۲}$ داشته باشیم ، ممکن است بتوانیم ، نماد قدر مطلق را حذف کنیم. مثلا اگر زاویه $\frac{v}{۲}$ در ربع صفحه اول یا دوم باشد ، پس $\sin\frac{v}{۲}$ مثبت است. لذا داریم.

$$\sin\frac{v}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - \cos v}{۲}}$$

اما اگر $\frac{v}{۲}$ در ربع صفحه سوم و چهارم باشد ، چون سینوس منفی است ، پس داریم

$$\sin\frac{v}{۲} = -\sqrt{\frac{۱ - \cos v}{۲}}$$

به همین طریق در مورد دو فرمول دیگر عمل می کنیم.

شکل دیگری برای $\tan\frac{v}{۲}$ می توان بدست آورد. صورت و مخرج زیر ردیکال فرمول سوم نصف زاویه را در $۱ - \cos v$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$\left|\tan\frac{v}{۲}\right| = \sqrt{\frac{۱ - \cos v}{۱ + \cos v} * \frac{۱ - \cos v}{۱ - \cos v}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(۱ - \cos v\right)^{۲}}{\sin^{۲} v}} = \frac{۱ - \cos v}{|\sin v|}$$

نماد قدر مطلق برای صورت لازم نیست زیرا $۱ - \cos v$ هیچ وقت منفی نیست. از طرف دیگر می توان نشان داد $\tan\frac{v}{۲}$ و $\sin v$ همیشه یک علامت دارند. مثلا اگر $0 < v < \pi$ باشد ، پس $0 < \frac{v}{۲} < \frac{\pi}{۲}$ است و لذا هم $\sin v$ و هم $\tan\frac{v}{۲}$ مثبت هستند. اگر $\pi < v < ۲\pi$ باشد. پس $\frac{\pi}{۲} < \frac{v}{۲} < \pi$ است و لذا هم $\sin v$ و هم $\tan\frac{v}{۲}$ هر دو منفی هستند. لذا می توان این نکات را به تمام مقادیر v بسط داد ، در صورتی که عبارت های $\tan\frac{v}{۲}$ و $\frac{۱-\cos v}{|\sin v|}$ تعریف شده باشند. پس نتجه می گیریم که

$$\tan\frac{v}{۲} = \frac{۱ - \cos v}{\sin v}$$

اگر صورت و مخرج عبارت زیر رادیکال

$$\left|\tan\frac{v}{۲}\right| = \sqrt{\frac{۱ - \cos v}{۱ + \cos v}}$$

را در $۱ + \cos v$ ضرب کنیم. نتیجه می شود که

$$\tan\frac{v}{۲} = \frac{\sin v}{۱ + \cos v}$$

در نهایت دوفرمول دیگر برای تانژانت نصف زاویه پیدا کردیم.

فرمول های نصف زاویه برای تانژانت Half-Angle Formulas for Tangent

$$\tan\frac{v}{۲}=\frac{۱-\cos v}{\sin v}\ ،\ \tan\frac{v}{۲}=\frac{\sin v}{۱+\cos v}$$

مثال ۵ – مقادیر دقیق $\sin ۲۲/۵^\circ$ و $\cos ۲۲/۵^\circ$ را پیدا کنید.

پاسخ

با استفاده از فرمول $\sin\frac{v}{۲}$ و این حقیقت که $۲۲/۵^\circ$ در ربع صفحه اول است ، داریم.

$$\sin ۲۲/۵^\circ=\sin\frac{۴۵^\circ}{۲}=\sqrt{\frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos ۲۲/۵^\circ=\sqrt{\frac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲}}=\sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

مثال ۶ – اگر $\tan\alpha=-\frac{۴}{۳}$ و α در ربع صفحه چهارم باشد ، $\tan\frac{\alpha}{۲}$ را پیدا کنید.

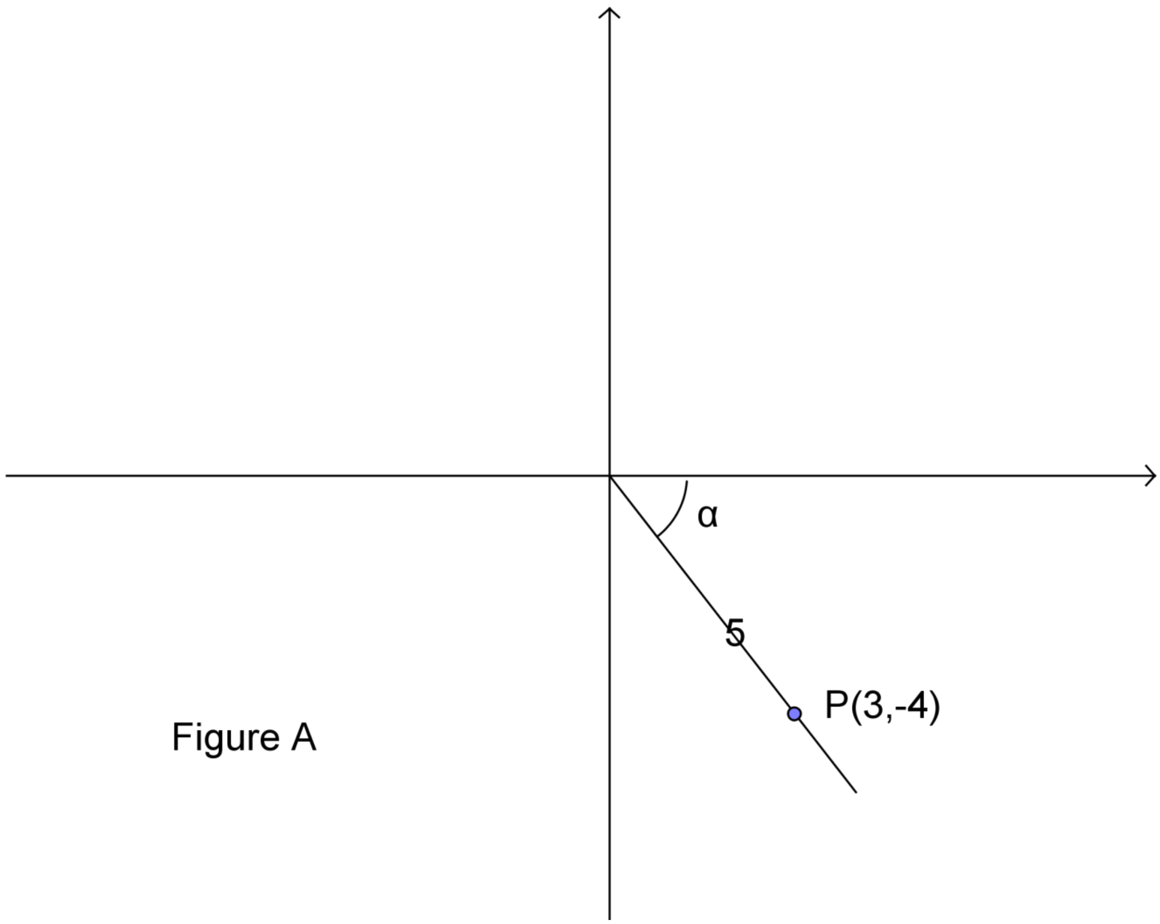
پاسخ

با توجه به تصویر A نقطه $P(۳,-۴)$ را روی ضلع انتهایی α انتخاب می کنیم. پس

$$\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}\quad و \quad \cos\alpha=\frac{۳}{۵}$$

با استفاده از فرمول نصف زاویه داریم.

$$\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{۱-\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}}=-\frac{۱}{۲}$$



مثال ۷ – مطلوب است ریشه های معادله $\cos ۲x + \cos x = 0$ را که در بازه $[0, ۲\pi)$ هستند. جوابها را هم بر حسب رادیان و هم بر حسب درجه بنویسید.

پاسخ

ابتدا فرمول زاویه دو برابر را بکار می بریم تا معادله بر حسب $\cos x$ باشد و سپس از طریق فاکتور گیری معادله را حل می کنیم.

$$\cos ۲x + \cos x = 0$$
$$\left(۲\cos^{۲} x - ۱\right) + \cos x = 0$$
$$۲\cos^{۲} x + \cos x - ۱ = 0$$
$$(۲\cos c - ۱)(\cos x + ۱) = 0$$
$$\cos x = \frac{۱}{۲} \text{ یا } \cos x = -۱$$

جواب های دو تساوی آخر در بازه $[0, ۲\pi)$ مطابق زیر است.

$$\frac{\pi}{۳} \text{ ، } \frac{۵\pi}{۳} \text{ ، } \pi \text{ , } \quad ۶۰^\circ \text{ ، } ۳۰۰^\circ \text{ ، } ۱۸۰^\circ$$

مثال ۸– مثلث متساوی الساقین تصویر B را در نظر بگیرید. فرض کنید طول هر ساق آن α و زاویه بین آنها θ باشد. مساحت مثلث را بر حسب α و θ پیدا کنید.
پاسخ

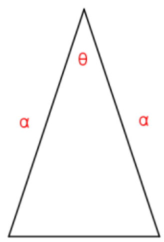


Figure B

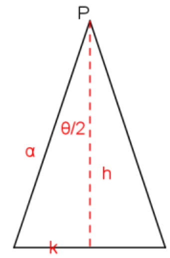


Figure C

اگر از نقطه P در تصویر C یک پاره خط عمود بر قاعده مثلث رسم کنیم ، ملاحظه می کنید که این خط عمود هم نیمساز زاویه θ است و هم عمود منصف. پس مساحت مثلث $A = hk$ است. با توجه به مثلث قائم الزویه بدست آمده داریم.

$$\sin\frac{\theta}{۲} = \frac{k}{a} \quad \text{و} \quad \cos\frac{\theta}{۲} = \frac{h}{a}$$

پس

$$k = a\sin\frac{\theta}{۲} \qquad h = a\cos\frac{\theta}{۲}$$

و

$$A = hk = a^{۲}\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}$$

با استفاده از فرمول نصف زاویه داریم.

$$A = a^{۲}\sqrt{\frac{۱-\cos\theta}{۲}} * \sqrt{\frac{۱+\cos\theta}{۲}}$$
$$= a^{۲}\sqrt{\frac{۱-\cos^{۲}\theta}{۴}} = a^{۲}\sqrt{\frac{\sin^{۲}\theta}{۴}} = \frac{۱}{۲}a^{۲}\sin\theta$$

فرمول زاویه سه برابر برای سینوس Triple- Angle Formula for Sine

$$\sin ۳\theta = ۳\sin\theta - ۴\sin^۳\theta$$

اثبات

$$\begin{aligned}\sin ۳\theta &= \sin(۲\theta+\theta) = \sin ۲\theta\cos\theta + \cos ۲\theta\sin\theta\\ &= (۲\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + \left(\cos^۲\theta - \sin^۲\theta\right)\sin\theta\\ &= ۲\sin\theta\cos^۲\theta + \cos^۲\theta\sin\theta - \sin^۳\theta\\ &= ۲\sin\theta - ۲\sin^۳\theta + \sin\theta - \sin^۳\theta - \sin^۳\theta\\ &= ۳\sin\theta - ۴\sin^۳\theta\end{aligned}$$

فرمول زاویه سه برابر برای کسینوس Triple-Angle Formula for Cosine

$$\cos ۳\theta = ۴\cos^۳\theta - ۳\cos\theta$$

اثبات

$$\begin{aligned}\cos ۳\theta &= \cos(۲\theta+\theta)\\ &= \cos ۲\theta\cos\theta - \sin ۲\theta\sin\theta\\ &= \left(\cos^۲\theta - \sin^۲\theta\right)\cos\theta - (۲\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\\ &= \cos^۳\theta - \sin^۲\theta\cos\theta - ۲\sin^۲\theta\cos\theta\\ &= \cos^۳\theta - \left(۱-\cos^۲\theta\right)\cos\theta - ۲\left(۱-\cos^۲\theta\right)\cos\theta\\ &= \cos^۳\theta - \cos\theta + \cos^۳\theta - ۲\cos\theta + ۲\cos^۳\theta\\ &= ۴\cos^۳\theta - ۳\cos\theta\end{aligned}$$

فرمول زاویه سه برابر برای تانژانت Triple-Angle Formula for Tangent

$$\tan ۳\theta = \frac{۳\tan\theta - \tan^{۳}\theta}{۱ - ۳\tan^{۲}\theta}$$

اثبات

$$\tan ۳\theta = \frac{\sin ۳\theta}{\cos ۳\theta}$$
$$= \frac{۳\sin\theta - ۴\sin^{۳}\theta}{۴\cos^{۳}\theta - ۳\cos\theta}$$
$$= \frac{۳\sin\theta - ۴\sin^{۳}\theta}{۴\cos^{۳}\theta - ۳\cos\theta} * \frac{\cos^{۳}\theta}{\cos^{۳}\theta}$$
$$= \frac{\frac{۳\tan\theta}{\cos^{۲}\theta} - ۴\tan^{۳}\theta}{۴ - \frac{۳\cos\theta}{\cos^{۳}\theta}}$$
$$= \frac{۳\tan\theta\ \sec^{۲}\theta - ۴\tan^{۳}\theta}{۴ - \sec^{۲}\theta}$$
$$= \frac{۳\tan\theta\left(۱ + \tan^{۲}\theta\right) - ۴\tan^{۳}\theta}{۴ - ۳(۱ + \tan^{۲}\theta)}$$
$$= \frac{۳\tan\theta + ۳\tan^{۳}\theta - ۴\tan^{۳}\theta}{۴ - ۳ - ۳\tan^{۲}\theta}$$
$$= \frac{۳\tan\theta - \tan^{۳}\theta}{۱ - ۳\tan^{۲}\theta}$$

تمرینات ۲.۴

در تمرینات ۲ – ۱ مقادیر دقیق $\sin ۲\theta$ و $\cos ۲\theta$ و $\tan ۲\theta$ برای شرایط داده شد ه را پید ا کنید.

۱) $\cos\theta = \frac{۳}{۵}$ و θ یک زاویه حاد

۲) $\sec\theta = -۳$　$۹۰° < \theta < ۱۸۰°$

در تمرینات ۴ – ۳ مقادیر دقیق $\sin\frac{\theta}{۲}$ و $\cos\frac{\theta}{۲}$ و $\tan\frac{\theta}{۲}$ برای شرایط داده شده را پید ا کنید.

۳) $\sec\theta = \frac{۵}{۴}$ و θ یک زاویه حاد

۴) $\tan\theta = ۱$ و $-۱۸۰° < \theta < -۹۰°$

۵ - در تمرین زیر با استفاده از فرمول های نصف زاویه ، مقادیر دقیق توابع داده شده را پیدا کنید.

$(a)\quad \cos ۶۷°۳۰'$　　$(b)\quad \sin ۱۵°$　　$(c)\quad \tan\frac{۳\pi}{۸}$

در تمرینات ۱۲ – ۶ درستی اتحاد های داده شده را ثابت کنید.

۶) $\sin ۱۰\theta = ۲\sin ۵\theta \cos ۵\theta$

۷) $۴\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} = ۲\sin x$

۸) $(\sin t + \cos t)^۲ = ۱ + \sin ۲t$

۹) $\sin ۳u = \sin u\left(۳ - ۴\sin^۲ u\right)$

۱۰) $\cos ۴u = ۸\cos^۴ u - ۸\cos^۲ u + ۱$

۱۱) $\sin^۴ t = \frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۲}\cos ۲t + \frac{۱}{۸}\cos ۴t$

۱۲) $\sec ۲x = \frac{\sec^۲ x}{۲ - \sec^۲ x}$

در تمرینات ۱۶ – ۱۳ ریشه های معادله های داده شده را در بازه $[0, ۲\pi)$ پیدا کنید. جواب ها را برحسب رادیان و درجه بیان کنید.

۱۳) $\sin ۲t + \sin t = 0$

۱۴) $\cos u + \cos ۲u = 0$

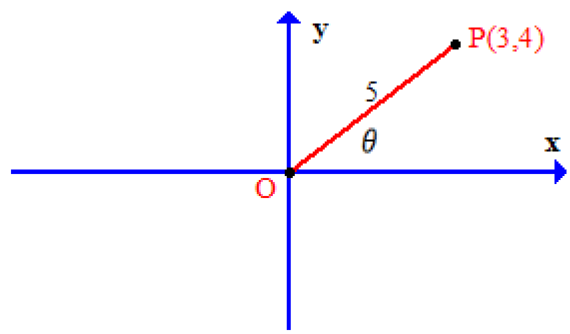
۱۵) $\tan ۲x = \tan x$

پاسخ تمرینات ۲.۴

در تمرینات ۲ – ۱ مقادیر دقیق $\sin ۲\theta$ و $\cos ۲\theta$ و $\tan ۲\theta$ برای شرایط داده شد ه را پید ا کنید.

۱) $\cos\theta = \frac{۳}{۵}$ و θ یک زاویه حاد

پاسخ



چون $\cos\theta = \frac{۳}{۵}$ است ، با توجه به تصویر بالا $\sin\theta = \frac{۴}{۵}$ و $\tan\theta = \frac{۴}{۳}$ است. لذا

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta = ۲ * \left(\frac{۴}{۵}\right)\left(\frac{۳}{۵}\right) = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\theta = \cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta = \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} - \left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲}$$

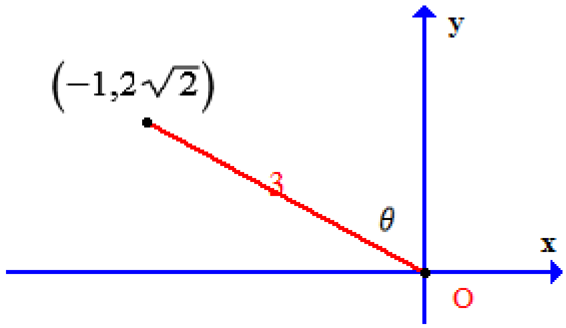
$$= \frac{۹}{۲۵} - \frac{۱۶}{۲۵} = -\frac{۷}{۲۵}$$

$$\tan ۲\theta = \frac{۲\tan\theta}{۱ - \tan^{۲}\theta} = \frac{۲ * \left(\frac{۴}{۳}\right)}{۱ - \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۲}}$$

$$= \frac{\frac{۸}{۳}}{۱ - \frac{۱۶}{۹}} = \frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{-۷}{۹}} = -\frac{۲۴}{۷}$$

۲) $\sec\theta = -۳ \quad ۹۰° < \theta < ۱۸۰°$

پاسخ



با توجه به تصویر بالا ، چون $\sec\theta = -۳$ پس $\cos\theta = -\frac{۱}{۳}$ است. لذا نقطه $\left(-۱,۲\sqrt{۲}\right)$ را روی ضلع انتهایی θ انتخاب می کنیم. در نتیجه $\sin\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ و $\tan\theta = -۲\sqrt{۲}$ است. پس

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta = ۲\left(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right)$$

$$= -\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$$

$$\cos ۲\theta = \cos^۲\theta - \sin^۲\theta = \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۲ - \left(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\right)^۲$$

$$= \frac{۱}{۹} - \frac{۸}{۹} = -\frac{۷}{۹}$$

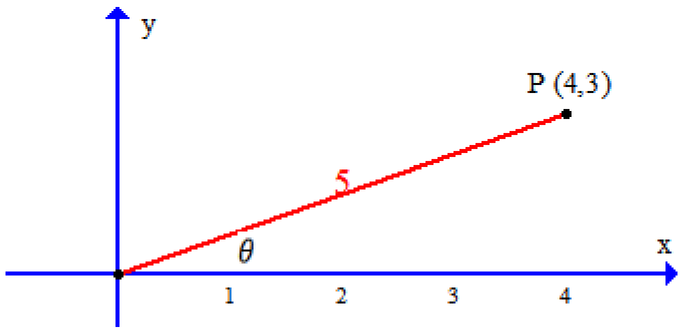
$$\tan ۲\theta = \frac{۲\tan\theta}{۱-\tan^۲\theta} = \frac{۲\left(-۲\sqrt{۲}\right)}{۱-\left(-۲\sqrt{۲}\right)^۲}$$

$$= \frac{-۴\sqrt{۲}}{۱-۸} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۷}$$

در تمرینات ۴ – ۳ مقادیر دقیق $\sin\frac{\theta}{۲}$ و $\cos\frac{\theta}{۲}$ و $\tan\frac{\theta}{۲}$ برای شرایط داده شده را پید ا کنید.

۳) $\sec\theta = \frac{۵}{۴}$ و θ یک زاویه حاد

پاسخ



با توجه به تصویر بالا و فرض مساله که $\sec\theta = \frac{۵}{۴}$ است ، پس $\cos\theta = \frac{۴}{۵}$ و $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ و $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$ است. پس داریم.

$$\sin\frac{\theta}{۲} = \sqrt{\frac{۱-\cos\theta}{۲}} = \sqrt{\frac{۱-\frac{۴}{۵}}{۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{۵-۴}{۵}}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\cos\frac{\theta}{۲} = \sqrt{\frac{۱+\cos\theta}{۲}} = \sqrt{\frac{۱+\frac{۴}{۵}}{۲}}$$

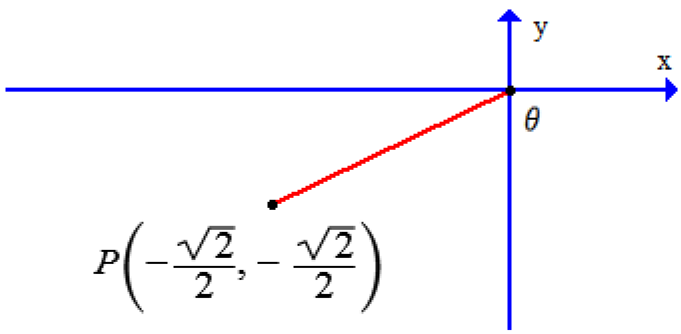
$$= \sqrt{\frac{\frac{۵+۴}{۵}}{۲}} = \sqrt{\frac{\frac{۹}{۵}}{۲}} = \sqrt{\frac{۹}{۱۰}} = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\tan\frac{\theta}{۲} = \sqrt{\frac{۱-\cos\theta}{۱+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{۱-\frac{۴}{۵}}{۱+\frac{۴}{۵}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۹}{۵}}} = \sqrt{\frac{۱}{۹}} = \frac{۱}{۳}$$

۴) $\tan\theta = ۱$ و $-۱۸۰^\circ < \theta < -۹۰^\circ$

پاسخ



با توجه به تصویر بالا و فرض مساله که $\tan\theta = ۱$ و $-۱۸۰^\circ < \theta < -۹۰^\circ$ پس نتیجه می گیریم که θ در ربع صفحه سوم قرار دارد و $\theta = -\frac{۳\pi}{۴}$ است و در نتیجه

$$\sin\theta = \cos\theta = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اما زاویه $\frac{\theta}{۲}$ در ربع صفحه چهارم قرار دارد ، پس سینوس منفی ، کسینوس مثبت و تانژانت منفی است. پس داریم.

$$\sin\frac{\theta}{۲} = -\sqrt{\frac{۱ - \cos\theta}{۲}}$$

$$= -\sqrt{\frac{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = -\sqrt{\frac{\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲}}{۲}}$$

$$= -\sqrt{\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۴}} = -\frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos\frac{\theta}{۲}=\sqrt{\frac{۱+\cos\theta}{۲}}=\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\tan\frac{\theta}{۲}=\frac{۱-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$=\frac{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\frac{۲+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=-\sqrt{۲}-۱$$

۵ - در تمرین زیر با استفاده از فرمول های نصف زاویه ، مقادیر دقیق توابع داده شده را پیدا کنید.

$(a)\quad \cos ۶۷^{\circ}۳۰'$ $\qquad (b)\quad \sin ۱۵^{\circ}$ $\qquad (c)\quad \tan\frac{۳\pi}{۸}$

$$(a)\quad \cos ۶۷^{\circ}۳۰' = \cos ۶۷/۵^{\circ}$$

$$=\cos\left(\frac{۱۳۵^{\circ}}{۲}\right)=\cos\sqrt{\frac{۱+\cos ۱۳۵^{\circ}}{۲}}=\pm\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}{۲}}=\pm\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}}=\pm\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

چون زاویه $۶۷ / ۵^{\circ}$ در ربع صفحه اول است ، پس جواب مثبت را قبول می کنیم.

$$(b)\quad \sin ۱۵^{\circ} = \sin\left(\frac{۳۰^{\circ}}{۲}\right) = \pm\sqrt{\frac{۱ - \cos ۳۰^{\circ}}{۲}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲}}{۲}} = \pm\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲}$$

چون زاویه ۱۵° در ربع صفحه اول است ، جواب مثبت را قبول می کنیم.

$$(c)\quad \tan\frac{۳\pi}{۸} = \tan\left(\frac{\frac{۳\pi}{۴}}{۲}\right) = \frac{۱ - \cos\frac{۳\pi}{۴}}{\sin\frac{۳\pi}{۴}}$$

$$= \frac{۱ - \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$= \frac{۲ + \sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}\left(۲ + \sqrt{۲}\right)}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲} + ۲}{۲}$$

$$= \frac{۲\left(\sqrt{۲} + ۱\right)}{۲} = \sqrt{۲} + ۱$$

در تمرینات ۱۲ – ۶ درستی اتحاد های داده شده را ثابت کنید.

$$۶)\quad \sin ۱۰\theta = ۲\sin ۵\theta \cos ۵\theta$$

فرض می کنیم $u = ۵\theta$ باشد ، پس داریم

$$\sin ۱۰\theta = \sin ۲u = ۲\sin u \cos u = ۲\sin ۵\theta \cos ۵\theta$$

۷) $۴\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} = ۲\sin x$

فرض می کنیم $u = \frac{x}{۲}$ باشد ، پس اتحاد بالا به صورت زیر تبدیل می شود.

$$۴\sin u\cos u = ۲\sin ۲u$$

میدانیم که $۲\sin u\cos u = \sin ۲u$ است. پس می توان نوشت $\sin u\cos u = \frac{۱}{۲}\sin ۲u$ ، لذا با توجه به فرضی که در بالا ذکرکردیم ، داریم.

$$۴\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} = ۴ * \frac{۱}{۲}\sin ۲u = ۲\sin ۲u = ۲\sin x$$

۸) $(\sin t + \cos t)^{۲} = ۱ + \sin ۲t$

$$\begin{aligned}(\sin t + \cos t)^{۲} &= \sin^{۲} t + \cos^{۲} t + ۲\sin t\cos t\\ &= \sin^{۲} t + ۱ - \sin^{۲} t + ۲\sin t\cos t\\ &= ۱ + ۲\sin t\cos t = ۱ + \sin ۲t\end{aligned}$$

۹) $\sin ۳u = \sin u\left(۳ - ۴\sin^{۲} u\right)$

$$\begin{aligned}\sin^{۳} u &= \sin(۲u + u) = \sin ۲u\cos u + \cos ۲u\sin u\\ &= (۲\sin u\cos u)\cos u + \left(\cos^{۲} u - \sin^{۲} u\right)\sin u\\ &= ۲\sin u\cos^{۲} u + \cos^{۲} u\sin u - \sin^{۳} u\\ &= ۲\sin u - ۲\sin^{۳} u + \sin u - \sin^{۳} u - \sin^{۳} u\\ &= ۳\sin u - ۴\sin^{۳} u\end{aligned}$$

۱۰) $\cos ۴u = ۸\cos^{۴} u - ۸\cos^{۲} u + ۱$

$$\begin{aligned}\cos ۴x &= \cos(۲x + ۲x) = \cos ۲x * \cos ۲x - \sin ۲x * \sin ۲x\\ &= \left(۲\cos^{۲} x - ۱\right)^{۲} - (۲\sin x\cos x)^{۲}\\ & ۴\cos^{۴} x - ۴\cos^{۲} x + ۱ - ۴\sin^{۲} x\cos^{۲} x\\ &= ۴\cos^{۴} x - ۴\cos^{۲} x + ۱ - ۴\cos^{۲} x\left(۱ - \cos^{۲} x\right)\\ &= ۴\cos^{۴} x - ۴\cos^{۲} x + ۱ - ۴\cos^{۲} x + ۴\cos^{۴} x\\ &= ۸\cos^{۴} x - ۸\cos^{۲} x + ۱\end{aligned}$$

۱۱) $\sin^{۴} t = \frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۲}\cos ۲t + \frac{۱}{۸}\cos ۴t$

$$\sin^{۴} t = \left(\sin^{۲} t\right)^{۲} = \left(\frac{۱ - \cos ۲t}{۲}\right)^{۲}$$
$$= \frac{۱}{۴}\left(۱ - ۲\cos ۲t + \cos^{۲} ۲t\right)$$
$$= \frac{۱}{۴}\left(۱ - ۲\cos ۲t + \frac{۱}{۲}\left(۱ + \cos ۴t\right)\right)$$
$$= \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}\cos ۲t + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸}\cos ۴t$$
$$= \frac{۱}{۸}\cos ۴t - \frac{۱}{۲}\cos ۲t + \frac{۳}{۸}$$

۱۲) $\sec ۲x = \frac{\sec^{۲} x}{۲ - \sec^{۲} x}$

$$\sec ۲x = \frac{۱}{\cos ۲x} = \frac{۱}{۲\cos^{۲} x - ۱}$$
$$= \frac{\frac{۱}{\cos^{۲} x}}{\frac{۲\cos^{۲} c}{\cos^{۲} x} - \frac{۱}{\cos^{۲} x}} = \frac{\sec^{۲} x}{۱ - \sec^{۲} x}$$

در تمرینات ۱۶ – ۱۳ ریشه های معادله های داده شده را در بازه $\left[0, ۲\pi\right)$ پیدا کنید. جواب ها را برحسب رادیان و درجه بیان کنید.

۱۳) $\sin ۲t + \sin t = 0$

$$۲\sin t\cos t + \sin t = 0$$
$$\sin t\left(۲\cos t + ۱\right) = 0$$
$$\sin t = 0 \quad \text{یا} \quad \cos t = -\frac{۱}{۲}$$

اگر $\sin t = 0$ باشد ، پس $t = \pi$ یا $t = 0$ است.

اگر $\cos t = -\frac{۱}{۲}$ باشد ، پس $t = \frac{۴\pi}{۳}$ یا $t = \frac{۲\pi}{۳}$ است.

$$0 \text{ ، } \frac{۲\pi}{۳} \text{ ، } \pi \text{ ، } \frac{۴\pi}{۳} \text{ ، } 0° \text{ ، } ۱۲۰° \text{ ، } ۱۸۰° \text{ ، } ۲۴۰°$$

۱۴) $\cos u + \cos ۲u = 0$

$$\cos u + ۲\cos ۲u = 0$$
$$\cos u + ۲\cos^{۲} u - ۱ = 0$$
$$۲\cos^{۲} u + \cos u - ۱ = 0$$
$$\cos^{۲} u + \frac{۱}{۲}\cos u - \frac{۱}{۲} = 0$$
$$\left(\cos u - \frac{۱}{۲}\right)\left(\cos u + ۱\right) = 0$$
$$\cos u = \frac{۱}{۲} \quad \cos u = -۱$$

اگر $\cos u = \frac{۱}{۲}$ باشد ، پس $u = \frac{۵\pi}{۳}$ یا $u = \frac{\pi}{۳}$ است.

اگر $\cos u = -۱$ باشد .پس $u = \pi$ است.

$$\frac{\pi}{۳} ، \pi ، \frac{۵\pi}{۳} ، ۶۰° ، ۱۸۰° ، ۳۰۰°$$

۱۵) $\tan ۲x = \tan x$

$$\tan ۲x - \tan x = 0$$
$$\frac{۲\tan x}{۱ - \tan^{۲} x} - \tan x = 0$$
$$\frac{۲\tan x - \tan x + \tan^{۳} x}{۱ - \tan^{۲} x} = 0$$
$$\tan x\left(۱ + \tan^{۲} x\right) = 0$$

اگر $\tan x = 0$ باشد ، پس $x = 0$ یا $x = \pi$ است. معادله $۱ + \tan^{۲} x = 0$ ریشه حقیقی ندارد.

$$0 ، \pi \ , 0° ، ۱۸۰°$$

۲.۵ - تبدیل جمع به ضرب و تبدیل ضرب به جمع Product and Factoring Formulas یا فرمول های حاصل ضرب و فاکتور گیری

فرمول های حاصل ضرب Product Formulas
یا فرمول های تبدیل ضرب به جمع

$$\sin(u+v)+\sin(u-v) = ۲\sin u\cos v$$
$$\sin(u+v)-\sin(u-v) = ۲\cos u\sin v$$
$$\cos(u+v)+\cos(u-v) = ۲\cos u\cos v$$
$$\cos(u-v)-\cos(u+v) = ۲\sin u\sin v$$

اتحاد های بالا نتیجه کار هایی است که در بخش ۲.۳ انجام دادیم. مثلا برای پیدا کردن فرمول اول ، کافی است سمت چپ و سمت راست اتحادی که برای $\sin(u+v)$ و $\sin(u-v)$ بدست آوردیم ، با هم جمع کنیم. برای بقیه هم به همین طریق عمل می کنیم. مثال بعدی در این مورد کمک می کند.

مثال -عبارت های زیر را به صورت جمع بنویسید.

$$(a)\quad \sin ۴x\cos ۳x \qquad (b)\quad \sin ۳x\sin x$$

پاسخ

(a) با استفاده از فرمول اول حاصل ضرب با $u = ۴x$ و $v = ۳x$ داریم.

$$۲\sin ۴x\cos ۳x = \sin(۴x+۳x)+\sin(۴x-۳x)$$
$$\sin ۴x\cos ۳x = \frac{۱}{۲}\sin ۷x+\frac{۱}{۲}\sin x$$

(b) با استفاده از فرمول چهارم با $u = ۳x$ و $v = x$ داریم.

$$۲\sin ۳x\sin x = \cos(۳x-x)-\cos(۳x+x)$$
$$\sin ۳x\sin x = \frac{۱}{۲}\cos ۲x-\frac{۱}{۲}\cos ۴x$$

از فرمول های حاصل ضرب می توان استفاده کرد و جمع را به حاصل ضرب تبدیل کرد. برای آسان کردن کار ، این تغییرات را در نماد ها انجام می دهیم.

$$u+v=a \quad \text{و} \quad u-v=b$$

پس خواهیم داشت $(u+v)+(u-v)=a+b$ و یا

$$u=\frac{a+b}{۲}$$

به همین طریق $(u+v)-(u-v)=a-b$ و یا

$$v=\frac{a-b}{۲}$$

حالا اگردر سمت چپ فرمول های حاصل ضرب , نماد های a و b را جانشین $u+v$ و $u-v$ کنیم ، خواهیم داشت.

فرمول های فاکتور گیری Factoring Formulas
یا فرمول های تبدیل جمع به ضرب

$$\sin a + \sin b = ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}$$

$$\sin a - \sin b = ۲\cos\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a-b}{۲}$$

$$\cos a + \cos b = ۲\cos\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}$$

$$\cos b - \cos a = ۲\sin\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a-b}{۲}$$

می توان فرمول های بالا را چنین خلاصه کرد.

تبدیل ضرب به جمع

$$\sin a\cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$\cos a\cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b = -\frac{۱}{۲}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

تبدیل جمع به ضرب

$$\sin a + \sin b = ۲\sin\left(\frac{a+b}{۲}\right)\cos\left(\frac{a-b}{۲}\right)$$

$$\cos a + \cos b = ۲\cos\left(\frac{a+b}{۲}\right)\cos\left(\frac{a-b}{۲}\right)$$

$$\sin a - \sin b = ۲\cos\left(\frac{a+b}{۲}\right)\sin\left(\frac{a-b}{۲}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -۲\sin\left(\frac{a+b}{۲}\right)\sin\left(\frac{a-b}{۲}\right)$$

مثال ۲ – عبارت $\sin ۵x - \sin ۳x$ را به صورت ضرب بنویسید.

پاسخ

با فرض این که $a = ۵x$ و $b = ۳x$ داریم.

$$\sin ۵x - \sin ۳x = ۲\cos\frac{۵x + ۳x}{۲}\sin\frac{۵x - ۳x}{۲}$$

$$= ۲\cos ۴x \sin x$$

مثال ۳ - درستی‌اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin ۳t + \sin ۵t}{\cos ۳t - \cos ۵t} = \cot t$$

پاسخ

$$\frac{\sin ۳t + \sin ۵t}{\cos ۳t - \cos ۵t} = \frac{۲\sin\frac{۳t + ۵t}{۲}\cos\frac{۳t - ۵t}{۲}}{۲\sin\frac{۵t + ۳t}{۲}\sin\frac{۵t - ۳t}{۲}}$$

$$= \frac{۲\sin ۴t\cos(-t)}{۲\sin ۴t\sin t} = \frac{\cos(-t)}{\sin t}$$

$$= \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$$

مثال ۴ – ریشه های معادله زیر را پیدا کنید.

$$\cos t - \sin ۲t - \cos ۳t = 0$$

پاسخ

$$\cos t - \cos ۳t = ۲\sin\frac{۳t + t}{۲}\sin\frac{۳t - t}{۲} = ۲\sin ۲t\sin t$$

پس معادله به صورت زیر تبدیل می شود.

$$۲\sin ۲t\sin t - \sin ۲t = 0$$

$$\sin ۲t(۲\sin t - ۱) = 0$$

$$\sin ۲t = 0 \quad \text{یا} \quad \sin t = \frac{۱}{۲}$$

ریشه های $\sin ۲t = 0$ مطابق زیر هستند.

$$۲t = n\pi \quad \text{یا} \quad t = \frac{\pi}{۲}n$$

ریشه های $\sin t = \frac{۱}{۲}$ مطابق زیر است.

$$t = \frac{\pi}{۶} + ۲n\pi \quad \text{یا} \quad t = \frac{۵\pi}{۶} + ۲\pi n$$

فرمول های جمع را می توان برای کوچک کردن عبارت هایی مانند

$$\sin\left(\theta+\frac{n\pi}{۲}\right) \quad و \quad \cos\left(\theta+\frac{n\pi}{۲}\right)$$

بکار برد. مثال زیر نمونه ای از این قبیل است.

مثال ۵ - عبارت های $\sin\left(\theta-\frac{۳\pi}{۲}\right)$ و $\cos(\theta+\pi)$ را بر حسب تابع θ بنویسید.

پاسخ

$$\sin\left(\theta-\frac{۳\pi}{۲}\right)=\sin\theta\cos\frac{۳\pi}{۲}-\cos\theta\sin\frac{۳\pi}{۲}$$
$$=\sin\theta*(0)-\cos\theta*(-۱)=\cos\theta$$

$$\cos(\theta+\pi)=\cos\theta\cos\pi-\sin\theta\sin\pi$$
$$=\cos\theta*(-۱)-\sin\theta*(0)=-\cos\theta$$

تمرینات ۲.۵

در تمرینات ۴ – ۱ حاصل ضرب را به جمع تبدیل کنید.

۱) $۲\sin ۹x\cos ۳x$

۲) $\sin ۷t\sin ۳t$

۳) $\cos ۶u\cos(-۴u)$

۴) $۳\cos x\sin ۲x$

در تمرینات ۸ – ۵ جمع را به ضرب تبدیل کنید.

۵) $\sin ۶x+\sin ۲x$

۶) $\cos ۵x-\cos ۳x$

۷) $\sin ۳t-\sin ۷t$

۸) $\cos x+\cos ۲x$

در تمرینات ۱۲ – ۹ درستی اتحاد ها را ثابت کنید.

۹) $\dfrac{\sin ۴t+\sin ۶t}{\cos ۴t-\cos ۶t}=\cot t$

۱۰) $\dfrac{\sin x+\sin ۳x}{\cos x+\cos ۳x}=\tan ۲x$

۱۱) $\dfrac{\sin u+\sin v}{\cos u+\cos v}=\tan\dfrac{u+v}{۲}$

۱۲) $\dfrac{\sin u-\sin v}{\cos u-\cos v}=-\cot\dfrac{u+v}{۲}$

۱۳ – عبارت $(\sin ax)(\cos bx)$ را به صورت جمع بنویسید.

در تمرینات ۱۵ – ۱۴ ریشه های معادله را پیدا کنید.

۱۴) $\sin ۵t + \sin ۳t = 0$

۱۵) $\cos x = \cos ۳x$

در تمرینات ۱۸ – ۱۶ درستی تساوی را ثابت کنید.

۱۶) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

۱۷) $\sin\left(\theta + \frac{۳\pi}{۲}\right) = -\cos\theta$

۱۸) $\cos\left(\theta - \frac{۵\pi}{۲}\right) = \sin\theta$

پاسخ تمرینات ۲.۵

در تمرینات ۴ – ۱ حاصل ضرب را به جمع تبدیل کنید.

۱) $۲\sin ۹x \cos ۳x = \sin(۹x + ۳x) + \sin(۹x - ۳x) = \sin ۱۲x + \sin ۶x$

۲) $\sin ۷t \sin ۳t = -\frac{۱}{۲}[\cos(۷t + ۳t) - \cos(۷t - ۳t)] = \frac{۱}{۲}\cos ۴t - \frac{۱}{۲}\cos ۱۰t$

۳) $\cos ۶u \cos(-۴u) = \frac{۱}{۲}\left[\cos\left(۶u + (-۴u)\right) + \cos\left(۶u - (-۴u)\right)\right]$

$$= \frac{۱}{۲}\cos ۱۰u + \frac{۱}{۲}\cos ۲u$$

۴) $۳\cos x \sin ۲x = ۳\sin ۲x \cos x = \frac{۳}{۲}[\sin(۲x + x) + \sin(۲x - x)]$

$$= \frac{۳}{۲}\sin ۳x + \frac{۳}{۲}\sin x$$

در تمرینات ۸ – ۵ جمع را به ضرب تبدیل کنید.

۵) $\sin ۶x + \sin ۲x = ۲\sin\left(\frac{۶x + ۲x}{۲}\right)\cos\left(\frac{۶x - ۲x}{۲}\right) = ۲\sin ۴x \cos ۲x$

$$۶)\quad \cos ۵x - \cos ۳x = -۲\sin\left(\frac{۵x+۳x}{۲}\right)\sin\left(\frac{۵x-۳x}{۲}\right) = -۲\sin ۴x \sin x$$

$$۷)\quad \sin ۳t - \sin ۷t = ۲\cos\left(\frac{۳t+۷t}{۲}\right)\sin\left(\frac{۳t-۷t}{۲}\right) = -۲\cos ۵t \sin ۲t$$

$$۸)\quad \cos x + \cos ۲x = ۲\cos\left(\frac{x+۲x}{۲}\right)\cos\left(\frac{x-۲x}{۲}\right) = ۲\cos\frac{۳}{۲}x\cos\frac{۱}{۲}x$$

در تمرینات ۱۲ – ۹ درستی اتحاد ها را ثابت کنید.

$$۹)\quad \frac{\sin ۴t + \sin ۶t}{\cos ۴t - \cos ۶t} = \cot t$$

$$\frac{\sin ۴t + \sin ۶t}{\cos ۴t - \cos ۶t} = \frac{۲\sin\left(\frac{۴t+۶t}{۲}\right)\cos\left(\frac{۴t-۶t}{۲}\right)}{-۲\sin\left(\frac{۴t+۶t}{۲}\right)\sin\left(\frac{۴t-۶t}{۲}\right)}$$

$$= \frac{۲\sin ۵t\cos(-t)}{-۲\sin ۵t\sin(-t)} = \cot t$$

$$۱۰)\quad \frac{\sin x + \sin ۳x}{\cos x + \cos ۳x} = \tan ۲x$$

$$\frac{\sin x + \sin ۳x}{\cos x + \cos ۳x} = \frac{۲\sin\left(\frac{x+۳x}{۲}\right)\cos\left(\frac{x-۳x}{۲}\right)}{۲\cos\left(\frac{x+۳x}{۲}\right)\cos\left(\frac{x-۳x}{۲}\right)}$$

$$= \frac{۲\sin ۲x\cos(-۱)}{۲\cos ۲x\cos(-۱)} = \tan ۲x$$

$$۱۱)\quad \frac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \tan\frac{u+v}{۲}$$

$$\frac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \frac{۲\sin\left(\frac{u+v}{۲}\right)\cos\left(\frac{u-v}{۲}\right)}{۲\cos\left(\frac{u+v}{۲}\right)\cos\left(\frac{u-v}{۲}\right)} = \tan\frac{u+v}{۲}$$

۱۲) $\frac{\sin u - \sin v}{\cos u - \cos v} = -\cot\frac{u+v}{۲}$

$$\frac{\sin u - \sin v}{\cos u - \cos v} = \frac{۲\cos\left(\frac{u+v}{۲}\right)\sin\left(\frac{u-v}{۲}\right)}{-۲\sin\left(\frac{u+v}{۲}\right)\sin\left(\frac{u-v}{۲}\right)} = -\cot\frac{u+v}{۲}$$

۱۳ – عبارت $(\sin ax)(\cos bx)$ را به صورت جمع بنویسید.

$$(\sin ax)(\cos bx) = \frac{۱}{۲}[\sin(ax+bx) + \sin(ax-bx)]$$

$$= \frac{۱}{۲}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$= \frac{۱}{۲}\sin(a+b)x + \frac{۱}{۲}\sin(a-b)x$$

در تمرینات ۱۵ – ۱۴ ریشه های معادله را پیدا کنید.

۱۴) $\sin ۵t + \sin ۳t = 0$

$$\sin ۵t + \sin ۳t = 0$$

$$۲\sin\left(\frac{۵t+۳t}{۲}\right)\cos\left(\frac{۵t-۳t}{۲}\right) = 0$$

$$۲\sin ۴t\cos t = 0$$

$\sin ۴t = 0$ یا $\cos t = 0$

اگر $\sin ۴t = 0$ باشد ، پس $۴t = n\pi$ و یا $t = \frac{n\pi}{۴}$

اگر $\cos t = 0$ باشد ، پس $t = \frac{\pi}{۲} + ۲n\pi$ یا $t = \frac{۳\pi}{۲} + ۲n\pi$

با تلفیق پاسخ های بالا ، خواهیم داشت $t = \frac{n\pi}{۴}$

۱۵) $\cos x = \cos ۳x$

$$\cos x - \cos ۳x = 0$$

$$-۲\sin\left(\frac{x+۳x}{۲}\right)\sin\left(\frac{x-۳x}{۲}\right) = 0$$

$$-۲\sin ۲x\sin(-x) = 0$$

$$۲\sin ۲x\sin x = 0$$

اگر $\sin ۲x = 0$ باشد ، پس $۲x = n\pi$ و یا $x = \frac{n\pi}{۲}$ است.

اگر $\sin x = 0$ باشد ، پس $x = n\pi$ است.

با تلفیق پاسخ های بالا ، خواهیم داشت $x = \frac{n\pi}{۲}$

در تمرینات ۱۶ – ۱۸ درستی تساوی را ثابت کنید.

۱۶) $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

$$\sin(\theta+\pi) = \sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi = \sin\theta * (-۱) + \cos\theta * (0) = -\sin\theta$$

۱۷) $\sin\left(\theta+\frac{۳\pi}{۲}\right) = -\cos\theta$

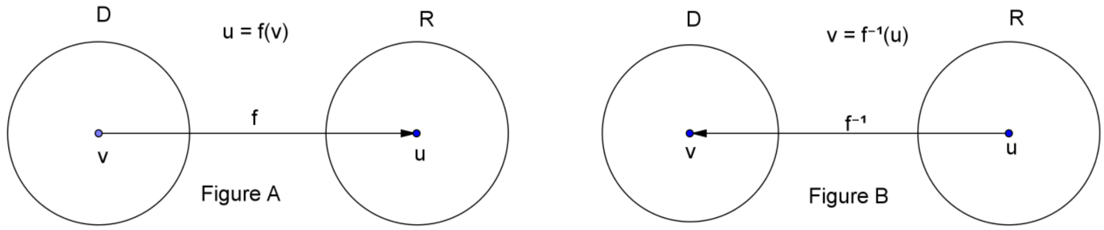
$$\sin\left(\theta+\frac{۳\pi}{۲}\right) = \sin\theta\cos\frac{۳\pi}{۲} + \cos\theta\sin\frac{۳\pi}{۲}$$
$$= \sin\theta * (0) + \cos\theta * (-۱) = -\cos\theta$$

۱۸) $\cos\left(\theta-\frac{۵\pi}{۲}\right) = \sin\theta$

$$\cos\left(\theta-\frac{۵\pi}{۲}\right) = \cos\theta\cos\left(\frac{۵\pi}{۲}\right) + \sin\theta\sin\left(\frac{۵\pi}{۲}\right)$$
$$= \cos\theta * (0) + \sin\theta * (۱) = \sin\theta$$

۲.۶ - توابع معکوس مثلثاتی The Inverse Trigonometric Functions

اگر تابع f یک به یک باشد ، پس برای هر عدد در دامنه ، فقط یک عدد در برد آن وجود دارد. یعنی برای هر عدد u در R, فقط یک عدد v در D وجود دارد. R حرف اول $Range$ است به معنی برد. D حرف اول $Domain$ است به معنی دامنه. تصویر A



حالا می توانیم تابع f^{-1} از R به D را چنین تعریف کنیم. تصویر B

$$f^{-1}(u) = v$$

f^{-1} را **تابع معکوس** $\boldsymbol{f}$ می نامیم. تابع f^{-1} رابطه و یا کار f را معکوس می کند. یعنی

$$f(v) = u \quad \text{اگر فقط و فقط} \quad v = f^{-1}(u)$$

برای هر u در برد R و هر v در دامنه D . *عبارت بالا را از چپ به راست بخوانید*

چون $v = f^{-1}(u)$ و $u = f(v)$ هم ارز هستند ، پس می توان نوشت

$$v = f^{-1}(u) = f^{-1}\big(f(v)\big)$$

و

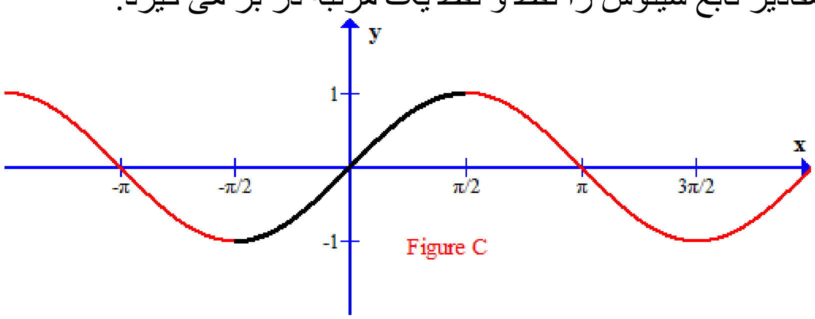
$$u = f(v) = f\left(f^{-1}(u)\right)$$

ارتباط بین f و f^{-1} مطابق زیر است.

$$f^{-1}\big(f(v)\big) = v \qquad \text{برای هر } v \text{ در دامنه } f$$

$$f\left(f^{-1}(u)\right) = u \qquad \text{برای هر } u \text{ در دامنه } f^{-1}$$

چون توابع مثلثاتی ، یک به یک ، نیستند ، پس توابع معکوس ندارند. اما با محدود کردن دامنه ها ، می توان تابع هایی بدست آورد که کل برد تابع مثلثاتی را یک مرتبه پوشش دهند ، در این صورت آن توابع معکوس دارند. ابتدا اجازه دهید تابع سینوس را در نظر بگیریم. اگر دامنه را به $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ محدود کنیم ، همان طور که در تصویر C قسمت سیاه رنگ نمودار ملاحظه می کنید ، یک تابع صعودی بدست می آوریم که تمام مقادیر تابع سینوس را فقط و فقط یک مرتبه در بر می گیرد.



این تابع جدید با دامنه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ و برد $[-۱,۱]$ دارای معکوس است . تابع $sin^{-۱}$ با دامنه $[-۱,۱]$ و برد $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ تابع معکوس سینوس نامیده می شود. طبق تعریف

$v=\sin^{-1}u$ اگر فقط و فقط $sin\ v=u$

برای $-۱\le u\le ۱$ و $-\frac{\pi}{۲}\le v\le\frac{\pi}{۲}$

عبارت های بالا را از چپ به راست بخوانید.

چون حروفی که برای این متغیر ها بکار برديم بی اهميت هستند ، پس مطابق معمول از نماد های x و y استفاده می کنیم. پس تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف

تابع معکوس سینوس The Inverse Sine Function که با نماد $sin^{-۱}$ نشان می دهیم ، چنین تعریف می شود

$y=\sin^{-1}x$ اگر فقط و فقط $\sin y=x$

باشد.

برای $-۱\le x\le ۱$ و $-\frac{\pi}{۲}\le y\le\frac{\pi}{۲}$

همچنین $sin^{-۱}$ را **تابع آرک سینوس Arcsine Function** می نامیم و بجای نماد $\sin^{-1}x$ نماد $\arcsin x$ بکار می بریم.

نماد $\arcsin x$ بکار برده می شود ، زیرا اگر $t=\arcsin x$ باشد ، پس t می تواند طول یک کمان روی دائره واحد U تعبیر شود. توجه داشته باشید که کلمه arc به معنی قوس یا کمان است در هر حال هر دو نماد را بکار می بریم. این بستگی به ذوق و سلیقه شما دارد.

توجه داشته باشید که

$$-\frac{\pi}{۲}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{۲}$$

همچنین

$$-\frac{\pi}{۲}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{۲}$$

مثال ۱ــ مطلوب است

$$(a)\quad \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\qquad (b)\quad \arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\right)\qquad (c)\quad \sin^{-1}۱$$

پاسخ

(a)

طبق تعریف $y=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ است اگرفقط و فقط $\sin y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد ،
برای $-\frac{\pi}{۲}\le y\le\frac{\pi}{۲}$

تنها عدد y در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ که تساوی $\sin y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را بر قرار کند ، $y=\frac{\pi}{۲}$ است. لذا

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\frac{\pi}{۴}$$

توجه داشته باشید که **لازم است** y در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ انتخاب شود. عددی مانند $\frac{۳\pi}{۴}$ صحیح نیست ، اگر چه $\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

(b)

طبق تعریف $y=\arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\right)$ است ، اگرفقط و فقط $\sin y=-\frac{۱}{۲}$ باشد. در صورتی که y در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ باشد. پس $y=-\frac{\pi}{۶}$ است. لذا

$$\arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۶}$$

(c)

مانند قسمت های (a) و (b) داریم $y=\sin^{-1}۱$ است ، اگرفقط و فقط $\sin y=۱$ باشد، برای

$$-\frac{\pi}{۲}\le y\le\frac{\pi}{۲}$$

در نتیجه $y=\frac{\pi}{۲}$ است. لذا

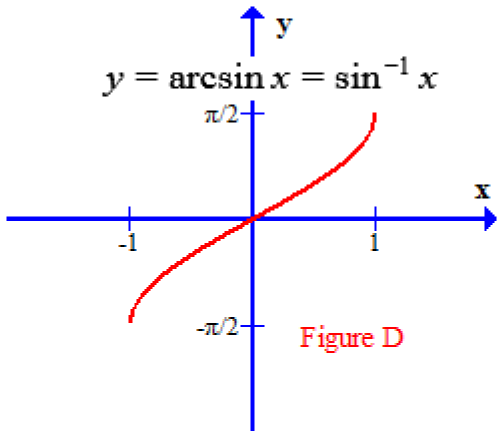
$$\sin^{-1}۱=\frac{\pi}{۲}$$

طبق تعریف ، نمودار $y=\sin^{-1}x$ مانند نمودار $\sin y=x$ است ، با این تفاوت که متغیر ها مطابق زیر محدود می شوند. تصویر D

$$-\frac{\pi}{۲}\le y\le\frac{\pi}{۲}\quad و \quad -۱\le x\le ۱$$

روشی را که در مثال ۱ بکار بردیم ، ما را به جدول زیر می رساند.

y	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۶}$	0	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
x	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	0	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱



سایر مقادیر $\sin^{-1} x$ را می توان از طریق ماشین حساب پیدا کرد.
رابطه

$$f^{-۱}\left(f(v)\right) = v \qquad f\left(f^{-۱}(u)\right) = u$$

که برای هر تابع معکوس بر قرار است ، اتحاد های مهم زیر را به ما میدهد.

$$\sin^{-1}(\sin y) = y \quad \text{اگر} \quad -\frac{\pi}{۲} \leq y \leq \frac{\pi}{۲}$$

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \quad \text{اگر} \quad -۱ \leq x \leq ۱$$

می توان به شکل زیر هم نوشت، در صورتی که x و y بطور مناسب محدود شده باشند.

$$\arcsin(\sin y) = y \quad \text{و} \quad \sin(\arcsin x) = x$$

مثال ۲ – مطلوب است

$$\sin^{-1}\left(\tan\frac{۳\pi}{۴}\right)$$

پاسخ
اگر فرض کنیم

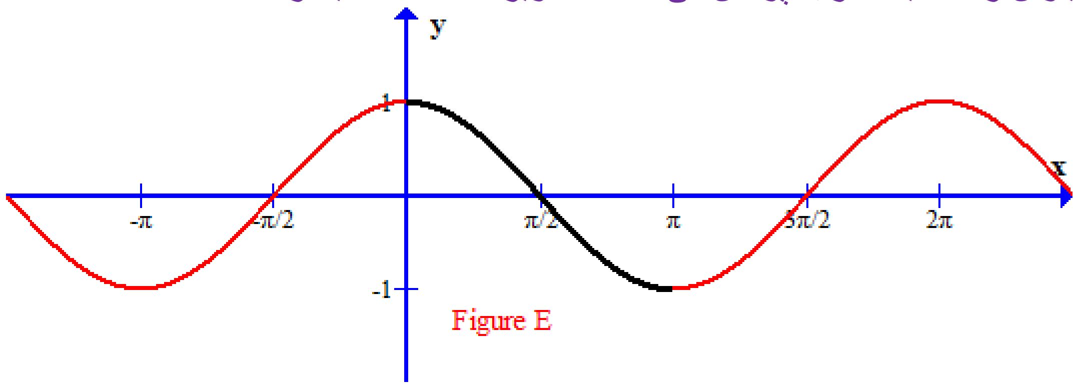
$$y = \sin^{-1}\left(\tan\frac{۳\pi}{۴}\right) = \sin^{-1}(-۱)$$

باشد ، پس طبق تعریف

$$\sin y = -۱$$

است. چون y باید در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ انتخاب شود ، پس $y=-\frac{\pi}{۲}$ است.

اگر دامنه تابع کسینوس را به بازه $[0,\pi]$ محدود کنیم ، یک تابع نزولی بدست می آوریم که تمام مقادیر تابع کسینوس را فقط یک مرتبه پوشش می دهد. تصویر E قسمت سیاه رنگ.



این تابع جدید یک معکوس دارد بنام **تابع معکوس کسینوس The Inverse Cosine Function** با تعریف زیر.

تعریف

تابع معکوس کسینوس با نماد $cos^{-۱}$ چنین تعریف می شود.

$y=\cos^{-1}x$ اگرفقط و فقط $\cos y=x$ باشد ، برای $۱ \le x \le ۱-$ و $0\le y\le\pi$

معکوس تابع کسینوس ، **تابع آرک کسینوس Arccosine Function** هم نامیده می شود. و با نماد $\arccos x$ نشان داده می شود.

با استفاده از خواص کلی توابع معکوس داریم .

$$\cos(\cos^{-1}x)=\cos(\arccos x)=x$$
$$\cos^{-1}(\cos y)=\arccos(\cos y)=y$$

برای $۱ \le x \le ۱-$ و $0\le y\le\pi$

مثال ۳ – مطلوب است

$$(a)\quad \cos^{-1}\left(\frac{۱}{۲}\right)\qquad (b)\quad \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\qquad (c)\quad \arccos 0$$

پاسخ

(a)

بر اساس تعریف

$y = \cos^{-1}\left(\frac{۱}{۲}\right)$ است، اگر فقط و فقط $\cos y = \frac{۱}{۲}$ باشد. برای $0 \le y \le \pi$.تنها عدد y در بازه $[0,\pi]$ که تساوی $\cos y = \frac{۱}{۲}$ را بر قرار کند ، $y = \frac{\pi}{۳}$ است. لذا

$$\cos^{-1}\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{\pi}{۳}$$

(b)

بر اساس تعریف ، $y = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ است اگر فقط و فقط $\cos y = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد. برای $0 \le y \le \pi$

عبارت بالا و عبارت هایی از این قبیل که دارای :اگر فقط و فقط :است را می توان آنچه در کتب فارسی زبان متداول است چنین نوشت.

شرط لازم و کافی برای این که $y = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ باشد ، این است که $\cos y = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

عدد مرجع یا زاویه مرجع برای y عدد $\frac{\pi}{۶}$ است. چون y باید در بازه $[0,\pi]$ انتخاب شود ، مطابق زیر عمل می کنیم.

$$y = \pi - \left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۵\pi}{۶}$$

لذا

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۵\pi}{۶}$$

است.

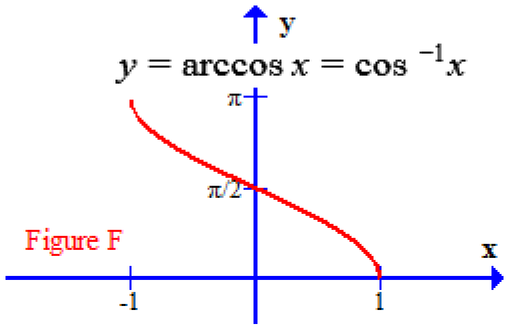
(c)

مانند قسمت های (a) و (b) داریم.

شرط لازم و کافی برای این که $y = \arccos 0$ باشد ، این است که $\cos y = 0$ باشد ، برای $0 \le y \le \pi$

در نتیجه $y = \frac{\pi}{۲}$ و $\arccos 0 = \frac{\pi}{۲}$

بر اساس تعریف ، نمودار $y = \cos^{-1} x$ مانند نمودار $\cos y = x$ است ,برای $0 \le y \le \pi$ تصویر F



از مثال شماره ۳ نتیجه می گیریم سه نقطه روی نمودار ، عبارتند از

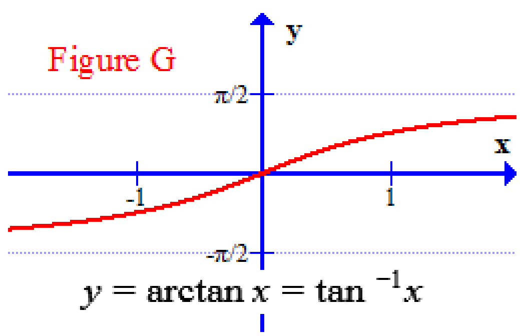
$$\left(\frac{۱}{۲},\frac{\pi}{۳}\right) \text{ ، } \left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۵\pi}{۶}\right) \text{ ، } \left(0,\frac{\pi}{۲}\right)$$

بقیه مقادیر $cos^{-۱}$ را می توان بوسیله ماشین حساب بدست آورد.

اگر دامنه تابع تانژانت را به بازه باز $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$ محدود کنیم ، پس یک تابع یک به یک بدست می آید.
پس می توان تعریف زیر را داشته باشیم.

تعریف تابع معکوس تانژانت یا **تابع آرک تانژانت** ، که با نماد $tan^{-۱}$ یا نماد $arctan$ نمایش داده می شود ، چنین تعریف می کنیم،
$y = \tan^{-1} x = \arctan x$ اگرفقط و فقط $\tan y = x$ باشد ، x هر عدد حقیقی است و $-\frac{\pi}{۲} < y < \frac{\pi}{۲}$

توجه داشته باشید که دامنه تابع آرک تانژانت تمام اعداد حقیقی است و برد آن بازه باز $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$ است. تصویر G



مثال ۴ – بدون استفاده از ماشین حساب $\sec\left(\arctan\frac{۲}{۳}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

اگر فرض کنیم $y=\arctan\frac{۲}{۳}$ باشد ، پس $\tan y=\frac{۲}{۳}$ است. میخواهیم $\sec y$ را پیدا کنیم. چون می دانیم $\sec^{۲} y=۱+\tan^{۲} y$ است و $0<y<\frac{\pi}{۲}$

$$\sec y=\sqrt{۱+\tan^{۲} y}=\sqrt{۱+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}}$$

$$=\sqrt{۱+\frac{۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۱۳}{۹}}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$$

پس

$$\sec\left(\arctan\frac{۲}{۳}\right)=\sec y=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$$

مثال ۵ – مقدار $\sin\left(\arctan\frac{۱}{۲}-\arccos\frac{۴}{۵}\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $u=\arctan\frac{۱}{۲}$ و $v=\arccos\frac{۴}{۵}$ باشد. پس $\tan u=\frac{۱}{۲}$ و $\cos v=\frac{۴}{۵}$ است.
می خواهیم $\sin(u-v)$ را پیدا کنیم.

Figure H

چون u و v در بازه $\left(0,\frac{\pi}{۲}\right)$ هستند ، می توانیم آنها را به عنوان اندازه های زوایای حاد بر حسب رادیان تصور کنیم و می توانیم مثلث های قائم الزاویه تصویر H را در نظر بگیریم. پس داریم.

$$\sin u=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\ ،\ \cos u=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\ ،\ \sin v=\frac{۳}{۵}$$

در نتیجه

$$\sin(u-v)=\sin u\cos v-\cos u\sin v$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۵}} * \frac{۴}{۵} - \frac{۲}{\sqrt{۵}} * \frac{۳}{۵} = \frac{-۲}{۵\sqrt{۵}} = \frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$$

مثال ۶ – عبارت $\cos(\sin^{-1} x)$ را به صورت یک عبارت جبری بر حسب x بنویسید.

پاسخ

فرض می کنیم $y = \sin^{-1} x$ باشد ، پس $\sin y = x$ است. می خواهیم یک عبارت جبری برای $\cos(\sin^{-1} x)$ پید ا کنیم. یعنی برای $\cos y$. چون $-\frac{\pi}{۲} \le y \le \frac{\pi}{۲}$ است ، پس $\cos y \ge 0$ است. و لذا

$$\cos y = \sqrt{۱ - \sin^۲ y} = \sqrt{۱ - x^۲}$$

در نتیجه

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{۱ - x^۲}$$

مثال ۷– درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۲}\cos^{-1} x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{۱ - x}{۱ + x}} \quad , \text{برای} \quad |x| < ۱$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = \cos^{-1} x$ باشد. می خواهیم نشان دهیم

$$\frac{۱}{۲} y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{۱ - x}{۱ + x}}$$

بر اساس فرمول نصف زاویه ، بخش ۲.۴ داریم.

$$\left|\tan\frac{y}{۲}\right| = \sqrt{\frac{۱ - \cos y}{۱ + \cos y}}$$

چون $y = \cos^{-1} x$ و $|x| < ۱$ است ، پس $0 < y < \pi$ است. و یا $0 < \frac{y}{۲} < \frac{\pi}{۲}$ است. در نتیجه $\tan\frac{y}{۲} > 0$ است و می توانیم نماد قدر مطلق را برداریم. پس داریم

$$\tan\frac{y}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - \cos y}{۱ + \cos y}}$$

چون $\cos y = x$ است ، پس می توان نوشت

$$\tan\frac{y}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - x}{۱ + x}}$$

معادله آخر معادل معادله زیر است.

$$\frac{y}{۲} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$$

نتیجه ای که می خواستیم بدست آوردیم.

مثال ۸ – ریشه های معادله زیر را در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ بدست آورید.

$$۵\sin^{۲} t + ۳\sin t - ۱ = 0$$

پاسخ

معادله را یک معادله درجه دوم به حساب می آوریم.

$$\sin t = \frac{-۳ \pm \sqrt{۹ + ۲۰}}{۱۰} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۲۹}}{۱۰}$$

با استفاده از تعریف تابع معکوس سینوس ، داریم.

$$t = \sin^{-1}\frac{۱}{۱۰}\left(-۳ + \sqrt{۲۹}\right)$$

و

$$t = \sin^{-1}\frac{۱}{۱۰}\left(-۳ - \sqrt{۲۹}\right)$$

برای بدست آوردن مقدار تقریبی ، ماشین حساب را در حالت رادیان می گذاریم و به طریق زیر عمل می کنیم.

عدد زیر را در ماشین حساب وارد کنید.

$$\frac{۱}{۱۰}\left(-۳ + \sqrt{۲۹}\right) \approx ۰/ ۲۳۸۵۱۶۵$$

سپس دکمه $sin^{-۱}$ یا $arcsin$ را فشار دهید. عدد ۰/ ۲۴۰۸۳۸ بدست می آورید ، پس

$$t \approx ۰/ ۲۴۰۸$$

است. به همین طریق

$$t = \sin^{-1}\frac{۱}{۱۰}\left(-۳ - \sqrt{۲۹}\right) \approx \sin^{-1}\left(-۰/ ۸۳۸۵۱۶۵\right) \approx -۰/ ۹۹۴۶$$

تمرینات ۲.۶

در تمرینات ۴ – ۱ بدون استفاده از ماشین حساب ، مقادیر عبارت ها را پیدا کنید.

۱) $(a)\ \sin^{-1}\frac{۱}{۲}$ $(b)\ \cos^{-1}\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $(a)\ \arcsin 0$ $(b)\ \arccos ۱$

۳) $(a)\ \arcsin(-۱)$ $(b)\ \arccos(-۱)$

۴) $(a)\ \arctan\sqrt{۳}$ $(b)\ \arctan\left(-\sqrt{۳}\right)$

در تمرینات ۷ – ۵ با استفاده از ماشین حساب ، مقادیر تقریبی عبارت ها را پیدا کنید.

۵) $\cos^{-1}(۰/۵۶۱۶)$

۶) $\sin^{-1}(-۰/۶۴۹۴)$

۷) $\arctan(۲/۱۷۷۵)$

در تمرینات ۱۳ – ۸ بدون استفاده از ماشین حساب ، مقادیر عبارت ها را پیدا کنید.

۸) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{۱}{۲}\right)$

۹) $\sin\left(\arccos\frac{۴}{۵}\right)$

۱۰) $\arcsin\left(\sin\frac{۵\pi}{۴}\right)$

۱۱) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{۴}{۵}+\tan^{-1}\frac{۳}{۴}\right)$

۱۲) $\tan\left(\arctan\frac{۴}{۳}+\arccos\frac{۸}{۱۷}\right)$

۱۳) $\sin\left[۲\arccos\left(-\frac{۳}{۵}\right)\right]$

پاسخ تمرینات ۲.۶

در تمرینات ۴ – ۱ بدون استفاده از ماشین حساب ، مقادیر عبارت ها را پیدا کنید.
توجه نماد $\Leftrightarrow$ همان مفهوم اگر فقط و فقط و یا شرط لازم و کافی را دارد.

۱) $(a)\ \sin^{-1}\frac{۱}{۲}$ $\qquad (b)\ \cos^{-1}\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$$(a)\quad \sin^{-1}\frac{۱}{۲}$$

$$y=\sin^{-1}\frac{۱}{۲}\quad\Leftrightarrow\quad \sin y=\frac{۱}{۲}$$
$$y=\frac{\pi}{۶}$$

$$(b)\quad \cos^{-1}\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$y=\cos^{-1}\frac{\sqrt{۳}}{۲}\quad\Leftrightarrow\quad \cos y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$y=\frac{\pi}{۶}$$

۲) $(a)\ \arcsin 0$ $\qquad (b)\ \arccos ۱$

$$(a)\quad \arcsin 0$$
$$y=\arcsin 0\quad\Leftrightarrow\quad \sin y=0$$
$$y=0$$
$$(b)\quad \arccos ۱$$
$$y=\arccos ۱\quad\Leftrightarrow\quad \cos y=۱$$
$$y=0$$

۳) $(a)\ \arcsin(-۱)$ $\qquad (b)\ \arccos(-۱)$

$$(a)\quad \arcsin(-۱)$$
$$y=\arcsin(-۱)\quad\Leftrightarrow\quad \sin y=-۱$$
$$y=-\frac{\pi}{۲}$$

$$(b)\quad \arccos(-۱)$$
$$y=\arccos(-۱)\quad\Leftrightarrow\quad \cos y=-۱$$
$$y=\pi$$

۴) $(a)\ \arctan\sqrt{۳}$ $(b)\ \arctan\left(-\sqrt{۳}\right)$

$$(a)\quad \arctan\sqrt{۳}$$

$$y=\arctan\sqrt{۳} \iff \tan y=\sqrt{۳}$$

$$y=\frac{\pi}{۳}$$

$$(b)\quad \arctan\left(-\sqrt{۳}\right)$$

$$y=\arctan\left(-\sqrt{۳}\right) \iff \tan y=-\sqrt{۳}$$

$$y=-\frac{\pi}{۳}$$

در تمرینات ۷ – ۵ با استفاده از ماشین حساب ، مقادیر تقریبی عبارت ها را پیدا کنید.
توجه :ابتدا ماشین حساب رابر حسب رادیان بگذارید ، عدد داخل پرانتز را وارد کنید و در نهایت کلید معکوس مثلثاتی مربوطه را فشار دهید. اگر ماشین حساب برحسب درجه باشد ، پاسخ ماشین حساب هم بر حسب درجه خواهد بود.

۵) $\cos^{-1}(۰/۵۶۱۶)$

$$t=\cos^{-1}(۰/۵۶۱۶)$$

$t\approx ۰/۹۷۴۴۷۸$ رادیان

۶) $\sin^{-1}(-۰/۶۴۹۴)$

$$t=\sin^{-1}(-۰/۶۴۹۴)$$

$t\approx -۰/۷۰۶۷۹۵۲$ رادیان

۷) $\arctan(۲/۱۷۷۵)$

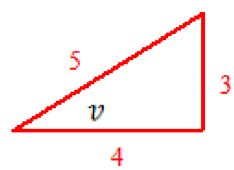
$t=\arctan(۲/۱۷۷۵)\approx ۱/۱۴۰۲۸۳۲$ رادیان

در تمرینات ۱۳ – ۸ بدون استفاده از ماشین حساب ، مقادیر عبارت ها را پیدا کنید.

۸) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{۱}{۲}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۹) $\sin\left(\arccos\frac{۴}{۵}\right)$

فرض می کنیم $v = \arccos\frac{۴}{۵}$ باشد ، پس با توجه به تصویر زیر داریم $\sin v = \frac{۳}{۵}$ است.



۱۰) $\arcsin\left(\sin\frac{۵\pi}{۴}\right)$

توجه داشته باشید که $\arcsin(x)$ و $\sin(x)$ معکوس یک دیگر هستند ، هنگامی که x در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ باشد. پس $\arcsin[\sin(x)] = x$ است اگر فقط و فقط x در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ باشد.

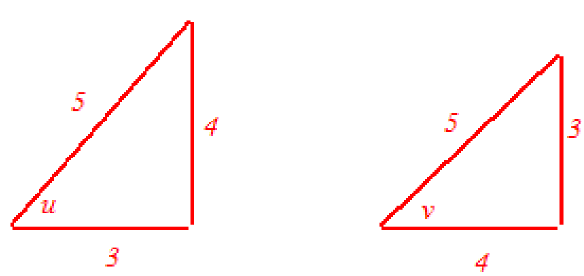
اما اینجا $\frac{۵\pi}{۴}$ خارج از دامنه است. پس نمی توانیم این اتحاد را مستقیما بکار بریم. اما می توانیم بنویسیم $\sin\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) = \sin\left(\pi - \frac{۵\pi}{۴}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$

لذا $\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$ در دامنه لازم قرار می گیرد. پس داریم.

$$\arcsin\left[\sin\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)\right] = \arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right)\right] = -\frac{\pi}{۴}$$

۱۱) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{۴}{۵} + \tan^{-1}\frac{۳}{۴}\right)$

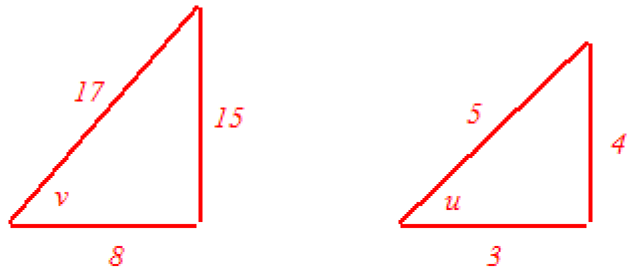
فرض می کنیم $u = \sin^{-1}\frac{۴}{۵}$ و $v = \tan^{-1}\frac{۳}{۴}$ باشد ، پس با توجه به تصویر زیر داریم.



$$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$$
$$= \frac{۳}{۵} * \frac{۴}{۵} - \frac{۴}{۵} * \frac{۳}{۵} = 0$$

$$۱۲)\ \tan\left(\arctan\frac{۴}{۳}+\arccos\frac{۸}{۱۷}\right)$$

فرض می کنیم $u=\arctan\frac{۴}{۳}$ و $v=\arccos\frac{۸}{۱۷}$ باشد. پس با توجه به تصویر زیر داریم.



$$\tan(u+v)=\frac{\tan u+\tan v}{۱-\tan u\tan v}=\frac{\frac{۴}{۳}+\frac{۱۵}{۸}}{۱-\frac{۴}{۳}*\frac{۱۵}{۸}}$$

$$=\frac{\frac{۳۲+۴۵}{۲۴}}{۱-\frac{۶۰}{۲۴}}=\frac{\frac{۷۷}{۲۴}}{\frac{-۳۶}{۲۴}}=-\frac{۷۷}{۲۴}$$

$$۱۳)\ \sin\left[۲\arccos\left(-\frac{۳}{۵}\right)\right]$$

روش اول

فرض می کنیم $t=\arccos\left(-\frac{۳}{۵}\right)$ باشد. پس $\cos t=-\frac{۳}{۵}$ و $\sin t=\frac{۴}{۵}$ است. میدانیم که

$$\sin(۲t)=۲\sin(t)\cos(t)$$

پس داریم.

$$\sin\left[۲\arccos\left(-\frac{۳}{۵}\right)\right]=\sin(۲t)=۲\sin t*\cos t$$

$$=۲\left(\frac{۴}{۵}\right)\left(-\frac{۳}{۵}\right)=-\frac{۲۴}{۲۵}$$

روش دوم

فرض می کنیم $x = \arccos\left(-\frac{۳}{۵}\right)$ باشد. پس $\cos x = -\frac{۳}{۵}$ است برای $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$
می دانیم که

$$\sin x = \sqrt{۱ - (\cos x)^{۲}} = \sqrt{۱ - \left(-\frac{۳}{۵}\right)^{۳}} = \frac{۴}{۵} \quad \left(\frac{\pi}{۲} < x < \pi\right)$$

$$\sin\left(۲ \arccos\left(-\frac{۳}{۵}\right)\right) = \sin ۲x = ۲ \sin x \cos x$$

$$= ۲\left(\frac{۴}{۵}\right) * \left(-\frac{۳}{۵}\right) = -\frac{۲۴}{۲۵}$$

فصل سوم
مثلث های غیر قائم الزاویه
Oblique Triangles

۳.۱ - قانون سینوس ها The Law of Sines

یک مثلث که دارای یک زاویه قائم نباشد ، بنام **مثلث غیر قائم الزاویه Oblique Triangle** موسوم است. اگر دو زاویه و یک ضلع و یا دو ضلع و یک زاویه مقابل یکی از آنها را بدانیم ، بقیه قسمت های یک مثلث غیر قائم الزاویه را با کمک فرمول هایی که در این بخش مورد بحث قرار می دهیم ، می توانیم پیدا کنیم.

همان طور که در فصل اول دیدیم ، حروف β, γ ، B, C, a, b, c, α ، A را برای قسمت های مختلف مثلث بکار می بریم.

فرض می کنیم مثلث ABC را داشته باشیم. زاویه α را در محل متعارف روی محور های مختصات قرار می دهیم ، بطوری که B در سمت مثبت محور x باشد. در تصویر A زاویه α یک زاویه منفرجه است. بحث زیر برای یک زاویه حاد α هم صادق است.

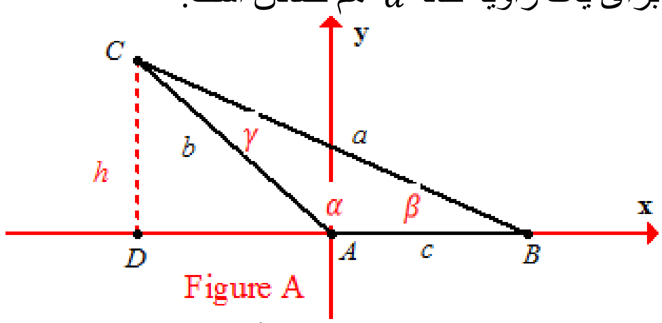


Figure A

خطی که از C به موازات محور y رسم شده در نظر بگیرید. این خط محور x را در نقطه D قطع می کند. فرض کنید $d(C,D) = h$ باشد ، پس مختصات نقطه C می شود (D,h) ، لذا داریم.

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad \text{یا} \quad h = b\sin\alpha$$

در مثلث BDC داریم

$$\sin\beta = \frac{h}{a} \quad \text{یا} \quad h = a\sin\beta$$

در نتیجه

$$b\sin\alpha = a\sin\beta$$

که می توان نوشت.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

حال اگر α در همان مکان متعارف باشد ، اما C در سمت مثبت محور x باشد ، داریم.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

دو تساوی بالا نتیجه زیر را به ما می دهد.

قانون سینوس ها The Law of Sines

اگر ABC یک مثلث غیر قائم الزاویه باشد و مطابق معمول نشان گذاری شود ، پس

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

قانون سینوس ها را می توان مطابق زیر هم نوشت.

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

مثال ۱ - در مثلث ABC داریم

$$\alpha=۴۸^\circ\ ۲۰'\ ،\ \gamma=۵۷^\circ\ ۳۰'\ ،\ b=۴۷/۳$$

بقیه قسمت های مثلث را بطور تقریب بدست آورید.

پاسخ

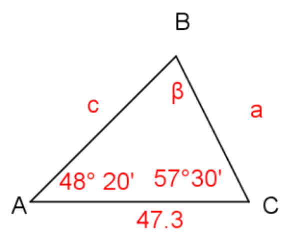


Figure B

$$\beta=۱۸۰^\circ-\left(۵۷^\circ\ ۳۰'+۴۸^\circ\ ۲۰'\right)=۷۴^\circ\ ۱۰'$$

چون

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

پس

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{(۴۷/۳)\sin ۴۸^\circ\ ۲۰'}{\sin ۷۴^\circ\ ۱۰'}$$

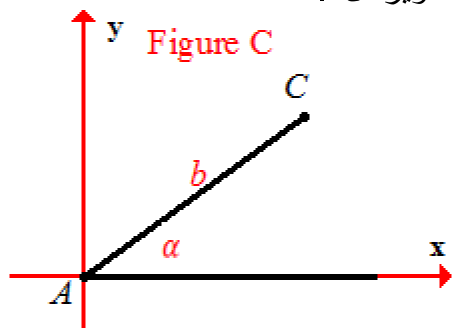
با استفاده از ماشین حساب داریم.

$$a\approx\frac{(۴۷/۳)(۰/۷۴۷۰)}{۰/۹۶۲۱}\approx ۳۶/۷$$

$$c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{(۴۷/۳)\sin ۵۷^\circ\ ۳۰'}{\sin ۷۴^\circ ۱۰'}$$

$$\approx\frac{(۴۷/۳)(۰/۸۴۳۴)}{۰/۹۶۲۱}\approx ۴۱/۵$$

اطلاعات مانند مثال ۱ همیشه یک مثلث منحصر به فرد ABC ایجاد می کند. اما اگر دو ضلع و یک زاویه **مقابل** یکی از آنها داده شود. همیشه یک مثلث منحصر به فرد بدست نمی آید .
برای نشان دادن این موضوع ، فرض کنید a و b قرار است طول های دو ضلع مثلث ABC باشند.
و فرض کنید $\angle\alpha$ زاویه مقابل ضلع بطول a باشد. فرض می کنیم $\angle a$ یک زاویه حاد باشد. زاویه a را در محل متعارف روی محور های مختصات قرار می دهیم. پاره خط AC بطول b روی ضلع انتهایی زاویه a جدا می کنیم. تصویر C .



راس سوم یعنی B باید یک جایی روی محور x باشد. چون طول ضلع a مقابل زاویه $\angle\alpha$ داده شده است ، B را می توان با رسم یک کمان بطول a و مرکز C پیدا کرد. چهار حالت ممکن است پیش بیاید. همان طور که در تصویر D ملاحظه می کنید. اینجا محور های مختصات پاک شده اند.

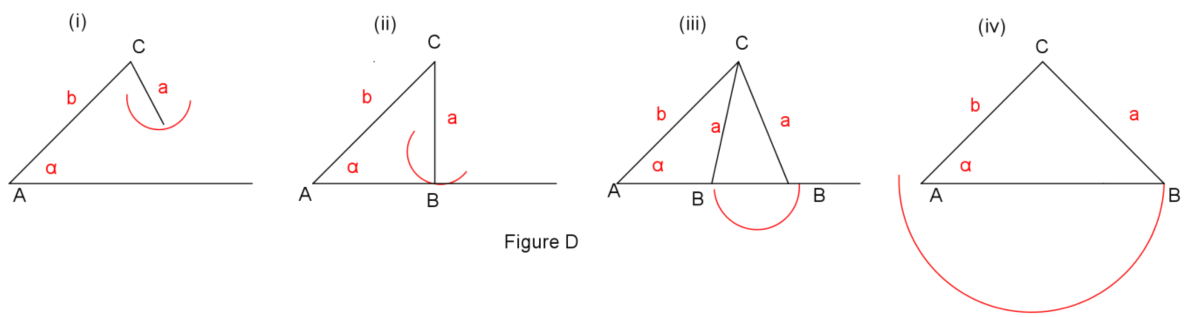


Figure D

چهار حالت ممکن در زیر ذکر می شود.

(i)

کمان رسم شده ، محور x را قطع نمی کند ، پس مثلثی درست نمی شود.

(ii)

کمان رسم شده با محور x مماس است ، پس یک مثلث قائم الزویه تشکیل می شود.

(iii)

کمان رسم شده قسمت مثبت محور x را در دو نقطه قطع می کند ، پس دو مثلث تشکیل می شود.

(iv)

کمان رسم شده هم قسمت مثبت و هم قسمت منفی محور x را قطع می کند ، پس یک مثلث تشکیل می شود.

حالت های بالا هنگامی مشخص می شوند که اقدام به حل مساله می کنیم. مثلا هنگام حل معادله زیر

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$$

فرض کنید $\sin\beta > ۱$ بدست بیاوریم. این مشخص می کند که مثلثی تشکیل نشده است.
اگر $\sin\beta = ۱$ بدست بیاوریم ، پس $\beta = ۹۰^\circ$ و لذا حالت دوم اتفاق افتاده است.
اگر $\sin\beta < ۱$ باشد ، پس دو حالت ممکن برای β وجود دارد. با امتحان کردن هر دو امکان ، روشن می شود که آیا حالت (iii) و یا (iv) اتفاق افتاده است.
اگر اندازه زاویه α بیش از ۹۰° باشد ، پس مثلث در صورتی تشکیل می شود که فقط $a > b$ باشد تصویر E

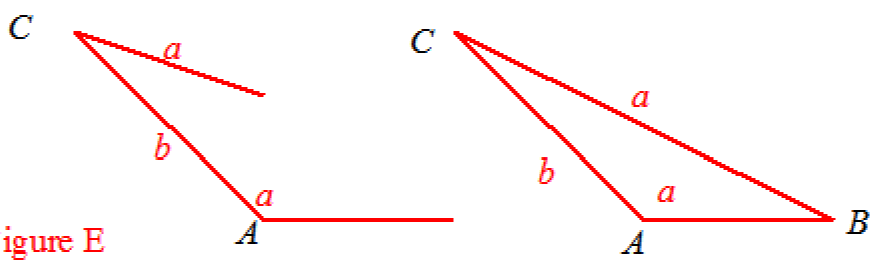


Figure E

چون هنگامی که اندازه دو ضلع و یک زاویه مقابل یکی از آنها داده می شود ، چندین امکان وجود دارد ، در این صورت به آن **حالت مبهم** **Ambiguous Case** گفته می شود.

مثال ۲– اگر در مثلث ABC داشته باشیم ،

$$\alpha = ۶۷^\circ \;،\; c = ۱۲۵ \;،\; a = ۱۰۰$$

بقیه اجزا مثلث را پیدا کنید.

پاسخ

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a} = \frac{(۱۲۵)\sin ۶۷^\circ}{۱۰۰}$$
$$\approx \frac{(۱۲۵)(۰/۹۲۰۵)}{۱۰۰} \approx ۱/۱۵۰۶$$

چون $\sin\gamma > ۱$ است ، مثلثی را نمی توان با اطلاعات داده شده ، رسم کرد.

مثال ۳ – اگر در مثلث ABC داشته باشیم ،

$$a = ۱۲/۴ \;،\; b = ۸/۷ \;،\; \beta = ۳۶^\circ ۴۰'$$

بقیه قسمت های مثلث را بطور تقریب پیدا کنید.

پاسخ

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} = \frac{(۱۲/۴)\sin ۳۶^\circ ۴۰'}{۸/۷}$$

$$\approx \frac{(۱۲/۴)(۰/۵۹۷۲)}{۸/۷} \approx ۰/۸۵۱۲$$

دو زاویه $\angle\alpha$ بین 0° و ۱۸۰° ممکن است وجود داشته باشد ، بطوری که $\sin\alpha = ۰/۸۵۱۲$ باشد.

اگر فرض کنیم $\angle\alpha'$ زاویه مرجع $\angle\alpha$ باشد ، با استفاده از ماشین حساب $\angle\alpha' \approx ۵۸^\circ ۲۰'$ بدست می آوریم. پس دو امکان برای $\angle\alpha$ مطابق زیر است.

$$\angle a_۱ \approx ۵۸^\circ ۲۰' \quad , \quad \angle a_۲ \approx ۱۲۱^\circ ۴۰'$$

اگر فرض کنیم $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ زاویه های سوم مثلث های مربوط به $\angle\alpha_۱$ و $\angle\alpha_۲$ باشند ، پس

$$\gamma_۱ \approx ۱۸۰^\circ - \left(۳۶^\circ ۴۰' + ۵۸^\circ ۲۰'\right) = ۸۵^\circ$$

و

$$\gamma_۲ \approx ۱۸۰^\circ - \left(۳۶^\circ ۴۰' + ۱۲۱^\circ ۴۰'\right) = ۲۱^\circ ۴۰'$$

پس دو مثلث با مشخصات داده شده وجود دارد. یکی $A_۱BC$ و دیگری $A_۲BC$

اگر $c_۱$ ضلع مقابل $\gamma_۱$ در مثلث $A_۱BC$ باشد ، پس

$$c_۱ = \frac{a\sin\gamma_۱}{\sin\alpha_۱} \approx \frac{(۱۲/۴)\sin ۸۵^\circ}{\sin ۵۸^\circ ۲۰^\circ}$$

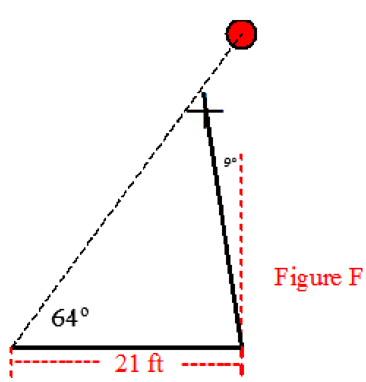
$$\approx \frac{(۱۲/۴)(۰/۹۹۶۲)}{۰/۸۵۱۱} \approx ۱۴/۵$$

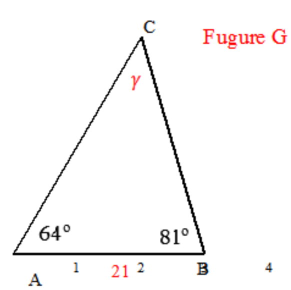
اگر $c_۲$ ضلع مقابل زاویه $\gamma_۲$ در مثلث $A_۲BC$ باشد ، پس

$$c_۲ = \frac{a\sin\gamma_۲}{\sin\alpha_۲} \approx \frac{(۱۲/۴)\sin ۲۱^\circ ۴۰'}{\sin ۱۲۱^\circ ۴۰'}$$

$$\approx \frac{(۱۲/۴)(۰/۳۶۹۲)}{۰/۸۵۱۱} \approx ۵/۴$$

مثال ۴ - هنگامی که زاویه فراز خورشید ۶۴° است ، یک تیر تلفن که با زاویه ۹° نسبت به خورشید





کج شده است ، سایه ای به طول ۲۱ فوت روی زمین مسطح ایجاد می کند. تصویر F. طول تقریبی تیر تلفن را پیدا کنید.

پاسخ

به تصویر G که در رابطه با اطلاعات داده شده ترسیم کرده ایم ، توجه کنید. ملاحظه می کنید که حساب کرده ایم $\beta = ۹۰^\circ - ۹^\circ = ۸۱^\circ$ پس

$$\gamma = ۱۸۰^\circ - \left(۶۴^\circ + ۸۱^\circ\right) = ۱۸۰^\circ - ۱۴۵^\circ = ۳۵^\circ$$

طول ضلع BC , طول a در مثلث ABC در تصویر G می باشد. پس

$$\frac{a}{\sin ۶۴^\circ} = \frac{۲۱}{\sin\gamma}$$

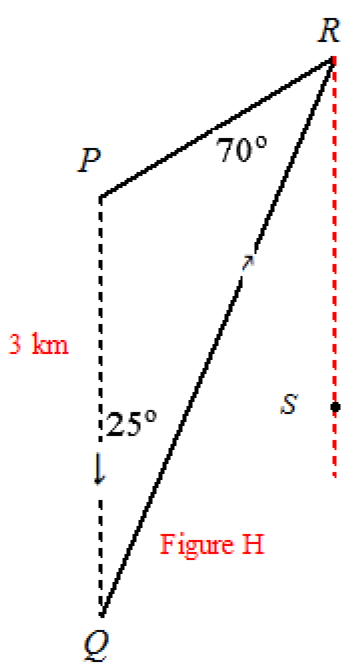
چون $\gamma = ۳۵^\circ$ پس داریم.

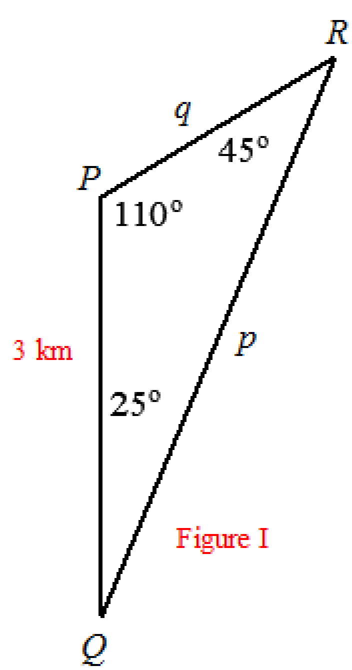
$$a = \frac{(۲۱)\sin ۶۴^\circ}{\sin ۳۵^\circ} = \frac{(۲۱)(۰/۸۹۸۸)}{۰/۵۷۳۶} \approx ۳۳$$

پس تیر تلفن تقریبا ۳ ۳ فوت است.

مثال ۵ – یک نقطه P روی زمین مسطح ۳ کیلو متری شما ل یک نقطه Q است. یک دونده از نقطه Q در جهت ۲۵° شمال شرقی به طرف یک نقطه R حرکت می کند. و سپس در جهت ۷۰° جنوب غربی از R به P می رود. مسافت پیموده شده را بطور تقریب بدست آورید.

پاسخ





در تصویر H مسیر دونده به رنگ سیاه همراه با خط شمال به جنوب از R به S به رنگ قرمز ملاحظه می کنید. چون PQ و RS موازی هستند ، پس بر اساس آنچه در هندسه خوانده ایم ، داریم

$$\angle PQR = \angle QRS = ۲۵^{\circ}$$

پس

$$\angle PRQ = ۷۰^{\circ} - ۲۵^{\circ} = ۴۵^{\circ}$$

این اطلاعات، مثلث PQR در تصویر I را به ما میدهد. پس داریم

$$\simeq \angle QPR = ۱۸۰^{\circ} - \left(۲۵^{\circ} + ۴۵^{\circ}\right) = ۱۸۰^{\circ} - ۷۰^{\circ} = ۱۱۰^{\circ}$$

با استفاده از قانون سینوس ها دو مرتبه داریم.

$$\frac{q}{\sin ۲۵^{\circ}} = \frac{۳}{\sin ۴۵^{\circ}} \quad و \quad \frac{p}{\sin ۱۱۰^{\circ}} = \frac{۳}{\sin ۴۵^{\circ}}$$

پس

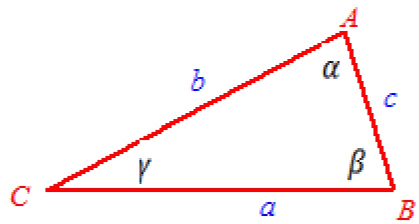
$$q = \frac{(۳)\sin ۲۵^{\circ}}{\sin ۴۵^{\circ}} \approx \frac{(۳)(۰/۴۲۲۶)}{۰/۷۰۷۱} \approx ۱/۸$$

$$p = \frac{(۳)\sin ۱۱۰^{\circ}}{\sin ۴۵^{\circ}} \approx \frac{(۳)(۰/۹۳۹۷)}{۰/۷۰۷۱} \approx ۴$$

پس مسافت پیموده شده تقریبا $p + q = ۴ + ۱/۸ = ۵/۸$ کیلو متر است.

تمرینات ۳.۱

در تمرینات زیر ، با توجه به تصویر مثلث ABC و اطلاعات داده شده ، قسمت خواسته شده را پیدا کنید. توجه داشته باشید که ممکن است تمام زاویه ها حاد باشند و یا یکی از آنها منفرجه. تصویر زیر فقط جهت یاد اوری در مورد نام گذاری زاویه ها و اضلاع آورده شده است.



۱) $\gamma = ۳۳^\circ$ ، $\beta = ۶۷^\circ$ $c = ۵$, $b = ?$

۲) $a = ۱۱$, $c = ۵$ ، $\gamma = ۲۵^\circ$, $\angle a = ?$

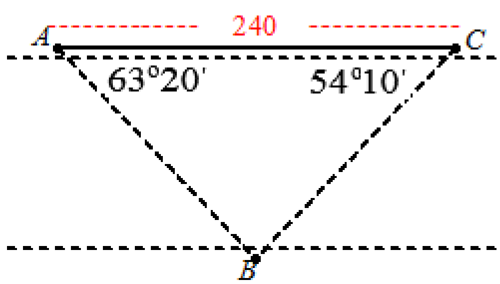
۳) $a = ۱۱۴^\circ$ ، $\gamma = ۲۹^\circ$ ، $c = ۹$ ، $a = ؟$

در تمرینات زیر بقیه قسمت های مثلث ABC را بطور تقریب بدست آورید.

۴) $\angle a = ۴۱^\circ$ ، $\gamma = ۷۷^\circ$ ، $a = ۱۰/۵$

۵) $\angle a = ۲۷^\circ ۴۰'$ ، $\beta = ۵۲^\circ ۱۰'$ ، $a = ۳۲/۴$

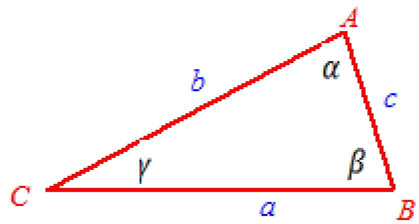
۶ – یک مهندس می خواهد فاصله بین دو نقطه A و B که در ساحل های مخالف یک رودخانه قرار دارند ، پیدا کند. یک پاره خط AC به طول ۲۴۰ یارد در یک طرف رود خانه رسم می کند بطوری که اندازه زاویه ها BAC و ACB به ترتیب $۶۳^\circ ۲۰'$ و $۵۴^\circ ۱۰'$ باشند. تصویر زیر. فاصله بین A و B را بطور تقریب بدست آورید.



۷ – آقای هوشمند می خواهد ارتفاع یک درخت را پیدا کند. دقیقا ۱۰۰یارد از پایه درخت دور می شود و به بالا نگاه می کند. زاویه از سطح زمین تا بالای درخت ۳۳° است. این درخت مستقیم رشد نکرده ، بلکه نسبت به سطح زمین زاویه ۸۳° ایجاد کرده است. ارتفاع درخت را پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۳.۱

در تمرینات زیر ، با توجه به تصویر مثلث ABC و اطلاعات داده شده ، قسمت خواسته شده را پیدا کنید. توجه داشته باشید که ممکن است تمام زاویه ها حاد باشند و یا یکی از آنها منفرجه. تصویر زیر فقط جهت یاد اوری در مورد نام گذاری زاویه ها و اضلاع آورده شده است.



۱) $\gamma = ۳۳^\circ$ ، $\beta = ۶۷^\circ$ $c = ۵$, $b = ?$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{۵}{\sin\left(۳۳^\circ\right)} = \frac{b}{\sin\left(۶۷^\circ\right)}$$

$$b = \frac{(۵)\sin\left(۶۷^\circ\right)}{\sin\left(۳۳^\circ\right)} \approx ۸/۴۵$$

۲) $a = ۱۱$, $c = ۵$ ، $\gamma = ۲۵^\circ$, $\angle a = ?$

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{۱۱}{\sin a} = \frac{۵}{\sin\left(۲۵^\circ\right)}$$

$$۱۱\sin\left(۲۵^\circ\right) = ۵\sin a$$

$$\sin a = \frac{(۱۱)\sin\left(۲۵^\circ\right)}{۵}$$

$$a = \sin^{-1}\left(\frac{(۱۱)\sin\left(۲۵^\circ\right)}{۵}\right) \approx ۶۸/۴^\circ$$

۳) $a = ۱۱۴^{\circ}$ ، $\gamma = ۲۹^{\circ}$ ، $c = ۹$ ، $a = ?$

$$\frac{c}{\sin\ \gamma} = \frac{a}{\sin a}$$

$$\frac{۹}{\sin\left(۲۹^{\circ}\right)} = \frac{a}{\sin\left(۱۱۴^{\circ}\right)}$$

$$a = \frac{(۹)\sin\left(۱۱۴^{\circ}\right)}{\sin\left(۲۹^{\circ}\right)} \approx ۱۷$$

در تمرینات زیر بقیه قسمت های مثلث ABC را بطور تقریب بدست آورید.

۴) $\angle a = ۴۱^{\circ}$ ، $\gamma = ۷۷^{\circ}$ ، $a = ۱۰/۵$

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin\left(۴۱^{\circ}\right)}{۱۰/۵} = \frac{\sin\left(۷۷^{\circ}\right)}{c}$$

$$c = \frac{(۱۰/۵)\sin\left(۷۷^{\circ}\right)}{\sin\left(۴۱^{\circ}\right)} \approx ۱۵/۶$$

$$\beta = ۱۸۰^{\circ} - \left(۴۱^{\circ} + ۷۷^{\circ}\right) = ۶۲^{\circ}$$

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

$$\frac{\sin\left(۴۱^{\circ}\right)}{۱۰/۵} = \frac{\sin\left(۶۲^{\circ}\right)}{b}$$

$$b = \frac{(۱۰/۵)\sin\left(۶۲^{\circ}\right)}{\sin\left(۴۱^{\circ}\right)} \approx ۱۴/۱$$

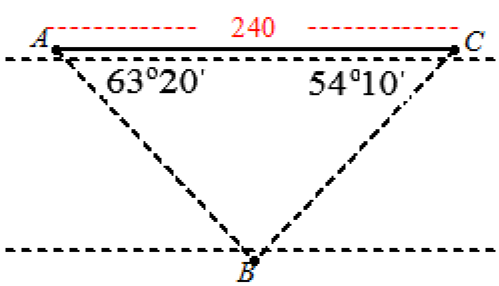
۵) $\angle a = ۲۷^\circ\ ۴۰' \ ،\ \beta = ۵۲^\circ ۱۰' \ ،\ a = ۳۲/۴$

$$\gamma = ۱۷۹^\circ ۶۰' - \left(۲۷^\circ\ ۴۰' + ۵۲^\circ ۱۰'\right) = ۱۰۰^\circ\ ۱۰'$$

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$
$$\frac{\sin\left(۲۷^\circ ۴۰'\right)}{۳۲/۴} = \frac{\sin\left(۵۲^\circ ۱۰'\right)}{b}$$
$$b = \frac{(۳۲/۴)\sin\left(۵۲^\circ ۱۰'\right)}{\sin\left(۲۷^\circ ۴۰'\right)} \approx ۵۵/۱$$

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$
$$\frac{\sin\left(۲۷^\circ ۴۰'\right)}{۳۲/۴} = \frac{\sin\left(۱۰۰^\circ\ ۱۰'\right)}{c}$$
$$c = \frac{(۳۲/۴)\sin\left(۱۰۰^\circ\ ۱۰'\right)}{\sin\left(۲۷^\circ ۴۰'\right)} \approx ۶۷/۷$$

۶ – یک مهندس می خواهد فاصله بین دو نقطه A و B که در ساحل های مخالف یک رودخانه قرار دارند ، پیدا کند. یک پاره خط AC به طول ۲۴۰ یارد در یک طرف رود خانه رسم می کند بطوری که اندازه زاویه ها BAC و ACB به ترتیب $۶۳^\circ\ ۲۰'$ و $۵۴^\circ\ ۱۰'$ باشند. تصویر زیر. فاصله بین A و B را بطور تقریب بدست آورید.



پاسخ

زاویه ها را چنین نام گذاری می کنیم.

$$\angle ABC = \beta \ ،\ \angle BAC = a \ ،\ \angle BCA = \gamma$$

اضلاع را هم چنین نام گذاری می کنیم.

$$AB = c \ ،\ AC = b \ ,\ BC = a$$

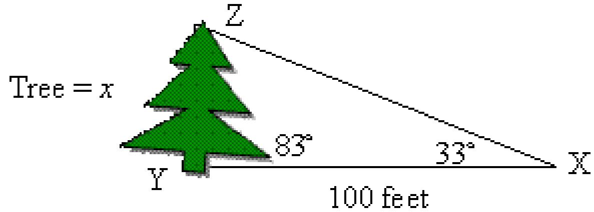
$$\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

$$c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{(۲۴۰)\sin(۵۴/۱۷^{\circ})}{\sin(۶۲.۵^{\circ})}=۲۱۹ \text{ یارد}$$

۷ – آقای هوشمند می خواهد ارتفاع یک درخت را پیدا کند. دقیقا ۱۰۰ فوت از پایه درخت دور می شود و به بالا نگاه می کند. زاویه از سطح زمین تا بالای درخت $^{\circ}$۳۳ است. این درخت مستقیم رشد نکرده ، بلکه نسبت به سطح زمین زاویه $^{\circ}$۸۳ ایجاد کرده است. ارتفاع درخت را پیدا کنید.

پاسخ

تصویر زیر را بر اساس اطلاعات داده شده رسم می کنیم.



زوایای بدست آمده را چنین نام گذاری می کنیم.

$$\angle X=۳۳^{\circ}\quad ,\qquad \angle Y=۸۳^{\circ}\ ،\ \angle Z=۱۸۰^{\circ}-\left(۳۳^{\circ}+۸۳^{\circ}\right)=۶۴^{\circ}$$

ارتفاع درخت را هم x می نامیم. با حرف کوچک.

$$\frac{۱۰۰}{\sin Z}=\frac{x}{\sin X}$$

$$\frac{۱۰۰}{\sin(۶۴^{\circ})}=\frac{x}{\sin(۳۳^{\circ})}$$

$$x=\frac{(۱۰۰)\sin(۳۳^{\circ})}{\sin(۶۴^{\circ})}\approx ۶۰/۶ \text{ فوت}$$

۳.۲- قانون کسینوس ها The Law of Cosines

اگر دو ضلع و زاویه بین آنها $Included\ Angle$ و یا سه ضلع یک مثلث را داشته باشیم ، نمی توانیم قانون سینوس ها را مستقیما بکار بریم و بقیه قسمت های مثلث را بدست آوریم. اما می توانیم قانون زیر را بکار بریم.

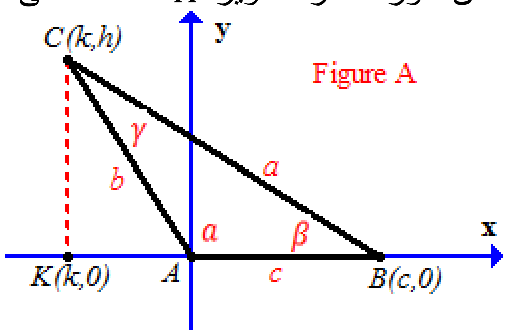
قانون کسینوس ها The Law of Cosines

اگر ABC یک مثلث باشد که طبق معمول متداول نام گذاری شده باشد ، پس

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos\alpha$$
$$b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} - ۲ac\cos\beta$$
$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos\gamma$$

اثبات

فرمول اول را ثابت می کنیم. اگر مثلث ABC داشته باشیم ، زاویه α را در محل متعارف روی محور های مختصات قرار می دهیم. همان طور که در تصویر A ملاحظه می کنید.



گر چه در این تصویر زاویه α منفرجه است ، بحث ما در مورد زاویه حاد هم صادق است. خطی که از C به موازات محور y رسم شده و محور x را در نقطه $K(k,0)$ قطع می کند ، در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم $d(C,k) = h$ باشد ، پس مختصات C می شود (k,h). لذا

$$\cos\alpha = \frac{k}{b} \quad \text{و} \quad \sin\alpha = \frac{h}{b}$$

و در نتیجه

$$k = b\cos\alpha \quad \text{و} \quad h = b\sin\alpha$$

چون پاره خط AB دارای طول c است ، پس مختصات B می شود $(c,0)$ ، با استفاده از فرمول مسافت داریم.

$$a^{۲} = [d(B,C)]^{۲} = (k-c)^{۲} + (h-0)^{۲}$$

k و h را به ترتیب بوسیله $b\cos a$ و $h\sin a$ جانشین می کنیم، پس

$$a^{۲} = (b\cos a - c)^{۲} + (b\sin a)^{۲}$$
$$= b^{۲}\cos^{۲} a - ۲bc\cos a + c^{۲} + b^{۲}\sin^{۲} a$$
$$= b^{۲}\left(\cos^{۲} a + \sin^{۲} a\right) + c^{۲} - ۲bc\cos a$$
$$= b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos a$$

اولین فرمول قانون کسینوس ها را ثابت کردیم. برای اثبات فرمول های دوم و سوم ، به ترتیب زاویه های β و γ را در محل متعارف روی محور های مختصات قرار دهید ، مطابق مراحل بالا عمل کنید.

توجه داشته باشید که در تصویر A اگر $\alpha = ۹۰^\circ$ باشد ، پس $\cos \alpha = 0$ است و قانون کسینوس ها تبدیل می شود به $a^۲ = b^۲ + c^۲$.لذا قضیه فیثاغورث یک حالت مخصوص قانون کسینوس ها می باشد.
بجای حفظ کردن قانون کسینوس ها ، می توانید جمله زیر را بخاطر بیاورید.

شکل جایگزین قانون کسینوس ها Alternative Form of The Law of Cosines
مربع هر ضلع یک مثلث مساوی است با مجموع مربع دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب دو ضلع دیگر و کسینوس زاویه بین آنها .

مثال ۱ – اگر در مثلث ABC داشته باشیم ، $\beta = ۷۷^\circ ۱۰'$ ، $c = ۸$, $a = ۵$ بقیه اجزا مثلث را بطور تقریب پیدا کنید. تصویر B

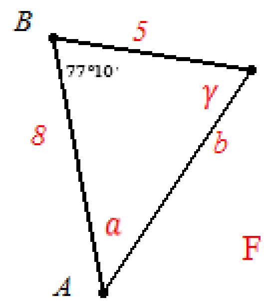


Figure B

پاسخ

$$b^۲ = ۵^۲ + ۸^۲ - ۲(۵)(۸)\cos ۷۷^\circ ۱۰'$$
$$\approx ۲۵ + ۶۴ - (۸۰)(۰/۲۲۲۱) \approx ۷۱/۲$$
$$b \approx \sqrt{۷۱/۲} \approx ۸/۴۴ \approx ۸/۴$$

حالا قانون سینوس ها را بکار می بریم.

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} \approx \frac{(۵)\sin ۷۷^\circ ۱۰'}{۸/۴۴} \approx \frac{(۵)(۰/۹۷۵۰)}{۸/۴۴} \approx ۰/۵۷۷۶$$

با استفاده از ماشین حساب داریم. $\alpha = ۳۵^\circ ۲۰'$

$$\gamma \approx ۱۸۰^\circ - \left(۷۷^\circ ۱۰' + ۳۵^\circ ۲۰'\right) = ۶۷^\circ ۳۰'$$

در مثال ۱ بعد از این که ضلع سوم را پیدا کردیم ، قانون سینوس ها را برای پیدا کردن زاویه دوم بکار بردیم. هنگامی که این مراحل را طی می کنیم ، همان طور که در بالاعمل کردیم ، بهتر است زاویه مقابل کوچک ترین ضلع را پیدا کنیم. زیرا این زاویه همیشه حاد خواهد بود. البته قانون کسینوس ها را می‌توان برای پیدا کردن بقیه زاویه ها ، بکار برد.

مثال ۲– برای مثلث ABC با اضلاع

$$a = ۹۰ \ ، \ b = ۷۰ \ ، \ c = ۴۰$$

اندازه زاویه های γ ، β ، ، a را پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا زاویه روبروی برزگ ترین ضلع را پیدا می کنیم. زیرا ممکن است آن زاویه منفرجه باشد.

$$\cos a = \frac{b^{۲} + c^{۲} - a^{۲}}{۲bc} = \frac{۴۹۰۰ + ۱۶۰۰ - ۸۱۰۰}{۵۶۰۰} \approx -۰/۲۸۵۷$$

با استفاده از ماشین حساب ، $a = \arccos(-۰/۲۸۵۷) \approx ۱۰۶/۶۰$

ممکن است ماشین حساب شما مستقیما زاویه $a = ۱۰۶^{\circ}۴۰'$ را به شمابدهد و یا اندازه زاویه را به صورت اعشاری به شما داده می شود و باید قسمت اعشاری را به دقیقه تبدیل کنید.

$$\cos \beta = \frac{a^{۲} + c^{۲} - b^{۲}}{۲ac} = \frac{۸۱۰۰ + ۱۶۰۰ - ۴۹۰۰}{۷۲۰۰} \approx ۰/۶۶۶۷$$

پس $\beta = \arccos(۰/۶۶۶۷) \approx ۴۸^{\circ}۱۰'$

$$\gamma = ۱۸۰^{\circ} - \left(۱۰۶^{\circ}۴۰' + ۴۸^{\circ}۱۰'\right) = ۲۵^{\circ}۱۰'$$

مثال ۳ – یک متوازی الضلاع به ابعاد $۳۰\,cm$ و $۷۰\,cm$ و اندازه یکی از زاویه ها ۶۵° داریم. اندازه تقریبی هر کدام از قطر ها را پید کنید.

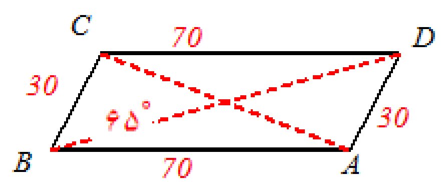


Figure C

پاسخ

متوازی الضلاع و قطر های AC و BD در تصویر C ملاحظه می کنید. چون زاویه های روبرو با هم مساوی هستند ، پس

$$\angle BAD = ۱۸۰^{\circ} - ۶۵^{\circ} = ۱۱۵^{\circ}$$

با استفاده از قانون کسینوس ها برای مثلث ABC داریم.

$$(AC)^{۲} = (۳۰)^{۲} + (۷۰)^{۲} - ۲(۳۰)(۷۰)\cos ۶۵^{\circ}$$
$$= ۹۰۰ + ۴۹۰۰ - ۴۲۰۰\,(۰/۴۲۲۶) \approx ۴۰۲۵/۱$$
$$AC \approx \sqrt{۴۰۲۵/۱} \approx ۶۳/۴۴ \approx ۶۳$$

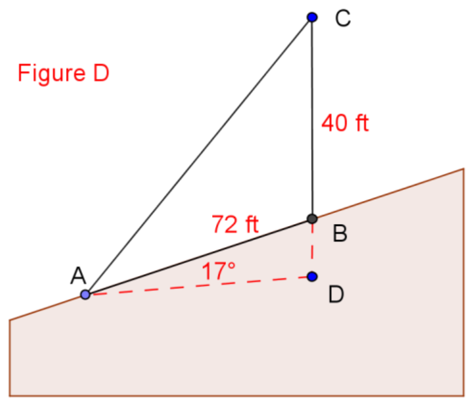
به همین طریق ، با استفاده از مثلث BAD داریم.

$$(BD)^{۲} = (۳۰)^{۲} + (۷۰)^{۲} - ۲(۳۰)(۷۰)\cos ۱۱۵^{\circ}$$

$$\approx ۹۰۰ + ۴۹۰۰ - ۴۲۰۰\left(-۰/۴۲۲۶\right) \approx ۷۵۷۴/۹$$
$$BD \approx \sqrt{۷۵۷۴/۹} \approx ۸۷$$

مثال ۴ ــ یک تیرک به ارتفاع ۴۰ فوت بطور عمودی روی یک تپه که با افق زاویه ۱۷° ایجاد می کند ، قرار دارد. می خواهیم یک کابل از بالای تیرک تا پایین تپه نصب کنیم. اگر فاصله انتهای تیرک تا پایین تپه ۷۲ فوت باشد ، حد اقل چه مقدار کابل لازم است؟

پاسخ



تصویر D اطلاعات داده شده را تصویر می کند. می خواهیم AC را پیدا کنیم. با توجه به تصویر ملاحظه می کنید که

$$\angle ABD = ۹۰^{\circ} - ۱۷^{\circ} = ۷۳^{\circ} \quad \text{و} \quad \angle ABC = ۱۸۰^{\circ} - ۷۳^{\circ} = ۱۰۷^{\circ}$$

با استفاده از قانون کسینوس ها برای مثلث ABC داریم.

$$(AC)^{۲} = \left(۷۲\right)^{۲} + \left(۴۰\right)^{۲} - ۲\left(۷۲\right)\left(۴۰\right)\cos ۱۰۷^{\circ}$$
$$\approx ۵۱۸۴ + ۱۶۰۰ - ۵۷۶۰\left(-۰/۲۹۲۴\right) \approx ۸۴۶۸$$
$$AC \approx \sqrt{۸۴۶۸} \approx ۹۲ \text{ فوت}$$

قانون کسینوس ها را می توان بکار برد و فرمول جالبی برای مساحت یک مثلث استخراج کرد. ابتدا یک نتیجه مقدماتی را اثبات می کنیم.
اگر مثلث ABC داشته باشیم ، زاویه α را در مکان متعارف قرار می دهیم. مانند تصویر A همانطور که در اثبات قانون کسینوس ها نشان دادیم ، ارتفاع h از راس C عبارت است از $h = b\sin\alpha$. چون می دانیم مساحت مثلث عبارت است از $\mathcal{A} = \frac{۱}{۲}ch$, پس

$$\mathcal{A} = \frac{۱}{۲}bc\sin\alpha$$

بحث ما در مورد یک زاویه مخصوص نیست که باید در مکان متعارف قرار داده شود. با قرار دادن β و γ هم به ترتیب فرمول های $\mathcal{A} = \frac{۱}{۲}ac\sin\beta$ و $\mathcal{A} = \frac{۱}{۲}ab\sin\gamma$ بدست می آید.

مساحت یک مثلث Area of a Triangle
مساحت یک مثلث مساوی است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع و سینوس زاویه بین آنها.

مثال ۵ – در مثلث ABC داریم. $a = ۲/۲۰\ cm$ و $b = ۱/۳۰\ cm$ و $\gamma = ۴۳^{\circ}۱۰'$
مساحت تقریبی مثلث را پیدا کنید.
پاسخ

$$\mathcal{A} = \frac{۱}{۲} ab \sin\gamma$$

$$\mathcal{A} = \frac{۱}{۲}(۲/۲)(۱/۳) \sin ۴۳^{\circ}۱۰'$$

$$\approx (۱/۴۳)(۰/۶۸۴۱) \approx ۰/۹۸ \text{ سانتی متر مربع}$$

فرمول هرون Heron's Formula
مساحت مثلث ABC به اضلاع $a\ ,\ b\ ,\ c$ مطابق زیر است.

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

در فرمول بالا $s = \frac{۱}{۲}(a+b+c)$ است.

مثال ۶ – یک کشاورز زمینی به ابعاد یارد ۲۲۵ ، یارد ۱۶۰ ، یارد ۱۲۵ دارد. مساحت تقریبی زمین را پیدا کنید.
پاسخ
فرض می کنیم

$$a = ۱۲۵\ ,\quad b = ۱۶۰\ ،\ c = ۲۲۵$$

باشد ، پس

$$s = \frac{۱}{۲}(۱۲۵ + ۱۶۰ + ۲۲۵) = \frac{۱}{۲}(۵۱۰) = ۲۵۵$$

$$s - a = ۲۵۵ - ۱۲۵ = ۱۳۰$$

$$s - b = ۲۵۵ - ۱۶۰ = ۹۵$$

$$s - c = ۲۵۵ - ۲۲۵ = ۳۰$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{(۲۵۵)(۱۳۰)(۹۵)(۳۰)} \approx ۹۷۲۰ \text{ یارد مربع}$$

تمرینات ۳.۲

در تمرینات زیر مقدار تقریبی بقیه قسمت های مثلث را پیدا کنید.

۱) $\alpha = ۶۰^\circ$ ، $b = ۲۰$ ، $c = ۳۰$

۲) $\gamma = ۱۱۵^\circ ۱۰'$ ، $a = ۱/۱۰$ ، $b = ۲/۱۰$

۳) $a = ۲$ ، $b = ۳$ ، $c = ۴$

۴) $a = ۲۵$ ، $b = ۸۰$ ، $c = ۶۰$

۵ – طول دو ضلع یک مثلث عبارت است از فوت ۱۵۰ ، فوت ۱۷۵ و زاویه بین آنها $۷۳^\circ ۴۰'$, ضلع سوم را پیدا کنید.

۶ – یک کشتی بندر را در ساعت یک بعد از ظهر ترک می کند و با سرعت ۲۴ مایل در ساعت در جهت ۳۵° جنوب شرقی حرکت می کند. یک کشتی دیگر در ساعت $۱/۵$ بعد از ظهر از همان نقطه باسرعت ۱۸ مایل در ساعت در جهت ۲۰° جنوب غربی بندر را ترک می کند. بطور تقریب این دو کشتی در ساعت سه بعد از ظهر ، چه مسافتی با هم فاصله دارند.

در تمرینات زیر مساحت مثلث ABC را بطور تقریب ، بدست آورید.

۷) $\alpha = ۶۰^\circ$ ، $b = ۲۰$ ، $c = ۳۰$

۸) $\beta = ۱۵۰^\circ$ ، $a = ۱۵۰$ ، $c = ۳۰۰$

پاسخ تمرینات ۳.۲
در تمرینات زیر مقدار تقریبی بقیه قسمت های مثلث را پیدا کنید.

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma$$

۱) $\alpha = ۶۰^\circ$ ، $b = ۲۰$ ، $c = ۳۰$

پاسخ

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\alpha$$
$$a^۲ = (۲۰)^\circ + (۳۰)^۲ - ۲(۲۰)(۳۰)\cos ۶۰^\circ$$
$$= ۴۰۰ + ۹۰۰ - (۱۲۰۰)\frac{۱}{۲} = ۷۰۰$$
$$a = \sqrt{۷۰۰} \approx ۲۶$$

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\beta$$
$$۲ac\cos\beta = a^۲ + c^۲ - b^۲$$
$$\cos\beta = \frac{۶۷۶ + ۹۰۰ - ۴۰۰}{۲(۲۶)(۳۰)} \approx ۰/۷۵$$
$$\beta = \arccos(۰/۷۵) \approx ۴۱^\circ$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\gamma$$
$$\cos\gamma = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab} = \frac{۶۷۶ + ۴۰۰ - ۹۰۰}{۲(۲۶)(۲۰)} \approx ۰/۱۷$$
$$\gamma = \arccos(۰/۱۷) \approx ۸۰$$

۲) $\gamma = ۱۱۵^\circ ۱۰'$ ، $a = ۱/۱۰$ ، $b = ۲/۱۰$

پاسخ

$$۱۱۵^\circ ۱۰' = ۱۱۵/۱۶^\circ$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\gamma$$
$$c^۲ = (۱/۱۰)^۲ + (۲/۱۰)^۲ - ۲(۱/۱۰)(۲/۱۰)\cos ۱۱۵/۱۶^\circ$$
$$= ۱/۲۱ + ۴/۴۱ - ۴/۶۲\cos ۱۱۵/۱۶ \approx ۷/۵۸$$
$$c \approx \sqrt{۷/۵۸} \approx ۲/۷۵$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} = \frac{(۲/۱۰)^۲ + (۲/۷۵)^۲ - (۱/۱۰)^۲}{۲(۲/۱۰)(۲/۷۵)}$$

$$= \frac{۴/۴۱ + ۷/۵۶ - ۱/۲۱}{۲(۲/۱۰)(۲/۷۵)} \approx ۰/۹۳$$

$$\alpha = \arccos(۰/۹۳) \approx ۲۱/۵۷^\circ \approx ۲۱^\circ ۱۰'$$

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} = \frac{(۱/۱۰)^۲ + (۲/۷۵)^۲ - (۲/۱۰)^۲}{۲(۱/۱۰)(۲/۷۵)}$$

$$= \frac{۱/۲۱ + ۷/۵۶ - ۴/۴۱}{۲(۱/۱۰)(۲/۷۵)} \approx ۰/۷۲$$

$$\beta \approx \arccos(۰/۷۲) \approx ۴۳/۹۴^\circ \approx ۴۳^\circ ۴۰'$$

۳) $a = ۲$ ، $b = ۳$ ، $c = ۴$

پاسخ

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} = \frac{۳^۲ + ۴^۲ - ۲^۲}{۲(۳)(۴)} = \frac{۹ + ۱۶ - ۴}{۲۴}$$

$$\frac{۲۱}{۲۴} \approx ۰/۸۷$$

$$\alpha \approx \arccos(۰/۸۷) \approx ۲۹^\circ$$

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} = \frac{۴ + ۱۶ - ۹}{۲(۲)(۴)} = \frac{۱۱}{۱۶} \approx ۰/۶۸$$

$$\beta \approx \arccos(۰/۶۸) \approx ۴۷^\circ$$

$$\gamma = ۱۸۰^\circ - (۲۹^\circ + ۴۷^\circ) = ۱۰۴^\circ$$

۴) $a = ۲۵$ ، $b = ۸۰$ ، $c = ۶۰$

پاسخ

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} = \frac{۸۰^۲ + ۶۰^۲ - ۲۵^۲}{۲(۸۰)(۶۰)}$$

$$= \frac{۶۴۰۰ + ۳۶۰۰ - ۶۲۵}{۹۶۰۰} = \frac{۹۳۷۵}{۹۶۰۰} \approx ۰/۹۸$$

$$\alpha \approx \arccos(۰/۹۸) \approx ۱۱/۴۸^\circ = ۱۱^\circ ۶۲'$$

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} = \frac{۲۵^۲ + ۶۰^۲ - ۸۰^۲}{۲(۲۵)(۶۰)} = \frac{۶۲۵ + ۳۶۰۰ - ۶۴۰۰}{۳۰۰۰}$$

$$= \frac{-۲۱۷۵}{۳۰۰۰} \approx -۰/۷۳$$

$$\beta = \arccos(-۰/۷۳) \approx ۱۳۶/۸۹^\circ \approx ۱۳۶^\circ ۵۳'$$

$$\gamma \approx ۱۸۰^\circ - \left(۱۱^\circ ۶۲' + ۱۳۶^\circ ۵۳'\right) = ۳۱^\circ ۸۵'$$

۵ ـ طول دو ضلع یک مثلث عبارت است از فوت ۱۵۰ ، فوت ۱۷۵ و زاویه بین آنها $۷۳^\circ ۴۰'$, ضلع سوم را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم

$$a = ۱۵۰ \text{ فوت} ،\ b = ۱۷۵ \text{ فوت} ،\ \gamma = ۷۳^\circ ۴۰'$$

باشد ، پس داریم.

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\gamma = ۱۵۰^۲ + ۱۷۵^۲ - ۲(۱۵۰)(۱۷۵)\cos\left(۷۳/۶۶^\circ\right)$$

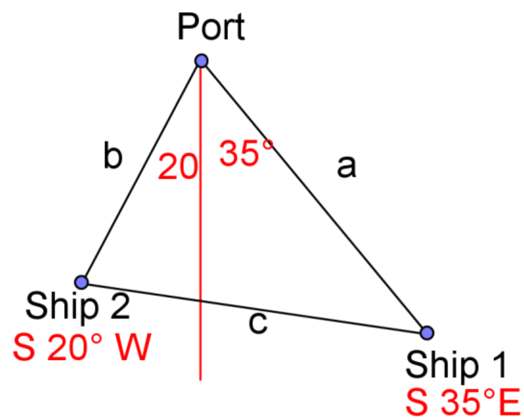
$$\approx ۳۸۳۵۴$$

$$c = \sqrt{۳۸۳۵۴} \approx ۱۹۶ \text{ فوت}$$

۶ – یک کشتی بندر را در ساعت یک بعد از ظهر ترک می کند و با سرعت ۲۴ مایل در ساعت در جهت ۳۵° جنوب شرقی حرکت می کند. یک کشتی دیگر در ساعت ۱/۵ بعد از ظهر از همان نقطه باسرعت ۱۸ مایل در ساعت در جهت ۲۰° جنوب غربی بندر را ترک می کند. بطور تقریب این دو کشتی در ساعت سه بعد از ظهر ، چه مسافتی با هم فاصله دارند.

پاسخ - یاد آوری :برای تعیین جهت کشتی و هوا پیما به بخش ۱.۱۰ مراجعه کنید.

بر اساس آنچه در بخش ۱.۱۰ گفته شد و اطلاعات مساله ، تصویر زیر را رسم می کنیم.



مسافتی که کشتی اول در مدت دو ساعت طی می کند

$$a = ۲ * ۲۴ = ۴۸ \text{ مایل}$$

مسافتی که کشتی دوم در مدت ۱/۵ طی می کند

$$b = (۱ / ۵) * ۱۸ = ۲۷ \text{ مایل}$$

در تصویر بالا $Port$ به معنی بندر ، $Ship$ ۱ به معنی کشتی اول ، $Ship$ ۲ به معنی کشتی دوم. $S۳۵^\circ E$ یعنی ۳۵° جنوب شرقی ، $S۲۰^\circ W$ یعنی ۲۰° جنوب غربی.

اگر فاصله این دو کشتی را c فرض کنیم ، با توجه به تصویر بالا خواهیم داشت.

$$\gamma = ۲۰^\circ + ۳۵^\circ = ۵۵^\circ$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos(۵۵^\circ) = ۴۸^۲ + ۲۷^۲ - ۲(۴۸)(۲۷)\cos(۵۵^\circ)$$

$$= ۲۳۰۴ + ۷۲۹ - ۲۵۹۲(\cos ۵۵^\circ)$$

$$\approx ۱۵۴۶$$

$$c \approx \sqrt{۱۵۴۶} \approx ۳۹ \text{ مایل}$$

در تمرینات زیر مساحت مثلث ABC را بطور تقریب ، بدست آورید.

۷) $\alpha = ۶۰^\circ$ ، $b = ۲۰$ ، $c = ۳۰$

پاسخ

$$\mathcal{A} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۲۰)(۳۰)\sin(۶۰^\circ) \approx ۲۶۰$$

۸) $\beta = ۱۵۰^\circ$ ، $a = ۱۵۰$ ، $c = ۳۰۰$

پاسخ

$$\mathcal{A} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱۵۰)(۳۰۰)\sin(۱۵۰^\circ) \approx ۱۱۲۵$$

۳.۳ - قانون تانژانت ها The Law of Tangents

فرمول دیگری که می توان برای حل مسائل مثلث های غیر قائمه بکار برد ، از قانون سینوس ها بدست می آید. با فرمول زیر شروع می کنیم.

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

اگر عدد یک را به دو طرف معادله بالا اضافه کنیم ، فرمول (i) بدست می آوریم و اگر عدد یک را از هر دو طرف معادله بالا کم کنیم ، فرمول (ii) بدست می آوریم.

$$(i)\quad \frac{a}{b}+۱=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+۱$$

$$(ii)\quad \frac{a}{b}-۱=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-۱$$

حالا می توانیم آنها را مطابق زیر باز نویسی کنیم.

$$(i)\quad \frac{a+b}{b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}$$

$$(ii)\quad \frac{a-b}{b}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\beta}$$

اگر سمت چپ و سمت راست (ii) بر سمت های مربوطه (i) تقسیم کنیم ، پس از ساده کردن ، داریم.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

با استفاده از فرمول های تبدیل جمع به حاصل ضرب بخش ۲.۵ داریم.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{۲\cos\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\sin\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)}{۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)}$$

می توان نوشت

$$\frac{a-b}{a+b}=\cot\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\tan\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$$

و چون $\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}$ پس داریم.

قانون تانژانت ها

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)}$$

با استفاده از فرمول های دیگر قانون سینوس ها ، می توانیم فرمول های مشابهی پیدا کنیم که شامل هر دو زاویه ای از مثلث و اضلاع مقابل آنها. باشد.

شکل کلی قانون تانژانت ها General form of the Law of Tangents
نسبت تفاضل هر کدام از دو ضلع یک مثلث به مجموع آنها مساوی است با نسبت تانژانت نصف تفاضل زاویه های مقابل آن دو ضلع به نصف مجموعا آنها. تفاضل ها باید به یک ترتیب گرفته شوند.

چون مجموع زاویه های یک مثلث $۱۸۰°$ است ، اگر یک زاویه مثلا θ را بدانیم ، پس نصف مجموع دو زاویه دیگر $\frac{۱}{۲}(۱۸۰° - \theta)$ است. در نتیجه ، قانون تانژانت ها را می توان برای پیدا کردن بقیه اجزائ یک مثلث بکار برد ، اگر دو ضلع و زاویه بین آنها را بدانیم.

مثال
مثلث ABC مفروض است. بقیه اجزائ آنرا پیدا کنید , اگر داشته باشیم.
$$\alpha = ۷۰°۲۰' \quad ، \quad b = ۵۸/۳ ، \quad c = ۲۱/۶$$

پاسخ
با استفاده از قانون تانژانت ها

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{۱}{۲}(\beta-\gamma)}{\tan\frac{۱}{۲}(\beta+\gamma)}$$

چون $\alpha+\beta+\gamma = ۱۸۰°$ است ، پس
$$\beta+\gamma = ۱۸۰° - \alpha = ۱۸۰° - ۷۲°۲۰' = ۱۰۷°۴۰'$$
پس
$$\frac{۱}{۲}(\beta+\gamma) = ۵۳°۵۰'$$
چون $b+c = ۷۹/۹$ است ، و $b-c = ۳۶/۷$ ،پس

$$\frac{۳۶/۷}{۷۹/۹} = \frac{\tan\frac{۱}{۲}(\beta-\gamma)}{\tan ۵۳°۵۰'}$$
$$\tan\frac{۱}{۲}(\beta-\gamma) = \frac{(۳۶/۷)\tan ۵۳°۵'}{۷۹/۹}$$
$$\approx \frac{(۳۶/۷)(۱/۳۶۸۰)}{۷۹/۹} \approx ۰/۶۲۸۴$$
$$\frac{۱}{۲}(\beta-\gamma) = \arctan(۰/۶۲۸۴) \approx ۳۲/۱۵° \approx ۳۲°۱۰'$$

$$\frac{۱}{۲}(\beta-\gamma)=۳۲^{\circ}۱۰'$$

اما

$$\frac{۱}{۲}(\beta+\gamma)=۵۳^{\circ}۵۰'$$

است. اگر طرفین دو عبارت های بالا را با هم جمع کنیم ، $\beta=۸۶^{\circ}$ بدست می آید و اگر طرفین دو عبارت های بالا را از هم کم کنیم ، $\gamma=۲۱^{\circ}۴۰'$ بدست می آید.
و در نهایت با استفاده از قانون سینوس ها برای پیدا کردن a داریم.

$$a=\frac{b\sin a}{\sin\beta}=\frac{(۵۸/۳)\sin ۷۲^{\circ}۲۰'}{\sin ۸۶^{\circ}}$$
$$\approx\frac{(۵۸/۳)(۰/۹۵۲۸)}{۰/۹۹۷۶}\approx ۵۵/۷$$

قانون تانژانت ها را می توان در چهار حالت های زیر خلاصه کرد.

$$(۱)\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)}$$

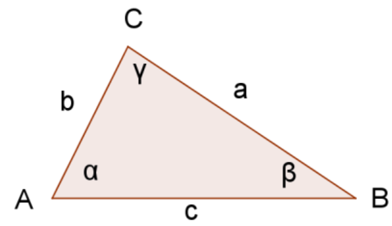
$$(۲)\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{۱}{۲}(\beta-\gamma)}{\tan\frac{۱}{۲}(\beta+\gamma)}$$

$$(۳)\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\frac{۱}{۲}(\gamma-\alpha)}{\tan\frac{۱}{۲}(\gamma+\alpha)}$$

$$(۴)\quad \frac{b-a}{b+a}=\frac{\tan\frac{۱}{۲}(\beta-a)}{\tan\frac{۱}{۲}(\beta+a)}$$

تمرینات ۳.۳

در تمرینات زیر با توجه به اطلاعات داده شده ، بقیه اجزای مثلث ABC را پیدا کنید.

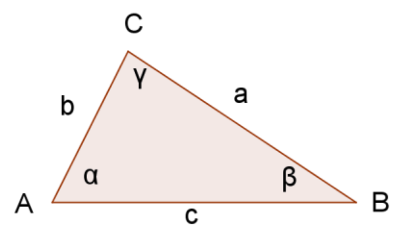


۱) $a = ۵$ ، $b = ۳$ ، $\gamma = ۹۶^\circ$

۲ – اگر داشته باشیم $b = ۵$ ، $\gamma = ۳۰^\circ$ ، $\beta = ۹۰^\circ$ مطلوب است اندازه ضلع c

پاسخ تمرینات ۳.۳

در تمرینات زیر با توجه به اطلاعات داده شده ، بقیه اجزای مثلث ABC را پیدا کنید.



۱) $a = ۵$ ، $b = ۳$ ، $\gamma = ۹۶^\circ$

پاسخ

$$\alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ$$

پس

$$\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ - ۹۶^\circ = ۸۴^\circ$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha - \beta)}{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{۵-۳}{۵+۳} = \frac{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha - \beta)}{\tan\frac{۱}{۲}(\alpha + \beta)}$$

$$\tan\frac{۱}{۲}(\alpha - \beta) = \frac{۲}{۸}\tan ۴۲^\circ = ۰/۲۲۵۱$$

$$\frac{۱}{۲}(\alpha - \beta) = \arctan(۰/۲۲۵۱) = ۱۲/۷^\circ$$

پس

$$\alpha - \beta = ۲۵/۴^\circ$$

حالا دو معادله داریم.

$$\alpha - \beta = ۲۵/۴^\circ$$
$$\alpha + \beta = ۸۴^\circ$$

طرفین دو معادله را با هم جمع می کنیم.

$$۲\alpha = ۱۰۹/۴^\circ$$
$$\alpha = ۵۴/۷^\circ$$

$$\beta = ۸۴^{\circ} - ۵۴/۷^{\circ} = ۲۹ / ۳^{\circ}$$

با استفاده از قانون سینوس ها ، ضلع سوم را پیدا می کنیم.

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin a} = \frac{۵ \sin ۹۶^{\circ}}{\sin ۵۴ / ۷^{\circ}} = ۶ /۰ ۹$$

۲ – اگر داشته باشیم $b = ۵$ ، $\gamma = ۳۰^{\circ}$ ، $\beta = ۹۰^{\circ}$ مطلوب است اندازه ضلع c

پاسخ

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\tan \frac{۱}{۲} (\beta - \gamma)}{\tan \frac{۱}{۲} (\beta + \gamma)}$$

$$\frac{۵ - c}{۵ + c} = \frac{\tan \frac{۱}{۲} \left(۹۰^{\circ} - ۳۰^{\circ} \right)}{\tan \frac{۱}{۲} \left(۹۰^{\circ} + ۳۰^{\circ} \right)}$$

$$\frac{۵ - c}{۵ + c} = \frac{\tan ۳۰^{\circ}}{\tan ۶۰^{\circ}}$$

$$\frac{۵ - c}{۵ + c} = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}{\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۵ - c}{۵ + c} = \frac{۱}{۳}$$

$$۳\left(۵ - c\right) = ۵ +$$

$$c = ۲ / ۵$$

۴.۱ - تست های مقدماتی Elementary Tests

تست های سری اول

در مورد دامنه نوسان ، دوره تناوب ، برد و گام جا بجایی توابع مثلثاتی

۱ – اگر $y=\cos x$ باشد ، حد اکثر مقدار y کدام است؟

$a)\ ۱ \quad b)\ -۱ \quad c)\ \pi \quad d)\ ۲\pi$

۲ - دور تناوب تابع مثلثاتی $f(x)=۲\sin(۵x)$ کدام است؟

$a)\ \frac{\pi}{۵} \quad b)\ \frac{۲\pi}{۵} \quad c)\ ۵\pi \quad d)\ \pi$

۳ - دامنه نوسان تابع $f(x)=-۳\cos(\pi x)$ کدام است؟

$a)\ ۳ \quad b)\ -۳ \quad c)\ \pi \quad d)\ ۲$

۴ - کدام یک از توابع زیر بزرگ ترین دور تناوب دارد ؟

$a)\ f(x)=۲۰\sin\left(۲x-\frac{\pi}{۲}\right) \quad b)\ f(x)=-\sin(\pi x)$

$c)\ f(x)=۲\sin(۰/۱x) \quad d)\ f(x)=-\sin(۰/۱\pi x)$

۵ - برد تابع $f(x)=-۴\cos(۲x-۳)$ کدام است؟

$a)\ (0,۴) \quad b)\ [0,۴] \quad c)\ (-۴,۴) \quad d)\ [-۴,۴]$

۶ - گام جا بجا یی $f(x)=۷\sin\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)$ کدام است؟

$a)\ \frac{\pi}{۳} \quad b)\ \frac{\pi}{۶} \quad c)\ -\frac{\pi}{۶} \quad d)\ -\frac{\pi}{۳}$

۷ - برد تابع $f(x)=-۶\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{۲}\right)+۲$ کدام است؟

$a)\ [-۶,۶] \quad b)\ [-۴,۸] \quad c)\ [0,۸] \quad d)\ [-۶,0]$

۸ - دامنه نوسان تابع $f(x)=۴\sin(x)\cos(x)$ کدام است؟

$a)\ ۴ \quad b)\ ۳ \quad c)\ ۲ \quad d)\ ۱$

۹ - دور تناوب تابع $f(x)=۰/۵\sin(x)\cos(x)$ کدام است؟

$a)\ ۰/۵ \quad b)\ ۲\pi \quad c)\ \frac{\pi}{۲} \quad d)\ \pi$

۱۰ - دامنه نوسان $f(x)=\sin(x)+\cos(x)$ کدام است؟

$a)\ \sqrt{۲} \quad b)\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad c)\ ۲\sqrt{۲} \quad d)\ ۲$

جواب های تست های سری اول

$۱(a) \quad ۲(b) \quad ۳(a) \quad ۴(c) \quad ۵(d) \quad ۶(b) \quad ۷(b) \quad ۸(c) \quad ۹(d) \quad ۱۰(a)$

تست های سری دوم

در مورد زاویه ها در مکان متعارف

۱ - یک زاویه $-۳۰°$ در مکان متعارف قرار دارد. ضلع انتهایی آن در کدام ربع صفحه است؟
$a)\ QI \quad b)\ QII \quad c)\ QIII \quad d)\ QIV$

۲ - زاویه $x = \frac{۲\pi}{۳}$ در مکان متعارف قرار دارد. ضلع انتهایی آن در کدام ربع صفحه است؟
$a)\ QI \quad b)\ QII \quad c)\ QIII \quad d)\ QIV$

۳ - زاویه $t = ۱۳۳۰°$ در مکان متعارف قرار دارد. ضلع انتهایی آن در کدام ربع صفحه است؟
$a)\ QI \quad b)\ QII \quad c)\ QIII \quad d)\ QIV$

۴ - زاویه $t = -\frac{۷\pi}{۴}$ در مکان متعارف قرار دارد. ضلع انتهایی آن در کدام ربع صفحه است؟
$a)\ QI \quad b)\ QII \quad c)\ QIII \quad d)\ QIV$

۵ - زاویه $a = -۱۵۵۰°$ در مکان متعارف قرار دارد. ضلع انتهایی آن در کدام ربع صفحه است؟
$a)\ QI \quad b)\ QII \quad c)\ QIII \quad d)\ QIV$

۶ - زاویه $\propto = -\frac{۵۵\pi}{۳}$ در مکان متعارف قرار دارد. ضلع انتهایی آن در کدام ربع صفحه است؟
$a)\ QI \quad b)\ QII \quad c)\ QIII \quad d)\ QIV$

جواب های تست های سری دوم

1. d)
2. b)
3. c)
4. a)
5. c)
6. d)

تست های سری سوم

در مورد تبدیل اندازه زاویه ها به درجه و رادیان

۱ - اگر زاویه $a = \frac{۷\pi}{۶}$ باشد ، اندازه آن بر حسب درجه کدام است؟

$a)$ ۱۵۰° $b)$ ۲۱۰° $c)$ ۱۰۰° $d)$ ۱۲۰°

۲ - اگر زاویه $b = ۳۳۰°$ باشد ، اندازه آن بر حسب رادیان کدام است؟

$a)$ $\frac{۱۱\pi}{۳}$ $b)$ $\frac{۷\pi}{۴}$ $c)$ $\frac{۷\pi}{۶}$ $d)$ $\frac{۱۱\pi}{۶}$

۳ - اگر زاویه $a = \frac{۲۱\pi}{۵}$ باشد ، اندازه آن بر حسب درجه کدام است؟

$a)$ ۷۵۶° $b)$ ۷۱۰° $c)$ ۳۶° $d)$ ۴۲۰°

۴ - اگر زاویه $b = -۷۵۰°$ باشد ، اندازه آن بر حسب رادیان کدام است؟

$a)$ $-\frac{۲۵\pi}{۶}$ $b)$ $\frac{۲۵\pi}{۶}$ $c)$ $-\frac{۱۵\pi}{۶}$ $d)$ $-\frac{۳۵\pi}{۶}$

۵ - اگر زاویه $a = -\frac{۱۵\pi}{۲}$ باشد ، اندازه آن بر حسب درجه کدام است؟

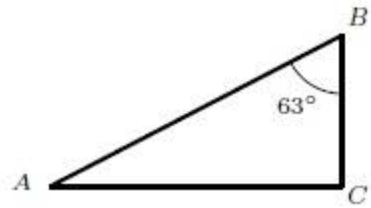
$a)$ ۱۳۵° $b)$ ۱۳۵۰° $c)$ $-۹۰°$ $d)$ $-۱۳۵۰°$

جواب های تست های سری سوم

1. b)
2. d)
3. a)
4. a)
5. d)

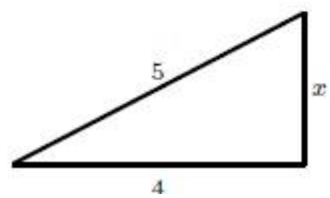
۴.۲ - تست های مثلث قائم الزاویه

۱ - اندازه زاویه A در تصویر زیر کدام است؟



$a)$ °۱۷ $b)$ *۲۷ $c)$ *۳۷ $d)$ °۴۷

۲- اندازه x در تصویر زیر کدام است؟

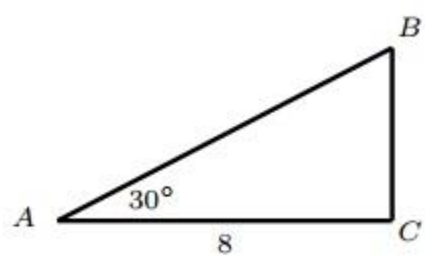


$a)$ ۱ $b)$ ۹ $c)$ ۲۰ $d)$ ۳

۳ - در یک مثلث قائم الزاویه اندازه یک زاویه °۴۹ است و طول وتر ۵۰ سانتی متر است. طول تقریبی ضلع مقابل این زاویه کدام است؟

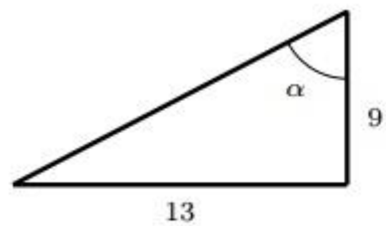
$a)$ ۳۲/۸ $b)$ ۵۷/۵ $c)$ ۳۷/۷ $d)$ ۳۰/۳

۴ - در مثلث زیر اندازه زاویه $A = ۳۰°$ و $AC = ۸$ است. اندازه BC کدام است؟



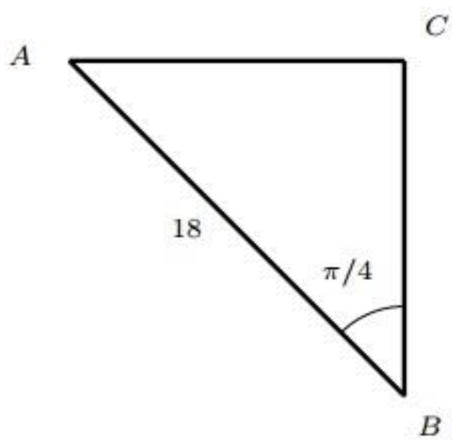
$a)$ $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ $b)$ $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ $c)$ ۴ $d)$ ۸

۵ - در مثلث زیر $\sin\alpha$ کدام است؟



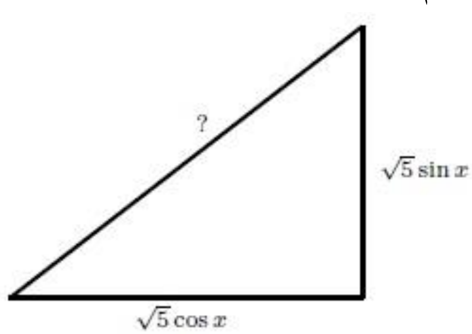
$a)\ \frac{۱۳}{۹}\quad b)\ \frac{۹}{۱۳}\quad c)\ \frac{۱۳\sqrt{۱۰}}{۵۰}\quad d)\ \frac{۱۳}{۲۴}$

۶ - در مثلث زیر ، طول AC کدام است؟



$a)\ ۹\quad b)\ ۹\sqrt{۲}\quad c)\ ۱۸\sqrt{۲}\quad d)\ ۱۸$

۷ - در مثلث زیر طول وتر کدام است؟



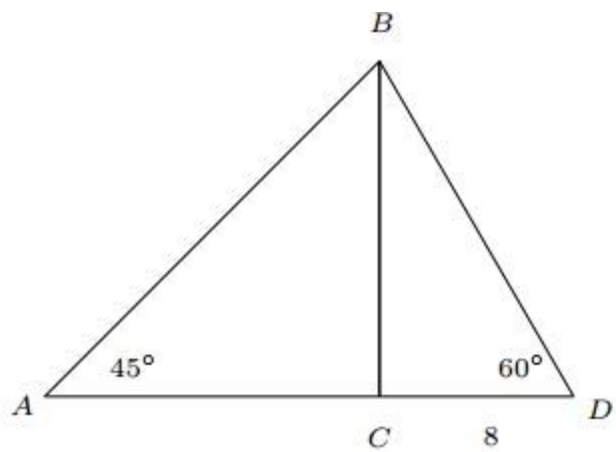
$a)\ ۵\quad b)\ ۱۰\quad c)\ ۲۵\quad d)\ \sqrt{۵}$

۸ - طول قطر یک مربع ۴۰ متر است. مساحت آن مربع کدام است؟

$a)$ ۸۰ متر مربع $b)$ ۸۰۰ متر مربع

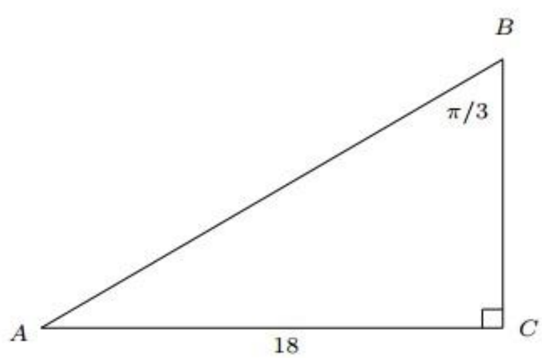
$c)$ ۱۶۰۰ متر مربع $d)$ ۴۰ متر مربع

۹ - در تصویر زیر BC عمود است بر AD و $CD = ۸$ و اندازه زاویه $\angle D = ۶۰^\circ$ و $\angle A = ۴۵^\circ$ است. طول AB کدام است؟



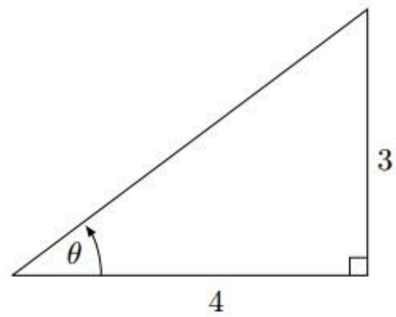
$a)$ $۸\sqrt{۶}$ $b)$ $۸\sqrt{۳}$ $c)$ $۸\sqrt{۲}$ $d)$ ۸

۱۰ - درتصویر زیر ، طول AB کدام است؟



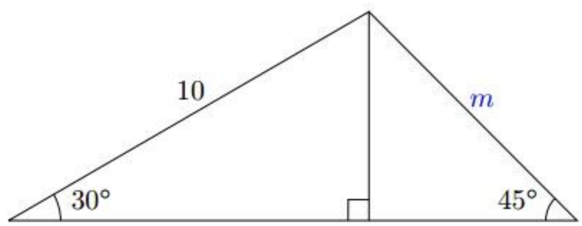
$a)$ $۱۲\sqrt{۲}$ $b)$ ۱۲ $c)$ $۱۲\sqrt{۳}$ $d)$ $۱۲\sqrt{۶}$

۱۱ - در تصویر زیر $\cos\theta$ کدام است؟



$a)\ \frac{۳}{۵}$ $b)\ \frac{۴}{۵}$ $c)\ \frac{۱}{۵}$ $d)\ \frac{۲}{۵}$

۱۲ - در تصویر زیر ، طول m کدام است؟



$a)\ ۵$ $b)\ ۱۰\sqrt{۲}$ $c)\ ۲۰\sqrt{۲}$ $d)\ ۵\sqrt{۲}$

پاسخ تست های مثلث قائم الزاویه

۱ (b) ۲ (d) ۳ (c) ۴ (d) ۵ (c) ۶ (c) ۷ (d) ۸ (b) ۹ (a)

۱۰ (c) ۱۱ (b) ۱۲ (d)

۴.۳ - تست های معادله های مثلثاتی

۱ - برای چه مقادیری از x عبارت $\frac{\sin x}{۱+\cos x}$ تعریف نشده است؟

$a)\ 0^\circ \quad b)\ ۶۰^\circ \quad c)\ ۹۰^\circ \quad d)\ ۱۸۰^\circ$

۲ - در بازه $0 \le x \le ۳۶۰^\circ$ چند مقدار از x معادله $\sin^۲ x = \frac{۱}{۴}$ را بر قرار می کند؟

$a)\ ۱ \quad b)\ ۲ \quad c)\ ۳ \quad d)\ ۴$

۳ - برای چه مقادیری از x عبارت $\frac{\sin^۲ x}{۱-\sin^۲ x}$ تعریف نشده است؟

$a)\ 0^\circ$ $b)$ ۴۵° و ۹۰° $c)$ ۹۰° و ۲۷۰° $d)\ ۱۸۰^\circ$

۴ - برای این که $\sin(x+b) = \cos x$ باشد ، مقدار b باید کدام باشد ؟

$a)\ \frac{۳\pi}{۲} \quad b)\ -\frac{\pi}{۲} \quad c)\ -\pi \quad d)\ \frac{\pi}{۲}$

۵ - در بازه $0 \le x \le ۲\pi$ معادله $۳\cos(۲x) = -۳$ چند ریشه دارد ؟

$a)\ 0 \quad b)\ ۱ \quad c)\ ۲ \quad d)\ ۳$

۶ - در بازه $0 \le x \le ۲\pi$ چند مقدار x معادله $۳\sin^۲ x + \sin x - ۲ = 0$ را بر قرار می کند؟

$a)\ 0 \quad b)\ ۱ \quad c)\ ۲ \quad d)\ ۳$

۷ - معادله $۳\cos(۲x) = -۵$ در بازه $[0, ۲\pi]$ چند ریشه دارد ؟

$a)\ 0 \quad b)\ ۱ \quad c)\ ۲ \quad d)\ ۳$

۸ - برای چه مقدار از x معادله $\sin^۲ x + \sin x = 0$ بر قرار نیست؟

$a)\ \frac{\pi}{۲} \quad b)\ \pi \quad c)\ \frac{۳\pi}{۲} \quad d)\ ۲\pi$

۹ - معادله $۳\cos(۲x) = -۱$ در بازه $[0, ۲\pi]$ چند ریشه دارد ؟

$a)\ ۱ \quad b)\ ۲ \quad c)\ ۳ \quad d)\ ۴$

۱۰ - در بازه $[0^\circ, ۳۶۰^\circ]$ برای کدام مقدار x داریم $\sin x = \cos x$

$a)$ ۴۵° فقط $b)$ ۴۵° و ۲۲۵° $c)$ ۱۳۵° و ۳۱۵° $d)$ ۲۲۵° فقط

پاسخ

۱ (d) ۲ (d) ۳ (c) ۴ (d) ۵ (c) ۶ (d) ۷ (a) ۸ (a)
۹ (d) ۱۰ (b)

پاسخ تشریحی

۱)

$$۱ + \cos x = 0$$
$$\cos x = -۱$$
$$x = ۱۸۰^\circ$$

۲)

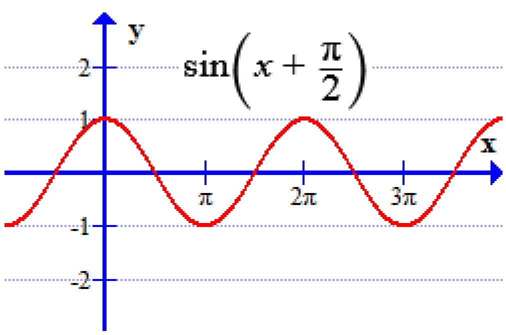
$$\sin^{۲} x = \frac{۱}{۴}$$

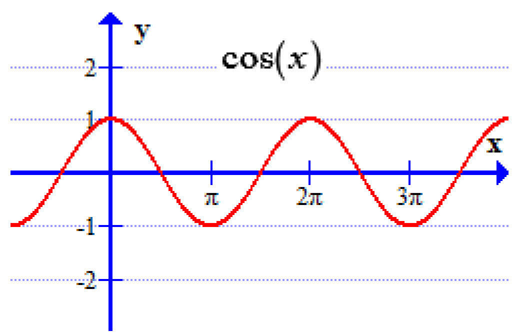
$$x = \frac{\pi}{۶} \text{ ، } x = \frac{۵\pi}{۶} \text{ ، } x = \frac{۷\pi}{۶} \text{ ، } x = \frac{۱۱\pi}{۶}$$

۳)

$$۱ - \sin^{۲} x = 0$$
$$\sin x = \pm ۱$$

۴)



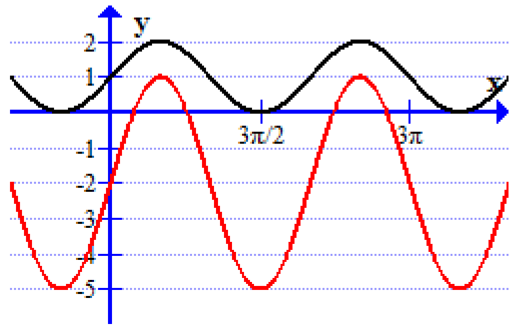


۵)

$$۳ \cos(۲x) = -۳$$
$$\cos(۲x) = -۱$$
$$۲x = \pi + ۲n\ \pi$$
$$x = \frac{\pi}{۲} \text{ ، } x = \frac{۳\pi}{۲}$$

۶)

$$۳ \sin^{۲} x + \sin x - ۲ = 0$$
$$(۳ \sin x - ۲)(\sin x + ۱) = 0$$
$$\sin x = \frac{۲}{۳} \quad \sin x = -۱$$



در تصویر بالا نمودار قرمز رنگ ، نمودار $۳\sin x - ۲ = 0$ است. ملاحظه می کنید که این نمودار در بازه $[0, ۲\pi]$ محور x را در دو نقطه قطع می کند. منطقی است زیرا $\sin x = \frac{۲}{۳}$ یعنی زاویه x می تواند هم در ربع صفحه یک باشد و هم در ربع صفحه دو. دو نقطه روی ضلع انتهایی این دو زاویه عبارتند از $\left(\sqrt{۵}, ۲\right)$ و $\left(-\sqrt{۵}, ۲\right)$

نمودار سیاه رنگ ، نمودار $\sin x + ۱ = 0$ است که این نمودار در بازه $[0, ۲\pi]$ محور x را در یک نقطه قطع می کند.

۷)

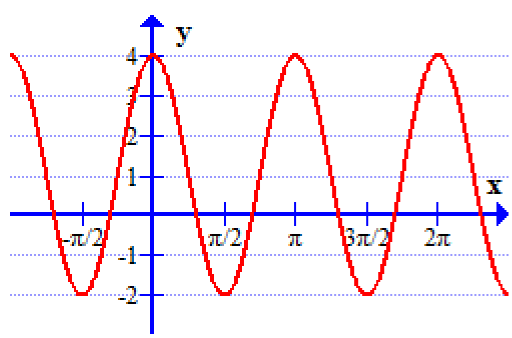
$$۳\,\mathrm{os}(۲x) = -۵$$
$$\cos(۲x) = -\frac{۵}{۳}$$

اما $|۱| \leq \cos x$ است. یعنی قدر مطلق تابع کسینوس نمی تواند از یک بیشتر باشد. پس این معادله ریشه حقیقی ندارد.

۸)

$$\sin^۲ x + \sin x = 0$$
$$(\sin x)(\sin x + ۱) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad ، \quad \sin x = -۱$$

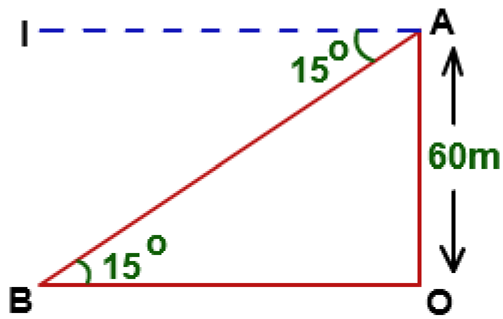
۹)



۴.۴ - تست های معادله های مثلثاتی

۱ - از بالای یک فانوس دریائی که نسبت به سطح دریا ۶۰ متر ارتفاع دارد ، زاویه نشیب یک قایق ۱۵° است. فاصله قایق تا پایه فانوس دریائی چقدر است؟

پاسخ



فرض می کنیم OA ارتفاع فانوس دریائی باشد و B مکان قایق. میدانیم $\angle OBA = ۱۵^{\circ}$ و $OA = ۶۰$ متر

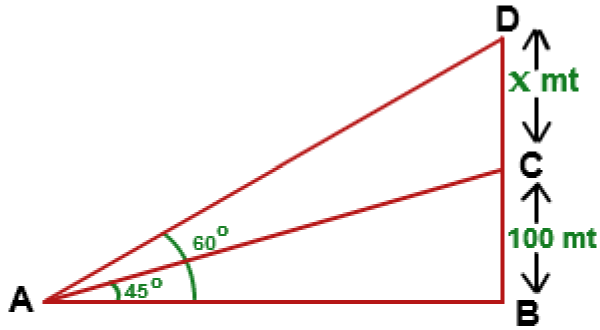
$$\tan ۱۵^{\circ} = \frac{OA}{OB}$$

$$OB = \frac{OA}{\tan ۱۵^{\circ}}$$

$$OB = OA \cot ۱۵^{\circ} = ۶۰ \cot(۴۵ - ۳۰)$$

$$= ۶۰ \left[\frac{\cot ۴۵^{\circ} \cot ۳۰^{\circ} + ۱}{\cot ۳۰^{\circ} - \cot ۴۵^{\circ}}\right] = ۶۰ \left[\frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۳} - ۱}\right]$$

۲ - زاویه فراز یک برج نا تمام قائم به ارتفاع ۱۰۰ متر تا نقطه A روی سطح مسطح ۴۵° است. اگر قرار است زاویه فراز از همان نقطه A تا برج کامل ۶۰° باشد ، پس ارتفاع برج نا تمام چه مقدار باید افزایش یابد؟



فرض می کنیم BC برج نا تمام و BD برج کامل باشد. پس،

$BC = ۱۰۰$ متر ، $\angle BAC = ۴۵^\circ$ ، $\angle BAD = ۶۰^\circ$ ، $CD = x$ متر

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow ۱ = \frac{۱۰۰}{AB}$$

در مثلث ABC داریم.

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$۱ = \frac{۱۰۰}{AB}$$

$AB = ۱۰۰$ متر

حالا در مثلث ABD داریم.

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\sqrt{۳} = \frac{BD}{۱۰۰}$$

$$BD = ۱۰۰\sqrt{۳}$$

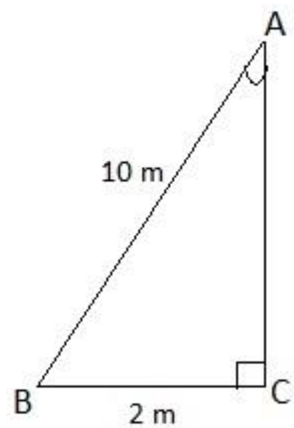
پس

$$BD = BC + CD$$

$$۱۰۰\sqrt{۳} = ۱۰۰ + x$$

$x = ۱۰۰\left(\sqrt{۳} - ۱\right)$ متر

۳ - یک نرد بان به طول ۱۰ متر مقابل یک دیوار قرار دارد. فاصله بین دیوار و پایه نرد بان ۲ متر است. زاویه ای را که نرد بان با دیوار ایجاد می کند و فاصله زمین تا نقطه ای که نرد بان به دیوار تکیه دارد پیدا کنید.



پاسخ

فرض می کنیم AB نرد بان ، BC زمین مسطح و افقی ، AC دیوار عمودی باشند. در مثلث ABC داریم.

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{۲}{۱۰} = ۰/۲$$

$$\angle A = \arcsin(۰/۲) = ۰/۲۰۱۳^{\circ}$$

$$\angle A = ۰/۲^{\circ}$$

پس نرد بان با دیوار زاویه $۰/۲^{\circ}$ می سازد.

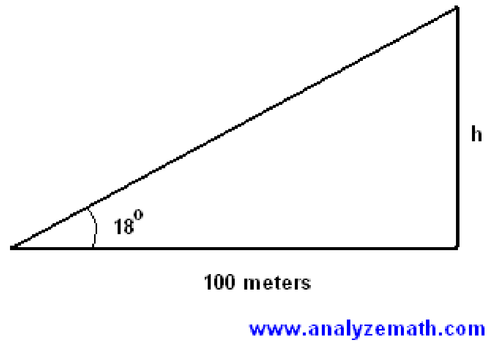
$$\cos A = \frac{AC}{۱۰}$$

$$AC = (۱۰)\cos(۰/۲^{\circ}) = (۱۰)(۰/۹۸) = ۹/۸$$

پس نرد بان به ۹/۸ متری دیوار می رسد.

۴ - شخصی که در فاصله ۱۰۰ متری یک درخت ایستاده است ، مشاهده می کند که زاویه بین زمین و بالای درخت 18° است. ارتفاع تقریبی درخت را پیدا کنید.

پاسخ

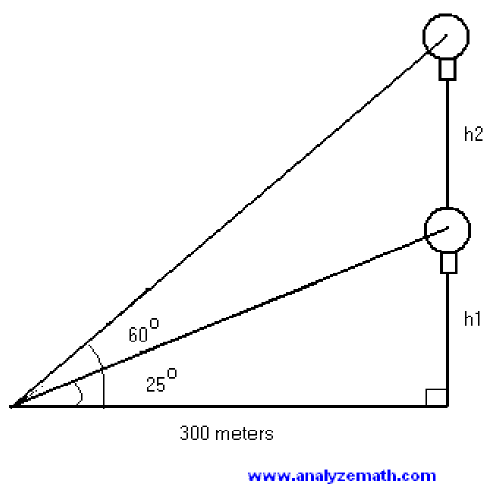


$$\tan(18^\circ) = \frac{h}{100}$$

$$h = (100)\tan(18^\circ) = 32/5 \quad \text{متر}$$

۵ - زاویه فراز یک بالون که بطور عمودی در حال بالا رفتن است ، از 25° در ساعت ۱۰:۰۰ به 60° در ساعت ۱۰:۰۲ می رسد. نقطه رصد زاویه فراز در فاصله ۳۰۰ متری محل پرواز بالون قرار دارد. اگر فرض کنیم سرعت بالا رفتن بالون یک نواخت باشد ، سرعت تقریبی بالا رفتن بالون را پیدا کنید.

پاسخ



$$\tan(25^\circ) = \frac{h1}{300} \quad \text{و} \quad \tan(60^\circ) = \frac{h1 + h2}{300}$$

$$h۱ = (۳۰۰)\tan(۲۵^{\circ}) \quad \text{و} \quad h۱ + h۲ = (۳۰۰)\tan(۶۰^{\circ})$$

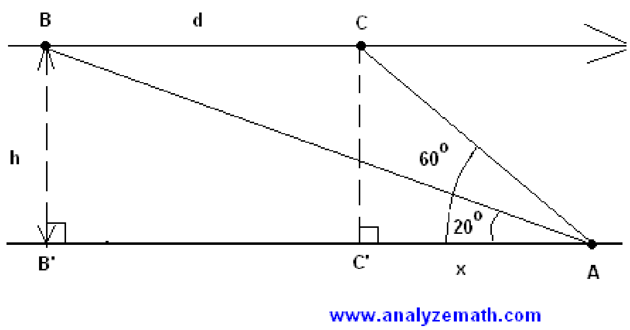
$$h۲ = (۳۰۰)\left[\tan(۶۰^{\circ}) - \tan(۲۵^{\circ})\right]$$

اگر بر اساس فرض مساله ، ۲ دقیقه طول می کشد که بالون $h۲$ بالا رود ، پس سرعت بالا رفتن مطابق زیر بدست می آید، اگر سرعت بالا رفتن S بنامیم ، خواهیم داشت

$$S = \frac{h۲}{۲ \quad \text{دقیقه}} = \frac{۳۰۰\left[\tan\left(۶۰^{\circ} - \tan(۲۵^{\circ})\right)\right]}{۲ * ۶۰} = ۳/۱۶ \quad \text{متر در ثانیه}$$

۶ - یک هوا پیما در طول یک خط مستقیم و ارتفاع ثابت به نقطه A نزدیک می شود. در ساعت ۱ ۰:۰۰ زاویه فراز هوا پیما ۲۰° است و در ساعت ۱ ۰:۰۱ زاویه فراز ۶۰° است. ارتفاع هوا پیما را پیدا کنید ، اگر هوا پیما با سرعت یک نواخت ۶۰۰ مایل در ساعت پرواز می کند.

پاسخ



ابتدا مسافت طی شده توسط هوا پیما را پیدا می کنیم.می دانیم ساعت $\frac{۱}{۶۰} =$ دقیقه ۱

$$\text{مسافت} d = (۶۰۰)\left(\frac{۱}{۶۰}\right) = ۱۰ \quad \text{مایل}$$

$$\tan(۲۰^{\circ}) = \frac{h}{d + x} \quad \text{و} \quad \tan(۶۰^{\circ}) = \frac{h}{x}$$

از دو معادله بالا نتیجه می شود.

$$h = \frac{d}{\frac{۱}{\tan(۲۰^{\circ})} - \frac{۱}{\tan(۶۰^{\circ})}} = ۴/۶ \quad \text{مایل}$$