سرگرمیهای هندسه

یاکوب ایسیدوروویچ پرلمان

ترجمهٔ

پرویز شهریاری

یاکوب ایسید وروویچ پرلمان

Перельман Яков Исидорович.

سرگرمیهای هندسه

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ترجمهٔ : پرویز شهریاری

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

مهر ۱۳۴۷

چاپ اول

یاکوب ایسید ورویچ پرلمان
سرگرمیهای هندسه
ترجمه از متن روسی : پرویز شهریاری
تیراژ : ۳۳۰۰ نسخه ؛ کاغذ : ۷۰ گرمی روسی ؛ چاپ : در چاپخانهٔ خواجه ؛
پایان چاپ : مهر ۱۳۴۷ ؛ ناشر : شرکت سهامی انتشارات خوارزمی ؛ شمارهٔ
ثبت درکتابخانهٔ ملی : ۸۸۷ ، ۱۳۴۷/۶/۲۴

برنامه‌های علمی دبیرستانی ، هرقدر هم که آگاهانه و حساب شده تنظیم شده باشد ، نمی‌تواند مستقیماً جوابگوی احتیاجات علمی دانش آموزان باشد .

در این مورد ، بخصوص علوم ریاضی دارای دو خصوصیت اصلی و متضاد است : از یکطرف بکلی ذهنی و انتزاعی است ، بنحوی که ظاهراً تکامل آن جز در درون خـود وبا پیوستن حلقه‌هـای زنجیر استدلال بدنبال هم ، انجام نمی‌گیرد و از طرف‌دیگر در همهٔ علوم دیگر و همهٔجنبه‌های زندگی عملی‌مورد استعمال دارد . حقیقت اینست که ریاضیات تنها با ارتباط جدی با علوم دیگر ، تولید و زندگی عملی می‌تواند بارور شود و زندگی خود را بسوی کمال ادامه دهد .

ولی این رشتهٔ ارتباطی در کجاست و چگونه می‌توان دانش آموزان را با آن آشنا ساخت ؟ این چیزی است کـه جواب آن از عهدهٔ کتابهای درسی و «طبق برنامه»خارج است ، در حالیکه بدون آنهم تحصیلات مدرسه‌ای تحرك و قابلیت خود را از دست می‌دهد .

اینجاست که‌ضرورت تهیهٔ کتابهای جنب درسی احساس می‌شود و این نه‌تنها بدان مناسبت است که دانش‌آموزان علاقمند امکان مطالعهٔ بیشتری داشته باشند ، بلکه علاوه بر آن به‌عنوان وسیلهٔ پرقدرتی در دست معلم خواهد بود تا بـا ذکر نمونه هـای مختلف، کلاس درس‌را ازحالت خشکی بیرون آورد وشرایطی‌فراهم کندکه دانش‌آموزان‌با رغبت بیشتری به قضایا ومسائل ریاضی بپردازند .

حتی اکثر لازم می‌شود که بخشی ازاینگونه کتابها به عنوان درس و تکلیف در معرض بحث و قضاوت دانش آمـوزان گذاشته شود و بخصوص از

آنها خواسته شود تـا خود روشهای مشابه دیگری برای بهره‌گیری از مطالب ریاضی کشف کنند و در معرض قضاوت دوستان خود قراردهند. تجربه نشان داده است که این تدبیر نقش موثری در علاقمندی دانش‌آموزان به درس‌ریاضی وهمچنین بروز نیروهای خفته و خلاقهٔ آنها دارد .

***

انتشارات خوارزمی که با همت گروهی معلم و مترجم و نویسنده بوجود آمده است ، آرزو دارد که با انتشار کتابهائی که برای این‌منظوردر نظر گرفته است،در راه رفع کمبودی که ازاین لحاظدرمطبوعات فارسی وجود دارد قدمی، ولو ناچیز، برداشته باشد.

ازهمهٔ علاقمندان و صاحب‌نظران توقع داریم که مارا دراین راه کمك و رهنما باشند .

انتقادات‌ونظریات‌خود را به‌نشانی: شاهرضا، خیابان ابوریحان‌شمارهٔ ۵۸، شرکت‌سهامی‌انتشارات خوارزمی ، ارسال دارید .

انتشارات خوارزمی

« سرگرمیهای هندسه » به‌همان اندازه که علاقمندان ریاضی را بکار می‌آید ، برای آن‌دسته از خوانندگانی هم که بنابه دلایلی ازجنبه‌های عملی و جالب ریاضیات‌به‌دور مانده‌اند مفید است .

شاید بیش از همه ، این کتاب برای خوانندگانی مفید باشد که هندسه را تنها روی کاغذ و یا تختهٔ‌سیاه فرا گرفته‌اند (ویا هم‌اکنون فرا می‌گیرند) و بنابراین از رابطه‌ای که هندسه با اشیاء و پدیده‌های جهان اطراف ما دارد بی‌خبرند و نمی‌دانند که چگونه می‌توان از هندسه در عمل و بـرای رفع مشکلات زندگی استفاده کرد .

این‌کتاب می‌خواهد علاقهٔ به هندسه را درخواننده ایجاد کند و یا به‌قول مؤلف « ضمن مطالعهٔ مسائل این کتاب ، ذوق و سلیقه و ابتکار او را برانگیزاند ».

مؤلف برای این منظور ، هندسه را « از چهار دیواری مدرسه خارج می‌کند و به‌فضای‌آزاد : دشت و جنگل ورودخانه و جاده می‌برد تاکار برد هندسه را زیر سرپوش نیلگون آسمان و بدون کتاب وتختهٔ‌سیاه بیاموزد ... » ، خواننده را به‌مطالعهٔ آثار تولستوی ، چخوف ، ژول ورن و مارك‌تواین می‌کشاند و قطعاتی از گوگول و پوشکین نقل می‌کند و بالاخره «مجموعهٔ رنگارنگی مسئله در اختیار او می‌گذارد که از لحاظ موضوع دلچسب و از لحاظ نتیجه غیر منتظره‌اند ».

«سرگرمیهای هندسه» از چاپ هفتم به‌بعد، بدون شرکت مستقیم نویسندهٔ آن پرلمان چاپ می‌شود . یا. ای. پرلمان در سال ۱۹۴۲ در لنینگراد مرد .

از مقدمهٔ «کوردمسکی» بر چاپ نهم کتاب

مطالب این کتاب

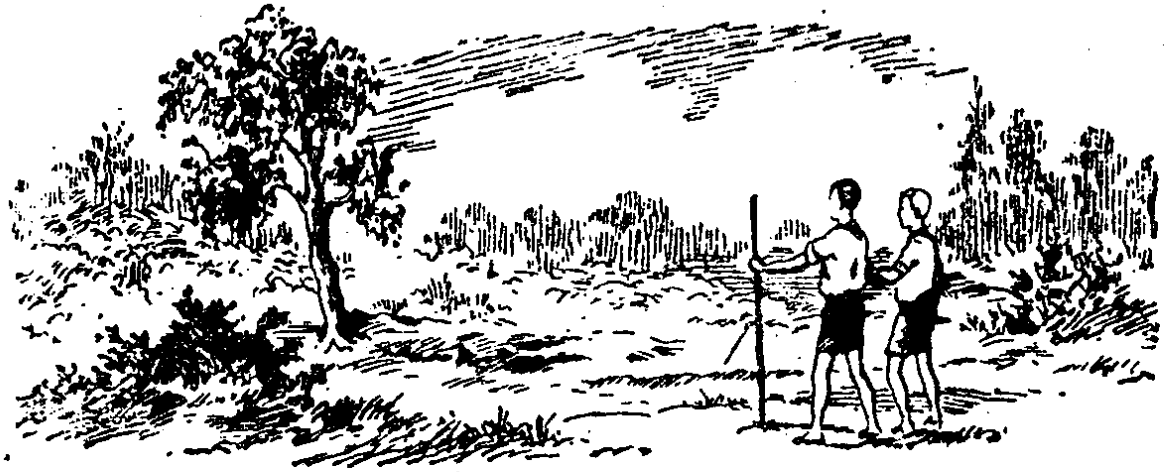
قسمت اول . هندسه درهوای آزاد از صفحهٔ ۱۳ تا صفحهٔ ۲۲۳

قسمت دوم. شوخی و جدی در هندسه از صفحهٔ ۲۲۵ تا صفحهٔ ۴۰۷

قسمت اول
هندسه در هوای آزاد

طبیعت با زبان ریاضی صحبت می‌کند: حروف این زبان عبارتست از دایره‌ها، مثلثها و سایر اشکال هندسی.

ـــ گالیله



۱

هندسه در جنگل

با کمك طول سایه

هنوز از خاطرم نرفته است که وقتی برای نخستین‌بار جنگلبان سپیدموئی را دیدم که در کنار درخت کاج تنومندی ایستاده و می‌خواست با وسیله‌ای که درجیبش جا می‌گرفت ارتفاع درخت را اندازه بگیرد ، تا چه‌اندازه دچارحیرت شدم . وقتی که با وسیلهٔ چهارگوشه‌ای که داشت رأس درخت را نشانه‌گیری کرد ، منتظر بودم که پیرمرد از درخت بالا برود و خود را به هدف برساند . ولی او وسیلهٔ ناچیز خود را در جیب گذاشت و معلوم شد که کار اندازه‌گیری به اتمام رسیده است ، درحالیکه من فکرمی‌کردم هنوز شروع هم نشده است .

من در آنزمان جوان بودم و چنین وسیله‌ای که بتوان با کمك آن

ارتفاع درخت را اندازه‌گرفت ، بدون اینکه آنرا قطع کنیم و یا از آن بالابرویم ، بنظرم بیك معجزهٔ کوچك شبیه بود . ولی بعدها ، وقتی که با مقدمات هندسه آشنا شدم ، دانستم که با چه سادگی می‌توان به‌چنین معجزه‌ای دست یافت . راههای زیادی وجود دارد که می‌توان باکمك وسائل بسیار ساده ویا حتی بدون هیچ وسیله‌ای اندازه‌گیریهائی ازاین قبیل را انجام داد .

بدون تردید ، یکی از ساده‌ترین و در عین حال قدیمی‌ترین این روشها ، همانست که طالس متفکر یونانی در شش قرن قبل از میلاد بوسیلهٔ آن ارتفاع هرم بزرگ را در مصر اندازه گرفت . او ازسایهٔ هرم استفاده کرد . فرعون وکاهنان مصری که درکنار هرم بزرگ جمع شده بودند، به‌این بیگانهٔ شرقی که باکمك سایهٔ این ساختمان‌عظیم ، مشکل محاسبهٔ ارتفاع آنرا حل کرد ، می‌نگریستند . روایت می‌کنند که طالس روز وساعتی را انتخاب کرده بود که سایهٔ خودش باقدش برابر باشد ، البته درچنین لحظه‌ای ارتفاع هرم هم مساوی با سایه‌ای که روی زمین انداخته است، خواهد بود* . و این احتمالا تنها موردی باشد که انسان می‌تواند ازسایهٔ خودش استفاده کند .

مسئلهٔ متفکر یونانی حالا برای مـا خیلی بچه‌گانه و ساده است ولی نباید فراموش کرد که ما از فراز اطلاعات عظیمی که بعد از طالس درهندسه پیدا شده است ، به‌این مسئله نگاه می‌کنیم . قریب ۳۰۰سال قبل ازمیلاد ، اقلیدس ریاضی‌دان یونانی ،کتابی تنظیم کرد که درجریان دوهزار سال بعد ازاو تنهاکتاب آموزشی درزمینهٔ هندسه بود . احکامی که دراین کتاب بود ، و امروز هرشاگرد مدرسه‌ای ازآنها اطلاع دارد، هنوز درزمان طالس کشف نشده بود . ولی برای حل مسئلهٔ ارتفاع هرم

---

*) البته طول سایه را می‌بایست از مرکز مربع قاعده به حساب آورد و طالس هم می‌توانست عرض قاعده را به سادگی و مستقیماً محاسبه کند .

با استفاده از سایهٔ آن ، باید بـه بعضی از خـواص هندسی مثلث آشنا بود و بخصوص دو خاصیت زیر (که اولین آنها بوسیلهٔ خـود طالس کشف شده‌است) :

۱. زوایـای مجاور به قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین برابرند و برعکس ، اضلاع مقابل به زوایای مساوی در مثلث با هم برابرند .

۲. مجموع زوایـای هر مثلث (و یا لااقل مثلث قـائم‌الزاویه) برابر است با دو قائمه .

تنها بخاطراطلاع ازاین احکام بود که طالس‌می‌دانست وقتی‌سایهٔ شیئی با ارتفاع آن برابرباشد ، اشعهٔ خورشید تحت زاویه‌ای مساوی نصف زاویهٔ قائمه می‌تابد و بنابراین رأس هرم ، مرکز قاعده وانتهای سایهٔ آن تشکیل یك مثلث متساوی‌الساقین می‌دهند .

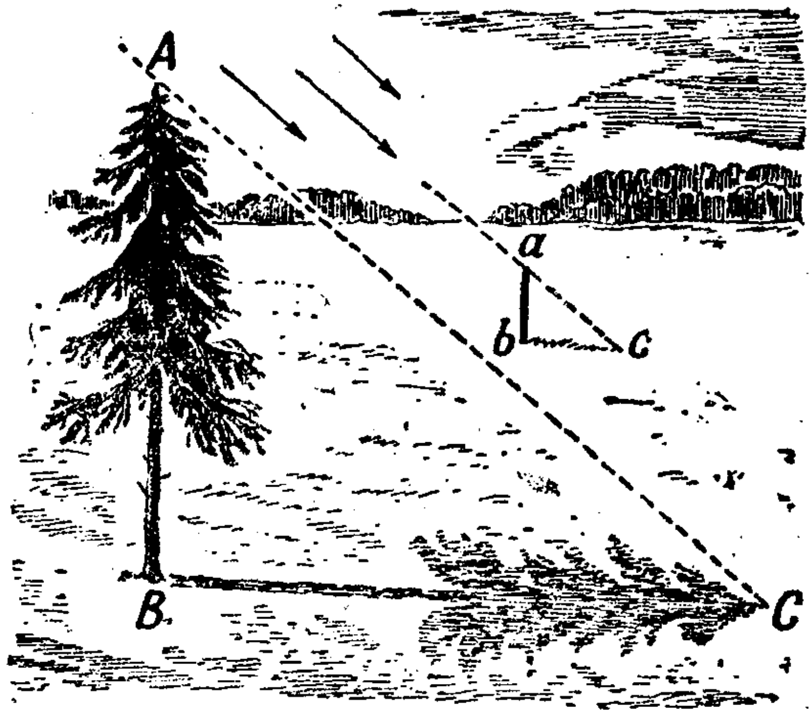
از این روش ساده می‌توان برای اندازه‌گیری ارتفاع تك درختها (که سایهٔ آنها با سایهٔ درختان مجاور درهم نرفته باشد) در روزآفتابی استفاده‌کرد . ولی در عرض جغرافیائی ما* ، چنین لحظه‌ای به‌سادگی کشور مصرفرا نمی‌رسد ، در سرزمین ما خورشید نزدیك افق است و برای اینکه سایهٔ شیئی با ارتفاع آن برابرباشد باید تـا ساعات نیمروز ماههای تابستان‌منتظربود. بااین‌ترتیب روش‌طالس‌را به صورتی‌که ذکر کردیم همیشه نمی‌توان بکاربرد .

ولی‌می‌توان‌این وسیله‌را به سادگی‌چنان تغییرداد که درروزآفتابی از هر سایه‌ای وبا هرطولی بشود استفاده‌کرد. اگرعلاوه برسایهٔ‌بلندی، سایهٔ خودتان و یا سایهٔ یك چوب را اندازه بگیرید ، آنوقت می‌توانید از نسبت زیر ، ارتفاع مورد نظر را بدست آورید (شکل۱) :

$$AB:ab=BC:bc;$$

---

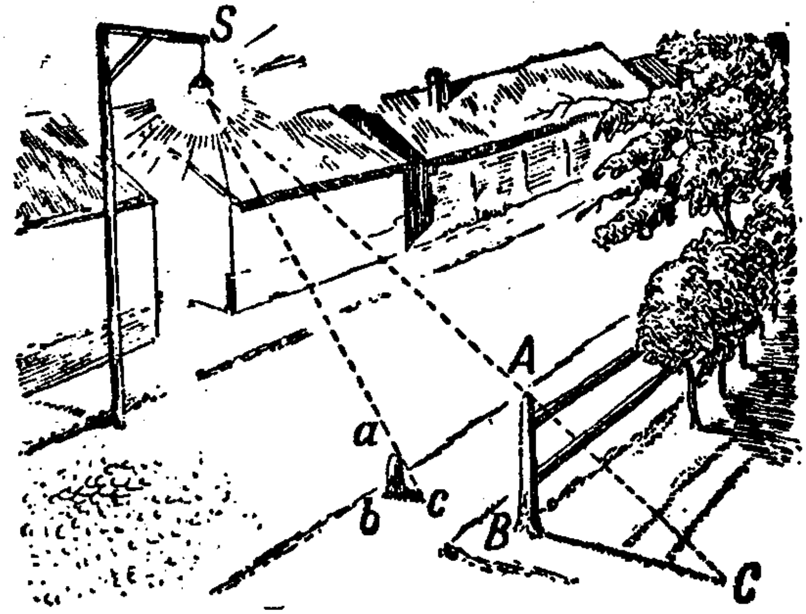
*) منظورعرض‌جغرافیائی سرزمین مؤلف. یعنی‌شمال‌اتحادجماهیرشوروی است (مترجم) .



۱. اندازه‌گیری ارتفاع درخت به وسیلهٔ سایهٔ آن

زیـرا ارتفاع درخت هرچند برابر ارتفاع چـوب باشد ، سایهٔ آن نیز همانقدر برابر سایهٔ چوب خواهد بود . این مطلب از تشابه هندسی دو مثلث ABC و abc نتیجه می‌شود (در حالت تساوی دو زاویه) .

ممکن است بعضی از خوانندگان اعتراض کنند که ایـن وسیلهٔ ساده هیچگونه احتیاجی به هندسهٔ مقدماتی ندارد : مگر بدون هندسه‌هم روشن نیست که هـرچقدر ارتفاع درخت بیشتر بـاشد ، بهمان نسبت سایهٔ آن هم بلندترمی‌شود ؟ ولی مطلب آنگونه‌که ظاهراً بنظر می‌رسد ساده نیست . اگرهمین قانون را دربارهٔسایه‌هائی که دراثر نورچراغهای خیابان ویا لامپ رومیزی بوجودآمده است بکاربریم ، نتیجهٔ نادرستی بدست می‌آید . در شکل ۲ دیده می‌شود که ستون AB ازپایهٔ ab مثلا دوبار بزرگتر است ، در حالیکه سایهٔ ستون در حدود هشت برابرسایهٔ پایه است ($BC:bc=8$). حالا می‌فهمیم که چرا یکجا بدون استفاده از هندسه می‌توان این قانون را بکار برد و درجای دیگر نمی‌توان .



۲. چه وقت از اینگونه اندازه‌گیری نمی‌توان استفاده کرد ؟

مسئله

چرا این اختلاف بوجود آمد؟ در حقیقت مطلب برسر اینست که اشعهٔ خورشید با هم موازی‌اند ، در حالیکه اشعهٔ چراغ خیابان موازی نیستند . حکم اخیر واضح است ، ولی چرا اشعهٔ خورشید را موازی فرض می کنیم ، در حالیکه می‌دانیم آنها هم درنقطهٔ مبداء خود بهم می‌رسند ؟

حل

اشعه‌ای از خورشید راکه به زمین می‌رسند ، بدینجهت می‌توان موازی فرض کردکه زاویهٔ بین آنها فوق‌العاده کوچك است ، بنحوی که درعمل محسوس نیست. این مطلب را می‌توان بسادگی‌ازنظرهندسی روشن کرد. فرض می کنیم دوشعاع‌نوراز نقطه‌ای واقع درروی‌خورشید به زمین برسد و مثلا فاصلهٔ آنها در روی زمین مساوی یك کیلومترباشد یعنی اگر پرگاری در نظر بگیریم و نوك ثابت آن را در نقطهٔ مبداء

یعنی خورشید قرار دهیم و نوك دیگر آن دایره‌ای به‌شعاع فاصلهٔ خورشید تا زمین (یعنی به شعاع ۱۵۰ ۰۰۰ ۰۰۰ کیلومتر) رسم کند، فاصلهٔ بین دوشعاع نوری ما قوسی از این دایره به طول یك کیلومتر خواهد بود . محیط این دایرهٔ عظیم چنین است :

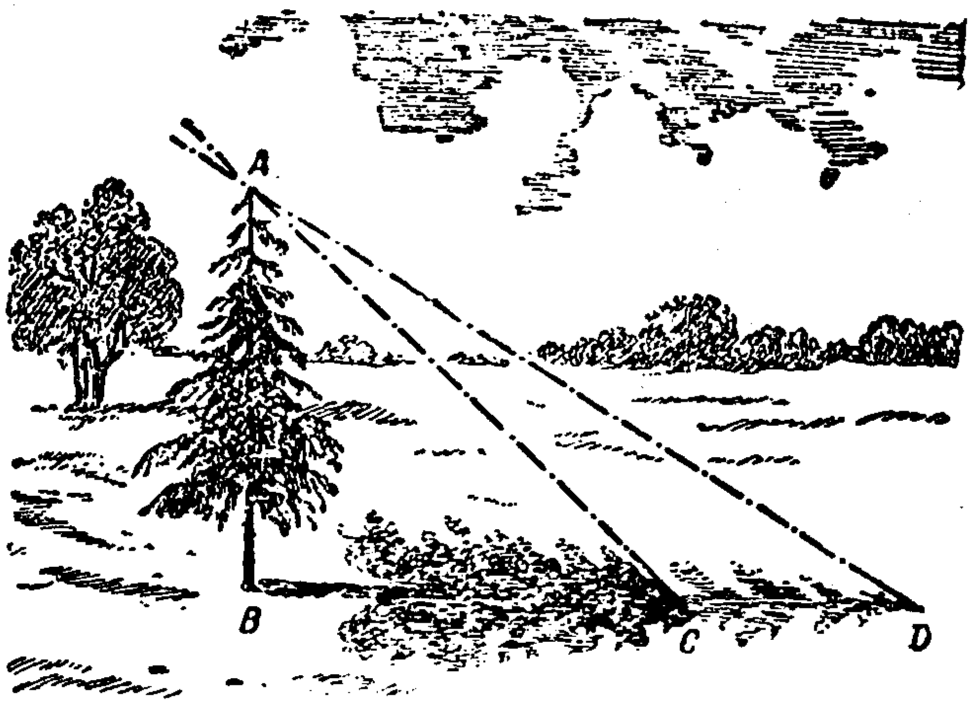
$$2\pi \times ۱۵۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰ = ۹۴۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰ \text{ (کیلومتر)}$$

قوس یك درجه از این دایره $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط یعنی قریب ۲۶۰۰ ۰۰۰ کیلومتر است ، قوس یك دقیقهٔ آن ۶۰ بار کوچکتر از قوس یك درجه یعنی ۴۳۰۰۰ کیلومتر وقوس یك ثانیه ۶۰ بار کوچکتر از قوس یك دقیقه یعنی ۷۲۰ کیلومتر است. ولی قوس ما فقط یك کیلومتر طول دارد، یعنی روبروی به زاویهٔ مرکزی مساوی $\frac{۱}{۷۲۰}$ ثانیه قراردارد. چنین زاویه‌ـ ای ، حتی در دقیق‌ترین وسائل نجومی هم نمی‌تواند به حساب بیاید و بنابراین عملا می‌توان اشعهٔ خورشید را که به زمین می‌رسند موازی فرض کرد *.

اگر این خاصیت هندسی برما معلوم نبود، نمی‌توانستیم ارتفاع بلندیها را براساس سایهٔ آنها اندازه بگیریم . گاهی هم روش بکاربردن سایه نامطمئن از آب درمی‌آید . حدود سایه آنچنان واضح نیست که بتوان طول آنرا با دقت اندازه‌گرفت . هرسایه‌ای که به وسیلهٔ خورشید به وجود آید دارای یك حاشیهٔ کمرنگ نیم سایـه است که باعث عدم تشخیص حدود سایه می‌شود. علت این امر آنست که خورشید یك نقطه نیست، بلکه جسم عظیم نورانی است که اشعهٔ نور ازنقاط مختلف آن سرچشمه می‌گیرد . درشکل ۳ دیده می‌شود که چرا سایهٔ BC دنباله‌ای بصورت نیم سایهٔ CD′ دارد که بتدریج از بین می‌رود .

---

*) اشعه‌ای که ازیك نقطهٔ خورشید به دوانتهای قطری اززمین می‌رسند، زاویه‌ای قریب ۱۷ ثانیه با هم می‌سازند . تعیین این زاویه یکی از وسائلی‌است که منجمین به‌کمك آن می‌توانند فاصلهٔ بین خورشید وزمین را اندازه بگیرند.



۳ . چگونه نیم سایه تشکیل می‌شود ؟

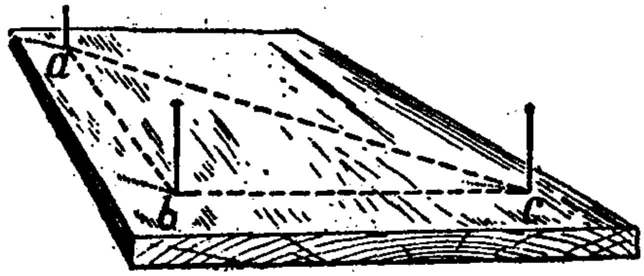
زاویهٔ CAD ، بین دوحد نیم سایه ، برابر است با زاویه‌ای که تحت آن قرص خورشید را می‌بینیم (یعنی نیم درجه) . اشتباهی که از اندازه‌گیری غیر دقیق دوسایه به وجود می آید ، حتی در موردی که خورشید در نزدیکترین وضع خود نباشد ، ۵٪ و بیشتر است . اگر این اشتباه را به اشتباهی که اجباراً به خاطر ناهمواریهای زمین وبعضی اشکالات دیگر به وجود می‌آید ، اضافه کنیم ، اعتماد به نتیجهٔ محاسبه را خیلی کم می کند، بطوریکه مثلا درمناطق کوهستانی بکلی نمی‌توان از این وسیله استفاده کرد .

دو وسیلهٔ دیگر

بدون سایه هم می‌توان بلندیها را اندازه‌گرفت . این وسیله‌ها زیادند و ما از دو نمونهٔ ساده‌تر آنها شروع می کنیم .

قبل ازهمه می‌توانیم از خاصیت مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنیم.

ساختن این وسیله بسیار آسان و تنها به یك تختهٔ چوبی و سه سنجاق احتیاج دارد. روی قطعهٔ چوب (شکل آن مطرح نیست وحتی می‌توان از پوست درخت استفاده کرد، به شرطی که روی آن صاف باشد) ، سه



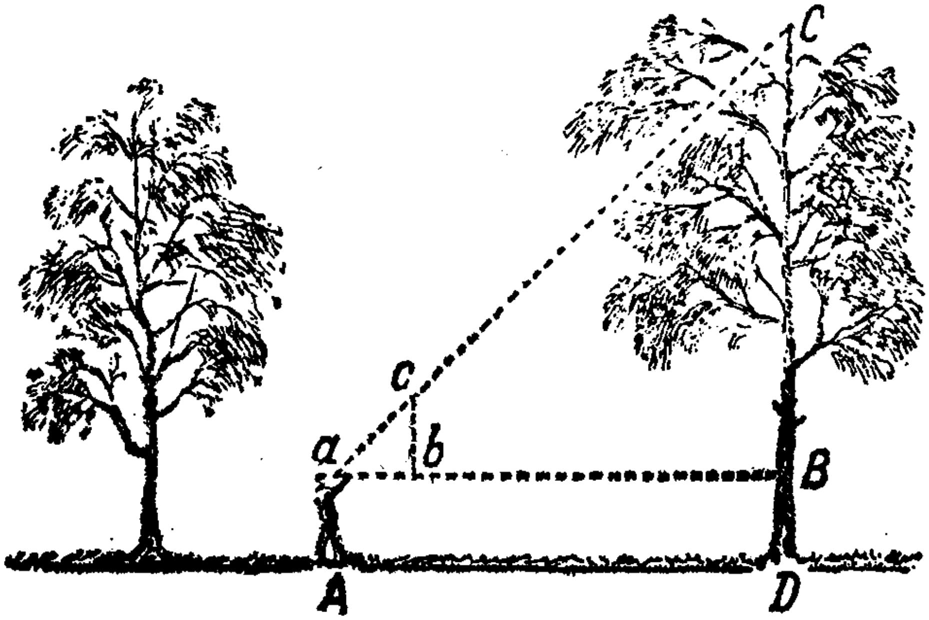
۴. استفاده از سنجاق برای اندازه‌گیری ارتفاعات

نقطه ، به عنوان رئوس یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ، درنظر می‌گیریم و درهریك از این نقاط یك سنجاق فرو می کنیم (شکل۴) . فرض کنید که گونیا برای رسم زاویهٔ قائمه و پرگار برای جدا کردن اضلاع مساوی در اختیار نداشته باشید . یك قطعه کاغذ بردارید و آنرا ازوسط تا کنید وسپس دوباره ازوسط تای قبلی، آنرا تا کنید، یك زاویهٔ قائمه بدست خواهید آورد . از همین کاغذ هم می‌توان به جای پرگار استفاده کرد وقطعات مساوی جدا نمود .

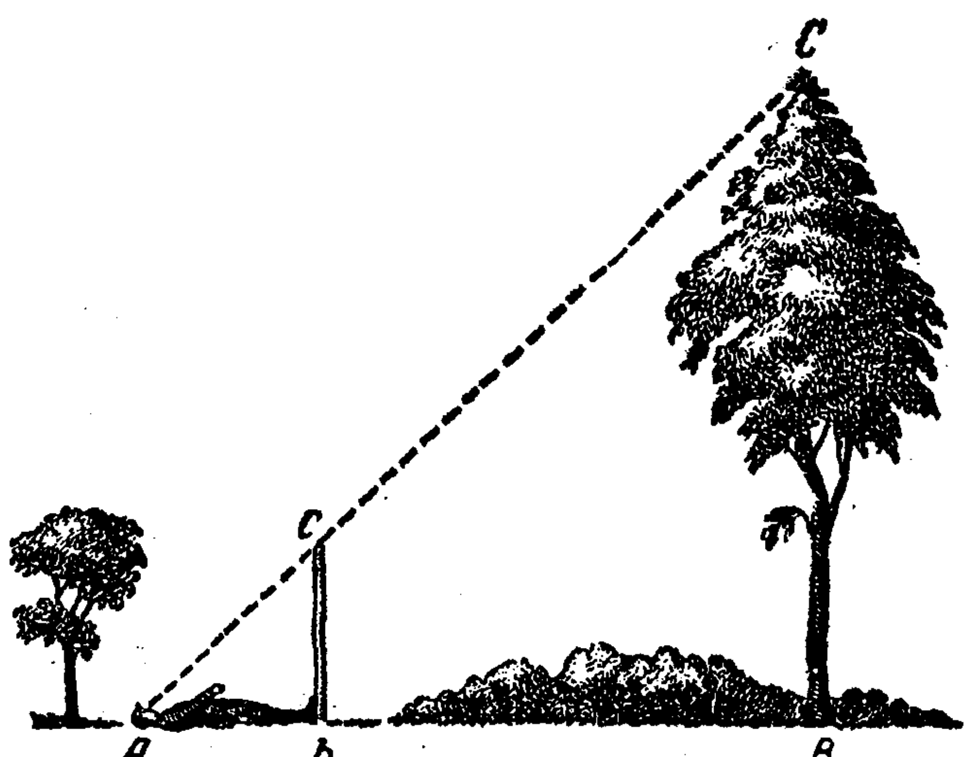
همانطور که می‌بینید می‌توان وسیلهٔ لازم را بطور کامل و باکمك مقدماتی‌ترین وسایل آماده کرد .

استفادهٔ از این وسیله مشکل‌تر ازساختن آن نیست . برای اندازه گیری ارتفاع درخت ، وسیله را چنان می‌گیریم که یکی از اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه بطور عمودی قرار گیرد ، برای این منظور می‌توان ازشاغولی استفاده کرد که به سنجاق بالائی آویزان شده (برای شاغول می‌توان ازنخی استفاده کرد که به انتهای آن وزنه‌ای بسته باشیم) . با دور ونزدیك شدن نسبت به درخت، همیشه می‌توان نقطه‌ای مانند A پیدا کرد (شکل۵) ، که از آنجا با نگاه کردن به سنجاقهای a و c ، نقطهٔ C ، رأس درخت ، بوسیلهٔ این سنجاقها مخفی شده باشد، و این به معنای آنست که امتداد وتر ac از نقطهٔ C می‌گذرد . دراین—

صورت واضح است که فاصلهٔ aB مساوی CB می‌شود (زیـرا زاویهٔ $a = ۴۵°$ است) .



۵. طرح استفاده از وسیلهٔ سنجاقی



۶. راه دیگری برای اندازه گیری ارتفاع

بنابراین فاصلهٔ aB (و یا بجای آن فاصلهٔ AD) را اندازه می‌گیریم وطول BD ، یعنی aA ، فاصله چشم تا زمین، را به‌آن‌اضافه می‌کنیم ، ارتفاع درخت بدست می‌آید .

می‌توان به طریق دیگری عمل کرد که حتی به سنجاق هم‌احتیاج نباشد .

برای این منظور به دیرکی احتیاج دارید که وقتی آنرا درزمین فرو کردید ، ارتفاع بیرون از زمین آن باقدشما برابر باشد . دیرك را باید جایی محکم کنید که اگرشما مطابق‌شکل۶ قرارگیرید، رأس‌درخت و رأس دیرك را دریك خط راست به‌بینید. ازآنجا که مثلث Abc قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است ، زاویهٔ A مساوی ۴۵ درجه می‌شود و بنابراین AB مساوی BC (یعنی ارتفاع درخت) می‌شود .

راه حل ژول‌ورن

دراینجا ازوسیلهٔ دیگری برای اندازه‌گیری‌ارتفاعات نام‌می‌بریم، که باز هم به اندازهٔکافی ساده است ، و در رمان مشهور ژول‌ورن بنام « جزیرهٔ اسرار آمیز » طرح آن داده شده است .

« مهندس گفت :

«ـ حالا باید ارتفاع‌سکوی بلندی را، که بالای آن دورازما قرار گرفته است، اندازه بگیریم .

«هربرت پرسید:

«ـ آیا وسائل‌کار را همراه خود دارید ؟

«ـ نه ! چیزی لازم نیست . به وسائل زیادی احتیاج نداریم و تنها یك وسیلهٔ ساده و دقیق‌کافی‌است .

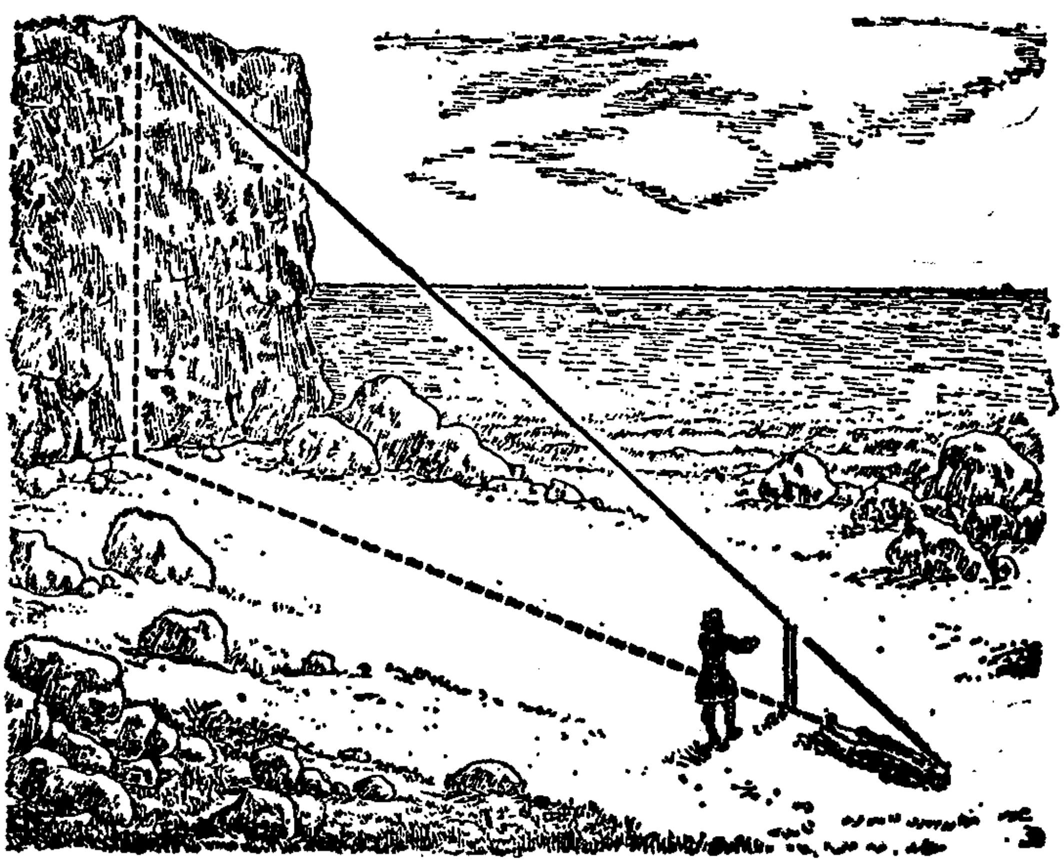
« جوان سعی کرد هرچه بیشتر چیزیاد بگیرد و بدنبال مهندس،

که از کنار دیوارسنگی تا ساحل پائین آمد ، براه افتاد .

« مهندس چوب راستی به طول ۱۲ فوت انتخاب کرد. اوآنرا با کمك قد خود (که اندازهٔ آنرا دقیقاً می‌دانست) تا حد ممکن با دقت اندازه‌گرفت . هربرت هم شاغولی که مهندس به او داده بود در دست داشت : شاغول به سادگی و با بستن سنگی به انتهای یك نخ درست شده بود .

« مهندس درحدود ۵۰۰ فوتی دیوارسنگی ایستاد وچوب را در شنزار فروکرد، به نحوی که دو فوت آن درخاك رفت وباکمك شاغول آنرا کاملا به صورت قائم درآورد .

« سپس‌ازچوب آنقدردورشدکه وقتی‌روی شنزارخوابیدتوانست نوك چوب و بالای بلندی را دریك خط راست به‌بیند (شکل۷) . این نقطه را با دقت و بوسیلهٔ‌گذاشتن یك تکه سنگ علامت گذاشت .



۷. چگونه قهرمان‌کتاب « ژول ورن » ارتفاع صخره‌ها را اندازه می‌گرفت؟

« درهمانحال که مهندس اززمین برمیخاست ازهربرت پرسید:

« ـ آیا با مقدمات هندسه آشنائی‌دارید ؟

« ـ بله !

« ـ معنای مثلثهای متشابه را می‌دانید ؟

« ـ بله ! اضلاع متناظر آنها متشابه‌اند .

«ـ کاملاصحیح‌است! ومنهم دومثلث قائم‌الزاویهٔ متشابه‌ساخته‌ام. درمثلث کوچکتر یکی ازاضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه طول چوب قائم و ضلع دیگرفاصلهٔ پای این چوب تا علامت سنگی ووتراین مثلث‌هم طول شعاع دید من تا نوك چـوب است . در مـورد مثلث دوم اضلاع مجاوربه زاویهٔ قائمه عبارتند از: ارتفاع صخره، که بایدآنرا معین کنیم، و فاصلهٔ پای دیوار‌این‌صخره تا علامت سنگی. وتراین‌مثلث هم امتداد شعاع‌دید من‌تانوك صخره‌است‌که برامتداد وترمثلث کوچکترقراردارد.

« جوان گفت :

« ـ فهمیدم ! نسبت فاصلهٔ علامت تا چوب به فاصلهٔ علامت تـا پای دیواربرابراست با نسبت ارتفاع چوب به ارتفاع دیوار .

« ـ بله . و بهمین مناسبت‌اگردوفاصلهٔ اول را اندازه بگیریـم ، با توجه به اینکه ارتفاع چوب هم معلوم است می‌تـوانیم جزء چهارم تناسب یعنی‌ارتقاع دیواررا اندازه بگیریم. بااین‌ترتیب‌ماتوانستیم‌ارتفاع دیوار را بدون اندازه‌گیری مستقیم بدست آوریم .

« دوفاصلهٔ افقی‌را اندازه‌گرفتند: فاصلهٔ کوچکتر۱۵فوت وفاصلهٔ بزرگتر ۵۰۰ فوت بود .

« وبالاخره مهندس برای محاسبهٔ اصلی روابط زیررا نوشت :

$$۱۵:۵۰۰ = ۱۰:x;$$

$$۵۰۰ \times ۱۰ = ۵۰۰۰;$$

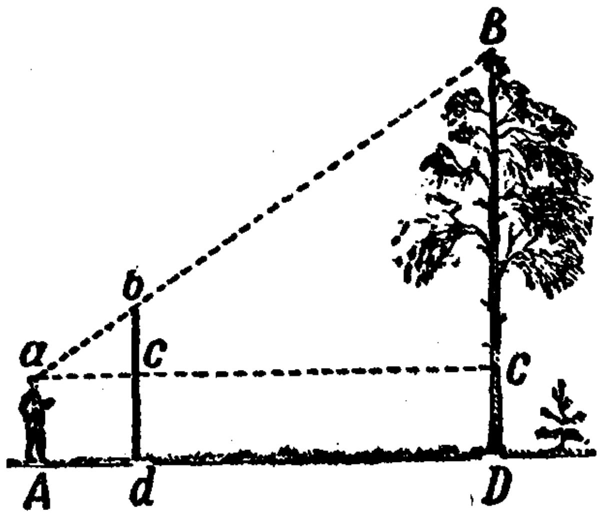
$$۵۰۰۰:۱۵ = ۳۳۳/۳$$

«یعنی ارتفاع دیوارسنگی برابربا۳/۳۳۳ فوت بود.»

گروهبان چه کرد

بعضی از روشهائی که برای اندازه‌گیری ارتفاعات ذکر کردیم، از اینجهت که باید روی زمین دراز کشید، ناراحت کننده بنظرمی‌رسد. می‌توان ترتیبی‌داد که این ناراحتی هم برطرف شود.

ازاتفاقی گفتگو می کنیم که دریکی ازجنگهای بزرگ میهنی پیش آمده‌است. به واحد ستوان «ایوانوکا» دستور رسید که بر روی یك رودخانهٔ کوهستانی پلی بسازند. در ساحل مقابل فاشیستها مستقربودند. ستوان برای تعیین جای پل، یك گروه تجسسی را به فرماندهی گروهبان سالخورده «پوپوو» مأمور کرد. این گروه درنزدیکترین نقطهٔ جنگل، قطر و ارتفاع درختهای نمونه را اندازه گرفت و مقدار چوبی را که می‌توانستند برای ساختن پل مورداستفاده قراردهند، محاسبه کرد.



۸. اندازه‌گیری ارتفاع درخت به کمك چوب

ارتفاع درختها را همانطورکه در شکل۸ دیده می‌شود با کمك یك قطعه چوب اندازه‌گرفتند. طریقهٔ اندازه‌گیری آنها چنین بود:

قطعه چوبی را که طول آن از قد خودتان بیشتر است، انتخاب کنید و آنرا در فاصله‌ای از درخت، به زمین فرو کنید (شکل۸). سپس ازچوب درامتداد Dd آنقدرعقب بروید تا در نقطه‌ای مانند A بتوانید رأس درخت ونقطهٔ b (بالاترین نقطهٔ چوب) را دریك‌امتداد به‌بینید. در

همانجا بدون اینکه وضع سرخود را تغییردهید، در جهت خط راست و افقی aC نگاه کنید ، نقاط c و C را روی چوب و تنه درخت درجائی که شعاع دید شما به آنها رسیده‌است ، در نظــر بگیریــد و از کسیکه همراه شماست خواهش کنید دراین نقاط علامت بگـذارد . حــالا این میماند که‌با کمك مثلثهای‌متشابه abc و aBC ، فاصلهٔ BC را از تناسب زیر بدست آورید :

$$BC:bc = aC:ac;$$

و از آنجا :

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{ac}$$

فواصل bc ، aC و ac را می‌توان مستقیماً بــدست آورد . بــه مقدار بدست آمدهٔ BC باید فاصلهٔ CD را (که آنهم مستقیماً انــدازه گرفته می‌شود) اضافه کردتا ارتفاع مجهول درخت بدست‌آید .

برای تعیین مقدارچوب قابل استفاده، گروهبان پیر به سربازان دستور داد تا مساحت کل جنگل را اندازه بگیرند ، سپس مقدار چوبی که در یك قطعه ۵۰ × ۵۰ مترمربع بود محاسبه کرد و ضرب مربــوطه را انجام داد .

فرمانده با توجه به اطلاعاتی که از گــروههای اکتشافی رسید ، توانست تصمیم بگیرد که درکجا و چگونه پلی می‌تواند بسازد . پــل فوراً ساخته شد و جنگ به موفقیت به انجام رسید *.

باکمك دفتر یادداشت

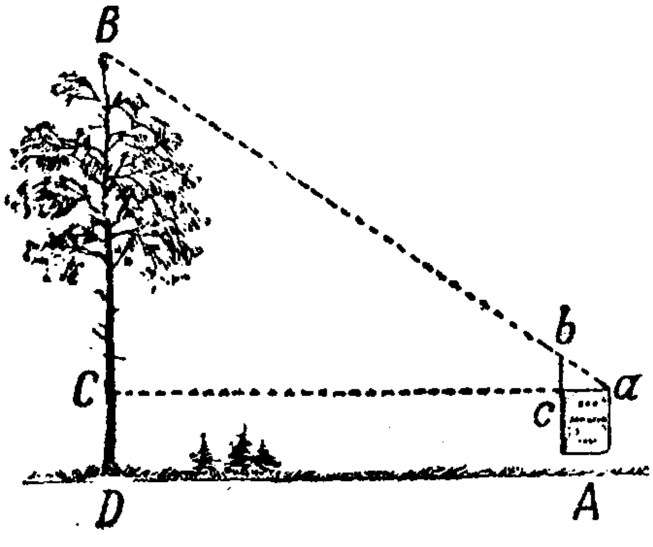
از دفترچهٔ یادداشت جیبی هم می‌توان به عنوان وسیله‌ای برای

*) این حادثه و حادثهٔ بعدی مربوط به جنگ بزرگ میهنی به وسیلهٔ آ. دمیدویچ در مجلهٔ «اطلاعات نظامی» شمارهٔ ۸ سال ۱۹۴۹ چاپ شده‌است .

تخمین ارتفاعات غیرقابل دسترس استفاده کرد . به شرطی که این دفترچه یك مداد همراه خود داشته باشد . به کمك این دفترچه می‌توان دو مثلث متشابه را در فضا بوجود آورد واز روی آنها ارتفاع مجهول را محاسبه کرد . دفترچه را باید بنحوی که ساده شدهٔ آن در شکل ۹ دیده می‌شودپهلوی چشم نگه داشت . صفحهٔ دفترچه را بطور عمودی نگه می‌داریم و مدادرا ازغلاف خود بیرون‌آورده وآنقدربالا می‌بریم که وقتی از a رأس B درخت را نگاه می‌کنیم ، شعاع دید از نقطهٔ b ، نوك مداد ، هم بگذرد . در اینصورت با توجه به تشابه دو مثلث abc و aBC می‌توان ارتفاع BC را از تناسب زیر بدست آورد :

$$BC : bc = aC : ac$$

فواصل bc ، ac و aC را می‌توان مستقیماً بدست آورد . به مقدار BC باید CD (یعنی ارتفاع چشم ناظر) را اضافه‌کرد ، تا ارتفاع اصلی درخت بدست آید .



۹. اندازه‌گیری ارتفاع درخت با کمك دفترچهٔ یادداشت

از آنجا که عرض ac دفترچه مقدار ثابتی است ، اگر همیشه به فاصلهٔ معینی از درخت ومثلا ۱۰ متری آن، به‌ایستید، ارتفاع درخت تنها با اندازه‌گیری قسمت bc از مداد بدست می‌آید . بنابراین شما

می‌توانید از قبل با اندازه‌گیریهای مختلف ، ارتفاعات متناظر را روی مدادعلامت‌بگذارید. در اینصورت دفترچهٔ یادداشت شما به یك ارتفاع سنج تبدیل‌می‌شود، زیرا بدون هیچگونه محاسبه‌ای می‌توانیدارتفاعات موردنظر را از روی آن بدست آورید .

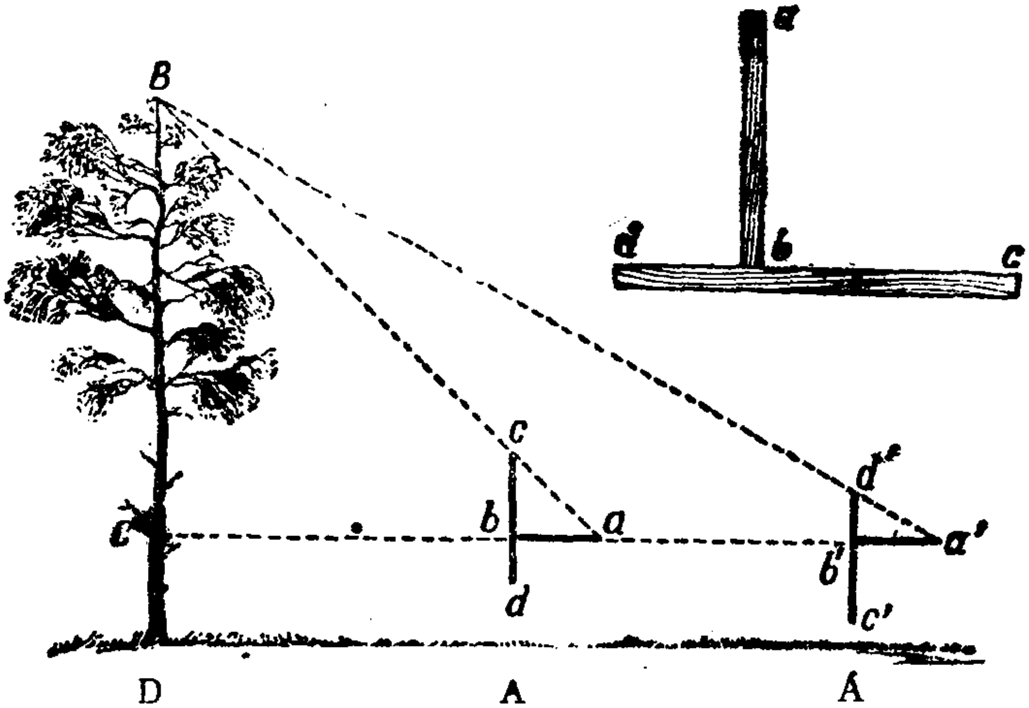
اگر نتوانیم به درخت نزدیك شویم

گاهی وضع درخت طوری است که نمی‌توانیم به راحتی خود را به پای آن برسانیم . آیا دراینحالت هم می‌توانیم ارتفاع درخت را بدست آوریم ؟

در این موارد هم می‌توان به سادگی ارتفاعات را محاسبه کرد . برای این منظور هم باید از وسیله‌ای استفاده کرد که مثل موارد قبل به سادگی قابل تهیه است . دو تختهٔ ab و cd (قسمت بالای شکل ۱۰) را تحت زاویهٔ قائمه چنان بهم محکم می‌کنیم که ab مساوی bc ، و bd نصف ab باشد . تمام وسیلهٔ مورد نظر همین است . برای اندازه گیری ارتفاع ، وسیله را چنان در دست می‌گیریم که امتداد cd قائم باشد (برای این منظور می‌توان از نخی که سنگی بـه انتهای آن بسته شده ـ شاغول ـ استفاده کرد) و در دو نقطه آنرا قرارمی‌دهیم : ابتدا (شکل ۱۰) در نقطهٔ A ، که در آنجا نقطهٔ c بطرف بالا باشد و سپس در نقطهٔ ´A ، که در آنجا انتهای d بطرف بالا قـرار گیرد . نقطهٔ A باید چنان انتخاب شود که شعاع دید از نقطهٔ a به نقطهٔ c از B ، رأس درخت ، بگذرد . بهمین ترتیب نقطهٔ ´A را باید طوری جستجو کرد که ´a و ´d و B بر یك امتداد باشند. وقتی که نقاط A و ´A * را پیدا کنیم ، در حقیقت ارتفاع BC را پیدا کرده‌ایم ، زیـرا ارتفاع مجهول

---

*) باید نقاط A و ´A با پای درخت بریك استقامت باشند .



۱۰ . به کار بردن ارتفاع یاب ساده‌ای که از دوقطعه چوب درست‌شده است

BC با فاصلهٔ ´AA برابر است . ایـن تساوی بـه سادگی از روابط $aC = BC$ و $a'C = ۲BC$ بدست می‌آید ، یعنی :

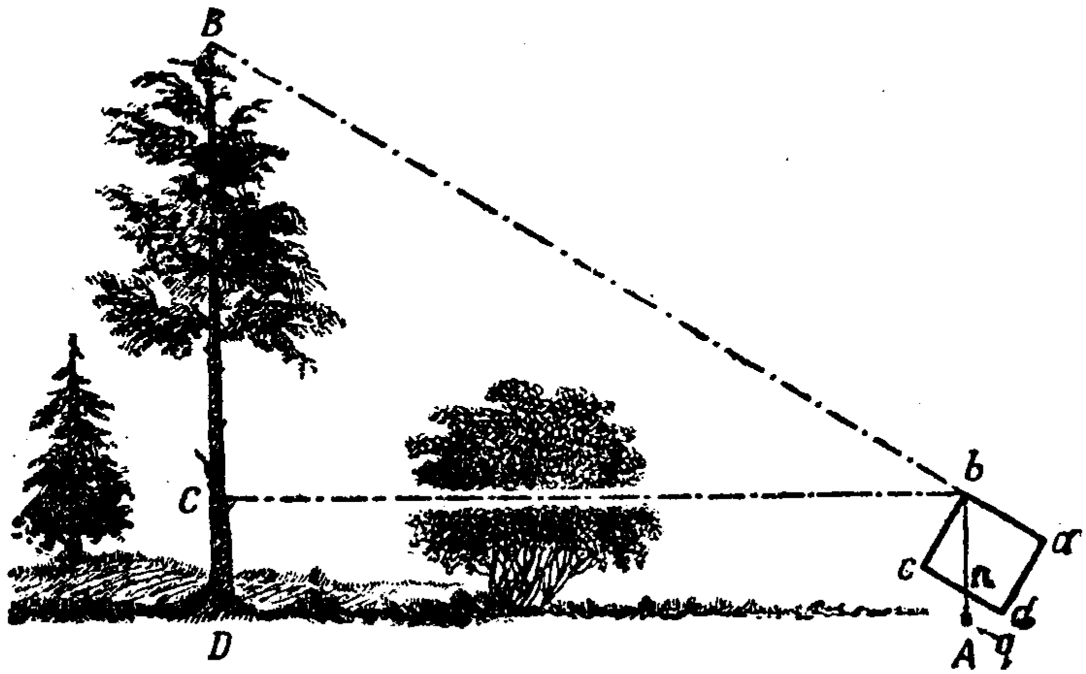
$$a'C - aC = BC$$

می‌بینید که توانستیم با استفاده از این وسیلهٔ ساده ، بدون اینکه به پای درخت نزدیك شویم ، ارتفاع آنرا محاسبه کنیم . واضح است که اگر می‌توانستیم به پای درخت نزدیك شویم ، کافی بـود یکی از دو نقطهٔ A یا ´A معلوم شود تا ارتفاع درخت بدست آید .

می‌توان به جای دو تخته چوب ، از چهار سنجاق استفاده کرد. به این ترتیب که آنها را بشکل وسیله‌ای که ذکر کردیم روی یك چوب محکم کنیم .

ارتفاع یاب جنگلبانان

حالا موقع آنست با ارتفاع یابهای امروزی ، که مورد استفادهٔ



۱۱. طرح استفاده از ارتفاع یاب در جنگلها

کارگران جنگل قرار می‌گیرد ، آشنا شویم . یکی از این ارتفاع یابها را ، با مختصر تغییری ، شرح می‌دهیم ؛ بنحوی که ساختن آن برای هر کسی ممکن باشد .

اصل ساختمان را در شکل ۱۱ می‌بینید . مستطیل مقوائی و یا چوبی abcd را چنان در دست می‌گیریم که ضلع ab آن و رأس B درخت بریك امتداد قرارگیرند . در نقطهٔ b نخی که وزنهٔ q به انتهای آن بسته شده آویزان است . نقطهٔ n را روی cd در جائی که نخ این ضلع را قطع کرده‌است ، علامت می‌گذاریم . مثلثهای bBC و bnc متشابه‌اند ، زیرا هر دو قائم‌الزاویه‌اند و زوایای حادهٔ bBC و bnc آنها با هم برابر است (اضلاع این دو زاویهٔ حاده با هم موازی‌است).
بنا براین می‌توانیم تناسب زیر را بنویسیم :

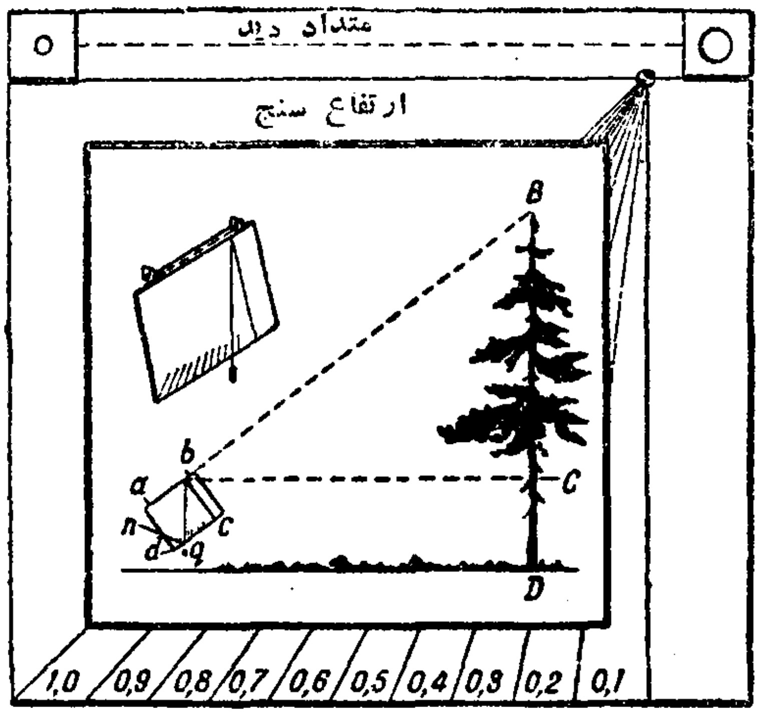
$$BC:nc=bC:bc;$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$BC=bC\cdot\frac{nc}{bc}$$

وچون bC ، nc و bc را می‌توان مستقیماً اندازه‌گرفت، ارتفاع درخت با اضافه کردن CD (ارتفاع وسیلهٔ اندازه‌گیری تا زمین) به BC بدست می آید .

حالا باید به بعضی جزئیات بپردازیم. اگرضلع bc مثلا مساوی ۱۰ سانتیمتر باشد و ضلع dc را با واحد سانتیمتر تقسیم بندی کرده باشیم ، نسبت $\frac{nc}{bc}$ همیشه با کسر اعشاری معین می‌شود ، واز آنجا معلوم

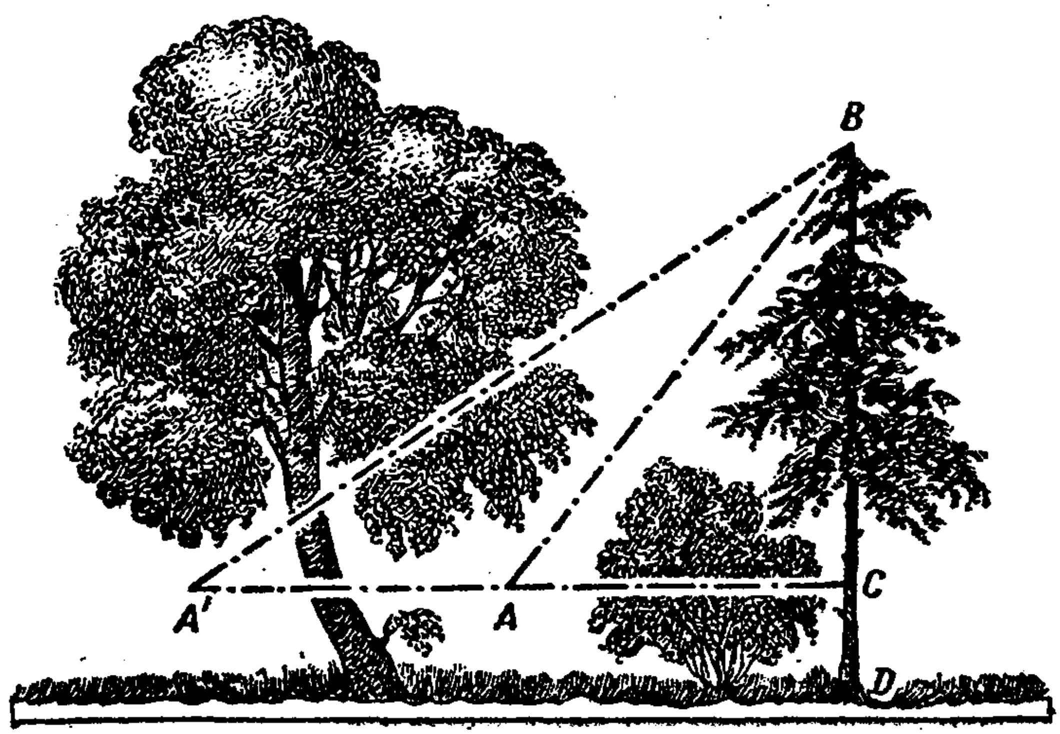


۱۲. ارتفاع یاب جنگلبانها

می‌شود که ارتفاع BC درخت چه قسمتی از فاصلهٔ bC است . مثلا فرض کنید که نخ درمقابل قسمت هفتم قرار گرفته باشد (یعنی $nc = ۷^{cm}$) دراینصورت ارتفاع درخت برابر با ۰٫۷ فاصلهٔ ناظر تادرخت خواهدبود.

مطلب دوم مربوط به ناظر است : برای اینکه راحت‌تر بتوان در امتداد ab نگاه کرد ، می‌توان روی زوایای بالائی مستطیل مقوائی دومربع تعبیه کرد و درهریك ازاین مربعها یك سوراخ : یکی کوچکتر برای جلوچشم و دیگری بزرگتر برای دیدن رأس درخت (شکل۱۲).

آخرین تکمیل مربوط به وسیله است که تقریباً با اندازه‌های طبیعی در شکل ۱۲ داده شده است. تهیهٔ این وسیله به سادگی و سرعت انجام می‌گیرد و به هیچگونه مهارت و استادی خاصی احتیاج ندارد. این‌وسیله جای زیادی را درجیب اشغال‌نمی‌کند ولی‌درعوض‌می‌توانید هروقت که به گردش و تفریح می‌روید، هربلندی راکه سرراه شماقرار دارد (درختها ، ستونها ، عمارات و غیره) اندازه بگیرید .



۱۳ . اندازه‌گیری ارتفاع درختی که نمی‌توان به آن نزدیك شد

مسئله

آیا به‌کمك ارتفاع یاب می‌توان ارتفاع درختی را اندازه‌گرفت که نزدیك شدن به پای آن ممکن نیست؟ در صورت امکان راه حل آن چگونه است ؟

حل

باید از وسیله در دو نقطهٔ A و ´A استفاده کرد (شکل ۱۳) .

فرض کنید که مثلا در نقطهٔ A داشته باشیم :

$$BC = ۰/۹AC$$

و در نقطهٔ ´A :

$$BC = ۰/۴A'C$$

در اینصورت میدانیم :

$$AC = \frac{AC}{۰/۹} ; \ A'C = \frac{BC}{۰/۴}$$

واز آنجا :

$$A'A = A'C - AC = \frac{BC}{۰/۴} - \frac{BC}{۰/۹} = \frac{۲۵}{۱۸}BC$$

و به این ترتیب خواهیم داشت :

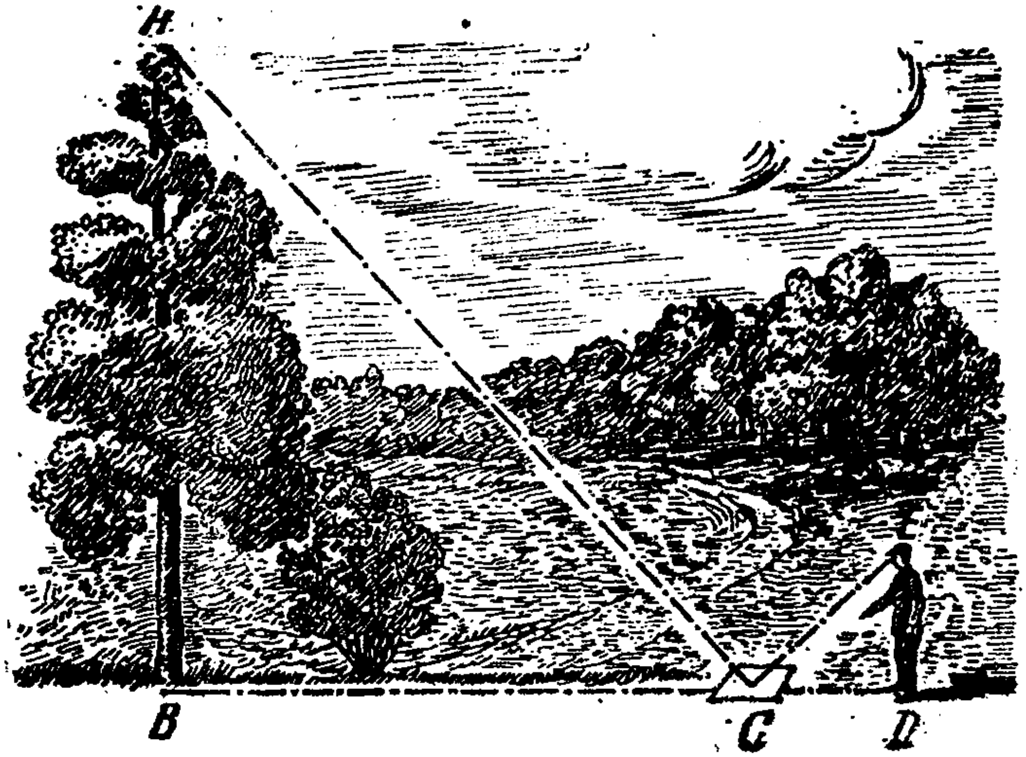
$$BC = \frac{۱۸}{۲۵}A'A = ۰/۷۲A'A$$

می‌بینید که با اندازه گرفتن فاصلهٔ ´A´A ، بین دو نقطهٔ مشاهده، و در دست داشتن قسمتهای ارتفاع‌یاب در این دونقطه ، می‌توان ارتفاع غیرقابل دسترس را محاسبه‌کرد.

به کمك آینه

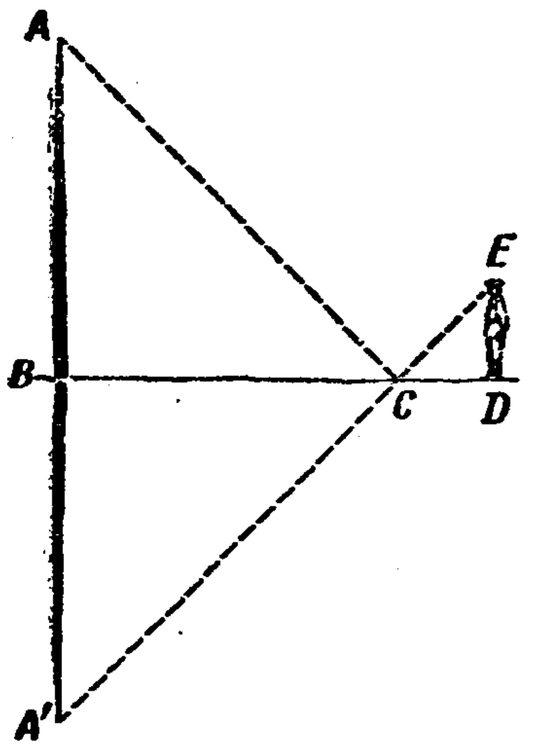
مسئله

آینه هم وسیلهٔ‌دیگری برای‌تعیین ارتفاع‌درخت‌است. درفاصله‌ای از درخت (شکل ۱۴) ، که قابل اندازه‌گیری باشد. آینه‌ای روی زمین صاف در نقطهٔ C بطور افقی می‌گذاریم . از آینه آنقدر دور می‌شویم تا به نقطهٔ D برسیم که در آنجا رأس A درخت را در آینه به بینیم . در اینصورت نسبت‌ارتفاع AB درخت به قد مشاهده کنندهٔ ED برابر



۱۴. اندازه‌گیری ارتفاع به کمك آینه

است با نسبت BC ، فاصلهٔ آینه تا درخت ، به CD ، فاصلهٔ آینه تا مشاهده‌کننده . چرا ؟



۱۵. ساختمان‌هندسی وضعی که به‌وسیلهٔ آینه ، ارتفاعی اندازه‌گیری می‌شود

حل

اساس این مطلب قانون انعکاس نوراست. طبق این قانون باید $AB = A'B$ باشد(شکل۱۵). از تشابه دو مثلث BCA' و CED نتیجه می‌شود :

$$A'B : ED = BC : CD$$

و در این رابطه کافی است بجای $A'B$ مساویش AB را قرار

دهیم تا به رابطهٔ مورد نظر برسیم .

از این وسیلهٔ ساده و بدون زحمت می‌توان در هرهوائی‌استفاده کرد ، بشرطی که سر و کار ما با یك درخت تنها باشد ، نه با انبوه درختان .

مسئله

ولی‌اگربه پای درخت دسترسی نداشته باشیم ، چگونه می‌توان به کمك آینه ارتفاع آنرا اندازه گرفت ؟

حل

این یك مسئلهٔ قدیمی است که بیش از ۵۰۰ سال از عمر آن می‌گذرد و بوسیلهٔ ریاضی‌دان قرون وسطی آنتونی دوکرمون درکتاب « دربارهٔ مساحی عملی » مورد مطالعه قرار گرفته است (سال ۱۴۰۰ میلادی) .

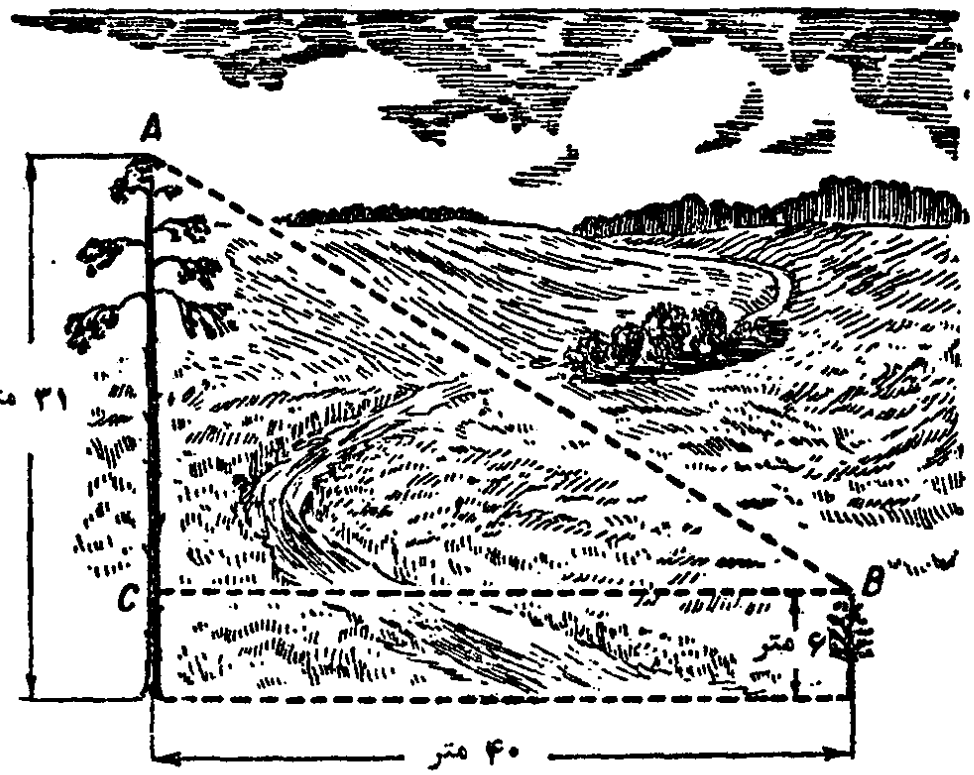
مسئله به این ترتیب حل می‌شود که از آینه در دو نقطهٔ مختلف استفاده کنیم، با این عمل می‌توان به سادگی ازتشابه مثلثها نتیجه‌گرفت که ارتفاع درخت برابر است با بلندی ناظر ضرب در نسبت فاصلهٔ بین دوآینه براختلاف فواصل ناظرازآینه .

قبل از اینکه بحث مربوط به اندازه گیری ارتفاعات را تمام کنیم ، خواننده را با مسئلهٔ دیگری مربوط به «جنگل» آشنا می‌کنیم.

دو درخت کاج

مسئله

به فاصلهٔ ۴۰ متر از یکدیگر دو درخت کاج روئیده‌اند . ارتفاع



۱۶. فاصلهٔ بین دو رأس درخت چقدر است ؟

دو درخت را اندازه گرفته‌ایم : یکی ۳۱ متر و دیگری که جوانتر بود ۶ متر ارتفاع داشتند .

آیا می‌توانید فاصلهٔ بین دو رأس درخت را محاسبه کنید ؟

حل

فاصلهٔ مجهول بین دو رأس درخت ، طبق قضیهٔ فیثاغورث چنین است (شکل ۱۶):

$$\sqrt{۴۰^{۲}+۲۵^{۲}} = ۴۷ \text{ (متر)}$$

شکل تنهٔ درخت

حالا دیگر ضمن گردشی که درجنگل می کنید ، می‌توانیدارتفاع هر درختی را اندازه بگیرید و برای این منظور از نیم دوجین روشی

کـه یاد گرفته‌اید می‌توانید استفاده کنید . احتمالا برای شما جالب باشد که ضمناً بتوانید حجم درخت را نیز محاسبه کنید و به بینید چند مترمکعب چوب در آن وجود دارد ومثلا با اطلاع بروزن آن به‌بینید که آیامی‌توان آنرا بایك گاری حمل کرد یا نه؟ هیچیك از این دو مسئله به‌سهولت تعیین ارتفاع درخت حل نمی‌شوند ، متخصصین امر نتوانسته‌اند راهی برای حل دقیق این مسائل پیدا کنند و به تخمین کم و بیش تقریبی آنها اکتفا کرده‌اند . همینطور برای تنهٔ بریدهٔ درخت هم که روبروی شما ، بدون شاخ و برگ ، افتاده است ، نمی‌توان مسئله را خیلی ساده حل کرد .

مشکل مربوط به‌آنست که تنهٔ درخت ، حتی درمورد بهترین و یکنواخت‌ترین آنها ، نه استوانه ، نه مخروط کامل ، نه مخروط ناقص و نه هیچ شکل کامل هندسی دیگری نیست که بتوان طبق روابط هندسه حجم آنرا بدست آورد . تنهٔ درست به‌اینجهت استوانه نیست که هرچه بالاتر برویم از قطرش کم می‌شود ، مخروط هم نیست ، زیرا « مولد » آن مستقیم نیست بلکه خط منحنی‌است و این خط منحنی (که ازدوران آن به دور محور درخت ، تنه درخت بوجود آمده است) دایره هم نیست .*

محاسبهٔ حجم تنهٔ درختان را با تقریب لازم می‌توان تنها به‌کمك حساب انتگرال انجام داد . به عبارت دیگر، اگرچه ممکن است عجیب

---

*) این منحنی به منحنی $y^2 = ax^3$ (که سهمی نیم‌مکعبی نامیده می‌شود) خیلی نزدیك است، جسمی که از دوران این منحنی بدست می‌آید **نیلوئید** نامیده می‌شود (از اسم ریاضی‌دان قدیم بنام **نیلا** که برای نخستین بار طول قوس این منحنی را محاسبه کرد). به این ترتیب تنهٔ درخت بیش ازهمه به نیلوئید نزدیك است . حجم نیلوئید به وسیله روابطی که مربوط به ریاضیات عالی است محاسبه می‌شود .

باشد ، محاسبهٔ مربوط به‌یك تیرچوبی ساده به ریاضیات عالی مربوط می‌شود . بسیاری گمان می کنند که ریاضیات عالی‌تنها مربوط به موارد کاملا خاصی است ودرزندگی عملی روزمره اطلاع برریاضیات مقدماتی کافی است . ولی این استنباط بکلی غلط است : حجم ستارگـان و یا سیارات را می‌توان با دقت کافی با کمك هندسه بدست آورد ولی مثلا حجم یك تیر چوبی و یـا حجم یك بشکهٔ آب جو را بدون هندسهٔ تحلیلی وحساب انتگرال نمی‌توان محاسبه کرد. ولی‌ما نمی‌خواهیم در این‌کتاب به قوانین ریاضیات عالی بپردازیم و بنابراین به این قانع می‌شویم که تنها محاسبهٔ تقریبی حجم تنهٔ درختان را مطرح کنیم.

با توجه به این مطالب است که حجم تنهٔ درختان را درمواردی مثل حجم یك مخروط ناقص و یا در مواردی کـه تا انتهای رأس لازم باشد مثل‌حجم یك مخروط وبالاخره مواقعی که با یك تیرچوبی کوتاه سروکار داشته باشیم ، مثل حجم یك استوانه در نظر می‌گیریم. و می‌دانیم که حجم هریك از این سه جسم هندسی را هم می‌توان به سادگی بدست‌آورد . آیا نمی‌شود رابطه‌ای بدست‌آورد که ، بخاطریکنواخت شدن محاسبات ، بتوان برای محاسبهٔ حجم هریك از اجسام نامبرده از آن استفاده کرد ؟ اگرچنین رابطه‌ای بدست آوریم دیگر برای ما مهم نخواهد بود که ببینیم تنهٔ درخت مورد نظربه‌کدامیك از این سه جسم: استوانه ، مخروط و مخروط ناقص ، نزدیك‌تراست .

رابطهٔ کلی

می‌توان‌رابطه کلی بدست‌آورد که نه‌تنها برای‌استوانه، مخروط ومخروط‌ناقص بلکه برای هرنوع منشور ، هرم (کامل یا ناقص) وحتی کره مورد استفاده قرار گیرد . این رابطهٔ مهم ، که نزد ریاضی دانان

به رابطهٔ سیمپسون مشهور است ، چنین است :

$$v = \frac{h}{۶}(b_۱ + ۴b_۲ + b_۳) \begin{cases} h: & \text{ارتفاع جسم} \\ b_۱: & \text{سطح قاعدهٔ پائین} \\ b_۲: & \text{سطح مقطع متوسط*} \\ b_۳: & \text{سطح قاعدهٔ بالا} \end{cases}$$

مسئله

ثابت کنید که با کمك رابطه‌ای که ذکر کردیم ، می‌توان حجم هر یك از هفت جسم هندسی زیر را بدست آورد : منشور ، هرم ، هرم ناقص ، استوانه ، مخروط ، مخروط ناقص و کره .

حل

با بکاربردن این رابطه درمورد هریك ازاجسام نامبرده، می‌توان به سادگی صحت آنرا اثبات کرد . برای منشور واستوانه داریم (شکل ۱۷ — a) :

$$v = \frac{h}{۶}(b_۱ + ۴b_۱ + b_۱) = b_۱ \cdot h;$$

برای هرم و مخروط (شکل ۱۷–b) :

$$v = \frac{h}{۶}(b_۱ + ۴ \times \frac{b_۱}{۴} + ۰) = \frac{b_۱ \cdot h}{۳};$$

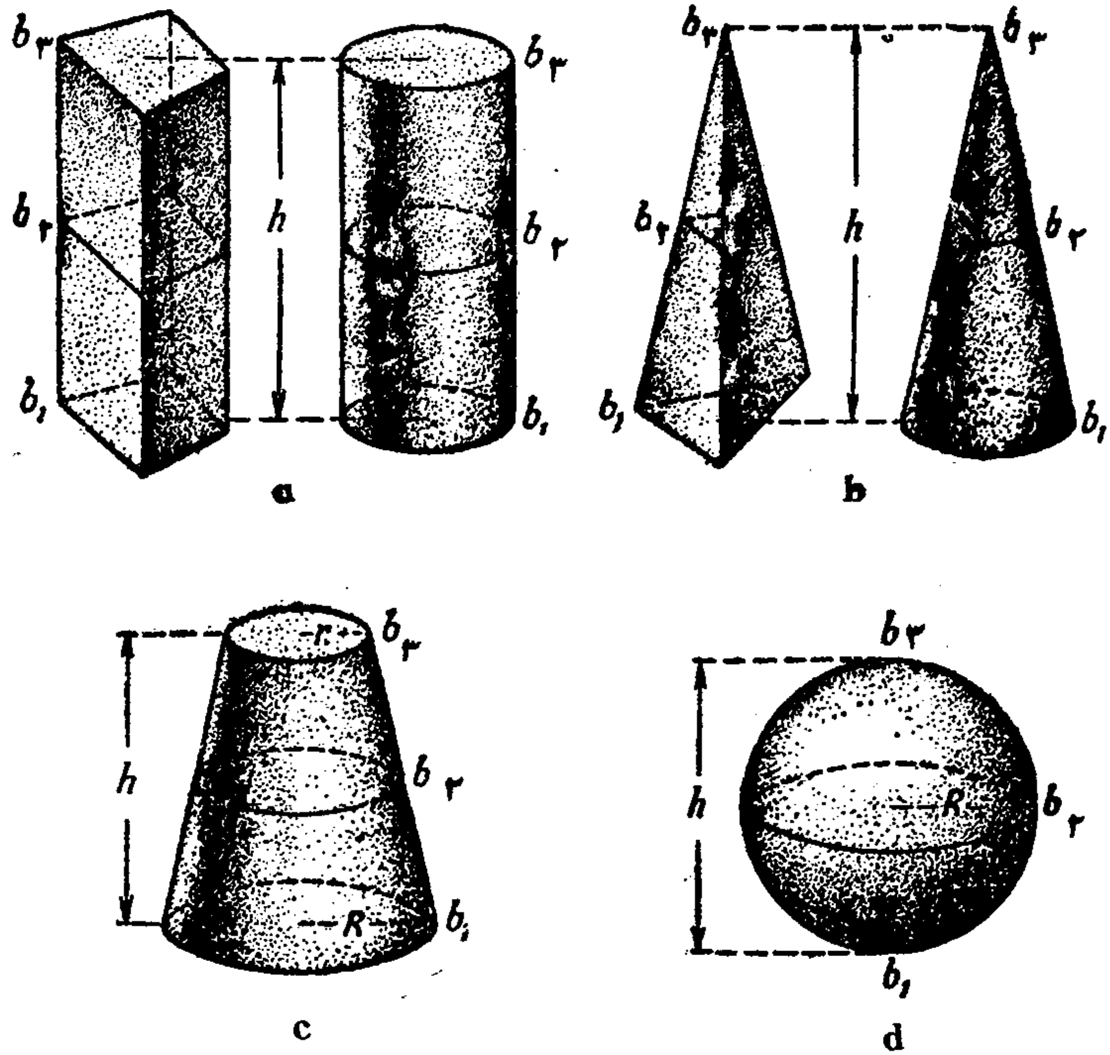
برای مخروط ناقص (شکل ۱۷–c) :

$$v = \frac{h}{۶}\left[\pi R^۲ + ۴\pi\left(\frac{R+r}{۲}\right)^۲ + \pi r^۲\right] =$$

$$= \frac{h}{۶}(\pi R^۲ + \pi R^۲ + ۲\pi Rr + \pi r^۲ + \pi r^۲) =$$

*) یعنی سطح مقطع جسم در وسط ارتفاع آن

$$=\frac{\pi h}{۳}(R^{۲}+Rr+r^{۲});$$



۱۷. اشکال هندسی که می‌توان حجم آنها را طبق یك رابطه بدست آورد

برای هرم ناقص هم کاملا شبیه مخروط ناقص می‌توان عمل کرد و بالاخره برای کره (شکل ۱۷-d) :

$$v=\frac{۲R}{۶}(۰+۴\pi R^{۲}+۰)=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

مسئله

یکی‌دیگر از خصوصیات جالب این رابطهٔ کلی را ذکر می کنیم : این‌رابطه‌می‌تواند برای محاسبهٔ مساحت اشکال‌هندسی زیرهم بکار رود :

متوازی‌اضلاع ، ذوزنقه و مثلث با این شرط که :

h ارتفاع شکل ،

b_1 طول قاعدهٔ پائین ،

b_2 طول قاعدهٔ متوسط ،

b_3 طول قاعدهٔ بالا باشد ؟

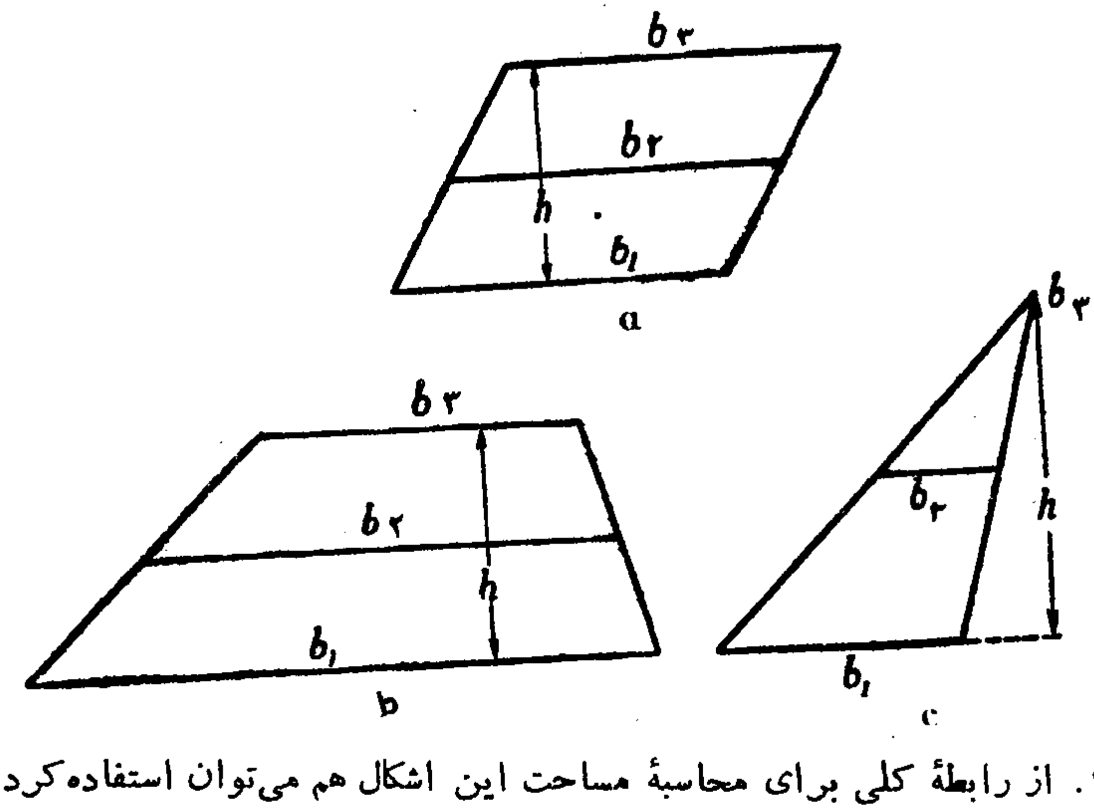
چگونه می‌توان این قضیه را ثابت کرد !

حل

با استفادهٔ از رابطه خواهیم داشت :

برای متوازی‌الاضلاع (مربع و مستطیل) (شکل ۱۸-a) :

$$S=\frac{h}{6}(b_1+4b_1+b_1)=b_1\cdot h;$$



۱۸. از رابطهٔ کلی برای محاسبهٔ مساحت این اشکال هم می‌توان استفاده کرد

برای ذوزنقه (شکل ۱۸ - b)

$$S=\frac{h}{6}\left(b_1+4\times\frac{b_1+b_2}{2}+b_2\right)=\frac{h}{2}(b_1+b_2);$$

و برای مثلث (شکل ۱۸-c) :

$$S=\frac{h}{6}\left(b_1+4\times\frac{b_1}{2}+0\right)=\frac{1}{2}b_1\cdot h.$$

می‌بینید که حق داشتیم این رابطه را ، **رابطهٔ کلی** اسم بگذاریم.

حجم و وزن درخت قطع نشده

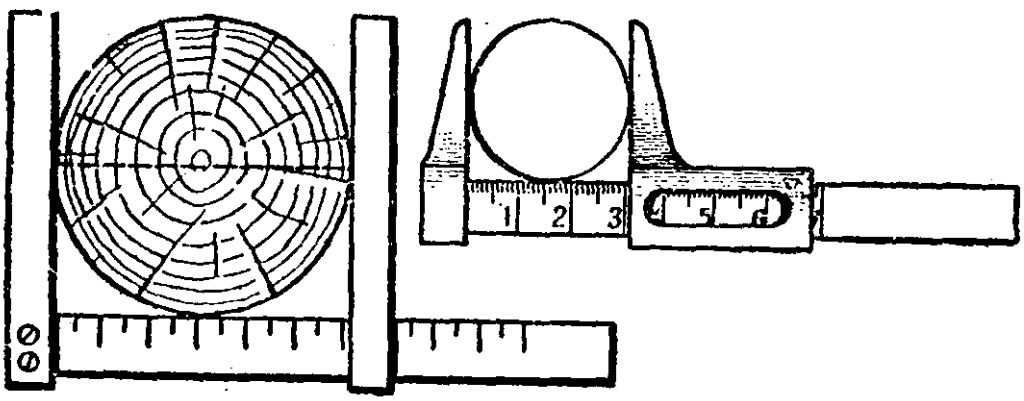
به این ترتیب ، با در دست داشتن رابطهٔ کلی می‌توانیم حجم تنهٔ درختان بریده را بطور تقریب بدست آوریم ، بدون اینکه دربارهٔ شکل آنها دقت کرده باشیم که به کدامیك ازاجسام هندسی استوانه، مخروط

۱۹. اندازه‌گیری قطر درخت به وسیلهٔ خط‌کش دوبازد

ویا مخروط‌ناقص بیشترشبیه است. برای‌این منظورباید چهاراندازه را بدست‌آوریم: طول‌تنهٔ درخت واندازهٔ سه‌قطر آنرا ــ قطرپائین ، قطربالا و قطر وسط تنه درخت را . اندازه‌گیری قطرهای پائین و بالای درخت به سادگی انجام می‌گیرد و قطر وسط درخت را هم می‌توان بدون‌وسیله

(« خط‌کش دوبازوی» جنگلبانان شکلهای ۱۹ و ۲۰*) بدست آورد. ریسمانی دور تنهٔ درخت می‌گیریم و طول آنرا بر $۳\frac{۱}{۷}$ تقسیم می‌کنیم، قطر درخت بدست می‌آید.**

حجم درختهای قطع شده را می‌توان با همین روش بدست‌آورد که برای بسیاری از موارد عملی به اندازهٔ کافی دقیق خواهد بود. اگر بخواهیم محاسبه را سریع‌تر، ولی با دقت‌کمتر، انجام دهیم؛ می‌توان تنهٔ درخت را استوانه‌ای در نظر گرفت که قاعدهٔ آن، قاعدهٔ متوسط تنهٔ درخت باشد. دراینصورت نتیجه‌ای که بدست می‌آیدگاهی تا ۱۲٪ اشتباه خواهد داشت. ولی اگر تنهٔ درخت را به دو قسمت کنیم و هر کدام را جداگانه و با همین روش بدست آوریم، ازمجموع آنها حجمی بدست می‌آیدکه اشتباه آن بیش از ۲ تا ۳ درصد نیست.



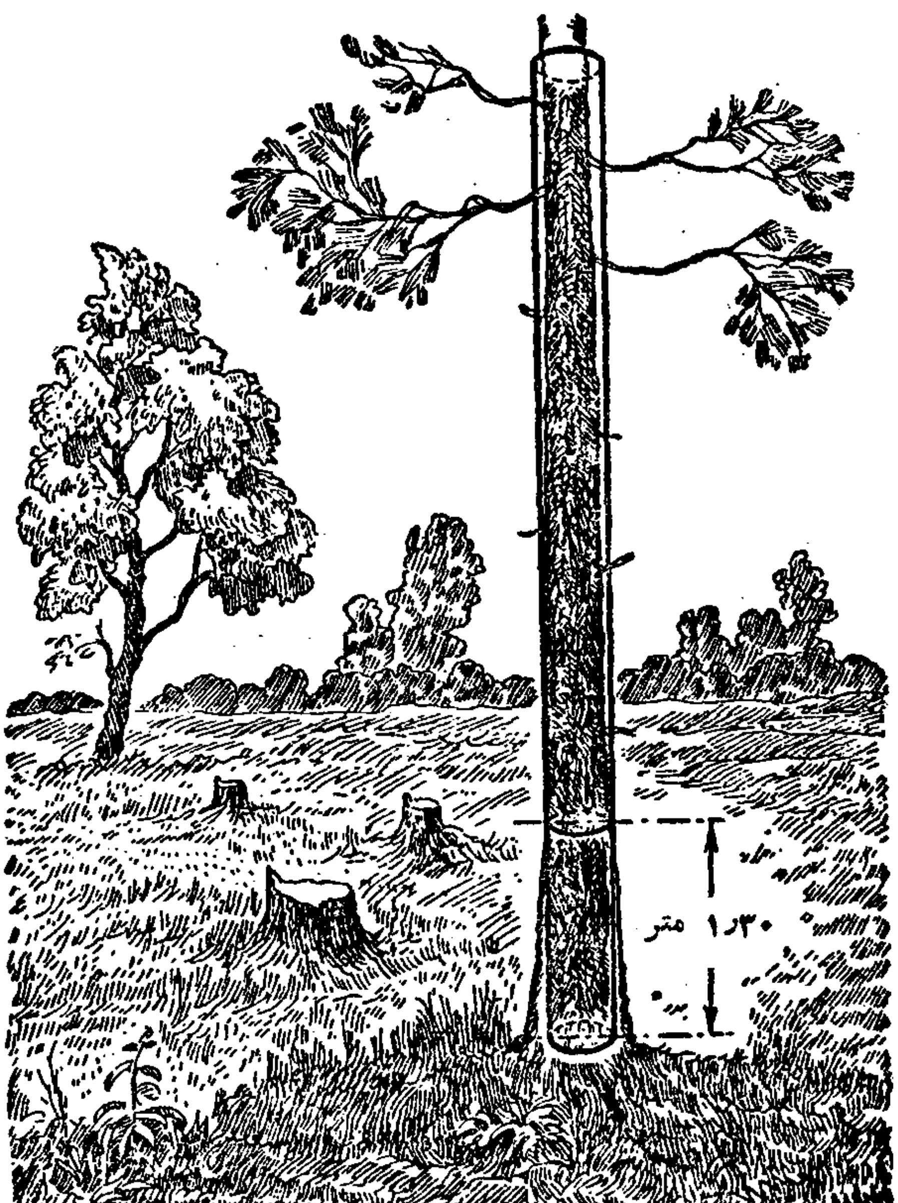
۲۰. خط‌کش دوبازو (سمت چپ) و کولیس (سمت راست)

ولی همهٔ این‌کارها را درمورد درخت قطع‌نشده نمی‌توان انجام داد: اگر درخت قطع نشده باشد، تنها می‌توانید قطر قسمت پائین‌آنرا

*) شبیه همین وسیله را برای اندازه‌گیری قطر اجسام گرد ساخته‌اند (کولیس ـ شکل ۲۰، سمت راست).

**) نسبت طول محیط دایره بر قطر آن برابر است با عدد π، که تقریباً مساوی $۳\frac{۱}{۷}$ است.

اندازه بگیرید . در اینگونه موارد باید به تخمین کاملا تقریبی حجم قانع بود و دل را به این خوش کرد که جنگلبانان حرفه‌ای هم بهمین ترتیب عمل می‌کنند . آنها معمولاً از جدولی که به «اعداد نوعی» معروف است استفاده می‌کنند. این اعداد نشان می‌دهند که حجم درخت چه قسمتی از حجم استوانه‌ای است که ارتفاع آن مساوی ارتفاع درخت و قطر آن مساوی قطر درخت در فاصلهٔ قد انسان باشد (معمولاً این قطر را درارتفاع ۱۳۰ سانتیمتری اندازه می‌گیرند، چون در این فاصله، کار اندازه گیری با سهولت بیشتری انجام می‌گیرد) . درشکل ۲۱ این مطلب نشان



۲۱. «عدد نوعی» چیست؟

داده شده است . البته این « اعداد نوعی » برای درختان مختلف با هم فرق دارند ، زیرا شکل تنهٔ درخت یکجور نیست . ولی نوسان این اعداد خیلی بزرگ نیست : برای انواع کاج این اعداد بین ۰/۴۵ و ۰/۵۱ یعنی تقریباً ۰/۵ می‌باشد .

بنا براین ، بدون اشتباه زیادی ، می‌توان حجم درخت کاج را مساوی نصف حجم استوانه‌ای دانست که ارتفاع آن مساوی ارتفاع درخت وقطر قاعدهٔ آن مساوی قطر درخت درارتفاع ۱۳۰ سانتیمتری باشد .

این فقط یك تخمین تقریبی است ، ولی ازمقدارواقعی هم‌خیلی دور نیست : تا ۲٪ در جهت زیادی و تا ۱۰٪ درجهت کمی *.

حالا به‌بینیم وزن درختان قطع نشده را بچه ترتیب می‌توان تخمین کرد ؟ برای این منظورکافی است‌بدانیم که یك مترمکعب چوب کاج قریب ۶۰۰ — ۷۰۰ کیلوگرم وزن دارد . فرض کنید ارتفاع درخت کاجی مساوی ۲۸ متر و محیط دایرهٔ تنه در ارتفاع ۱۳۰ سانتیمتری مساوی ۱۲۰ سانتیمتر باشد ، در اینصورت مساحت دایرهٔ مربوطه مساوی ۱۱۰۰ سانتیمترمربع یا ۰/۱۱ مترمربع و حجم تنهٔ درخت :

$$\frac{۱}{۲} \times ۰/۱۱ \times ۲۸ = ۱/۵ \quad \text{(مترمکعب)}$$

خواهد شد . با توجه به اینکه هر مترمکعب چوب کاج بطور متوسط ۶۵۰ کیلوگرم وزن دارد، وزن ۱/۵ مترمکعب درحدود یك تن می‌شود (۱۰۰۰ کیلو گرم) .

*) باید توجه داشت که «اعداد نوعی» را تنها برای درختانی که در جنگل روئیده‌اند (یکنواخت و بدون شاخ و برگ اضافی هستند) می‌توان بکار برد و نمی‌توان این قاعده را در مورد درختان تنهائی که با شاخ و برگ زیاد روئیده‌اند تعمیم داد .

هندسهٔ برگها

مسئله

در سایهٔ درخت تبریزی جوانه‌هائی از ریشهٔ آن بیرون آمده است (جوانه‌های حرامزاده) . برگی از آن جدا کنید و بزرگی آنرا با برگهای اصلی درخت و بخصوص آنهائی که در معرض آفتاب بوده‌اند ، مقایسه کنید . سطح برگهائی که در سایه هستند برای جبران کمبود نور بزرگتر می‌شوند تا نور بیشتری جذب کنند . طرح اصلی این مسئله مربوط به گیاه شناسی است ، ولی عالم هندسه می‌تواند در اینجا نقشی داشته باشد : او می‌تواند محاسبه کند که برگ حرامزاده چند مرتبه بزرگتر از برگ اصلی درخت است .

این مسئله را چگونه باید حل کرد ؟

حل

به دو طریق می‌توان عمل کرد . طریق اول اینست که ابتدا مساحت هریك ازبرگها را بطور جداگانه محاسبه کنیم و سپس نسبت آنها را بدست آوریم . برای اندازه‌گیری سطح برگ می‌توان ازکاغذ شفاف شطرنجی استفاده کرد که مثلا هرمربع آن ۴ میلیمترمربع‌مساحت داشته باشد . این طریق ، اگر چه جواب صحیح را بدست می‌دهد ، ولی دقت فوق‌العاده‌ای لازم دارد *.

طریقهٔ دوم براین اساس قرار گرفته است که برگها ، اگـر چـه

---

*) ولی این‌طریقه رجحان دیگری هم دارد: با این‌وسیله‌می‌توان مساحت برگهائی را هم که بهم شباهتی ندارد مقایسه کرد ، در حالیکه طریقهٔ دوم را، که بعداً ذکر می‌شود ، نمی‌توان دربارهٔ اینگونه برگها بکار برد .

اندازه‌های مختلف دارند ولی با شکلهای یکنواخت (و یا تقریباً یکنواخت) هستند : به عبادت دیگر شکل برگها از لحاظ هندسی متشابه‌اند . در اینصورت می‌دانیم که نسبت مساحت آنها مساوی مجذور نسبت خطی آنها خواهد بود. بنابراین اگر بدانیم که طول یا عرض یك برگ چند برابر طول یا عرض برگ دیگر است ، با مجذور کردن آن ، نسبت مساحتهای آنها بدست می‌آید . فرض کنید طول یك برگ حرامزاده ۱۵ سانتیمتر وطول برگی که درشاخهٔ درخت است مساوی ۴ سانتیمتر باشد ، نسبت خطی این دو برگ مساوی $\frac{۱۵}{۴}$ و بنابراین نسبت مساحتهای آنها مساوی $\frac{۲۲۵}{۱۶}$ یعنی ۱۴ می‌شود . از آنجا که این محاسبه تقریبی است می‌توان گفت که برگ حرامزاده تقریباً ۱۵ برابر برگ اصلی درخت مساحت دارد .

نمونهٔ دیگری ذکر کنیم .

مسئله

طول برگ گل قاصدی که در سایه روئیده است مساوی ۳۱ سانتیمتر است . طول برگ نمونهٔ دیگری از این گیاه که در معرض نور خورشید بوده است فقط ۳/۳ سانتیمتر است . سطح برگ نمونهٔ اول چند برابر سطح برگ نمونهٔ دوم است ؟

حل

طبق راه حل قبل عمل می‌کنیم . نسبت مساحتها چنین است :

$$\frac{۳۱^{۲}}{۳/۳^{۲}} = \frac{۹۶۰}{۱۰/۹} \# ۸۷ ;$$

یعنی برگ اول قریب ۹۰ برابر برگ دوم مساحت دارد .

ضمن گردش در جنگل می‌توان به برگهای زیادی برخورد کرد که از لحاظ شکل متشابه ولی از لحاظ اندازه با هم متفاوت باشند و از آنجا مواد اولیهٔ زیادی برای نسبت مساحتهای دو شکل متشابه بدست آورد . از لحاظ دید ظاهری همیشه عجیب است که برگهائی که از لحاظ طول و عرض اختلاف زیادی با هم ندارند ، از لحاظ مساحت اختلاف قابل توجهی پیدا می‌کنند . مثلا اگر دو برگی که از لحاظ شکل متشابه‌اند ، طول یکی ۲۰٪ بیشتر از طول دیگری باشد ، نسبت مساحتهای آنها چنین می‌شود :

$$۱/۲^{۲} \# ۱/۴$$

یعنی اختلاف مساحتهای آنها ۴۰٪ می‌شود . یا اگر برگی ۴۰٪ عریض‌تر از برگ دیگر باشد ، نسبت مساحتهای آنها می‌شود :

$$۱/۴^{۲} \# ۲$$

یعنی مساحت برگ بزرگتر قریب دو برابر مساحت برگ کوچکتر می‌شود .

۲۲ . نسبت مساحتهای این برگها را پیدا کنید

۲۳ . نسبت مساحتهای این برگهارا پیدا کنید

مسئله

این مسئله را برای خـوانـنده می‌گذاریـم کـه نسبت مساحتهای برگهائی که در شکلهای ۲۲ و ۲۳ داده شده است ، پیدا کند .

قهرمانان شش پا

دنیای عجیب مورچه‌ها !

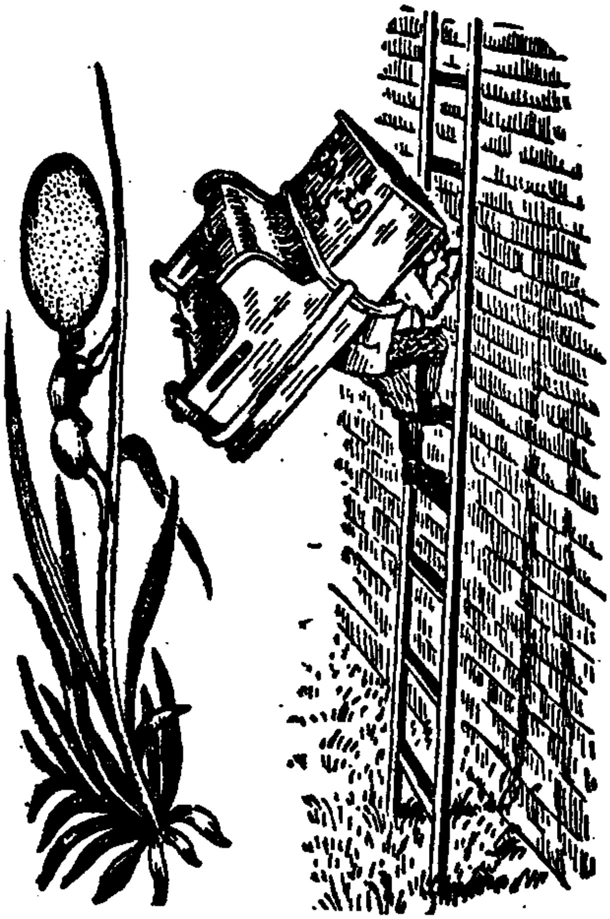
مورچه باری راکه نسبت به جثهٔ کوچکش خیلی سنگین است به دهان می‌گیرد و بـا چاپکی از ساقهٔ درخت بالا می‌رود (شکل ۲۴) و برای بشر معمای بزرگی بوجود آورده است : این حشره نیروی لازم را از کجا می‌آورد که می‌تواند بدون اینکه تظاهری به سختی کارداشته باشد ، باری را که ده برابر وزن خودش است بـه سادگی بـالا ببرد ؟ مثلا انسان نمی‌تواند پیانـوئی را بـه دوش بگیرد و از پلکان بالا ببرد ، در حالیکه نسبت وزن پیانو به وزن انسان تقریباً همان نسبت وزن‌باری است که مورچه می‌برد به وزن خود مورچه ، یعنی مورچه بطورنسبی به مراتب قوی‌تر از انسان است !

آیا همینطوراست؟ بدون‌هندسه نمی‌توان‌به این‌سئوال جواب داد. قبل ازهمه به‌بینیم متخصص‌امر (پروفسور آ.اف. براند) دربارهٔ نیروی عضلات چه می‌گوید وسپس‌به سئوالی که طرح کرده‌ایـم، یعنی مقایسهٔ نیروی حشره با نیروی انسان بپردازیم .

« عضلهٔ زنده مثل یك بند قابل ارتجاع است، فقط انقباض آن براساس قابلیت ارتجاع نیست ومبتنی بر اصل دیگری است . انقباض معمولا دراثر تحریك عصبی و تجربهٔ فیزیولوژیکی، از ضربهٔالکتریکی که روی عصب مربوطه و یا مستقیماً روی خود عضله وارد می‌شود ،

بوجود می آید .

تجربهٔروی‌عضله رامی‌توان به‌سادگی روی قورباغهٔ کشته شده انجام داد، زیرا عضلات حیوانات خونسرد برای مدت نسبتاً طولانی و خارج از ارگـانیسم ، حتی در درجهٔحرارت‌معمولی،خصوصیات زنده بودن‌خود را حفظ می کنند. نوع‌تجربه خیلی‌ساده است. عضله اصلی پای راست را همراه با استخوان ران و همراه با پی‌های انتهائی جدا می کنیم . این عضله، چه از لحاظ اندازه ، چه از لحاظ شکل‌وچه ازلحاظ‌سادگی‌ترکیبات



۲۴. قهرمان شش پا

راحت‌ترین نوع برای مطالعه بنظر می‌رسد . عضله را بوسیلهٔ قطعه استخوان به دیوار آویزان می کنیم ، بدین ترتیب که چنگك را ازوسط پی‌ها می‌گذرانیم و وزنه‌ای هم به انتهای پائین عضله آویزان می کنیم . اگر به وسیلهٔ سیمی که به‌یك باطری وصل است ضربه‌ای به عضله وارد کنیم ، بلافاصله انقباضی در عضله بوجود می‌آید ، کوتاه‌تر می‌شودو وزنه را کمی بطرف بالا می‌برد . اگر بتدریج وزنه‌های کوچکی به آن اضافه کنیم ، می‌توان به سادگی حداکثر استعداد عضله را برای بلندکردن‌وزنه تعیین کرد . حالا دو ، سه‌ و یا چهار عضلهٔ مثل هم را به دنبال هم‌می‌بندیم و آنها را یکباره تحریك می کنیم . ولی با این ترتیب‌به نیروی بزرگتری نمی‌رسیم، بلکه‌وزنه‌تا همان حداکثرارتفاعی که در مورد عضلات جداگانه بود ، بالا می‌رود. سپس دو ، سه‌وچهار

عضله‌را بصورت دسته بهم می‌بندیم و تمام دستگاه را تحت تحریك قرار می‌دهیم. به این دسته می‌توان وزنه‌هائی به تعداد عضلات آویزان کرد تا به همان ارتفاع قبلی برسد. واضح است درحالتی هم که عضله‌ها بین هم رشد کرده باشند بهمین نتیجه خواهیم رسید . به این ترتیب روشن می‌شود که ازدیاد نیروی عضلات نه بـه طول و نه به وزن کلی ارتباط ندارد ، بلکه تنها به ضخامت یعنی مقطع قطری آن بستگی دارد .

بعد ازروشن شدن‌این مطلب، حالا به مقایسهٔ عضلاتی می‌پردازیم که‌از لحاظ ساختمانی یکنواخت واز لحاظ‌هندسی‌متشابه‌اند، ولی‌اندازهٔ آنها بسته به بزرگی حیوان، متفاوت است. دوحیوان را درنظر‌می‌گیریم که دومی ازجهت همهٔ اندازه‌های‌خطی‌دوبرابراولی باشد . حجم ووزن حیوان دوم ، و همچنین حجم ووزن هریك از اعضاء آن ، ۸ بـرابر اولی خواهدبود ، ازطرف دیگراندازه‌های سطحی حیوان‌دوم ، و مثلا مقطع عضلات ، فقط چهار برابر انـدازه های سطحی نظیر درحیوان اول است. روشن می‌شود که نیروی عضلانی حیوانی که از لحاظ طولی دوبرابر و از لحاظ وزن هشت برابر دیگری است ، فقط چهار مـرتبه زیادترشده است . یعنی حیوان بطور نسبی دوبـار ضعیفتر شده است . براین اساس حیوانی که سه برابر دیگری‌طول دارد (یعنی مقطع‌قطری عضلاتش ۹ برابر و وزنش ۲۷برابردیگری‌است) ، نسبت به دومی سه بارضعیفتروحیوانی که ۴ برابر دیگری‌طول دارد ، چهاربرابر ازدومی ضعیفتر بنظر می‌رسد وغیره .

باتوجه به اینکه رشد حجم ووزن و بهمراه آن قـدرت عضلات حیوانات یکنواخت نیست ، روشن می‌شود که چـرا حشرات ، و مثلا مورچه‌ها، می‌توانندباری ۳۰ تا ۴۰ برابروزن خود را حمل‌کنند ، در حالیکه انسان درحالت معمولی (ما ورزشکاران ووزنه برداران را استثنا

کرده‌ایم) نزدیک $\frac{9}{10}$ و اسب قریب $\frac{7}{10}$ تمام وزن خـود را می‌تـواند حمل کند».

بعد از این توضیحات بدنیست قهرمانیهای این مورچـهٔ پهلوان را از زبان طنزآمیز ای.آ.کریلوف هم بشنوید:

مورچه‌ای بود با قدرتی بی‌پایان،
قدرتی که همانندآنرا دراعصار گذشته هم‌کسی‌نشنیده‌است،
(مورخ قابل اعتمادی نقل می‌کند) که او حتی،
قدرت بلند کردن دو دانه جو بزرگ را داشته است.

۲

هندسه در کنار رودخانه

اندازه گیری عرض رودخانه

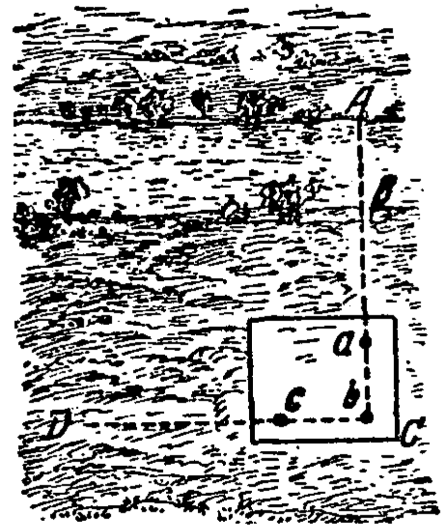
اندازه‌گیری عرض رودخانه ، بدون اینکه با کمك شنا یا قایق از آن عبور کنیم ، برای عالم هندسه بهمان سادگی اندازه‌گیری ارتفاع درخت ، بدون آنکه از آن بالا برویم ، انجام می‌گیرد. فواصلی راکه از دسترس ما خارج‌اند ، می‌توانیم بـا همان روشهای انـدازه‌گیری ارتفاعات ، بدست آوریم . درهردوحالت ، تعیین فاصلهٔ مجهول را به تعیین فاصلهٔ دیگری تبدیل می‌کنیم که می‌توان بـه سادگی و مستقیماً اندازهٔ آنرا بدست آورد .

از بین انواع مختلفی که برای حل این مسئله وجود دارد، ساده‌ترین آنها را در اینجا مطرح می‌کنیم :

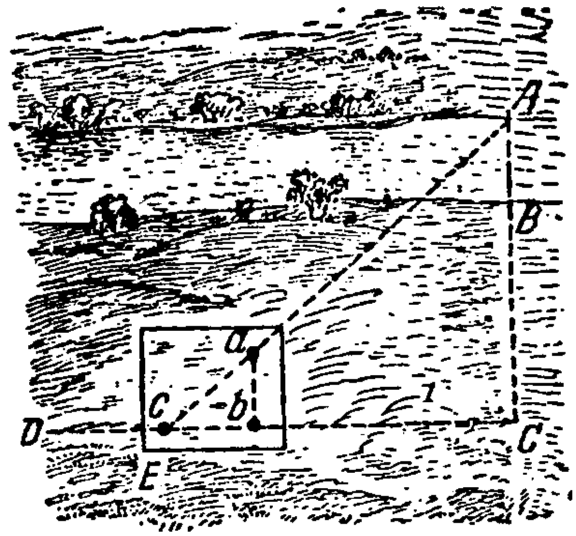
۱.

برای طرح روش اول به وسیله‌ای احتیاج داریم ، که برای ما آشناست و آن سه سنجاق است که رئوس یـك مثلث قـائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین راتشکیل داده‌باشند (شکل ۲۵). فرض کنیدکه‌بخواهیم عرض AB از رودخانه را اندازه بگیریم (شکل ۲۶) ، ما در ساحل طرف B ایستاده‌ایم و نمی‌توانیم به ساحل مقابل آن برویم . جائی در نقطهٔ C به ایستید ووسیلهٔ خود را جلوچشمتان چنان نگه‌داریدکه وقتی یك چشم خود را در امتداد دوسنجاق می‌گیرید، نقاط A و B بوسیلهٔ آنها پوشیده شوند . روشن است که در اینحالت سنجاقها وچشم شما در امتداد خط AB قرارگرفته است . حالا ، بدون اینکه تختهٔ شامل سنجاقها را تکان بدهید ، در امتداد دوسنجاق دیگر (که عمود برامتداد قبلی است) نگاه کنید و نقطه‌ای مانند D را که بوسیلهٔ این دو سنجاق پوشیده شده‌است نشان کنید ، در اینصورت D برامتداد عمود بر AC قرار خواهد داشت .

۲۵. اندازه‌گیری عرض رودخانه با کمك سه سنجاق



۲۶. وضع اول تختهٔ سنجاق



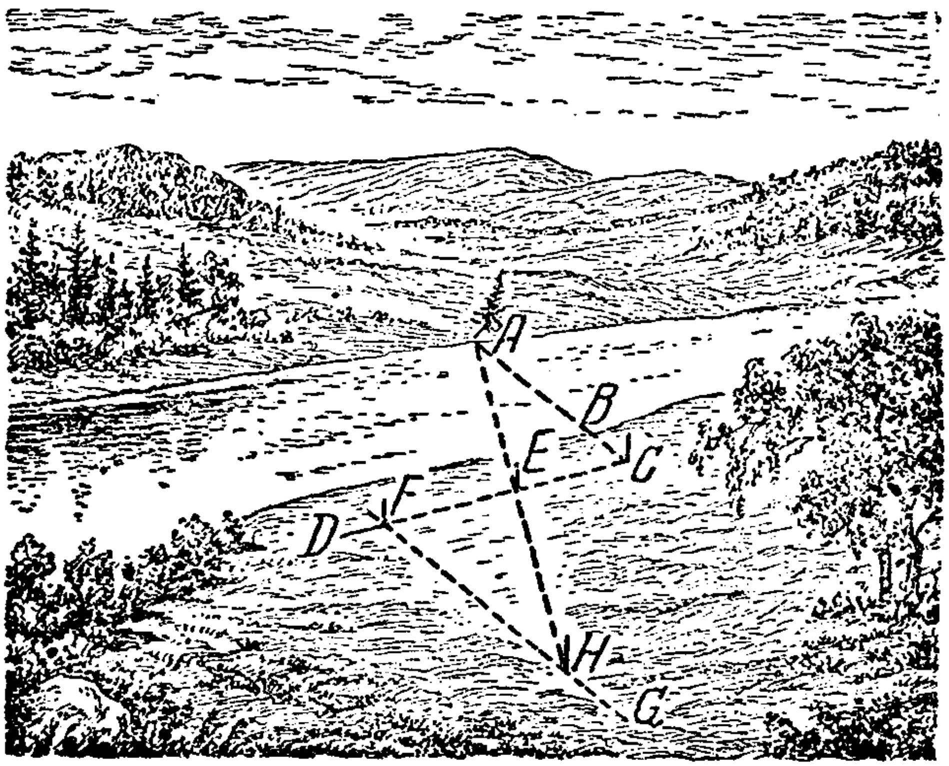
۲۷. وضع دوم تختهٔ سنجاق

حالا چوبی به عنوان علامت در نقطهٔ C بـه زمین فـرو کنید ، جای اول خود را ترك کنید و همراه با وسیلهٔ خود در امتداد خط CD جلو بروید ، تا جـائیکه در نقطهٔ E (شکل ۲۷) چشم شما از یکطرف با سنجاق b و چوب C و از طرف دیگر باسنجاق a و نقطهٔ A دریك امتداد قرارگیرند . باین ترتیب در ساحل رودخانه مثلث ACE بدست می‌آید که در آن زاویهٔ C قائمه و زاویهٔ E مساوی زاویـهٔ حادهٔ مثلث سنجاقها یعنی ۴۵ درجه است . واضح استکه زاویـهٔ A هم مساوی ۴۵ درجه می‌شود وخواهید داشت : $AC=CE$. بنابراین اگر فاصلهٔ CE را، ومثلابا قدمهای خود، اندازه بگیرید ، فاصلهٔ AC را خواهید داشت و باکم‌کردن فاصلهٔ BC از آن (که به سادگی بدست می‌آید)، عرض مجهول رودخانه معین می‌شود .

بیحرکت نگه داشتن تختهٔ سنجاق روی دست مشکل وناراحت است ، بنابراین بهتراست تختهٔ سنجاق را روی چوبی که نوك تیزدارد محکم نمائیم ، که بتوانیم چوب را بطور عمودی درزمین فروکنیم .

۰۲

روش دوم شباهت زیادی بـه روش اول دارد . اینجا هـم نقطهٔ



۲۸. استفاده از مثلثهای مساوی

C را در امتداد AB پیدا می‌کنیم و بـه کمك تختهٔ سنجاقها خط CD را عمود بر CA عـلامت می‌گذاریم . از اینجا به بعد روش کار فرق می‌کند (شکل ۲۸). روی خط CD فواصل مساوی CE و EF را بـا طولهای دلخواه جدا می‌کنیم و در نقاط E و F چوبهائی به زمین‌فرو می‌کنیم . سپس در نقطهٔ F با تخته سنجاقها می‌ایستم و جهت FG را عمود برFC علامت می‌گذاریم. حالا روی امتداد FG، نقطه‌ای مانند H را پیدا می‌کنیم ، بنحوی H و E و A بریك امتداد قرار گیرند.

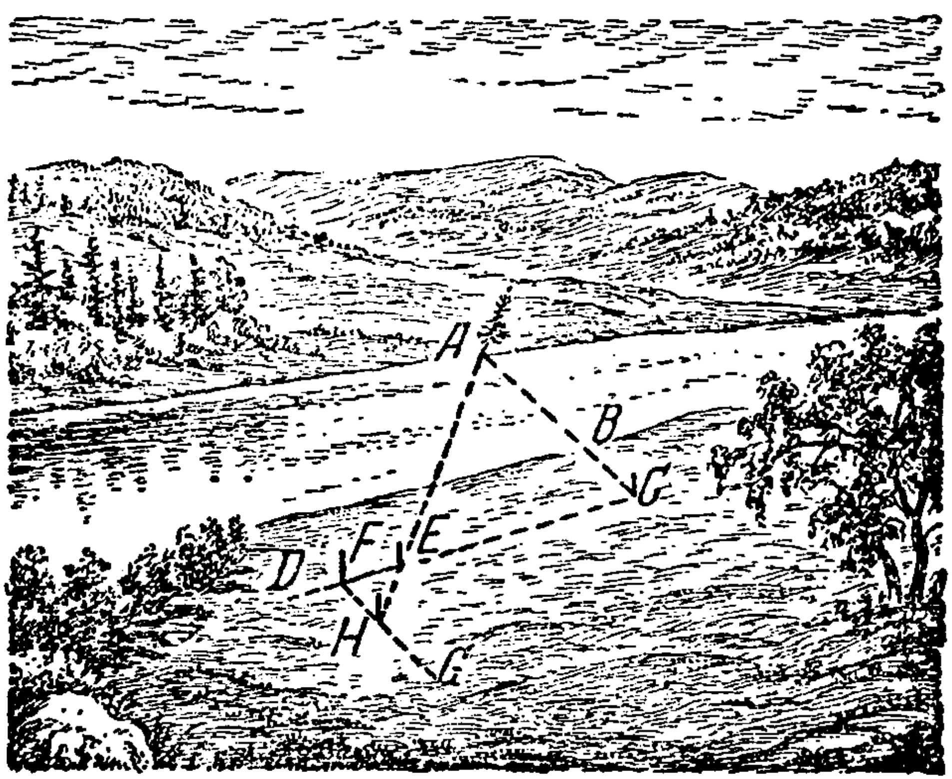
مسئله دیگرحل شده‌است: فاصلهٔ FH بافاصلهٔ AC برابراست ، که برای بدست آوردن عرض رودخانه باید فاصلهٔ BC را از آن کم کرد (البته خواننده خود به سادگی می‌فهمد که چرا FH برابر است

با AC) .

در این روش، نسبت به روش اول به جای بیشتری احتیاج داریم؛ در شرایطی که امکان استفاده از هردو روش وجود دارد ، بهتر است با هر دو روش صحت نتایج را آزمایش کنیم .

.۳

در روشی که هم اکنون ذکر کردیم ، می‌توان مختصر تغییری داد : روی خط CD ، بجای فواصل مساوی ، فواصلی که یکی چند مرتبه از دیگری کوچکتر است انتخاب می کنیم . مثلا (شکل ۲۹) EF را یکچهارم EC می‌گیریم ، و دنبالهٔ کار را مثل حالت قبل عمل می‌کنیم : در امتداد FG (عمود بر FC) نقطهٔ H را چنان می‌گیرم که نقاط H و E و A بریك امتداد باشند . البته دیگر FH مساوی AC نیست، بلکه یکچهارم آنست: در اینجا مثلثهای ACE و EFH مساوی



۲۹. استفاده از مثلثهای متشابه

نیستند ، بلکه متشابه‌اند (زوایای مساوی ولی اضلاع نامساوی دارند) .
از تشابه دو مثلث نتیجه می‌شود :

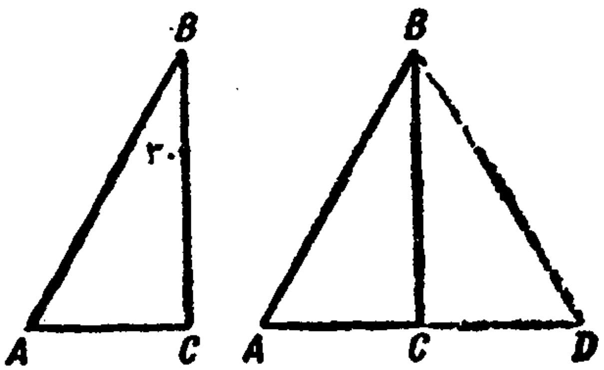
$$AC:FH = CE:EF = ۴:۱$$

اندازهٔ FH را اندازه می‌گیریم و ازچهار برابر آن (که مساوی AC است)، فاصلهٔ BC راکم می کنیم، عرض رودخانه‌بدست می آید .

در این روش بـه جـای کمتری احتیاج داریم و بهمین مناسبت معمولا ساده‌تر از روش قبل است .

۴.

روش چهارم براساس استفاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ای قرارگرفته است که یك زاویهٔ حادهٔ آن مساوی ۳۰ درجـه بـاشد ، در اینصورت ضلع مقابل به این زاویه مساوی نصف وتر خواهد بود . اثبات صحت این مطلب خیلی ساده است . فرض کنید زاویه B از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۳۰- چپ) مساوی ۳۰ درجه باشد، ثابت می کنیم که در اینحالت داریم :



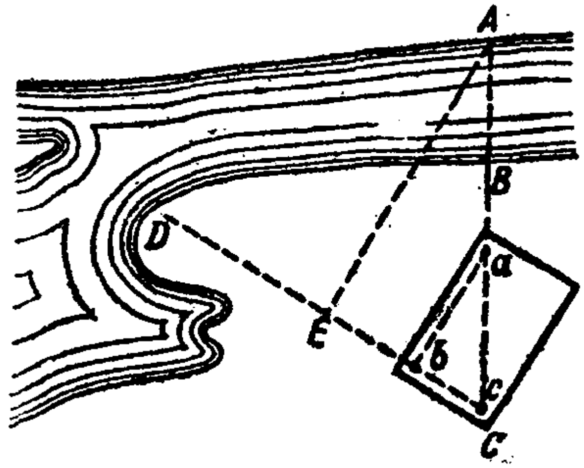
۳۰. وقتی که یك ضلع مساوی نصف وتر است

$$AC = \frac{۱}{۲}AB$$

مثلث ABC را دور ضلع BC دوران می‌دهیم تا در وضعی متقارن نسبت به وضع اولیهٔ خود قرار گیرد (شکل ۳۰ - راست) ، شکل ABD بدست می آید که در آن ACD خط راست است ، زیرا هر دو زاویهٔ طرفین C قائمهٔ است . در مثلث ABD ، زاویه $A = ۶۰°$ است، زاویهٔ ABD هم که از دو زاویهٔ مساوی ۳۰ درجه تشکیل شده است ، مساوی ۶۰ درجـه است . یعنی

$AB = BD$ ،زیرا اضلاع روبروبه زوایای مساوی ، مساوی‌اند . ولی $AD = \frac{1}{2} AC$ است وبنابراین‌خواهیم داشت: $AB = \frac{1}{2} AC$.

اگر بخواهیم از این خاصیت مثلث استفاده کنیم ، باید سنجاقها را بر تختهٔ چوبی چنان قرار دهیم که مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازند که یك ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی نصف وترباشد . سپس این وسیله را در نقطهٔ C چنان قرار می‌دهیم (شکل ۳۱)، که‌امتداد AC برامتداد وتر مثلث منطبق باشد . بانگاه کردن‌درامتدادوتر کوچکتر این مثلث ، امتداد CD را معین می کنیم وروی آن نقطه‌ای مانند E چنان پیدا می‌کنیم که امتداد EA بر CD عمود باشد (نقطهٔ مورد نظرE راهم می‌توان باکمك همین تختهٔ سنجاقها پیداکرد) . دراینصورت واضح است که ضلع CE روبروی به زاویهٔ ۳۰ درجه ومساوی نصف وتر AC می‌شود. بنابراین با اندازه گیری فاصلهٔ CE ، دو برابر آن یعنی AC بدست می‌آید ، که اگر فاصلهٔ معلوم BC را از آن کم‌کنیم، عرض مورد نظررودخانه بدست می‌آید .



۳۱. طرح‌استفاده ازمثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ مساوی ۳۰ درجه

به این ترتیب چهار راه حل ساده یادگرفتیم که بـه کمك آنها می‌توانیم‌عرض هررودخانه‌ای را، بدون عبورازآن وبا دقت‌موردلزوم، اندازه‌بگیریم . ما در اینجا ازروشهای دیگری که به وسائل بغرنج‌تر احتیاج دارند صحبت نمی‌کنیم .

با کمك لبهٔ کلاه

اینهم روش دیگری که بنابر موقعیت جبهه ، مورد استفادهٔ گروهبان‌کوپریانو قرارگرفت*. به جوخهٔ او دستوری رسید که عرض رودخانه‌ای را ، که می‌بایست ترتیب عبور از آنرا بدهند ، اندازه بگیرد...

قسمت کوپریانو کنار بوته‌های نزدیك رودخانه درازکشیدند و خود کوپریانو و سرباز کارپوو به رود خانه نزدیکتر شدند ، تا جائی که دیگر فاشیستها، که آنطرف رودخانه را اشغال‌کرده بودند، بخوبی دیده می‌شدند . در چنین شرایطی می‌بایست عرض رودخانه را با چشم اندازه بگیرند .

کوپریانو پرسید :

ـ خوب کارپوو بنظر تو چقدر است ؟

ـ بنظر من از ۱۰۰ ـ ۱۱۰ متر بیشتر نیست .

کوپریانو با نظر سرباز موافق بود ، ولی برای اطمینان بیشتر عرض رودخانه را « به کمك لبهٔ‌کلاه » خود اندازه‌گرفت .

طرزعمل‌چنین‌است : باید روبروی رودخانه ایستادو کلاه لبه‌دار را آنقدر بطرف چشم پائین آورد تا لبهٔ پائین آن بر خط ساحل مقابل رود خانه منطبق شود (شکل ۳۲) . بجای لبهٔ‌کلاه می‌توان از کف‌دست یا دفترچهٔ یادداشت استفاده کرد که در اینصورت باید آنرا محکم به پیشانی خود چسباند . سپس ، بدون اینکه ، در وضع سر تغییری داده شود ، باید بسمت راست یا چپ و یا حتی به عقب چرخید (به طرفی که سطح زمین هموارتر و برای اندازه‌گیری فواصل مناسب‌تر است) و نقطه‌ای را که از زیر لبهٔ کلاه (کف دست ، دفترچهٔ یادداشت) دیده

*) پاورقی صفحهٔ ۲۸ را به‌بینید .

می‌شود علامت گذاشت .

فاصلهٔ تا این نقطه ، به تقریب‌همان عرض‌رودخانه خواهد بود.

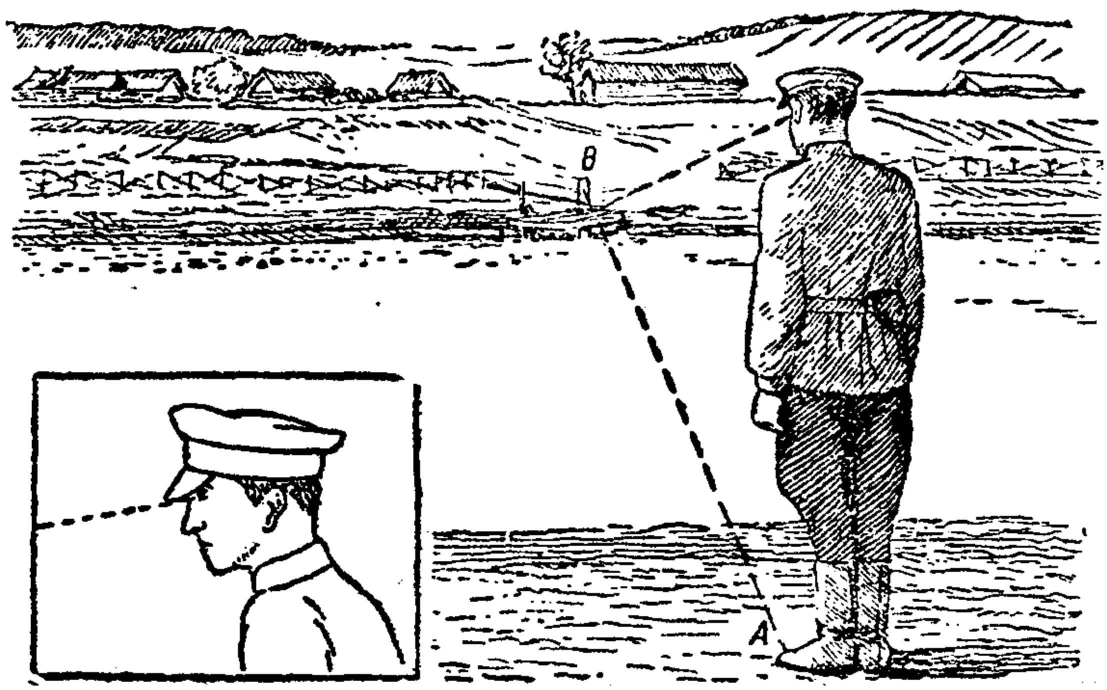
کوپریانو هم از همین طریقه استفاده کرد . به سرعت داخـل بوته‌ها بلند شد و دفترچهٔ یادداشت را روی پیشانی خود گرفت ، سپس به سرعت چرخید ونقطهٔ دوری را درنظرگرفت . سپس با کمك کارپوو خودش را سینه‌کش به آن نقطه رسانید وفاصله را با نخ اندازه‌گرفت ، ۱۰۵ متر بدست آمد . کوپریانو آنچه را که بدست آورده بـود بـه پست فرماندهی گزارش داد .

مسئله

« روش لبهٔ کلاه » را ازلحاظ هندسی توضیح دهید .

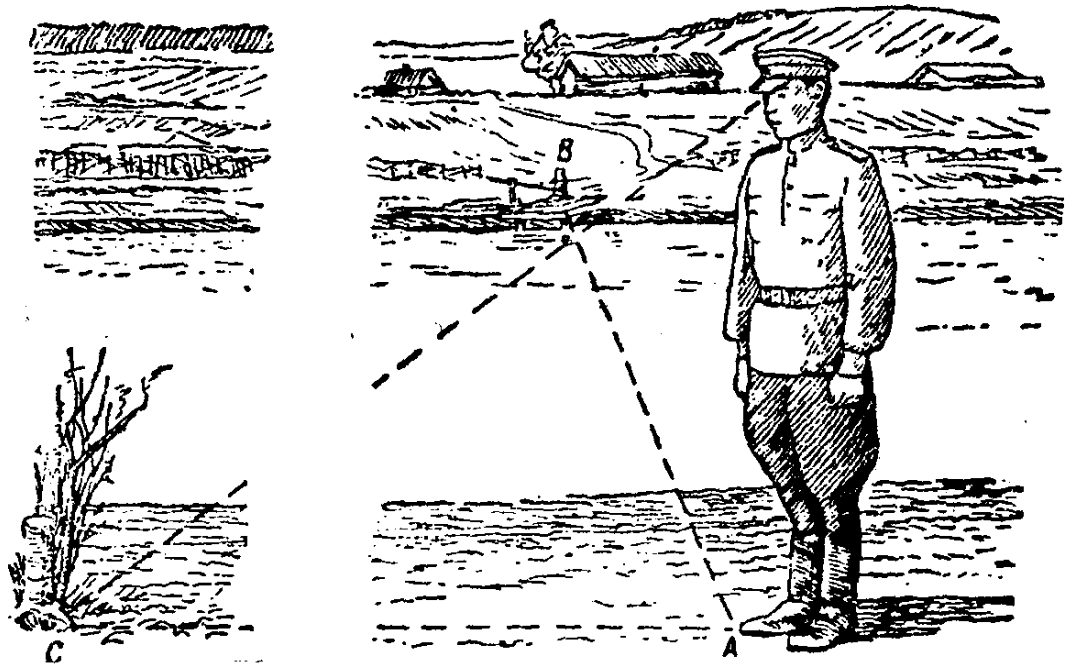
حل

شعاع دیدکه مماس برلبهٔ کلاه (کف دست ، دفترچهٔ یادداشت)



۳۲. از زیر لبهٔ کلاه ساحل طرف مقابل را نشانه بروید

است ، ابتدا مستقیماً به خط ساحل مقابل رودخانه می‌رسد (شکل ۳۲). وقتی که ناظر می‌چرخد ، شعاع دید ، مثل یك پرگار دایـره‌ای رسم می‌کند و بنابـراین $AC = AB$ به‌عنوان شعاعهای یك دایره می‌شوند (شکل ۳۳) .



۳۳. بهمین ترتیب نقطه‌ای را در ساحل طرف خود نشانه بگیرید

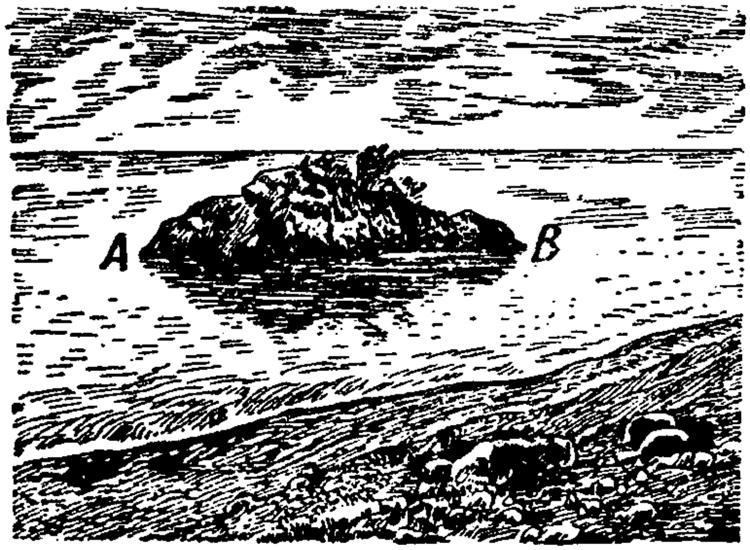
طول جزیره

مسئله

حالا مسئلهٔ بغرنج‌تری را مطرح می‌کنیم . کنار رودخـانه ویا دریاچه‌ای ایستاده‌اید (شکل ۳۴) و جزیره‌ای را می‌بینید ، می‌خواهید بدون اینکه ساحل را ترك کنید طول جزیره را انـدازه بگیریـد ، آیا می‌توانید این اندازه‌گیری را انجام دهید ؟

با وجودیکه در این مورد هیچیك از دوطرف جزیره در دسترس ما نیست ، می‌توان بدون استفاده از وسائل بغرنج طول مورد نظر را

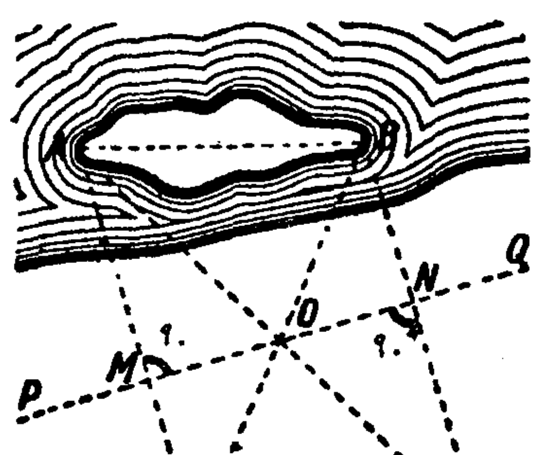
اندازه گرفت .



۳۴. طول جزیره را چگونه اندازه بگیریم؟

حل

فرض کنید که میخواهیم طول AB (شکل ۳۵) از جزیره‌ای را اندازه بگیریم ، در حالیکه در لحظهٔ اندازه‌گیری درساحل ایستاده‌ایم. دو نقطهٔ P و Q را در ساحل انتخاب می کنیم و علامتهائی در آنجا می‌گذاریم. روی خط PQ، نقاط M و N را چنان جستجومی کنیم که امتدادهـای AM و BN بـا امتداد PQ زاویهٔ قـائمه بسازنـد (برای این منظور می‌توان ازتختهٔ سنجاقها استفاده کرد). درنقطهٔ O وسط MN علامتی می‌گذاریم و روی امتداد AM ، نقطهٔ C را چنان جستجو می کنیم که نقاط C و O و B بریك امتداد بـاشند ،



۳۵. از تساوی مثلثهای قائم الزاویه استفاده می کنیم

بهمین ترتیب روی امتداد BN ، نقطهٔ D را طوری پیدا می‌کنیم که D و O و A بر یك امتداد باشند ، دراینصورت فاصلهٔ CD همان طول مجهول جزیره خواهد بود .

اثبات این مطلب ساده است . مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AMO و OND رادرنظر بگیرید،دوضلعMO وNO ازاین‌دومثلث‌برابرند،علاوه برآن زوایای AOM و NOD نیزبرابرند، بنابراین دو مثلث برابرند و خواهیم داشت : $OA = OD$. بهمین ترتیب می‌توان ثابت کرد : $BO = OC$. حالا با مقایسهٔ دو مثلث ABO وCOD ، تساوی آنها بدست می‌آید و نتیجه می‌شود : $AB = CD$.

پیاده‌ای‌که آنطرف ساحل است

مسئله

کسی در ساحل و در امتداد رودخانه راه می‌رود . شما از طرف دیگررودخانه به روشنی قدمهای اورا تشخیص می‌دهید . آیامی‌توانید از جائی که هستید ، فاصلهٔ خودتان را تا او بتقریب معین کنید ؟ بااین شرط که هیچ وسیله‌ای در دسترس شما نیست .

حل

شما وسیله‌ای در دسترس ندارید ، چشمها و دستهای شما هست و همین برای شما کافی است . دستتان را به جلو و در جهت پیاده دراز کنید و وقتی که پیاده بطرف دست راست شما حرکت می کند باچشم راست ، ووقتی که بطرف دست چپ شما حرکت می‌کند با چشم چپ به انتهای انگشتتان نگاه کنید. وقتی انگشت دست شما درست پیاده را

پوشاند (شکل ۳۶)، چشمی را که باز بود به‌بندید و چشم دیگر را باز کنید : بنظرتان می‌رسد که پیاده به عقب رفته است ، به‌بینید چند قدم بر می‌دارد تا دوبـاره پشت انگشت شما قرار گیرد . آنچه را که برای اندازه‌گیری فاصله لازم است شما بدست آورده‌اید .

۳۶. چگونه می‌توان فاصلهٔ خودرا تا پیاده‌ای که در ساحل دیگر حرکت می‌کند، پیدا کرد ؟

به بینیم از این معلومات چگونه می‌توان استفاده کرد . فرض کنید در شکل ۳۶ نقاط a و b جای چشمهای شما ، نقطهٔ M انتهای انگشت دستی که دراز کرده‌اید ، A وضع اولیهٔ پیاده و B وضع دوم او باشد . دو مثلث abM و ABM متشابه‌اند (مسیر حرکت پیاده را می‌توان با ab تقریباً موازی گرفت) . بنابراین داریم :

$$BM : bM = AB : ab$$

دراین تناسب تنها BM مجهول است وبقیه را می‌توان مستقیماً بـدست آورد . در حقیقت bM طول دست شما و ab فـاصلهٔ بین دو چشم شماست ، AB را هم با کمك قدمهای پیاده اندازه گرفته‌اید (هر

قدم را می‌توان بطور متوسط $\frac{۳}{۴}$ مترگرفت) . به این ترتیب فاصلهٔ شما تا پیاده‌ای که درساحل طرف دیگر رودخانه است چنین می‌شود :

$$MB = AB \cdot \frac{bM}{ab}$$

مثلا اگر فاصلهٔ بین دوچشم شما (ab) ۶ سانتیمتر ، طول bM از انتهای دست باز شده‌تا چشم شما ۶۰ سانتیمتر باشد و پیاده فاصلهٔ بین A و B را با ۱۴ قدم طی کرده باشد ، برای فاصلهٔ مجهول خواهید داشت :

$$MB = ۱۴ \times \frac{۶۰}{۶} = ۱۴۰ \ (\text{قدم}) = ۱۰۵ \ (\text{متر})$$

کافی است که شما ازقبل فاصلهٔ bM (چشم تا انتهای دست باز شده) و فاصلهٔ بین دوچشم خودرا اندازه بگیرید ، دراینصورت نسبت $\frac{bM}{ab}$ برای شما معلوم خواهد بود و به کمك آن می‌توانید فاصلهٔ خود را تا هر شیئی غیرقابل دسترس پیدا کنید . در این مورد تنها محاسبهٔ AB در این تناسب برای شما لازم است . نسبت $\frac{bM}{ab}$ برای اکثرمردم با جزئی اختلافی برابر با ۱۰ است . مطلب دشوارتر در اینست که فاصلهٔ AB را چگونه اندازه بگیریم . در مسئله‌ای که حل کردیم ، برای این منظور ، از قدمهائی که پیاده برمی‌داشت استفاده کردیم . ولی ممکن است مسئله بصورت دیگری باشد و مثلاً بخواهیم فاصلهٔ خودرا تا قطار باربری اندازه بگیریم. دراین مورد می‌توان طول AB را با مقایسهٔ طول هر واگون (معمولا ۷/۶ متر) تخمین زد . و یا اگر مثلا بخواهیم فاصلهٔ خود را تا یك منزل بدست آوریم ، می‌توان فاصلهٔ AB را با عرض پنجره یا طول یك آجر و غیره مقایسه کرد .

با همین روش می‌توان اندازهٔ شیئی را که در فاصلهٔ معلومی از

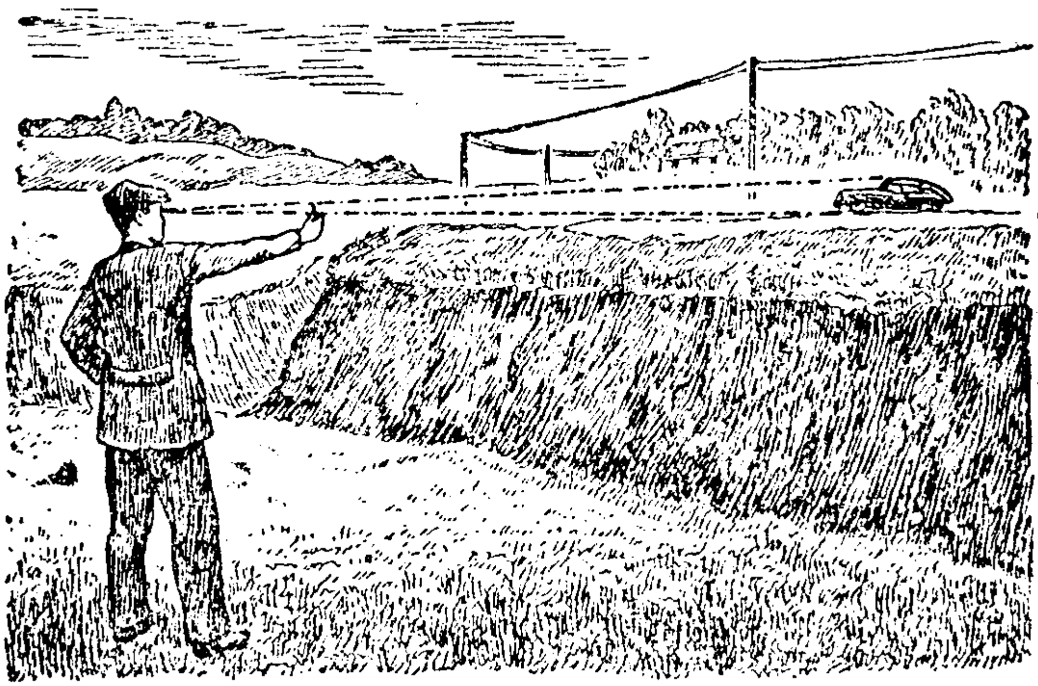
ما قرارگرفته است ، بدست آورد . و برای این منظور می‌توان از « مسافت‌یاب » استفاده کرد که ما هم اکنون بشرح آن می‌پردازیم .

مسافت‌یابهای ساده

در فصل اول از ارتفاع یاب ـ وسیلهٔ ساده‌ای که ارتفاعات غیر قابل دسترس را تعیین می کند ـ نام بردیم . و حالا وسیلهٔ سادهٔ دیگری را معرفی می کنیم که برای اندازه‌گیری فواصل غیر قابل دسترس به کار می‌رود و « مسافت‌یاب » نام دارد . مسافت یاب ساده را می‌توان با کمك کبریت معمولی آماده کرد . برای این منظور باید در یکطرف چوب کبریت، تقسیمات میلیمتری به وجود آورد و برای روشن بودن این تقسیمات بهتر است متناوباً علامتهای روشن و تاریك گذاشت (شکل ۳۷)

۳۷. کبریت مسافت‌یاب

با این «مسافت‌یاب » ابتدائی تنها وقتی می‌توان فاصلهٔ تا شیئی دوری را تخمین زد که اندازه‌های خود آن شیئی برای شما معلوم باشد (شکل ۳۸) ، البته از تمام انواع دیگر مسافت یابها هم که ساختمان کاملتری دارند ، می‌توان دراین مورداستفاده کرد. فرض کنیم، شخصی را که دور از شماست می‌بینید ومی خواهید فاصلهٔ خود را تا اواندازه بگیرید . دراینجا کبریت مسافت‌یاب می‌تواند مشکل شما را حل کند . کبریت را دردست‌خود بگیرید ، دستتان را دراز کنید و درحالیکه فقط یك چشم خود را بازنگه داشته‌اید ، دست خود را بالا و پائین ببرید تا انتهای آزاد کبریت را با قسمت بالای شکلی که دور از شماست در



۳۸. استفاده از کبریت مسافت‌یاب برای تعیین فاصلهٔ غیرقابل دسترس

یك امتداد به‌بینید . سپس انگشت شصت خود را به آرامی روی‌چوب کبریت آنقدر پائین‌بیاورید تا درنقطه‌ای‌قرار گیرد که باقسمت پائین شکل دوردست در یك امتداد باشد . حالا دیگر کافی است که چوب کبریت را به چشم خود نزدیك کنید تا درجه‌های آنرا بشمارید . با معلوم‌بودن این درجه‌ها فاصلهٔ مجهول را بدست خواهید آورد .

تناسب زیربه سادگی بدست می‌آید :

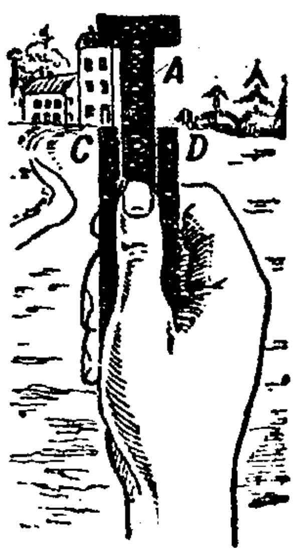
$$\frac{\text{قد متوسط انسان}}{\text{اندازهٔ قسمتهای چوب کبریت}} = \frac{\text{فاصلهٔ مجهول}}{\text{فاصلهٔ چشم تا کبریت}}$$

از این تناسب به سادگی فاصلهٔ مجهول بدست می‌آید. مثلا اگر فاصلهٔ چشم تا چوب کبریت را ۶۰ سانتیمتر و قد متوسط انسان را ۱/۷ متر و اندازهٔ قسمتهای چوب کبریت را ۱۲ میلیمتر بگیریم ، فاصلهٔ مورد نظر چنین می‌شود :

$$۶۰ \times \frac{۱۷۰۰}{۱۲} = ۸۵۰۰ \text{ (سانتیمتر) } = ۸۵ \text{ (متر)}$$

برای اینکه به کار با این مسافت یاب عادت کنید، قد دوستان خود را اندازه بگیرید و از آنها خواهش کنید در فاصله‌ای از شما به ایستند وسپس کوشش کنید که‌معین کنید چند قدم ازشما دورشده‌اند.

بهمین ترتیب شما می‌توانید فاصلهٔ خود را تا دو چرخه سوار (ارتفاع متوسط آن ۲/۲ متر وقطرچرخ دوچرخه ۷۵ سانتیمتر است)، تا تیر تلگرافی که در امتداد راه آهن است (ارتفاع تیر ۸ متر وفاصلهٔ عمودی بین دو عایق متوالی ۹۰ سانتیمتر)، تا قطار راه آهن، تا خانهٔ آجری و یا هرچیز دیگری که می‌توانید اندازه‌های آنرا تخمین‌بزنید، بدست آورید. و این می‌تواند وسیلهٔ خوبی برای سرگرمی شما در روزهای گردش باشد.

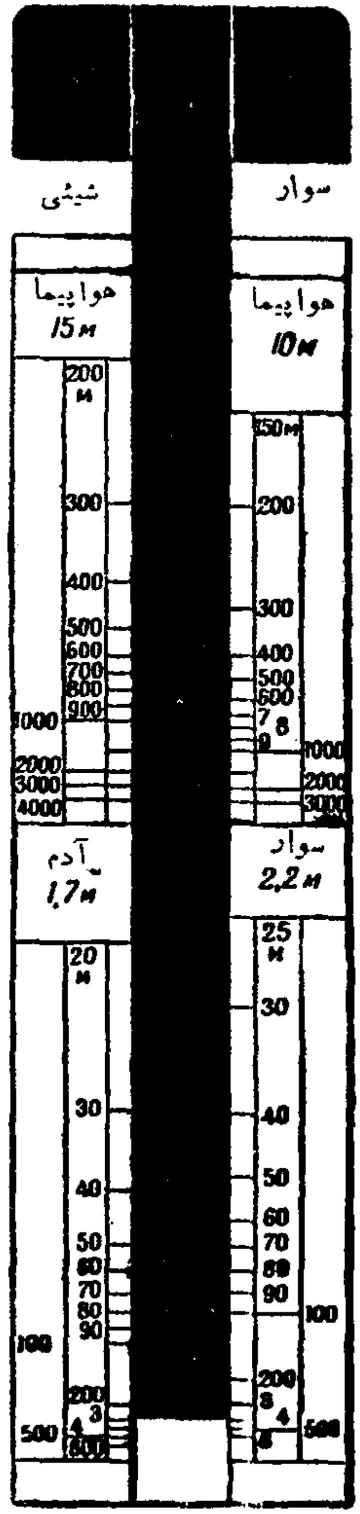


۳۹. مسافت یاب کشوی در عمل

وسیلهٔ ساده‌تری می‌توان ساخت که با کمك آن بتوان فواصل تا اشیاء را نسبت به بزرگی خود آن اشیاء اندازه گرفت.

ساختمان این وسیله‌ازشکلهای ۳۹ و۴۰ روشن می‌شود. با پائین و بالا بردن قسمت کشوی دستگاه، شیئی مورد نظر را در فاصلهٔ A قرار می‌دهیم، مقدار این فاصله به سادگی از روی تقسیماتی که روی حاشیه‌های C و D وجوددارد، معین می‌شود. برای‌اینکه‌احتیاجی به محاسبات اضافی‌نباشد، می‌توان‌روی‌باریکهٔ C در مقابل تقسیمات، فواصل متناظر را برای وقتی که شیئی موردنظر انسان است، مستقیماً نوشت. روی باریکهٔ D می‌توان فواصل متناظر را، برای وقتی که شیئی مورد نظر سواراست، از قبل یادداشت کرد. برای تیر تلگراف (به ارتفاع ۸ متر) و یا هواپیما (با فاصلهٔ بین دو ابتدای بال ۱۵ متر) و یا بسیاری از اشیاء دیگر، می‌توان از قسمتهای

بالای باریکه‌های C و D که آزاد است ، استفاده کرد . در اینصورت وسیلهٔ ما به صورتی مثل شکل ۴۰ در می‌آید .



۴۰ . ساختمان مسافت یاب کشوی

البته دقت این تخمین زیادنیست، باید بخاطر داشت که این تخمین فاصله است نه اندازه‌گیری آن . در مثالی که قبلا حل کردیم و فاصلهٔ تا یك آدم را ۸۵ متر تخمین زدیم ، هریك میلیمتری که روی چوب کبریت اشتباه کنیم، درفاصله ۷ متراشتباه خواهد شد ($\frac{۱}{۱۲}$ از ۸۵ متر) . ولی اگرفاصلهٔ موردنظرچهار برابر مثال‌مذکوربود، روی چوب کبریت بجای ۱۲ میلیمتر، ۳ میلیمتر بدست می آمد ودراینصورت یك اشتباه نیم میلیمتری ۵۷ متردرفاصله تغییر می‌داد . بنابراین ، وسیله‌ای راکه ذکر کردیم تنها برای تخمین فواصل ۱۰۰ تا ۲۰۰ متری مناسب است و برای تخمین فواصل بزرگتر باید از وسائل بغرنجتری استفاده کرد .

انرژی رودخانه‌ها

تو سر زمینی را می‌شناسی که اینهمه پر برکت باشد؛
جائیکه رودخانه‌های پاك‌ترازنقره جریان دارد .
جائیکه سبزه زارهای آن با نسیم ملایمی می‌لرزد ،
و دهکده‌های آن در بیشه‌های آلبالو غرق شده‌است.
ــ آ. ك. تولستوی

رودخانه‌ای که طولش بیش از ۱۰۰ کیلومتر نباشد ، کوچك شمرده می‌شود ، آیا

می‌دانید که ازاینگونه رودخانه‌های کوچك در کشورشوروی چندتاست؟ خیلی زیاد ـ ۴۳ هزار .

اگر این رودخانه‌ها را به دنبال هم می‌گذاشتند ، نواری به‌طول ۱۳۰۰۰۰۰ کیلومتربدست می‌آمد. چنین نواری می‌تواند بیش از ۳۰ دور روی خط استوا دورکرهٔ زمین پیچیده شود (طول خط استوا بـه تقریب ۴۰۰۰۰ کیلومتراست) .

جریان این رودخانه‌ها آرام‌است، ولی در خود انرژی بی‌پایانی ذخیره دارند. متخصصین حساب کرده‌اندکه اگر می‌شد امکانات مخفی همهٔ این‌رودخانه‌ها را رویهم ریخت، عدد فوق‌العاده‌ای بدست می‌آمد ـ۳۴ میلیون کیلووات ! واین‌انرژی مجانی بطوروسیعی‌برای‌الکتریکی کردن اقتصاد روستاهای نزدیك رودخانه‌ها مورد احتیاج است .

بگذار رودخانه جریان آزاد خود را داشته باشد ،ـ
اگر با نقشه آشنائی دارید ، سد ،
همچون شانهٔ سنگی در اعماق رودخانه فرو می‌رود
و راه او را به طرف قرنهای آینده می‌بندد
ـ س. شچیپاچف *

می‌دانیدکه این امربه‌کمك ایستگاههای برق‌آبی تحقق‌می‌پذیرد و شما می‌توانید با ابتکار خودطرح ساختمان یك ایستگاه بـرق آبی کوچك ، ولی واقعی را بریزید .

در حقیقت ساختمان یك ایستگاه برق آبی بـه‌وضع رودخـانه مربوط است : عرض رودخانه و سرعت جـریـان آب درآن ، سطح مقطع عرضی بستررودخانه (مقطع زنده) و فشار آب یعنی حجم‌آبی که می‌تواند جریان داشته باشد وهمهٔ اینهاراهم می‌توان با وسائل‌عادی و به‌عنوان مسائل ساده‌ای از هندسه بدست آورد .

ما به حل این مسائل خواهیم پرداخت ، ولی قبلا توصیهٔ عملی متخصصین : مهندس و. یاروش و مهندس ای. فدوروف راکه مربوط به

انتخاب محل مناسب برای ساختمان یك سد است مطرح می کنیم .

آنها توصیه می کنند که یك ایستگاه برق آبی کوچك باقدرت ۱۵ تا ۲۰ کیلووات نباید دورتر از ۵ کیلومتری روستا باشد .

« سدمربوط به ایستگاه برق آبی بایدنزدیکتراز ۱۰–۱۵ کیلومتر و دورتراز ۲۰–۴۰ کیلومتر نسبت به سرچشمه نباشد ، زیرا دوری از سرچشمه ، بخاطر جریان بیشتر آب، مستلزم مخارج بیشتری است . و اگر سد نزدیکتر از ۱۰–۱۵ کیلومتری سرچشمه ساخته شود ، ایستگاه برق آبی درمقابل جریان ضعیف آب و با فشار غیرکافی خواهد بود و نمی‌تواند قدرت لازم را تامین کند . درانتخاب جای ساختن سد باید از نقاطی که گودیهای زیاد دارد ، پرهیز کرد ، زیرا در اینصورت هم، بخاطر زیرسازی سنگینی که لازم دارد ، مخارج را بالا می‌برد» .

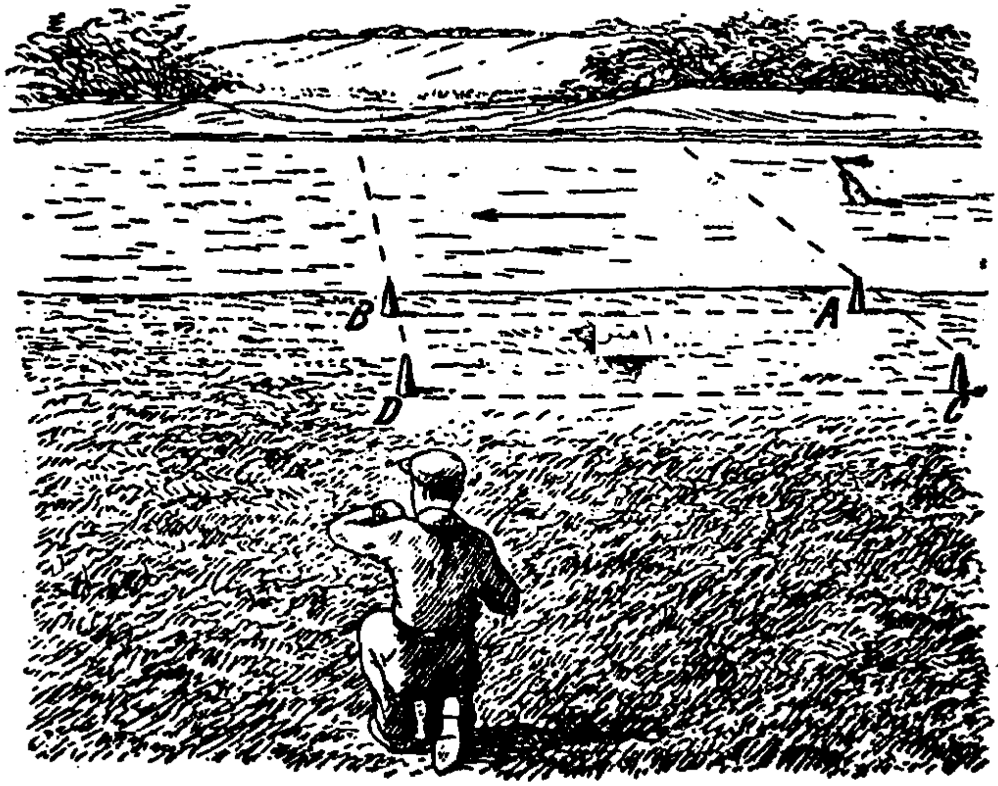
سرعت جریان آب

بین روستا و بیشه‌ای که بربالای تپه‌است،
نوار روشن ومارپیچ رودخانه درحرکت است.
ـ آ. فت

در هرشبانه روز چقدر آب دراین رودخانه جریان دارد ؟

این محاسبه را وقتی‌می‌توان انجام دادکه بدانیم سرعت جریان آب در رودخانه چقدر است . برای اندازه گیری سرعت جریان آب به دو نفر احتیاج است . وسائل مورد احتیاج عبارتست از یك ساعت و یك جسم شناور که بخوبی دیده شود: مثلا یك بطری نیم‌خالی که پرچمی به سرآن باشد) .

قطعهٔ مستطیل شکلی از رودخانه را درنظرمی‌گیریم و در امتداد ساحل آن ، دو علامت A و B را به فاصله‌ای، مثلا ۱۰ متر ازیکدیگر قرار می‌دهیم (شکل ۴۱)



۴۱. اندازه‌گیری سرعت جریان رودخانه

روی خطوط عمودبـر AB ، دونقطهٔدیگر C و D راهم علامت می‌گذاریم . یکی از دونفر ، آنکه ساعتی با خود دارد ، پشت علامت D می‌ایستد ، دیگری کمی دورتر از علامت A ، جسم شناور را به آب می‌اندازد و خود فوراً پشت علامت C قرار می‌گیرد . هردو نفر درامتداد CA و DB به سطح آب نگاه می‌کنند . درلحظه‌ای که جسم شناور از خط CA عبورمی‌کند ، ناظراول دست‌خود را تکان می‌دهد. با این علامت، ناظردوم وقت رانگاه می‌کندو سپس دوباره ، وقتی که جسم‌شناورامتداد DB راقطع‌می‌کند،بازهم‌به‌ساعت خودنگاه می‌کند.

فرض‌می‌کنیم که‌اختلاف‌این دوزمان۲۰ ثانیه باشد، دراینصورت سرعت جریان آب رودخانه چنین خواهد بود :

$$\frac{۱۰}{۲۰} = ۰/۵ \text{ (متر در ثانیه)}$$

معمولا این اندازه‌گیری را ده بار تکرار می‌کنند و هربار جسم

شناور را در جائی از سطح آب می‌اندازند*. سپس اعدادی که بدست می‌آید با هم جمع و بر تعداد دفعات اندازه‌گیری تقسیم می کنند . این عمل سرعت متوسط جریان آب را در قشر سطحی آب رودخانه بدست می‌دهد .

درقشرهای عمیق‌تر آب ، جریان کندتر است و سرعت متوسط همهٔ جریان آب بتقریب $\frac{۴}{۵}$ سرعت‌سطحی است وبنابراین درمورد مثال ما ، این سرعت ۰/۴ متر در ثانیه می‌شود .

می‌توان سرعت‌آب سطحی را به طریق دیگری ،که البته دقت آن کمتر است ، اندازه گرفت .

در قایقی بنشینید وبه‌اندازهٔ یك کیلومتر (که درساحل اندازه گرفته‌اید) درخلاف جریان‌آب حرکت کنید، سپس‌برعکس همین‌فاصله را درجهت جریان آب بروید و سعی کنید که در هر حال با یك قدرت پارو بزنید .

فرض کنید که مثلا این ۱۰۰۰ متر را در خلاف جریان آب در ۱۸ دقیقه ودرجهت جریان آب در ۶ دقیقه طی کرده باشید ، اگرسرعت جریان آب رودخانه را به x و سرعت حرکت شما را در آب ساکن به y نشان دهیم ، معادلات زیر را خواهید داشت :

$$\frac{۱۰۰۰}{y-x}=۱۸; \qquad \frac{۱۰۰۰}{y+x}=۶$$

و از آنجا :

$$+\begin{cases} y+x=\frac{۱۰۰۰}{۶} \\ y-x=\frac{۱۰۰۰}{۸} \end{cases}$$

$$۲x=۱۱۰ \implies x=۵۵$$

*) بجای اینکه ده مرتبه جسم شناور را در آب بیندازیم ، می‌توان ۱۰ جسم شناور را یکبار و در فواصل مختلف از یکدیگربه آب انداخت .

سرعت جریان آب در سطح رودخـانه مساوی ۵۵ متر در دقیقه است ، و بنابراین ، سرعت متوسط ـ قریب $\frac{۵}{۶}$ متر در ثانیه می‌شود .

چقدر آب در رودخانه جریان دارد ؟

بهرحال ، شما می‌توانید با یکی از روشهائی که ذکر کـردیم سرعت آب را دررودخانه معین کنید . قسمت دوم کار، یعنی تعیین مساحت مقطع عرضی بستررودخانه (که برای محاسبهٔ مقدار آبی که درجـریان است مورد احتیاج است) کمی مشکل‌تر است. برای تعیین این مساحت ـ که بنام «مقطع زندهٔ» رودخانه موسوم است ـ باید ازرسم این مقطع استفاده کرد .

روش اول

جائیکه می‌خواهید عرض رودخانه را اندازه بگیرید ، در خود آب و در هر یك از طرفین رودخانه ، علامت چوبی به زمین فرو کنید. سپس با دوست خود در قایق بنشینید و از یك علامت به‌طرف علامت دیگرحرکت کنید و در هر حال کوشش کنید روی خط راستی کـه دو علامت را بهم وصل می‌کند، حرکت کنید . اگرقایق‌ران بی‌تجربه باشد و بخصوص اگرجریان آب تندباشد، موفق به انجام این عمل نمی‌شود. دوست شما باید پارو زن قابلی باشد و علاوه بر آن باید نفر سومی به او کمك کند ، به این ترتیب که درساحل دیگر به‌ایستد و مواظب‌باشد که قایق از مسیر تعیین شده خارج نشود و درمواقع لزوم علامت بدهد که قایق به کدام طرف تغییر جهت بدهد . در عبور اول از رودخانه ، شما بایدحساب تعداد ضربات پاروزا نگه دارید و به این ترتیب معلوم شود که با چند ضربه پارو می‌توان قایق‌را ۵ یا ۱۰ متر منتقل کرد. حالا

برای بار دوم حرکت کنید ، منتهی چوب بلندی ، که به فواصل ۵-۱۰ متری تقسیم شده است ، دردست بگیرید و آنرا درنقاط مختلف تا کف رودخانه فرو کنید (به تعداد ضربات پارو) و عمق رودخانه را در هر نقطه یادداشت کنید .

با این روش تنها می‌توان مقطع زندهٔ رودخانه‌های کوچك را اندازه گرفت و برای رودخانه‌های عریض و پر آب و سائل بغرنجتری که مورد استفادهٔ متخصصین است ، لازم می‌شود. علاقمندان می‌توانند در هر مورد مشخص وسائل ساده ومناسب را انتخاب کنند .

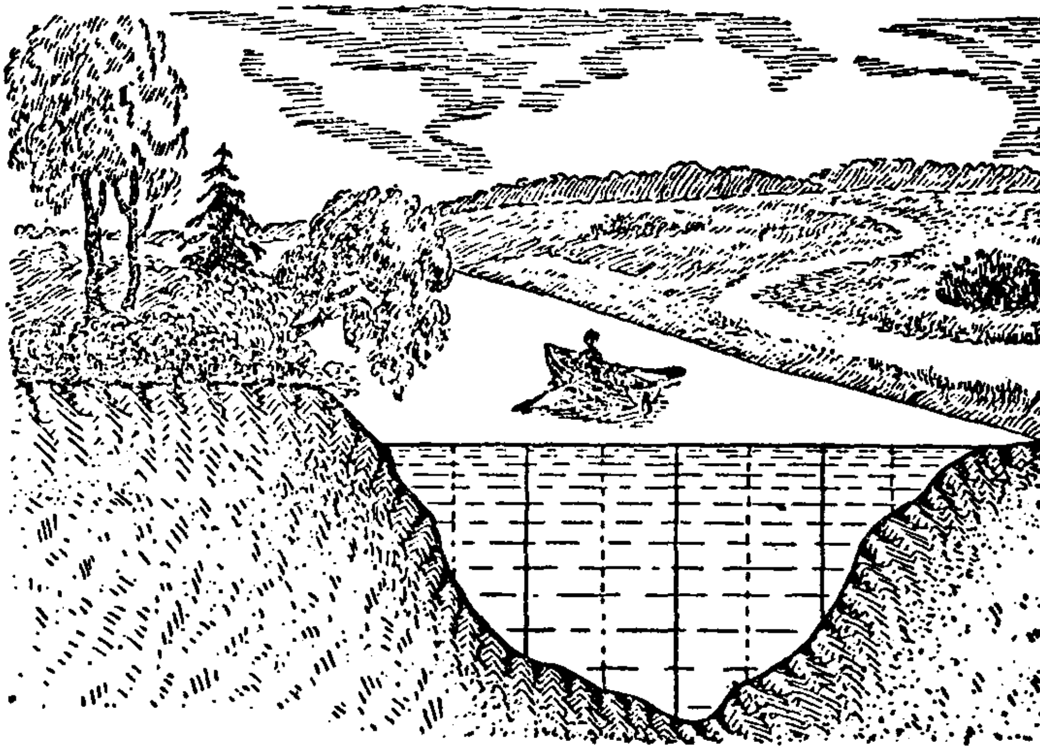
روش دوم

در مورد رودخانه‌های تنگ و کم عمق قایق هم لازم نیست .

بین دو علامتی که در ساحلها گذاشته‌اید ، نخ محکمی عمودبر جریان آب بکشید و يك متر به يك‌متر آنرا علامت بگذارید (یا گره بزنید) و سپس عمق‌بستر رودخانه را درتمام نقاطی که روی نخ علامت گذاشته‌اید ، اندازه بگیرید .

وقتی که همهٔ اندازه‌گیریها تمام شد، قبل ازهمه ، مقطع عرضی رودخانه را روی کاغذ میلیمتری و یا صفحه‌ای از کاغذ شطرنجی رسم کنید . در اینصورت شکلی شبیه شکل ۴۲ بدست می‌آورید . محاسبهٔ مساحت چنین شکلی مشکل نیست ، زیرا سطح این شکل تشکیل شده است از چند ذوزنقه (که قاعده‌ها و ارتفاع هر یـك معلوم است) و دو مثلث ، در دو طرف ، که باز هم انـدازهٔ قـاعده و ارتفاع هریك معلوم است . اگرمقیاس را ۱۰۰ : ۱ گرفته‌باشیم، نتیجه را می‌توان برحسب متر مکعب بدست آورد .

دیگر شما تمام معلومات لازم‌را ، برای محاسبهٔ مقدارآبی که در



۴۲. « مقطع زنده » از یك رودخانه

جریان است ، در اختیار دارید . واضح است که حجم آبی که در هر ثانیه از مقطع زنده عبورمی‌کند برابراست با حجم منشوری که قاعدهٔ آن همین مقطع و ارتفاع آن‌سرعت متوسط جریان‌آب درثانیه می‌باشد. مثلا اگر سرعت متوسط جریان آب را ۰/۴ متر درثانیه وسطح مقطع زندهٔ رودخانه را مساوی ۳/۵ مترمربع بگیریم در هر ثانیه به اندازهٔ:

$$۳/۵ \times ۰/۴ = ۱/۴ \quad \text{(مترمکعب)}$$

۱/۴ متر مکعب (یا همینقدر تن*) آب ازاین مقطع عبور می‌کند . بنابراین در هر ساعت :

$$۱/۴ \times ۳۶۰۰ = ۵۰۴۰ \quad \text{(مترمکعب)}$$

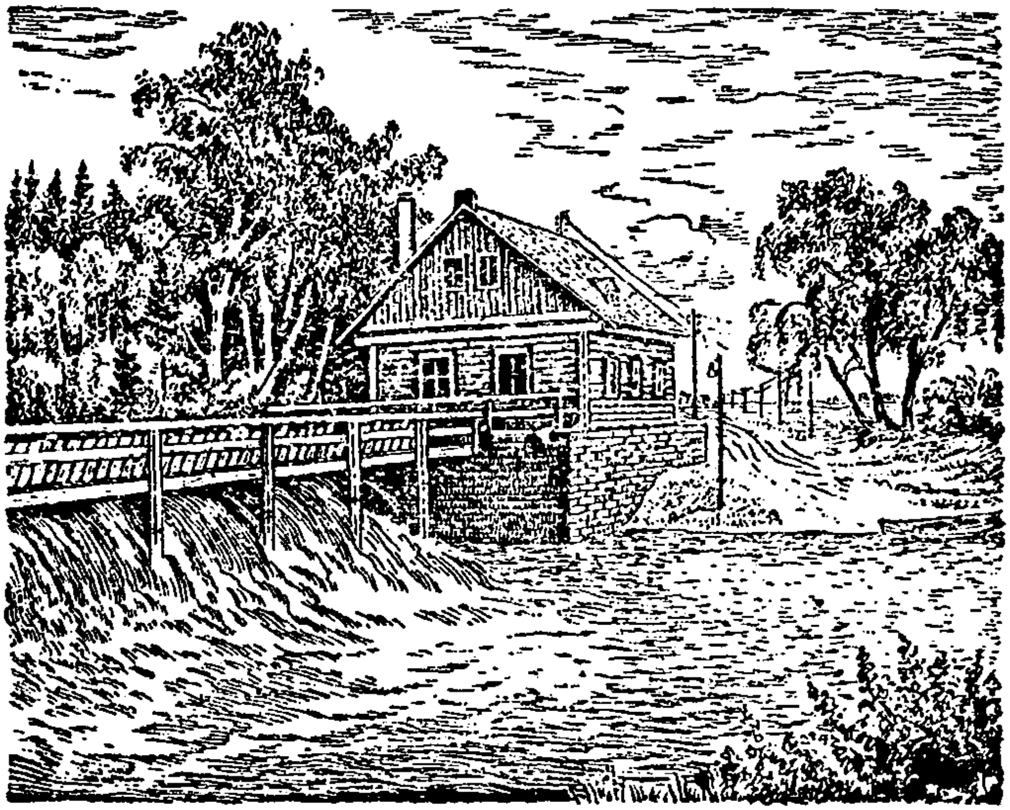
و در هرشبانه روز :

$$۵۰۴۰ \times ۲۴ = ۱۲۰۹۶۰ \quad \text{(مترمکعب)}$$

یعنی بیش از صدهزار متر مکعب آب عبور می‌کند .

*) هر مترمکعب آب یك تن (۱۰۰۰ کیلوگرم) وزن دارد .

رودخانه‌ای که مقطع زندهٔ آن ۳/۵ مترمکعب باشد، رودخانهٔ کوچکی است: می‌توان آنرا به عرض ۳/۵ متر و عمق یك متر در نظرگرفت. ولی می‌بینیم که همین رودخانه چه نیروی عظیمی را در خود پنهان کرده‌است، نیروئی که‌بخصوص می‌تواندبه نیروی الکتریکی پرقدرتی‌تبدیل شود. بنابراین‌ازرودخانه‌ای مثل «نه‌وا» درهرشبانه‌روز

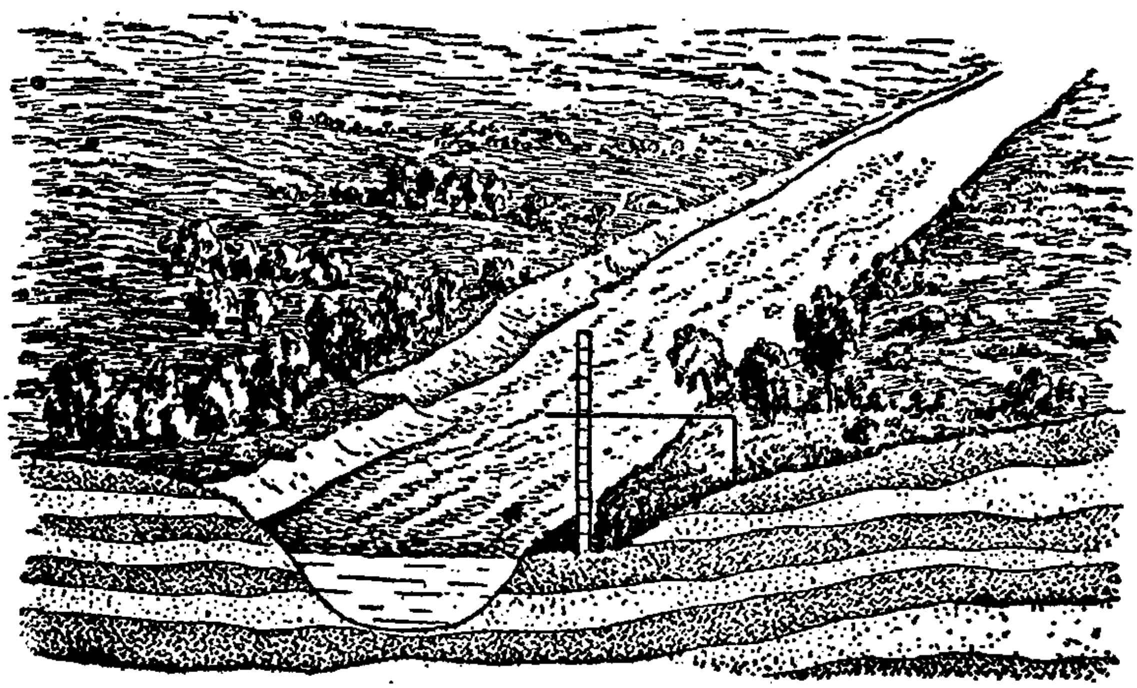


۴۳. ایستگاه برق آبی با قدرت ۸۰ کیلووات در آرتل کشاورزی بورماکین به هفت کلخوز انرژی می‌دهد

چقدر آب جریان دارد: «عبور متوسط» آب در نه‌وا (لنینگراد) از مقطع زنده ثانیه‌ای ۳۳۰۰ مترمکعب است! و «عبور متوسط» آب در «دنپر» (کیه‌وا) ۷۰۰ متر مکعب.

برای ساختن‌یك‌ایستگاه برق‌آبی اندازه‌گیری دیگری هم لازم است: سواحل رودخانه‌تا چه‌اندازه فشار آب را تحمل می کنند، یعنی سد را با چه اختلاف سطح آب می‌توان ساخت (شکل ۴۳)؟ برای‌این

منظور در ۵–۱۰ متری آب ، در دو طرف رودخـانه ، روی خط عمود بر امتداد جریان آب ، دو تیرچوبی روی ساحل به‌زمین فرو کنید . سپس درحالیکه در امتداد ایـن خط حـرکت می کنید ، در نقاط شکستگی ساحل علامتهائی قرار دهید (شکل ۴۴) . به کمك یـك چوب مدرج ، ارتفاع هرعلامت را از دیگری و فاصلهٔ بین آنها را اندازه بگیرید . با استفاده ازاندازه‌هائی که بدست‌آورده‌اید مقطع ساحلها را ، شبیه مقطع بستر رودخانه ، رسم کنید .



۴۴. اندازه گیری مقطع ساحلها

با مقطع سواحل رودخانه می‌توان‌دربارهٔ مقدار قابل قبول فشار قضاوت کرد .

فرض کنیم که‌بتوان سطح آب رابوسیلهٔ سدتا ۲/۵ متربالاآورد. در اینصورت شما می‌توانید قدرت ایستگاه برق آبـی آیندهٔ خـود را محاسبه کنید .

برای‌این منظورعدد۱/۴ («عبور» ثانیه‌ای رودخانه) را در ۲/۵ (ارتفاع سطح آب) و در ۶(ضریبی که بسته به اتـلاف نیرو در ماشین

تغییر می‌کند) ضرب کنید ، نتیجه برحسب کیلووات بدست می‌آیـد . بنابراین :

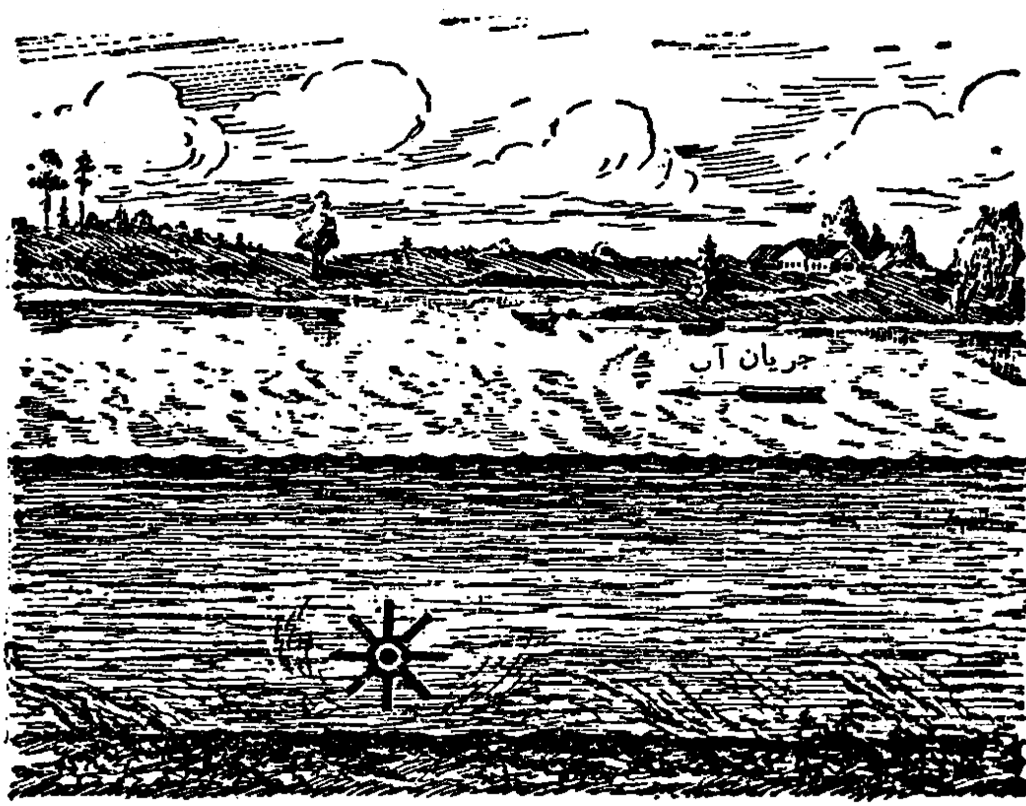
$$۱/۴ \times ۲/۵ \times ۶ = ۲۱ \text{ (کیلووات)}$$

از آنجاکه سطح آب ، و بنابرایـن میزان عبور آب ، در طول سال تغییر می‌کند، برای محاسبه باید میزانی‌را درنظر گرفت که با قسمت عمدهٔ سال تطبیق کند ،

چرخ آبی

مسئله

چرخ پره‌داری را در نزدیکی کف رودخانه مستقر می‌کنیم بنحوی که بتواند به راحتی بچرخد . به شرطی که جریان‌آب ازراست به چپ باشد ، چرخ درچه جهتی خواهد چرخید (شکل۴۵) ؟



۴۵. چرخ درچه جهتی می‌چرخد؟

حل

چرخ‌درعکس جهت حرکت‌عقربه‌های‌ساعت‌می‌چرخد. سرعت جریان آب در قشرهای پائین‌تر کمتراز قشرهای بالاتر است وبنابراین فشار آب به پره‌های بالای چرخ بیش از فشارآبی است که به پره‌های پائین چرخ وارد می‌شود .

قشر رنگین

در رودخانه ، آنجا که آب از کارخانه بیرون می‌آید ، اغلب می‌توان درنزدیکی ریزش‌آب رنگهای زیبائی مشاهده کرد . روغنی که از کارخانه وارد آب رودخانه می‌شود ، به علت اینکه سبك‌تر از آب است، به‌صورت قشرفوق‌العاده نازکی روی سطح‌آب قرار می‌گیرد . آیا می‌توان‌ضخامت این‌قشر نازك را اندازه‌گرفت ویالااقل تخمین‌زد؟

بنظرمی‌رسد که مسئلهٔ پیچیده‌ای‌است ، ولی‌حل آن مشکل‌نیست. حدس می‌زنید که‌ما به‌این‌کار یاس‌آوریعنی اندازه‌گیری مستقیم ضخامت قشرچربی‌نخواهیم پرداخت ،بلکه‌آنرا بطورغیرمستقیم، یعنی به‌طریق محاسبه انجام خواهیم داد .

مقدار معینی روغن ماشین ، و مثلا ۲۰ گرم ، بردارید وجائی دور از ساحل (به وسیلهٔ قایق) درآب بریزید . وقتی که روغن در سطح آب به صورت‌لکهٔ دایره‌ای‌شکل درآمد، ولوبطورتقریبی ، قطر دایره را اندازه بگیرید . با دردست داشتن اندازهٔ قطر ، مساحت دایره را محاسبه‌کنید وچون حجم روغن‌هم برای شما معلوم‌است (حجم روغن را به کمك وزن‌آن می‌توان‌به‌سادگی بدست آورد)، می‌توانید ضخامت قشر روغن را محاسبه‌کنید ، مثلا به این نمونه توجه کنید .

مسئله

اگریک‌گرم نفت را در آب بریزیم، دایره‌ای‌به قطر ۳۰ سانتیمتر به وجودمی‌آورد*. ضخامت‌این قشرروی‌آب چقدر است؟ هرسانتیمتر مکعب نفت ۰٫۸ گرم وزن دارد .

حل

حجم قشر را که البته برابربا حجم نفت است پیدا می‌کنیم ، وقتی که هر سانتیمترمکعب نفت ۰٫۸ گرم وزن دارد ، یك‌گرم آن $\frac{۱}{۰/۸}=۱/۲۵$ سانتیمتر مکعب و یا ۱۲۵۰ میلیمتر مکعب حجم خواهد داشت . سطح‌دایرهٔ به شعاع ۳۰ سانتیمتریا ۳۰۰ میلیمتر برابرباه‌۷۰۰۰۰ میلیمتر مربع خواهد بود . برای پیدا کردن ضخامت قشر نفت باید حجم آنرا بر سطح قاعده‌اش تقسیم کرد :

$$\frac{۱۲۵۰}{۷۰۰۰۰}=۰/۰۱۸ \quad \text{(میلیمتر)}$$

یعنی کمتر از یك پنجاهم میلیمتر. روشن است که برای چنین ضخامتی ممکن نیست با وسائل معمولی بطور مستقیم اندازه گیری را انجام داد .

قشرهای روغن و صابون را خیلی بیشتر از این و تا ضخامت ۰٫۰۰۰۱ میلیمتر و کمترهم می‌توان پخش کرد . فیزیکدان انگلیسی : بویز در کتاب « حبابهای صابون » می‌نویسد :

« روزی این تجربه را دراستخر انجام دادم . روی سطح آب

---

*) معمولا برای از بین بردن پشه‌های مالاریا برای هر هکتار ۴۰۰ کیلوگرم نفت مصرف می‌شود .

یك قاشق‌چایخوری روغن زیتون ریختم . لکهٔ بزرگی به قطر ۲۰-۳۰ متر بوجود آمد . چون لکهٔ روغن هم از جهت طول و هم از جهت عرض قریب هزاربرابر طول و عرض قاشق‌چایخوری بود ، بنابراین ضخامت روغن می‌بایست قریب یك میلیونیم ضخامت روغن درقاشق ، یعنی تقریباً ۰٫۰۰۰۰۰۲ میلیمتر باشد » .

دایره‌های روی آب

مسئله

مسلماً شما بارها به این تفریح جالب پرداخته‌اید که اگر سنگی را درآب ساکن بیندازیم ، دایره‌هائی دراطراف آن به وجود می‌آید (شکل ۴۶) ، و بدون تردید ، هرگز توضیح این پدیدهٔ طبیعت اشکالی

۴۶. دایره‌های روی آب

برای شما بوجود نیاورده است : موجی با سرعت یکنواخت از نقطهٔ

برخورد سنگ با آب منتشر می‌شود و بنابراین درهر لحظه همهٔ نقاطی که تحت تأثیر موج بحرکت آمده‌اند بیك فاصله از این نقطه قرار دارند یعنی روی محیط یك دایره‌اند .

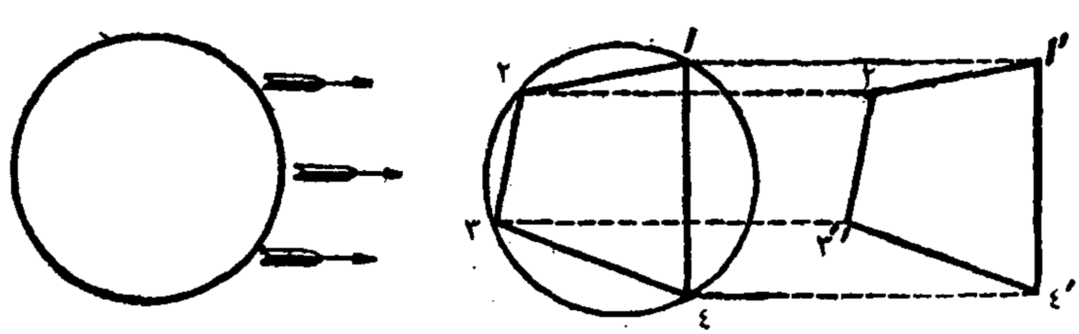
ولی وضع در مورد آب جاری چگونه است ؟ آیا موجی که در اثر ضربهٔ سنگ بر آب جاری پیدا می‌شود باز هم به شکل دایره است یا شکل کشیده‌ای دارد ؟

در نظر اول بنظرمی‌رسدکه امواج دایره‌ای باید در آب جاری درجهت جریان آب کشیده شوند : امواج درجهت جریان آب نسبت به جهت مخالف آن و یا امتدادهای عمود برجریان آب، سرعت بیشتری پیدا می کنند. باین ترتیب بنظرمی‌رسدکه امواج تولیدشده به صورت منحنیهای بسته و کشیده‌ای درمی‌آیندکه بهرحال به شکل دایره نیستند.

ولی ، درحقیقت اینطور نیست . وقتی که سنگی را در آب جاری بیندازید ، می‌بینید که امواج تولید شده درست مثل حالتی که که در آب ساکن بود ، به شکل دایره درمی‌آیند . چرا ؟

حل

دلیل آن اینست : وقتی که آب ساکن است امواج به صورت دایره هستند . به‌بینیم جریان آب چه تعییری در آن می‌دهد؟ جریان آب



۴۷. جریان آب شکل موج را تغییر نمی‌دهد

هر نقطهٔ موج دایره‌ای را ، درجهتی که نشان داده‌ایم ، بـا خود می‌برد (سمت چپ شکل۴۷) ، ضمناً نقاط مختلف دایره روی خطوط موازی هم و با یك سرعت منتقل می‌شوند ، یعنی فواصل آنها نسبت بهم‌تغییر نمی‌کند. ومیدانیم که «انتقال موازی» شکل را تغییرنمی‌دهد. درحقیقت درنتیجهٔ این انتقال، نقطهٔ ۱ (سمت راست شکل۴۷) به نقطهٔ ´۱ ، نقطهٔ ۲ به ´۲ وغیره تبدیل می‌شودوچهارضلعی ۱۲۳۴ به صورت ´۴´۳´۲´۱ درمی‌آیدکه‌با هم برابرند (تساوی دوچهار ضلعی را می‌توان به‌سادگی و از روی خواص متوازی‌الاضلاعهای ´۱´۱۲۲ ، ´۲´۲۳۳ : ´۴´۳۴۳ و غیره نتیجه گرفت) . اگر روی دایره به جای چهار نقطه ، نقاط بیشتری در نظربگیریم، بازهم‌چند ضلعی‌های‌مساوی بدست می‌آوریم و بالاخره با درنظرگرفتن بی‌نهایت نقطه (یعنی خود دایـره) ، پس از انتقال باز هم دایره‌ای مساوی آن بدست خواهیم آورد .

به این ترتیب روشن می‌شود که امواج در هر حال به صورت دایره هستند ، چه درآب ساکن و چه در آب جاری ، تنها اختلاف‌در این است که درآب ساکن منتقل نمی‌شوند (به شرطی که دورشدن‌آنها را ازمرکزثابت خود به حساب نیاوریم) . درآب جاری رودخـانه هم امواج همراه با مرکز خود با سرعت جریان آب حرکت می‌کنند*.

گلولهٔ منفجرشده

مسئله

مسئله‌ای مطرح می‌کنیم که ظاهراًبا مسئلهٔ قبل ارتباطی ندارد،

---

*) دراین استدلال شرطی وجود دارد ؛ آب باید برای تمام نقاط محیط موج دایره‌ای سرعتهای مساوی داشته باشد، اگرسنگریزه را درنقطه‌ای ازسطح آب بیندازیم که سرعت جریان آب در نقاط مختلف اطراف آن یکی نباشد (و مثلا در نزدیکی ساحل) ، شکل دایره‌ای امواج ثابت نمی‌ماند و بهم می‌خورد.

ولی همانطور که خواهید دید با زمینهٔ اصلی آن رابطهٔ نزدیك پیدا می‌کند .

گلولهٔ توپی را فرض کنید که در ارتفاع زیادی درهوا درحرکت است . وقتی که این گلوله شروع به فرود آمدن کرد ، ناگهان منفجر شد و تکه‌های آن به اطراف پراکنده شد، فرض می‌کنیم که این قطعات با یك قدرت به اطراف پرتاب شوند وهوا هیچگونه مانعی برای آنها نباشد . حالا میخواهیم بدانیم که بعد از یك ثانیه تکه‌های منفجرشده درچه وضعی قرارمی‌گیرند؟ به‌شرطی که‌دراین‌لحظه هنوز به‌زمین‌اصابت نکرده باشند .

حل

این مسئله به مسئلهٔ دایره‌های روی آب شباهت دارد . در اینجا هم بنظر می‌رسد که قطعات گلوله باید روی شکلی که بطرف پائین (در جهت سقوط) کشیده است، قرار گیرند: زیرا قطعاتی که بطرف بالا پرتاب شده‌اند باید ظاهراً با سرعتی کمتر از قطعاتی که بطرف پائین پرتاب شده‌اند ، حرکت کنند. ولی‌بسادگی می‌توان‌ثابت کرد که قطعات گلولهٔ فرضی ما روی سطح یك کره قرار می‌گیرند . فرض کنید برای چند لحظه نیروی ثقل ازبین رفته باشد، دراینصورت تمام قطعات گلوله طوری به اطراف پراکنده می‌شوند که در هرحال بیك فاصله از مرکز انفجارند یعنی روی سطح یك کره قرار دارند . حالا اثر نیروی ثقل را هم در نظربگیریم . میدانیم که همهٔ قطعات در اثر این نیرو با یك سرعت سقوط می‌کنند*، در نتیجه قطعات گلوله روی خطوط موازی

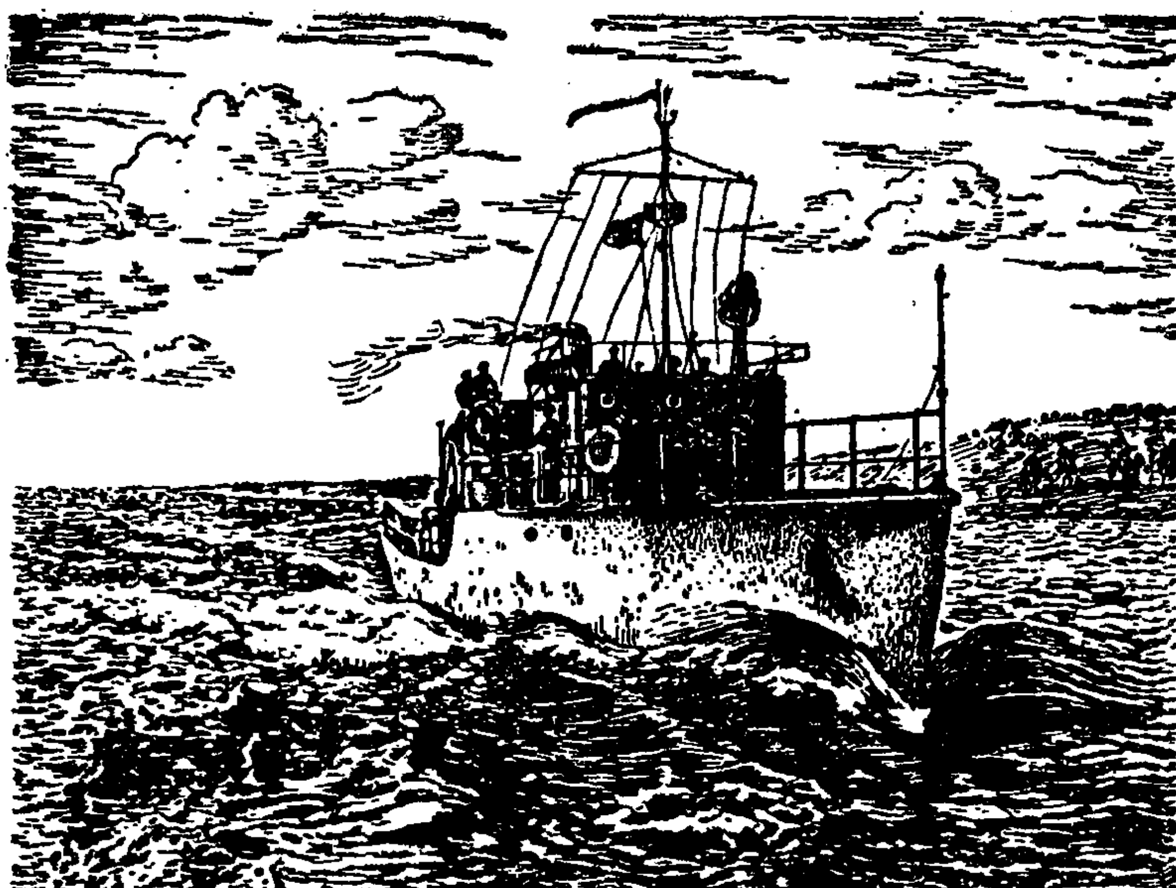
*) البته اگرمقاومت هوا را درنظربگیریم (که ما دراینجا ازآن صرفنظر کرده‌ایم) وضع کمی فرق خواهد کرد .

با هم حرکت می‌کنند و بنابراین فواصل آنها نسبت بهم بدون تغییر میماند. و میدانیم که انتقال بموازات‌خود، شکل‌جسم راتغییر نمی‌دهد- کره به شکل کره باقی میماند .

به‌این ترتیب قطعات‌گلولهٔ فرضی ماکره‌ای را تشکیل می‌دهند که با سرعت سقوط آزاد بطرف پائین حرکت می‌کنند .

موج حاصل ازحرکت‌کشتی

به رودخانه برگردیم . روی پل به‌ایستید و به اثری که پس از عبور سریع کشتی در آب باقی میماند نگاه کنید . می‌بینید که چگونه ازقسمت دماغه، آب به دوقسمت می‌شود (شکل ۴۸).

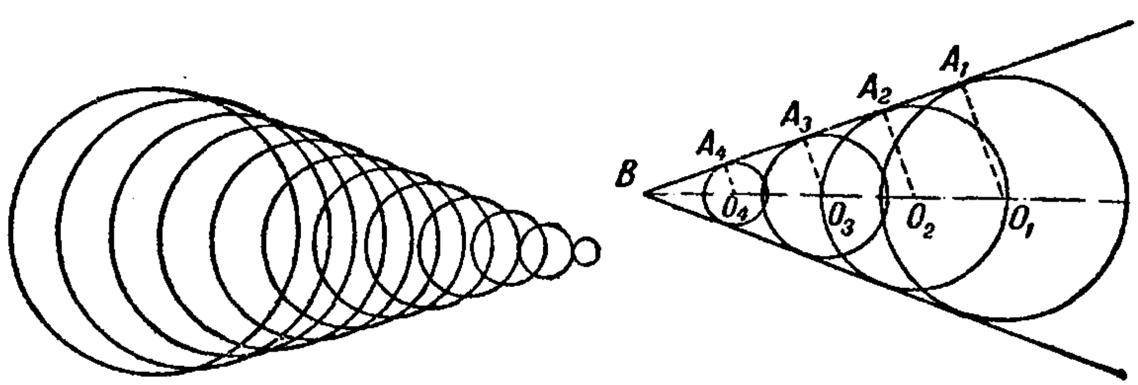


۴۸. موجی که از حرکت کشتی پیدا می‌شود

این دو شانهٔ آبی از کجا می‌آید؟ و چرا وقتی که سرعت کشتی بیشتر می‌شود زاویهٔ بین دو شانه کوچکتر می‌شود؟

برای اینکه علت به وجود آمدن شانه‌های آبی را روشن کنیم، دوباره به مسئلهٔ تشکیل دایره‌ها، که در اثر انداختن سنگ در آب پیدا می‌شد، برمی‌گردیم.

اگر به فواصل معین، سنگریزه‌هائی متناوباً در آب بیندازیم، روی سطح آب دایره‌هائی با اندازه‌های مختلف پیدا می‌شود. سنگریزه‌ای که دیرتر به آب افتاده باشد دایرهٔ کوچکتری به وجود می‌آورد. حالا اگر سنگریزه‌ها را در امتداد یك خط راست و پشت سرهم در آب بیندازیم، دایره‌هائی به وجود می‌آید که مجموعاً شبیه امواجی است که در دماغهٔ کشتی پیدا می‌شود. هرچه سنگریزه‌ها کوچکتر و فاصلهٔ زمانی پرتاب سنگریزه‌ها کمتر باشد، این شباهت محسوس‌تر می‌شود. چوبی را در آب فرو کنید و آنرا در سطح آب جلو ببرید، مثل اینست که سقوط انفصالی سنگریزه‌ها را به سقوط اتصالی آنها تبدیل کنید، آنوقت خواهید دید که درست موجی شبیه آنچه که دماغهٔ کشتی بوجود می‌آورد، پیدا می‌شود.



۴۹. موج کشتی چگونه به وجود می‌آید؟

برای آنکه مطلب بطور کامل روشن شود، باید نکات دیگری هم به آن

اضافه کنیم . دماغهٔ کشتی در هر لحظه ، شبیه به سنگریزه‌ای که در آب انداخته‌ایم ، موج دایره‌ای به وجود می‌آورد . موج به اطراف منتشر می‌شود ، ولی در همین لحظه کشتی به جلو می‌رود وموج دوم راتولید می‌کند که پشت سر آن بلافاصله موج‌سوم‌پیدا می‌شودوغیره. دایره‌های منفصل‌مربوط به‌سقوط سنگریزه‌ها ، دراینجا به دایره‌های متصل تبدیل می‌شود وطرحی شبیه شکل۴۹ به وجود می‌آورد. دراثر برخورد هردو موج مجاور با یکدیگر ، هریك دیگری را می‌شکنند و تنها دو قسمت کوچك ازدایره‌های‌کامل باقی‌ماند که قسمت خارجی آنهاظاهرمی‌شود. این قسمتهای خارجی بهم مربوط می‌شوند و دوشانهٔ متصل بهم را تشکیل می‌دهند که به وضع دو مماس مشترك خارجی دایره‌های امواج درمی‌آیند (شکل۴۹ ـ سمت راست) .

شبیه امواج شانه‌ای که درعقب هر کشتی دیده می‌شود، می‌توان در مورد هرجسمی که با سرعت‌کافی در سطح آب حرکت‌کند ، مشاهده نمود .

ازاین مطلب مستقیماً نتیجه می‌شود که این پدیده وقتی به‌وجود می‌آید که جسم سریع‌تراز موج آب حرکت‌کند . اگرشما چوبی‌را به‌آهستگی‌درآب حرکت‌دهیدمی‌بینید که‌شانه‌های آبی به وجودنمی‌آید واامواج دایره‌ای یکی درداخل‌دیگری‌تشکیل می‌شود وبرای‌آنها مماس مشترکی هم وجود ندارد .

درحالتی‌هم که جسمی ساکن باشد و آب از پهلوی‌آن عبور کند ، بازهم می‌توان شانه‌های آبی‌را مشاهده‌کرد . اگر جریان آب رودخانه به اندازهٔکافی سریع باشد ، شانه‌های آبی را درکنار ستونهای پل هم می‌توان دید . در اینجا شکل امواج کاملاروشن‌تر ازمورد کشتی هستند ، زیرا دیگر حرکت پروانه باعث شکستگی‌آنها نمی‌شود .

برای روشن کردن جنبهٔ هندسی مطلب ، مسئلهٔ زیر را طرح

می کنیم .

مسئله

مقدار زاویهٔ بین دوشاخهٔ موجی که از حرکت کشتی به وجـود می‌آید به چه عاملی مربوط است ؟

حل

از مرکز امواج دایره‌ای (شکل ۴۹ـسمت راست) شعاعهائی‌را که به یکی از مماس مشترکها می‌رسد ، رسم می کنیم ، بسادگی روشن می‌شود که O_1B راهی‌است که‌درزمان‌معینی‌دماغهٔ کشتی‌طی کرده‌است و O_1A_1 فاصله‌ای که درهمان زمان، موج منتشرشده است. نسبت $\frac{O_1A_1}{O_1B}$ سینوس زاویهٔ O_1BA_1 است ، که درعین حال‌عبارتست ازنسبت‌سرعت موج به سرعت کشتی . به این ترتیب زاویهٔ B ، بین شانه‌های موج ، عبارتست ازدوبرابر زاویه‌ای که سینوس آن نسبت سرعت انتشارموج به سرعت کشتی است .

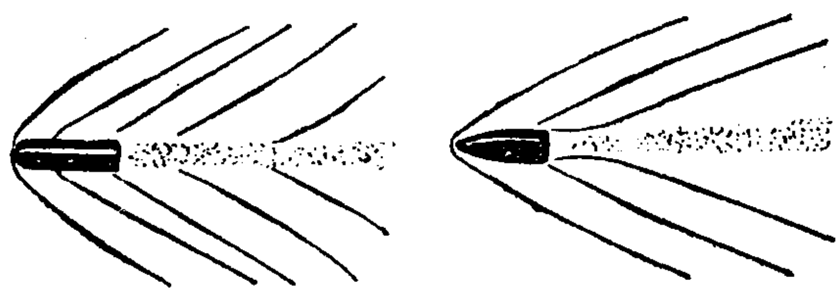
سرعت انتشار امواج دایره‌ای درآب تقریباًمربوط به این‌نیست که به وسیلهٔ حرکت کدام کشتی بوجود آمده است و بنابراین زاویهٔ بین شانه‌های موجی که دراثر حرکت کشتی بدست می‌آیـد ، اساساً مربوط‌به سرعت کشتی خواهد بود: سینوس نصف این‌زاویه باسرعت کشتی نسبت عکس دارد . برعکس با در دست داشتن مقدار زاویـه می‌توان‌نسبت سرعت کشتی را به سرعت موج‌پیدا کرد . اگر فی‌المثل زاویهٔ بین شاخه‌های موج مساوی ۳۰ درجه باشد (همانطورکه درمورد کشتی‌های بزرگ مسافربری چنین است)، سینوس نصف آن $(\sin 15^\circ)$

مساوی ۰/۲۶ می‌شود و این به معنای آنست که سرعت کشتی $\frac{۱}{۰/۲۶}$ یا تقریباً ۴ برابر سرعت انتشار موج است .

سرعت گلولۀ توپ

مسئله

حرکت گلوله و یا گلولۀ توپ در فضا هم امواجی ، شبیه آنچه هم اکنون مطالعه کردیم ، به وجود می آورد . وسائلی وجود دارد که به کمك آنها می‌توان ازگلوله‌ای که درحال پروازاست عکس گرفت ، درشکل ۵۰ دونمونه ازعکس گلوله‌هائی که با سرعتهای متفاوت پرواز می کنند ، استنساخ شده‌است . در شکل ، موج مورد نظر ما (موجی که دراثرحرکت گلوله در هوا به وجود می‌آید و بـه موج مخروطی



۵۰. موجی که در هوا در اثر پرواز گلوله به وجود می‌آید

مشهور است) به خوبی دیده می‌شود . خصوصیات به وجود آمدن این موج کاملا شبیه موجی است که در اثر حرکت کشتی در آب به وجود می‌آید . دراینجا ازهمان رابطۀ هندسی می‌توان استفاده کرد : سینوس نصف زاویه‌ای که موج‌مخروطی‌به‌وجود می‌آورد، برابراست با نسبت سرعت انتشار موج در هوا برسرعت پرواز خودگلوله. سرعت‌انتشار موج در هوا تقریباً برابـراست بـا سرعت صوت ، یعنی ۳۰۰ متر در

ثانیه . بنابراین با عکس برداری از گلوله‌ای که در حال پرواز است، می‌توان سرعت تقریبی آنرا به سادگی تعیین کرد .

حالا برای دو عکسی که در صفحهٔقبل آورده‌ایم‌سرعت‌گلوله را پیدا کنید .

حل

زاویهٔ بین شاخه‌های موجها را در شکل ۵۰ اندازه می‌گیریم. در حالت اول قریب ۸۰ درجه و درحالت دوم ۵۵ درجه بدست می‌آید ، نصف‌آنها ۴۰ درجه و $۲۷\frac{۱}{۲}$ درجه می‌شود و داریم :

$$sin ۴۰^{\circ} = ۰/۶۴ \; ; \quad sin ۲۷\frac{۱}{۲}^{\circ} = ۰/۴۶$$

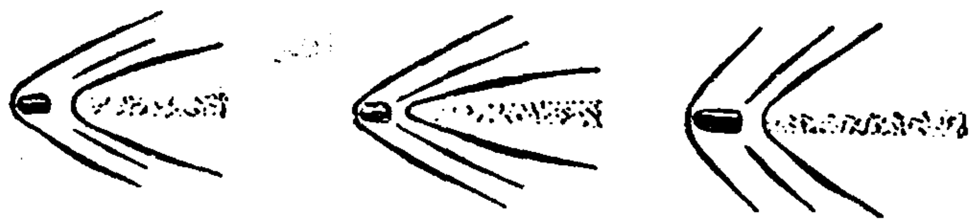
بنابراین ، سرعت انتشار صوت در هــوا ، یعنی ۳۳۰ متر ، در حالت اول ۰/۶۴ و در حالت دوم ۰/۴۶ سرعت‌گلوله است . از آنجا سرعت گلولهٔ اول $\frac{۳۳۰}{۰/۶۴}$ یعنی ۵۲۰ متر در ثانیه و سرعت گلولهٔ دوم $\frac{۳۳۰}{۰/۴۶}$ یعنی ۷۲۰ متر در ثانیه است .

می‌بینید که باکمك مطالب ساده و مقدماتی هندسه و استفاده از بعضی جوانب‌فیزیك می‌توان مسئله‌ای را حل کرد که درنظراول‌بغرنج بنظر می‌رسد : باکمك عکس گلوله ، می‌توان سرعت آنرا در لحظهٔ عکسبرداری بدست آورد (البته این محاسبه تقریبی است ، زیرا بعضی از عوامل فرعی را در مورد آن در نظر نگرفته‌ایم) .

مسئله

برای علاقمندان در اینجا عکس سه‌گلولهٔ در حــال پــرواز را

آورده‌ایم کـه خواننده می‌توانـد خود سرعت آنها را بدست آورد (شکل ۵۱) .



۵۱. سرعت گلوله‌ای که درحال پرواز است چگونه تعیین می‌شود ؟

عمق استخر

دوایری که در آب تشکیل می‌شود ، ما را بـه مبحث توپخانه کشاند . دوباره به رودخانه برمی گردیم و یـک مسئلهٔ هندی را مطرح می کنیم .

در هند قدیم عادت براین بود است که مسائل ریاضی را به شعر بیان کنند و ما دراینجا ترجمهٔ یکی از آنها را نقل می کنیم .

مسئله

روی دریاچهٔ آرام ،
گل نیلوفر به اندازهٔ نیم فوت ازآب بیرون آمده است .
او صاف و یکنواخت روئیده ، نسیمی وزید
و آنرا بیك طرف خم کرد .
گل نیلوفر درست روی آب قرارگرفت ،
صیاد، این گل بهاری زودرس را ،
در دو فوتی جای اولش پیدا کرد .
حالا سئوالی مطرح می‌کنم :
عمق آب دریاچه
در اینجا چقدر است ؟

حل

عمق مجهول آب یعنی CD را x فرض می کنیم (شکل ۵۲) .
طبق قضیهٔ فیثاغورث خواهیم داشت :

$$BD^۲ - x^۲ = BC^۲$$

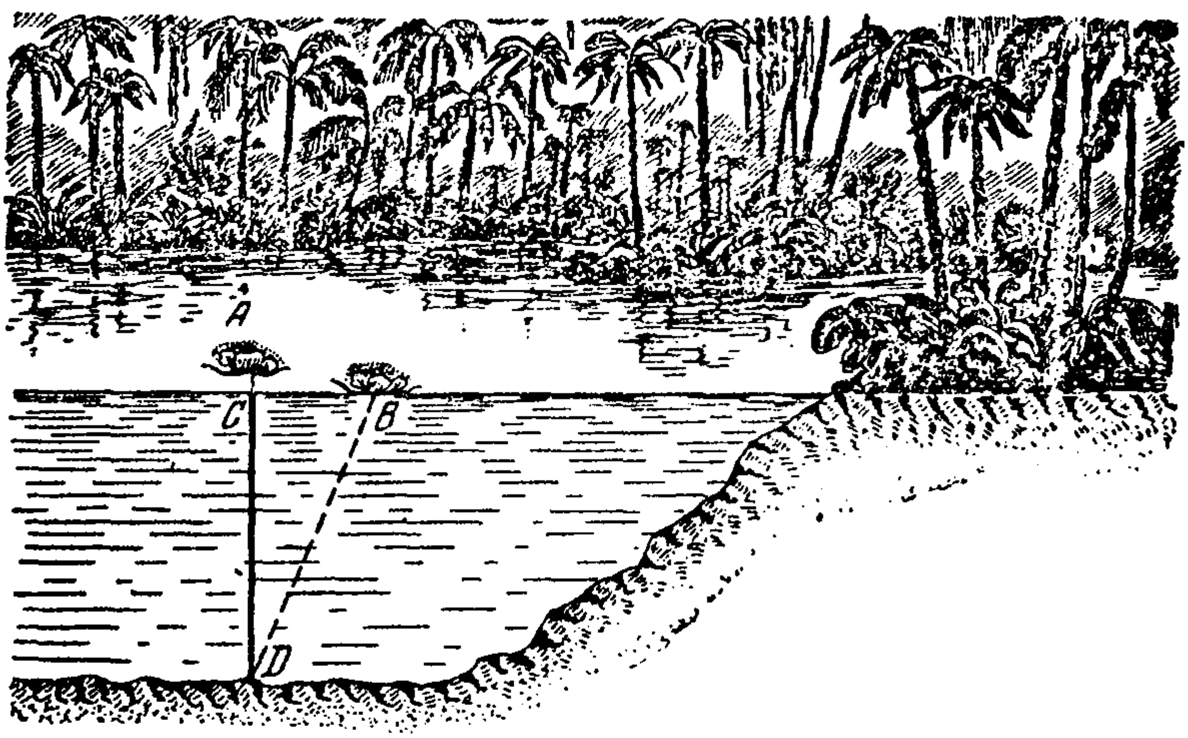
که با استفاده از مفروضات می‌شود :

$$\left(x + \frac{۱}{۲} \right)^۲ - x^۲ = ۲^۲$$

و از آنجا :

$$x^۲ + x + \frac{۱}{۴} - x^۲ = ۴ \quad \Longrightarrow x = ۳\frac{۳}{۴}$$

یعنی عمق آب برابر $۳\frac{۳}{۴}$ فوت است .



۵۲. مسئلهٔ هندی دربارهٔ گل نیلوفر

گیاهان آبی که در نزدیك ساحل ویا برکه‌های کم عمق روئیده‌اند

وسائل اصلی برای طرح مسائل مشابهی هستند : بـدون هیچ زحمتی و حتی بدون اینکه دستتان را در آب فرو کنید ، می‌توانید عمق آب رادر این نقطه معین کنید .

آسمان پرستاره درآب رودخانه

رودخانه هنگام‌شب هم درمقابل هندسه‌دانهامسائلی طرح‌می کند. گوگول در توصیف دنپر می‌گوید :

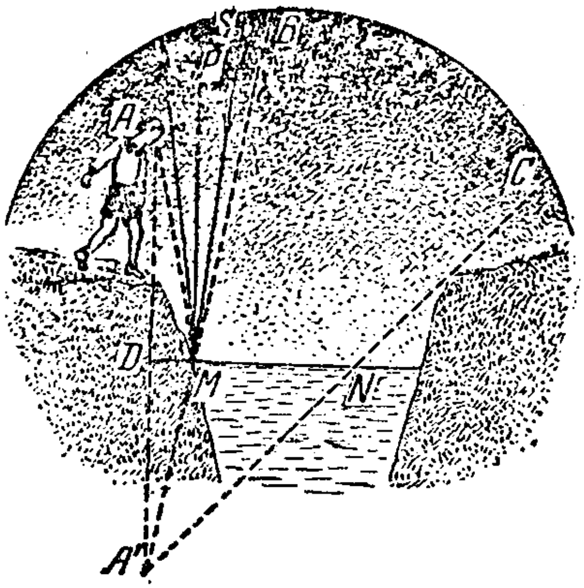
« ستارگان برفراز عـالم بـرق می‌زنند و می‌درخشند و همیشه خود را به دنپرتسلیم می کنند . دنپرهمهٔ‌آنها را درآغوش تاریك خود نگه می‌دارد : هیچکدام از او فرار نمی‌کنند ، مگـر اینکه در آسمان خاموش شوند » .

در حقیقت ، وقتی که در ساحل رودخانهٔ پهنی ایستاده باشید ، سطح آب به آئینه‌ای می‌ماندکه گنبد ستاره‌ای آسمان در آن منعکس شده است .

ولی واقع امر چگونه است ؟ آیـا همهٔ ستارگان در رودخـانه « می‌افتند » ؟

به شکل مراجعه‌کنیم (شکل۵۳) : A ـ چشم ناظر، که درساحل رودخانه نزدیك سراشیبی ایستاده و MN سطح آب است . ناظر از نقطهٔ A کدام ستاره‌ها را می‌تواند درآب به‌بیند ؟

برای‌جواب‌دادن‌به این سئوال، ازنقطهٔ A عمود ADرابرامتداد MN فرود می‌آوریم و به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ ´A امتداد می‌دهیم . اگرچشم ناظردر ´A بود، تنها قسمتی ازآسمان پرستاره رامی‌توانست به بیند که در داخل زاویهٔ BA´C قرارداشت و منطقهٔ دید ناظرحقیقی هم ، که در نقطهٔ A ایستاده است ، درست همانجاست . ستاره‌هائی که



۵۳. کدام قسمت آسمان پرستاره را می‌توان از داخل آب دید ؟

در خارج این منطقه قرارگرفته‌اند دیده نمی‌شوند، زیرا اشعهٔ منعکس شدهٔ آنها به چشم ناظر نمی‌رسند.

دلیل این مطلب چیست ؟ چگونه می‌توان ثابت کرد که مثلا ناظر ما نمی‌تواند ستارهٔ S را، که درخارج‌زاویهٔ BA´C قرارگرفته است ، در رودخانه به‌بیند ؟

شعاع نوری آنـرا تعقیب می کنیم . ایـن شعاع در نزدیکی ساحل ، درنقطهٔ M ، فرود می آید وطبق قانون فیزیک‌شعاع منعکس‌با عمود MP زاویه‌ای مساوی زاویـهٔ فرود SMP می‌سازد که از زاویهٔ PMA کوچکتر است (این مطلب به سادگی‌وبا توجه‌به تساوی مثلثهای ADM و A´DM ثابت‌می‌شود). بنابراین شعاع منعکس باید از کنار نقطهٔ A عبور کند .

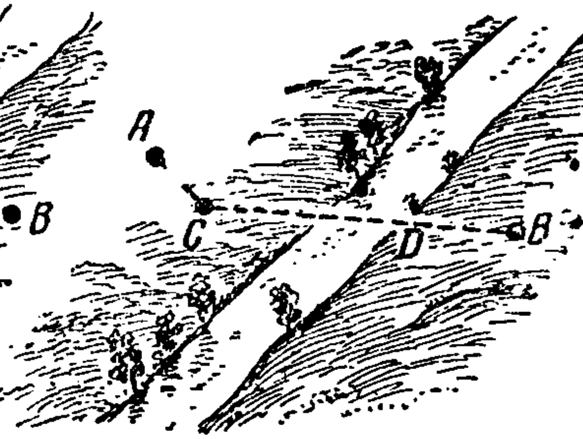
به‌این ترتیب‌نقل قولی راکه ازگوگول کردیم اغراق آمیزاست ! در دنپر همهٔ ستارگانی راکه درآسمان می‌بینیم منعکس نمی‌شوند .

راهی از روی رودخانه

مسئله

بین دو نقطهٔ A و B رودخانه‌ای واقع است که ساحلهای آن تقریباً موازی یکدیگرنـد (شکل ۵۴) . میخواهیم پلی روی رودخـانه بسازیم که امتداد آن با مسیررودخانه زاویهٔ قائمهٔ بسازد . جای پل را

۵۴. پل‌را در کجا عمود بر ساحل بسازیم تا جادهٔ بین A و B کمترین فاصله را داشته‌باشد؟



۵۵. جائیکه برای ساختن پل باید انتخاب کرد

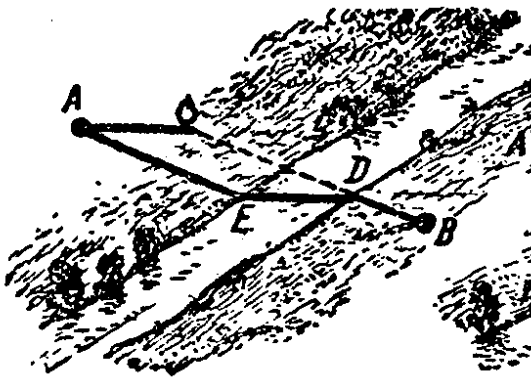
در کجا انتخاب کنیم تا راه از A به B حداقل باشد ؟

حل

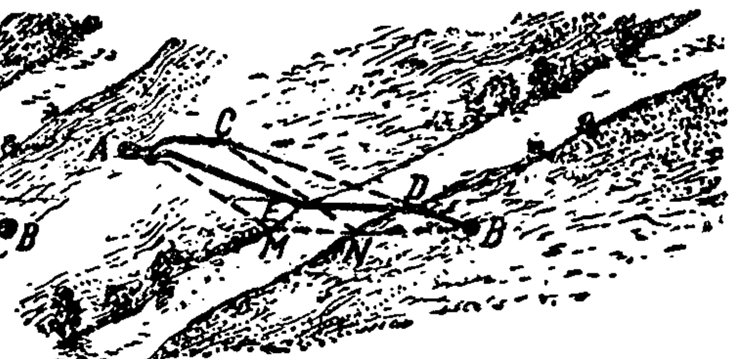
از نقطهٔ A (شکل ۵۵) عمودی برامتداد مسیر رودخانه رسم می‌کنیم ، روی این عمود قطعهٔ AC را مساوی عرض رودخانه جدا می‌کنیم و C را به D وصل می‌نمائیم . اگر پل را در نقطهٔ D بسازیم، فاصلهٔ عبور از A به B حداقل خواهد بود .

در حقیقت اگر پل DE را بسازیم (شکل ۵۶) ، با وصل E به A ، راه AEDB بدست می‌آید که در آن قسمت AE با CD موازی است (چهار ضلعی AEDC متوازی‌الاضلاع است ، زیرا دو ضلع روبروی AC و ED موازی و مساوی‌اند) . بنابراین راه AEDB از لحاظ طول با راه ACB برابراست. بسادگی می‌توان ثابت کرد که هر راه دیگری طولانی‌تر از این راه است . مثلا فرض می کنیم مسیر AMNB (شکل۵۷) کوتاهتر ازAEDB یعنی کوتاهتر از ACB باشد. C رابهN وصل‌می کنیم، می‌بینیم که CN مساوی AM است وبنابراین

راه AMNB برابراست با راه ACNB . ولی واضح است که CNB بزرگتر از CB و بنابراین ACNB بزرگتر است از ACB (و یا از AEDB) . بنابراین مسیر AMNB طولانی‌تر ازمسیر AEDB است نه کوتاهتر از آن .



۵۶. پل ساخته شده است



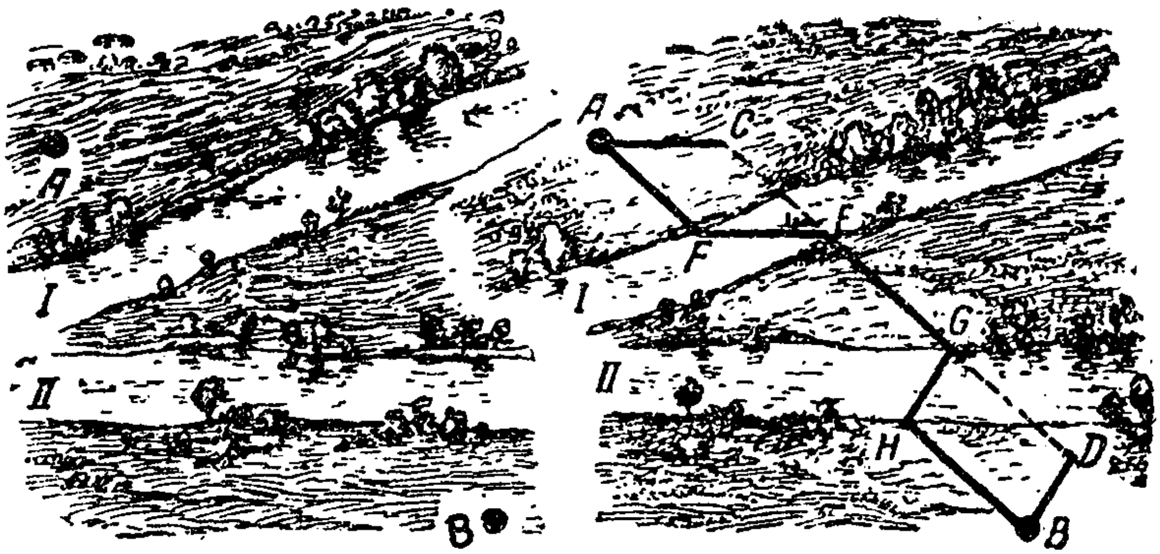
۵۷. راه AEDB کوتاهترین راه است

همین استدلال را می‌توان دربارهٔ هرپل دیگری که غیر از ED باشد ، انجام داد ، بعبارت دیکر مسیر AEDB واقعاً کوتاهترین راه ممکن است .

دوپل بسازید

مسئله

می‌توان حالت بغرنجتری را مطرح کرد : بین دو نقطهٔ A و B دو رودخانه قرار گرفته است و میخواهیم با ساختن دو پل آنها رابهم وصل کنیم ، اگر هرپل عمود بر ساحل مربوطه باشد ، جای پلها را چنان پیدا کنید که راه بین A و B کوتاهترین راه ممکن باشد (شکل ۵۸) .



۵۸. ساختمان دو پل

حل

از نقطهٔ A (شکل ۵۸ـسمت راست) پـاره خط AC را مساوی عرض رودخانهٔ I و عمود برساحل آن رسم می کنیم . از نقطهٔ B هـم پاره خط BD را مساوی عرض رودخانهٔ II و عمود برساحل آن رسم می کنیم . نقاط C و D را با یك خط مستقیم بهم وصل می‌نمائیم . در نقطهٔ E ، پل EF ودرنقطهٔ G پل GH رامی‌سازیم. راه AFEGHB کوتاهترین راه بین A و B خواهد بود .

اثبات این راه حل را بعهده خواننده می‌گذاریم که در حقیقت کاملا شبیه استدلال حالت قبل است .

۳

هندسه در فضای آزاد

اندازه‌های ظاهری ماه

اندازهٔ قرص ماه (بدر) در آسمان بنظر شما چقدر است ؟ اگر این سئوال را از افراد مختلف بکنید ، جـوابهای کاملا مختلفی دریـافت می کنید .

ماه «به اندازهٔ بشقاب است»، «به سیبی میماند»، «مثل کف دست است» وغیره . اینها جوابهائی است که می‌شنوید : این تخمینهای غیر دقیق و نامعین تنها حاکی از اینست که جولب دهندگان استنباط صحیحی از حقیقت سئوال ندارند .

به سئوالی که تا به این اندازه عادی بنظر می‌رسد ، تنها کسی می‌تواند جواب صحیح بدهد که تصور روشنی دربارهٔ اندازهٔ «ظاهری»

یك شیئی داشته باشد . کمتر کسی گمان می‌برد که در اینجا صحبت از مقدار یك زاویه است، زاویه‌ای که رأس آن چشم‌ما ودوضلع آن خطوط راستی هستند که از دو طرف شیئی عبور می کنند ، چنین زاویـه‌ای را « زاویهٔ دید » و یا «اندازهٔ زاویه‌ای‌شیئی» گویند (شکل ۵۹ را به‌بینید) ووقتی که برای تخمین اندازهٔ ظاهری ماه در آسمان، آنرا با اندازه‌های بشقاب ویا چیزدیگری مقایسه می کنند، یا بدون هیچ فکری این مقایسه را انجام می‌دهند و یا به این معنی می گیرند که ماه در آسمان تحت زاویه‌ای مساوی زاویهٔ دیدبشقاب ویا سیب‌دیده‌می‌شود . ولی این اشاره به تنهائی‌کافی نیست : بشقاب یا سیب، بسته به دوری یا نزدیکیشان از ما ، تحت زوایای مختلفی‌دیده می‌شوند : هرچه نزدیکتر باشند زاویهٔ دید بزرگتر و هرچه دورترباشند ، زاویهٔ دید کوچکتر می‌شود . برای اینکه مطلب کاملا روشن باشد ، باید معین کرد که بشقاب یا سیب در چه فاصله‌ای باید قرارگیرد .

۵۹. زاویهٔ دید یعنی چه؟

مقایسهٔ اندازه‌های اشیاء مختلف با یکدیگر ، بدون درنظر گرفتن فواصل آنها ، درنوشته‌های ادبی خیلی‌عادی است که حتی مورداستفادهٔ نویسندگان درجه اول هم قرار گرفته است . این روش ، بخاطر اینکه به روحیهٔ بیشتر مردم نزدیکتر است ، اثر قابل فهم‌تری در ذهـن آنها می‌گذارد ، ولی البته طرح روشن و دقیقی بدست نمی‌دهد . نمونه‌ای از کتاب «شاه‌لیر» نوشتهٔ شکسپیر نقل می‌کنیم که توصیفی ازیك پرتگاه ساحل دریاست (از زبان ادگار) :

چه وحشتناك است !
چه سرگیجه‌ای به آدم دست می‌دهد . چشم تاکجا کار می‌کند !...
زاغها و کلاغهائی که آنجا وسط زمین و آسمان پرواز می‌کنند ،
به اندازهٔ عکسهائی بنظر می‌رسند . در نیمراه پائین ،
مردی آویزان است و علفهای دریائی جمع می‌کند ... چه حرفهٔ پرخطری!
بنظر من او بزرگتر از سر خودش نیست .
ماهیگیرانی‌که در ساحل قدم می‌زنند ،ــ
درست به اندازهٔ موش شده‌اند ؛ و آن کشتی بزرگی‌که درلنگرگاه‌است.
به اندازهٔقایق‌خودش،کوچك شده‌است؛ وقایقش‌ــ همچون‌نقطه‌ای‌شناوراست،
و برای چشم آدمی چقدرکوچك است ....

این مقایسه وقتی تصور دقیق و روشنی دربارهٔ فاصله بـه وجـود می‌آورد که فاصلهٔ اشیاءِ مورد مقایسه (مــگس ، سر آدم ، مــوش ، قایق ...) راهم بهمراه داشته باشد . همینطور، وقتی‌که اندازهٔ ماه را با سیب مقایسه مــی‌کنیم ، باید فاصلهٔ این اشیاء عـادی را هم تـا چشم خود روشن نمائیم. این فاصله ، خیلی بیشتر ازآنست‌که بنظرمی‌رسد. وقتی‌که سیبی را بدست بگیرید و دست خود را بجلو بـاز کنید ، نــه ماه ، بلکه قسمت بزرگی از آسمان به وسیلهٔ سیب پنهان می‌شود. سیب را به نخی آویزان کنید و بتدریج از آن دور شوید، تا آنجا که سیب فقط قرص ماه را (و نه بیشتر از آن) بپوشاند ، در ایــن وضع است که سیب و ماه برای ما بیك اندازه دیده می‌شوند . اگــر در اینحالت

فاصلهٔ چشم خود را تا سیب اندازه بگیرید، به تقریب ۱۰ متر رابدست خواهید آورد. واین فاصله‌ای است که باید ازسیب دورباشید تا آنرا به اندازهٔ قرص ماه‌آسمان به‌بینیم! وبرای بشقاب، باید آنرا درفاصلهٔ ۳۰ متری یعنی ۵۰ قدمی قرار دهیم.

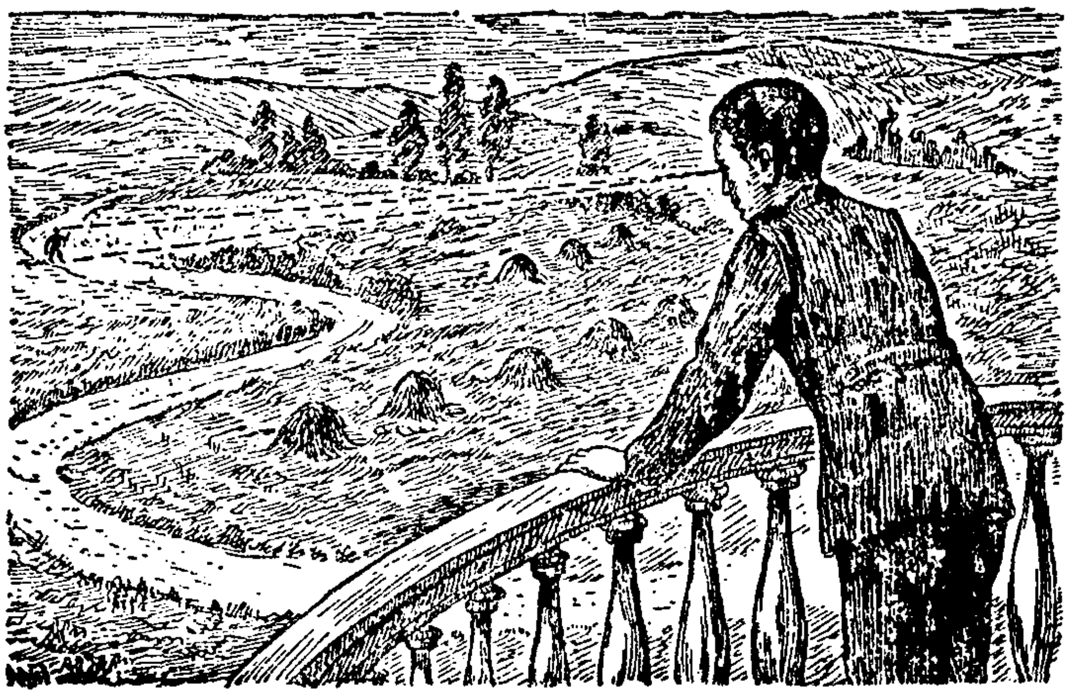
کسی که برای اولین باراین مطلب را بشنود، بنظرش نادرست می‌آید، ضمناً از همین جا، می‌توان به این نتیجه هم رسید که ما ماه را با زاویهٔ دیدی که تقریباً نیم درجه* است، می‌بینیم. در زندگی معمولی تقریباً هرگزپیش نمی‌آید که احتیاج به تخمین زاویه‌ای‌داشته باشیم، بهمین مناسبت اکثر مردم دربارهٔ زوایای کوچك، مثل زاویهٔ ۱ درجه، ۲ درجه‌یا ۵ درجه تصورتاریك ومبهمی‌دارند (روشن است که ما از مساح، نقشه‌کش و سایر متخصصینی که دائماً و در عمل با اینگونه زوایا سروکار دارند، صحبت نمی‌کنیم). تنها دربارهٔ زوایای بزرگ است که می‌توانیم، کم وبیش‌صحیح، تخمین بزنیم، بخصوص وقتی‌که این زوایارا با اندازهٔ زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت (که‌به‌اندازهٔ کافی با آن آشنائی داریم) مقایسه‌کنیم این تخمین دقیق‌تر می‌شود: زوایائی به‌اندازه‌های ۹۰ درجه، ۶۰ درجه، ۳۰ درجه، ۱۲۰ درجه و ۱۵۰ درجه برای ما خیلی‌آشناست، زیرا بلافاصله وبا یك نظربه صفحهٔ ساعت، آنها را باز می‌شناسیم (درساعتهای ۳، ۲، ۱، ۴و۵)، در این موارد حتی احتیاجی به ارقام صفحهٔ ساعت نداریم. ولی اشیاءِکوچك و جدا ازهم را معمولا تحت زوایای خیلی کوچك می‌بینیم وبنابراین حتی به تقریب هم نمی‌توانیم زاویهٔ دید آنها را تخمین بزنیم.

---

*) در حقیقت قطر ظاهری ماه. یا زاویهٔ دید برای ماه، مقدار ثابتی نیست. وقتی که ماه در مدار خود گردش می‌کند، فاصلهٔ آن تا زمین از ۳۵۴ تا ۴۰۶ هزار کیلومتر تغییر می‌کند و همراه با آن، زاویهٔ دید ماه هم از ″۴۰′۳۳ تا ″۲۴′۲۹ تغییر می‌کند.

زاویهٔ دید

می‌خواهیم نمونه‌ای در مورد زاویهٔ دید یك درجه ذکر کنیم، به‌بینیم یك مرد با قامت معمولی (۱/۷ متر)، در چه فاصله‌ای از ما قرارگیرد تا او را تحت زاویهٔ یك درجه به‌بینیم. مسئله‌را به زبان هندسه بیان‌کنیم: می‌خواهیم شعاع دایره‌ای را پیداکنیم که قوس یك درجهٔ آن ۱/۷ متر طول داشته باشد (قاعدتاً باید گفت طول وتر این قوس مساوی ۱/۷ متر است، ولی برای زوایای کوچك، اختلاف بین طول قوس و طول وتر آن قابل صرفنظر کردن است).



۶۰. مردی‌که در فاصلهٔ ۱۰۰ متری ما قرار گرفته باشد، بازاویهٔ یك درجه دیده می‌شود

وقتی که قوس یك درجه برابر ۱/۷ متر است، محیط دایره، یعنی قوس ۳۶۰ درجه طولی مساوی ۶۱۰ متر (۱/۷×۳۶۰) خواهد داشت، و برای پیدا کردن طول شعاع باید این عدد را بر ۲π تقسیم کنیم، اگر مقدار π را به تقریب $\frac{۲۲}{۷}$ بگیریم،شعاع این‌دایره‌چنین‌میشود:

$$۶۱۰:\frac{۴۴}{۷}\#۹۸ \quad \text{(متر)}$$

به این ترتیب یك مرد را وقتی با زاویهٔ یك درجه می‌بینیم که تقریباً در فاصلهٔ ۱۰۰ متری ما قرار گرفته باشد (شکل ۶۰) . اگر او تا فاصلهٔ ۲۰۰ متری از ما دور شود با زاویهٔ نیم درجه و اگر تا فاصلهٔ ۵۰ متری به ما نزدیك شود با زاویهٔ ۲ درجه دیده می‌شود و غیره .

به سادگی می‌توان محاسبه کرد که اگر چوبی به طول یک متر داشته باشیم و بخواهیم به زاویهٔ یك درجه دیده شود ، باید در فاصلهٔ ۵۷متری ($\frac{۴۴}{۷}$:۳۶۰) قرار گیرد . بهمین ترتیب با همین زاویه می‌توان یك سانتیمتر را در فاصلهٔ ۵۷ سانتیمتری ، یك کیلومتر را در فاصلهٔ ۵۷ کیلومتری وغیره مشاهده کرد، بطور کلی هرشیئی که درفاصله‌ای برابر با ۵۷ برابر طول‌خود قرارگرفته باشد، با زاویهٔ‌یك‌درجه دیده می‌شود. وقتی که از این عدد ۵۷ اطلاع داشته باشیم ، می‌توانیم به سرعت و به سادگی همه محاسبهٔ مربوط به مقدار زاویه‌ای اشیاء را انجام دهیم . مثلااگربخواهیم‌فاصله‌ای‌را تعیین کنیم که از آنجا یك سیب با مقطع به قطر ۹ سانتیمتر را با زاویهٔ یك درجه به‌بینیم ، باید حاصلضرب ۵۷ × ۹ را بدست آوریم :

$$۹\times۵۷\#۵۱۰ \quad \text{(سانتیمتر)} \quad \#۵ \quad \text{(متر)}$$

اگر فاصله را دو برابر کنیم ، زاویهٔ دید نصف می‌شود : نیم درجه ، یعنی زاویهٔ دیدماه .

بهمین ترتیب می‌توان برای هرجسم دلخواه فاصله‌ای را معین کرد که با قرص ماه بیك زاویه دیده شود .

بشقاب و ماه

مسئله

بشقابی به قطر ۲۵ سانتیمتر را درچه فاصله‌ای قراردهیم تا با ماه در آسمان بیك اندازه دیده‌شود ؟

حل

(سانتیمتر) ۲۵ × ۵۷ × ۲ ≠ ۲۸ (متر)

ماه و سکهٔ کوچك

مسئله

همین‌محاسبه رابرای‌سکه‌ای که‌به‌قطر ۲۵ میلیمتر (سکهٔ‌پنج ریالی) وهم‌برای‌سکه‌ای که‌به قطر ۲۲ میلیمتر است (سکهٔ دوریالی) انجام دهید .

حل

۰/۰۲۵ × ۵۷ × ۲ ≠ ۲/۸ (متر)

۰/۰۲۲ × ۵۷ × ۲ ≠ ۲/۵ (متر)

***

اگر در این مطلب تردید دارید که ماه به‌چشم ما از سکهٔ ۵ ریالی که در فاصلهٔ چهار قدمی ما باشد ، یا ته مداد معمولی که به فاصلهٔ ۸۰ سانتیمتری ما باشد ، بزرگتر نیست ، مدادی را بدست بگیرید و دست خود را به جلو کاملا باز کنید ، خواهید دید کـه تــه مداد قسمت عمدهٔ

سطح ماه را می‌پوشاند . و باوجود تعجبی که برمی‌انگیزد می‌توانید چیزهای‌بهتری برای مقایسه با ماه پیدا کنید که حتی به‌اندازهٔ بشقاب و یا سیب و یا حتی آلبالوهم نباشند ، مثلا یك نخود و یا حتی بهتراز آن سرچوب کبریت ! مقایسهٔ ماه با بشقاب یا سیب مارا قانع کرد که باید در فاصلهٔ نسبتاً دوری باشند : سیبی را که دردست است و یا بشقابی را که روی میزنهار خوری قرار گرفته ، به مراتب بزرگتر از قرص ماه می‌بینیم . و اما در مورد سرچوب کبریت ، اگر آنـرا در فـاصلهٔ ۲۵ سانتیمتری قرار دهیم (فاصله‌ای که برای دید مناسب است) ، با زاویهٔ نیم درجه (یعنی زاویهٔ دید ماه) خواهیم دید .

اینکه قرص ماه به چشم بسیاری از مردم ۱۰–۲۰ مرتبه بزرگتر بنظر می آید ، یکی از جالبترین موارد مربوط به خطای باصره است. این خطا قاعدتاًباید مربوط به درخشندگی‌ماه باشد : ماه تمام ، درزمینهٔ آسمان خیلی مشخص‌تر و برجسته‌تر است تا مثلا بشقاب ، سیب، سکه و یا اشیاءِ مقایسه‌ای دیگری که دربین اثاثیهٔ دوربر ما قرار گرفته‌اند*.

این تصور غلط چنان بما تحمیل شده است که حتی نقاشها (که دیدی دقیق‌تر از دیگران دارند) ، در نقاشیهای خود ، همراه بـا اعتقاد سایر مردم ، ماه را خیلی بزرگتر از آنچه که باید باشد نشان می‌دهند. کافی است که مثلا دورنمائی را که یك نقاش کشیده است ، بـا عکس برداری واقعی مقایسه کنیم ، تا صحت این مطلب روشن شود .

آنچه راکه درمورد ماه گفتیم دربارهٔ خورشید هم صدق می کند، زیرا خورشید هم از زمین تقریباً باهمان زاویهٔ نیم درجه دیده می‌شود: قطر کرهٔ خورشید ۴۰۰ مرتبه بزرگتر از قطر کرهٔ ماه است، ولی فاصلهٔ

*) بهمین علت است که مثلا رشتهٔ تابان یك لامپ الکتریکی خیلی کلفتر از زمانی بنظر می‌رسد که سرد باشد .

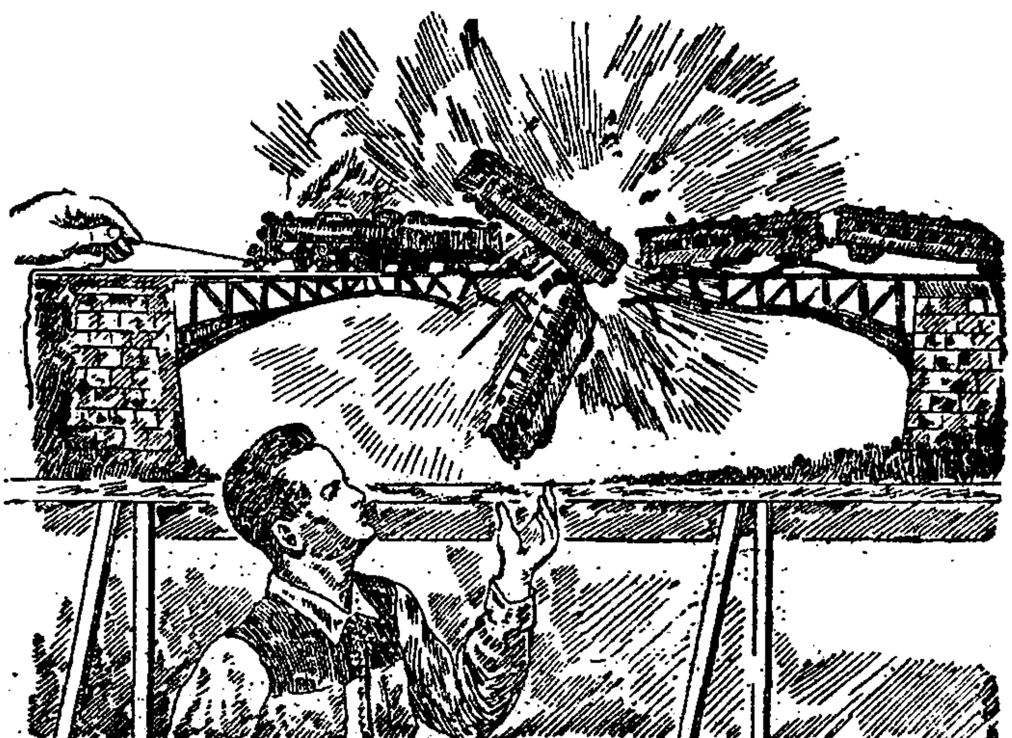
آن تا زمین هم ۴۰۰ برابر فاصلهٔ زمین تا ماه است *.

عکاس با احساس

برای اینکه اهمیت مفهوم زاویهٔ دید را روشن کنیم ، موقتاً زمینهٔ اصلی بحث خود ، یعنی هندسه در فضای آزاد ، را کنار می‌گذاریم و به نمونه‌هائی از رشتهٔ عکاسی می‌پردازیم .

شما مسلماً روی پردهٔ سینما دیده‌اید که فاجعه‌ای ، ومثلا برخورد دوقطار، به وقوع می‌پیوندد، یا صحنهٔ غیرممکنی مثل حرکت اتومبیل از قعر دریا به وجود می‌آید .

فیلم «بچه‌های کاپیتان گرانت» را بخاطر بیاورید . کدام صحنهٔ آن نمی‌توانست واقعی باشد؟ ـ مثلا صحنهٔ نابودی کشتی‌هائیکه دچار



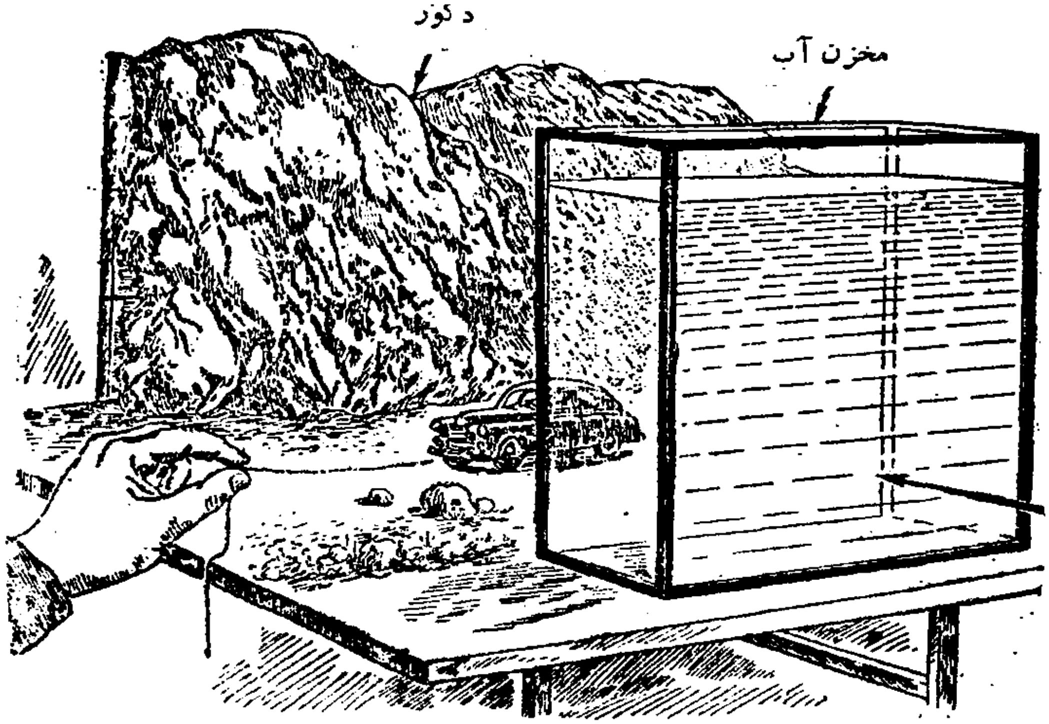
۶۱. آماده کردن فاجعهٔ راه آهن برای فیلمبرداری

---

*) برای‌فاصلهٔ‌متوسط زمین تا خورشید، زاویهٔ دید یاقطرظاهری خورشید تقریباً مساوی ۳۲ دقیقه است .

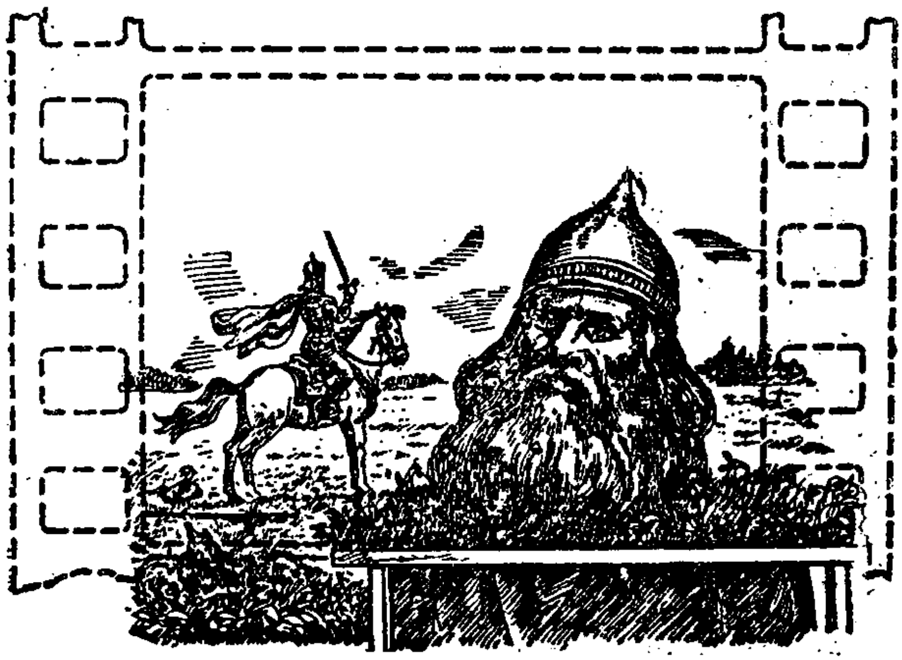
طوفان شده‌اند یا نمایش کروکودیلها وقتی که پسربچه‌ای راکه در باتلاق فرو می‌رفت ، دوره کرده بودند . البته ، هیچکس فکر نمی‌کند که‌این صحنه‌ها از روی حوادثی که واقعاً اتفاق افتاده‌است فیلمبرداری شده باشد . پس با چه روشهائی بدست آمده‌اند ؟

این راز را در اینجا برملا می‌کنیم . درشکل ۶۱ «فاجعهٔ» قطار را (که درحقیقت یك اسباب‌بازی است) می‌بینیدودرشکل ۶۲ اتومبیل کوچك اسباب بازی را می‌بینید که به وسیلهٔ نخ در عقب یك ظرف آب کشیده می‌شود. این همان چیزی است که در «واقع» اتفاق می‌افتد و به وسیلهٔ آن نوار فیلم پرمی‌شود. پس چرا با دیدن این عکسهاروی پردهٔ سینما ، تصور می‌کنیم که در جلو ما قطار و یا اتومبیل واقعی و با اندازه‌های حقیقی قرار گرفته است؟ مگر روی پرده آنها را با اندازه‌های عکسی خود نمی‌بینیم (حتی اگر هم نتوانیم آنها رابا اندازهٔ سایر اشیاء مقایسه کنیم)؟ علت ساده است : قطار و یا اتومبیل اسباب بازی را در فاصلهٔ خیلی نزدیك قرار می‌دهند ؛ به این مناسبت بنظر



۶۲. اتومبیلی که درقعردریا حرکت می‌کند

تماشاچی با همان زاویه‌ای دیده می‌شود که واگنها و یا اتومبیل حقیقی دیده می‌شود . تمام رازتصویر همین است .



۶۳. عکسی از فیلم « روسلان و لیودمیل »

و اینهم عکسی از فیلم « روسلان و لیودمیل » (شکل ۶۳) . سر بزرگ در جلو و روسلان کوچك درگوشه . سر روی زمینهٔ ماکت در نزدیکی دوربین فیلمبرداری قرارگرفته است و روسلان درگوشه و در فاصلهٔ زیاد از دور بین . تمام راز این تخیل همین است .

شکل ۶۴ نمونهٔ دیگری از تخیل است ، که برهمین اساس تهیه شده است . شما منظرهٔ عجیبی می‌بینید که دورانهای قدیم زمینشناسی را بخاطر می‌آورد : درخت عجیب و غریبی که به خزه‌های عظیم ـ الجثه‌ای شباهت دارد که روی آن قطرات بزرگ آب وجود دارد ، و در جلو نقشه ، غول وحشتناکی دیده می‌شود که شبیه خرخاکیهای بی‌ـ آزاراست . ولی این منظره با همهٔ غرابت خود با استفاده از طبیعت نقاشی شده‌است : این منظره چیزی جزیك قطعه زمین کوچك ازجنگل نیست ، فقط با زاویهٔ دید غیر معمولی رسم شده است . ما هرگز خزه،

۶۴. منظرهٔ اسرارآمیز تقلید از طبیعت

قطره آب و یا خرخاکی را با چنین زاویهٔ دیـد بزرگی نمی‌بینیم و همین است کـه این نقشه غیر آشنا و عجیب بنظرمی‌رسد. اگرما به‌اندازهٔ یك‌مورچه کوچك‌می‌شدیم، این‌منظره رابهمین‌شکل نقشه می‌دیدیم .

بعضی از روزنامه‌ها هم برای فـریب دیگــران ، عکسهای خبری غیر واقعی خود را بـه همین شیوه تهیه می کنند . زمانی دریکی از این روزنامه‌های خــارجــی مقاله‌ای ، همراه با سرزنشها و انتقاداتی نسبت‌به استقلال‌ایالتی، چاپ‌شده بود که‌چرا اجازه می‌دهند در خیابانهای شهر کوههای بزرگی از برف رویهم انباشته شود . برای تایید ادعای خود عکس یکی از این کوهها را هم چاپ کرده بود کـه اثری بیشتر داشته باشد (شکل ۶۵ ــ سمت چپ) . ضمن رسیدگی بـه این مسئله معلوم شد که برای عکس ازکوپهٔ برفی کوچکی استفاده‌شده بود (شکل۶۵ـ سمت راست)، منتهی عکس را از فاصلهٔ خیلی نزدیك یعنی با زاویهٔ دید بزرگ برداشته بودند .

درهمین روزنامه‌یکبار دیگرعکسی‌ازشکاف وسیع صخرهٔ نزدیك شهرچاپ شده‌بود که‌بنابه ادعای‌روزنامه، به‌یك زیرزمین منتهی‌می‌شد و عدهٔ زیادی از جهانگردان بی احتیاط که جرأت کرده بودند و به این

غار وارد شده بودند ، به زیر زمین سقوط کرده وجان خود را از دست داده بودند . دسته‌های داوطلبی که برای جستجوی این فراموش شده‌ها

۶۵. کوه برف درعکس (سمت چپ) و درطبیعت (سمت راست)

تشکیل شده بود ، بالاخره کشف کردند که غار مورد ادعای روزنامه که در عکس نشان داده شده‌بود ، شکاف کوچکی است که بزحمت دیده می‌شد ، شکافی با عرض یك سانتیمتر .

زاویه یاب طبیعی

تهیهٔ زاویه یاب با ساختمان ساده خیلی مشکل نیست ، ولی اکثراً در مواقع گردشهای خارج شهر زاویه‌یاب در اختیار مانیست . درچنین مواردی می‌توان از «زاویهٔ یاب طبیعی » که همیشه با ما همراه است ، استفاده کرد . این وسیله ، انگشتان دست ماست و برای اینکه بتوانیم از آنها برای تخمین تقریبی زوایای دید استفاده کنیم ، باید قبلا چند اندازه‌گیری و محاسبه را انجام دهیم .

قبل از همه باید تعیین کنیم که وقتی دست خود را بجلو دراز

می‌کنیم ، ناخن انگشت اشاره را تحت چه زاویه‌ای می‌بینیم . عرض معمولی ناخن یك‌سانتیمتر و فاصلهٔ چشم تا این‌وضع قریب ۶۰سانتیمتر است ، بنابراین آنرا تقریباً با زاویهٔ یك درجه می‌بینیم (البته کمی کمتر از یك درجه ، زیرا زاویهٔ یك درجه برای فاصلهٔ ۵۷ سانتیمتری بدست می‌آید) . ناخن جوانان کمسال کوچکتر است ، ولی درعوض، دست آنها هم کوتاهتر است و بنابراین زاویهٔ دید در مورد آنها هم تقریباً همین یك درجه خواهد بود . اگر خواننده در مورد نتیجه‌ای که گرفتیم ، برای ناخن خود باور ندارد ، می‌تواند زاویهٔ دید را اندازه بگیرد و در صورتیکه مقدار این زاویه با یك درجه اختلاف نسبتاً زیادی داشت ، از انگشت دیگری استفاده کند .

با این اطلاع شما می‌توانید با دست خالی زوایای دید کوچك را واقعاً تخمین بزنید . هرجسم دوردستی که به وسیلهٔ ناخن انگشت شهادت دست باز شدهٔ ما پوشانده شود ، تحت زاویهٔ یك درجه دیده می‌شود و بنابراین به‌اندازهٔ ۵۷برابر قطر خود از ما دور است . اگر ناخن انگشت شهادت نصف جسم‌را بپوشاند، زاویهٔ دید جسم ۲درجه است و درفاصلهٔ ۲۸ برابر قطر خود نسبت به ما ، قرارگرفته است .

قرص ماه تنها به وسیلهٔ نصف ناخن پوشیده می‌شود، یعنی زاویهٔ دیدآن نیم درجه‌است وبنابراین تا زمین‌به اندازهٔ ۱۱۴ برابر قطرخود فاصله دارد ، و این یك اندازه‌گیری نجومی است که با دست خالی انجام گرفته است !

برای زوایای بزرگتر ، از بند بالای انگشت شصت استفاده می‌کنیم . برای شخص بالغ معمولی طول (توجه کنید : طول و نه عرض) این بند شصت قریب $۳\frac{۱}{۲}$ سانتیمتر و فاصلهٔ آن از چشم . وقتی که دست را بطرف جلو باز کرده باشیم، ۵۵ سانتیمتر است. به‌سادگی

می‌توان حساب کرد که مقدار زاویهٔ دید آن در این وضع مساوی ۴ درجه است. به این ترتیب امکان تخمین زوایای دید ۴ درجه (ودرنتیجه ۸ درجه) هم برای ما پیدا می‌شود.

از دو زاویهٔ دیگر هم، که بوسیلهٔ انگشتان قابل اندازه‌گیری هستند، باید نام برد. این دو زاویه عبارتند از:

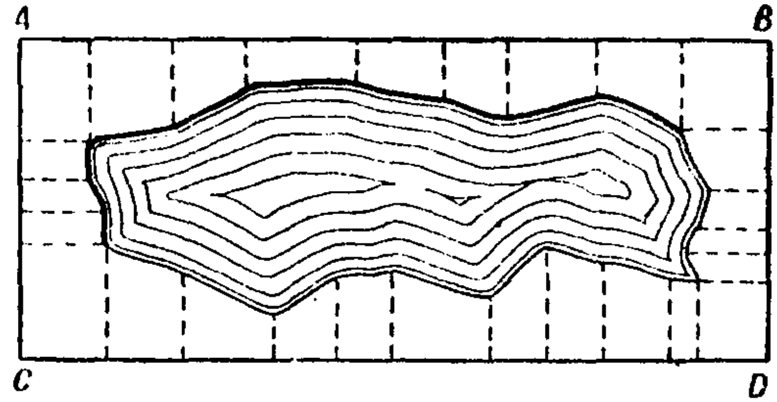
۱) زاویهٔ دید فاصلهٔ بین دوانگشت اشاره ووسطی که تاحدامکان بازشده باشند.

۲) زاویهٔ دید فاصلهٔ بین دو انگشت شصت و اشاره که بازهم کاملا باز شده باشند. اگر دست را کاملا به جلو باز کرده باشیم، در حالت اول زاویهٔ دید ۷-۸ درجه ودرحالت‌دوم زاویهٔ دید ۱۵-۱۶درجه خواهیم داشت.

استفاده از اعضای بدن به عنوان زاویه یاب، به آنچه‌گفتیم‌ختم نمی‌شود و در موقع‌گردشهای دسته جمعی در فضای‌آزاد می‌تواند به طرق مختلف طرح شود. فرض کنید واگن باری را به بینید که نصف بند بالای انگشت شصت شما را، درحالت دست‌کشیده، بپوشاند، یعنی‌تحت‌زاویهٔ۲درجه دیده‌شود. چون طول واگن‌باری برای شمامعلوم است (قریب ۶متر)، به سادگی می‌توانیدفاصلهٔ خود را تا واگن‌محاسبه کنید: ۱۷۰ = ۲۸ × ۶ یعنی قریب ۱۷۰ متر. البته این محاسبه تقریبی است‌ولی بهرحال‌از تخمینی که‌باچشم‌وبدون محاسبه‌حدس زده می‌شود، قابل اطمینان‌تر است.

حالا به روش رسم زوایای قائمه درروی زمین، با کمك اعضای بدن، می‌پردازیم.

اگر می‌خواهید از نقطه‌ای برامتداد مفروضی، عمود رسم کنید، دراین نقطه به‌ایستیید بنحوی که صورتتان به طرف امتداد خط مفروض باشد و، بدون‌اینکه فعلاسرخودرا بچرخانید، دست خودرابه‌همان‌جهتی



۶۶. شمای دریاچه روی نقشه

که می‌خواهید عمود رسم کنید. به جلودراز کنید. سپس انگشت‌شصت همین‌دست خود رابلند کنید وسرخود را به‌طرف آن برگردانید وچیزی، مثلا یك قطعه سنگ یا شاخهٔ چوب و غیره ، را روی زمین درنظر بگیرید ، طوریکه ، وقتی باچشم متناظرهمان دست ، به شصت خود نگاه می کنید ، در امتداد انگشت شما باشد (یعنی اگر دست راست خود را بازکرده‌اید با چشم راست نگاه کنید و اگر دست چپ خود را بازکرده‌اید ، باچشم چپ نگاه کنید).

حالا باید ، روی زمین از نقطه‌ای که ایستاده‌اید تا شیئی که در نظرگرفته‌اید ، خط راستی رسم کنید . این خط همان عمود مورد نظر خواهد بود . البته نمی‌توان قول داد که به این وسیله نتیجهٔ کاملا خوبی بدست آید ، ولی با کمی‌تمرین می‌توان استفاده‌ازاین «گونیای‌طبیعی» را دقیق‌تر کرد .

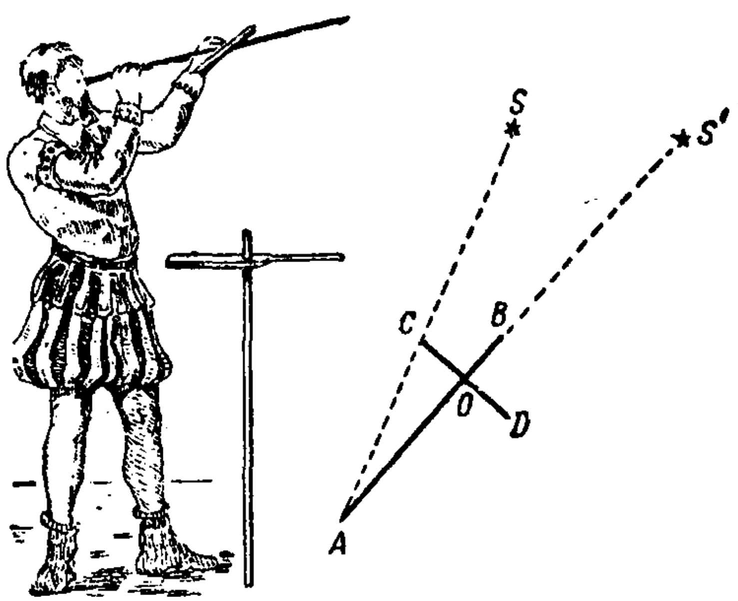
بالاخره‌با استفاده از«زاویه‌یاب‌طبیعی» می‌توان‌بدون‌هیچ‌وسیله‌ای ارتفاع‌زاویه‌ای اجرام سماوی رانسبت به افق، فاصلهٔ زاویه‌ای دوستاره، اندازهٔ قابل تشخیص‌مسیرروشن شهاب وغیره را اندازه‌گرفت. همچنین با امکان رسم زوایای قائمه درروی زمین ، بدون وسیله ، می‌توان نقشهٔ قطعات کوچك را ، به طریقی که اساس آن در شکل ۶۶ روشن شده

است، تنظیم کرد. مثلا درشمای دریاچه، مستطیل ABCD وسپس طول عمودهائی که از نقاط محیط ساحل رسم شده‌اند و فواصل قاعدهٔ آنها تا رئوس مستطیل را اندازه می‌گیریم .

بطور خلاصه ، می‌توان خود را در وضع روبنسون قرارداد وتنها با استفاده از دستها ، برای اندازه‌گیری زوایا و پاها، برای اندازگیری فواصل ، با مهارت تمام ازعهدهٔ انجام متنوع‌ترین احتیاجات ضروری بر آمد .

یك وسیلهٔ قدیمی (ژاکوب)

اگرمایل‌باشید اندازه‌گیری‌زوایا را دقیق‌تر انجام دهید، می‌توانید وسیلهٔ عملی وساده‌ای، که اغلب مورد استفادهٔ پدران دورما بوده است برای خود تهیه کنید .



۶۷. ژاکوب وطرح استفاده از آن

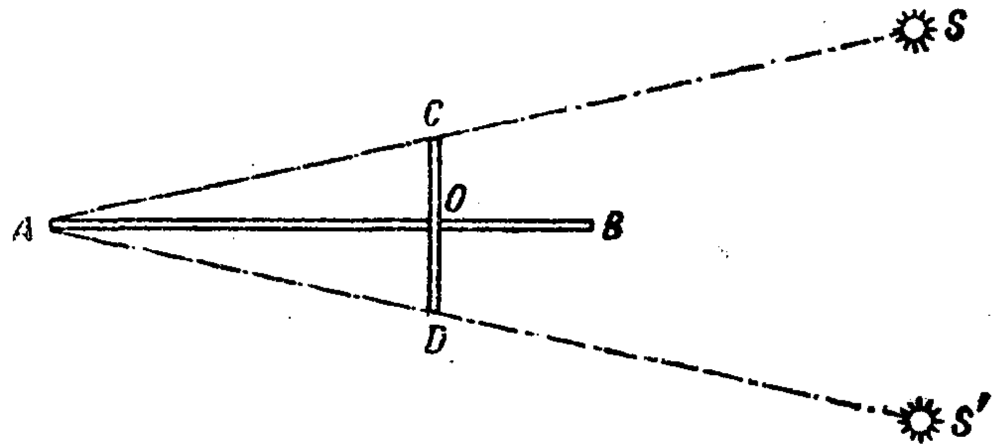
این وسیله به نام «ژاکوب» مکتشف آن مشهور است، قبلا و تا قرن هیجدهم (شکل ۶۷) مورد استعمال وسیعی در دریانوردی داشته

است ، ولی بعداً به عنوان زاویه‌یاب دقیق و راحت جای خود را باز کــرد .

این وسیله تشکیل شده است از یك خط کش بـزرگ به طول ۷۰ تا ۱۰۰ سانتیمتر که روی آن قطعهٔ قابل لغزش CD ، بطور عمودی قرارگرفته است ، دوقسمت CO وOD قطعهٔ لغزان، مساوی‌یکدیگرند. وقتی که بخواهید فاصلهٔ زاویه‌ای بین دو ستارهٔ S و ´S را با کمك این وسیله ، انـدازه بگیریـد (شکل ۶۷) ، انتهای A از خط کش را جلو چشم قرار می‌دهید (که برای سهولت‌کار می‌توان صفحهٔ سوراخ‌داری درآنجا تعبیه‌کرد) و خط کش را درچنان جهتی قرارداد که ستارهٔ ´S درانتهای B خط کش دیده شود؛ سپس عمود CD را درامتدادخط کش جلو و عقب می‌برید تا جائی که بتوان ستارهٔ S را از انتهای C مشاهده کرد (شکل ۶۷) . حالا اگر فاصلهٔ AO را اندازه بگیرید ، با دردست داشتن‌طول CO می‌توانید اندازهٔزاویهٔ ´SAS را محاسبه‌کنید. کسانیکه به مقدمات مثلثات آشنائی دارند ، می‌دانندکه تانژانت این زاویه‌برابر است با نسبت$\frac{CO}{OA}$ ، در فصل پنجم این‌کتاب از «مثلثات سیار» گفتگو کرده‌ایم که باتوجه به‌آن کافی‌است با کمك قضیهٔ فیثاغورث طولAC را محاسبه کنید و سپس بـا در دست داشتن سینوس زاویـهٔ مجهول (نسبت$\frac{CO}{AC}$) اندازهٔ آنرا بدست آورید .

علاوه بر آن شما می‌توانید مثلث ACO را روی صفحهٔ کاغذ ، و با هرمقیاسی که مایلید، رسم‌کنید و سپس باکمك نقاله ، زاویهٔ A را اندازه بگیرید و در صورت نداشتن نقالـه از « مثلثات سیار » استفاده کنید (فصل پنجم را به بینید) .

به‌این ترتیب نیمهٔ دوم قطعهٔ عمودی بـرای چـه منظوری لازم است ؟ برای حالتی که زاویهٔ مورد نظر به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد و



۶۸. تعیین فاصلهٔ زاویه‌ای بین ستارگان با کمك ژاکوب

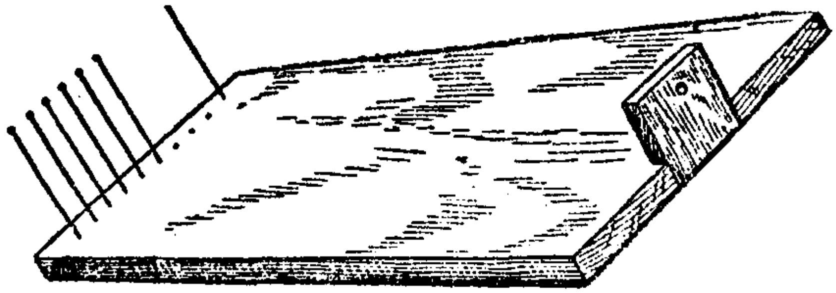
نتوان آنرا به طریقی که ذکر کردیم ، اندازه گرفت . در اینصورت نقطهٔ ´S را به وسیلهٔ امتداد AD نشانه می‌رویم (و نه امتداد AB) و CD را جلو و عقب می‌بریم تا در همان حال نقطهٔ S هم درامتداد AC دیده شود (شکل ۶۸) . و البته پیدا کردن زاویهٔ ´SAS ، چه به وسیلهٔ محاسبه و چه به وسیلهٔ ساختن زاویه مشکل نیست .

برای اینکه مجبور نباشم درمورد هراندازه‌گیری، زاویهٔ مربوطه را محاسبه کنیم و یا درخارج بسازیم ، می‌توان از قبل زوایای مختلف را اندازه گرفت و خط کش AB را درجه بندی کرد ، در اینصورت وقتی که می‌خواهیم فاصلهٔ زاویه‌ای دو نقطه را اندازه بگیریم ، کافی است پس از تنظیم وسیله ، مقدار زاویه را در نقطهٔ O بخوانیم .

زاویه‌یاب دندانه‌ای

به سادگی می‌توان نوع دیگری زاویه‌یاب تهیه کرد که آنرا «زاویه یاب دندانه‌ای » می‌نامیم و شباهت زیادی به یك شن کش دارد (شکل ۶۹) : این وسیله از تخته‌ای تشکیل شده است (شکل این تخته

مهم نیست) ودریکطرف آن‌صفحهٔ کوچك سوراخ داری محکم کرده‌اند که چشم ناظر پشت سوراخ آن قرار می‌گیرد. درطرف دیگرسنجاقهائی



۶۹. زاویه‌یاب دندانه‌ای

(از آنهاکه برای جمع آوری حشرات مورد استفاده قرارمی‌گیرد) در کنارهم‌به تخته‌فروشده است، فاصلهٔ هردو سنجان مجاور باید $\frac{۱}{۵۷}$ فاصلهٔ سوراخ صفحهٔ طرف مقابل‌تا سنجاقها باشد*. ما دیگرمی‌دانیم که‌فاصلهٔ هردو سنجاق متوالی ، به زاویهٔ یك درجه دیده می‌شود . سنجاقها را با روش دیگری هم می‌توان روی تخته نصب‌کرد (که نتیجهٔ دقیق‌تری بدست می‌دهد) : روی دیوار دو خط موازی و به فاصلهٔ یك متر از یکدیگر رسم می کنیم و در جهت عمود بر دیوار تا فاصلهٔ ۵۷ متری عقب می‌رویم ، از این فاصله از سوراخ صفحه دو خط موازی را در نظر می‌گیریم و سنجاقهارا درطرف دیگر تخته چنان نصب می کنیم که هریك از آنها یکی از دو خط موازی روی دیوار را بپوشاند .

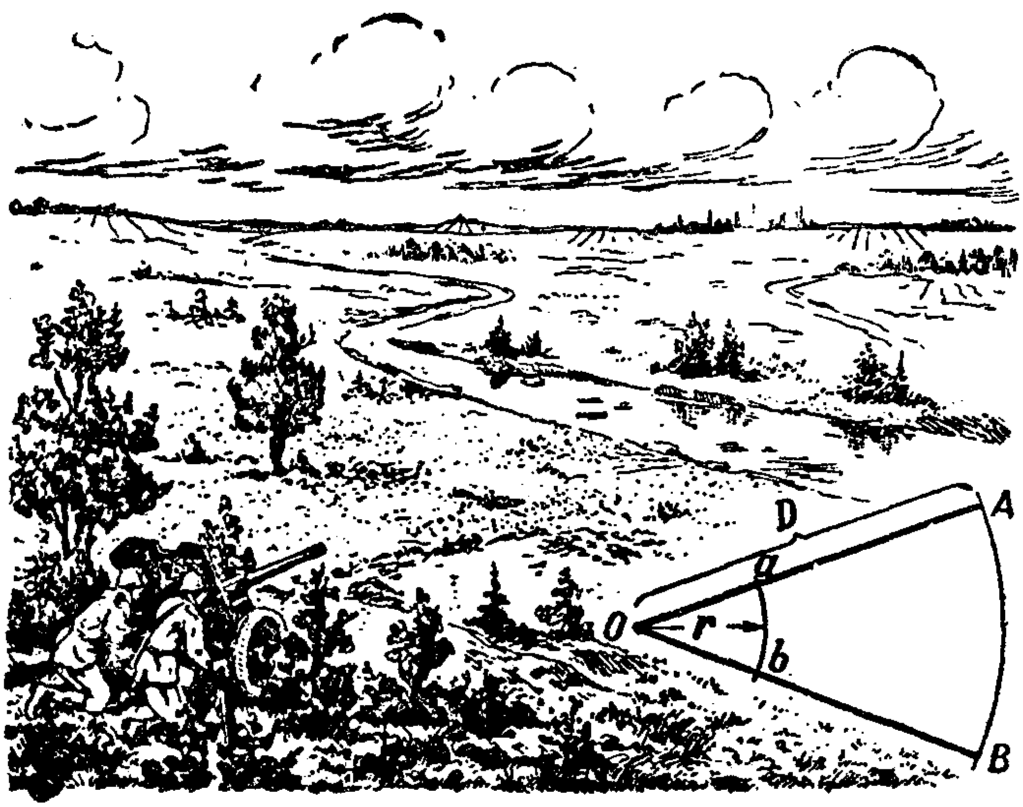
وقتی که سنجاقها نصب شد، می‌توان بعضی از آنها را برداشت، تا زوایای ۲ درجه ، ۳ درجه ، ۵ درجه و غیره بدست آورد . روش استفاده از این زاویه یاب برای خواننده روشن است . با استفاده ازاین زاویه‌یاب می‌توان‌زاویهٔ دید فواصل را تا دقت $\frac{۱}{۴}$ درجه اندازه‌گرفت .

---

*) به جای سنجاقها می‌توان از قابی که در داخل آن رشته نخهائی به فواصل مذکور کشیده شده است ، استفاده کرد .

زاویه‌یاب توپچی‌ها

توپچی به تصادف و « کورمال » تیراندازی نمی‌کند.
با اطلاع از ارتفاع هدف، مقدار زاویه‌ای آنرا تا افق تعیین و فاصلهٔ تا آنرا محاسبه می‌کند، در حالت دیگر معین می‌کند که لولهٔ توپ را به چه زاویه‌ای باید بچرخاند تا آتش را از یك هدف به هدف دیگر انتقال دهد.



۷۰. شمای زاویه یاب توپچی

یك توپچی‌مسائلی از‌این‌قبیل رابه سرعت ودرذهن حل‌می‌کند.
با چه روشی؟

بـه شکل ۷۰ تـوجه کنید. AB قوس دایره‌ای است به شعاع $OA = D$، ab قوس دایره‌ای است به شعاع $oa = r$.

از تشابه در قطاع AOB و aob نتیجه می‌شود.

$$\frac{AB}{D} = \frac{ab}{r};$$

و یا :

$$AB = \frac{ab}{r} D$$

نسبت $\frac{ab}{r}$ به زاویهٔ دید AOB مربوط است ، با دردست داشتن این نسبت می‌توان AB را با معلوم بودن D و یا D را با معلوم بودن AB معین کرد .

توپچی‌ها کار محاسبه را برای خود ساده کرده‌اند ، بـه ایـن ترتیب که محیط دایره را، به جای ۳۶۰ قسمت، به ۶۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند ، در اینصورت طول هـر قسمت تقریباً ۰/۰۰۱ شعاع دایره می‌شود .

فرض کنید، مثلاقوس ab (شکل ۷۰) یك واحد ازاین تقسیمات باشد ، در اینصورت طول تمام دایره $۲\pi r \# ۶r$ و طـول قـوس ab تقریباً برابر $\frac{۶r}{۶۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰۰۰} r$ می‌شود .

و درنتیجه :

$$AB \# \frac{۰/۰۰۱r}{r} E = ۰/۰۰۱D$$

یعنی برای اینکه بدانیم ، فاصلهٔ AB ، که متناظر بـا یکی از تقسیمات زاویه‌یاب است ، چقدر است ، کافی است که در عدد D ، ازسمت راست دورقم ممیز برنیم .

برای انتقال فرمانهایانتایج‌ناظر،به‌وسیلهٔ‌تلفن‌یارادیوی‌صحرائی، تعداد «یکهزارم» را، مثل شمارهٔ تلفن بیان می‌کنند ، مثلا : زاویهٔ ۱۰۵

«هزارم» را می‌گویند «یك ، صفر ، پنج » ومی نویسند .

۱ — ۰۵

زاویه۸ «هزارم» را می‌گویند «صفر، صفر، هشت» و می‌نویسند :

۰ — ۰۸

حالا دیگر شما می‌توانید مسائل مربوط به توپخانه را به‌سادگی حل کنید .

مسئله

یك تانك از توپخانهٔ ضد تانك ، از جهت ارتفاع ، به زاویه ۰۵ — ۰ دیده می‌شود ، اگر ارتفاع تانك را ۲ متر فرض کنیم ، در چه فاصله‌ای از ضد تانك قرار گرفته است ؟

حل

۵ قسمت زاویه یاب = ۲ متر

۱ قسمت زاویه‌یاب $= \frac{۲}{۵}$ متر = ۰/۴ متر

از آنجا که هرقسمت زاویه‌یاب به اندازهٔ یکهزارم فاصله است، داریم :

$$D = ۰/۴ \times ۱۰۰۰ = ۴۰۰ \quad (\text{متر})$$

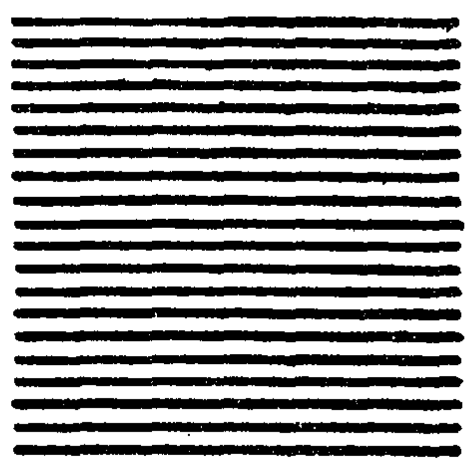
اگر فرمانده یا مرکز اکتشافی زاویه‌یاب نداشته باشد، می‌تواند از کف دست ، انگشتان دست و یا وسائل دیگری (که دراین کتاب ذکر کرده‌ایم) استفاده کند . فقط « هدف» را باید باواحد «یکهزارم» (ونه درجه) بدست آورد .

در اینجا نمونه‌ای از«هدف» را باواحد «یکهزارم» برای بعضی اشیاء آورده‌ایم :

کف دست	۱ـ۲۰
انگشت میانه یا انگشت اشاره	۰ـ۳۰
مدادگرد (ضخامت)	۰ـ۱۲
طول کبریت	۰ـ۷۵
عرض کبریت	۰ـ۰۳

دقت دید

براساس مفهوم مقدار زاویه‌ای اشیاء، شما می‌توانید بفهمید که تیز بینی شما چگونه است و حتی بهمین وسیله اندازه گیری را انجام دهید.



۷۱ ـ برای اندازه گیری دقت‌دید

روی صفحهٔ کاغذ، ۲۰ خط سیاه مساوی به طول چوب کبریت (۵ سانتیمتر) و به عرض یك‌میلی مترچنان رسم کنید که یك مربع درست کنند (شکل۷۱). این رسم را روی دیواری که کاملا روشن باشد محکم کنید و تا آنجا از آن دور شوید که دیگر خطها از هم تمیز داده نشوند و به صورت یك زمینهٔ خاکستری یك پارچه به نظر برسد. این فاصله را اندازه بگیرید. از آنجا می‌توانید زاویهٔ دید خود را که تحت آن باریکه‌های به عرض یك میلیمتر را از هم تشخیص می‌دهید، حساب کنید. اگر این زاویه مساوی یك دقیقه باشد، دقت دید شما طبیعی است، اگر این زاویه سه دقیقه باشد، دقت دید شما $\frac{1}{3}$ طبیعی است و غیره

مسئله

خطوط شکل ۷۱ برای چشم شما در ۲ متری بهم مخلوط می‌شوند. آیا دقت دید شما طبیعی است؟

حل

می‌دانیم که از فاصلهٔ ۵۷ میلیمتری باریکهٔ به عرض یك میلیمتر تحت زاویهٔ یك درجه یعنی ۶۰ دقیقه دیده می‌شود بنابراین از فاصلهٔ ۲۰۰۰ میلیمتری با زاویهٔ x دیده می‌شود که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x : ۶۰ = ۵۷ : ۲۰۰۰ :$$

$$x \# ۱/۷'$$

دقت دید کمتر از وضع طبیعی و برابر است با

$$۱ : ۱/۷ = ۰/۶ \quad \text{(تقریباً)}$$

زاویهٔ حدی

حالا در این باره گفتگو می‌کنیم که اگر نواری با زاویهٔ دید کمتر از یك دقیقه دیده شود، وضوح و تمایز خود را، ازلحاظ چشم معمولی، از دست می‌دهد، این مطلب درمورد هر شیئی صادق است: اگر شیئی مورد مشاهده با زاویه‌ای کمتر از یك دقیقه دیده شود، قابل تشخیص به وسیلهٔ چشم معمولی نیست. در این حالت شیئی به‌نقطه‌ای* تبدیل می‌شود که به زحمت قابل تشخیص است، به ذره‌ای بدون شکل

*) «خیلی کوچك برای دید» (شکسپیر)

و بدون اندازه . و این خاصیت چشم طبیعی انسان است : یك دقیقهٔ زایه‌ای ، حد متوسط دقت آنست . تحقیق در علت این امر به فیزیك و زیست‌شناسی مربوط می‌شود وما در اینجا تنها جنبهٔ هندسی آنرا مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

این زاویهٔ حدی ، هم برای اجسام بزرگی کــه در فاصلهٔ خیلی دور باشند و هم در فواصل نزدیك برای اجسام خرد بیك اندازه صادق است. ما با چشم غیرمسلح نمی‌توانیم شکل گرد وغباری راکه در هوا وجود دارد ، تشخیص بدهیم : در روشنائی اشعهٔ خورشید ، همه به صورت نقاط کوچك هم شکل به نظر می‌آیند ، درحالیکه در واقع امر به‌اشکال بکلی‌مختلفی هستند. ما جزئیات بدن یك حشره رانمی‌توانیم از یکدیگر تمیز بدهیم ، زیرا آنها را با زاویه‌ای کوچکتر از یك‌دقیقه می‌بینیم . بازهم بهمین علت است که بدون تلسکوپ نمی‌توانیم قسمت های مختلف سطح ماه ، سیارات و سایر اجرام سماوی را به بینیم .

اگر حد دید طبیعی دورتر می‌رفت ، ما جهان دور و بر خود را به وضع دیگری می‌دیدیم . کسی کــه ، بجای یك دقیقه ، دارای حد دیدی مثلا ، $\frac{1}{2}$ دقیقه باشد ، اطراف خود را خیلی عمیق‌تر و دورتر از ما می‌بیند . چخوف در داستان « استپ » مزیت این تیزبینی را به نحو بسیار جالبی بیان می کند :

« قدرت دید او (واسیا) ، بطور حیرت انگیزی زیاد بود . او بخوبی می‌دید که دشت خالی قهوه‌ای رنگ ، برای او پر از زندگی و مضمون است . کافی بود که سر پا بایستد و به اطراف دور دست نگاه کند تا روباه ، خرگوش ، پرنده یا سایرحیواناتی راکــه دور از چشم آدمی آزادانه رفت و آمد می کردند ، به بیند . هر کسی که از استپ عبور کند، می‌تواند به سادگی خرگوشی راکه فرارمی‌کند یا پرنده‌ای

را که پرواز می‌کند به بیند، ولی هر کسی قدرت این را ندارد که حیوانات غیراهلی را در لانهٔ خودشان، وقتی که فرار نمی‌کنند، خود را پنهان نمی‌سازند و یا وحشت‌زده و نگران به‌اطراف‌خود نمی‌نگرند، به بیند. درحالیکه واسیا می‌توانست روباهی که به جست وخیز مشغول است یا خرگوشی که با دست، روی خود را می‌شوید، و پرنده‌ای که بالهای خور را باز کرده است، به بیند. به‌همین مناسبت علاوه بردنیائی که برای همه وجود دارد، برای واسیا، دنیای دیگری هم وجودداشت، دنیائی که کسی را به‌آن دسترسی‌نبود. این دنیائی بسیار زیبا وشگفت انگیر بود و وقتی که او به اطراف خود نگاه می کرد و مفتون زیبائی های پنهان طبیعت می‌شد. به سختی می‌شد، به او غبطه نخورد».

به‌سختی می‌توان فکر کرد که برای یك‌چنین تحول شگفت‌انگیز، تنها کافی است که حد دید آدمی از یك دقیقه به $\frac{1}{2}$ دقیقه یا نزدیك به‌آن تبدیل شود . . .

رمز عمل جادوئی میکروسکوپها و تلسکوپها هم در همین است. کار اینگونه وسائل اینست که مسیر اشعهٔ نوری که از شیئی منتشر می‌شود، تغییر می‌دهند، بطوریکه با زاویهٔ بزرگتری به‌چشم برسند و درنتیجه شیئی‌موردنظر با زاویهٔ دید بزرگتر در مقابل چشم ما قرار گیرد. وقتی که می‌گویند میکروسکوپ یا تلسکوپ ۱۰۰ بار بزرگتر نشان می‌دهد، به این معنی است که به کمك آنها اشیاء را با زاویه‌ای که ۱۰۰ بار بزرگتر از زاویهٔ دید آنها با چشم غیر مسلح است، می‌بینیم. دراینصورت جزئیاتی که از چشم عادی درحد دید معمولی پنهان‌است، در مقابل چشم ما نمایان می‌شود. ما قرص ماه را تحت زاویهٔ ۳۰دقیقه می‌بینیم، اگر قطر ماه بتقریب ۳۵۰۰ کیلومتر باشد، هر قطعه‌ای‌ازماه که‌قطری مساوی $\frac{3500}{30}$، یعنی قریب ۱۲۰ کیلومتر، داشته باشد، برای

چشم غیر مسلح به سختی قابل تشخیص است . در دوربینی هم ، که ۱۰۰بار بزرگ‌می‌کند ، قطعاتی به‌قطر $۱/۲ = \frac{۱۲۰}{۱۰۰}$ کیلـومتر و در تلسکوپی که ۱۰۰۰ بار بزرگ می‌کند، قطعات به عرض ۱۲۰ مترقابل تشخیص نیست . از اینجا به این نتیجه می‌رسیم که اگر مثلا در کره ماه ساختمانهائی ، ار قبیل کارخانه‌های بزرگ و یا کشتیهای اقیانوس پیما وجود داشت ، به‌کمك تلسکوپهای امروزی قابل تشخیص بود .*

قانون زاویهٔ حدی ، از لحاظ مشاهدات معمولی روزانهٔ ما هم اهمیت زیادی دارد . به دلیل این خصوصیت دید ما ، تشخیص شکل واقعی هرجسمی که در فاصله ۳۴۰۰ (یعنی ۶۰ × ۵۷) برابرقطرخود، نسبت به ما قرار گرفته باشد ، ممکن نیست ، زیرا به یك نقطه تبدیل می‌شود . بنابراین اگر کسی ادعا کند که با چشم خود قیافهٔ کسی را که در چهار کیلومتری او بوده ، شناخته است ، مطمئناً دروغ می‌گوید مگر اینکه قدرت دید خارق‌العاده‌ای داشته باشد ، زیرا فاصلهٔ بین دو چشم ۳ سانتیمتر است و بنابراین در فـاصلهٔ ۳۴۰۰ × ۳ سانتیمتـری (یعنی ۱۰۰ متری)تبدیل به‌یك نقطه می‌شود. توپچی‌ها از همین‌مطلب برای تخمین فاصله استفاده می کنند . طبق قانون آنها ، اگر چشمهای یکنفر را به‌صورت دونقطهٔ جداگانه به‌بینند ، فاصلهٔ او را کمتر از۱۰۰ قدم (یعنی ۶۰ — ۷۰ متر) می‌دانند . برای ما فاصلهٔ بزرگتری بدست بدست می آید : ۱۰۰ متر : و این نشان می‌دهد که در حالت عمومی قدرت دید را کمی پائین‌تر (تا ۳۰٪) درنظرمی گیرند .

---

*) به‌شرط یکنواخت بودن‌و شفاف‌بودن جوزمین . در حقیقت جو زمین نه یکنواخت‌است ونه کاملاشفاف‌و بهمین‌مناسبت‌وقتی که شیئی‌خیلی‌بزرگ‌شود، تصویری درهم و تحریف‌شده بدست می‌دهد . در نتیجه برای بزرگ‌کردن تاحدی‌می‌توان جلو رفت و علاوه برآن منجمین را مجبور می‌کند که رصدخانه‌های خود را در فضای روشن ارتفاعات کوههای بلند بنا کنند .

مسئله

آیا شخصی که قدرت‌دید طبیعی دارد، می‌تواند باکمك دوربین خود ، که سه مرتبه بزرگ می کند ، سواری را ازفاصلۀ ۱۰ کیلومتری تشخیص دهد ؟

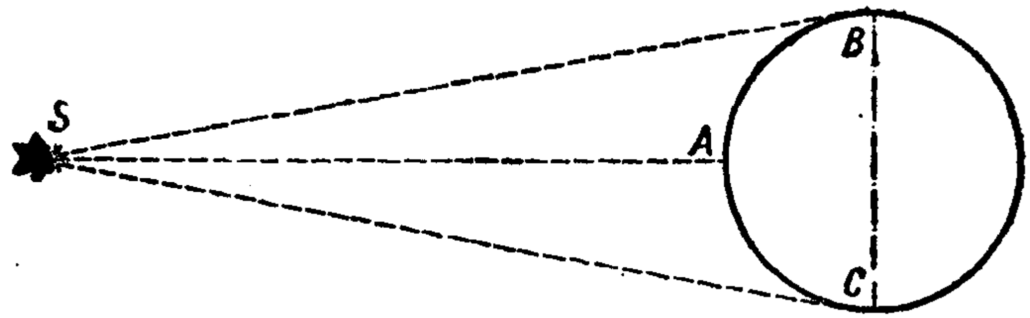
حل

ارتفاع سوار ۲/۲ متراست . قیافۀ اوبرای چشم ساده درفاصلۀ ۷ $\#$ ۳۴۰۰ × ۲/۲ کیلومتر بیك نقطه تبدیل می‌شود . با دوربین ، این فاصله به ۲۱ کیلومتری می‌رود و بنابراین در ۱۰ کیلومتری به کمك‌این دوربین کاملا قابل تشخیص است (به شرطی که هوا کاملا شفاف باشد).

ماه و ستارگان درنزدیکی افق

هر ناظربدون دقتی‌می‌داند که قرص ماه، وقتی که به افق نزدیك است ، بطور محسوس ، از وقتی که در وسط آسمان است ، بزرگتر دیده می‌شود . اختلاف بقدری زیاد است که به سختی می‌توان به آن توجه نکرد . همین مطلب برای خورشید هم صحیح است : معلوم‌است که خورشید ، وقتی که درحال غروب و یا طلوع است با اندازه‌های بزرگتری بنظر می‌رسد تا وقتی که در وسط آسمان است ومثلا ازوسط ابرها می‌گذرد (نگاه مستقیم به خورشید درآسمان بدون ابر برای‌چشم مضر است) .

این خصوصیت برای ستارگان بنحو دیگری ظاهر می‌شود : وقتی که به افق نزدیك می‌شوند فاصلۀ بین آنها زیادترمی‌شود . هر کسی



۷۲. چرا وقتی‌که خورشید به افق نزدیك است ، بنظر ناظر در فاصلهٔ بیشتری است تا وقتی که در وسط آسمان است؟

که در زمستان صورت فلکـی جبار (یـا در تابستان ـ صورت فلکی دجاجه) را در بالای آسمان و در نزدیك افق نگاه کند ، نمی‌تواند از اختلاف عظیم اندازه های آن در دو وضع مختلف ، دچار تعجب نشود .

و همهٔ این مطالب اسرارآمیزتر می‌شود ، وقتی که بدانیم ، جرم سماوی هنگامی که در طلوع و یا غروب خود هست ، نه تنها به ما نزدیك‌تر نیست ، بلکه دورتر از ما (به اندازهٔ شعاع کره زمین) قرار گرفته است . این مطلب با توجه به شکل ۷۲ بخوبی روشن می‌شود: وقتی کـه جرم سماوی در سمت‌الرأس (اوج) قراردارد ، از نقطهٔ A دیده می‌شود ، و وقتی که در افق باشد ، از B یا C . پس چرا ماه ، خورشید و صور فلکی در افق بزرگتر بنظر می‌آیند ؟

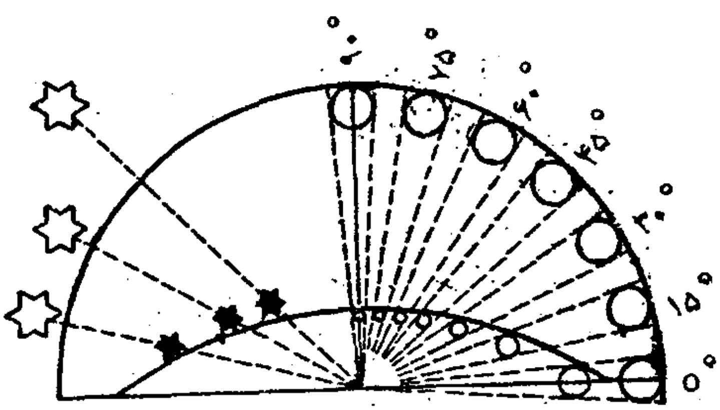
می‌توان جواب داد : « این مطلب درست نیست » . این یك خطای دید است . به‌کمك زاویه‌یاب دندانه‌ای ویا زاویه‌یاب دیگری، می‌توان به سادگی متوجه شد که‌قرص ماه درهردوحالت با یك زاویه* ، دیده می‌شود ، با زاویهٔ نیم درجه . با استفاده از زاویه‌یاب دندانه‌ای و

---

*) اندازه‌گیری باوسائل دقیق‌تر ، نشان می‌دهد که قطرظاهـری ماه ، وقتی که ماه به افق نزدیك است ، حتی کوچکتر می‌شود و این بدان مناسبت است که انکسار نور ، قرص‌ماه را کمی پهن‌تر می‌کند .

یا «ژاکوب» می‌تـوان اطمینان حاصل کرد کـه فاصلهٔ زاویه‌ای بین ستارگان هم تغییر نمی‌کند و بستگی به جای صورت فلکی (درسمت الرأس باشد یا در افق) ندارد. بنابراین تغییر ظاهری که در این‌مورد پیدا می‌شود، مربوط به خطای دید است که بدون استثنا برای همه پیش می‌آید.

به چه ترتیبی می‌توان خطائی به این اندازه بزرگ و همگانی را توجیه کرد؟ تا آنجا که ما میدانیم، هنوز علم جواب قانع کننده‌ای به این سئوال نداده است، اگرچه از زمان بطلمیوس، یعنی قریب ۲۰۰۰ سال است که برای حل آن کوشش می‌شود. تصور باطلی که دراین زمینه بوجود می‌آید مربوط به اینست که طاق آسمان بنظرما به‌صورت نیمکرهٔ کامل به مفهوم هندسی خـود نیست، بلکه‌قطعه‌ای‌از کره‌است که ارتفاع آن دو تا سه مرتبه ازشعاع قاعده‌اش کوچکتر است. و این بمناسبت آنست که‌برای



۷۳. اثر کشیده بودن طاق آسمان دراندازهٔ ستارگان

وضع عادی سر و چشم، فواصلی در جهت افقی ویا نزدیك به‌آن، در مقایسه با فواصل عمودی راحت‌تر تخمین زده می‌شود: در جهت افقی، اشیاءِ را با «نگاه مستقیم» می‌بینیم، درحالیکه درمواردیگر باید چشمها را بطرف بالا و یا بطرف پائین برگرداند. اگر وقتی‌که به پشت دراز کشیده‌ایم، ماه را نگاه کنیم، وقتی‌که دراوج (سمت الرأس) باشد،

بزرگتر از وقتی که نزدیك افق است، بنظر می آید*. این مسئله درمقابل روانشناسان و زیست شناسان وجوددارد که چـرا اندازهٔ ظاهری اشیاء به وضع و جهت چشمهای ما قراردارد .

اما ، اینکه کشیده بودن طاق آسمان ، چه ارتباطـی با اندازهٔ ستارگان در مواضع مختلف آن دارد ، ازطرحی که درشکل ۷۳داده‌ایم، کاملا روشن می‌شود . قرص ماه ، همیشه در طاق آسمان با زاویهٔ نیم درجه دیده می‌شود ، چه در افق (یعنی در ارتفاع صفردرجه) باشد وچه دراوج (یعنی ارتفاع ۹۰ درجه). ولی چشم‌ماهمیشه ماه‌را دریك فاصله احساس نمی‌کند : وقتی که ماه در اوج است ، خیلی نزدیکتر بنظر می‌رسد تا وقتی که در افق قرار گرفته باشد و بهمین مناسبت اندازهٔآن یکنواخت نیست : اگر دایره‌ای داخل یك زاویه باشد ، هرچه به‌رأس نزدیکترباشد ؛کوچکتراست . درقسمت‌چپ این تصویر نشان داده شده است که چرا باین مناسبت ، فاصلهٔ بین ستارگان ، وقتی که به افق نزدیك می‌شوند، بیشترمی‌شود :فاصلهٔ زاویه‌ای بین آنها غیریکنواخت بنظر می‌رسد .

در اینجا جنبهٔ دیگری هم برای بررسی وجود دارد . وقتی که قرص بزرگ شدهٔ ماه را نزدیك افق می‌بینید . آیا می‌توانید ، ولویك

---

*) تعبیری که برای این پدیده دراینجا ذکرشده است ، به وسیلهٔ مدیر تصحیح‌کتاب و ازچاپ هفتم کتاب به بعد آمده‌است (این ترجمه از روی چاپ دهم‌کتاب است). درچاپهای قبلی، پرلمان توضیح این‌پدیده را به‌این ترتیب داده بود که دلیل بزرگتر بودن ماه در نزدیکی افق‌آنست که دراینحالت ما آنرا در کنار چیزهائی می‌بینیم که خیلی دوراز ما هستند ، در حالیکه در وسط آسمان خالی ،آنرا تنهامی‌بینیم . ولی وقتی‌که ماه درافق دریا (جائی‌که آشیائی وجود ندارد) دیده می‌شود ، بازهم‌همین‌تصور نادرست بما دست‌می‌دهد وبنابراین‌توضیح مزبور نمی‌تواند قانع‌کننده باشد .

خط یاطرح جدید ، علاوه بر آنچه که موقع اوج قرص ماه دیده‌می‌شود به‌بینید؟ نه ! ولی مگر در مقابل شما قرص بزرگتری‌قرار نگرفته است، پس چرا جزئیات جدیدی‌دیده نمی‌شود ؟ برای‌اینکه ، در اینجا بزرگ شدن قرص ماه از نوع بزرگ شدن با دوربین نیست : اینجا زاویهٔ دید بزرگ نمی‌شود و فقط با بزرگتر شدن این زاویه است که ما می‌توانیم جزئیات جدیدی را تشخیص بدهیم ، هر نوع « بزرگتر شدن » دیگر تنهایك خطای سادهٔدید است‌و نمی‌تواندهیچگونه‌مورداستفاده‌ای داشته باشد .*

سایهٔ ماه و سایهٔ بالون

تا اندازه‌ای غیر مترقبه است ، اگر بخواهیم زاویهٔ دید را برای محاسبهٔ طول سایه‌ای که از یك جسم در فضا افتاده است مورد استفاده قرار دهیم. مثلا سایهٔ ماه در فضای کیهانی به شکل مخروطی است که همیشه ماه را همراهی می کند .

طول سایهٔ ماه چقدر امتداد دارد ؟

برای اینکه طول سایهٔ ماه را بتقریب محاسبه کنیم ،لزومی‌ندارد ازمثلثهای متشابه ونسبتهای مساوی استفاده کنیم (که‌درآن به‌اندازه‌های قطر خورشید و ماه و فاصلهٔ بین خورشید تا ماه احتیاج است). محاسبه را می‌توان با روشی کاملا ساده انجام داد . فرض کنید چشم شما در انتهای مخروط سایهٔ ماه یعنی در رأس این مخروط ، قرار گرفته باشد و از آنجا به ماه نگاه کنید . چه چیزی خواهید دید؟ دایرهٔ سیاه ماه که روی خورشید را پوشانده است . ضمناً زاویهٔ دید که تحت آن قرص

*) مطالبی از این قبیل را می‌توانید درکتاب « سرگرمیهای فیزیك» ، که از همین مؤلف است ، به‌بینید .

ماه (یا خورشید)دیده می‌شود ، در اینحالت مساوی نیم‌درجه است.ولی ما میدانیم که اگر جسمی با زاویهٔ نیم درجه دیده شود به اندازهٔ ۱۱۴ = ۵۷ × ۲ برابر قطر خود ازناظر دوراست . یعنی رأس مخروط سایهٔ ماه ۱۱۴ برابر قطر ماه از آن دور است . از آنجا طول سایهٔ‌ماه چنین است :

(کیلومتر) ۳۵۰۰ × ۱۱۴ ≠ ۴۰۰۰۰۰

یعنی طول سایهٔ ماه بزرگتر از فاصلهٔ متوسط زمین تا ماه است ؛ بهمین مناسبت است که کسوف کامل می‌تواند اتفاق بیفتد (برای‌نقطه‌ای از سطح زمین که در این سایه غرق شده است) .

از آنجا نتیجه می‌شود ، محاسبه‌ای کـه هم اکنون انجام دادیم متناقض با واقعیت نیست .

وقتی که از زمین ، ماه و خورشید را تحت یك زاویهٔ نیم درجه می‌بینیم ، رأس مخروط سایهٔ ماه روی سطح زمین است ؛ دراینصورت طولی راکه برای‌سایهٔ ماه محاسبه‌کردیم ، بتقریب برابر با فاصلهٔ زمین تا ماه درآن لحظه است .

به سادگی می‌توان طول سایهٔ زمین را هم محاسبه‌کرد ، بشرطی که توجه‌کنیم که زاویهٔ رأس این مخروط هم مساوی نیم درجه است : چون قطر زمین تقریباً چهار برابر قطر ماه است ، طول سایهٔ زمین هم چهار برابر طول سایهٔ ماه می‌شود.

با همین روش می‌توان طول تقریبی سایهٔ اشیاء کوچکتر را هم در فضا محاسبه‌کرد . مثلا به بینیم ارتفاع سایهٔ مخروطی شکلی که یك بالن در فضا به وجود می‌آورد چقدر است (وقتی‌که بالن به صورت کره باشد) . چون قطر کرهٔ بالن مساوی **۳۶** متر است ، طول سایهٔ آن چنین می‌شود (در اینجـا هم زاویهٔ رأس مخروط سایه را نیم درجه گرفته‌ایم):

(متر) ۴۱۰۰#۱۱۴ × ۳۶

و یا قریب ۴ کیلو متر

در تمام این‌موارد صحبت بر سر سایهٔ کامل است، نه نیم سایه*.

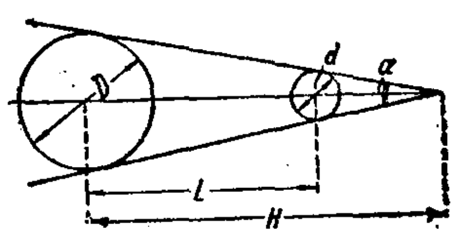
فاصلهٔ ابر تا زمین

مسلماً وقتی برای اولین‌بار در عمق آسمان روشن، نوار طولانی و پرپیچ و خم سفید رنگ را دیده‌اید دچار تعجب شده‌اید. ولی حالا دیگر، بدون تردید، می‌دانید که این نوار ابری «دستخطی» از هواپیماست که در مسیر خود در فضا «به یادگار» گذاشته است.

در هوایی که‌به اندازهٔ کافی برودت، رطوبت و تراکم وجود

---

*) برای زاویهٔ کوچك α (که دراینجا مورد مطالعه است)، یعنی‌زاویهٔ رأس سایهٔ مخروطی شکل اجسام در فضامقدار تقریبی را تحقیق‌می‌کنیم: زاویهٔ α برحسب رادیان برابر است با $\frac{D-d}{L}$، که درآن D قطر خورشید، d قطر جسم و L فاصلهٔ بین خورشید تا جسم است (شکل را به بینید).



وقتی‌که d نسبت به D خیلی‌کوچك باشد، جسم به رأس مخروط نزدیك است و اختلاف L با H، ارتفاع مخروط کامل، خیلی کم می‌شود. اگر از d صرفنظر و L را به H تبدیل‌کنیم، می‌شود:

$$\alpha \# \frac{D}{H}$$

اگر فرض کنیم‌که رأس مخروط سایه روی سطح زمین باشد:

$$D \# ۱/۴ \times ۱۰^۶ \text{ و } H \# ۱۵۰ \times ۱۰^۶$$

و ازآنجا: (درجه) ۳۰ # (رادیان) ۰/۰۰۹ # α می‌شود

(یادداشت هیئت تحریریه)

داشته باشد ، به سادگی مه به‌وجود می آید .

وقتی که هواپیما پرواز می کند ، بطور مداوم ذرات کوچکی، که موتورهواپیما تولید می کند ، ازخود بیرون می‌ریزد . همین‌ذرات نقاطی را به وجود می‌آورند که در اطراف آنها تکاثف بخارآب بالا می‌رود و باعث تشکیل ابرمی‌شود .

اگر ارتفاع این ابر را ، قبل از آنکه از بین برود ، معین کنیم ، می‌توان مثلا فهمید که خلبان شجاع‌درهواپیمای خودتا چه‌ارتفاعی بالا رفته‌است ؟

مسئله

ارتفاع ابر را چگونه می‌توان معین کرده ، حتی وقتی‌که بالای سر ما قرار نگرفته باشد ؟

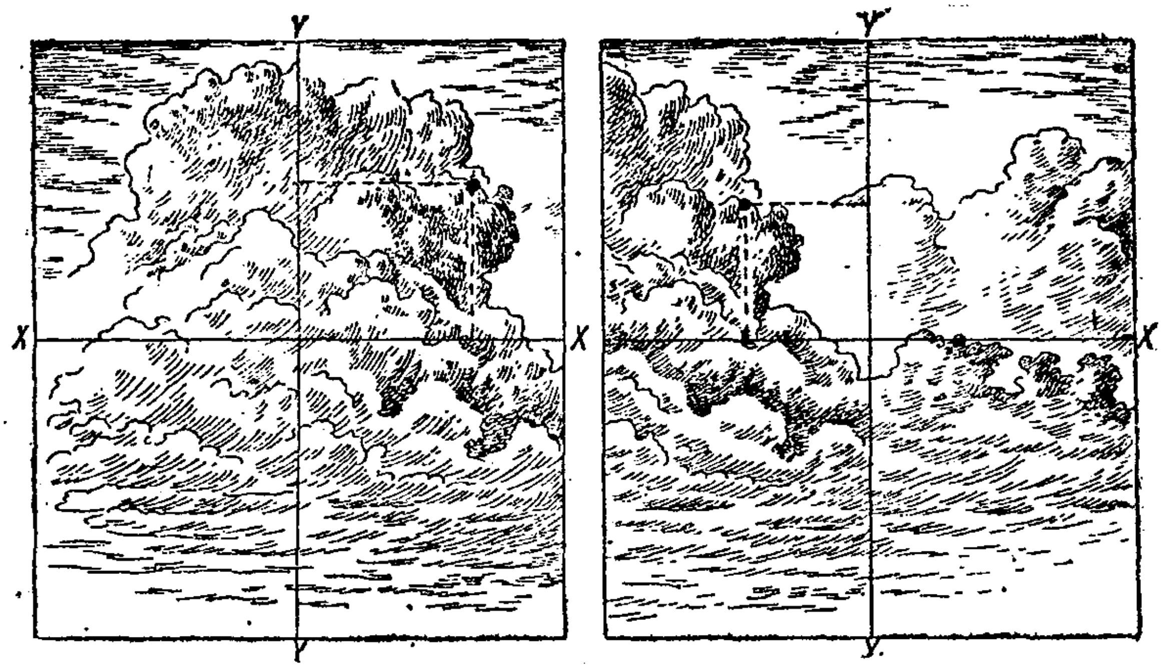
حل

برای تعیین ارتفاعات‌بلند باید دوربین عکاسی را به کمك گرفت که البته تا اندازه‌ای مشکل است . ولی دردوران ما، هم کاملا عمومی شده و هم مورد علاقهٔ فراوان جوانان است .

برای این منظور به دو دوربین ، با فواصل کانونی مساوی ، احتیاج دارید (فاصلهٔ کانونی را معمولا روی دوربین نوشته‌اند) .

دوربینهارا باید در ارتفاعات‌کم و بیش مختلفی نسبت بهم‌مستقر کرد .

برای این منظور دردشت از سه‌پایه و در شهر از بلندیهای پشت بام می‌توان استفاده کرد . فاصلهٔ بین بلندیها را باید چنان انتخاب کرد



۷۴ . طرحی از دوعکس ابر

که هر ناظر بتواند دیگری را مستقیماً و یا با دوربین به بیند.

این فاصله را می‌توان اندازه گرفت و یا از روی نقشهٔ محلِ تعیین کرد . دوربینها را بایـد طوری قرار داد که محورهای بصری آنها موازی باشد . می‌توان ، مثلا آنها را بطرف سمت الرأس میزان کرد .

وقتی که ابر موردنظر در منطقهٔ دید دوربین قرار گرفت ، یکی از دو ناظر علامتی به‌دیگری‌می‌دهد (مثلا باحرکت‌پرچم) و بااین‌علامت هر دو در یك لحظه عکس را می گیرند .

روی عکسهائی که بدین ترتیب بدست می‌آیند ، و باید بااندازه های مساوی چاپ شده باشند ، خطوط راست XXوYY را رسم‌می‌کنیم بطوریکه اوساط کناره‌های متقابل را در عکس بهم وصل کرده باشند (شکل ۷۴) .

سپس نقطهٔ مشخصی از ابر را در هریك از عکسها نشانه می‌گذاریم و فاصلهٔ آنرا تا دو خط XX و YY بدست می‌آوریم . این

فواصل را با حروف x_1 و y_1، برای یکی از عکسها، و x_2 و y_2، برای عکس دیگر، نشان می‌دهیم. (x_i فاصلهٔ تا YY و y_i فاصلهٔ تـا XX).

اگر نقاط نشان گذاشته شده در روی عکسها، دردو طرف خط YY واقع باشند (مثل شکل ۷۴)، ارتفاع H ابر از رابطهٔ زیربدست می‌آید:

$$H = \frac{F}{x_1 + x_2} b;$$

که در آن b عبارتست از فاصلهٔ دو دوربین و F فاصلهٔ کانونی هریك از دوربینهاست.

و اگر نقاط مفروض دریك طرف خط راست YY واقع‌باشند، ارتفاع ابر از این رابطه بدست می‌آید:

$$H = \frac{F}{x_1 - x_2} b.$$

y_1 و y_2 برای محاسبهٔ ارتفاع ابر بکار نمی‌آید، ولی از مقایسهٔ آنها می‌توان صحت طرح را تحقیق کرد. درعمل این دوعدد تقریباً مساوی‌اند.

مثلا فرض کنید، فواصل نقاط تعیین شده ازYY و XX روی صفحات عکس چنین باشند:

$x_1 =$ ۳۲میلیمتر ، $y_1 =$ ۲۹میلیمتر.

$x_2 =$ ۲۳میلیمتر ، $y_2 =$ ۲۵میلیمتر.

و فاصلهٔ کانونی ۱۳۵ = Fمیلیمتر و فاصلهٔ بین دودوربین ۹۳۷ = bمتر

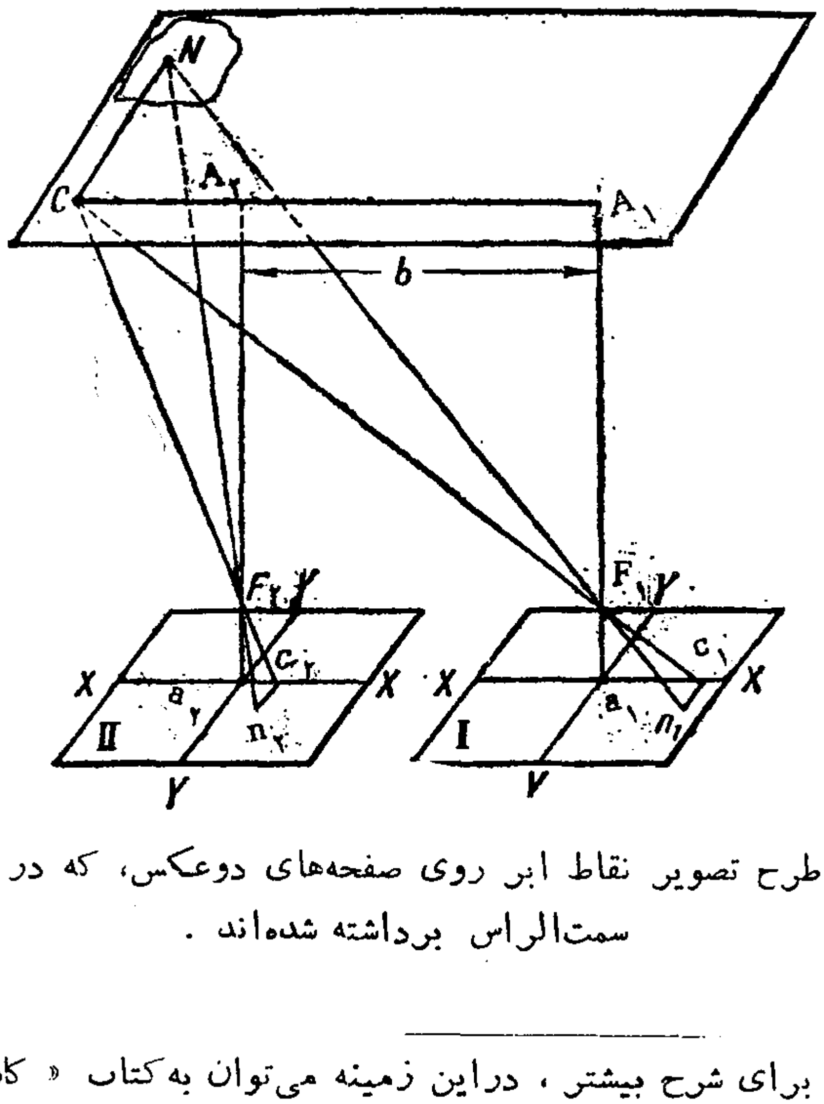
باشد*.

عکسبرداری نشان می‌دهد که برای ارتفاع ابر باید رابطهٔ زیر را بکار برد :

$$H = b \cdot \frac{F}{x_۱ + x_۲};$$

ویا :

$$H = ۹۳۷ \times \frac{۱۳۵}{۳۲ + ۲۳} \# ۲۳۰۰ \text{متر}$$



۷۵. طرح تصویر نقاط ابر روی صفحه‌های دوعکس، که در جهت سمت‌الراس برداشته شده‌اند .

---

*) برای شرح بیشتر ، دراین زمینه می‌توان به‌کتاب « کاربرد آنالیز ریاضی در حل مسائل‌عملی » تألیف ن. اف. پلاتونوف مراجعه کرد . پلاتونوف دربخش «ارتفاع‌ابرها» روابطی برای محاسبهٔ H نتیجه می‌گیرد وبا عکسبرداری به انواع مختلف، ازابرها ، امکانات دیگری را از نظر محاسبه مطرح می‌کند و یك سلسله نتایج عملی بدست می‌آورد .

یعنی ابری که عکسبرداری شده است ، در ارتفاع تقریباً ۲/۳ کیلومتری از زمین قرارگرفته است .

اگر بخواهیم ، می‌توان رابطه‌ای را که برای پیدا کردن ارتفاع ابـر بکاربردیم ، از طرح شکل ۷۵ بدست آورد .

شکل ۷۵ را باید بطور فضائی در نظر گرفت (تصور فضائی اشکال با مطالعهٔ بخشی از هندسه ، که به هندسهٔ فضائی مشهور است ، بدست می‌آید).

I و II معرف شیشه‌های عکاسی ؛ F_1 و F_2 مراکز نوری مربوط به دستگاه عدسیهای شیئی ؛ N نقطهٔ مورد نظر ابر ؛ n_1 و n_2 تصاویر نقطهٔ N روی شیشه‌های عکاسی ؛ a_1A_1 و a_2A_2 عمودهائی که ازوسط هریك از شیشه‌های عکاسی بر امتداد سطح ابر فرود آمده‌اند و بالاخره $b=a_1a_2=A_1A_2$ اندازهٔ قاعده (فاصلهٔ دو دوربین) است .

اگر از مرکز نوری F_1 به طرف بالا، تا نقطهٔ A_1 حرکت کنیم سپس از نقطهٔ A_1 در امتداد قاعده تـا نقطهٔ C (که رأس زاویـهٔ قائمهٔ A_1CN است) و بـالاخره از نقطهٔ C تا نقطهٔ N حـرکت کنیم ، پاره خطهای F_1A_1 ، A_1C و CN در دوربین با پـاره خطهای $F_1a_1=F$ (فاصلهٔ کانونی) ، $a_1c_1=x_1$ و $c_1n_1=y_1$ متناسبند .

و بهمین ترتیب در مورد دوربین دوم .

از تشابه مثلثها نتیجه می‌شود :

$$\frac{A_1C}{x_1}=\frac{A_1F_1}{F}=\frac{C_1F_1}{F_1c_1}=\frac{CN}{y_1};$$

و همچنین :

$$\frac{A_2C}{x_2}=\frac{A_2F_2}{F}=\frac{CF_2}{F_2c_2}=\frac{CN}{y_2}.$$

از مقایسهٔ این نسبتها و با در نظر گرفتن تساوی واضح $A_2F_2=A_1F_1$

اولا بدست می‌آید $y_1=y_2$ (نشانهٔ صحت عکس‌برداری) و ثانیاً :

$$\frac{A_1C}{x_1}=\frac{A_2C}{x_2};$$

و از آنجا :

$$A_1C=b\cdot\frac{x_1}{x_1-x_2};$$

و بالاخره :

$$A_1F_1=b\cdot\frac{F}{x_1=x_2}\#H\cdot$$

در حالتی که n_1 و n_2 (تصاویر نقطهٔ N برصفحهٔ عکاسی) در دو طرف مختلف نسبت به YY باشند ، نقطهٔ C بین نقاط A_1 و A_2 قرار می‌گیرد و $A_2C=b-A_1C$ می‌شود و دراینصورت داریم :

$$H=b\cdot\frac{F}{x_1+x_2}.$$

این روابط تنها مربوط به موقعی است که امتداد محورهای نوری درجهت سمت‌الرأس باشند . اگر ابر دور ازسمت‌الرأس‌باشد ودردیدکامل دوربین قرارنگیرد، می‌توانید دوربین را در وضع دیگری قرار دهید (با حفظ توازی محورهای نوری) و مثلا دروضع افقی که ضمناً عمود برقاعده و یا در امتداد آن واقع باشند .

برای هروضع استقراردوربینها ، باید شکل مربوط را رسم‌کنید و روابط مورد نظر را برای محاسبهٔ ارتفاع ابر، ازآن نتیجه بگیرید .

***

در روز روشن ، درآسمان ابرهای نمایان و پر مانندی‌که در طبقات بالا قراردارند به چشم می‌خورد . ارتفاع ابرها را دوـ سه مرتبه در فاصلهٔ زمانهای کوتاه معین کنید . اگر معلوم شود که ابرها پائین

می‌آیند ، به معنای آنست که هوا بــدتر می‌شود و بعد از چند ساعت باران خواهد آمد .

با عکس برداری از بالونهای هوائی هم می‌توان ارتفاع آنهارا معین کرد .

ارتفاع برج به وسیلهٔ عکسبرداری

مسئله

با کمك عکسبرداری نه تنها می‌توان ارتفاع ابــر یا هواپیما را بدست آورد ، بلکه بــرای محاسبهٔ ارتفاع ساختمانهای زمینی از قبیل مناره‌ها ، دکلها و برجها هم می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد .

در شکل ۷۶ طرحی از موتوربادی کــه درکــریمه‌کارگــذاشته شده است ، دیده می‌شود . قاعدهٔ برج آن ، مربعی است که می‌تــوان طول ضلـع آنرا بلافاصله اندازه‌گرفت : ۶ متر .

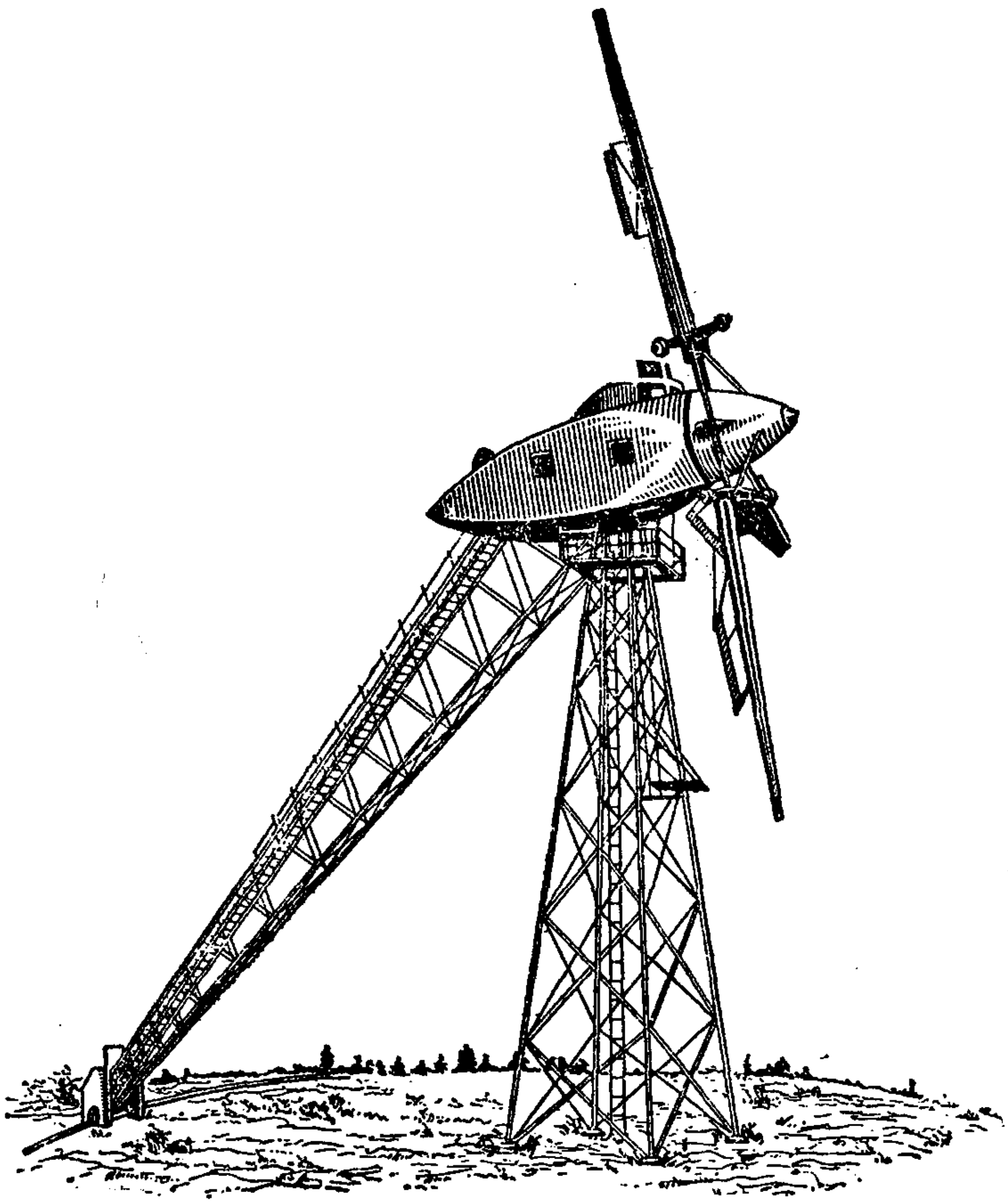
انــدازه‌گیریهای لازم را در عکس انجام دهید و ارتفاع h تمام ساختمان موتور بادی را معین کنید .

حل

عکس برج و نمونهٔ اصلی‌آن، ازلحاظ هندسی با هم متشابه‌اند بنابراین نسبت ارتفاع برج به ضلح قاعده ، یا قطر قاعدهٔ آن درعکس برابر است با نسبت ارتفاع برج به ضلـع قاعده ، یا قطر قاعدهٔ آن در اصل. اندازه‌گیریها را روی تصویرانجام می‌دهیم : طول قطر قاعده در تصویر مساوی ۲۳ میلیمتر و ارتفاع ساختمان مساوی ۷۱ میلیمتراست. چون طول ضلـع‌قاعدهٔ برج‌اصلی مساوی۶ متراست ، پس طول

قطر قاعده چنین می‌شود :

$$\sqrt{۶^۲+۶^۲}=۶\sqrt{۲}=۸/۴۸ \quad \text{(متر)}$$



۷۶. موتور بادی در کریمه

و بنابراین داریم :

$$\frac{۷۱}{۲۳}=\frac{h}{۸/۴۸};$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$h = \frac{۷۱ \times ۸/۴۸}{۲۳} \neq ۲۶ \quad \text{(متر)}$$

روشن است که تمام عکس مورد احتیاج نیست ، بلکه تنها قسمتی از آن بدرد می‌خورد که برای اندازه‌گیریهای مورد نظر لازم است .

طرح چند مسئله برای تمرین

حالا سعی کنید با اطلاعاتی که از این فصل بدست آورده‌اید ، مسائل زیر را حل کنید :

یك مرد با قد متوسط (۱/۷ متر) از دور با زاویهٔ ۱۲ دقیقه دیده می‌شود ، فاصلهٔ خود را تا او پیدا کنید .

اسب سواری (۲/۲ متر) تحت زاویهٔ ۹ دقیقه دیده می‌شود ، فاصلهٔ خود تا او بدست آورید .

یك تیر تلگراف (۸متر) با زاویهٔ ۲۲ دقیقه دیده می‌شود، درچه فاصله‌ای ازشما قرارگرفته است؟

فانوس دریائی به ارتفاع ۴۲ متر ، از کشتی با زاویهٔ ۱ درجه و ۱۰ دقیقه دیده می‌شود ، کشتی درچه فاصله‌ای از فانوس دریائی قرار دارد ؟

کرهٔ زمین از ماه با زاویهٔ ۱ درجه و ۵۴ دقیقه دیده می‌شود ، فاصلهٔ بین زمین و ماه را پیدا کنید .

از فاصلهٔ ۲ کیلومتری ، ساختمانی تحت زاویهٔ ۱۲ دقیقه دیده می‌شود ، ارتفاع ساختمان را معین کنید .

ماه از زمین با زاویهٔ ۳۰ دقیقه دیده می‌شود . اگر فاصلهٔ زمین تاماه دراین لحظه مساوی ۳۹۶۰۰۰ کیلومتر باشد ، قطرماه را پیدا کنید.

حروف روی تختهٔ سیاه به چه اندازه باید باشدتا دانش آموزی که روی نیمکت نشسته است ، آنها را به همان روشنی حروف کتاب خود (درفاصلهٔ ۲۵ سانتیمتری چشم) به‌بینید؟ فاصلهٔ نیمکت تا تختهٔ سیاه ۵ متر است .

ریز بینی ۵۰ مرتبه بزرگ می‌کند . آیا می‌توان جسمی به قطر ۰٫۰۰۷ میلیمتر را با آن دید ؟

اگردرماه آدمهائی باقامت ما وجود داشته باشند ، بزرگ نمائی تلسکوپ چقدر باشد تا بتوانیم آنها را از هم تشخیص دهیم ؟

در هردرجه چند «هزارم» وجود دارد ؟

درهر «هزارم» چند درجه وجود دارد ؟

هواپیما درجهت عمود برخط دید ما حرکت می‌کند ، در ۱۰ ثانیه راهی را طی می‌کند که تحت زاویهٔ ۳۰۰ «هزارم» دیده می‌شود . اگر ۲۰۰۰ متر با هواپیما فاصله داشته باشیم ، سرعت هواپیما را پیدا کنید .

٤

هندسه در جاده

هنر اندازه‌گیری قدمها

وقتی که برای گردش به خارج شهر رفته‌اید، در نزدیکی راه آهن و یا روی جاده شوسه ، می‌توانید تمرینهای جالبی دربارهٔ هندسه انجام دهید .

قبل‌ازهمه ازجادهٔ شوسه، برای اندازگیری طول‌قدمها و سرعت پیاده روی خود استفاده می کنیم . این وضع امکان اندازه‌گیری فاصله‌ها را بوسیلهٔ قدمها به‌وجود می‌آورد ، امکانی که بعد ازمختصری تمرین بسادگی حاصل می‌شود . در اینجا مطلب مهم این است که یاد بگیریم همیشه قدمهای خود را یکنواخت برداریم، یعنی به راه رفتن «موزون» عادت کنیم .

در کنار جادهٔ شوسه ، هر ۱۰۰ متر به ۱۰۰ متر سنگ سفیدی قرار داده‌اند ، اگر این ۱۰۰ متر را با قدمهای « موزون » معمولی خود طی کنید، با شمردن تعداد قدمها ، می‌توانید طول متوسط قدم خود را بدست آورید . این اندازه‌گیری را باید هرسال و مثلا در هربهار انجام داد، زیرا طول قدمها ، بخصوص درمورد جوانها ، بمقدار ثابتی باقی نمی‌ماند .

به رابطهٔ جالبی توجه کنیم که دراثر اندازه‌گیریهای متعدد بدست آمده‌است : طول متوسط قدم یك انسان بالغ تقریباً برابراست بانصف قد او ، بشرطی که قد را تا موازی چشمها بحساب بیاوریم . مثلا، اگر قد شخصی تا چشمان او ۱متر و ۴۰ سانتیمتر باشد ، طول قدم او تقریباً ۷۰ سانتیمتر خواهد بود . مسلماً آزمایش درستی این مطلب برای شما جالب خواهد بود .

علاوه بر طول هر قدم ، باید سرعت حرکت خود را هم بدانید ، یعنی اینکه در هر ساعت چند کیلومتر راه می‌روید . گاهی از قاعدهٔ زیر استفاده می‌کنند : ما در هرساعت آنقدر کیلومتر راه می‌رویم که هرسه ثانیه آنقدر قدم برداریم ، مثلا اگر در سه ثانیه چهار قدم برمی‌داریم ، سرعت ما ۴ کیلو متر در ساعت است . ولی این قاعده راتنها برای طول معینی از قدمها می‌توان بکار برد که بسادگی قابل محاسبه است : طول هر قدم برحسب متر x و تعداد قدمها را در هرثانیه n فرض می‌کنیم ، دراینصورت معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{۳۶۰۰}{۳} \times nx = n \times ۱۰۰۰,$$

از آنجا $۱۲۰۰x = ۱۰۰۰$ و $x = \frac{۵}{۶}$(متر)یعنی ۸۰–۸۵ سانتی متر می‌شود . این قدم نسبتاً بلندی است و چنین قدمهائی متعلق به آدمهای

بلند قامت است. اگر قدم شما درحدود ۸۰ ـ ۸۵ سانتیمتر نباشد، باید سرعت‌حرکت خود را با قاعدهٔ دیگری پیدا کنید؛ بوسیلهٔ یك ساعت، زمانی را که طول می‌کشد تا فاصلهٔ بین دو نشانه را روی جادهٔ شوسه طی‌کنید، محاسبه می‌کنید و سپس بـا معلوم بودن این فاصله سرعت حرکت خود را بدست می‌آورید.

تخمین نظری

مـا می‌توانیم بدون استفاده از نوار اندازه‌گیری، و با کمك قدمهای خود، فواصل مختلف را اندازه بگیریم؛ ولی چقدر جالب و مفید است که بتوانیم این فواصل را مستقیماً و بدون اندازه‌گیری، با چشم تخمین بزنیم. و این مهارت تنها از راه تمرین بدست می‌آید. در سالهائی که در دبیرستان تحصیل می‌کردم، مواقعی کـه با دوستان برای‌گردش تابستانی به خارج شهر می‌رفتیم، اکثر به چنین تمرینهائی می‌پرداختیم. ما آنرا به صورت مسابقه‌هائی درآورده بودیم که دقت تخمین نظری رامعین می‌کرد. درحالیکه راه‌پیمائی می‌کردیم، درخت و یا شیئی دیگری راکه دور از ما قرار داشت‌نشان می‌کردیم ومسابقه شروع می‌شد.

یکی ازکسانی که در بازی شرکت داشت می‌پرسید:

ـ تا این درخت چند قدم است؟

بقیه، هریك عددی راکه تخمین زده بود می‌گفت و سپس با هم شروع به شمردن قدمها می‌کردند تا معلوم شود کدام تخمین به حقیقت نزدیکتر است و چه‌کسی بازی را برده است. آنوقت نوبت اومی‌شد که چیزی را درنظربگیرد و از دیگران بخواهد، تا فاصلهٔ‌آنرا تخمین بزنند.

هر بار به کسی که دقیق‌تر تخمین زده بود، یك امتیاز داده می‌شد. بعد از ۱۰ بازی امتیازها را می‌شمردیم: هر کسی که امتیاز بیشتری داشت برندهٔ مسابقه بود.

در دورهای اول بازی، تخمین نظری ما همراه با اشتباهات زیاد بود. ولی خیلی زود، زودتر از آنچه انتظار داشتیم، چنان در هنر تعیین فاصله به وسیلهٔ چشم ورزیده می‌شدیم، که خیلی کم دچار اشتباه می‌شدیم. فقط وقتی که اوضاع و احوال بکلی تغییر می کرد، مثلاازدشت خالی وارد درجنگل‌می‌شدیم یا از بستانی که سرسبز از بوته‌های کوچك بود به خیابانهای تنگ و پر گرد و خاك شهر برمی‌گشتیم و یا شب هنگام و در پرتو نور فریبندهٔ ماه، دچار اشتباهات بزرگی می‌شدیم. ولی بتدریج یاد می‌گرفتیم که خود را با هر وضعی تطبیق بدهیم و با درنظرگرفتن وضع جدید، تخمین را اصلاح کنیم. بالاخره گروه در تخمین فاصله‌ها به چنان دقتی می‌رسید که همه از ادامهٔ بازی سرباز می زدند: همه حدسها کاملا یکنواخت و درست بود و ادامهٔ مسابقه بهیچ طریقی جالب نمی‌نمود. در عوض هر کدام از ما تخمین نظری نسبتاً خوبی بدست‌آورده بودیم که در مسافرتهای خارج شهر بخوبی به ما خدمت می کرد.

جالب است که تخمین نظری ارتباطی به دقت و قدرت دید ندارد. درگروه ما جوانان نزدیك بینی‌بودندکه نه تنها در دقت‌تخمین با چشم، از دیگران عقب نمی‌ماندند، بلکه حتی درمسابقه هم پیروز می‌شدند. برعکس پسربچه‌ای بودکه دید طبیعی داشت ولی دارای قدرت تعیین فاصله به کمك چشم نبود. بعدها من دربارهٔ تعیین ارتفاع درختها هم به وسیلهٔ تخمین نظری به همین نتیجه رسیدم: وقتی‌که در این باره با دانش آموزان تمرین می کردیم (البته نه بطور تفریحی، بلکه برای احتیاجی که درآینده به آن داشتند)، متوجه شدم که افراد

نزدیك بین در کسب مهارت دراین مورد ، بهیچوجه بدتراز دیگران نیستند . و این می‌تواند برای افراد نزدیك بین یك دلگرمی‌باشد : اگر چه آنها دارای قدرت دید کامل نیستند ، ولی این استعداد را دارند که بتوانند خود را برای تخمین دقیق اندازه‌ها ورزیده کنند .

برای تخمین نظری فواصل همیشه و در هر موقعی از سال در هرجائی که هستید می‌توان تمرین کرد. وقتی درخیابان شهر قدم‌می‌زنید می‌توانید مسائلی از تخمین نظری برای خود طرح کنید : سعی کنید حدس بزنید تا نزدیکترین تیر چراغ ، یا شیئی مناسب دیگری که در نظر می‌گیرید ، چند قدم فاصله دارید . وقتی که هوا بد است می‌توانید در خیابانهای خلوت آزمایش خود را انجام دهید .

تعیین فاصله‌ها با تخمین نظری به‌کارجنگجویان دقت فوق‌العاده می‌دهد: تخمین‌نظری‌برای‌گروه‌های‌اکتشافی، تیراندازها و توپچی‌هالازم است . بی فایده نیست اگر با بعضی از علامتهائی که آنها در عمل برای تخمین نظری بکار می‌برند ، آشنا باشیم . مطلب زیر را از یك کتاب درسی توپخانه برداشته‌ایم :

« با کمك چشم و یا با ورزیدگی‌می‌توان تا حد زیادی فواصل را معین کرد ، اشیاء قابل رویت را ازهم تمیز داد ، به دوری و نزدیکی آنها نسبت به ناظر پی برد و یا فواصلی در حدود ۱۰۰ ـ ۲۰۰ قدم را که برای چشم عادی است تخمین زد ، ولی هرچه شیئی دورتر ازناظر قرار گرفته باشد ، کوچکتر بنظر می‌رسد .

« برای تعیین فواصل اشیائی که قابل رویت هستند، باید درنظر داشت که اشیائی که روشن‌ترند ، یا از لحاظ رنگ خود مشخص تر از بقیه هستند ؛ اشیائی که بالاتر از دیگران قرارگرفته‌اند ، اشیائی که رویهم انباشته شده باشند و بطور کلی اشیاء بزرگتر ، نزدیکتر از فاصلهٔ واقع بنظر می‌رسند .

« می‌توان نشانه‌های زیر را ملاك کار قرار داد : تا فاصلهٔ ۵۰ قدم چشم و دهان افراد قابل تشخبص‌است؛ در ۱۰۰ قدمی،چشمها به‌نقاطی تبدیل می‌شوند ؛ در ۲۰۰ قدمی هنوزمی‌توان دکمه‌ها وجزئیات لباس نظامی‌را تشخیص‌داد؛ در ۳۰۰ قدمی‌صورت‌دیده می‌شود؛ در ۴۰۰ قدمی حرکت پاها مشخص است و در ۵۰۰ قدمی رنگ لباس قابل تشخیص است ».

دراین مورد ، چشمی که تا حدی ورزیدگی داشته باشد برای تعیین فاصله تا ۱۰٪ ممکن است از این ویا آنطرف اشتباه کند .

بر عکس ، مواردی وجود دارد که اشتباه تخمین نظری قابل توجه است . اولا وقتی که در یك منطقهٔ صاف وهموارقرارگرفته‌باشیم: در رودخانه یا دریاچه بدون موج و آرام ، دربیابان ریگزار و مسطح ، در جلگهٔ سرسبزی که پوشیده از گیاهان است ؛ همیشه فواصل کمتر از مقدار واقع بنظر می‌رسد ؛ در اینگونه موارد معمولا ۵۰٪ و گاهی خیلی بیشتر اشتباه پیش می‌آید . ثانیاً وقتی شیئی پشت یك بلندی قرار گرفته باشد ؛ مثل بلندی مسیر راه‌آهن ، تپه ، ساختمان و غیره، بطور کلی وقتی که قسمت پائین شیئی بوسیلهٔ مانعی از نظرما مخفی باشد، اشتباه تخمین فاصله قابل توجه است . در این مورد شیئی مورد نظر درست روی‌بلندی مانع ، بنظر می‌رسد و نه درعقب آن و بنابراین باز هم اشتباه درجهت کمتر شدن فاصلهٔ واقعی است (شکلهای ۷۷ و ۷۸ را به‌بینید) .

درچنین مواردی تکیه به تخمین نظری خطرناك است و باید با روشهای دیگری ، که قبلا صحبت کرده‌ایم و یا بعداً صحبت خواهیم کرد ، فواصل را تخمین زد .

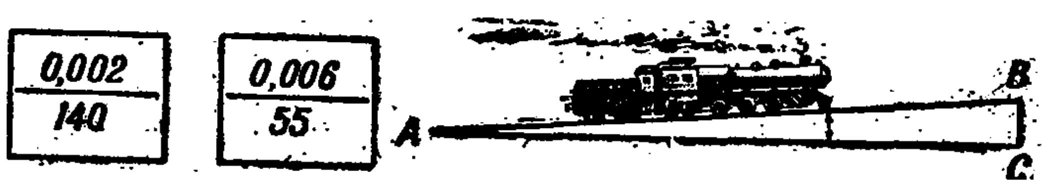
۷۷. درخت از پشت تپه نزدیک بنظر می‌رسد

۷۸. وقتی به‌بالای تپه برویم، می‌بینیم که هنوز
تا درخت فاصلهٔ زیادی باقی است

شیبها

در امتداد نوارراه آهن، علاوه برستونهای کیلومتر ، ستونهای کوتاه دیگری هم دیده می‌شود که برای عدهٔ زیادی از مردم نامفهوم است و بر روی آنها ، چیزی شبیه آنچه کـه در شکل ۷۹ مـی‌بینید ، نوشته شده است .

اینها « علائم مربوط به شیب » هستند . مثلا ، در اولی ، عـدد ۰٫۰۰۲ که دربالا نوشته شده‌است به معنای اینست که شیب راه دراینجا (در همان جهتی که صفحه نشان می‌دهد) مساوی ۰٫۰۰۲ است: یعنی راه در هر هزار میلیمتر به اندازهٔ ۲ میلیمتر بالاتر و یا پائین‌تر می‌رود . و عدد ۱۴۰ که درپائین نوشته شده است ، نشان می‌دهد که این شیب تا فاصلهٔ ۱۴۰ متری ادامه دارد و در آنجا مجدداً علامتی گذاشته شده است که شیب بعدی را نشان می‌دهد . علامت دوم با نوشتهٔ $\frac{۰٫۰۰۶}{۵۵}$ نشان می‌دهد که در امتداد نزدیکترین ۵۵ متر مسیر راه‌آهن در هر یك



۷۹. علامت‌های شیب

متر به اندازهٔ ۶ میلیمتر بالا یا پائین می‌رود .

با اطلاع از مفهوم شیب ، به سادگی می‌توانید اختلاف ارتفاع دو نقطه از مسیررا ، که دراین نشانه‌ها ذکر شده است ، محاسبه کنید. مثلا درحالت اول‌اختلاف ارتفاع این دو نقطه مساوی ۰٫۰۰۲×۱۴۰ یعنی ۰٫۲۸ متر در حالت دوم ۰٫۰۰۶×۵۵ یعنی ۰٫۳۳ متراست .

همانطور که می‌بینید، درعمل مقدارشیب مسیر راه‌آهن‌را بادرجه معین نمی‌کنند، ولی درصورت لزوم می‌توان با دردست داشتن اعدادی که روی صفحه نوشته شده، مقدارشیب را برحسب درجه بدست آورد. اگر AB (شکل ۷۹) خط مسیر و BC اختلاف ارتفاع نقاط A و B باشد ، روی صفحهٔ کنار مسیر راه آهن ، برای شیب AB نسبت بـه خط افقی AC ، نسبت $\frac{BC}{AB}$ داده‌شده‌است. چون زاویهٔ A خیلی کوچك است ، می‌توان AB و AC را شعاعهای دایره‌ای فرض کرد که BC قوسی ازآنست*. در اینصورت محاسبهٔ زاویهٔ A ، با در دست داشتن نسبت BC:AB مشکل نیست . مثلا برای شیبی که با نشانهٔ ۰٫۰۰۲ بیان شده است به این ترتیب قضاوت می‌کنیم : قوسی که مساوی $\frac{۱}{۵۷}$ شعاع‌باشد، زاویه‌ای مساوی ۱ درجه‌تشکیل می‌دهد ؛ قوسی که ۰٫۰۰۲ شعاع باشد . چه زاویه‌ای تشکیل می‌دهد ؟ مقدار x این زاویه را از تناسب زیر بدست می‌آوریم :

$$x:۱=۰٫۰۰۲:\frac{۱}{۵۷}:\Longrightarrow x=۰٫۰۰۲\times ۵۷=۰٫۱۱^{\circ}$$

یعنی به تقریب مساوی ۷ دقیقه .

برای مسیر راه آهن همیشه شیبهای کم عملی و قابل اجرااست

---

*) ممکـن است کـه تساوی عمود AC با مایل AB ، بنظر بعضی از خوانندگان غیرقابل قبول برسد . به‌بینیم وقتی که مثلا BC برابر بـا ۰٫۰۱ مایل AB است، اختلاف AC وAB چقدر می‌شود . طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$AC=\sqrt{AB^{۲}-\left(\frac{AB}{۱۰۰}\right)^{۲}}=\sqrt{۰٫۹۹۹۹AB^{۲}}=۰٫۹۹۹۹۵\,AB$$

اختلاف برابرAB۰٫۰۰۰۰۵ می‌شود والبته برای محاسبات تقریبی، اشتباهاتی از این قبیل مشکلی به وجود نمی‌آورد .

و حد شیب می‌تواند مساوی ۰/۰۰۸ باشد. این شیب‌حدی بـرحسب درجه ۵۷ × ۰/۰۰۸ و یا کمتر از $\frac{۱}{۲}$ درجه می‌شود، این‌حداکثرمقدار شیب است. تنها در بعضی موارد استثنائی شیب مسیرراه راهن از این حد تجاوز می‌کند. مثلا برای راه‌آهن قفقاز تا شیب ۰/۰۲۵ هم وجود داردکه متناظربازاویه‌ای نزدیك به $۱\frac{۱}{۲}$ درجه است.

اینگونه شیبهای ناچیز بکلی برای ما محسوس نیست. کسی که پیاده روی می‌کند، تنها وقتی شیب زمین زیـرپای خـود را حس می‌کند که از $\frac{۱}{۲۴}$ بیشتر باشد: این شیب به زبان درجه مساوی $\left(\frac{۵۷}{۲۴}\right)$ ویا قریب $۲\frac{۱}{۲}$ درجه می‌شود.

اگر شما در مسیر راه آهن شروع به حـرکت کنید و ضمن طی چند کیلومتر، نشانه‌های مربوط به شیب جـاده را یـادداشت کنید، می‌توانید حساب کنیدکه بطور کلی و در مجموع چقدر بالا یـا پائین رفته‌اید، یعنی اختلاف ارتفاع نقطه شروع تا نقطهٔ پایان حـرکت را بدست آورید.

مسئله

در کنار مسیر راه آهن از نقطه‌ای که نشانهٔ سربـالائی $\frac{۰/۰۰۴}{۱۵۳}$ گذاشته شده است، شروع به حرکت می‌کنید وبه ترتیب به نشانه‌های زیر می‌رسید (ازچپ به راست):

سرپائینی	مسطح	سربالائی	سربالائی	مسطح *
$\frac{۰/۰۰۴}{۲۱۰}$ ،	$\frac{۰/۰۰۰}{۴۵}$.	$\frac{۰/۰۰۳۲}{۱۲۱}$ ،	$\frac{۰/۰۰۰۷}{۸۴}$ ،	$\frac{۰/۰۰۰}{۶۰}$

*) در علامتهای مسیر راه آهن ۰/۰۰۰ نشانهٔ افقی بودن جاده‌است.

شما گردش خود را در ابتدای نشانهٔ بعدی تمام می‌کنید. چه‌راهی‌طی کرده‌اید و اختلاف ارتفاع بین ابتدا وانتهای مسیر شما چقدر است؟

حل

طول تمام راه چنین‌است:

۱۵۳ + ۶۰ + ۸۴ + ۱۲۱ + ۴۵ + ۲۱۰ = ۶۷۳ (متر)

ارتفاعی که بالا رفته‌اید:

۰/۰۰۴ × ۱۵۳ + ۰/۰۰۱۷ × ۸۴ + ۰/۰۰۳۲ × ۱۲۱ ≈ ۱/۱۵ (متر)

و ارتفاعی که پائین آمده‌اید:

۰/۰۰۴ × ۲۱۰ = ۰/۸۴ (متر)

یعنی درمجموع، نسبت‌به نقطهٔ شروع حرکت به اندازهٔ:

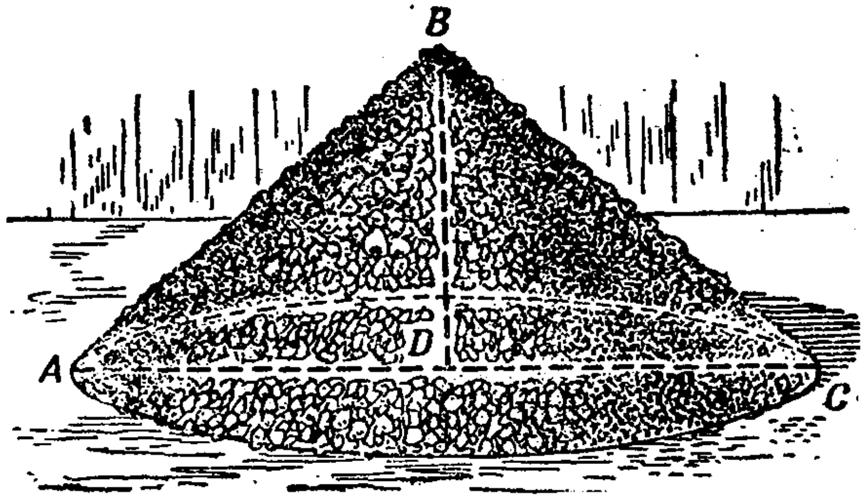
۱/۱۵ − ۰/۸۴ = ۰/۳۱ (متر) = ۳۱ (سانتیمتر)

بالا رفته‌اید.

تودهٔ شن

وجود تلهائی از خرده‌سنگ که در کنار جاده‌های شوسه وجود دارد، موضوعی است که‌از نظر «هندسه» قابل طرح وبررسی است. سئوالی پیش می‌آید حجم تودهٔ شنی که جلو شما قرار گرفته است، چقدر است؟ در مقابل‌شما مسئله‌ای قرار گرفته است که حل آن‌برای کسانی که عادت دارند، مشکلات ریاضی خودرا تنها روی کاغذ و یا تختهٔسیاه کلاس برطرف کنند، به‌اندازهٔ کافی مشکل است. شما باید حجم‌مخروطی‌را بدست آورید که نه ارتفاع و نه‌شعاع قاعدهٔ آنرا نمی‌توان‌مستقیماً اندازه گرفت. ولی‌هیچ مانعی برای‌محاسبهٔ اندازه‌های آن به‌طریق غیر مستقیم وجود ندارد. شعاع مخروط را می‌توانید با اندازه

گرفتن محیطدایرهٔ قاعده، به‌کمك یك‌نوار یا نخ ، و سپس تقسیم* آن بر ۶/۲۸ بدست آورید .



۸۰ . مسئله‌ای دربارهٔ تودهٔ شن

محاسبهٔ ارتفاع کمی مشکل‌تراست: باید طول مولد AB (شکل ۸۰) و یا آنطور که سرکارگران راه عمل می‌کنند ، دو مولد ABC را با هم (درحالیکه نوار متر از رأس مخروط گذشته است) ، اندازه گرفت و سپس با دردست داشتن قاعدهٔ مخروط، ارتفاع BDرا باکمك قضیهٔ فیثاغورث اندازه گرفت .

به مثال زیر توجه کنید .

مسئله

محیط قاعدهٔ تل‌شنی که به شکل‌مخروط‌است مساوی ۱۲/۱ متر و طول مولد آن ۴/۶ متر است . حجم آنرا پیدا کنید .

---

*) در عمل می‌توان ضرب را جانشین تقسیم کرد : برای بدست آوردن قطر قاعده، محیط‌آنرادر ۰/۳۱۸ وبرای بدست‌آوردن‌شعاع قاعده، در۰/۱۵۹ ضرب می کنیم .

حل

شعاع قاعدهٔ مخروط چنین است :

$$۱۲/۱ \times ۰/۱۵۹ \;(\text{یا}\; ۱۲/۱ : ۶/۲۸) \approx ۱/۹ \quad (\text{متر})$$

و ارتفاع آن :

$$\sqrt{۲/۳^{۲} - ۱/۹^{۲}} \approx ۱/۳ \quad (\text{متر})$$

از آنجاحجم تودهٔ سنگ چنین می‌شود :

$$\frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۱/۹^{۲} \times ۱/۳ \approx ۴/۹ \quad (\text{مترمکعب})$$

حجم کوپه‌های شنی که در کنار جاده‌ها قرار دارد، معمولا به اندازه‌های ۴/۸ ، ۲/۴ و ۱/۲ متر مکعب می‌باشد .

تپهٔ افتخار

مطالعهٔ تپه‌های مخروطی شکل شن و یا خرده سنگ ، مرا بیاد افسانهٔ قدیمی ملتهای شرق انداخت که در داستان پوشکین بنام «شوالیهٔ خسیس» نقل شده است :

جائی خوانده‌ام ،
که روزی شاه به جنگجویان خود
فرمان داد هرکدام یك‌مشت خاك بردارند و به‌صورت تپه درآورند ،
و تپهٔ افتخار آماده شد ،
و شاه توانست با خوشحالی از بالای آن به اطراف بنگرد
هم به دره‌ای که پوشیده از خیمه‌های سفید بود ،
و هم به دریا ، که کشتیها در آن حرکت می‌کردند .

این، یکی از افسانه‌هائی است که در محتوی آن ، حتی یك ذره حقیقت هم وجود ندارد . با محاسبهٔ هندسی می‌توان ثابت کرد که اگر حاکم مستبدی می‌خواست به این ترتیب مشغولیاتی برای خود فراهم

کند ، از نتیجهٔ حقیر و بی‌ارزش آن دچار یأس می‌شد : در مقابل او تپهٔ خاکی کوچکی‌قرار می‌گرفت که هیچگونه خیالبافی و اغراق‌گوئی نمی‌توانست نام «تپهٔ افتخار» افسانه‌ای را بر آن بگذارد .

به محاسبهٔ تقریبی بپردازیم . این سلطان قدیمی چند جنگجو می‌توانست داشته باشد ؟ تعداد جنگجویان ارتشهای دوران گذشته ، مثل‌زمان ما، زیاد نبود .ارتشی که ۱۰۰ ۰۰۰ جنگجو داشت، فوق‌العاده و قابل‌ملاحظه به‌حساب می‌آمد. ماهم همین عدد را قبول می کنیم،یعنی فرض می کنیم که تپه از ۱۰۰۰۰۰ مشت خاك درست شده باشد . شما مشت‌خودرا ازخاك پر کنید و دریك لیوان بریزید: یك مشت خاك نمی‌تواند لیوانرا پر کند. فرض رابراین می‌گیریم که مشت یك جنگجوی قدیمی $\frac{۱}{۵}$ لیتر (دسیمتر مکعب) حجم داشته است،در اینصورت حجم تپه بدست می‌آید :

$$\frac{۱}{۵} \times ۱۰۰\ ۰۰۰ = ۲۰\ ۰۰۰ \text{(دسیمتر مکعب)} = ۲۰ \text{(متر مکعب)}$$

یعنی تپه ، به‌شکل مخروطی‌می‌شود که حجم آن از ۲۰ مترمکعب‌تجاوز نمی‌کند و این ناچیزی حجم مایوس کننده است . محاسبه را ادامه می‌دهیم ، به‌بینیم ارتفاع این تپه درچه‌حدود است . برای این منظور باید بدانیم که زاویهٔ بین مولدمخروط با قاعدهٔ‌آن چقدر است . دراینجا می‌توان ، آنرا مساوی شیب طبیعی ، یعنی ۴۵ درجه ، در نظر گرفت: باشیب تندتر از آن ممکن نیست، زیرا دراینصورت خاك فرو می‌ریزد (صحیح‌تر آنست که‌تپه‌راباشیب کمتری‌ومثلایك‌و نیم به‌حساب بیاوریم). همین زاویهٔ ۴۵درجه را قبول می کنیم ، در اینصورت ارتفاع مخروط مساوی با شعاع قاعدهٔ آن می‌شود و بنابراین :

$$۲۰ = \frac{\pi x^۳}{۳},$$

و از آنجا : $x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} \approx 2/7$ (متر)

باید نیروی تصور زیادی داشت ، که یك کوپهٔ خاك ۲/۷ متری (یك برابر و نیم‌قد انسان) « تپهٔ افتخار » نامگذاری شود . اگر محاسبه را مثلا برای شیب ۱/۵ انجام می‌دادیم ، به نتیجهٔ باز هم حقیرتری می‌رسیدیم .

بزرگترین ارتشی که دردنیای‌قدیم‌شناخته‌شده، ارتش‌آتیلااست. مورخین تعداد جنگجویان این ارتش را به ۷۰۰ ۰۰۰نفر تخمین می‌زنند . اگر تمام‌افراد این ارتش‌هم درساختن‌این تپه شرکت می کردند، البته ارتفاع زیادتری بدست می آمد ، اما نه خیلی زیاد ، زیرا وقتی که حجم آن ۷برابر شده باشد ، ارتفاع آن فقط $\sqrt[3]{7}$ یعنی تقریباً ۱/۹برابر خواهد شد : چنین تپه‌ای به اندازهٔ (متر) $2/7 \times 1/9 = 5/1$ ارتفاع خواهد داشت . وبعید است که چنین‌ساختمان محقری می‌توانست‌غرور آتیلا را ارضا کند .

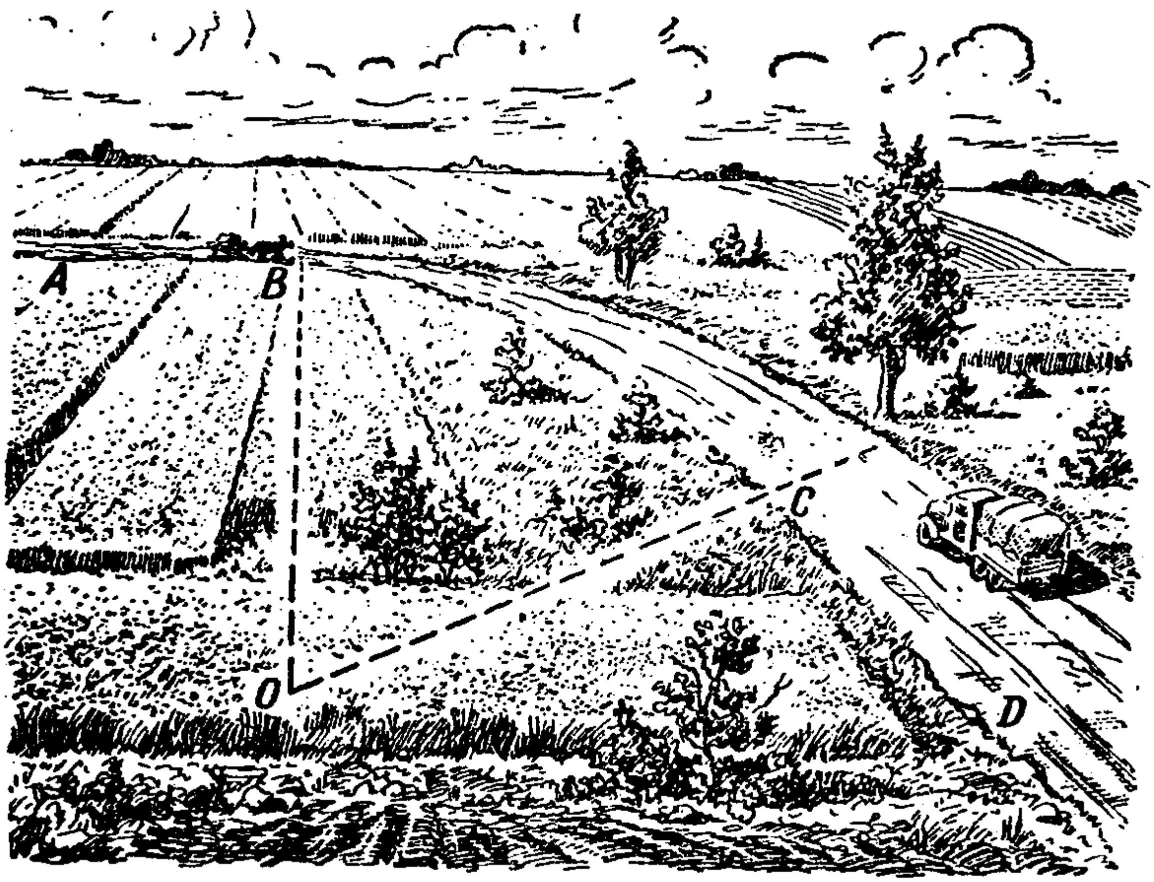
البته از فراز چنین ارتفاعی می‌توان « دره‌ای را که پوشیده از خیمه‌های سفید » است ، مشاهده کرده، ولی مطالعهٔ دریا به‌کمك‌چنین تپه‌ای، وقتی ممکن است که آنرادرست درکنار ساحل ساخته باشیم .

در فصل ششم از امکانات شعاع دید از بالای بلندیها ، صحبت خواهیم کرد .

در پیچ جاده

نه جادهٔ شوسه و نه راه آهن هرگز یکباره نمی‌پیچند و از یك جهت به‌جهت دیگر به ملایمت ، و روی قوسی که شکستگی نداشته باشد ، تغییر مسیر می‌دهند . این قوس ، معمولا قسمتی از محیط یك

دایره است که قسمتهای مستقیم جاده ، بر آن مماس هستند . مثلا در شکل ۸۱ قسمتهای مستقیم جاده ، یعنی AB و CD ، چنان به قوس BC وصل شده‌اند که از لحاظ هندسی در نقاط B و C بر این قوس مماس‌اند، بنابراین AB با شعاع OB و همچنین CD با شعاع OC زاویهٔ قائمه می‌سازند . این وضع به‌مناسبت اینست که راه از قسمت مستقیم به‌قسمت منحنی ، و برعکس، به‌نرمی عبور کند .



۸۱ . پیچ جاده

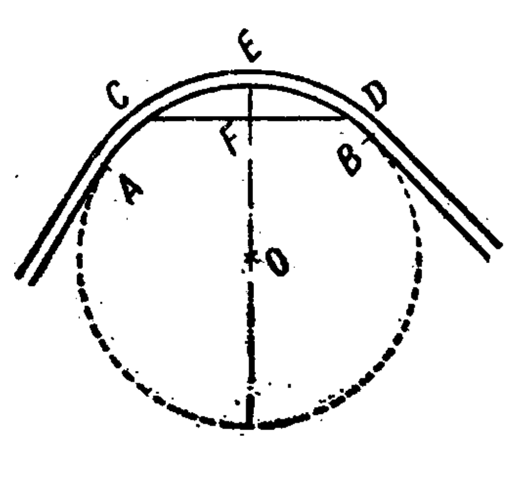
معمولا شعاع قسمت منحنی مسیر را خیلی بزرگ می‌گیرند که درمورد راه‌آهن کمتر از ۶۰۰ متر نیست و در بعضی موارد به ۱۰۰۰ و حتی ۲۰۰۰ متر می‌رسد .

شعاع پیچ

وقتی که در نزدیکی یکی از این پیچها ایستاده‌اید، آیا می‌توانید اندازهٔ شعاع آنرا تعیین کنید؟ این عمل به سادگی‌اندازه‌گیری قوسی که که روی کاغذ رسم شده است، نیست. روی کاغذ خیلی آسانست: دو وتر دلخواه قوس را رسم می‌کنیم، سپس از وسط هر یك عمودی بر وترها اخراج می‌کنیم، محل تلاقی این دو عمود، مرکزقوس‌خواهد بود؛ فاصلهٔ این مرکز تا این نقاط قوس، شعاع مورد نظراست.

ولی، در روی زمین نمی‌توان به‌همین سادگی عمل کرد، زیرا مرکزپیچ در ۱ تا ۲ کیلومتری جاده قرارگرفته است و اغلب هم، به علت موانع، در دسترس نیست. البته می‌توان این ساختمان هندسی را روی نقشه انجام داد، ولی رسم پیچ روی نقشه هم کار آسانی نیست.

همهٔاین‌مشکلات را به این ترتیب می‌توان برطرف کرد که‌بجای ساختمان هندسی به محاسبه بپردازیم. برای این منظور می توان از روش زیر استفاده کرد: دایره‌ای راکه قوس AB ازپیچ قسمتی از آن است. در نظر می‌گیریم (شکل ۸۲).



۸۲ محاسبهٔ شعاع پیچ

دو نقطهٔ دلخواه C و D ازقوس پیچ را بهم وصل می‌کنیم، سپس طول وتـر CD و «سهم» EF (یعنی ارتفاع قطعهٔ DEC) را اندازه می‌گیریم. بادردست داشتن این دو اندازه، می‌توانیم طول شعاع مجهول را بدون زحمت محاسبه کنیم. اگر طول وتر را a، طول سهم آنرا h و شعاع دایره را R فرض کنیم، با توجه به اینکه قطر.دایره

و وتر CD یکدیگر را قطع کرده‌اند خواهیم داشت :

$$\frac{a^2}{4} = h(2R - h)$$

و از آنجا:

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2$$

و اندازهٔ شعاع مجهول چنین می‌شود*:

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

مثلا اگر طول سهم ۰/۵ متر و طول وتر ۴۸ متر باشد ،اندازهٔ شعاع چنین است :

$$R = \frac{48^2 + 4 \times 0/5^2}{8 \times 0/5} \# 580 \text{ (متر)}$$

اگر در این محاسبه $2R-h$ را مساوی $2R$ بگیریم ، رابطهٔ ساده‌تری بدست می‌آید ، این عمل بدان مناسبت مجاز است که h در مقابل R خیلی کوچك است (R مساوی صدها متر و h در حدود یك متر است). به این ترتیب رابطهٔ تقریبی زیر که بمراتب ساده‌تر است بدست می‌آید :

---

* این محاسبه را به‌طریق دیگری هم می‌توان انجام داد ، مثلث COF قائم‌الزاویه است ودر آن $OC=R$ ، $CF=\frac{a}{2}$, $OF=R-h$ باشد .

طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم :

$$R^2 = (R-h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

و ازآنجا :

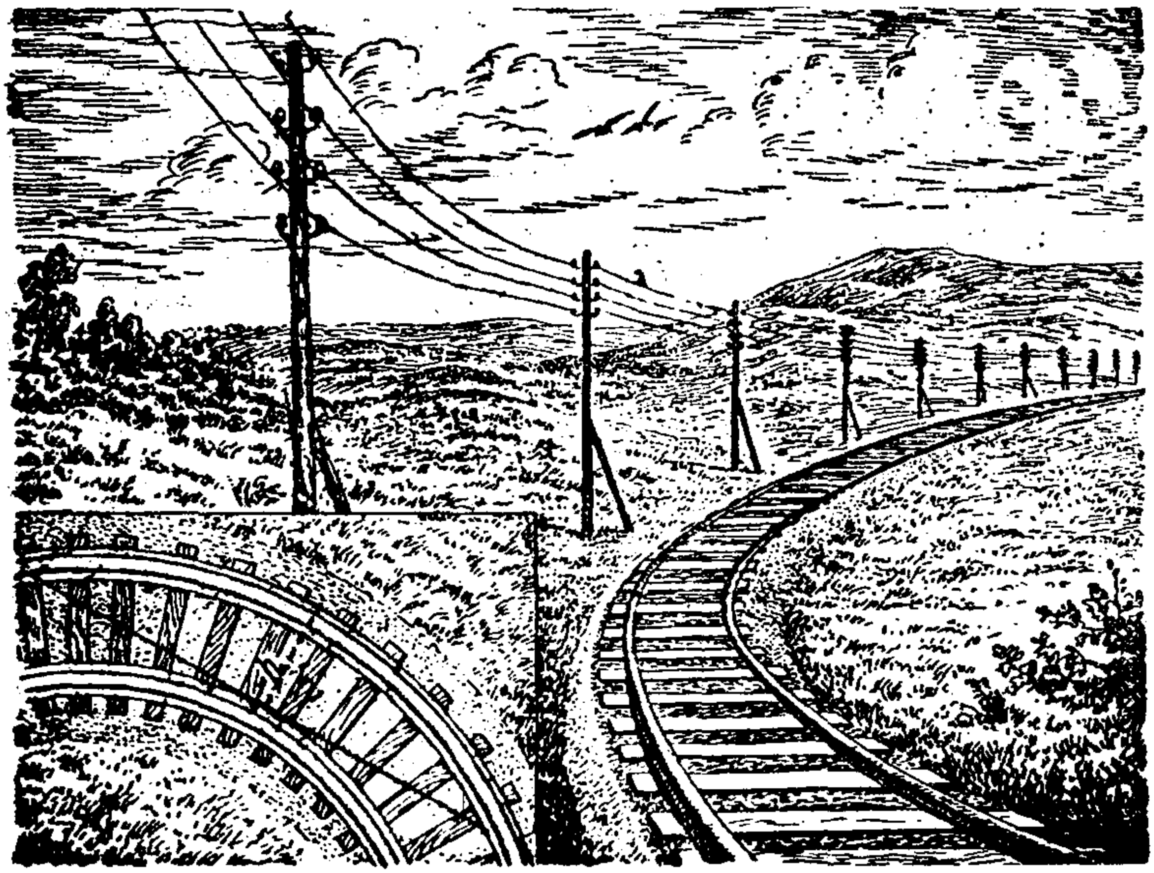
$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

$$R = \frac{a^{2}}{8h},$$

اگر این رابطه را برای مثال فوق بکار بریم ، باز هم همان اندازهٔ قبلی بدست می‌آید :

$$R = 580$$



۸۳. محاسبهٔ شعاع پیچ راه‌اهن

با در دست داشتن شعاع پیچ و توجه به اینکه مرکز دایره روی عمود منصف وتر آنست ، می‌توان جای تقریبی مرکز قوس هر قسمت جاده را علامتگذاری کرد .

اگر جاده ریل‌گذاری شده باشد ، پیدا کردن شعاع پیچ ساده تر می‌شود. اگر طنابی را مماس بر ریل‌داخلی بگیریم، وتر قوسی از ریل خارجی بدست می‌آید که سهم آن مساوی عرض خط ، یعنی ۱/۵۲ متر است (شکل ۸۳) . اگر طول وتر را در اینجا a بگیریم ، شعاع پیچ

چنین می‌شود :

$$R = \frac{a^2}{8 \times 1/52} = \frac{a^2}{12/2}$$

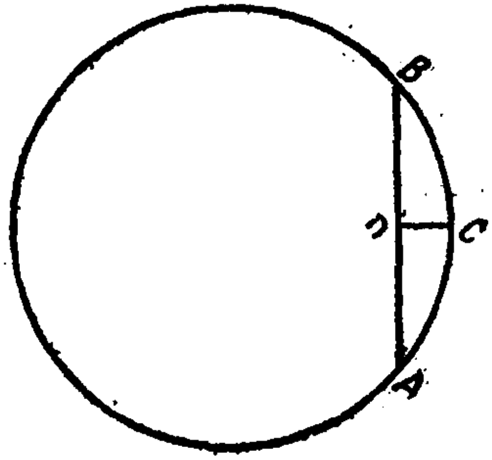
اگر a مساوی ۱۲۰ متر باشد ، شعـاع پیچ مساوی ۱۲۰۰ متر می‌شود*.

کف اقیانوس

غیر منتظره است که از پیچ جاده ، به‌کف اقیانوس بپردازیم ، دو موضوعی کـه ظاهراً بهم مربوط نیستند . ولی هندسه یك ارتباط طبیعی بین این دو زمینهٔ مختلف به وجود می‌آورد .

صحبت بر سر انحنای کف اقیانوس است ، در این باره کف اقیانوس بچه شکل است : مقعر، مسطح یا برآمده . بدون تردید، بنظر بسیاری باور نکردنی است که ، اقیانوس ، با عمق زیادی کـه دارد ، نسبت به کرهٔ زمین‌گود نباشد ، همانطور که خواهیم دید، کف‌آن نه تنها مقعر نیست ، بلکه حتی برآمده است . وقتی‌که اقیانوس را « چاه ویل و بی‌انتها» به حساب می‌آوریم ، فراموش می‌کنیم که عظمت وسعت آن صدها مرتبه بیشتر از عمق آنست ، یعنی قشر آب اقیانوس چنان تا دور دست گسترده است که نمی‌توان انحنای سیارهٔ ما را ، در مورد آن ، به‌حساب نیاورد .

*) این طریقه برای مواردی‌که شعاع انحنای پیچ زیاد است، تولیداشکال می‌کند ، زیرا طول وتری از ریل خارجی‌که بر ریل داخلی مماس باشد ، خیلی بزرگ می‌شود .



۸۴. آیا کف اقیانوس مسطح است؟

به‌عنوان مثال اقیانوس اطلس را انتخاب می‌کنیم. عرض این اقیانوس در نزدیکی استوا تقریباً یك‌ششم محیط کره است. اگر دایرهٔ شکل ۸۴ راخط استوا فرض‌می‌کنیم، قوس ACB سطح آرام آب اقیانوس اطلس خواهد بود. اگر کف این اقیانوس مسطح باشد، عمق آن مساوی CD، سهم‌قوس ACB، خواهد بود. باتوجه به‌اینکه قوس AB مساوی $\frac{1}{6}$محیط دایره است، وتر AB مساوی ضلع شش ضلعی محاط در دایره خواهد بود (وبنابراین مساوی شعاع R ازدایره است) و می‌توانیم CD را از رابطه‌ای که درمورد پیچ جاده‌ها بکار می‌بردیم، محاسبه کنیم:

$$R = \frac{a^2}{8h} \Longrightarrow h = \frac{a^2}{8R}$$

چون $a = R$ است، خواهیم داشت:

$$h = \frac{R}{8}$$

که در آن R مساوی ۶۴۰۰ کیلومتراست و بدست می‌آید:

$$h = 800 \text{ (کیلو متر)}$$

به این ترتیب، برای اینکه کف اقیانوس اطلس مسطح باشد، باید حد اکثر عمق آن به ۸۰۰ کیلو متر برسد، ولی در حقیقت، این عمق به ۱۰ کیلومترهم‌نمی‌رسد. نتیجهٔ مستقیمی که ازاینجا بدست می‌آید اینست که این اقیانوس، در شکل کلی خود محدب است، تنها نسبت به تحدب سطح‌آرام خودکم و بیش خمیدگی دارد.

همین مطلب برای سایر اقیانوسها هم صحیح است: عمق این

اقیانوسها روی سطح زمین به اندازه‌ای است که تقریباً شکل کلی کرهٔ زمین را تغییر نمی‌دهد .

رابطه‌ای که برای محاسبهٔ پیچ جاده‌ها بکار بردیم ثابت می کند که هرچه وسعت انبار آب زیادتر باشد ، کف آن محدب‌تر است . باتوجه به رابطهٔ $h = \frac{a^۲}{۸R}$ ، بلافاصله نتیجه می‌شود که زیادشدن عرض a از اقیانوس یا دریا (برای اینکه کف مسطح داشته باشد)، باید عمق h بسرعت زیاد شود ، به نسبت مجذور a . ولی وقتی که وسعت آب زیاد می‌شود ، هرگز عمق آب به این نسبت تصاعدی زیاد نمی‌شود . اگر مثلا عرض اقیانوسی ۱۰۰ برابرعرض يك دریا باشد ، هرگز عمق آن ۱۰۰ × ۱۰۰ یعنی ۱۰ ۰۰۰ برابر نمی‌شود . بنابراین کف آبهای کم‌وسعت، درمقایسه با اقیانوسها ،به سطح نزدیکتراست. کف دریای سیاه بین کریمه و آسیای صغیر ، نه‌تنها مثل کف اقیانوسها محدب نیست ، بلکه مسطح هم نیست ؛ کف این دریا کم وبیش مقعراست. سطح آب این دریا قوسی نزدیك به ۲ درجه است (دقیق‌تر: $\frac{۱}{۱۷۰}$ محیط‌زمین) . عمق دریای سیاه نسبتاً یکنواخت و مساوی ۲/۲ کیلو متراست . برای این قوس ، اگر می‌خواست کف مسطحی داشته باشد ، می‌بایستی حد اکثرعمق چنین باشد :

$$R = \frac{۴۰۰۰۰^۲}{۱۷۰^۲ \times ۸R} = ۱/۱ \text{ (کیلومتر)}$$

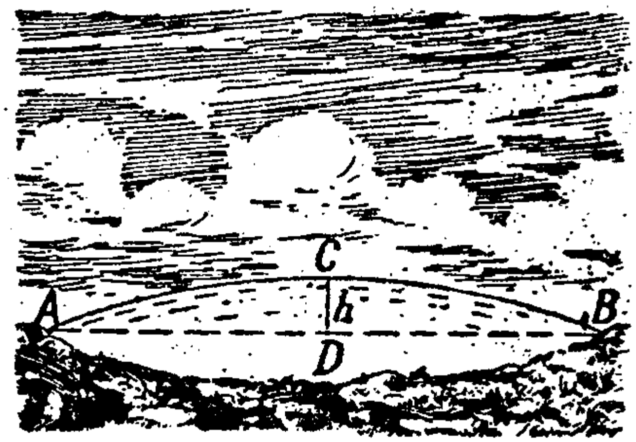
یعنی کف دریای سیاه به اندازهٔ (۱/۱ – ۲/۲) کیلومتر پائین‌تر از سواحل دو طرف خود می‌باشد و بنابراین مقعر است نه‌محدب.

آیا کوههای آب وجود دارد ؟

رابطه‌ای که قبلادربارهٔ محاسبهٔ شعاع انحنای جاده ذکر کردیم،

می‌تواند به این سئوال جواب بدهد .

مسئلهٔ قبل هم جواب ما را آماده کرده است . کوههای آبی ، نه از لحاظ فیزیکی ، بلکه به معنای هندسی این کلمه وجود دارد . نه‌تنها دریاها بلکه دریاچه‌ها هم، هریك نوعی کوه آبی هستند . وقتی که شما درساحل‌دریاچه‌ای‌ایستاده باشید ، آبی که بین شما وساحل مقابل است ، بر آمدگی دارد و هرچه عرض دریاچه بیشتر باشد ، ارتفاع آن نیز بیشتر است . این ارتفاع را می‌توان محاسبه کرد :



۸۵ . «کوه آب»

از رابطهٔ $R=\frac{a^{۲}}{۸h}$ مقدار سهم $h=\frac{a^{۲}}{۸R}$ بدست می‌آید ؛ در اینجا a عبارتست از فاصلهٔ مستقیم بین دو ساحل که می‌توان برابر با عرض دریاچه درنظر گرفت (قوس‌ـ‌وتر) اگر این عرض را ۱۰۰ کیلومتر فرض کنیم ، ارتفاع «کوه» آب‌چنین می‌شود :

$$h=\frac{۱۰\ ۰۰۰}{۸\times ۶۴۰۰}\# ۲۰۰ \text{ (متر)}$$

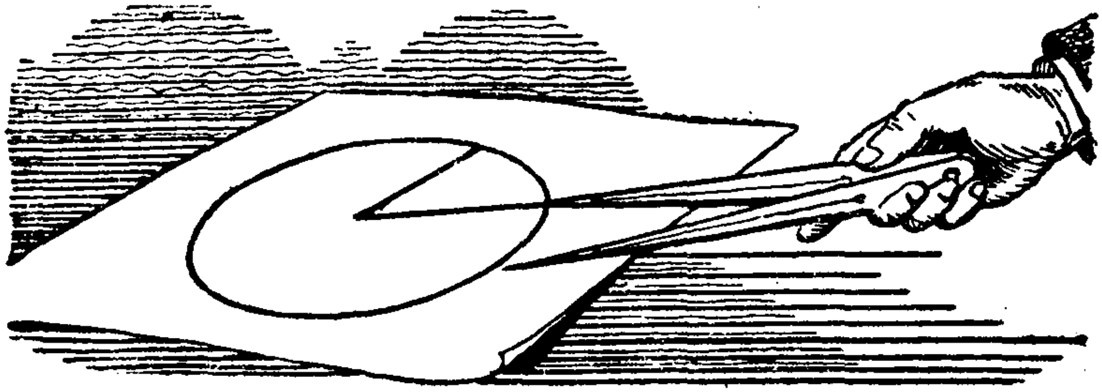
می‌بینید که کوه آب، ارتفاع قابل ملاحظه‌ای دارد !

حتی دریاچهٔ کوچکی که ۱۰ کیلومتر عرض داشته باشد، رأس بر آمدگی آب آن نسبت به خط راستی که دو ساحل را بهم می‌پیوندد ۲ مترارتفاع دارد ، یعنی بیشتر از قد انسان .

آیا نام «کوه» راکه به‌این برآمدگیهای آبی گذاشتیم ، صحیح است ؟ از لحاظ فیزیکی ، نه : زیرا این برآمدگی نسبت به سطح‌افقی نیست ، بلکه بر آن منطبق است . اشتباه است اگر گمان کنیم که خط

راست AB (شکل ۸۵) خط افقی است (به‌تصور شخصی که در نقطهٔ A ایستاده است)وقوسACB روی آن‌بر آمده است. در اینجاخط افقی ACB است (نه AB) که برسطح آب آرام منطبق‌است . خطADB نسبت به افق خمیدگی دارد : AD باتمایل به‌طرف «پائین» به‌زیرسطح زمین می‌رود ، تا نقطهٔ D که‌عمیق‌ترین‌نقطهٔ این‌خط‌است ، سپس دوباره «بطرف بالا» می‌آید و در نقطهٔ B از زیرزمین (یا آب) خارج می‌شود. اگر در امتداد خط راست AB لوله‌ای کارگذاشته باشیم ، گلوله‌ای که در ابتدای این‌لوله و در نقطهٔ A قرار دهیم ، در آنجا متوقف نمی‌ماند بلکه (با فرض صاف‌بودن جدار داخلی لوله) بطرف نقطهٔ D حرکت می‌کند و از آنجا ، با سرعتی که کسب کرده است ، تا نقطهٔ B جلو می‌رود ؛ سپس ،بدون‌اینکه در اینجا متوقف‌شود، بطرف D برمی‌گردد وخود رابه نقطهٔ A می‌رساند ، دوباره از آنجا برمی‌گردد و غیره . اگر گلوله و لوله را واقعاً صاف فرض کنیم (و از مقاومت هوا بگذریم) این حرکت نوسانی تا ابد ادامه خواهد داشت .

به‌این‌ترتیب ، اگر چه بنظر می‌رسد (شکل ۸۵) که ACB کوه است ، به معنای فیزیکی کلمه ، هموار است . تنها به مفهوم هندسی می‌توان گفت که در اینجا یك‌کوه آبی وجود دارد .



۵

مثلثات سیار

بدون رابطه و بدون جدول

محاسبهٔ سینوس

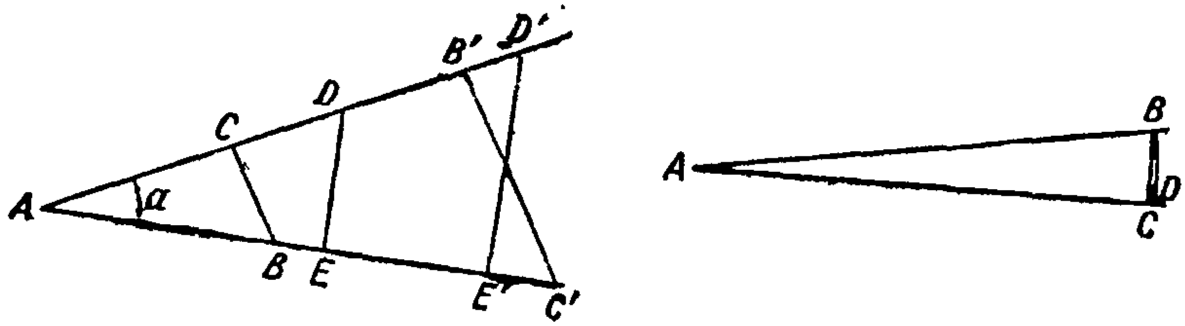
دراین فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان اضلاع یك مثلث را با تقریب ۲٪ و زوایای آنرا با تقریب ۱ درجه ، تنها با استفاده از مفهوم‌سینوس و بدون‌مراجعه به جدول و روابط مثلثاتی ،محاسبه نمود. این مثلثات ساده شده ، می‌تواند در گردشهای به‌خارج‌شهر ، وقتی که جدول بهمراه نداریم و روابط را هم فراموش کرده‌ایم ، مورداستفاده قرار گیرد . روبینسون هم در جزیرهٔ خودش می‌توانست بخوبی از چنین مثلثاتی استفاده کند .

به‌این ترتیب، فرض را براین می‌گیریم که شما مثلثات نمیدانید

و یا اینکه آنرا بکلی فراموش کرده‌اید. از آشنائی بایك مفهوم شروع می کنیم. سینوس یك زاویهٔ حاده چیست؟ اگر از نقطه‌ای واقع بریك ضلع این زاویه، عمودی بر ضلع دیگر آن فرود آوریم، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که بدست می آید، سینوس زاویهٔ حاده برابر است با نسبت ضلع روبری به این زاویه بر وتر. مثلا سینوس زاویهٔ α (شکل ۸۶) برابر است با $\frac{BC}{AB}$ یا $\frac{ED}{AD}$ یا $\frac{D'E'}{AD'}$ یا $\frac{B'C'}{AC'}$. با توجه به تشابه مثلثهائی که در اینجا بدست آمده است، به‌سادگی معلوم می‌شود که همهٔ این نسبتها با هم برابرند.

سینوس زوایای مختلف از ۱درجه‌تا ۹۰ درجه‌چه‌مقدار است؟ و چگونه می‌توان بدون دردست‌داشتن‌جدول آنها را دانست؟خیلی ساده است: باید خودمان جدولی برای سینوسها تشکیل دهیم. ما هم حالا همین کار را می کنیم.

اول به‌زوایائی می‌پردازیم که سینوس آنها را با کمك هندسه می‌دانیم. قبل از همه زاویهٔ ۹۰ درجه است که سینوس آن برابر است با ۱. سپس زاویهٔ ۴۵ درجه، که سینوس آن به سادگی وبا کمك قضیهٔ فیثاغورث بدست می آید: این مقدار برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یعنی ۰/۷۰۷ است.



۸۶. سینوس زاویهٔ حاده یعنی چه؟

بالاخره سینوس ۳۰ درجه را هم می‌دانیم زیرا در مثلث قائم‌الزاویه ، ضلع روبروی به زاویهٔ ۳۰ درجه برابر با نصف وتر است و بنابراین سینوس زاویهٔ ۳۰ درجه مساوی $\frac{۱}{۲}$ می‌شود .

به این‌ترتیب ، سینوس (و یا آنطور که راحت‌تر است *sin*)سه زاویه را می‌دانیم :

$$sin ۳۰^{\circ} = ۰/۵,$$
$$sin ۴۵^{\circ} = ۰/۷۰۷,$$
$$sin ۹۰^{\circ} = ۱$$

ولی ، این اطلاع برای حل مسائل هندسی کافی نیست و باید سینوس همهٔ زوایای بینابین را ، و لااقل درجه به‌درجه ، بدانیم .

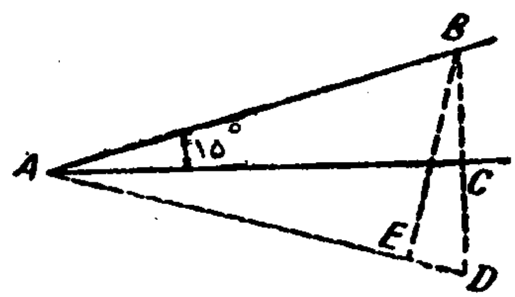
درمورد زوایای‌خیلی کوچك ، می‌توان برای محاسبهٔ سینوس بجای نسبت ضلع روبروبروتر ، نسبت قوس رابرشعاع حساب کرد ، بدون اینکه دچاراشتباه زیادی شده باشیم ، از شکل۸۶ (سمت راست) دیده می‌شود که اختلاف بین نسبت $\frac{BC}{AB}$ و نسبت $\frac{\widehat{BD}}{AB}$خیلی‌کم است‌و نسبت اخیر هم به‌سادگی محاسبه می‌شود . مثلا برای زاویهٔ ۱ درجه قوس $BD = \frac{۲\pi R}{۳۶۰}$ است ، کـه در آن $\pi = ۳/۱۴۱۵۹...$ است و بنابراین $sin ۱^{\circ}$ را می‌توان چنین دانست :

$$\frac{۲\pi R}{۳۶۰R} = \frac{\pi}{۱۸۰} = ۰/۰۱۷۵$$

وبهمین ترتیب می‌توان بدست آورد :

$$sin ۲^{\circ} = ۰/۰۳۴۹$$
$$sin ۳^{\circ} = ۰/۰۵۲۴$$
$$sin ۴^{\circ} = ۰/۰۶۹۸$$
$$sin ۵^{\circ} = ۰/۰۸۷۳$$

حالا باید به‌بینیم که چگونه می‌توان این جدول را ، بدون‌اینکه دچار خطای زیادی شویم ، ادامه‌دهیم. اگر سینوس ۳۰ درجه‌را باروش فوق محاسبه کنیم، عدد ۰/۵۲۴ را بجای ۰/۵۰۰ بدست می‌آوریم که دررقم دوم اعشار با هم اختلاف دارند وخطای حاصل برابر $\frac{۲۴}{۵۰۰}$ یعنی قریب ۵٪ خـواهد بود واین بیش از اندازه زیـاد است و هرچقدر که احتیاجی به‌دقت زیاد نداشته باشیم ، نمی‌تواند بکار رود .برای اینکه بتوانیم مرزی برای روش فوق پیداکنیم ، سینوس زاویهٔ ۱۵ درجه‌را بادقت محاسبه می‌کنیم . بـرای این منظور از روش زیر ، که از لحاظ ساختمان هندسی مشکل نیست،استفاده‌می‌کنیم(شکل۸۷). فرض کنید $\sin ۱۵^\circ = \frac{BC}{AB}$ باشد . BC را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم‌وسپس D را به A وصل می‌کنیم ، در اینصورت دومثلث مساوی ADC وABC و زاویهٔ BAD مساوی ۳۰ درجه بدست‌می‌آید . عمود BE رابر AD فرود می‌آوریم ؛ مثلث قائم‌الزاویهٔ BAE با زاویه ۳۰ درجه (زاویهٔ BAE)بدست می‌آید وبنابراین $BE = \frac{AB}{۲}$ می‌شود . سپس AE را از مثلث ABE طبق قضیهٔ فیثاغورث بدست می‌آوریم :



۸۷ . $\sin ۱۵^\circ$را چگونه محاسبه کنیم؛

$$AE^۲ = AB^۲ - \left(\frac{AB}{۲}\right)^۲ = \frac{۳}{۴}AB^۲,$$

$$AE = \frac{AB}{۲}\sqrt{۳} = ۰/۸۶۶AB.$$

و از آنجا داریم :

$$ED = AD - AE = AB - 0{,}866AB = 0{,}134AB$$

حالا درمثلث BED طول BD را محاسبه می‌کنیم :

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134AB)^2 = 0{,}268AB^2 ,$$

$$BD = \sqrt{0{,}268AB^2} = 0{,}518AB.$$

نصف BD یعنی BC مساوی $0{,}259AB$ می‌شود ،یعنی داریم:

$$\sin 15^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{259AB}{AB} = 0{,}259$$

اگربه سه رقم اعشارا کتفا کرده باشیم، این عدد ، همان عددی است که در جدولها برای $\sin 15^\circ$ ضبط شده است . حالا اگر مقدار $\sin 15^\circ$ رابا روشی که قبلا ذکر کرده‌ایم محاسبه کنیم به عدد $0{,}262$ می‌رسیم : با مقایسهٔ دوعدد

$$0{,}262 \text{ و } 0{,}259$$

می‌بینیم که‌اگرهردو رادردورقم اعشارگرد کنیم، بدست می‌آید:

$$0{,}26 \text{ و } 0{,}26$$

یعنی دو مقدار مساوی . خطای حاصل از تبدیل مقدار دقیق‌تر $0{,}259$ به $0{,}26$ مساوی $\frac{1}{1000}$ یعنی قریب $0{,}4\%$ است . این مقدار خطا برای محاسبات عادی مانعی ندارد و بنابراین می‌توانیم سینوس زوایای از ۱ تا ۱۵ درجه‌را طبق روش تقریبی که ذکر کردیم محاسبه کنیم. برای‌زوایای‌بین ۱۵ درجه و ۳۰ درجه می‌توانیم از تناسب‌استفاده کنیم. به‌این ترتیب‌استدلال‌می‌کنیم که اختلاف‌بین $\sin 30^\circ$ و $\sin 15^\circ$ برابراست با $0{,}50 - 0{,}26 = 0{,}24$. یعنی می‌توان فرض کرد که با اضافه شدن یك درجه به زاویه ، سینوس آن به‌اندازهٔ $\frac{1}{15}$ این اختلاف یعنی‌به‌اندازهٔ $\frac{0{,}24}{15} = 0{,}016$ زیاد می‌شود . در واقع چنین نیست و

سینوس یك زاویه متناسب باخود زاویه بزرگ نمی‌شود. اختلافی که در این مورد پیش می‌آید، تنها مربوط به‌رقم سوم اعشار است، که ما درمحاسبات تقریبی خود از آن می‌گذریم. به‌این‌ترتیب با اضافه‌کردن ۰/۰۱۶ به سینوس ۱۵ درجه، بطور متوالی، سینوس زوایای ۱۶، ۱۷، ۱۸ درجه وغیره را بدست می‌آوریم:

$$\sin 16^\circ = 0/26 + 0/016 = 0/28,$$
$$\sin 17^\circ = 0/26 + 0/032 = 0/29,$$
$$\sin 18^\circ = 0/26 + 0/048 = 0/31,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin 25^\circ = 0/26 + 0/16 = 0/42, \ldots$$

همهٔ این سینوسها برای دو رقم اول اعشار صحیح و بنابراین برای دقتی که ما لازم داریم کافی هستند: اختلاف این مقادیر، با مقادیر واقعی سینوسها، کمتر از نصف واحد رقم بعدی است.

بهمین‌ترتیب می‌توان سینوس زوایای بین ۳۰ درجه و۴۵ درجه را محاسبه نمود، داریم:

$$\sin 45 - \sin 30^\circ = 0/707 - 0/5 = 0/207$$

با تقسیم این اختلاف بر ۱۵ به عدد ۰/۰۱۴ می‌رسیم. اگر این‌مقدار رامرتباً به‌سینوس ۳۰ درجه اضافه کنیم، بدست می‌آید:

$$\sin 31^\circ = 0/5 + 0/014 = 0/51,$$
$$\sin 32^\circ = 0/5 + 0/028 = 0/53,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin 40^\circ = 0/5 + 0/14 = 0/64, \ldots$$

حالا باید به‌سینوس زوایای حادهٔ بزرگتر از۴۵ درجه بپردازیم. برای این منظور می‌توان از قضیهٔ فیثاغورث استفاده کرد. فرض کنیم که بخواهیم‌سینوس زاویهٔ ۵۳ درجه‌یعنی نسبت $\frac{BC}{AB}$ را محاسبه کنیم

(شکل ۸۸) . چون زاویهٔ $B=۳۷°$ است ، می‌توان سینوس آنرا به‌طریق قبل محاسبه کرد :

$$۰/۵+۷+۰/۰۱۴=۰/۶$$

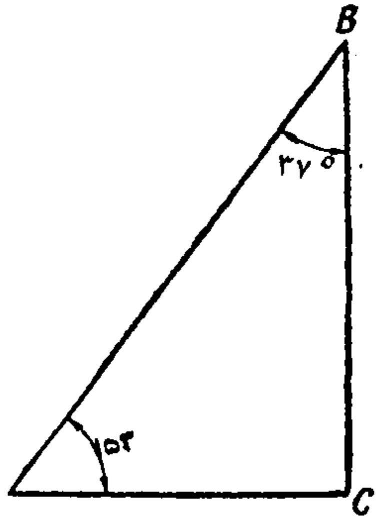
ازطرف‌دیگرمی‌دانیم: $\sin B=\frac{AC}{AB}$

بنابراین :

$$\frac{AC}{AB}=۰/۶ \Longrightarrow AC=۰/۶AB$$

یا دردست‌داشتن AC می‌توان به‌سادگی BC را محاسبه نمود. این پاره‌خط مساویست با :

$$\sqrt{AB^۲-AC^۲}=\sqrt{AB^۲-(۰/۶AB)^۲}=$$
$$=AB\sqrt{۱-۰/۳۶}=۰/۸AB\,.$$



۸۸ . برای محاسبهٔ سینوس‌زوایای بزرگتر از ۴۵ درجه .

محاسبه بطور کلی مشکل نیست تنها باید به‌طریقهٔ جذر گرفتن آشنا بود .

جذرگرفتن

روشی که دردورهٔ جبربرای محاسبهٔ جذریك عدد وجود دارد ، به‌سادگی فراموش‌می‌شود . ولی بدون آن هم می‌توان عمل کرد . در اینجا از یك روش قدیمی مربوط به‌جذرگرفتن یاد می کنیم .

فرض کنید که‌بخواهیم $\sqrt{۱۳}$ را محاسبه‌کنیم . این‌عدد بین دوعدد ۳ و ۴ واقع است و بنابراین از ۳ بیشتر است . اضافهٔ آنرا نسبت به‌۳ مساوی x می‌گیریم ، داریم :

$$\sqrt{۱۳}=۳+x \Longrightarrow ۱۳=۹+۶x+x^۲$$

مجذورعددکوچکترازواحد x ، کسرکوچکی است و بنابراین

در تقریب اول می‌توان از آن صرفنظر کرد ، بدست می‌آید :

$$۱۳ = ۹ + ۶x \Longrightarrow ۶x = ۴ \Longrightarrow x = \frac{۲}{۳} = ۰/۶۷$$

یعنی مقدار تقریبی $\sqrt{۱۳}$ مساوی ۰/۶۷ است . اگر بخواهیم مقدارجذر را دقیق‌تر بدست آوریم ،می‌نویسیم :

$$\sqrt{۱۳} = ۳\frac{۲}{۳} + y ,$$

که در آن مقدار y کسر کوچکی‌است که می‌تواند مثبت یا منفی باشد . از آنجا بدست می‌آید :

$$۱۳ = \frac{۱۲۱}{۹} + \frac{۲۲}{۳}y + y^۲$$

باحذف $y^۲$ ، مقدار y مساوی $-\frac{۲}{۳۳} = -۰/۰۶$ مـی‌شود و بنابراین در تقریب‌دوم داریم :

$$\sqrt{۱۳} = ۳/۶۷ - ۰/۰۶ = ۳/۶۱$$

تقریب سوم را هم بهمین طریق می‌توان بدست آورد و ... واگر $\sqrt{۱۳}$ را به‌طریقی‌که برای جذرگرفتن درکتابهای جبر دیده‌ایم ، محاسبه کنیم ، حاصل آن تا ۰/۰۱ تقریب مساوی ۳/۶۱خواهد شد .

محاسبهٔ زاویه از روی سینوس آن

به‌این ترتیب ما می‌توانیم سینوس هر زاویهٔ دلخواه را از صفر تا ۹۰ درجه تا دو رقم اعشار محاسبه کنیم . دیگر وجود یك جدول آماده برای ما ضرورت ندارد و هروقت که لازم بدانیم ، می‌توانیم آنرا درست کنیم .

ولی برای حل‌مسائل‌مربوط به مثلثات ، باید امکان عمل عکس

را هم‌داشته باشیم، یعنی با در دست داشتن سینوس یك زاویه ، بتوانیم خــود زاویــه را محاسبه کنیم ، این عمل مشکل نیست . فرض کنید بخواهیم زاویه‌ای را بدست آوریم که سینوس آن مساوی ۰٫۳۸ باشد . چون سینوس این زاویه از ۰٫۵ کوچکتراست ، خود زاویه کوچکتر از ۳۰ درجه خواهد بود ، ولی این زاویه از۱۵ درجه بزرگتر است ، زیرا $\sin 15^\circ$ ، همانطور که می‌دانیم، مساوی ۰٫۲۶ است. برای اینکه این زاویه را ، کــه در فاصلهٔ ۱۵ درجه و ۳۰ درجه واقع است ، پیدا کنیم، به‌همان روش تناسب متوسل می‌شویم :

$$۰/۳۸ - ۰/۲۶ = ۰/۱۲,$$

$$\frac{۰/۱۲}{۰/۰۱۶} = ۷/۵^\circ,$$

$$۱۵^\circ + ۷/۵^\circ = ۲۲/۵^\circ,$$

بنابراین زاویه مورد نظر تقریباً مساوی ۲۲٫۵ درجه است .

مثال دیگر : زاویه‌ای را پیدا کنید که سینوس آن مساوی ۰٫۶۲ باشد :

$$۰/۶۲ - ۰/۵۰ = ۰/۱۲,$$

$$\frac{۰/۱۲}{۰/۰۱۴} = ۸/۶^\circ,$$

$$۳۰^\circ + ۸/۶^\circ = ۳۸/۶^\circ$$

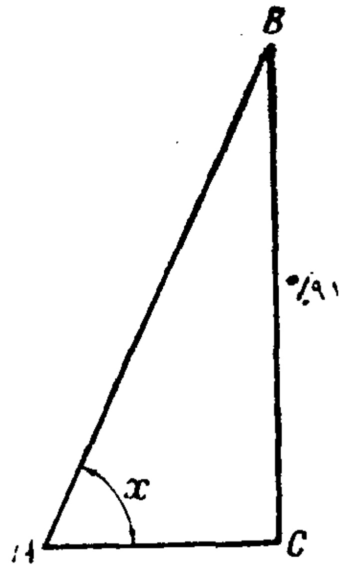
یعنی زاویهٔ مزبور به‌تقریب مساوی $۳۸/۶^\circ$ ($۳۸^\circ ۳۶'$) می‌باشد .

وبالاخره مثال سوم: زاویه‌ای راپیدا کنید که سینوس آن مساوی ۰٫۹۱ باشد .

چون سینوس مفروض بین ۰٫۷۱ و ۱ است ، زاویهٔ مجهول در فاصلهٔ ۴۵ درجه و ۹۰ درجه خواهد بود. در شکل ۸۹، اگر $BA = ۱$ باشد ، BC سینوس زاویهٔ A است . با دردست داشتن BC می‌توان

به‌سادگی سینوس زاویهٔ Bرابدست آورد :

$$AC^۲=۱-BC^۲=۱-۰/۹۱^۲=$$
$$=۱-۰/۸۳=۰/۱۷$$
$$AC=\sqrt{۰/۱۷}=۰/۴۲$$



۸۹ . محاسبهٔ زاویهٔ حاده وقتی‌که سینوس آن معلوم باشد .

حالا به محاسبهٔ مقدار زاویهٔ B ، که سینوس آن مساوی ۰/۴۲ است ، می‌پردازیم و از آنجا می‌توانیم به‌سادگی زاویهٔ A را که مساوی $۹۰^\circ - A$ مـی‌باشد ، حساب کنیم . چون ۰/۴۲ بین دو عدد ۰/۲۶ و ۰/۵ قرار دارد ، زاویهٔ B بین ۱۵ و ۳۰ درجه خواهد بود و به‌این ترتیب بدست می‌آید :

$$۰/۴۲-۰/۲۶=۰/۱۶,$$
$$\frac{۰/۱۶}{۰/۰۱۶}=۱۰^\circ$$
$$B=۱۵^\circ+۱۰^\circ=۲۵^\circ$$

وبنابراین زاویهٔ A مساوی $۹۰^\circ - B$ یعنی۶۵(۲۵ — ۹۰) درجه خواهد بود .

حالا دیگر ماکاملا آماده‌ایم که مسائل مثلثات را به‌طور تقریبی حل‌کنیم ، زیرا می‌توانیم با دردست داشتن زاویه ، سینوس آن و برعکس با دردست داشتن سینوس یك زاویه ، خود زاویه‌را باتقریبی که برای محاسبات معمولی لازم است ، محاسبه‌کنیم .

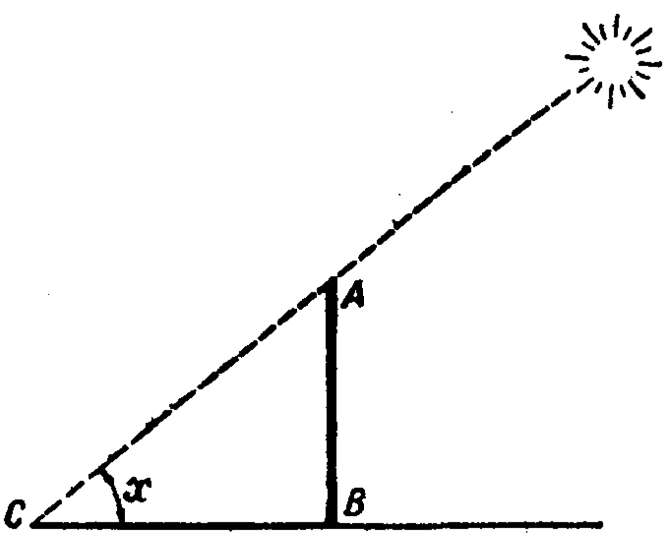
ولی آیا برای این منظور تنها سینوس کافی است ؟ آیا واقعاً بقیهٔ توابع‌مثلثاتی مثل کسینوس ، تانژانت وغیره لازم نیست ؟ با چند نمونه نشان خواهیم داد که برای مثلثات ساده شدهٔ ما همین سینوس به‌تنهائی کفایت می‌کند .

ارتفاع خورشید

مسئله

سایهٔ BC (شکل ۹۰) ازچوب عمودی AB به‌ارتفاع ۴/۲ متر ، مساوی ۶/۵ متر شده است . در این لحظه ارتفاع خورشید نسبت به سطح افق ، یعنی مقدار زاویهٔ C ، چقدر است ؟

حل



۹۰ . تعیین ارتفاع خورشید نسبت به‌افق

به‌سادگی‌معلوم می‌شود که سینوس زاویهٔ C برابر است بانسبت $\frac{AB}{AC}$. ازطرف دیگرداریم :

$$AC=\sqrt{AB^{۲}+BC^{۲}}=\sqrt{۴/۲^{۲}+۶/۵^{۲}}==۷/۷۴$$

و بنابراین سینوس مورد نظر برابراست با $۰/۵۵=\frac{۴/۲}{۶/۵}$. اگر به‌طریقی‌که قبلایاد کردیم . زاویهٔ C راجستجو کنیم ، جواب ۳۳ درجه بدست می‌آید . ارتفاع خورشید با تقریب ۰/۵ درجه مساوی ۳۳درجه است .

فاصلهٔ تا جزیره

مسئله

در حالیکه با دوستان خود در ساحل رودخانه‌ای قدم می‌زنید ،

متوجه جزیرهٔ A (شکل ۹۱) می‌شوید و می‌خواهید فاصلهٔ آنرا تا نقطهٔ B درساحل پیدا کنید . برای این منظور با کمك قطب نما اندازهٔ زاویهٔ ABN (زاویهٔ بین امتداد شمالی جنوبی ‑SN‑ با امتداد AB) راتعیین می کنید . سپس فاصلهٔ BC و اندازهٔ زاویهٔ NBC (بین امتداد BC و SN) رابدست می آورید . سپس همین عمل را درنقطهٔ C برای خط CA انجام‌می‌دهید. فرض‌می کنیم‌مقادیر زیررا بدست‌آورده‌باشید :

امتداد AB باجهت‌شمال SN به‌اندازهٔ ۵۲ درجه به‌طرف شرق متمایل است .

امتداد BC نسبت‌به‌جهت‌شمال SN به‌اندازهٔ ۱۱۰ درجه‌به‌طرف شرق تمایل دارد .

امتداد CA نسبت به‌جهت شمال SN به‌اندازهٔ۲۷درجه به‌طرف غرب‌تمایل دارد .

طول BC مساوی ۱۸۷ متر است .

با این معلومات چگونه می‌توان طول BA را محاسبه کرد ؟

حل

درمثلث ABC طول ضلع BC معلوم است ، ضمناً داریم :

$$ABC = ۱۱۰^\circ - ۵۲^\circ = ۵۸^\circ;$$

$$ACB = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ - ۲۷^\circ = ۴۳^\circ$$

در این مثلث (شکل ۹۱‑سمت راست) . ارتفاع BD را رسم می کنیم . داریم

$$\sin C = \sin ۴۳^\circ = \frac{BD}{۱۸۷}$$

اگر $\sin ۴۳^\circ$ را با روشی که می‌دانیم محاسبه کنیم ، عدد ۰/۶۸

را بدست می‌آوریم ، یعنی :

$$BD = ۱۸۷ \times ۰/۶۸ = ۱۲۷$$

۹۱ فاصلهٔ تا جزیره را چگونه محاسبه کنیم ؟

حالا در مثلث ABD ، ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه یعنی BD ، زاویهٔ $A = ۱۸۰^\circ - (۵۸^\circ + ۴۳^\circ) = ۷۹^\circ$ و زاویهٔ ABD که مساوی $۹۰^\circ - ۷۹^\circ = ۱۱^\circ$ می‌باشد ، معلوم است . سینوس ۱۱ درجه را هم می‌توانیم محاسبه کنیم : ۰/۱۹ .بنابراین $\frac{AD}{AB} = ۰/۱۹$ مـی‌شود . از طرف دیگر ، طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم :

$$AB^۲ = BD^۲ + AD^۲$$

اگر ۰/۱۹AB را بجای AD قرار دهیم و BD را مساوی ۱۲۷ بگیریم ، داریم :

$$AB^۲ = ۱۲۷^۲ + (۰/۱۹AB)^۲,$$

و از آنجا $AB \# ۱۲۹$ بدست می‌آید .

به‌این ترتیب فاصلهٔ مجهول تا جزیره تقریباً مساوی ۱۲۹ متر است .

اگر به‌فاصلهٔ AC هم احتیاج باشد ، می‌توان آنرا هم به‌سادگی

محاسبه کرد .

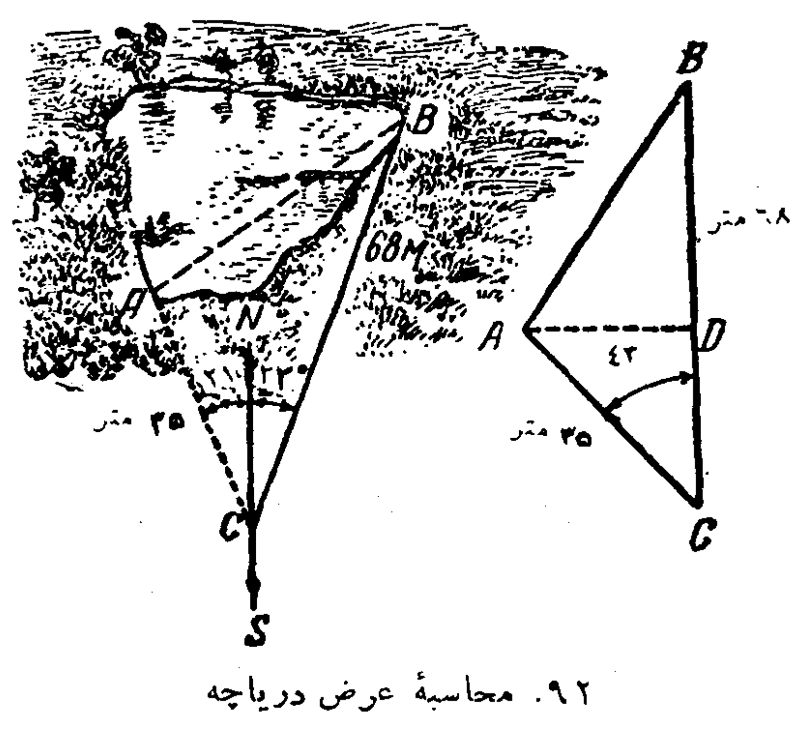
عرض دریاچه

مسئله

برای تعیین AB ، عرض دریاچه (شکل ۹۲)، با کمك قطب‌نما زاویهٔ انحراف CA را به‌طرف غرب مساوی ۲۱ درجه و انحراف CB را به‌طرف شرق مساوی ۲۲ درجه پیدا کرده‌اید . طول CB مساوی ۶۸ متر وطول CA مساوی ۳۵ مترشده است . با این مفروضات عرض دریاچه را بدست آورید .

حل

در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ ۴۳ درجه و طول اضلاعی که این زاویه را ساخته‌اند، ۶۸ متر و ۳۵ متر ، می‌دانیم. ارتفاع AD را رسم



۹۲. محاسبهٔ عرض دریاچه

می کنیم (شکل ۹۲ــ سمت راست) ؛ داریم : $\sin 43^\circ = \frac{AD}{AC}$. حــالا

$\sin 43^\circ$ را مستقیماً محاسبه‌می کنیم،می‌شود ۰/۶۸. یعنی $0/68 = \frac{AD}{AC}$ می‌شود و داریم :

$$AD = 0/68 \times 35 = 24$$

سپس CD را محاسبه می کنیم :

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649 \Longrightarrow CD = 25/5$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25/5 = 42/5$$

حالا در مثلث ABD داریم :

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 = 24^2 + 42/5^2 = 2380;$$

$$AB \# 49$$

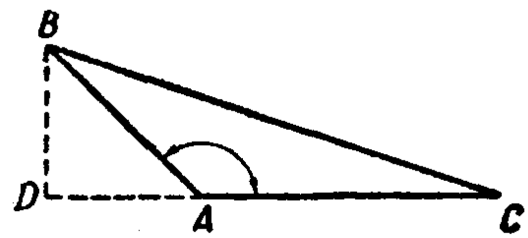
به این ترتیب عرض مجهول دریاچه تقریباً مساوی ۴۹متراست .

اگر در مثلث ABC مقدار دو زاویهٔ دیگر هم مورد احتیاج باشد ، پس از محاسبهٔ $AB = 49$ ، چنین عمل می کنیم :

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} = 0/49 \Longrightarrow B = 29^\circ$$

زاویهٔ سوم A را می‌توان با توجه به اینکه مجموع زوایای‌یك مثلث مسای ۱۸۰ درجه است ، محاسبه نمود :

$$A = 180^\circ - (29^\circ + 43^\circ) = 108^\circ$$



۹۳. حل مثلث منفرجه‌الزاویه

ممکن است حالتی پیش آید ، که وقتی دو ضلع و زاویهٔ بین از مثلثی معلوم است ، زاویهٔ معلوم منفرجه باشد ، مثلا فرض می کنیم در مثلث ABC (شکل ۹۳) ، زاویهٔ منفرجهٔ A و دو ضلع مجاور آن AB و AC معلوم باشد، برای محاسبهٔ بقیهٔ اجزاء مثلث چنین عمل می کنیم : ارتفاع BD از مثلث رارسم می کنیم وBD و AD راازمثلث BDA بدست می آوریم

سپس با در دست داشتن $DA+AC$ ، طول BC و از آنجا $\sin C$ را ازروی نسبت $\frac{BD}{BC}$ محاسبه می کنیم .

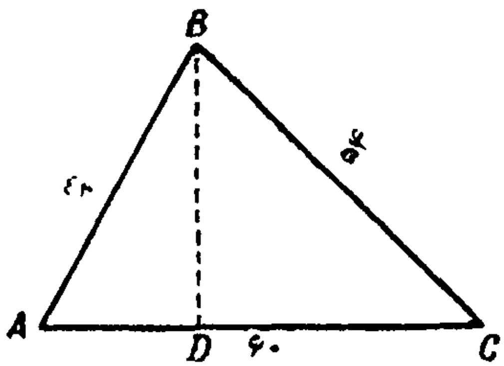
قطعه زمینی به شکل مثلث

مسئله

با قدمهای خود ، اضلاع یك قطعه زمین مثلث شکل را اندازه گرفته‌ایم ، بترتیب ۴۳ ، ۶۰ و ۵۴ قدم شده است . زوایای این مثلث را بدست آورید .

حل

این بغرنج‌ترین حالت‌حل مثلث است: معلوم بودن سه‌ضلع آن . ولی حتی در این مورد هم بجز سینوس ، به رابطهٔ دیگری احتیاج نداریم .



۹۴. زوایای این‌مثلث را پیدا کنید : ۱) با کمك‌محاسبه . ۲) با کمك‌نقاله

ارتفاع BD (شکل ۹۴) ، وارد بر ضلع بزرگتر را رسم می کنیم ، داریم :

$$BD^2=43^2-AD^2 \;;\; BD^2=54^2-DC^2$$

و از آنجا :

$$43^2-AD^2=54^2-DC^2 \Longrightarrow DC^2-AD^2=54^2-43^2=1070$$

ازطرف دیگر داریم :

$$DC^2-AD^2=(DC+AD)(DC-AD)=60(DC-AD)$$

وبنابراین خواهیم داشت :

$$۶۰(DC-AD)=۱۰۷۰ \Longrightarrow DC-AD=۱۷/۸$$

و از دو معادلهٔ زیر ، اندازه DC بدست می‌آید :

$$\begin{cases} DC-AD=۱۷/۸ \\ DC+AD=۶۰ \end{cases} \Longrightarrow DC=۳۸/۹$$

حالا ارتفاع BD به سادگی محاسبه می‌شود :

$$BD=\sqrt{۵۴^۲-۳۸/۹^۲}=۳۷/۴$$

واز آنجا بدست می‌آید :

$$\sin A=\frac{BD}{AB}=\frac{۳۷/۴}{۴۳}=۰/۸۷ \Longrightarrow A \# ۶۰^\circ$$

$$\sin C=\frac{BD}{BC}=\frac{۳۷/۴}{۵۴}=۰/۶۹ \Longrightarrow C \# ۴۴^\circ$$

و زاویهٔ سوم :

$$B=۱۸۰^\circ-(A+C)=۷۶^\circ$$

اگر دراینحالت زوایای مثلث را باکمك جدول وامکانات دیگر مثلثات، بدست می‌آوردیم ؛ البته زوایا دقیق‌تروبرحسب درجه و دقیقه بیان می‌شد . ولی‌آن جوابها هم با اشتباهاتی همراه است ، زیرا وقتی که اضلاع مثلث را باکمك قدم اندازه می‌گیریم ، اشتباهی که کمتر از ۲ تا ۳٪ نیست پیدا می‌کنیم . بنابراین اگر نخواهیم خودمان را گول بزنیم ، باید مقادیری راکه برای زوایا بدست آورده‌ایم به اصطلاح «گرد»کنیم و با تقریب یك درجه بنویسیم . ولی در اینصورت بهمان جوابهائی می‌رسیم که ما در اینجا با روش ساده خود به آن رسیدیم . استفاده از مثلثات ساده شدهٔ ما ، در اینجا عملی‌تر وراحت‌تر است .

تعیین اندازهٔ یك زاویه ، بدون هر اندازه‌گیری

برای اندازه‌گیری یك زاویه در روی زمین تنها به قطب‌نما ویا حتی انگشتان خود و قوطی کبریت احتیاج داریم . ولی ممکن است که بخواهیم اندازهٔ زاویه‌ای راکه روی کاغذ ویا نقشه رسم شده است. بدست آوریم .

واضح است که اگر نقاله در دسترس باشد ، مسئله به سادگی حل می‌شود . ولی اگر نقاله‌ای موجود نباشد ؟ در اینحالت هم، کسی که هندسه می‌داند ، نباید ناامید شود و دست روی دست بگذارد .

به‌بینیم مسئلهٔ زیر را چگونه حل کنیم ؟

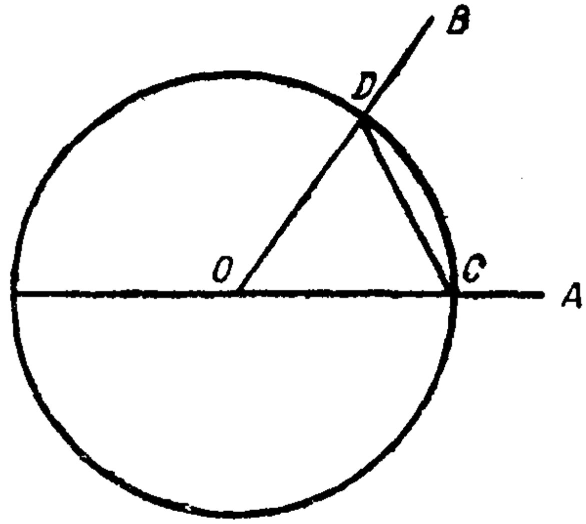
مسئله

زاویه AOB (شکل۹۵) کوچکتراز ۱۸۰ درجه داده‌شده است. می‌خواهیم مقدار آنرا بدون اندازه‌گیری معین کنیم .

حل

می‌توانیم از نقطه‌ای واقع برضلع BO عمودی بر ضلع AO فرود آوریم و در مثلث قائم الزاویه‌ای که بدست می‌آید ، اضلاع مجاور به‌زاویهٔ قائمه‌و وتررا اندازه بگیریم، باکمك آنها سینوس زاویه وسپس از روی سینوس ، مقدار خود زاویه را پیدا کنیم . ولی این راه حل مسئله ، با شرایطی که‌داشتیم (بدون هیچگونه اندازه‌گیری) متناقض است .

به مرکز O و به‌شعاع دلخواه یك دایرهٔ کامل رسم می کنیم. C و D ، نقاط تلاقی این دایره را با اضلاع زاویه، بهم‌وصل می کنیم. حالا از نقطهٔ C با کمك پرگار ، به‌اندازهٔ وتر CD بطور متوالی ودریك جهت روی دایره جدا می کنیم ، تا زمانی که سوزن پرگار دوباره روی C قرارگیرد.



۹۵. اندازهٔ زاویهٔ AOB را چگونه می‌توان تنها به کمك پرگار بدست آورد؟

باید این حساب را نگه داشته باشیم که چند بار دایره را دور زده‌ایم وچند بار وتر CD را منتقل کرده‌ایم.

فرض می کنیم n مرتبه دایره رادورزده باشیم و در این مدت S مرتبه وتر CD را پشت سرهم جدا کرده باشیم. در اینصورت مقدار زاویهٔ مجهول چنین است :

$$\widehat{AOB} = \frac{۳۶۰^\circ n}{S}$$

درحقیت ، اگر فرض کنیم ، زاویهٔ مفروض x درجه باشد ، اگر وترCD به‌اندازهٔ S مرتبه جابجا شده باشد ، تمام‌مسیرطی شده به‌وسیلهٔ پرگار مساوی $x^\circ.S$ می‌باشد ، از طرف دیگر چون n مرتبه دور دایره را طی کرده‌ایم ، همین مسیر مساوی $۳۶۰^\circ n$ می‌شود و بنابراین داریم :

$$x^\circ . S = ۳۶۰^\circ n$$

واز آنجا :

$$x^\circ = \frac{۳۶۰^\circ n}{S}$$

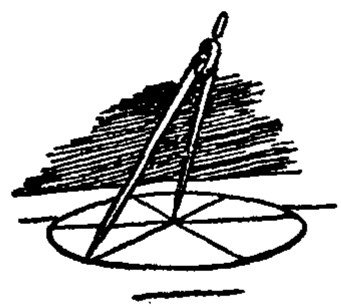
برای زاویه‌ای کـه در شکل ۹۵ رسم شده است ، $n=۳$ و

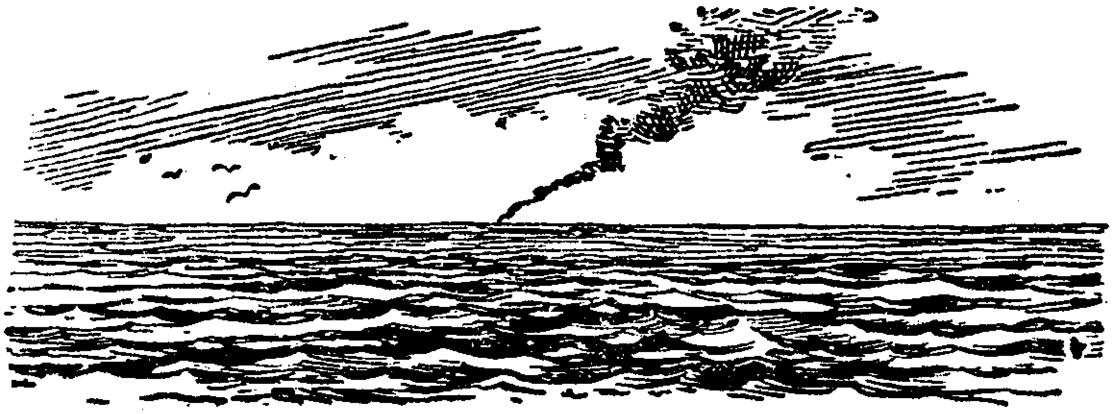
۲۰ = S است (تحقیق کنید !) و بنابراین زاویهٔ AOB مساوی ۵۴ درجه می‌شود .

اگر پرگار در دسترس نباشد ، می‌توان قطعه‌ای چوب کبریت و یا نوار کوچك کاغذ مساوی وتر CD جدا کرد و نقش پرگار را به‌آن سپرد .

مسئله

با روشی که در مسئلهٔ قبل ذکر کردیم ، اندازهٔ زوایای مثلث شکل ۹۴ را بدست آورید .





٦

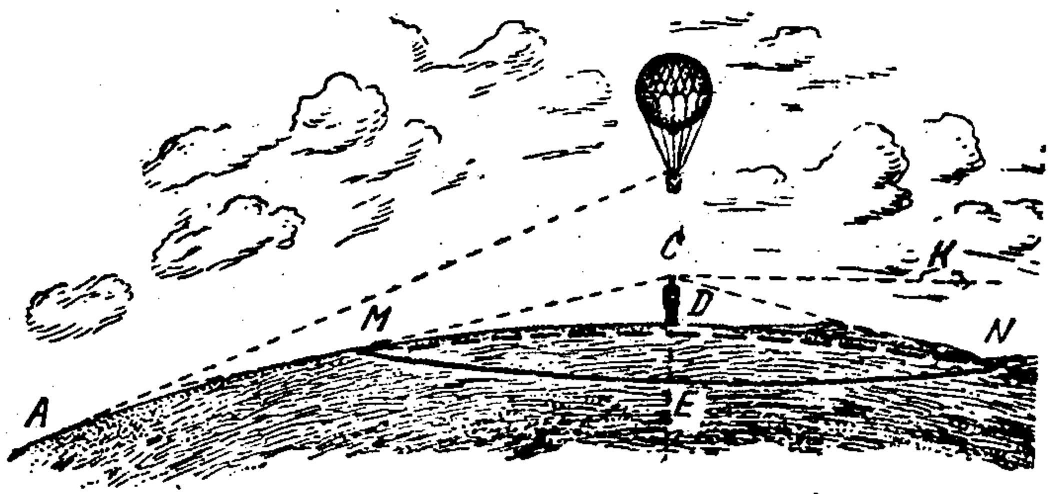
زمین و آسمان

کجا بهم می‌رسند ؟

افق

وقتی‌که در یك دشت هموار ، به‌اطراف نگاه کنید ، خود را درمرکز دایره‌ای می‌بینید که محیط آن قسمت مرئی زمین را نسبت به شما محدود می‌کند . این افق است . به‌خط افق نمی‌توان دسترسی پیداکرد : وقتی که بطرف آن حرکت کنید ، از شما دور می‌شود . ولی با وجودی‌که غیرقابل دسترس است ، در واقع وجود دارد و یك خطای چشم ، یا یك سراب ، نیست . برای هرنقطه‌ای‌که ناظر ایستاده باشد ، حد معینی از سطح زمین دیده می‌شود و فاصلهٔ تا این حد را هم می‌توان محاسبه نمود . برای اینکه بتوانید ارتباط هندسه را با افق

پیش خود مجسم کنید ، به‌شکل ۹۶ ، که قسمتی از کرهٔ زمین را نشان می‌دهد ، مراجعه کنید . در نقطهٔ C چشم ناظر قرار گرفته است که به فاصلهٔ CD ازسطح زمین‌است. چنین‌ناظری، اگردردشت هموار باشد، تا چه فاصله‌ای از خود را می‌بینید ؟ واضح است که تا نقاط M و N : جائی که شعاع دید برسطح زمین مماس شده است : نقاط دورتر زمین درزیر شعاع دید چشم قرار گرفته‌اند . این نقاط M و N (و بقیهٔ نقاطی که روی محیط دایرهٔ MEN قرار گرفته‌اند) حد دید سطح زمین را معین می کنند ، یعنی خط افق را تشکیل می‌دهند . بنظر می‌رسد که در طول این خط آسمان به‌زمین تکیه داده است ، زیرا در این نقاط آسمان و اشیاء زمینی باهم ودریکجا دیده می‌شوند .



۹۶. افق

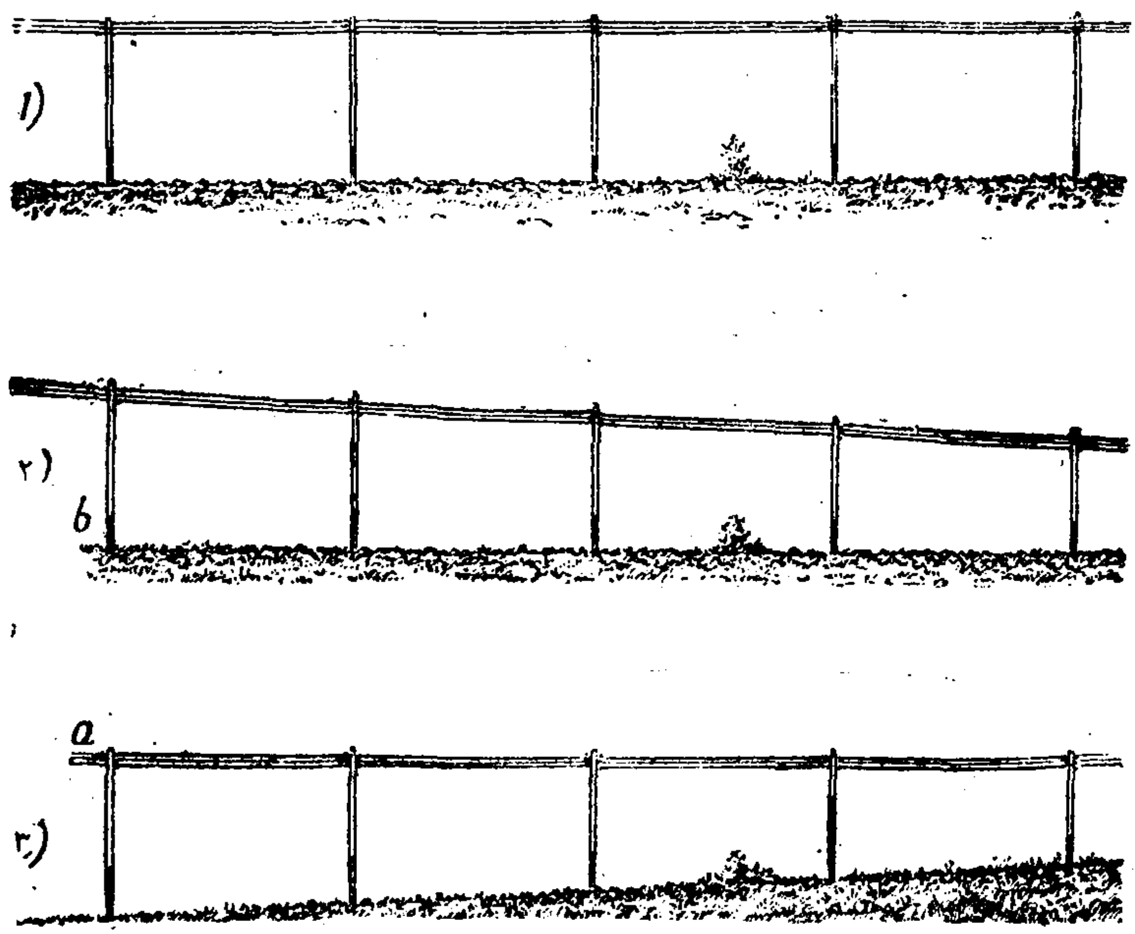
ممکن است بنظر برسد که شکل ۹۶ ، حقیقت کامل را منعکس نمی کند : زیرا خط افق در همان سطح چشم ناظر واقع شده است ، درحالیکه روی شکل ، دایرهٔ افق بطور روشن در زیر ناظر قرارگرفته است . درحقیقت همیشه بنظر می‌رسد که خط افق با چشم ما دریك سطح قرار دارد وحتی وقتیکه به نقطهٔ مرتفع‌تر برویم ، خط افق همراه ما بالا می‌آید . ولی این خطای باصره است و در واقع ، خط افق

همیشه زیر چشم ، همانطور که درشکل ۹۶ دیده می‌شود ، قراردارد. ولی زاویه‌ای کـه خطوط مستقیم CN و CM با خط راست CK- عمود برشعاع زمین درنقطهٔ C -تشکیل می‌دهند (این زاویه را«انخفاض افق»گویند) ، همیشه کوچك است واندازه‌گیری آن بدون وسائل لازم، ممکن نیست .

به‌چگونگی جالب دیگری هم توجه می‌کنیم . گفتیم که با بالا رفتن ناظر از سطح زمین ، مثلا بوسیلهٔ هواپیما یا بالن ، خط افق در سطح چشم بنظر می‌رسد ، یعنی مثل اینکه همراه ناظر بالا می‌آید . اگر به‌اندازهٔکافی اوج گرفته شود ، چنین بنظر می‌رسد که زمین پایین‌تر ازخط افق قرار گرفته است ، به عبارت دیگر زمین به شکل کاسه‌ای درمی‌آید که لبهٔ آن همان خط افق است . این مطلب را ادگار آلن‌پو در نوشتهٔ پرطنز خود بنام «ماجراهای هانس» خیلی خوب تشریح کرده است :

«علاوه‌براین (هوانورد قهرمان نقل می‌کند) بنظرم می‌رسید که سطح کـرهٔ زمین فرو رفته است . در حالیکه انتظار مـن این بود که ضمن بالارفتن ، کـرهٔ زمین را ، به شکل واقعی خود ، یعنی بر آمده، به‌بینم : من فقط از راه تفکر توانستم این پدیده را برای خودم حل کنم . خط قائمی که از بالن من به‌زمین می‌رسید ، یك ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای بود که قاعدهٔ آن عبارت‌بود از خطی که پای این عمود را به‌افق وصل می‌کرد و وتر این مثلث ، خطی که از افق به بالن من می‌رسید. ولی ارتفاع من نسبت به منطقهٔ دید خیلی کم بود ؛ به‌عبارت دیگر قاعده و وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ مذکور ، نسبت به‌ضلع قائم آن ، آنقدر بزرگ بودند که می‌شد آنها را تقریباً موازی یکدیگر فرض کرد . بنابراین هر نقطه‌ای که زیر بالن قرار گرفته باشد ، پایین‌تر از

سطح افق بنظر می‌رسد. پدیدهٔ گود بودن از اینجا ناشی می‌شود. و این وضع تا زمانی وجود دارد که قاعده و وتر مثلث موازی بنظر برسند».

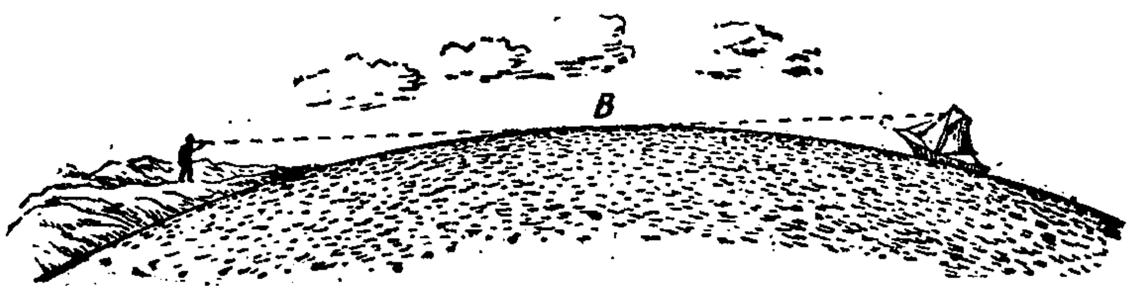


۹۷. وقتی که به ردیف تیرهای تلگراف نگاه می‌کنیم: آنها را چگونه می‌بینیم؟

برای تکمیل این توضیح به‌مثال زیر می‌پردازیم. یك ردیف تیر تلگراف، که روی یك خط راست قرارگرفته‌اند، در نظر بگیرید (شکل ۹۷). برای چشمی که درنقطهٔ b، در سطح پایه‌های تیرها، قرار گرفته باشد، به‌وضع شکل ۲ دیده می‌شود. ولی برای چشمی که در نقطهٔ a در امتداد رأس تیرها نگاه کند به وضع شکل ۳ بنظر می‌آید یعنی بنظر می‌رسد که زمین از سطح افق بالاتر آمده است.

کشتی در افق

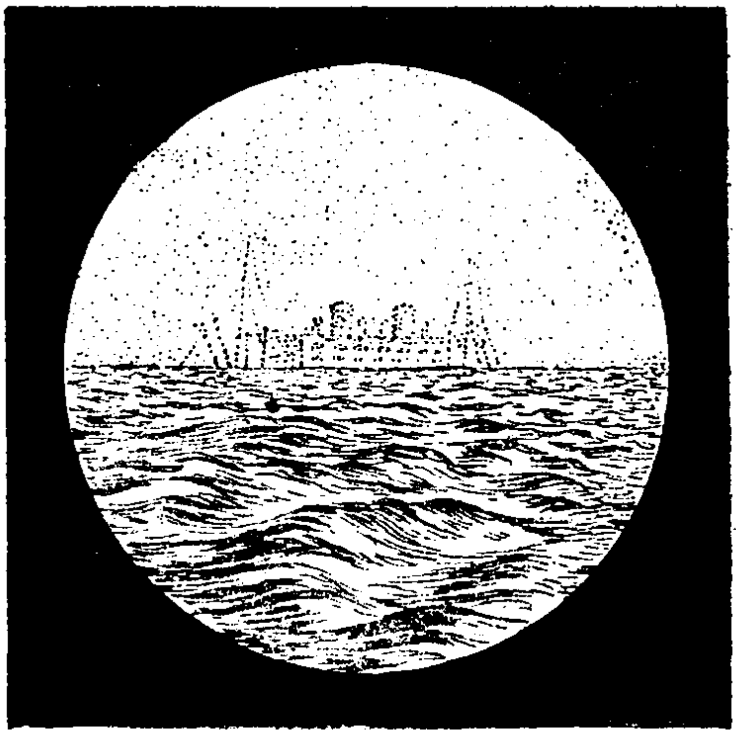
وقتی که از ساحل دریا و یا دریاچهٔ بزرگ به کشتی که از زیر افق ظاهر می‌شود ، نگاه کنیم ؛ کشتی را در همان نقطه‌ای که در واقع هست نمی‌بینیم (شکل ۹۸) ، بلکه خیلی نزدیك به نقطهٔ B (جائی که دید ما بر دریای محدب مماس است) بنظر می‌رسد ، برای ناظری که بدون چشم مسلح نگاه می کند ، خیلی دشوار است که خود را از این تصور غلط نجات دهد ، که کشتی در نقطهٔ B قرار گرفته است و از افق هم دور نیست (با آنچه که در فصل چهارم گفتیم ـ اثر تپه یا بلندی روی قضاوت ما دربارهٔ فاصله ـ مقایسه کنید) .

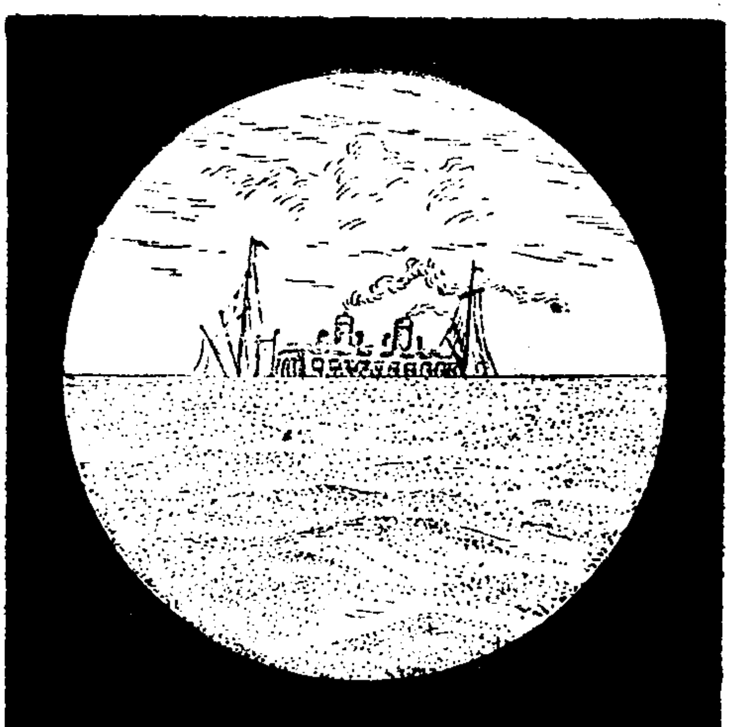


۹۸. کشتی زیر افق

ولی با کمك دوربین این اختلاف فاصلهٔ کشتی ، خیلی روشن‌تر درك می‌شود . روشنی اشیاء نزدیك و دوردردوربین یکنواخت نیست . اگر دوربین برای دور تنظیم شده باشد ، اشیاءِ نزدیك پهن شده بنظر می‌آیند و برعکس ، اگر برای اشیاءِ نزدیك تنظیم شده باشد ، دور را مه‌آلود و مبهم نشان می‌دهد . بنابراین اگر دوربین را بطرف آبی که در افق است منظم کنیم ، بطوریکه سطح آبرا روشن نشان بدهد ، اگر کشتی با خطوطی مبهم و پخش شده دیده شود ، به‌این معنی است که نسبت به ناظر در فاصلهٔ دورتری قرار گرفته است (شکل ۹۹ ـ بالا) و برعکس اگر در اینحال دوربین را چنان تنظیم کنیم که کشتی را

(درحالیکه نیمی از آن پشت افق مخفی شده است) به روشنی به‌بینیم ، متوجه می‌شویم که سطح آب افق ، روشنی قبلی خود را از دست می‌دهد، مثل اینکه درابر فرورفته است (شکل ۹۹ ـ پائین) .





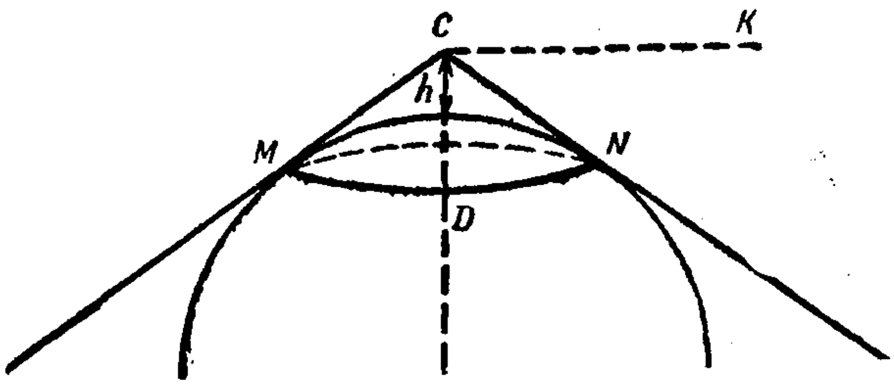
۹۹. کشتی‌که در افق ظاهر شده ، ازپشت دوربین

دوری افق

خط افق درچه فاصله‌ای‌از ناظر قرار گرفته‌است ، به‌عبارت دیگر : شعاع دایره‌ای ازسطح هموارزمین که ما خود را درمرکز آن می‌بینیم ، چقدر است ؟ بادردست داشتن ارتفاع ناظر ، چگونه فاصلهٔ او را تا افق می‌توان محاسبه کرد ؟

مسئله‌منجر به محاسبهٔ طول‌قطعه خط CN (شکل ۱۰۰) می‌شود ، که امتداد خطی است که ازچشم‌ناظر برسطح‌زمین مماس شده‌است .

همانطور که ازهندسه می‌دانیم ، مجذور این مماس برابراست با حاصلضرب قطعات کوچك و بزرگ قاطعی که از مرکز گذشته است ، یعنی h و $h+2R$ (R شعاع کرهٔ زمین است) . چون ارتفاع چشم



۱۰۰. محاسبهٔ فاصلهٔ افق

ناظر از سطح زمین ، معمولا نسبت به‌قطر کرهٔ زمین (2R) ناچیز است، و مثلا برای بالنی که خیلی بالا رفته باشد قریب ۰٫۰۰۱ قطر است ، می‌توان $2R+h$ را همان 2R گرفت و در اینصورت رابطه ساده‌تر می‌شود :

$$CN^2 = h \cdot 2R.$$

بنابراین فاصلهٔ تا افق را می‌توان ازرابطهٔ سادهٔ زیربدست آورد :

$$\text{دوری افق} = \sqrt{2Rh},$$

که در آن R ، شعاع کرهٔ زمین (قریب ۶۴۰۰ کیلومتر*) و h ، ارتفاع چشم ناظر ازسطح زمین است .

از طرف دیگر، چون $80 = \sqrt{6400}$ می‌باشد ، رابطه را می‌توان به‌صورت‌زیر نوشت :

$$\text{دوری افق} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h}$$

که در آن باید h را برحسب کیلومتربیان کرد .

این ، یك محاسبهٔ ساده و خالص هندسی است . اگر بخواهیم این اندازه‌گیری را با درنظرگرفتن عوامل فیزیکی که در بعد افق اثر می‌گذارند ، دقیق‌تر کنیم ، باید به «انکسار جوی» توجه داشته‌باشیم ، انکسار، یعنی شکستن اشعهٔ نوردرجو ، فاصلهٔ تا افق را تقریباً $\frac{1}{15}$ (۶٪) افزایش می‌دهد . ایـن عدد ـ ۶٪ـ مقـدار متوسط تقریبی است . دوری افق باتوجه به‌بسیاری شرایط دیگرزیاد ویاکم می‌شود. مهمترین شرایط چنین‌اند :

شرایط افزایش دهنده	شرایط کم‌کننده
با بالا رفتن فشار جو ،	با پائین‌آمدن فشارجو ،
درنزدیکی سطح زمین ،	در ارتفاعات ،
در هوای سرد ،	در هوای گرم ،
هنگام صبح و عصر ،	در روز ،
درهوای مرطوب ،	در هوای خشك ،
بالای دریا .	بالای خشکی .

مسئله

کسی که دردشت‌هموار ایستاده‌است ، چه‌فاصله‌ای اززمین را می‌بیند ؟

---

*) دقیق‌تر ۶۳۷۱ کیلومتر.

حل

چشم انسان بالغ را در ۱/۶ متری یا ۰/۰۰۱۶ کیلومتری زمین به‌حساب می‌آوریم ، داریم :

$$\text{دوری افق} = ۱۱۳\sqrt{۰/۰۰۱۶} = ۴/۵۲ \text{ (کیلومتر)}$$

همانطور که قبلاً گفتیم ، جو زمین افق را به اندازهٔ ۶٪ دورتـر می‌برد ، برای اینکه این عامل را هم به‌حساب بیاوریم ، باید ۴/۵۲ کیلومتر را در ۱/۰۶ ضرب کنیم ، بدست می‌آید :

$$۴/۵۲ \times ۱/۰۶ \# ۴/۸ \text{ (کیلومتر)}$$

به‌این ترتیب، شخصی که با قد متوسط باشد، نمی‌تواند دورتر از ۴/۸ کیلومتر را به‌بیند . قطر دایرهٔ دید ۹/۶ کیلومتر و مساحت آن ۷۲ کیلومترمربع می‌شود . و این خیلی کمتر از آنست که معمولا در تصور افراد دربارهٔ منطقهٔ دید وجود دارد .

مسئله

اگر شخصی روی قایق خود دردریا ایستاده باشد ، تاچه فاصله‌ای را می‌بیند ؟

حل

اگر ارتفاع چشم کسی را که درقایق ایستاده است، نسبت به‌سطح آرام آب ۱ متر یا ۰/۰۰۱ کیلومتر بگیریم ، فاصلهٔ او تا افق چنین است :

$$۱۱۳\sqrt{۰/۰۰۱} = ۳/۵۸ \text{ (کیلومتر)}$$

و یا با درنظر گرفتن انکسار جوی قریب ۳/۸ کیلومتر ، از اشیائی که

دورتر قرار گرفته باشند ، فقط قسمتهای بالای آنها دیده می‌شود و قسمت پائین آنها زیر افق پنهان است .

وقتی که چشم درسطح پائین‌تر قرارگیرد ، افق تنگ‌ترمی‌شود : مثلا برای ارتفاع نیم متری افق در $\frac{۱}{۲}$ ۲ کیلومتری قرار می‌گیرد . برعکس ، وقتی که از نقطهٔ بلندتری نظارت کنیم (مثلا ازدکل کشتی) فاصلهٔ تا افق زیادتر می‌شود : مثلا برای ارتفاع ۴ متری افق در ۷ کیلومتری قرارمی‌گیرد .

مسئله

هوانوردی که در بلندترین ارتفاع خود (یعنی در ارتفاع ۲۲ کیلومتری)قرارگرفته است،چه‌وسعتی‌اززمین‌رادراطراف‌خود می‌بینید ؟

حل

چون بالن در ارتفاع ۲۲ کیلومتری قرار گرفته است ، فاصلهٔ تا افق برای آن‌چنین است :

$$۱۱۳\sqrt{۲۲} = ۵۳۰ \text{(کیلومتر)}$$

وبا به‌حساب آوردن انکسار-۵۶۰ کیلومتر .

مسئله

هوانوردچه‌ارتقاعی بالا برود که بتواند تا۵۰ کیلومتری اطراف خود را به‌بیند ؟

حل

ازرابطهٔ دوری افق ، دراینحالت به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم :

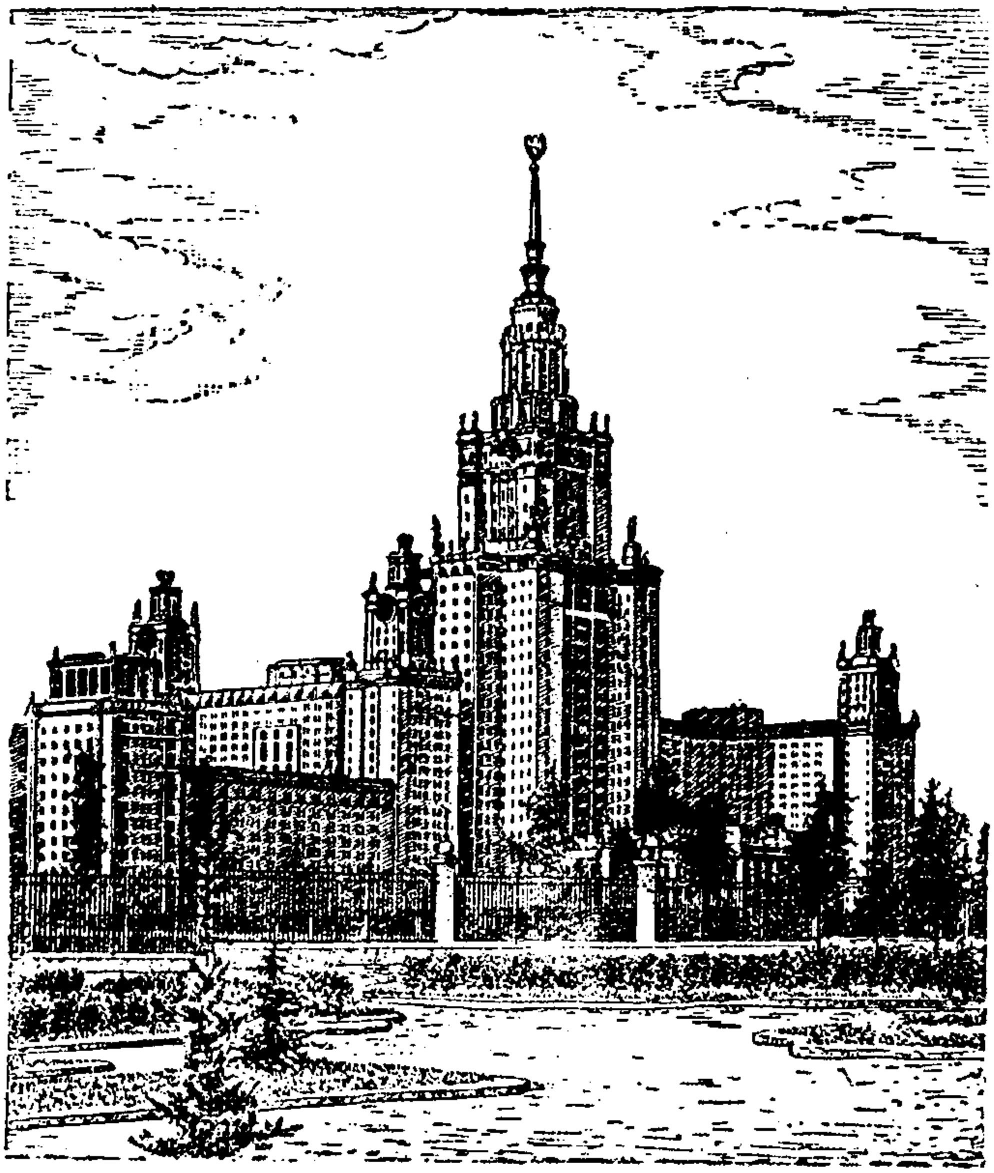
$$۵۰=\sqrt{۲Rh}$$

و ازآنجا :

$$h=\frac{۵۰^{۲}}{۲R}=\frac{۲۵۰۰}{۱۲۸۰۰}=۰/۲\text{(کیلومتر)}$$

یعنی باید تا ارتفاع ۲۰۰ متری بالا برود .

برای اینکه محاسبه دقیق‌تر باشد ، باید ۶٪ را از ۵۰ کیلومتر کم کنیم ، ۴۷ کیلومتر بدست می‌آید وازآنجا :



۱۵۱. دانشگاه مسکو

$$h=\frac{۴۷^{۲}}{۲R}=\frac{۲۲۰۰}{۱۲۸۰۰}=۰/۱۷\ (\text{کیلومتر})=۱۷۰(\text{متر})$$

در مرتفع‌ترین نقطهٔ کوه لنین در مسکو، ساختمان سی و دو طبقهٔ دانشگاه برپا شده است (شکل ۱۰۱) که بزرگترین مرکز تحصیلی و علمی درجهان است.

این ساختمان در **۲۴۲**متری سطح آب رودخانه مسکو قراردارد (ارتفاع طبقهٔ سی‌ودوم آن).

بنابراین ازپنجرهٔ طبقهٔ بالای دانشگاه چشم‌اندازی به‌شعاع بیش از **۵۵** کیلومتر وجود دارد.

برج گوگول

مسئله

این مطلب هم جالب که: آیا ارتفاع سریع‌تر زیاد می‌شود یا دوری افق؟ بسیاری تصور می‌کنند که با بالا رفتن ناظر، افق باسرعت غیرعادی وسیع می‌شود. ضمناً گوگول هم همینطور فکر می‌کرد. او در مقالهٔ «دربارهٔ معماری زمان ما» چنین می‌نویسد:

«برجهای عظیم و بلند برای شهر ضروری است ... ما معمولا به ارتفاعاتی محدود شده‌ایم که امکان می‌دهد تنها یك شهر را به‌بینیم، ضمناً برای پایتخت لازم است که لااقل صدوپنجاه ورست* از اطراف را ببینیم وبرای این منظور می‌توان تنها یك یا دوطبقهٔ اضافی به‌وجود آورد تا همه چیز تغییر کند. فاصلهٔ چشم انداز آدمی بطور فوق‌العاده و تصاعدی نسبت به ارتفاع زیاد می‌شود».

حقیقت امرچگونه است؟

*) هر ورست ۱/۰۶۶۸ کیلومتر است، ۱۵۰ ورست ۱۶۰ کیلومترمی‌شود.

حل

کافی است به رابطهٔ :

$$\sqrt{\text{۲}Rh} = \text{دوری افق}$$

مراجعه کنیم ، تا نادرستی این حکم که : « وسعت دید » با بالا رفتن ناظر خیلی سریع رشد می‌کند ، روشن شود . برعکس ، دوری افق خیلی کندتر از ارتفاع زیاد می‌شود : فاصلهٔ تا افق متناسب با جذر ارتفاع است . وقتی که ارتفاع را ۱۰۰ برابر کنیم ، افق تنها ۱۰ برابر دور می‌شود . وقتی که ارتفاع را ۱۰۰۰ برابر بیشتر کنیم ، افق ۳۱ مرتبه دورتر می‌شود . بنابراین اشتباه است اگر گمان کنیم که « تنها یك یا دو طبقهٔ اضافی ، همه‌چیز را تغییر می‌دهد » . وقتی که به یك ساختمان ۸ طبقه ، ۲ طبقه اضافه کنیم ، افق به اندازهٔ $\sqrt{\frac{\text{۱۰}}{\text{۸}}}$ عقب می‌رود، یعنی ۱/۱ مرتبه دورمی‌شود : تنها ۱۰٪ . و چنین اضافه‌ای خیلی کم محسوس است .

اما دربارهٔ برجی که از فراز آن بتوان «لااقل صدوپنجاه‌ورست» یعنی ۱۶۰ کیلومتر را دید ، فکری کاملا غیر واقعی است . البته گوگول شك نداشت که این برج باید خیلی بزرگ باشد .

درحقیقت از معادلهٔ

$$\text{۱۶۰} = \sqrt{\text{۲}Rh}$$

بدست می‌آید :

$$h = \frac{\text{۱۶۰}^{\text{۲}}}{\text{۲}R} = \frac{\text{۲۵۶۰۰}}{\text{۱۲۸۰۰}} = \text{۲ (کیلومتر)}$$

و این ارتفاع یك کوه بزرگ است . حتی بلندترین ساختمان دولتی ۳۲ طبقهٔ مسکو، که‌میله طلائی بالای‌آن ۲۸۰ متر از پایهٔ‌ساختمان

ارتفاع دارد ، ۷ بار از طرح برج گوگول پائین‌تر است .

تپهٔ پوشکین

پوشکین هم دچار همین اشتباه شده است ، وقتی کــه در کتاب «شوالیهٔ‌خسیس»، از افق دوری صحبت می کند که از بالای «تپهٔ‌افتخار» به چشم می‌خورد :

و شاه توانست با خوشحالی از بالای آن به‌اطراف بنگرد
هم به دره‌ای که پوشیده از خیمه‌های سفید بود
وهم به دریا ، که کشتیها در آن حرکت می‌کردند ...

ماقبلا دیدیم که‌ارتفاع این «تپهٔ افتخار» چقدر می‌توانست باشد: حتی ارتش آتیلا هم نمی‌توانست به این طریق تپه‌ای بلندتر از ۵ متر به‌وجود آورد. حالا می‌توانیم حساب کنیم ، اگر کسی بر بالای چنین تپه‌ای باشد ، تا چه فاصله‌ای را می‌تواند به‌بیند .

چشم چنین آدمی در $\frac{1}{2}$۱ + ۵ یعنی ۶/۵ متری زمین قرار گرفته است و بنابراین تافاصلهٔ :

$$\sqrt{۲ \times ۶۴۰۰ \times ۰/۰۰۶۵} \# ۹ \text{(کیلومتر)}$$

۹ کیلومتری اطراف خود را می‌بینید و این فقط ۴ کیلو متر بیشتر از موقعی است که شخص تنها روی پای خود ایستاده است .

خطوط آهن کجا بهم می‌رسند ؟

مسلماً بارها دیده‌اید که خطوط موازی راه‌آهن ، هرچه دورتر بروند ، به‌هم نزدیك‌تر می‌شوند . اما آیا اتفاق افتاده است که به‌بینید ،

درجائی بالاخره دوخط آهن بهم رسیده باشند ؟ آیا چنین پیش آمدی ممکن است ؟ حالا دیگر شما می‌توانید با اطلاعاتی که دارید از عهدهٔ حل این مسئله بر آیید .

حل

بخاطر بیاوریم که هرشیئی . برای چشم طبیعی ، وقتی که تحت زاویهٔ یك دقیقه دیده شود ، یعنی وقتی که در فاصله‌ای مساوی ۳۴۰۰ برابر قطر خود واقع باشد ، به‌صورت یك نقطه دیده می‌شود . فاصلهٔ بین دوخط راه‌آهن ۱/۵۲ متراست. یعنی برای اینکه فاصلهٔ بین دوخط به‌یك نقطه تبدیل شود ، باید در فاصلهٔ ۳۴۰۰ × ۱/۵۲ متری یا ۵/۲ کیلومتری قرارگیرد . بنابراین اگر ما بتوانیم از فاصلهٔ ۵/۲ کیلومتری به خطوط آهن نگاه کنیم ، آنرا به‌صورت یك نقطه خواهیم دید . ولی دردشت هموار، افق نزدیك‌تر از ۵/۲ کیلومتری یعنی در ۴/۸ کیلومتری واقع‌است . به‌این‌ترتیب انسانی که باقامت معمولی باشد ، نمی‌تواند در دشت هموار ، نقطهٔ تلاقی دو خط راه آهن را به‌بیند ، باید یکی از شرایط زیر وجود داشته باشد تا چنین امکانی بدست آید :

۱) وقتی که قدرت دید ناظر پائین باشد و برای او اشیائی بیك نقطه تبدیل شوند که زاویهٔ دید آنها ازیك دقیقه بیشتر باشد ؛

۲) وقتی مسیر راه آهن افقی نباشد ؛

۳) وقتی که چشم ناظر بالاتر از قد معمولی باشد :

$$\frac{۵/۲^{۲}}{۲R} = \frac{۲۷}{۱۲۸۰۰} = ۰/۰۰۲۱ \text{(کیلومتر)}$$

یعنی در ۲۱۰ سانتیمتری زمین قرارگرفته باشد .

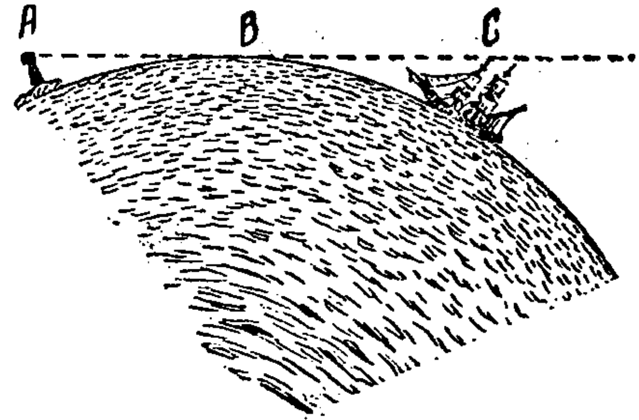
مسئله‌ای دربارهٔ چراغ دریائی

در ساحل دریا، چراغ دریائی را در ۴۰ متری بالای سطح آب نصب کرده‌اند.

برای کشتی که به‌ساحل نزدیك می‌شود، از چه فاصله‌ای این چراغ دیده می‌شود، به‌شرطی‌که دیده‌بانی کشتی در ۱۰ متری بالای سطح آب قرار گرفته باشد.

حل

از شکل ۱۰۲ معلوم است که مسئله منجر به محاسبهٔ طول قطعه خط AC می‌شود که از دو قسمت AB و BC تشکیل شده است.



۱۰۲. چراغ دریائی

قطعهٔ AB عبارتست از فاصلهٔ تا افق، با توجه به‌اینکه چراغ در ۴۰ متری زمین است و BC فاصلهٔ افق برای ناظری است که در ارتفاع ۱۰ متری است. بنابراین فاصلهٔ مجهول چنین می‌شود:

$$۱۱۳\sqrt{۰/۰۴}+۱۱۳\sqrt{۰/۰۱}=۱۱۳(۰/۲+۰/۱)=۳۴ \text{ (کیلومتر)}$$

مسئله

دیده‌بان این کشتی، چه قسمتی از چراغ دریائی را از فاصلهٔ ۳۰ متری می‌بینید؟

حل

شکل ۱۰۲ راه حل مسئله را نشان می‌دهد: ابتدا باید فاصلهٔ

BC را محاسبه کنیم ، سپس آنچه را کــه بدست می آید از طول کلی AC ، یعنی ۳۰ کیلومتر ، کــم کنیم : تا فاصله AB معلوم شود . با دردست داشتن AB می‌توان ارتفاعی راحساب کرد که افق آن به اندازهٔ AB باشد . این محاسبات را انجام می‌دهیم :

$$BC = ۱۱۳\sqrt{۰/۰۱} = ۱۱/۳ \text{ (کیلومتر)}$$

$$۳۰ - ۱۱/۳ = ۱۸/۷ \text{ (کیلومتر)}$$

$$\text{ارتفاع} = \frac{۱۸/۷^۲}{۲R} = \frac{۳۵۰}{۱۲۸۰۰} = ۰/۰۲۷ \text{ (کیلومتر)}$$

یعنی از فاصلهٔ ۳۰ کیلومتری ۲۷ متر ازارتفاع چراغ دیده نمی‌شود و بقیهٔ ۱۳ متر آن دیده می‌شود .

برق

مسئله

بالای سر شما در ارتفاع ۱/۵ کیلومتری در آسمان ، برقی می‌درخشد ، تا چه فاصله‌ای از شما بازهم می‌توان برق را دید ؟

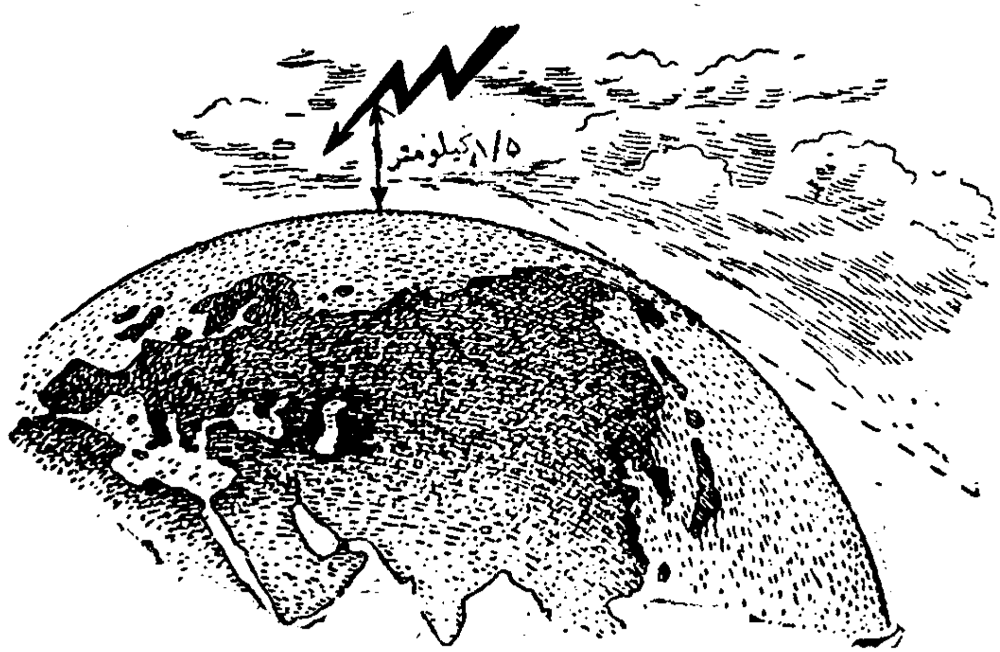
حل

باید دوری افق را برای ارتفاع ۱/۵ کیلومتر محاسبه کرد (شکل ۱۰۳) . این فاصله چنین است :

$$۱۱۳\sqrt{۱/۵} = ۱۳۸ \text{ (کیلومتر)}$$

یعنی اگر زمین هموار باشد ، کسی که روی سطح زمین و در فاصلهٔ ۱۳۸ کیلومتری شما خوابیده باشد ، می‌تواند درخشش برق را ببیند (واگر ۶٪ انکسار را به حساب آوریم ، در ۱۴۶ کیلومتری) . درنقطه‌ای که در فاصلهٔ ۱۴۶ کیلومتری قرار گرفته است ، برق در سطح

افق دیده می‌شود و چون در این فاصله صدای رعد به گوش نمی‌رسد، ناظری



۱۵۳. مسئله‌ای دربارهٔ برق

که در آنجا باشد، برق را بدون رعد می‌بیند.

کشتی بادی

مسئله

در ساحل دریاچه یا رودخانه ایستاده‌اید و به کشتی بادی که دور از شما در آب است نگاه می‌کنید. می‌دانید که دکل کشتی ۶ متر از سطح آب بالاتر است. در چه فاصله‌ای از شما، کشتی شروع به پایین رفتن در آب می‌کند (یعنی پشت افق می‌رود) و در چه فاصله‌ای بکلی مخفی می‌شود؟

حل

کشتی در نقطهٔ B (شکل ۹۸)، یعنی در فاصلهٔ افق (که برای

شخصی با قامت متوسط ۴٫۸ کیلومتر است) شروع به‌پنهان شدن در زیر افق می‌کند . وقتی این کشتی بکلی مخفی می‌شود که فاصلهٔ آن از از نقطهٔ B چنین باشد :

$$۱۱۳\sqrt{۰٫۰۰۶} = ۸٫۷ \quad \text{(کیلومتر)}$$

و بنابراین ، برای اینکه کشتی از نظر شما که در ساحل ایستاده‌اید ، بکلی پنهان شود ، باید به‌اندازهٔ :

$$۴٫۸ + ۸٫۷ = ۱۳٫۵ \quad \text{(کیلومتر)}$$

ازساحل فاصله داشته باشد .

افق در ماه

مسئله

محاسباتی که تاکنون انجام دادیم ، همه مربوط به‌کرهٔ زمین بود . اگر در کرهٔ دیگری ومثلا در یکی از دشتهای هموار ماه باشیم ، در دوری افق چه تغییری پیدا می‌شود ؟

حل

مسئله باهمان رابطهٔ قبلی حل می‌شود: دوری افق برابر است با $\sqrt{۲Rh}$، منتهی در اینجا $۲R$ عبارتست از قطره کرهٔ ماه (به‌جای قطر کرهٔ زمین در محاسبات قبلی) . چون قطر کرهٔ ماه برابر است با ۳۵۰۰ کیلومتر ، برای ناظری که چشمش در ۱٫۵ متری سطح ماه باشد ، داریم :

$$\text{دوری افق} = \sqrt{۳۵۰۰ \times ۰٫۰۰۱۵} = ۲٫۳ \quad \text{(کیلومتر)}$$

درماه ، ما می‌توانیم تا فاصلهٔ $۲\frac{۱}{۳}$ کیلومتری خود را به‌بینیم .

در دهانهٔ آتشفشان ماه

مسئله

اگر بایك دوربین به‌ماه نگاه کنیم ، در آن تعداد زیادی کوههای حلقوی شکل می‌بینیم که نظیر آنها در زمین وجود ندارد . یکی از بزرگترین این کوهها «آتشفشان کوپرنیك» است که قطر بیرونی آن ۱۲۴ کیلومتر و قطر داخلی آن ۹۰ کیلومتر است . مرتفع‌ترین نقاط این موج حلقوی از سطح داخلی آن ۱۵۰۰ متر ارتفاع دارد . اگر شما در مرکز این حلقه ایستاده باشید ، آیا می‌توانید این موج حلقوی را به‌بینید ؟

حل

برای اینکه به‌این سؤال پاسخ دهیم ، باید دوری افق را برای قلهٔ موج ، یعنی برای ۱/۵ کیلومتر محاسبه کنیم . این فاصله برای ماه چنین است :

$$\sqrt{۳۵۰۰ \times ۱/۵} = ۷۳ \quad \text{(کیلومتر)}$$

اگر به این فاصله ، دوری افق را برای یك انسان با قامت متوسط اضافه کنیم ، فاصله‌ای بدست می‌آید ، که از آنجا موج حلقوی برای ناظر پشت افق پنهان می‌شود :

$$۷۳ + ۲/۳ \approx ۷۵ \quad \text{(کیلومتر)}$$

و چون مرکز موج به‌اندازهٔ ۴۵ کیلومتر از آن فاصله دارد ، می‌توان موج حلقوی را ازمرکز آن کاملا دید .

در مشتری

مسئله

دوری افق در مشتری چقدر است ؟ می‌دانیم که قطر مشتری ۱۱

برابر قطرزمین است .

حل

اگر درکرهٔ مشتری سطح صاف و سختی وجود داشته باشد و شخصی درآنجا ایستاده باشد می‌تواند تا فاصله‌ای برابر :

$$\sqrt{۱۱ \times ۱۲۸۰۰ \times ۰/۰۰۱۶} = ۱۴/۴ \quad \text{(کیلومتر)}$$

را به‌بیند .

چند تمرین

فاصلهٔ تاافق رابرای دوربین زیردریائی که به‌اندازهٔ ۳۰ سانتیمتر از سطح آرام آب بالا آمده است محاسبه‌کنید .

بالن، تاچه ارتفاعی بالابرود تا هردوساحل دریاچه‌ای‌راکه۲۱۰ کیلومترطول دارد به‌بیند .

بین مسکو و لنینگراد ، تا چه ارتفاعی درهواپیما بالابرویم تا بتوانیم دریك زمان هر دو شهر رابه‌بینیم ؟ فاصلهٔبین مسکو و لنینگراد ۶۴۰ کیلومتر است .

۷

هندسهٔ روبینسونها

(چند صفحه از ژول ورن)

هندسهٔ آسمان پر ستاره

لبریز ازستاره : پهنه‌ای باز، که‌آنرا نهایتی نیست ؛ نه به عمق آن می‌توان دست یافت و نه ستاره‌هایش را شمرد .

ــ لومونوسوف

زمانی بود که مؤلف این کتاب خودش را برای یك آیندهٔ غیرعادی آماده می‌کرد : می‌خواست، بجای کسی باشد که کشتی غرق شده خود را از دست داده است . بطور خلاصه فکر می‌کردم که نقش روبینسون را به عهده بگیرم . اگر این امر اتفاق می‌افتاد ، کتاب حاضر می‌توانست خیلی جالب‌تر از آنچه هست تنظیم شود ویا ممکن بود که اصلانوشته‌نشود. شرایطی‌پیش نیامدکه روبینسون‌بشوم وحالاهم

ازاین‌بابت متأسف‌نیستم. ولی درجوانی به‌نقش خودبه‌عنوان روبینسون جدی باور داشتم و با حرارت زیاد خود را برای آن آماده می‌کردم. زیرا برای اینکه آدم حتی‌یك‌روبینسون عادی‌هم باشد، باید اطلاعات و مهارتهائی داشته باشدکه برای سایرحرفه‌ها لزومی پیدا نمی‌کند.

وقتی‌که یکنفر پس از غرق‌کشتی به یك جزیرهٔ غیر مسکونی می‌افتد، برای اولین بار چه می‌کند؟ روشن است که به‌تعیین موقعیت جغرافیائی محل سکنای اجباری خود، یعنی طول و عرض آن، می‌پردازد. ولی باکمال تأسف در اکثر سرگذشتهای قدیمی و یاجدید روبینسون، در این باره با اختصار فوق‌العاده‌ای صحبت شده است. در چاپ‌کامل «روبینسون کروزوی» اصلی، در این مورد تنها یك سطر وجود دارد که آنهم داخل پرانتز گذاشته شده است:

« در عرض جغرافیائی که جزیرهٔ من بود (یعنی طبق حساب من در ۹°۲۲′ شمال استوا) ...».

این اختصار تأسف آور، برای من که در حال جمع‌آوری اطلاعاتی برای آیندهٔ خیال انگیز خود بودم، ناامید کننده بود. من خود را آماده‌می‌کردم تا ازکسوت مردی‌که تنها در یك جزیرهٔ متروك زندگی می‌کند. بیرون بیایم، که با مطالعهٔ «جزیرهٔ اسرارآمیز» ژول ورن، این رازگشوده شد.

من تصمیم ندارم که خوانندگان این کتاب را برای روبینسون شدن‌آماده‌کنم، ولی بی‌فایده نمی‌بینم که در اینجا از روشهای ساده‌ای که برای تعیین عرض جغرافیائی وجود دارد، گفتگوکنم. آشنائی با این روشها تنها مورد استفادهٔ کنسی که در یك جزیرهٔ بی‌نام ونشان افتاده است، نیست. بسیاری از نقاط مسکونی وجود دارد که روی نقشه‌ها مشخص نشده‌اند (و مگرهمیشه نقشهٔ حاضر و آماده‌ای برای ما

وجود دارد ؟) و به این‌ترتیب مسئلهٔ تعیین عرض جغرافیائی می‌تواند برای بسیاری ازخواننده‌های ما مفید باشد . حالانمی‌توانیم ، مثل زمان لرمانتوف ، با قطعیت بگوئیم که حتی :

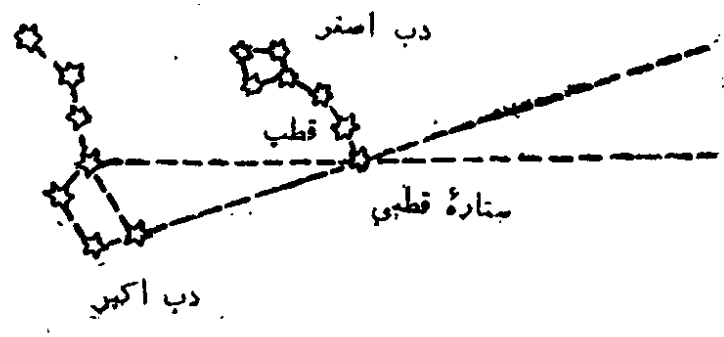
در نقشه‌های عمومی ، برای **تامبوو**
هرگز علامتی نخواهند گـذاشت ،

ولی درنقشه‌های عمومی که در زمان ماهم‌وجود دارد ، بسیاری ازجاها ودهات مشخص نشده است .لزومی نداردکه دچار غرق‌کشتی بشویم و به‌نقش روبینسون درآییم ، قبل از آن‌کوشش کنیم موقعیت جغرافیائی محل سکونت خود را تعیین نمائیم .

تعیین عرض جغرافیائی اساساً مشکل نیست . اگر در یك شب روشن پرستاره به‌آسمان نگاه کنید ، متوجه می‌شوید که ستارگان به آرامی محیط دایرهٔ غیرافقی را دورمی‌زنند ، به‌عبارت دیگرتمامی‌گنبد آسمان دوریك محور فرضی حرکت می‌کند . درنیمکرهٔ شمالی ما ، ستاره‌ای دارای این حرکت نیست و ساکن بنظر می‌رسد که برامتداد این محور فرضی قرارگرفته باشد . این «قطب شمال» نزدیك به ستارهٔ روشن ، در انتهای دم دب اصغرقراردارد و به‌ستارهٔ قطبی معروف است. با پیدا کردن این ستاره درآسمان، توانسته‌ایم جای قطب شمال‌جهان را پیداکنیم . جستجوی ستارهٔ قطبی هم‌کار مشکلی‌نیست ، ابتدا مجموعهٔ دب اکبر را،که همه می‌شناسند ، پیدامی‌کنیم : اگرساق بیرونی ذوزنقهٔ دب اکبر را ، آنطور که در شکل ۱۰۴ دیده می‌شود ، تقریباً به‌اندازهٔ طول تمام این مجموعه امتداد دهیم ، به‌ستاره قطبی می‌رسیم .

این یکی ازنقاط کرهٔ سماوی است که شناختن آن برای تعیین عرض جغرافیائی لازم است . نقطهٔ دوم «سمت‌الرأس» است ، یعنی نقطه‌ای که در آسمان درست بالای سر شما قراردارد . به‌عبارت دیگر

سمت‌الرأس عبارتست نقطهٔ تلاقی آسمان با شعاع فرضی از کرهٔ زمین که از محل شما گذشته است : اگر قوسی را که در آسمان بین سمت



۱۰۴. جستجوی ستارهٔ قطبی

الرأس و ستارهٔ قطبی قراردارد برحسب درجه بدست آورید ، در حقیقت فاصلهٔ بین موقعیت خودتان را تا قطب زمین بدست آورده‌اید . اگر سمت‌الرأس شما با ستارهٔ قطبی ۳۰ درجه فاصله داشته باشد ، شما به اندازهٔ ۳۰ درجه از قطب زمین فاصله دارید ، یعنی در ۶۰ درجهٔ شمال خط استوا ، یا به عبارت دیگر ، در مـدار ۶۰ درجهٔ شمالی قرارگرفته‌اید .

بنابراین برای تعیین عرض جغرافیائی هر محل باید ابتدا ، «فاصلهٔ سمت‌الرأسی» ستارهٔ قطبی‌رابرحسب درجه (واجزاءآن) اندازه بگیریم ، سپس‌کافی‌است که این فاصله را از ۹۰ درجه کم‌کنیم تا عرض جغرافیائی بدست‌آید. درعمل می‌توان به‌طریق دیگری‌عمل‌کرد. چون قوس بین سمت‌الرأس وافق مساوی ۹۰ درجه است ، باکم‌کردن‌فاصلهٔ سمت‌الرأسی قطب شمال از ۹۰ درجه ، همان طول قوس سماوی که بین ستارهٔ قطبی و افق است ، یا به‌عبارت دیگر «ارتفاع» ستارهٔ قطبی نسبت به افق ، بدست می‌آید . بنابراین عرض جغرافیائی هر محل برابر است با ارتفاع ستارهٔ قطبی نسبت به‌افق آن محل .

حالا دیگر شما می‌دانید که برای تعیین عرض جغرافیائی چه باید کرد. منتظر یك شب روشن می‌مانید، سپس ستارهٔ قطبی را روی آسمان پیدامی کنید و ارتفاع زاویه‌ای آنرا تا افق بدست می آورید؛ عرض جائی که‌شماهستیدپیدا می‌شود. اگر بخواهیددر کارخود دقت‌داشته باشید، باید توجه کنید که ستارهٔ قطبی کاملا برقطب جهان منطبق نیست و به‌اندازهٔ $1\frac{1}{4}$ درجه از آن فاصله دارد. بنابراین ستارهٔ قطبی کاملا بی حرکت نیست: این ستاره دور قطب سماوی روی دایرهٔ کوچکی حرکت می کندواز آن، در بالا یا پائین، سمت راست یا سمت چپ، به‌اندازهٔ $\frac{1}{4}$ درجه‌فاصله‌دارد. ارتفاع‌ستارهٔقطبی‌رادر بالاترین‌وپائین‌ترین وضع خود (یا به‌اصطلاح منجمین دراوج وحضیض) و سپس ارتفاع واسطهٔ عددی آنها را بدست آورید. این مقدار واقعی ارتفاع قطب‌و بنابراین عرض مجهول محل شما خواهد بود.

به‌همین مناسبت هیچ‌لازم‌نیست که حتماً ستارهٔ قطبی‌را انتخاب کنید: می‌توان هرستارهٔ دلخواهی راکه غروب نمی کند (یعنی در زیر افق پنهان نمی‌شود) اختیار کرد و ارتفاع آنرا در دو وضع مختلف نسبت به‌افق بدست آورد و سپس حد متوسط این دو ارتفاع را محاسبه کرد. نتیجهٔ این محاسبه، ارتفاع قطب نسبت به‌افق یعنی عرض جغرافیائی محل خواهد بود. ولی برای این منظورباید بتوان لحظات اوج و حضیض ستارهٔ انتخاب شده را پیدا کرد که کار نسبتاً دشواری است، بخصوص اینکه اغلب در جریان یك شب نمی‌توان موفق به مشاهدهٔ هردو وضع‌شد. بهمین دلیل‌است که برای اندازه‌گیری تقریبی مناسب‌تر است که‌کار را با ستارهٔ قطبی شروع کنیم وازفاصلهٔ جزئی آن تاقطب صرفنظر نمائیم.

تا اینجا ما خود را درنیمکرهٔ شمالی زمین فرض کردیم . اگر در نیمکرهٔ جنوبی باشیم چگونه باید عمل کرد ؟ راه عمل کاملا شبیه قبل است ، تنها با این تفاوت که در اینجا باید ارتفاع قطب جنوب جهان راانداز‌ه‌گرفت . متأسفانه درنزدیکی‌قطب جنوب ستارهٔ روشنی ، شبیه ستارهٔ قطبی نیمکرهٔشمالی ، وجود ندارد . صلیب جنوبی معروف، از قطب‌جنوب خیلی دوراست واگربخواهیم ازستاره‌های این مجموعه برای تعیین عرض جغرافیائی استفاده کنیم ، باید مقدار متوسط اوج و حضیض آنها را بدست‌آوریم .

قهرمان داستان ژول‌ورن‌برای تعیین‌موقعیت «جزیرهٔ اسرارآمیز» خود ازهمین مجموعهٔ ستارگان زیبای آسمان جنوبی استفاده می کند .

قسمتی از داستان شامل همهٔ این تشریفات است . به‌بینیم این روبینسون جدید چگونه بدون در دست داشتن هیچ وسیله‌ای توانست مشکل خود را حل کند .

عرض جزیرهٔ اسرارآمیز

« ساعت ۸ بعدازظهر بود . ماه طلوع نکرده بود ، ولی افق با رنگ ملایم نقره‌ای مات ، برق می‌زد و می‌شد آنرا طلوع ماه نامید . در آسمان ، ستاره‌های نیمکرهٔ جنوبی و در میان آنها ستارگان صلیب جنوبی می‌درخشید . مهندس سمیت مدتی به‌این مجموعه نگاه‌کرد . بعدازکمی تأمل‌گفت :

« ــ هربرت ، حالا ۱۵ آوریل است ؟

« جوان جواب داد :

« ــ بله

« ــ اگر اشتباه نکنم ، فردا یکی از چهار روز سال است که زمان حقیقی با زمان متوسط برابراست : فردا درست موقع ظهر با ساعت ما ، خورشید از نصف‌النهار عبور می‌کند* . اگر هوا مساعد باشد ، می‌توانم طول جغرافیائی جزیره را به‌تقریب معین کنم .

« ــ بدون وسیله ؟

« ــ بله ، شب روشنی است و بنابراین همین حالا هم می‌توانم عرض جغرافیائی‌جزیره را پیدا کنم ، ارتفاع ستارگان صلیب جنوبی ، یعنی ارتفاع قطب جنوب را از افق بدست می‌آورم و فردا موقع ظهر طول جغرافیائی جزیره را تعیین می‌کنم .

« اگر مهندس سکستان** داشت ، می‌توانست فاصلهٔ زاویه‌ای اشیاء را به‌کمك انعکاس اشعهٔ نور با دقت اندازه‌بگیرد و مسئلهٔ مورد علاقهٔ خود رابدون زحمت‌حل کند . دراین عصر ارتفاع قطب را بدست می‌آورد وفردای آن روز لحظه‌ای راکه خورشید ازنصف‌النهار عبور می‌کرد ، معین می‌نمود ؛ در اینصورت مختصات جغرافیائی جزیره یعنی‌طول و عرض آن بدست می‌آمد . ولی مهندس سکستان نداشت و می‌بایستی بدون آن‌کار کند .

« مهندس وارد غار شد . در پرتو نور خرمن آتش دو صفحهٔ مستطیل شکل تراشیدو آنها را در یك انتها ، مثل پرگار بهم وصل

*) ساعتهای ما دقیقاً منطبق بر ساعتهای خورشیدی نیست : بین «زمان حقیقی خورشیدی» و« زمان‌متوسط »(که به‌وسیلهٔ ساعتهای ما نشان‌داده می‌شود)، اختلافی وجود دارد . این اختلاف تنها در چهار روز از سال مساوی صفر می‌شود ، ۱۶ آوریل ، ۱۴ژوئن ، اول سپتامتر و۲۴ دسامبر (به‌ترتیب مطابق با ۲۷ فروردین ، ۲۴ خرداد ، ۱۰ شهریور وسوم دی) .

**) سکستان اسباب ساده‌ای است که به‌وسیلهٔ‌آن با استفاده از انعکاس نور بریك‌آینهٔ دوار، فاصلهٔ زاویه‌ای دوشیئی را اندازه می‌گیرند (مترجم)

کرد ، بطوریکه شاخه‌های آن بتواند از هم دور شود . برای لولا از خار سخت درخت اقاقیا استفاده کرد که از میان خورده چوبهای کنار آتش پیدا کرده بود .

« وقتی که وسیله آماده شد ، مهندس دوباره به‌ساحل برگشت . می‌خواست ارتفاع قطب را ازافق ، یعنی از سطح دریا اندازه بگیرد . برای مشاهدات‌خود روی سکوی بلندی که چشم‌اندازوسیع‌تری داشت قرارگرفت ، ضمناً می‌بایست به‌ارتفاع‌این سکو از سطح دریا هم توجه داشته باشد ولی اندازه‌گیری اخیر را می‌شد برای روز دیگری باقی گذاشت که به‌سادگی وباکمك هندسهٔ مقدماتی انجام می‌گرفت .

« افق ، که اززیر وبه‌وسیلهٔ نخستین اشعهٔ ماه روشن شده بود ، کاملا نمایان و همهٔامکانات برای مشاهده فراهم‌بود . مجموعهٔ ستارگان صلیب جنوبی بشکل‌معکوس‌درآسمان می‌درخشید: ستارهٔ آلفا درقاعدهٔ این مجموعه وکاملانزدیك به‌قطب جنوب بود .

« این ستاره‌هابه‌اندازهٔ ستارهٔ قطبی ، درشمال ، به‌قطب نزدیك نیستند . ستارهٔ آلفا ۲۷ درجه باقطب فاصله دارد ، مهندس این مطلب را می‌دانست و در محاسبهٔ خود آنرا بحساب آورد . او منتظر لحظهٔ عبور ستاره ازنصف‌النهار بود زیرا این امر انجام عملیات اورا ساده‌تر می‌کرد .

« سمیت یکی از شاخه‌های پرگارچوبی را به‌طرف افق وشاخهٔ دیگر آنرا به‌طرف ستارهٔ آلفای صلیب میزان‌کرد ، فاصلهٔ زاویه‌ای دو شاخه ، ارتفاع زاویه‌ای ستاره را نسبت به‌افق معین می‌کرد . برای اینکه این زاویه بطور قابل اطمینانی ثابت بماند ، سمیت تختهٔ سومی انتخاب کرد و با کمك خارهای اقاقیا به شاخه‌های پرگار متصل کرد ، بطوریکه شکل آن بدون تغییر بماند .

«حالا می‌بایست زاویه‌ای را که ناظر ازسطح دریاداشت تعیین کرد ، برای این منظور لازم بود که ارتفاع صخره اندارگرفته شود * . اندازهٔ زاویه همان ارتفاع ستارهٔ آلفای صلیب و بنابراین ارتفاع قطب ازافق ودرنتیجه عرض جغرافیانی جزیره بود ، زیرا عرض جغرافیائی هر نقطه‌ای ازکرهٔ زمین برابر است با ارتفاع قطب نسبت به افق آن محل . این محاسبه برای فرداگذاشته شد» .

خوانندهٔ این کتاب ، اگر به مبحث اول مراجعه کند ، راهی‌را که برای اندازه‌گیری ارتفاع صخره لازم‌است، پیدامی‌کند. ما هم این قسمت از داستان را رها می‌کنیم وبه دنبالهٔکارهای مهندس می‌پردازیم :

«مهندس پرگاری را که دیشب ساخته بود و با کمك آن فاصلهٔ زاویه‌ای بین ستارهٔ آلفای صلیب جنوبی را تا افق بدست آورده بود ، برداشت. با دقت اندازهٔ این زاویه را ، با کمك دایره‌ای که به ۳۶۰ قسمت‌کرده بود ، بدست آورد و فهمید که مساوی ۱۰ درجه است . از آنجا ارتفاع قطب را نسبت به‌افق ، با اضافه کردن ۲۷ درجه که فاصلهٔ زاویه‌ای ستاره از قطب است ، بدست آورد : این زاویه مساوی ۳۷ درجه شد . سمیت متوجه شدکه جزیرهٔ لینکلن در ۳۷ درجهٔ عرض جنوبی ، ویابا درنظرگرفتن اشتباهات ممکن ، بین مدارات ۳۵ درجه و ۴۰ درجه واقع است .

*) از آنجاکه مهندس برای اندازه‌گیری خود ، بجای‌کنار دریا ، از بالای یك صخره استفاده‌کرده است، خط راستی‌که از چشم ناظر به‌افق می‌رسد، کاملا برخط عمود برشعاع زمین منطبق نیست و با آن زاویه‌ای می‌سازد . ولی این زاویه بقدری کوچك است که برای اینگونه موارد می‌توان از آن صرفنظر کرد (برای ارتفاع ۱۰۰ متری به اندازهٔ یك سوم درجه است) . باین مناسبت سمیت ، و یا در حقیقت ژول ورن ، احتیاجی به‌چنین محاسبه‌ای نداشت .

«حالالازم بود که طول جغرافیائی جزیره را پیدا کند. مهندس آنرا هم محاسبه کرد : در همان روز ، موقع ظهر ، وقتی که خورشید از نصف‌النهار جزیره عبور می‌کرد» .

تعیین طول جغرافیائی

« اما مهندس چگونه می‌توانست لحظهٔ عبور خورشید را از نصف‌النهار جزیره ، بدون دردست داشتن‌هیچ وسیله‌ای ، تعیین کند ؟ این سئوال خیلی هربرت را به‌خود مشغول کرده بود .

« مهندس فکر همهٔ چیزهائی را که برای مشاهدهٔ نجومی خود لازم داشت ، کرده بود . درساحل شنی جای کاملا تمیزی که به‌وسیلهٔ جزر و مد دریا هموار شده بود ، انتخاب کرده بود و چوبی به طول شش پا ، در این محل عمود بر این سطح در زمین محکم کرده بود .

«آنوقت هربرت فهمید که مهندس برای‌تعیین‌لحظهٔ عبورخورشید از نصف‌النهار جزیره ویا به‌عبارت دیگر ، برای تعیین ظهر محل چه نقشه‌ای دارد . مهندس می‌خواست باکمك سایهٔ چوب روی شنها ، این لحظه را پیدا کند . البته ، این روش کاملا دقیق نبود ، ولی با نبودن وسائل لازم ، می‌شد بهترین نتیجهٔ ممکن را بدست آورد .

« لحظه‌ای که سایهٔ چوب کوتاهترین اندازهٔ ممکن را دارد ، ظهر محل است . کافی است که حرکت انتهای سایه را تعقیب کنیم و منتظر لحظه‌ای باشیم که طول سایه به‌کمترین اندازهٔ خود برسد (یعنی از آن به‌بعد دوباره شروع به‌طویل شدن کند) . در اینجا سایهٔ چوب ، نقش عقربه را روی صفحهٔ ساعت بازی می‌کند .

« وقتی‌که طبق حساب مهندس ، زمان مشاهده فرا رسید، روی زانو نشست و تراشه‌های کوچکی را روی شن نصب کرد و کوتاه شدن

سایه‌ای را که از چوب برزمین‌افتاده بود زیر نظر گرفت .

« روزنامه‌نویس (یکی ازهمسفران مهندس) کرونومتر را دردست خودگرفته بود و آماده برای لحظه‌ای بود که سایه حداقل طول خود را پیدا کند . از آنجا که مهندس مشاهدهٔ خود را در ۱۶ آوریل انجام داد، یعنی یکی از چهار روزی که ظهر حقیقی با ظهرمتوسط یکی است ، لحظه‌ای را که‌روزنامه‌نویس منتظرش بود ، عبارت اززمان نصف‌النهار واشنگتن بود (محل عزیمت مسافرین) .

«خورشید به کندی حرکت می کرد وسایه به‌تدریج خودرا جمع می کرد . بالاخره زمانی رسید که سایه شروع به بزرگ شدن کرد ، مهندس پرسید :

« ـ چه ساعتی است ؟

« روزنامه نویس جواب داد :

« ـ ساعت پنج و یك دقیقه .

« مشاهده تمام شد . تنهامی‌بایست مختصری محاسبه انجام داد .

« مشاهده نشان داد که بین نصف‌النهار واشنگتن و نصف‌النهار حزیرهٔ لینکلن قریب به‌پنج ساعت اختلاف زمانی وجود دارد . یعنی وقتی که درجزیره ظهراست ، درواشنگتن ساعت پنج بعدازظهر است. حرکت ظاهری خورشید به‌دور زمین در هر ۴ دقیقه یك درجه و دریك ساعت ۱۵ درجه است . اگر ۱۵ درجه را در ۵ (تعداد ساعتها) ضرب کنیم ۷۵ درجه بدست می آید .

« واشنگتن‌درنصف‌النهار ″۱۱′۳°۷۷ غرب نصف‌النهار گرینویچ قرارگرفته است (درامریکاهم مثل‌انگلستان گرینویچ رامبداء گرفته‌اند) . به‌این‌ترتیب جزیره درطول ۱۵۲ درجهٔ غربی واقع شده است .

« اگر دقت غیرکافی مشاهده کننده را درنظر بگیریم ، می‌توان

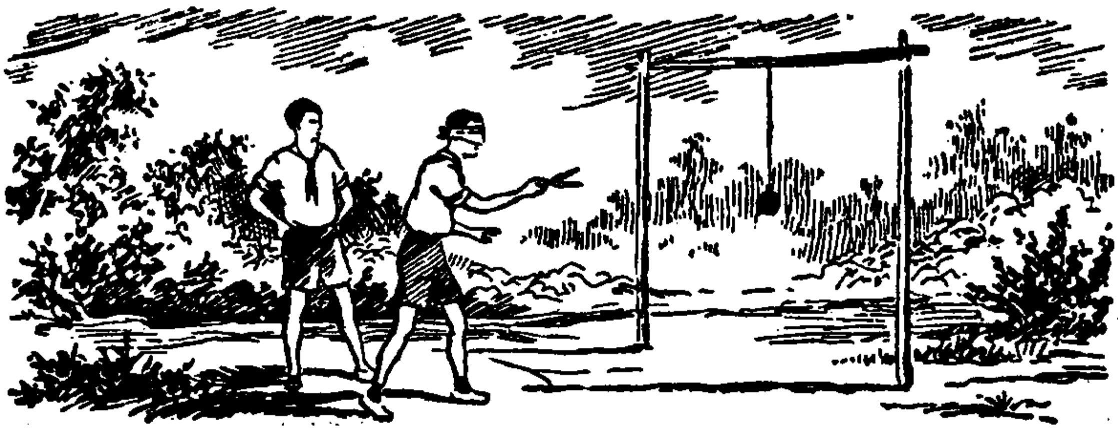
گفت که جزیره بین مدار ۳۵ تامدار ۴۰ عرض جنوبی و بین نصف‌النهار ۱۵۰ تا نصف‌النهار ۱۵۵ غرب گرینویچ قرارگرفته است» .

متذکر می‌شویم که با روشهای مختلف می‌توان طول جغرافیائی را محاسبه کرد که روش قهرمانان ژول ورن یکی از آنهاست (که به‌روش کرونومتر معروف است) . به‌همین ترتیب راه حلهای دیگری هم برای محاسبهٔ عرض جغرافیائی به‌طوردقیق وجوددارد (که مثلا برای ملوانان ودر هوای نامساعد به‌کار می‌آید).

قسمت دوم

شوخی وجدی در هندسه

ریاضی و مفاهیم آن بقدری خشك وجدی
است ، که نمی‌توان اززمینه‌های جالب
و سر گرم کنندهٔ آن صرفنظر کرد .
ـ پاسکال



۸

هندسه در تاریکی

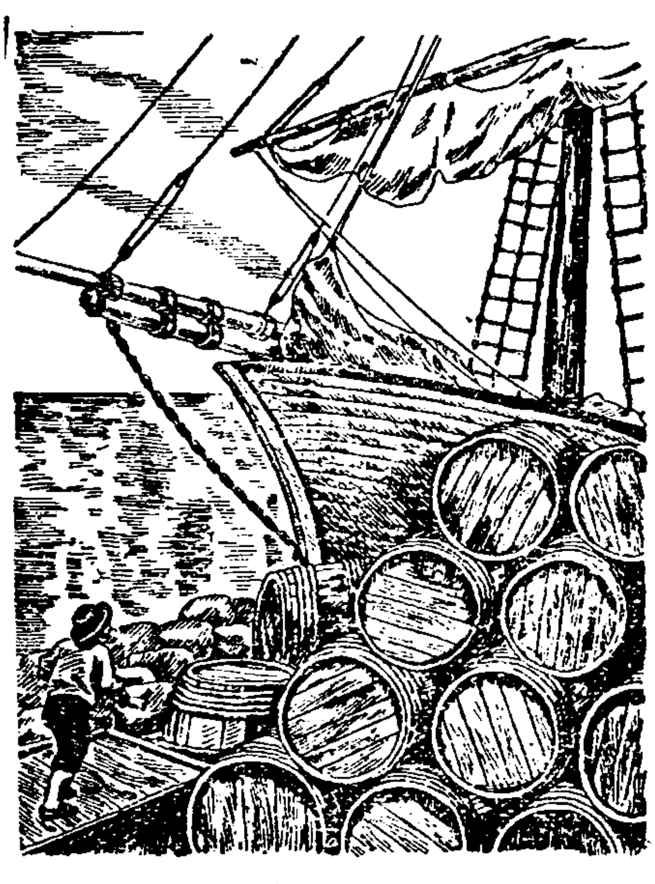
در عمق کشتی

از فضای آزاد دشت و دریا به عمق تنگ و تاریك یك کشتی کهنهٔ قدیمی می‌رویم. جائی که قهرمان جوان یکی‌ازداستانهای ماین رید توانست چنان مسئلهٔ هندسی‌را حل کند که ، بدون تردید خوانندگان‌ما نه در دروس ریاضی آنرا یاد گرفته‌اند و نه به آن برخورد کرده‌اند . ماین‌ریددرداستان«پسربچهٔدریانورد» (یا«درعمق کشتی»)ماجرای‌جوانی را نقل می کند که عاشق ماجراهای دریائی است (شکل ۱۰۵) و چون نمی‌تواند مخارج سفر خود را به‌پردازد ، پنهانی وارد در طبقهٔ زیرین یك کشتی ناشناس می‌شود و در آنجا ناگهان متوجه می‌شود که در تمام

دوران مسافرت دریائی راه خروج او بسته است . اودرمیان تودهٔ انبوهی از اثاثیه محبوس می‌شود ، ولی به یك جعبه نان خشك ویك بشکه آب برخورد می کند. پسر بچهٔ عاقل می‌فهمد که با این ذخیرهٔ محدود غذا و آب باید تا حد امکان صرفه‌جو باشد وبنابراین بایدسهم روزانهٔ غذا و آب خود را معین کند .

شمردن نانهای سوخاری کار مشکلی نبود ولی بدون اطلاع از ذخیرهٔ کلی ، چگونه سهم روزانهٔ آب راپیدا کند ؟ این بود مسئله‌ای که در مقابل قهرمان جوان ماین‌رید قرارداشت . به‌بینیم چگونه آنرا حل کرده است .

اندازه‌گیری بشکه



۱۵۰ . جوانی که‌بدنبال ماجرا می‌رود (از داستان ماین‌رید) .

« باید سهم روزانهٔ آب را برای خودم معین کنم. برای این منظور باید بدانم که در بشکه چقدر آب هست وسپس آنرا به قسمتهای لازم تقسیم کنم .

«درمدرسهٔ روستائی‌ضمن‌درس حساب، معلم‌ما بعضی اطلاعات مقدماتی مربوط به هندسه رابه ما یاد داده بود ، من به مفاهیم مکعب ، هرم ، استوانه و کره آشنا بودم و همین طور می‌دانستم که بشکه‌را می‌توان

مثل دو مخروط ناقصی دانست که از طرف قاعدهٔ بزرگتر به‌هم وصل شده باشند .

« برای اینکه گنجایش بشکهٔ آب‌را معین کنم، می‌بایست ارتفاع آن (ویا درواقع نصف ارتفاع آن) را بدانم ، سپس محیط قاعدهٔ یکی از دوطرف بشکه وهم‌محیط دایرهٔ مقطع‌متوسط آن (یعنی برآمده‌ترین قسمت بشکه) را معین کنم . با این اطلاعات من می‌توانستم با دقت تعیین کنم که محتوی بشکه چند واحد مکعب است .

« بنابراین فقط می‌بایست این سه مقدار را اندازه‌بگیرم ، واینهم کار بسیار مشکلی بود .

« بچه‌ترتیب باید این اندازه‌گیری را انجام داد ؟

« تعیین ارتفاع بشکه مشکل نبود . بشکه درجلومن قرارداشت ؛ ولی دربارهٔ دایره‌ها، من نمی‌توانستم به آنها دسترسی پیدا کنم. قد من کوتاه‌تر از آن بود که به‌آنها دسترسی پیدا کنم ، علاوه بر آن جعبه‌هائی که دور وبر ریخته بود دست وپای آدم رامی‌گرفت .

« اشکال دیگری هم وجود داشت : من نه‌مقیاسی داشتم ونه‌نخی که باکمك آن بتوانم اندازه‌گیری را انجام‌دهم ؛ چگونه می‌شد ، بدون دردست داشتن هیچ وسیله‌ای ، مقادیرمورد احتیاج را معین کرد ؟ ولی من تصمیم‌گرفتم ، تا وقتی که بطور همه‌جانبه دربارهٔ نقشهٔ خود فکر نکرده‌ام ، از آن صرفنظر نکنم .

خط‌کش اندازه‌گیری
(مسئلهٔ ماین رید)

« همانطور که دربارهٔ بشکه فکر می‌کردم که چگونه اندازه‌های

آنرابطور کامل تعیین کنم، ناگهان چیزی بخاطرم رسید که مشکل‌مراحل می‌کرد. يك‌چوب باریك می‌توانست بمن کمك کند ،به‌شرطی که طول آن‌چنان‌باشد که بتوانداز‌پهن‌ترین جای بشکه‌کاملا عبور کند. اگرچوب را دربشکه داخل می کردم وتا دیوار مقابل فرومی‌بردم، طول قطر آنرا بدست می‌آوردم . کافی بود که طول چوب را سه‌برابر کنم تا محیط دایره بدست آید. البته این يك محاسبهٔ دقیق نیست ، ولی برای اندازه‌گیریهای عادی کاملا کافی است . و چون سوراخی را که قبلا در بشکه به‌وجود آورده بودم درست در قسمت پهن آن بود ، وقتی که چوب را از آنجا داخل می کردم ، همان قطری را بدست می‌آوردم که لازم داشتم .

« اماچوب را از کجا پیدا کنم ؟ خیلی مشکل‌نبود ، تصمیم گرفتم که ازچوب جعبهٔ سوخاری استفاده کنم و بلافاصله مشغول شدم ، طول جعبه ۶۰ سانتیمتر بود ، درحالیکه بشکه بیش از دو برابر آن عرض داشت . ولی این مطلب نمی‌توانست اشکالی بوجود آورد ، میبایست سه تکه چوب تهیه کنم و آنها را بهم وصل نمایم تا برای طول مورد احتیاجم کافی باشد .

« چوب‌را درطول رگه‌های آن بریدم وسه‌قطعه‌چوب گرد وصاف آماده کردم . بچه‌ترتیب آنها را بهم وصل کنم ؟ برای این منظور از بند کفشهای خود استفاده کردم که طول آنها به زحمت به يك متر می‌رسید . چوبها را بهم محکم کردم و به‌این ترتیب چوبی به‌اندازهٔ کافی ـ قریب يك مترونیم ـ بدست‌آوردم .

« ولی همینکه شروع به‌اندازه گیری کردم ، به مشکل جدیدی برخوردم . معلوم شد ، چوبی را که درست کرده‌ام نمی‌توان وارد

بشکه کرد : جا خیلی تنگ بود . چوب را هم نمی‌شد خم کرد . چون بدون تردید می‌شکست .

«بزودی راه‌حل مشکل را پیدا کردم که چگونه چوب اندازه گیری را وارد بشکه کنم : قسمتهای چوب را از هم جدا کردم ، ابتدا یکی از آنها را وارد بشکه کردم وسپس قطعه چوب دوم را به‌انتهای آن بستم و باز به داخل بشکه هل دادم ودر آخر کار قطعه چوب سوم را به آن وصل نمودم .

« چوب را در جهتی قرار دادم که درست به دیوار بشکه در نقطهٔ مقابل سوراخ ، تکیه کند و سپس روی آن در مقابل سطح بشکه علامتی گذاشتم . با کم کردن ضخامت دیواره ، مقداری را که برای اندازه‌گیری لازم داشتم ، بدست آوردم .

« چوب را ، بهمان طریقی که وارد کرده بودم ، از بشکه بیرون آوردم ، ضمناً سعی کردم نقاطی را که در آنجا قسمتهای جداگانهٔ چوب بهم‌وصل شده بودند ، دقیقاً بخاطر بسپارم ، تابتوانم بعداً آنرا بهمان صورتی که داخل بشکه بود ، در آورم . زیرا یك اشتباه کوچك ، ممکن بودنتیجه‌ای بدست‌بدهد که بامقدارواقع تفاوت‌قابل‌توجهی داشته‌باشد .

« به‌این‌ترتیب من قاعدهٔ پایین مخروط ناقص را دردست داشتم. حالا می‌بایست قطر ته بشکه ، یعنی قطر قاعدهٔ بالای مخروط را پیدا کنم. چوب را روی بشکه قراردادم ، بطوریکه انتهای آن برلبهٔ مقابل بشکه تکیه کرده باشد و از آنجا قطر مورد نظررا اندازه گرفتم. وقتی که برای این عمل صرف کردم ، بیش از یك دقیقه نبود .

« تنها چیزی که باقی مانده بود ، ارتفاع بشکه بود . بایستی ، چوب را بطورعمودی در کنار بشکه قرار می‌دادم ، نمی‌توانستم به‌بینم که‌کجای آن به‌لبهٔ بالای بشکه می‌رسد . من فقط می‌توانستم هرچیزی

را لمس کنم : ناچاربودم بادست لبهٔ بشکه وچوب را پیدا کنم ، علاوه بر آن ممکن بود که در کنار بشکه بطور مایل قرار گرفته باشد و بنابراین مقدار ارتفاع بطور نامطمئن بدست آید .

« خوب‌فکر کردم‌وبالاخره توانستم راهی‌برای‌رفع‌این مشکل‌هم پیدا کنم . فقط دوچوب را بهم وصل کردم و چوب سوم را روی کف بالای بشکه چنان قراردادم که در حدود ۳۰-۴۰ سانتیمتر از لبهٔ بشکه جلو آمده باشد ، سپس چوب بزرگتر راطوری درانتهای آن قراردادم که بر آن عمود ، یعنی با ارتفاع بشکه موازی باشد . سپس روی این چوب بزرگتر درجائی که بشکه برآمدگی بیشتری داشت ، علامت گذاشتم و به‌این ترتیب نصف ارتفاع بشکه ، یعنی ارتفاع یکی از مخروطهای‌ناقص رابدست آوردم .

« حالادیگر همهٔ شرایط لازم‌برای حل مسئله راجمع کرده بودم.

کارهائی‌که باید انجام می‌گرفت

« بیان حجم بشکه برحسب واحد مکعب و سپس محاسبهٔ آن برحسب گالون* ، مستلزم محاسبات ساده‌ای بود که انجام آنها بدون هیچ زحمتی انجام‌می‌گرفت . البته من وسائل نوشتن نداشتم ، ولی در صورت وجود هم‌بدرد نمی‌خورد ، زیرادرجای‌کاملاتاریکی قرارگرفته بودم ، برای من اغلب پیش‌آمده بود که چهار عمل اصلی را بدون قلم وکاغذ ودر ذهن‌انجام دهم، اینجا هم با عددهای بزرگ سروکار نداشتم

*) گالون ، واحدی برای اندازه‌گیری حجم مایعات . هرگالون انگلیسی ۲۷۷ اینچ مکعب است (تقریباً $۴\frac{۱}{۲}$ لیتر). هرگالون مساوی۴ کوارت وهر کوارت ۲ پینت است .

ومی‌توانستم ازعهدهٔ انجام آن برآیم .

« ولی من به‌مشکل جدیدی برخوردم . من ارتفاع و هردوقاعدهٔ مخروط‌ناقص‌رابا‌چوب‌اندازه‌گرفته‌بودم، ولی‌مقدارعددی‌این‌مفروضات چقدر است ؟ قبل از محاسبه ، لازم بود که این مقادیر را با عدد بیان کنم .

«ولی به‌خاطرم آمد که من در بندر قد خود را اندازه گرفته بودم که حدود چهار فوت بود . این اطلاع چگونه می‌توانست بمن کمك کند ؟ خیلی ساده : می‌توانستم‌چهارفوت راروی چوب علامت بگذارم و آنرا مبنای محاسبات خود قراردهم .

« برای اینکه قد خودرا روی‌چوب علامتگذاری کنم، روی کف دراز کشیدم ، سپس چوب را روی خودم چنان قراردادم که یکی از دو انتهای آن در کنار پاهایم وانتهای دیگرش روی پیشانیم باشد . با یك دست‌چوب راگرفتم و با دست دیگر نقطه‌ای‌از آنرا که مقابل فرق سر من بود ، علامتگذاری کردم .

« بازهم یك اشکال دیگر ، اگر روی چوبی که به‌طول ۴ فوت است ، تقسیمات کوچکتر (اینچ) وجود نداشته باشد ، نمی‌تواند برای اندازه‌گیری مورد استفاده قرار گیرد ظاهراً تقسیم ۴ فوت به ۴۸ قسمت (اینچ) و قراردادن این‌تقسیمات روی خط کش‌مشکل نیست . از لحاظ نظری انجام این عمل فوق‌العاده ساده است ، ولی در عمل ، بخصوص در تاریکخانه‌ای که من بودم ، آنقدرها هم ساده نبود .

« چگونه این ۴ فوت را روی چوب پیدا کنم ؟ و چگونه هریك از نیمه‌ها را دوباره نصف کنم و بالاخره هر فوت را به ۱۲ اینچ بطور مساوی تقسیم کنم ؟

«چوبی را در حدود ۲ فوت تهیه کردم. آنرا با چوبی که روی آن ۴ فوت را علامت گذاشته بودم مقایسه کردم، معلوم شد که دو برابر آن کمی بیشتر از ۴ فوت است. چوب را کوتاهتر کردم و یکبار دیگر آنرا با چوب ۴ فوتی مقایسه کردم، باز هم از دو فوت بیشتر بود. عمل را تکرار کردم، مرتبهٔ پنجم توانستم چوبی تهیه کنم که دوبرابر آن مساوی ۴ فوت باشد.

«این کار وقت زیادی ازمن گرفت. ولی من به اندازهٔ کافی وقت داشتم وحتی راضی بودم که به نحوی توانسته‌ام خود را مشغول کنم.

«با وجود این، راه مختصرتر کردن کار آینده را پیدا کردم، به جای چوب از قیطان استفاده کردم که می‌شد با راحتی آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم کرد و برای این منظور، بند کفشهای من خیلی بدرد می‌خورد. آنها را با گرهٔ محکمی بهم بستم و به‌کار مشغول‌شدم. به زودی توانستم قطعه‌ای به طول یك فوت ازآن جدا کنم. تااینجا به نصف کردناحتیاج داشتم که‌کاری ساده بود، ولی‌کار بعدی مشکل‌تر بود. ولی من آنرا هم انجام دادم وبه‌زودی سه‌قطعهٔ ۴ اینچی بدست آوردم. حالا می‌بایست یکی از این قطعه‌ها را به دو قسمت و سپس یکی ازقسمتهای‌بدست آمده را دوباره به دو قسمت تقسیم‌کنم تاطولی مساوی یك‌اینچ بدست‌آورم.

«حالا دیگر وسیلهٔ لازم را در دست داشتم که بتوانیم روی چوب تقسیمات اینچی بدست آورم؛ با جدیت به‌کار مشغول شدم با واحد اندازه‌گیری خود ۴۸ علامت به فواصل یك اینچ روی چوب گذاشتم. من دیگر خط‌کشی با واحدهای یك اینچی در اختیارداشتم ومی‌توانستم با کمك آن طولهای مورد نظر خود را اندازه بگیرم. بعد از این کوششها بود که دیگر توانستم مسئلهٔ خودرا تا آخر حل کنم

مسئله‌ای که برای من اهمیت حیاتی داشت .

« من به سرعت به محاسبه پرداختم . دو قطر را اندازه گرفتم و مقدار متوسط آنها را بدست آوردم ، سپس مساحت دایرهٔ متناظر به این قطر را محاسبه کردم. به‌این ترتیب مقدار قاعدهٔ استوانه‌ای را دردست داشتم که معادل با مخروط ناقصی است که ارتفاعش مساوی ارتفاع استوانه باشد . با ضرب مساحت قاعده در ارتفاع حجم مورد نظر را برحسب واحد مکعب بدست آوردم .

«عددی راکه بدست آوردم برحسب اینچ مکعب بود ، آنرا بر ۶۹ تقسیم کردم تا معلوم شود که بشکه‌چند کوارت مکعب حجم دارد .

« بشکه بیش از صد گالون ـ یا دقیقتر ۱۰۸ گالون ، گنجایش داشت » .

تحقیق درستی محاسبه

خواننده‌ای که با هندسه آشنائی داشته باشد ، بدون تردیدمتوجه می‌شود که طریقهٔ محاسبهٔ حجم دو مخروط ناقص ، آنطور که به‌وسیلهٔ قهرمان جوان ماین رید انجام‌گرفته است، کاملا دقیق نیست . اگرشعاع قاعدهٔ کوچکتر را r ، شعاع قاعدهٔ بزرگتر را R و ارتفاع بشکه ، یعنی دوبرابر ارتفاع‌هریك ازدومخروط ناقص‌را h بگیریم(شکل۱۰۶) حجمی که به وسیلهٔ پسر بچه بدست‌آمده است ، با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود :

$$\pi\left(\frac{R+r}{۲}\right)^{۲}h=\frac{\pi h}{۴}(R^{۲}+r^{۲}+۲Rr).$$

ازطرف دیگراگر به روابط هندسی مراجعه کنیم (یعنی ازرابطهٔ مربوط

به‌حجم مخروط ناقص استفاده کنیم) . برای حجم موردنظر به‌عبارت زیر می‌رسیم :

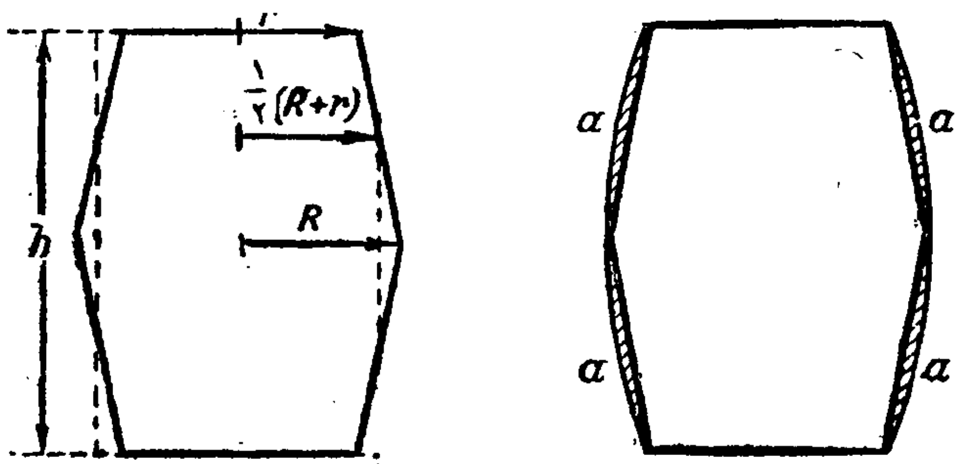
$$\frac{\pi h}{۳}(R^{۲}+r^{۲}+Rr)$$

این دورابطه یکی نیستند و به‌سادکی معلوم می‌شود که دومی به‌اندازهٔ

$$\frac{\pi h}{۱۲}(R-r)^{۲}$$

از اولی بیشتر است .

روشن است که این اختلاف دوحجم یعنی $\frac{\pi h}{۱۲}(R-r)^{۲}$ مقداری است مثبت ، یعنی روش ماین‌رید نتیجه را کمترازواقع بدست می‌دهد.



۱۰۶. تحقیق درستی محاسبه

بد نیست که میزان تقریبی این اختلاف را پیدا کنیم . معمولا بشکه را طوری می‌سازند که قطر مقطع بزرگتر آن به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۵}$ خودش از قطر قاعده بیشتر باشد ، یعنی : $R-r=\frac{R}{۵}$. فرض می‌کنیم که بشکهٔ مربوط به داستان ماین‌رید هم به همین شکل باشد ، در اینصورت می‌توان اختلاف بین حجم بدست‌آمده را باحجم واقعی مخروط ناقص بدست‌آورد :

$$\frac{\pi h}{۱۲}(R-r)^{۲}=\frac{\pi h}{۱۲}\left(\frac{R}{۵}\right)^{۲}=\frac{\pi h R^{۲}}{۳۰۰},$$

یعنی قریب $\frac{\pi R^{۲}}{۱۰۰}$ (اگر $\pi=۳$ بگیریم) . همانطور که‌می‌بینیم، اختلاف برابر است با حجم استوانه‌ای که شعاع قاعدهٔ آن شعاع مقطع بزرگتر بشکه وارتفاع آن یك سیصدم ارتفاع آن باشد .

ولی در این حالت بهتر است نتیجه را کمی بزرگتر بگیریم ، زیرا حجم بشکه از حجم دو مخروط ناقص بزرگتر است . همانطور که‌ازشکل ۱۰۶ (سمت راست) دیده می‌شود ، بااین روش اندازه‌گیری، قسمتی از حجم آن ، که با حرف a نشان داده شده است (وروی شکل هاشورخورده است) ، حذف می‌شود .

ریاضی‌دان جوان ماین‌رید ، بدون اینکه دربارهٔ رابطهٔ مربوط به حجم بشکه فکر کند ، به‌بعضی مقدمات هندسی متوسل می‌شود تا بتواند باروش‌ساده‌ای گنجایش‌تقریبی بشکه‌رابدست‌آورد . باید متذکر بشویم که مسئلهٔ مربوط به‌اندازه‌گیری حجم‌دقیق بشکه ، مسئلهٔ ساده‌ای نیست . کپلرمنجم بزرگ آلمانی (قرن هفدهم) هم در این باره‌فکر کرده است و بین آثار ریاضی این دانشمند قسمتی به‌هنراندازه‌گیری بشکه اختصاص دارد . راه حل ساده و دقیق این مسئله به طریق هندسی ، تا امروز هم پیدا نشده است ؛ تنها روشهائی وجود دارد که جواب را به‌طور کم وبیش تقریبی معین می کند. مثلا در جنوب فرانسه از رابطهٔ سادهٔ زیر استفاده می کنند :

$$\text{حجم بشکه}=۳/۲hRr,$$

که ازلحاظ عملی به‌اندازهٔ کافی خوب است .

مطالعهٔ این سئوال هم جالب است : چرا بشکه را به‌شکل استوانه‌ای می‌سازند که‌سطح‌جانبی آن‌بر آمده‌باشد واز لحاظ‌اندازه‌گیری

تولیداشکال کند؟ آیا بهتر نیست که بشکه‌را به‌شکل استوانهٔ کامل بسازند؟ البته چنین بشکه‌های استوانه‌ای شکل را هم می‌سازید ، منتهی نه‌با چوب، بلکه با فلز (مثلا برای نفت) . ولی چرا بشکهٔ چوبی را برآمده درست می‌کنند ؟ این شکل ساختمانی چه مزیتی دارد ؟

فایدهٔ این شکل اینست که می‌توان تسمه‌هارا باروش‌ساده‌ای دور بشکه محکم کرد : آنها را در ابتدای بشکه می‌بندند و به‌طرف قسمت عریض می‌برند . در اینصورت تسمه‌ها سخت و محکم بشکه را دربر می‌گیرند و به‌اندازهٔ کافی آنرا با دوام می‌کنند .

بهمین علت است که سطل ، طشتك ویا ظرفهای دیگر چوبی را هم معمولا استوانه‌ای نمی‌سازند و به‌شکل مخروط ناقص درمی‌آورند ، در این موارد هم‌می‌توان به‌سادگی تسمه‌های حفاظ را درقسمتهای پهن‌تر ظرف محکم کرد (شکل ۱۰۷) .

بی‌مناسبت نیست که دراینجاخواننده را با نظریوهان‌کپلر دربارهٔ این مطلب آشنا کنیم . این ریاضی‌دان بزرگ در فاصلهٔ کشف قوانین دوم وسوم خود دربارهٔ حرکت سیارات ، توجه خود را به‌شکل بشکه معطوف داشت وحتی در این زمینه یك اثر صرفاً ریاضی «طریقهٔ جدید اندازه‌گیری بشکه‌های شراب» نوشته است. این اثر به‌این‌ترتیب شروع می‌شود :

بشکهٔ شراب ، به‌دلیل مقتضیات مصالح ، ساختمان و مورد استعمال خود ، شکل گردی دارد که به سطح مخروطی و استوانه‌ای نزدیك است . اگر مایعات را برای مدت طولانی درظرفهای فلزی‌نگاه دارند ، ظرف را دچار زنگ زدگی می‌کند؛ ظرفهای شیشه‌ای وسفالی ازلحاظ‌اندازه کوچك واز لحاظ‌دوام‌نامطمئن‌اند؛ ظرفهای‌سنگی بخاطر وزن زیاد خود غیرقابل استفاده‌اند ، به‌این‌ترتیب تنها می‌توان شراب را

۱۵۷. تسمه‌هائی را که به‌شکل حلقه درآمده‌اند، به‌طرف قسمت پهن‌تر بشکه می‌برند، تا آنرا محکم دربرگیرد.

در ظرفهای چوبی نگاهداری کرد. از طرف دیگر، ازیك تنهٔ درخت هم‌نمی‌توان ظرفهائی‌باگنجایش زیاد و اندازه‌های مورد لزوم تهیه کرد، واگرهم تهیه بشود، دچار ترك خوردگی خواهند شد. بنابراین، باید بشکه‌ها راازاتصال قطعه چوبهای جدا ازهم درست کرد. و برای‌اینکه مایع داخل ظرف از شکافهای بین قطعات مختلف آن تراوش نکند، هیچ راهی وجود ندارد بجز اینکه آنها را با فشار بهم محکم کنیم ...

«اگر می‌شد قطعات چوب‌را به‌شکل کره بهم متصل کرد، ظرف کره‌ای شکلی که بدست می‌آمد، بهترین نوع ظرف بود. ولی چون اتصال چوبها به‌شکل کره ممکن نیست، به‌جای آن استوانه را انتخاب کرده‌اند. ولی این استوانه هم نمی‌تواند کامل و منظم باشد، زیرا تسمه‌های اتصالی ضعیف خواهندشد ونمی‌توان آنها را به‌اندازهٔ کافی محکم کرد، به‌همین مناسبت شکل‌بشکه را متمایل به‌مخروط می‌سازند، بطوریکه ازشکم آن به دوطرف کمی تنگ‌ترشده باشد. این شکل بشکه ضمناً برای به‌حرکت در آوردن آن و برای حمل‌ونقل آن به وسیلهٔ‌گاری کار را ساده‌تـر می‌کند: چون از دو نیمهٔ مشابه و با قاعده‌های مشترك تشکیل‌شده‌است، از لحاظ حمل‌ونقل باصرفه وازلحاظ دیدخوشنمااست»*

مسافرت شبانهٔ مارك تواین

حضور ذهن پسر بچهٔ ماین‌رید، با توجه به‌اوضاع و احوال‌غم‌انگیزی که داشت، باعث تعجب است. در چنان جای تاریکی که او قرارداشت، بسیاری از مردم حتی نمی‌توانند موقعیت درست خود را تاحدی درك کنند، چه رسد به‌اینکه برای این منظور به‌اندازه‌گیری و محاسبه هم بپردازند. آموزنده بودن داستان ماین‌رید وقتی روشن می‌شود که آنرا با نوشتهٔ فکاهی نویس مشهورهم وطن او مارك تواین مقایسه کنیم، وقتی که قهرمان اوبدون هدف وبدون درك موقعیت دراطاق

---

*) نبایدگمان کرد که اثر کپلر دربارهٔ اندازه‌گیری بشکه، از لحاظ ریاضی‌بی‌ارزش‌است ونابغهٔ معروف درساعات‌بیکاری وبه‌عنوان‌تفریح‌به‌آن پرداخته است. برعکس، این‌یك‌کار عمیق و جدی بوده است که برای‌نخستین‌بار مقادیر بی‌نهایت کوچك را وارد هندسه می‌کند و چیزی جزمقدمات محاسبات انتگرالی نیست. بشکهٔ شراب ومسئلهٔ اقتصادی‌اندازه‌گیری‌گنجایش‌آن برای‌کپلردستاویزی بود تا بازهم درمورد مطالب جدیدریاضی به‌طورعمیق وثمربخش تأمل نماید.

تاریك مهمانخانه سرگردان می‌شود. در این داستان بخوبی روشن شده است که چقدر مشکل است، در تاریکی تصور درستی از وضع اشیاء، حتی در یك اطاق عادی ، وقتی که آنها را بخوبی نمی‌شناسیم ، داشته باشیم . ما در زیر به اختصار این ماجرای مضحك را از «مسافرت به خارج» مارك تواین می آوریم .

***

«من بیدار شدم و احساس تشنگی کردم. فکری خیال انگیز به سرم زد: لباسم را بپوشم، به باغ بروم و در کنار فواره، آبی به سر و صورتم بزنم و وروح خود را تازه کنم .

« به آرامی بلند شدم و به جستجوی وسائلم پرداختم . یکی از جورابهارا پیدا کردم . دومی کجاست ؟ هیچ تصوری در این باره نداشتم. با احتیاط از تخت پائین آمدم و کورمال اطراف راگشتم، ولی موفق نشدم. کمی آنطرف‌تر را جستجو کردم، هرچه پیدا می کردم رویهم می‌ریختم. به تدریج دورتر می‌شدم ولی لنگهٔ جوراب پیدا نشد، تا اینکه به مبل برخوردم. وقتی که خوابیده بودم ، اطراف من مبل زیادی نبود ؛ ولی حالا اطاق پر از مبل شده بود ؛ بخصوص صندلی مثل اینکه همهٔ جاها را پر کرده بود . مگر در این لحظه ، دوخانوادهٔ دیگر در اینجا سکونت نداشتند؟ من در تاریکی حتی یکی از این صندلیها را هم نمی‌دیدم ، ولی مرتباً سرم به آنها برخورد می کرد .

« بالاخره صرفنظر کردم ، آخر بدون یك جوراب هم می‌توانم زندگی کنم . بلند شدم و به طرف در، آنطور که گمان می کردم ، ایستادم ولی ناگهان تصویر تارخودم را در آینه دیدم .

« روشن بود که راه را گم کرده بودم و هیچ تصوری هم از موقعیت

خود نداشتم . اگر در اطاق فقط یك آینه بود ، می‌توانست راهنمائی برای جهت‌یابی من باشد ، ولی دو آینه در اطاق بود و از لحاظ ایجاد اشکال دوتا با هزارتا فرقی نداشت .

« خواستم از طریق دیوار خود را به‌در برسانم . تلاش جدید خود را شروع کردم ــ و قاب عکس بزمین افتاد . قاب بزرگ نبود ، ولی مثل یك پانوراُمای کامل سروصدا کرد . هاریس (که همسایهٔ من در اطاق بود وروی تخت دیگری خوابیده بود) تکان نخورد ، ولی من احساس کردم که اگر به رویهٔ خود ادامه دهم ، بدون تردید بیدارخواهد شد . به‌بررسی راه حل دیگری پرداختم . می‌خواستم دوباره میز گرد را پیدا کنم ــ تا حالا چندبار پهلوی این میز رسیده بودم ــ و باهدایت آن خودم را به‌تخت خوابم برسانم ، اگرتخت‌خواب را پیدا می کردم لااقل می‌توانستم تشنگی کشندهٔ خودم را تسکین دهم . بهتر از همه این‌بود که روی‌دستها وزانوهایم‌قرار گیرم‌وچهاردست‌وپا به‌جلو به‌خزم ، من این طریقه را بارها آزمایش کردم و به آن خیلی اعتماد داشتم .

« بالاخره موفق شدم میزرا پیدا کنم ــ سرم به آن خورد ــ البته سروصدای زیادی نکرد . دوباره ایستادم و شروع به راه رفتن کردم ، منتهی دستهای خود را بــه‌جلو دراز کردم ، و با انگشتانم به‌جستجو پرداختم. صندلی را یافتم ، سپس دیوار را ، یك صندلی‌دیگر، سپس کاناپه ، چوب دستی خودم ، باز هم یك‌کاناپه . و این برای من عجیب بود ؛ من بخوبی می‌دانستم که دراطاق فقط یك کاناپه وجود داشت . درباره روی صندلی افتادم و صدای جدیدی بلند شد . بعددوباره به‌یك ردیف صندلی برخوردم .

« یکباره چیزی به‌فکرم رسید که قاعدتاً می‌بایستی‌خیلی قبل از آن متوجه شده باشم : میزگرد بود و بنابراین نمی‌توانست به‌عنوان

نقطه‌ای برای جهت دادن به‌مسیر من کمك کند . در فضای بین صندلیها و کاناپه‌ها با حدس جلو می‌رفتم ، ولی وضع برایم کاملا ناآشنا بود ، ناگهان شمعدان از سر بخاری به‌زمین افتاد . بعد از شمعدان چراغ را انداختم وبعد ازچراغ ، تنگ آب باصدای وحشتناکی به زمین افتاد .

« باخودم فکر کردم : آهان عزیز ، بالاخره تراپیداکردم !

« هاریس فریاد زد ـ دزد ! آی دزد !

« سروصدا و فریاد همهٔ اهل خانه را بیدار کرد و صاحبخانه ، مهمانان و مستخدمین با چراغ وفانوس آمدند .

« من به‌اطراف‌خود نگاه کردم. معلوم‌شد که پهلوی تخت‌هاریس ایستاده‌ام . فقط یك کاناپه پهلوی دیوار بود ، صندلی هم یکی بیشتر نبود ومن ، مثل یك سیاره ، به دور آن چرخیده بودم و مثل یك ستارهٔ دنباله‌دار مرتباً به‌آن برخورد کرده بودم و درست نیمی از شب را به این کار مشغول بوده‌ام .

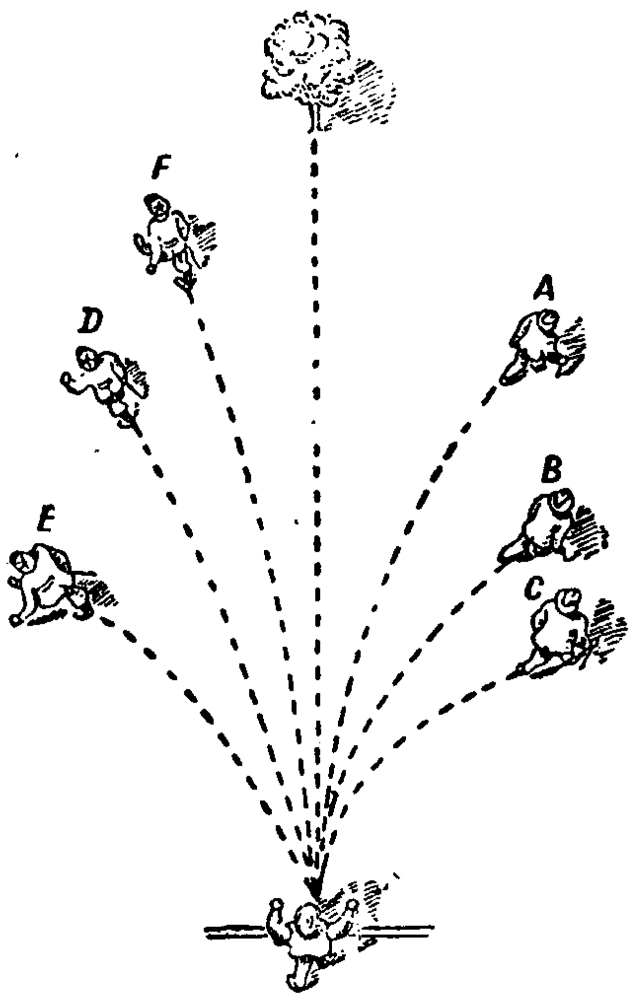
« ومن با قدمهای خود توانسته بودم در این مدت ۴۷ میل راه بروم » .

***

مطلب اخیر به‌هرحسابی اغراق‌آمیز است : درجریان چند ساعت نمی‌توان ۴۷ میل را با پای پیاده طی کرد ، ولی بقیهٔ تفصیلات داستان کاملامقرون به‌حقیقت است وبخوبی اشکالات مضحکی را که معمولا در یك‌اطاق تاریك و ناآشنا برای‌ما پیش می‌آید، معرفی‌می‌کند . به‌خصوص حالا می‌توان روش‌کار و حضورذهن حیرت آور قهرمان جوان ماین‌رید را ارزش‌یابی کرد ، که نه‌تنها درتاریکی مطلق توانست خود را توجیه کند ، بلکه درچنین شرایطی حتی‌مسئلهٔ مشکل ریاضی را هم حل کرد.

چرخش مرموز

به‌مناسبت سرگردانی تو این در اطاق تاریك ،ازپدیدهٔ مرموزی یاد می‌کنیم که برای همهٔ کسانی که با چشم بسته راه می‌روند ، پیش می‌آید : چنین فردی نمی‌تواند به‌طور مستقیم حرکت کند، حتما جهت راگم می‌کند و با حرکت خود قوسی رسم می‌کند، درحالیکه خودش گمان می‌کند که روی خط راست به‌جلو می‌رود (شکل ۱۰۸) .



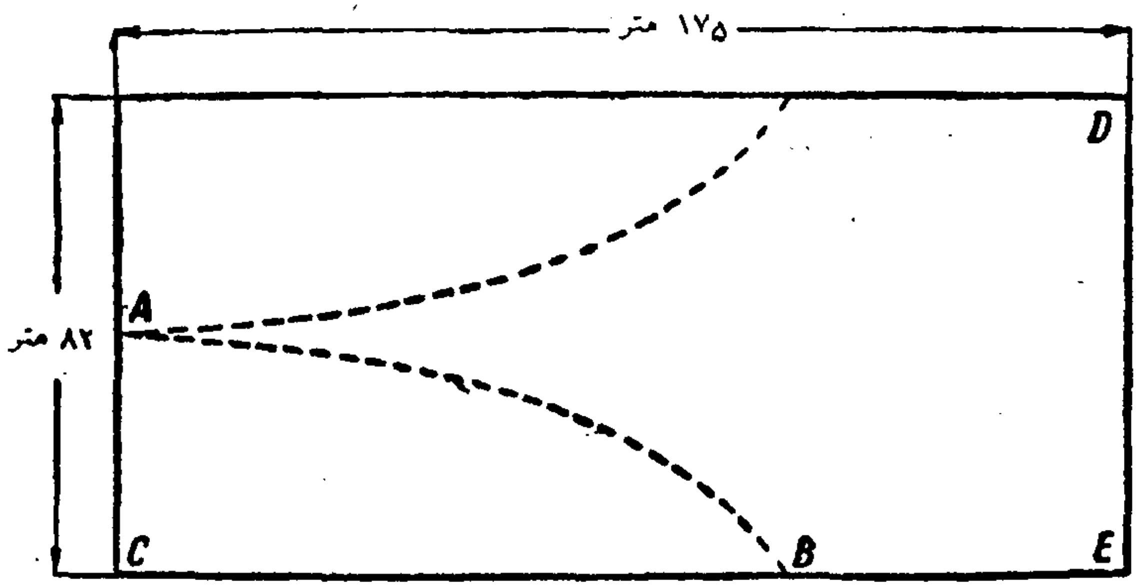
۱۰۸.حرکت با چشمهای بسته

از قدیم این مطلب را متذکرشده‌اند که اگر مسافرین بیابانها یا دشتهای وسیع ، در کولاك یاهوای‌مه آلود، و به‌طور کلی درتمام مواردی که نتوان جهت‌یابی کرد ، بدون قطب‌نما باشند ،راه راست راگم‌می کنند وبه رویِ‌قوسی ازدایره حرکت خواهند کرد و پس از مدتی بهمان‌جای‌اولی خود برخواهند گشت . شعاع دایره‌ای که ، در این‌مواردآدم پیاده در مسیر آن خواهندرفت قریب ۶۰ تا ۱۰۰ متر است و هرچه سرعت اوبیشترباشد، شعاع‌دایره کوچکتر می‌شود، یعنی قوس دایره زودتر بسته می‌شود .

در این‌باره آزمایشهای خاصی برای‌مطالعهٔ انحراف افرادازخط مستقیم به‌مسیر دایره‌ای‌انجام داده‌اند . این نمونه‌ای ازاین‌آزمایشهاست که به‌وسیلهٔ ای . سپیرین قهرمان اتحاد شوروی گزارش داده شده است:

« درفرودگاه صاف و زمردین ، صد نفر از خلبانان آینده صف کشیده بودند . چشمهای همهٔ آنها را بستند و دستور داده شدکه‌به‌طور مستقیم به‌طرف جلوحرکت‌کنند . افراد براه افتادند . . . ابتدا به‌طور مستقیم می‌رفتند ، سپس بعضی به‌طرف است و بقیه به‌طرف چپ تغییر جهت دادند و به‌تدریج روی دایره‌هائی قرار گرفتند که به‌جای اولیهٔ آنها منجر می‌شد ».

آزمایش مشابهی هم در میدان مارك شهر ونیز انجام‌گرفته است چشمهای‌عده‌ای رابستند و آنها رادریك‌انتهای میدان ، درست روبروی کلیسا ، قراردادندو از آنها خواستند که حرکت‌کنند . با وجودی‌که می‌بایستی فقط ۱۷۵ متر پیش بروند ، هیچیك از افراد مورد آزمایش به‌نمای عمارت (که ۸۲متر‌عرض داشت) نرسیدند . همهٔ آنها به این ویا



۱۵۹. طرح آزمایش میدان مارك در ونیز

آن‌طرف منحرف شدند وروی یك مسیرمنحنی به‌یکی از ستونهای کنار رسیدند (شکل ۱۰۹) .

خوانندهای که‌داستان ژول ورن بنام «ماجراهای‌کاپیتان هاته‌راس» رامطالعه‌کرده باشد،احتمالاً این مطلب را به‌یادداشته باشد که مسافرین، درصحرای غیرمسکونی‌و‌پوشیده‌ازبرف به‌ردپای کسی برخوردمی‌کنند:

«دکتر فریاد زد : ــ دوستان من ، این رد پای ماست . ما در مه وطوفان راه خودرا گم‌کرده‌ایم وبه‌رد پای خودمان رسیده‌ایم ...»

توصیف جالبی از اینگونه سرگردانی روی محیط دایره را ل. ن. تولستوی در داستان«کارفرما وکارگر» خود به‌ما داده است :

«واسیلی آندره‌ایچ ، اسب را به‌طرفی راند ، که معلوم نبود بچه علت گمان می‌کرد جنگل و کلبه‌ای وجود دارد . برف چشمهای اوراکورکرده بود ، باد باشدت خود ، می‌خواست،راه رابراوبه‌بندد ، ولی او به‌جلو خم شده بود وبدون وقفه اسب را می‌تازاند .

«پنج‌دقیقه جلـو رفت ، بنظرش می‌آمدکـه مستقیم حرکت می‌کند، ولی به‌جز سراسب و بیابان سفید هیچ‌چیز نمی‌دید .

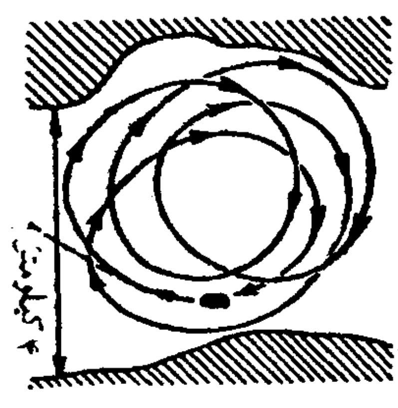
«ناگهان یك سیاهی جلو اوپیدا شد . قلبش ازخوشحالی شروع به طپش کرد و به طرف این سیاهی راند ، دیگر حتی دیوار خانه‌های دهکده را هم می‌دید . ولی این سیاهی چیزی جز دیوار بین علفهای سیاه بلند نبود ،.. و منظرهٔ این علفهای سیاه ، با باد موذی و نامطبوعی که می‌وزید ، واسیلی آندره‌ایچ را به‌لرزه در آورد ، و او با عجله اسب راازحرکت بازداشت ، متوجه شده بود که نزدیك شدن به‌علفها، درحقیقت به‌معنای آنست که جهت قبلی او کاملا تغییر کرده است .

«اسب را برگرداند و دوباره حرکت کرد ، دوباره در مقابل او چیزی سیاهی زد . دوباره همان علفهای‌بلند . بازهمان بوران‌خشك

وتند ، در نزدیکی جائی که اسب می‌رفت ، برف ردپائی را پوشانده بود . واسیلی آندره‌ایچ ایستاد ، خم شد و به‌دقت نگاه کرد : رد پای اسب بود که کمی پوشیده شده بود و نمی‌توانست چیز دیگری جز رد پای اسب خود او باشد ، روشن بود که او روی محیط دایره‌ای و در فضای کوچکی دور زده بود » .

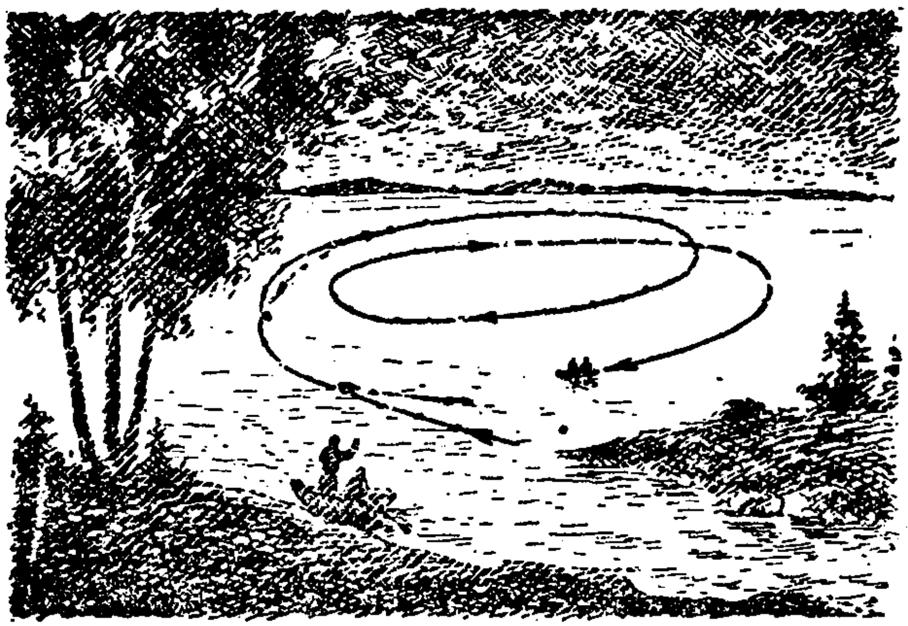
گولد برک زیست‌شناس نروژی در اثری که به این مطلب اختصاص داده است (۱۸۹۶) ، یک رشته اطلاعات تخصصی را در این باره با دقت جمع آوری کرده است . دو نمونه از این شواهد را ذکر می‌کنیم .

سه مسافر تصمیم گرفتند در یک شب برفی ، کلبهٔ خود را ترک کنند و با عبور از دره‌ای که ۴ کیلومتر عرض داشت خود را به‌منزل برسانند . منزل در طرفی واقع بود که در شکل ۱۱۰ با نقطه‌چین نشان داده شده است . در راه آنها به‌طور نامحسوسی به‌سمت راست ، روی منحنی که با پیکان نشان داده شده است ، منحرف می‌شدند . پس از مدتی ، به‌حساب وقتی که راه رفته بودند ، گمان می‌کردند که به مقصد رسیده‌اند ، ولی در حقیقت به‌همان جای اول خود (کلبهٔ مبداءِ حرکت) رسیده بودند ، دوباره تصمیم به‌حرکت گرفتند ، ولی بازهم باشدت بیشتری منحرف شدند و به‌همان جای اول خود رسیدند . وبه‌همین ترتیب برای بار سوم وچهارم‌هم تکرارشد . باناامیدی برای پنجمین دفعه اقدام کردند ، ولی نتیجه همان بود . بعد از دور پنجم ، دیگر از ادامهٔ تجربه سرباز زدند و منتظر صبح ماندند .



۱۱۰. طرح آوارگی سه‌مسافر

از این مشکل‌تر پارو زدن در دریا روی خط مستقیم، در شب تاریك بدون ستاره و یا در مه غلیظ است. به‌حالتی، که یکی از انواع حالتهای مشابه است، توجه کنیم: قایق رانها تصمیم‌می‌گیرند درهوای مه‌آلود از تنگه‌ای به‌عرض ۴ کیلومتر عبور کنند، دوبار به‌طرف ساحل مقابل حرکت می‌کنند، ولی به آن نمی‌رسند؛ بدون اراده محیط دو دایره را طی می‌کنند و در جائی که سوار شده بودند، پیاده می‌شوند (شکل ۱۱۱).



۱۱۱. وقتی‌که قایق‌رانها بخواهند درهوای مه آلود از تنگه‌ای‌عبور کنند.

برای حیوانات هم همین وضع پیش می‌آید. مسافرین قطبی حکایت می‌کنند که در بیابانهای برفی، حیواناتی که به‌سورتمه بسته شده‌اند، روی محیط دایره‌هائی دور می‌زنند، سگهائی را هم که با چشمهای بسته‌به‌آب‌انداخته باشند، روی چنین دایره‌هائی شنامی‌کنند. پرندگان کور هم‌روی دایره پرواز کنند. حیوانی که شکارچی درتعقیب اوست وازترس خصوصیت تعیین جهت را از دست داده است، به‌جای خط مستقیم، روی مارپیچ فرارمی‌کند.

جانور شناسها ثابت کرده‌اند که قورباغه‌ها ، خرچنگها ، مدوزها (عروس‌دریائی) وحتی آمیبهای ذره‌بینی دریك قطره آب ــ همه روی دایره حرکت می‌کنند .

این تمایل مرموز انسان و حیوانات را نسبت به‌دایره چگونه می‌توان تعبیر کرد ؟ چرا نمی‌تو ن درتاریکی جهت مستقیم را تشخیص داد ؟

اگر سئوال را درست مطرح کنیم ، هالهٔ ابهام آمیز آن از جلو چشم ما کنار می‌رود .

سئوال این نیست که چرا حیوانات روی دایره حرکت می‌کنند، بلکه باید سئوال کرد که برای حرکت روی خط مستقیم چه چیزی لازم است ؟

به‌حرکت یك ماشین کوکی اسباب بازی توجه کنید . ماشین کوکی هم‌روی خط‌راست حرکت نمی‌کند، بلکه به‌اینطرف و آنطرف می‌چرخد .

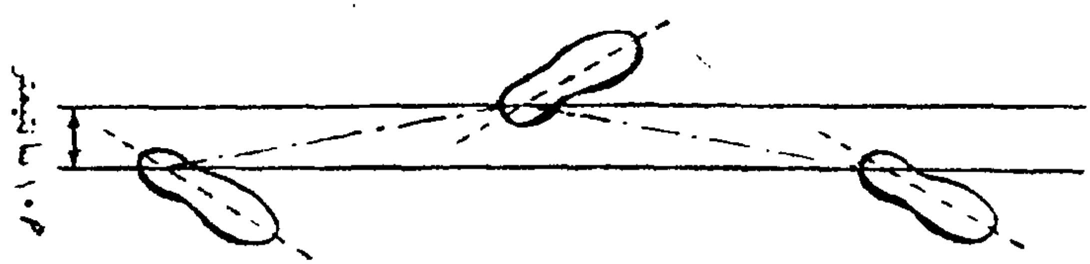
در این حرکت روی قوس ،کسی معمائی نمی‌بیند ؛ هر کسی حدس می‌زند که چرا این وضع پیش می‌آید . چرخهای طرف راست با چرخهای طرف چپ برابرنیست .

روشن است کــه موجودات زنده هم تنها در حالتی می‌تـوانند بدون‌کمك چشم درست روی خط راست حرکت کنند که عضلات سمت راست وچپ آنها کاملا به‌طوریکنواخت‌کار کنند . ولی مطلب بر سر اینست که تقارن بدن انسان وحیوانات کامل نیست . در مورد اکثر مردم‌وحیوانات‌عضلات طرف راست بدن رشد بیشتری‌نسبت به‌عضلات طرف چپ دارند . طبیعی است که وقتی مسافر پیاده ، دائماً قدم راست خود را کمی بلندتر از قدم چپ بردارد ، نمی‌تواند مسیر مستقیم را

حفظ کند واگر چشمهای اوراهنمای راه او نباشد ، بدون تردید به‌طرف چپ متمایل خواهد شد . به‌همین‌ترتیب ، قایق‌رانی که درهوای مه‌آلود نتواند جهب‌یابی کند ، اگر دست راست او قوی‌تر از دست چپش باشد، به‌طرف چپ متمایل می‌شود . این یك ضرورت هندسی است .

فرض کنیم که برای شخصی مثلا هرقدم پای چپ یك میلیمتر بیشتر از یك قدم پای راستش باشد . در اینصورت ، اگـر هرپای او متناوباً هزار قدم بردارد ، پای چپ او ۱۰۰۰ میلیمتر یعنی یك‌متر دورتـر از پای راست رفته است . واین امرروی دوخط راست موازی ممکن نیست و تنها روی محیط دودایرهٔ متحدالمرکز امکان دارد .

همچنین می‌توانیم، با استفاده ازنقشهٔ حرکت روی دایره در درهٔ برفی‌حساب کنیم که هرقدم پای‌چپ‌مسافرین چقدرازقدم پای‌راست آنها بیشتر بوده است(چون‌مسیر به‌طرف راست منحرف شده است ، واضح است که طول قدمهای پای چپ بیشتر از طول قدمهای پای راست بوده است) . فاصلهٔ بین خطوط جای پای راست و پای چپ ضمن راه رفتن تقریباً مساوی ۱۰ سانتیمتر یعنی ۰/۱ متر است (شکل ۱۱۲) . وقتی که شخص محیط یك دایرهٔ کامل را طی می کند ، پای راست او



۱۱۲. مسیر جای پای راست وپای چپ ضمن راه‌رفتن

مسافتی به‌طول $۲\pi R$ و پای چپ او مسافتی به‌طول $۲\pi(R+۰/۱)$ را

طی می‌کند ، که در آن R عبارتست از شعاع دایره برحسب متر . اختلاف این مسافتها یعنی :

$$۲\pi(R+۰/۱)-۲\pi R=۲\pi\times۰/۱=۰/۶۲\ (\text{متر})=۶۲۰\ (\text{میلیمتر})$$

از اختلاف طول قدمهای راست وچپ به‌وجود آمده است . اگر اختلاف بین طولهای این دو قدم را در تعداد قدمهای یکی از پاها ضرب کنیم ، همین اختلاف ۶۲۰ میلیمتر بدست می‌آید . از شکل ۱۱۰ می‌توان استنباط کرد که مسافرین ما دایره‌ای به قطر تقریباً ۳/۵ کیلومتر، یعنی به محیط تقریبی ۱۰۰۰۰ متر را دور زده‌اند . اگر طول متوسط هرقدم را ۰/۷ مترفرض کنیم، برای‌این مسافت به‌اندازهٔ $\frac{۱۰۰۰۰}{۰/۷}$ یعنی ۱۴۰۰۰ قدم برداشته شده است ، که از آن ۷۰۰۰ قدم مربوط به پای راست و ۷۰۰۰ قدم مربوط به‌پای چپ است . به این ترتیب می‌دانیم که ۷۰۰۰ قدم پای چپ به‌اندازهٔ ۶۲۰ میلیمتر از ۷۰۰۰ قدم پای راست طویل‌تر است . بنابراین هرقدم پای چپ به‌اندازهٔ $\frac{۶۲۰}{۷۰۰۰}$ میلیمتر یا کمی کمتر از ۰/۱ میلیمتر از هرقدم پای راست بزرگتر می‌شود . و همین اختلاف جزئی است که چنین نتیجهٔ عجیبی را به‌بار می‌آورد !

شعاع دایره‌ای ، که مسافر روی محیط آن سرگردان می‌شود ، به اختلاف طول قدمهای «راست» و «چپ» بستگی دارد و این رابطه را می‌توان به سادگی بدست آورد . تعداد قدمهائی که برای دور زدن دایره‌ای لازم است (طول هر قدم ۰/۷ متر) مساوی $\frac{۲\pi R}{۰/۷}$ است(R شعاع دایره است) ، که از آنها $\frac{۲\pi R}{۲\times۰/۷}$ قدم مربوط به‌پای‌چپ وهمین‌اندازه مربوط به‌پای راست است . اگر این عدد را در اختلاف طول قدمهای راست وچپ (که x می‌نامیم) ضرب کنیم ، اختلاف محیط دو دایرهٔ

متحدالمرکز که به‌وسیلهٔ پاهای راست و چپ طی شده است ، بدست می‌آید ، یعنی :

$$\frac{۲\pi \times Rx}{۲ \times ۰/۷} = ۲\pi \times ۰/۱ \Longrightarrow Rx = ۰/۱۴$$

که در آن R و x برحسب متر بیان شده‌اند .

به‌کمك این رابطهٔ ساده می‌توان شعاع دایره را با معلوم بودن اختلاف‌قدمها، محاسبه کرد وبرعکس . مثلابرای کسانی که درآزمایش میدان مارك ونیز شرکت کرده بودند ، می‌توان مقدار شعاع بزرگترین دایره‌ای را که آنها طی‌کرده‌اند ، بدست آورد. چون AC(=۴۱متر) «سهم» هریك از این دایره‌ها و BC نصف وتر آنست وضمناً BC از ۱۷۵ متر تجاوز نمی‌کند (شکل ۱۰۹) ، شعاع R از تساوی زیر بدست می‌آید :

$$BC^۲ = ۲R \cdot AC - AC^۲$$

که با فرض ۱۷۵ = BC بدست می‌آید :

$$۲R = \frac{BC^۲ + AC^۲}{AC} = \frac{۱۷۵^۲ + ۴۱^۲}{۴۱} \# ۸۰۰$$

یعنی شعاع دایره‌ای که در راه‌پیمائی میدان مارك دور زده‌اند به ۴۰۰ متر نمی‌رسد .

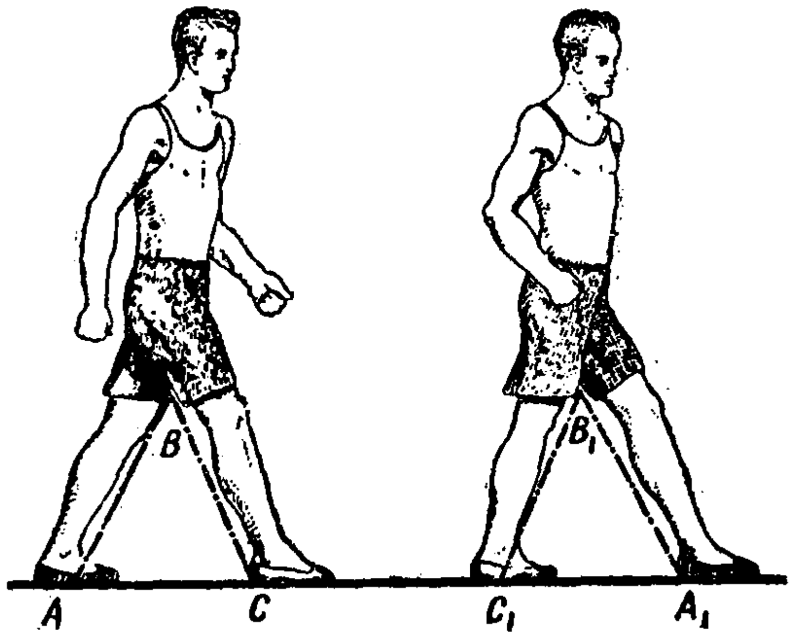
با در دست داشتن این‌عدد، از رابطهٔ قبلی ۰/۱۴ = Rx کمترین اختلاف بین طول قدمها محاسبه می‌شود:

$$۴۰۰x = ۰/۱۴ \Longrightarrow x = ۰/۳۵ \quad \text{(میلیمتر)}$$

یعنی اختلاف بین قدمهای راست و چپ شرکت‌کنندگان درآزمایش از ۰٫۳۵ میلیمتر کمتر نیست .

گاهی شنیده می‌شود ، که مسئلهٔ چرخش روی دایره ، وقتی که

با چشمهای بسته راه می‌رویم، به اختلاف پای راست و پای چپ مربوط است و چون برای اکثر مردم پای چپ بزرگتر از پای راست است، بنابراین باید ضمن راه‌رفتن حتماً نسبت به خط مستقیم بسمت راست متمایل



۱۱۳. اگر زاویهٔ هرقدم، مقدار ثابتی باشد، قدمها یکنواخت می‌شود.

شوند. این توضیح مبتنی بر یك اشتباه هندسی است. آنچه که مهم است، اختلاف قدمها است نه اختلاف پاها، در شکل ۱۱۳ دیده می‌شود که با پاهای نامساوی هم می‌توان قدمهای یکنواخت برداشت، بشرطی که با برداشتن هر قدم، زاویهٔ بین پاها را تغییر ندهیم، یعنی طوری قدم برداریم که $\hat{B} = \hat{B_1}$ باشد. زیرا دراینصورت چون $AB = A_1B_1$ و $BC = B_1C_1$ می باشد، مثلث ABC مساوی مثلث $A_1B_1C_1$ خواهد شد و بنابراین $AC = A_1C_1$ می‌شود. برعکس اگر طول پاهای کسی کاملا با هم مساوی باشد، می‌تواند قدمهای متفاوت بردارد.

به همین دلیل است که اگر قدرت دست‌راست قایق ران بیشتر از قدرت دست چپ او باشد ، قایق حتماً روی دایره‌ای که به طرف چپ شکسته می‌شود، متمایل‌خواهد شد، به‌همین ترتیب حیواناتی که قدمهای راست و چپ آنها یکنواخت نباشد و یا پرندگانی که بالهای راست و چپ آنها با یك قدرت حرکت نکنند ، وقتی کـه نتوانند با چشمهای خود جهت مستقیم را تعقیب کنند ، باید روی یك دایره حرکت کنند . در این مورد هم یك اختلاف جزئی بین قدرت دستها ، پاها و یا بالها کافی است .

وقتی که با این نظر به این مسئله نگاه کنیم ، رمز جادوئی خود را بکلی از دست می‌دهد و به صورتی کاملا طبیعی جلوه می کند و بر عکس وقتی باعث تعجب می‌شود که انسان و یا حیوانی بتواند، بدون راهنمایی‌چشمهای‌خودبطورمستقیم‌حرکت کند، زیرابرای‌این‌منظورباید بدنی که از لحاظ هندسی‌کاملامتقارن‌است، وجود داشته‌باشد، چیزی که مطلقاًغیرممکن‌است. وکمترین‌انحراف ازتقارن‌کامل ریاضی هم اجباراً به این نتیجه می‌رسد که حرکت روی دایره باشد . بنابراین معجزه‌ای وجود ندارد که باعث تعجب ما بشود و آنچه هست ، عین قانون طبیعت است .

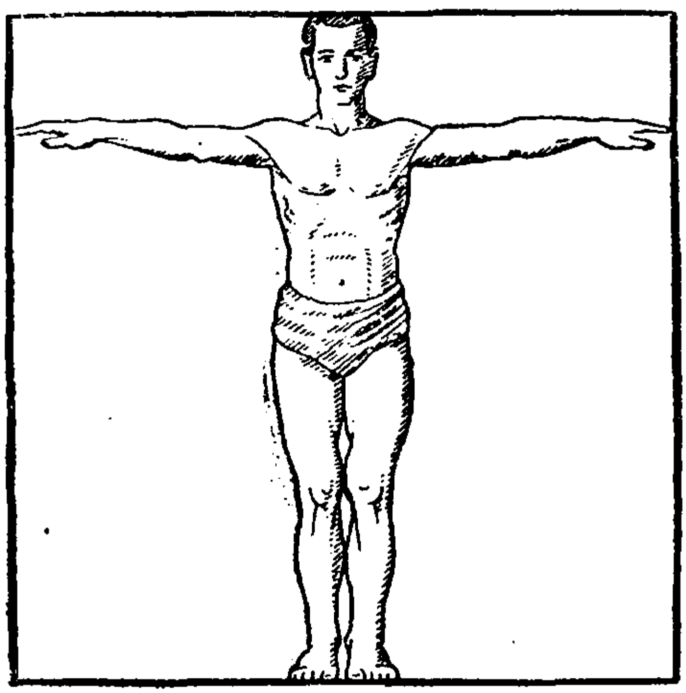
عدم امکان حرکت روی خط مستقیم اشکالی برای انسان ایجاد نمی کند : قطب‌نما ، جاده و نقشه در بسیاری موارد می‌تواند او را از عواقب این نقص مصون نگه دارد .

واما برای حیوانات ، مخصوصاً ساکنین بیابانها وفضای بیکران دریاها : برای آنها عـدم تقارن بـدن ، کـه آنها را مجبور می کند بجای خط مستقیم روی دایره حرکت کنند ، عامل مهمی برای زندگی است و مثل یك زنجیر نامرئی نمی‌گذارد که آنها از سرزمین اصلی و

محل تولد خود دور شوند . شیر، که جرأت می کند و به نقاط دور می رود ، اجباراً به طرف مبداء حرکت خود برمی گردد. مرغ آبی که از صخره ای پرواز می کند وروی دریای بیکران بال می زند ، نمی تواند به لانهٔ خود برنگردد (ولی هنوز این مطلب به صورت یك معما باقی مانده است که چگونه پرندگان می توانند بطور مستقیم از قاره ها و اقیانوسها پرواز کنان عبور کنند) .

اندازه گیری با دستهای خالی

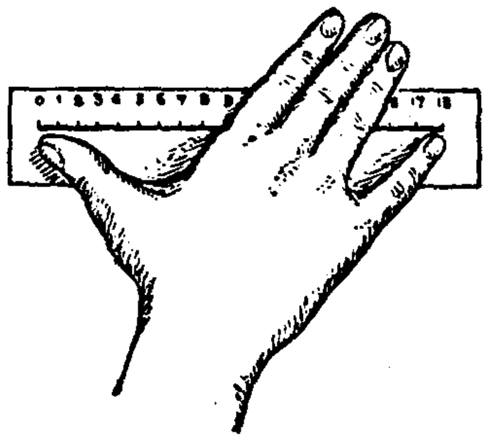
قهرمان کتاب ماین رید تنها به این مناسبت توانست مسئلهٔ هندسی خود را حل کند که قبل ازمسافرت قد خود را اندازه گرفته بود وبادقت نتیجهٔ اندازه گیری را به خاطر سپرده بود . خیلی خوب است که برای هریك از ما اندازه های این «مترزنده» معلوم باشد، تادرموارد لزوم بتوانیم از آن استفاده کنیم. دانستن این مطلب هم جالب است که برای اکثر مردم فاصلهٔ بین دو انتهای دست، وقتی که به طرفین باز شده باشد ، باقد آنها برابر است



۱۱۴. قانون لئوناردو داوینچی

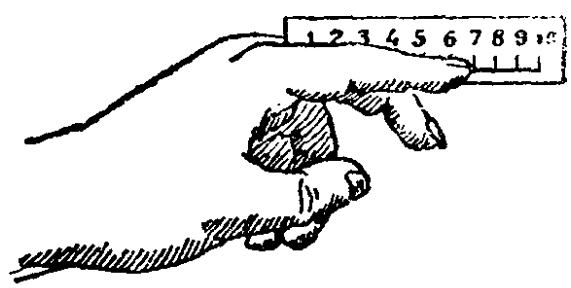
(شکل۱۱۴)ـ قانون نقاش ودانشمند نابغه لئوناردوداوینچی ـ: به وسیلهٔ

این قانون خیلی راحت‌تر از پسربچهٔ ماین‌رید می‌توان از «مترزندهٔ» خود استفاده کرد ، قد متوسط یك انسان بالغ قریب ۱/۷ متر یا ۱۷۰ سانتیمتر است ، البته این عدد را به سادگی می‌توان به‌خاطر سپرد ولی بـه این مقدار متوسط نباید اعتماد کرد : هر کس بایدقد خود وقسمتهایی مختلف دستهای خودرا اندازه بگیرد .



۱۱۵. اندازه فاصلهٔ بین‌انتهای انگشتان

برای اندازگیری ـ بدون وسیله ـ فواصل کوچك ، باید طول «وجب» خود ، یعنی فاصلهٔ بین انتهای‌انگشت شصت و انگشت کوچك، رابه‌خاطر بسپاریم (شکل۱۱۵) برای یك مرد بالغ این اندازه تقریباً برابر۱۸ سانتیمتراست ـ تقریباً یك چهارم آرشین (۷۱ سانتیمتر) ، ولی برای جوانان این اندازه کوچکتر است و تا ۲۵ سالگی به‌تدریج بزرگتر می‌شود . برای همین منظور می‌توان اندازهٔ انگشت اشاره را هم معین کرد و به‌خاطر سپرد، اندازهٔ این انگشت را از دوطرف می‌توان بدست آورد ، هم‌ازطرف انگشت میانه (شکل ۱۱۶) وهم از طرف انگشت شصت . همچنین باید فاصلهٔ بین انگشت اشاره و انگشت میانه را هم



۱۱۶. اندازه‌گیری انگشت اشاره

بدانید (این فاصله برای افراد بالغ حدود ۱۰ سانتیمتر است) ـ شکل ۱۱۷ . بالاخره باید عرض انگشتان خود را هم اندازه بگیرید . عرض

۱۱۷. اندازه‌گیری فاصلهٔ بین انتهای دو انگشت

۱۱۸. اندازه‌گیری محیط لیوان با دست خالی

سه انگشت وسط ، وقتی که محکم بهم چسبیده باشند قریب ۵ سانتیمتر است .

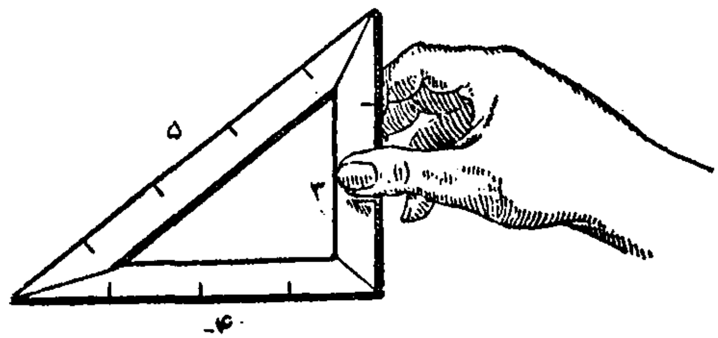
وقتی که این اطلاعات در دسترس شما باشد ، می‌توانید هرگونه اندازه‌گیری را با دست واقعاً خالی و حتی در تاریکی انجام دهید . به‌عنوان مثال به‌شکل۱۱۸ توجه کنید : در اینجا با کمك انگشتان محیط يك لیوان اندازه‌گرفته می‌شود . اگرمقادیر متوسط را درنظر بگیریم ، محیط لیوان مساوی ۵+۱۸ یعنی ۲۳ سانتیمتر می‌شود .

زاویهٔ قائمه در تاریکی

مسئله

دوباره به‌جوان ریاضی‌دان ماین‌رید برمی‌گردیم و این مسئله را

طرح می‌کنیم : اوچگونه باید عمل کند تا مطمئن شود که زاویهٔ قائمه بدست آورده است ؟ « چوب بزرگتر را طوری درانتهای آن (چوبی که ار روی بشکه بیرون آمده بود) قراردادم که برآن عمود باشد» . این



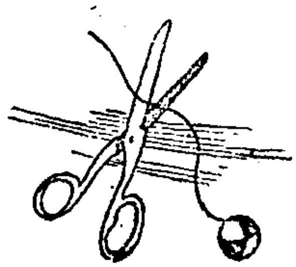
۱۱۹. ساده‌ترین مثلث قائم‌الزاویه‌ای که
اضلاع آن اعدادی صحیح است.

جمله‌ایست که در داستان می‌خوانیم . انجام این عمل در تاریکی ، و تنها بااعتماد به‌حس‌لامسه ، ممکن است اشتباه بزرگی دربرداشته باشد. ولی برای پسر بچه و در وضعی که او قرارداشت ، ساختن زاویهٔ قائمه وسیلهٔ قابل اعتمادی بود . ولی چگونه ؟

حل

باید از قضیهٔ فیثاغورث استفاده کرد و از قطعات چوب مثلثی ساخت که اضلاع آن چنان باشند که به‌شکل قائم‌الزاویه درآید. ساده‌تر ازهمه اینست که طول‌قطعات‌چوب ۳، ۴ و ۵ گرفته شود (شکل ۱۱۹) .

این قدیمی‌ترین وسیلهٔ مصری است ، که درسرزمین‌اهرام هزاران سال قبل مـورد استفاده قرار گرفته است . ولی حتی امروز و در زمان ماهم ساده‌ترین وسیلهٔ عملی برای ساختن زاویهٔ قائمه است .



۹

مطالب کهنه و نو دربارهٔ دایره

هندسهٔ عملی مصر وروم

امروزه هر شاگرد دبیرستانی، خیلی دقیق‌تر از کاهن دانشمند سرزمین قدیم اهرام یا معمار هنرمند روم بزرگ، می‌تواند با دردست‌داشتن قطر دایره، محیط آنرا بدست آورد. مصریهای قدیم نسبت محیط دایره برقطر آنرا ۳/۱۶ و رومیها ۳/۱۲ می‌گرفتند، درحالیکه مقدار صحیح این نسبت مساوی ... ۳/۱۴۱۵۹ می‌باشد. ریاضی‌دانهای مصری و رومی نسبت طول محیط دایره به قطر آنرا با محاسبات دقیق هندسی، آنطور که بعدها ریاضی‌دانها به آن پرداختند، بدست نمی‌آوردند، روش آنها خیلی ساده و مبتنی بر تجربه بود. چرا آنها دچار چنین

اشتباهاتی می‌شدند ؟ مگر نمی‌توانستند نخی به‌دور جسم گردی بکشند و بعد آنرا باز کنند و به‌صورت مستقیم درآورند و سپس به‌طور ساده اندازه بگیرند ؟

بدون تردید آنها هم به‌همین طریق عمل کرده‌اند ؛ ولی نباید انتظار داشت که این روش منجر به نتیجهٔ دقیق و خوبی بشود . مثلا گلدانی را درنظر بگیرید که قطر کف آن مساوی ۱۰۰ میلیمترباشد . محیط دایرهٔ کف آن گلدان باید مساوی **۳۱۴** میلیمتر بشود . ولی در عمل ، وقتی که با نخ اندازه‌گیری می‌کنید ، مطمئناً عین این نتیجه را بدست نمی‌آورید وبه‌سادگی درحد یك میلیمتر اشتباه می‌کنید و عدد π برای شما **۳/۱** یا **۳/۱۵** بدست می‌آید . ولی اگر درنظر داشته باشید که قطرگلدان راهم نمی‌توان کاملادقیق‌اندازه‌گرفت ودرآنجا هم‌احتمالا اشتباه یك میلیمتروجود دارد، آنوقت متوجه می‌شوید که برای عدد π فاصلهٔ‌بزرگی ،که بین دوعدد زیر قراردارد ، بدست می‌آید :

$$\frac{۳۱۳}{۱۰۱} \text{ و } \frac{۳۱۵}{۹۹}$$

یعنی به‌صورت کسراعشاری بین دو عدد زیر :

۳/۱۸ و ۳/۰۹

می‌بینید که اگر با روش مذکور به‌محاسبهٔ عدد π بپردازیم ، مستقیماً به عدد **۳/۱۴** نمی‌رسیم: یکبارعدد **۳/۱** بدست می‌آید ، باردیگر**۳/۱۲** ، بارسوم**۳/۱۷** وغیره . البته ممکن است که تصادفاًدریکی از محاسبات به **۳/۱۴** هم برسیم ، ولی از نظر کسی‌که محاسبه می‌کند ، این عدد نسبت به‌عددهای دیگری که بدست آمده است ، هیچگونه امتیازی ندارد .

این راه تجربی هرگز نمی‌تواند مقدار مطمئن قابل قبولی برای π بدست بدهد. حالا معلوم می‌شود که چرا دنیای قدیم مقدار واقعی نسبت محیط دایره برقطر آنرا نمی‌دانست، همچنین نبوغ ارشمیدس روشن می‌شود که برای π ازعدد $۳\frac{۱}{۷}$ استفاده‌می کرد.

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان

در کتاب «الجبروالمقابله» ریاضی‌دان بزرگ ایرانی، محمدبن‌موسی خوارزمی، دربارهٔ محاسبهٔ محیط دایره اینطور می‌خوانیم:

« بهترین راه اینست که قطر را در $۳\frac{۱}{۷}$ ضرب کنیم. این سریع‌ترین وساده‌ترین روش است. خدای بزرگ بهتر می‌داند».

حالا ما می‌دانیم که عدد ارشمیدس $۳\frac{۱}{۷}$ نمی‌تواند بطور دقیق نسبت‌محیط دایره به‌قطر آنرا معلوم کند. ثابت شده‌است که این نسبت رانمی‌توان به‌وسیلهٔ نسبت دوعدد صحیح نشان‌داد. به‌همین مناسبت عدد π را همیشه باتقریب درنظر می‌گیرند، منتهی بسته به‌وقتی که محاسبات عملی لازم داشته باشند، این تقریب به‌مقدار واقع نزدیکتر و یا از آن دورتر خواهد بود. لودولف ریاضی‌دان، اهل لیدن باحوصلهٔ زیاد عدد π را تا ۳۵ رقم اعشار محاسبه‌نمود و وصیت کرد که ارقام این عدد را برمقبره او حك کنند.

اینست سی‌وپنج رقم اعشارعدد π :

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵۰۲۸۸...

در سال ۱۸۷۳ نه‌کی شنکس مقدار عدد π را تا ۷۰۷ رقم بعد از

اعشار انتشارداد ! ولی چنین عددهای طویلی ، برای مقدار تقریبی π ، نه ازلحاظ‌عملی ونه‌ازلحاظ‌نظری نمی‌تواندمورد استفاده قرارگیردو تنها می‌تواند به‌عنوان یك رکورد بی‌هدف وبرای صرف مواقع بیکاری‌مورد مطالعه‌قرارگیرد. درسالهای۱۹۴۶ و۱۹۴۷ فرگوسن (دانشگاه‌منچستر) و بدون ارتباط با او رنچ (ازواشنگتن) عددπ را تا ۸۰۸ رقم بعد ازممیز پیدا کردند ومعلوم‌شدکه محاسبهٔ شنکس ازرقم ۵۲۸ به‌بعداشتباه است.

اگر ما بخواهیم که مثلا طول خط استوای زمین را با دقت یك سانتیمتر محاسبه کنیم، به‌فرض‌اینکه قطر آنرا با دقت داشته‌باشیم ، کافی است که برای عدد π تا ۹ رقم بعد از ممیز درنظر بگیریم . اگر تعداد قسمتها را دوبرابر کنیم (۱۸ رقم بعد از ممیز) ، می‌توانیم محیط دایره‌ای به شعاع فاصلهٔ‌زمین تا خورشید را با اشتباه‌کمتر از ۰/۰۰۰۱ میلیمتر (صدبارکمتر ازقطریك مو) حساب کنیم*.

ریاضی‌دان شوروی‌گراو خیلی خوب نشان داده است که حتی صد رقم اولیهٔ بعد از ممیز برای عد π مطلقاً نمی‌تواند مورد استفاده‌ای داشته باشد . اوحساب کرده است که‌اگر کره‌ای درنظربگیریم که شعاع آن فاصلهٔ زمین تا شعرای یمانی یعنی عددی که برحسب کیلومتر با۱۳۲

---

* ازریاضی‌دانهای‌ایرانی،دقیق‌ترین‌محاسبهٔ‌عدد π متعلق بـه **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** است (اواخر قرن چهاردهم و اوایل قـرن پانزدهم میلادی) . کاشانی محیط دایره را واسطهٔ عددی محیطهای چند ضلعی های منتظم محیطی و محاطی بـا ۳×۲^n ضلع می‌گیرد . کاشانی n را مساوی۲۸ می‌گیرد ، یعنی برای عدد n بدست می آورد : $۳ \times ۲^n = ۸۰۵۳۰۶۳۶۸$ ضلعی و

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۵$$

از۱۷رقمی که‌کاشانی برای π پیدا کرده است تنها رقم‌آخری آن درست نیست .

مترجم

همراه ۱۰ صفر : ۱۳۲×۱۰^{۱۰} کیلومتر ، باشد و این کره رااز موجودات ذره‌بینی پر کنیم : بطوریکه درهرمیلیمتر مکعب آن $۱۰^{۱۰}$ میکروب جا بگیرد ، سپس همهٔ این میکروبها راروی یك راست چنان قراردهیم که فاصلهٔ بین هردومیکروب مجاور دوباره برابر با فاصلهٔ شعرای یمانی تا زمین باشد ؛ آنوقت چنین پاره خط خیالی را به‌عنوان قطردایره‌ای در نظر بگیریم ، می‌توان محیط این دایره عظیم را با انتخاب ۱۰۰ رقم اعشاربعد از ممیزدرعدد π ، با دقت میکروسکوپی یعنی تا $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$ میلیمتر حساب کرد . آرگو منجم فرانسوی کاملا حق داشت که متذکر شد : « اگرنسبت محیط دایره به قطرآن ، عددی با دقت ریاضی وجود داشت ، از لحاظ دقت محاسبه نفعی عاید ما نمی‌شد » .

در محاسبات عادی کافی است که عدد π را با دورقم بعد ازممیز درنظربگیریم(۳/۱۴) و برای محاسبات‌دقیق‌تر، چهاررقم (۳/۱۴۱۶ : رقم آخر را به‌جای ۵ به‌این مناسبت ۶گرفته‌ایم که رقم بعد از آن از ۵ بزرگتر است) .

یك بیت شعر و یا یك جملهٔ کوتاه بهتر از عدد در خاطرآدمی می‌ماند ، بهمین‌مناسبت‌برای‌بیادداشتن‌ارقامی‌ازعدد π شعرهاوجمله‌های کوتاه درست کرده‌اند . در این «اشعارریاضی» تعداد حروف هر کلمه نمایندهٔ یك‌رقم ازعدد π درنظرگرفته می‌شود .

از این اشعاردرزبان انگلیسی با۱۳ کلمه وجود دارد که در نتیجه تا ۱۲ رقم بعد از ممیز را برای عدد π بدست می‌دهد ؛ زبان آلمانی با ۲۴ کلمه ودرزبان فرانسوی با۳۰ کلمه(وهمچنین شعری با ۱۲۶ کلمه!) وجود دارد . بعضی از این اشعار را در اینجا نقل می‌کنیم :

درزبان فارسی :

گرزقدر پی کنندازتوسئوال   پاسخی‌ده که خرمند ترا آموزد

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان

۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹

ره سرمنزل تـوفیق بما آمـوزد

۲ ۶ ۵ ۳ ۵

در زبان روسی:

Это я знаю и помню прекрасно,
Пи многие знаки мне лишни, напрасны .

در زبان انگلیسی:

See I have a rhyme assisting.
My feeble brain, its tasks ofttimes resisting.

در زبان آلمانی:

Wie o dies π
Macht ernstlich, so vielen viele Müh'!
Lernt' immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein'

در زبان فرانسوی:

Que j'aime à faire apprendre un
nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime ingénieur,
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

اشتباه جك لندن

در اینجا قطعه‌ای از داستان جك لندن به‌نام « کدبانوی کوچك خانهٔ بزرگ » را نقل می‌کنیم که زمینه‌ای برای محاسبهٔ هندسی دارد:

« وسط دشت دیرکٔ فولادی برپا بود که به‌طورعمیقی درزمین فرو رفته بود. از رأس دیرك تاکنار دشت طنابی کشیده شده بود که به‌تراکتوری‌محکم کرده بودند. مکانیسین‌ها اهرم رافشاردادند ــ وموتور

شروع به‌کار کرد .

«ماشین حرکت کرد و روی محیط دایره‌ای که مرکز آن دیرك فولادی بود به جلو رفت .

«گراهام گفت :

«ــ برای اینکه‌کار ماشین در آخر کار تکمیل شود، بایددایره‌ای‌را که دور می‌زنید ، به مربع تبدیل کنید .

«ــ با این روشی که ما کار می‌کنیم ، قسمت عمده‌ای از دشت مربع شکل را ازدست می‌دهیم .

«گراهام شروع به‌محاسبه‌کرد وبعد متذکرشد :

«ــ تقریباً ازهر ده آکرزمین ، سه‌آکر آنرا ازدست می‌دهیم» .

حالا می‌خواهیم این محاسبه راآزمایش کنیم .

حل

محاسبه درست نیست . کمتراز ۰/۳ زمین‌ازدست می‌رود . ضلع مربع را a فرض‌می‌کنیم ، دراینصورت‌مساحت‌آن مساوی $a^۲$ می‌شود. قطردایرهٔ محاطی هم مساوی a ودرنتیجه مساحت آن $\frac{\pi a^۲}{۴}$ خواهدشد .

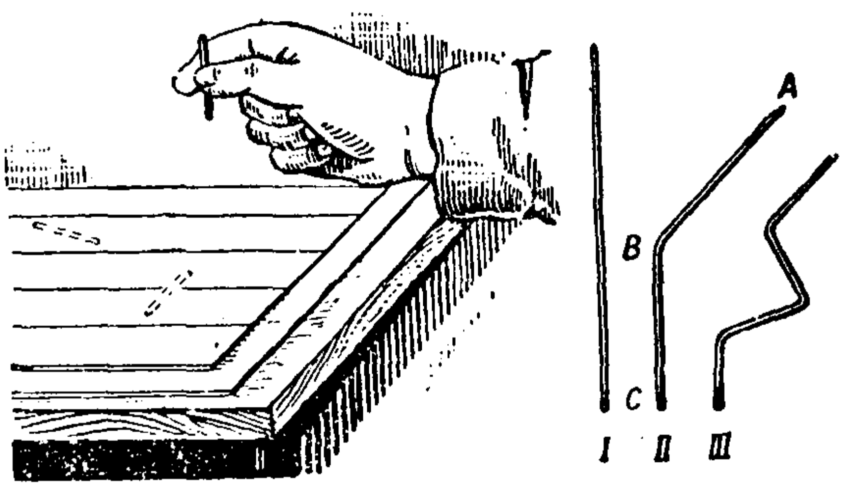
به‌این‌ترتیب مقدار باقیماندهٔ زمین چنین می‌شود :

$$a^۲ - \frac{\pi a^۲}{۴} = \left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right) a^۲ \approx ۰/۲۲ a^۲$$

می‌بینیم که قسمت شخم نشدهٔ دشت مربع شکل ، آنطور که قهرمان داستان محاسبه می‌کند ۳۰٪ کل آنرا تشکیل نمی‌دهد ، بلکه قریب ۲۲٪ آنست .

رها کردن سوزنها

عجیب‌ترین ودر عین‌حال جالب‌ترین روش پیدا کردن π را ذکر می‌کنیم . تعدادی سوزن خیاطی کوتاه(دو سانتیمتری) تهیه می کنیم ، بهتراست نوك سوزنها را بشکنیم تا سوزنها ضخامتی یکنواخت داشته باشند. سپس روی یك‌صفحهٔ کاغذ خطوط موازی باهم‌به‌فواصل دوبرابر طول سوزن رسم می‌کنیم . حالا از ارتفاع دلخواهی سوزن را روی



۱۲۰ تجربهٔ بوفون با سوزنهای رها شده

صفحهٔ کاغذ می‌اندازیم و توجه می‌کنیم که آیا یکی از خطوط صفحه را قطع می‌کند یا نه ؟ (شکل ۱۲۰ ــ سمت چپ) . برای اینکه ، وقتی که سوزن روی‌کاغذمی‌افتد به‌بالا نپرد ، بهتراست زیر آن خشك‌کن و یا ماهوت قراردهیم. سوزن را به‌تعداد زیاد ، مثلا صدبار ویا بهترهزار بار ازبالا رها می‌کنیم و هربار دقت می‌کنیم که آیا یکی از خطها را قطع می‌کند یا نه * ؟ اگر درآخرکار تعداد کل دفعاتی که سوزن را رها

*) مواردی راهم‌که انتهای سوزن به‌ابتدای خط تکیه‌کرده باشد ، جزو حالت تقاطع به‌حساب می‌آوریم .

کـرده‌اید برتعداد دفعاتی که سوزن خط را قطع کرده است ، تقسیم کنیم ، عدد π (البته باکم و بیش تقریب) بدست می آید .

مطلب را روشن کنیم . فرض کنید تعداد احتمالی مواردی کـه سوزن خط را قطع می کند مساوی k وطول‌سوزن مساوی ۲۰ میلیمتر باشد . درحالت تقاطع ، البته باید نقطهٔ تلاقی بریکی از این میلیمترها واقع باشد ، ولی نه هیچیك ازمیلیمترها و نه هیچیك ازقسمتهای سوزن نسبت به‌بقیه امتیازی ندارد . بنابراین احتمال تلاقی هریك ازمیلیمترها مساوی $\frac{k}{۲۰}$ است . برای قسمتی ازسوزن که به‌طول ۳ میلیمتر باشد ، این احتمال‌مساوی $\frac{۳k}{۲۰}$ و برای قطعه ۱۱ میلیمتری آن $\frac{۱۱k}{۲۰}$ می‌باشدوغیره. یه‌عبارت دیگر احتمال تلاقی، با طول سوزن نسبت مستقیم دارد .

درحالتی هم که سوزن خم شده باشد ، باز هم این نسبت حفظ می‌شود . فرض کنید که سوزن به‌شکل II خم شده باشد (شکل ۱۲۰ــ سمت راست) ، ضمناً‌طول قسمت AB مساوی ۱۱ میلیمتر وطول‌قسمت BC مساوی ۹ میلیمتر باشد . برای قسمت AB احتمال تلاقی مساوی $\frac{۱۱k}{۲۰}$ وبرای قسمتBC مساوی $\frac{۹k}{۲۰}$ وبرای تمام‌سوزن $\frac{۱۱k}{۲۰}+\frac{۹k}{۲۰}$ یعنی مثل سابق مساوی k می‌باشد . می‌توانیم سوزن را به شکلهای مرکب‌تری بشکنیم(شکل ۱۲۰-III) ، بازهم‌عدد احتمال‌تغییر نمی کند. (متذکر می‌شویم که یك‌سوزن خم شده ممکن است خطرا دردویا تعداد بیشتری از قسمتهای خود قطع کند ، البته این تلاقیها باید ۲ ، ۳ وغیره به‌حساب بیاید ، زیرا اولین نقطهٔ‌تلاقی مربوط به‌یك‌قسمت سوزن است،

دومی مربوط به‌قسمت دیگر وغیره) .

حالا فرض کنید سوزنی‌را رها کنیم که به‌شکل‌دایره خم‌شده باشد وقطر آن مساوی فاصلهٔ بین دو خط موازی باشد (دو برابرسوزن ما) . چنین حلقه‌ای باید در هربار یکی ازخطها را در دو نقطه قطع کند (ویا بر دوخط مماس باشدـ یعنی درهر حال دونقطهٔ تلاقی داشته باشد). اگر تعداد دفعاتی‌که حلقه را می‌اندازیم N فرض‌کنم ، تعداد نقاط تلاقی مساوی ۲N خواهد شد . نسبت طول محیط این حلقه به‌طول سوزن‌ما مساوی ۲π است و ما دیدیم که احتمال تلاقی متناسب با طول سوزن است. بنابراین احتمال (k) تلاقی سوزن‌ما برابر با نسبت N ۲به ۲π یعنی مساوی $\frac{N}{\pi}$ خواهد بود و از آنجا :

$$\pi = \frac{\text{تعداد دفعاتی‌که سوزن را انداخته‌ایم}}{\text{تعداد دفعات تلاقی}}$$

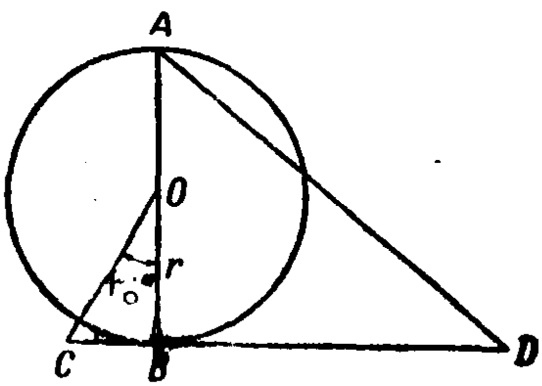
هرچه تعداد دفعات آزمایش بیشتر باشد ، مقدار عدد π دقیق‌تر بدست می‌آید . ر . ولف منجم سویسی در اواسط قرن گذشته با ۵۰۰۰ بار آزمایش، برای عدد π به...۳/۱۵۹۰ رسید که ضمناً دقت آن ازعددی که ارشمیدس بکار می‌برد کمتر است .

می‌بینیم که دراینجا نسبت محیط دایره به‌قطر آن به‌طریق تجربی بدست می‌آید ، منتهی خیلی جالب است که در این آزمایش نه به دایره ونه به‌قطر آن احتیاجی نداریم ، یعنی عدد π بدون استفاده از پرگار بدست می‌آید . کسی هم که هیچ تصوری از هندسه و حتی دایره ندارد ، می‌تواند به‌این‌طریق به‌عدد π دست یابد ، به‌شرط‌اینکه حوصلهٔ آزمایشهای متوالی ومتعدد را در مورد انداختن سوزن داشته باشد .

تبدیل محیط دایره به‌خط راست

مسئله

برای بسیاری از مقاصد عملی کافی است که عدد π را مساوی $۳\frac{۱}{۷}$ بگیریم و محیط دایره را به‌صورت پاره خط راست در آوریم. برای این منظور به‌اندازهٔ $۳\frac{۱}{۷}$ برابر قطر دایـره را روی خط راستی جـدا می‌کنیم (تقسیم یك پاره خط را به‌هفت قسمت مساوی می‌توان به‌سادگی وبا دقت انجام داد). روشهای تقریبی دیگری هم‌درعمل و برای کارهای صنعتی به‌وسیلهٔ نجارها، حلبی‌سازها وغیره، برای‌مستقیم کردن محیط دایره مورد استفاده قرارمی‌گیرد.



۱۲۱. روش هندسی مستقیم کردن دایره به‌تقریب

ما در اینجا ازاین روشها صحبتی نخواهیم کرد وتنها به‌یکی ازراه‌حلهای ساده‌ای که منجر به‌نتیجه‌ای بـا دقت زیـاد می‌شود. اشاره می‌کنیم.

اگر بخواهیم دایرهٔ O به‌شعاع r را به‌پاره‌خط راست تبدیل کنیم (شکل ۱۲۱)، قطر AB از این دایره‌وعمود CD براین‌قطررا درنقطهٔ B رسم می‌کنیم. خط OC را ازمرکزدایره تحت‌زاویهٔ ۳۰درجه‌می کشیم، سپس از نقطهٔ C روی‌خط CD به‌اندازهٔ سه‌برابرشعاع دایرهٔ مفروض‌جدا می‌کنیم ونقطهٔ D را که به‌این‌ترتیب بدست می‌آید به‌A وصل‌می‌کنیم: طول‌پاره خط AD مساوی‌نصف محیط دایرهٔ مفروض‌خواهد بود. اگر پاره خط AD را به‌اندازهٔ خودش‌امتداد دهیم، به‌تقریب اندازهٔ محیط

دایرهٔ O بدست می‌آید. اشتباه‌ما دراین‌مورد کمتراز $0{,}0002r$ است .

این طریقهٔ رسم برچه اساسی قراردارد؟

حل

طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم :

$$CB^2+OB^2=OC^2$$

شعاع OB را مساوی r می‌گیریم و توجه می کنیم که $BC=\frac{OC}{2}$ است (درمثلث قائم‌الزاویه ، ضلع روبروی به زاویهٔ ۳۰ درجه مساوی نصف وتر است) . بدست می‌آید :

$$CB^2+r^2=4CB^2 \Longrightarrow CB=\frac{r\sqrt{3}}{3}$$

حالا درمثلث ABD داریم :

$$BD=CD-CB=3r-\frac{r\sqrt{3}}{3};$$

$$AD=\sqrt{BD^2+4r^2}=\sqrt{\left(3r-\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2+4r^2}=$$

$$=\sqrt{9r^2-2r^2\sqrt{3}+\frac{r^2}{3}+4r^2}=3{,}14153r$$

اگر این نتیجه را با موردی که π را با دقت بیشتر در نظر مـی‌گرفتیم ($\pi=3{,}141593$) مقایسه‌کنیم، می‌بینیم که اختلاف آنها $0{,}00006r$ است . اگر با این روش ، دایره‌ای بـه‌شعاع ۱ متر را به‌صورت خط مستقیم در آوریم ، برای نصف محیط اشتباهی مساوی ۰٫۰۰۰۰۶

متر وبرای محیط دایرهٔ کامل ۰٫۰۰۰۱۲ متر ویا ۰٫۱۲ میلیمتر به‌وجود می‌آورد .

تربیع دایره

ممکن نیست که خوانندهٔ این کتاب ، تاکنون چیزی دربارهٔ «تربیع دایره» نشنیده باشد ، مسئله‌ای که ذهن ریاضی‌دانها را در طول ۲۰ قرن به‌خودمشغول داشته بود . من حتی اطمینان دارم که درمیان خوانندگان، کسانی وجود دارند که خود حل مسئله را مورد آزمایش قرارداده‌اند . ولی بیشتر از آن به‌کسانی برخورد می‌کنیم کـه از لاینحل بودن این مسئلهٔ مشهور دچار حیرت می‌شوند . بسیاری عادت دارند کـه با لحن غریبی مرتباً تکرار کنند که مسئلهٔ تربیع‌دایره غیرقابل‌حل است ، بدون اینکه در بارهٔ ماهیت مسئله و یا دلیل لاینحل بودن آن درك روشنی داشته باشند .

در ریاضی مسائل بسیاری وجود دارد که چه از لحاظ نظری و چه از لحاظ عملی جالب‌تر از مسئلهٔ تربیع دایره هستند ، ولی هیچیك ازآنها نتوانسته‌اند ، مثل این مسئله ، جنبهٔ عام بخود بگیرند ووارد در ضرب‌المثل‌ها بشوند. هم‌ریاضی‌دانهای مشهورحرفه‌ای وهم عدهٔ کثیری از مردم علاقمند درجریان دوهزار سال روی این مسئله‌کار کردند .

« تربیع دایره » ــ یعنی پیدا کردن مربعی که مساحت آن دقیقاً برابربامساحت دایرهٔ مفروض باشد . درعمل‌اغلب به‌این مسئله برخورد می‌کنیم ، و در هر مورد خاص می‌توان با دقت مورد لزوم آنرا حل کرد . ولی می‌خواستند که این مسئلهٔ قدیمی را با دقت‌کامل و به‌وسیلهٔ ترسیم حل کنند . برای ترسیم دوامکان دردسترس است :

۱) رسم دایره باشعاع و مرکز مفروض ؛

۲) رسم خط راستی که از دو نقطهٔ مفروض عبور کند .

به عبارت دیگر بایه ترسیم را تنها با کمك دو وسیلهٔ رسم انجام داد: پرگار وخط کش .

دربسیاری ازمحافل غیرریاضی خود را به‌این متقاعد می کنند که اشکال اصلی مطلب برسر اینست که نسبت محیط دایره برقطر آن (عدد مشهور π) را نمی‌توان با تعداد محدودی رقم بیان کرد . این استنباط به‌شرطی صحیح بود که‌لاینحل‌بودن مسئله، ارتباطی به‌این‌طبیعت خاص عدد π داشت . در حقیقت : تبدیل یك مستطیل به مربعی که معادل آن باشد، مسئله‌ای‌است که با دقت وبه‌سادگی حل‌می‌شود. مسئلهٔتربیع دایره هم منجربه‌ساختن‌مستطیلی (باکمك خط کش وپرگار) می‌شود که معادل بادایرهٔ مفروض‌باشد. ازرابطه مساحت دایره $S=\pi r^2$ ویا $S=\pi r\times r$ معلوم است که مساحت دایره برابر است با مساحت مستطیلی که یکی از اضلاع آن مساوی r ودیگری π برابر آن باشد . بنابراین مطلب به‌اینجا می‌رسد که باید پاره خطی مساوی π برابر پاره خط مفروض بسازیم . بطوریکه می‌دانیم عدد واقعی π نه‌مساوی $۳\frac{۱}{۷}$ یا ۳/۱۴ ونه حتی مساوی ۳/۱۴۱۵۹ نیست ورشتهٔ‌ارقامی که‌این عدد رابیان می کنند تابی‌نهایت ادامه دارد .

این خصوصیت عدد π ،گنگ بودن آن * ، در قرن هیجدهم و

---

*)عددی‌را **گنگ** گویند که‌نتوان‌آنرا به‌صورت‌کسر $\frac{p}{q}$ بیان‌کرد (p و q اعدادی صحیح درنظرگرفته شده‌اند) . عددهای گنگ در شکل اعشاری خود ، با بی‌نهایت رقم ، که دورهٔ تناوبی هم درآنها پیدانمی‌شود ، بیان می‌شوند .

بوسیلهٔ ریاضی دانان لامبرت و لژاندر ، با تکیه بر آثار عمیق اولر (آکادمیسین پطرزبورگ ۱۷۰۷ – ۱۷۸۳) ، ثابت شد . باوجود این ، ریاضی‌دانان بعدی را از ادامهٔ کوشش در حل مسئله بازنداشت . آنها می‌فهمیدند که گنگ بودن عدد π نمی‌تواند خود بخود دلیلی برای لاینحل بودن مسئله باشد . عددهای گنگی وجود دارند که می‌توان به طریق هندسی و باکمال دقت آنها را رسم کرد . مثلا فرض کنید بخواهیم پاره خطی بسازیم که $\sqrt{۲}$ برابر پاره‌خط مفروض باشد . عدد $\sqrt{۲}$ هم ، مثل عدد π ، گنگ است. باوجود این، رسم پاره‌خط موردنظر باسهولت تمام انجام‌می‌گیرد : این پاره‌خط برابراست با قطر مربعی که ضلع آن مساوی پاره‌خط مفروض باشد .

هر شاگرد دبیرستانی طریقهٔ رسم پاره خط مساوی $a\sqrt{۳}$ را هم می‌داند (ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی) . حتی رسم پاره خطی مساوی عدد گنگ زیرهم ، که بظاهر خیلی بغرنج بنظر می‌رسد ، مشکل نیست :

$$\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}}$$

زیرا رسم این پاره‌خط منجر به رسم یك ۶۴ ضلعی منتظم می‌شود.

همانطور که می‌بینیم، وجود یك عامل گنگ دریك عبارت‌جبری همیشه نمی‌تواند دلیلی بر عدم امکان رسم آن به کمك پرگار و خط کش باشد . لاینحل‌بودن مسئلهٔ تربیع دایره ، تنها به‌این‌مربوط نیست که π عددی گنگ است ، بلکه به خصوصیت دیگری از این عدد مربوط می‌شود . این خصوصیت اینست که عدد π عددی غیر جبری است ، یعنی نمی‌تواند ریشهٔ یك معادلهٔ جبری با ضرایب گویا باشد . چنین عددی را اصطلاحاً عدد غیر جبری* گویند .

*) Transcendant, e

ویت ریاضی‌دان سدهٔ شانزده فرانسه ثابت کرد که :

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

همین بیان π می‌توانست راه حل مسئلهٔ تربیع دایره را مشخص کند، به‌شرطی که تعداد عملیات آن محدود می‌بود (که دراینصورت می‌شد آنرا به طریق هندسی رسم کرد) . ولی چون تعداد رادیکالهای این عبارت بی نهایت است * رابطهٔ ویت هم نمی‌تواند گرهی از کار باز کند .

به این ترتیب ، لاینحل بودن مسئلهٔ تربیع دایره مربوط به غیر جبری‌بودن عدد π است ، یعنی اینکه عدد π نمی‌تواند ریشهٔ یك‌معادلهٔ جبری با ضرایب گویا باشد . این خصوصیت عدد π بطور دقیق‌درسال ۱۸۸۲ به‌وسیله لیندمان ریاضی‌دان آلمانی ثابت شد . درحقیقت ،همین ریاضی‌دان تنها کسی‌است که مسئلهٔ تربیع‌دایره‌را حل کرد، منتهی‌حل او جنبهٔ منفی‌دارد ، یعنی ثابت کرد که‌رسم چنین مربعی ازلحاظ هندسی ممکن‌نیست . بنابراین سال ۱۸۸۲ را باید پایان کوشهای فراوان ریاضی‌دانها درمورد حل این مسئله دانست ، ولی باکمال تأسف، زورآزمائی بی‌ثمر علاقمندان فراوان این مسئله ، آنهاکه به‌اندازهٔ کافی با تاریخ مسئله آشنائی ندارند ، به‌پایان نرسیده است .

چنین بود برخورد با مسئله تربیع دایره از لحاظ نظری . و اما از لحاظ عملی ، بهیچوجه احتیاج به حل دقیق این مسئله نیست . البته ، خیلی مشکل است که بتوانیم بسیاری را به این حقیقت متقاعدکنیم که حل مثبت مسئله ، از لحاظ عملی ، اهمیت فوق‌العاده دارد و برای

*) نقاطی که در مخرج بعداز رادیکالها قرار داده‌ایم به معنای اینست که تعداد عوامل (رادیکالها) در مخرج بی‌نهایت است (قانون تشکیل این عوامل با توجه به‌سه‌عامل اول که نوشته‌ایم ، روشن می‌شود) .

احتیاجات عادی‌هم‌کافی است که وسیلهٔ تقریبی خوبی ازحل این مسئله در اختیار داشته باشیم .

از زمانی که ۷ـ۸ رقم اولیهٔ عدد π بطور صحیح بدست آمد ، دیگر جستجوی راه حل تربیع دایره از لحاظ عملی ، اهمیت خود را از دست داد. برای احتیاجات عملی زندگی، کاملاً کافی است که مقدار $\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶$ رابدانیم . درهیچ اندازه‌گیری طولی نمی‌توان‌نتیجه را با دقتی بیشتر از ۷ رقم بعد از ممیز نشان داد . بنابر این انتخاب ارقام بیشتری برای عدد π مورد استفاده‌ای‌ندارد ، یعنی محاسبهٔدقیق‌تر دراین‌مورد به‌هیچ منظورعملی کمک‌نمی کند. وقتی که شعاع دایره را تا هفت رقم اعشار در نظر بگیریم ، حتی اگر π را با صدرقم بـه حساب آوریم، محیط دایره شامل‌بیش‌از هفت رقم درست نخواهد بود. اینکه ریاضی‌دانان قدیمی برای پیدا کردن بیان «طولانی‌تر» عدد π ، زحمات زیادی را متحمل می‌شدند ، از لحاظ عملی معنائی ندارد و از لحاظ علمی اهمیت ناچیزی دارد وبدون تعارف ، کاری است که تنهاحوصلهٔ افراد را آزمایش می کند . اگرشما مایل باشید و فراغت‌کافی هم‌داشته باشید ، می‌توانید ، مثلا با استفاده از رشتهٔ بی‌نهایت زیر ،که به وسیلهٔ لایب نیتز پیدا شده ، حتی تا ۱۰۰۰ رقم برای عدد π بدست آورید :*

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}-\dots$$

ولی این یك تمرین عددی غیر لازمی است و بهیچوجه موقعیت مسئلهٔ معروف هندسی را تغییر نمی‌دهد .

آراگو، منجم‌فرانسوی، که‌قبلاً هم درصفحات‌قبل ازاونام‌بردیم،

*) بـرای چنین محاسبه‌ای حوصلهٔ فوق‌العاده زیادی لازم است ، زیرا ، مثلاً برای محاسبهٔ یك عددشش‌رقمی برای π باید بدون کم و زیاد ۲۰۰۰۰۰۰ جمله ازاین رشته را انتخاب کرد .

دربارهٔ این موضوع چنین می‌نویسد :

«کسانی که به جستجوی حل‌مسئلهٔ تربیع دایره ادامه می‌دهند، به‌دنبال چیزی هستند که عدم امکان حل مثبت آن‌ثابت شده است‌واگر هم به فرض محال موفق شوند و راه حل مثبتی برای آن پیدا کنند ، متضمن هیچگونه فایدهٔ عملی نخواهد بود . ادامهٔ این موضوع هیچ ارزشی نداردو مغزهای معیوبی‌که به حل‌مسئلهٔ‌تربیع دایره می‌پردازند، هیچگونه دلیلی برای کار خود نمی‌توانند ارائه دهند» .

آرگو با طعنه چنین خاتمه می‌دهد :

«آکادمیهای همهٔ کشورهائی که در مبارزه علیه جستجو کنندگان تربیع شرکت کرده‌اند ، متذکر می‌شوندکه این مرض معمولا دربهار شدت پیدا می‌کند».

مثلث بینگا

یکی از راه‌حلهای تقریبی مسئلهٔ تربیع دایره را ذکر کنیم که برای احتیاجات زندگی عملی ، فوق‌العاده ساده و راحت است.

این روش بر این مبناست که باید زاویهٔ α را چنان پیدا کنیم (شکل ۱۲۲) که اگروتر $AC=x$ بـا قطر AB زاویه‌ای به اندازهٔ α بسازد ، AC ضلع مربع مجهول باشد . برای‌اینکه اندازهٔ این زاویه را بدست آوریم ، به مثلثات متوسل می‌شویم :

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{x}{۲r}$$

که درآن r شعاع‌دایره است. ازآنجاضلع مربع مجهول $x=۲r\cos\alpha$ وسطح‌این‌مربع‌$۴r^۲\cos^۲\alpha$می‌شود. ازطرف دیگرسطح مربع‌بایدمساوی

سطح دایرهٔ مفروض ، یعنی πr^{2} باشد وبنابراین باید داشته باشیم :

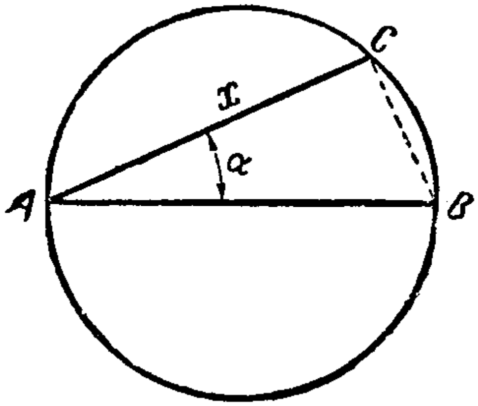
$$4r^{2}\cos^{2}\alpha=\pi r^{2}$$

واز آنجا :

$$\cos^{2}\alpha=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=0/886$$

و از روی جدول بدست می‌آید :

$$\alpha=27^{\circ}36'$$



۱۲۲. روش بینکا ، مهندس روسی (۱۸۳۶) .

به‌این ترتیب‌اگردردایرهٔ‌مفروض وتری رسم کنیم که با قطر آن زاویه‌ای مساوی ′۳۶°۲۷ بسازد ، ضلع مربعی را بدست می‌آوریم که مساحت‌آن با مساحت دایرهٔ مفروض برابر است . در عمل ،کافی است مثلثی داشته باشیم* که که یکی از زوایای آن مساوی ′۳۶°۲۷ وزاویهٔ دیگرش ′۲۴°۶۲ باشد. با دردست داشتن چنین مثلثی ، می‌توان برای هر دایرهٔ مفروض ، ضلع مربع معادل با آنرا بدست آورد .

برای کسانی که علاقمند به‌رسم چنین مثلثی هستند ، به‌اشارهٔ زیر اکتفا می‌کنیم :

چون تانژانت زاویهٔ ′۳۶°۲۷مساوی ۰/۵۲۳ یا $\frac{23}{44}$ است ،اضلاع مجاور به‌زاویهٔ قائمه این مثلث به نسبت **۲۳:۴۴** خواهد بود . بنابراین اگرمثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازیم که مثلایك‌ضلع آن مساوی **۲۲** سانتیمتر

*) این روش ساده را بینکا ، مهندس روسی در سال ۱۸۳۶ پیداکرد ؛ بهمین مناسبت مثلثی‌که دارای چنین زوایائی باشد ، بنام‌کشف‌کنندهٔ آن«مثلث بینکا» نامیده می‌شود ،

وضلع دیگرش ۱۱/۵ سانتیمتر باشد ، مثلث مطلوب را بدست آورده‌ایم. چنین مثلثی را هم به‌سادگی می‌توان رسم کرد .

سر یا پاها

برای یکی ازقهرمانان ژول‌ورن ، این سؤال پیش می‌آید که در مسافرت دور دنیا ، کدامیك از اعضای بدن او راه طولانی‌تری را طی می‌کند : سر یا کف پاهای او ؟ و این یك مسئلهٔ جالب هندسی می‌شود . مسئله را به‌صورت زیرطرح می‌کنیم :

مسئله

فرض کنید که کرهٔ زمین راروی خط استواطی کرده‌باشید ، ضمن این مسافرت سر شما چقدر بیشتر از کف پاهایتان راه رفته است؟

حل

پاها راهی به‌اندازهٔ $۲\pi R$ طی کرده‌اند(R شعاع کرهٔ زمین است). در همان حال سر به‌اندازهٔ $۲\pi(R+۱/۷)$ پیش رفته است (۱/۷ متر را قد انسان گرفته‌ایم) . اختلاف دو فاصله چنین می‌شود :

$$۲\pi(R+۱/۷)-۲\pi R=۲\pi\times ۱/۷=۱۰/۷ \text{ (متر)}$$

به‌این‌ترتیب سر به‌اندازهٔ ۱۰/۷ متر بیش ازپاها طی کرده است .

نتیجه‌ای که بدست آمد ازاینجهت جالب توجه است که به‌شعاع کرهٔ زمین بستگی ندارد و بنابراین جواب این مسئله درزمین ومشتری و یا هر سیارهٔ دیگری یکی خواهد بود . بطور کلی اختلاف محیط دو

دایرهٔ متحدالمرکز به شعاعهای آنها بستگی ندارد و مربوط به فاصلهٔ بین آنهاست. اگر به‌شعاع مدار زمین یك‌سانتیمتر اضافه کنیم، به‌محیط آن همانقدر اضافه می‌شود که با اضافه کردن یك سانتیمتر به شعاع یك روی صفحهٔ کاغذ، به‌محیط آن اضافه می‌شود.

براساس این پارادوکس* هندسی است که مسئلهٔ زیررا دراغلب کتابهای مربوط‌به‌سرگرمیهای هندسی می‌بینیم.

اگرروی خط استوا، دور کرهٔ زمین سیمی بکشیم و سپس طول سیم را یك متر بزرگتر کنیم، آیا می‌توان موشی را ازمیان سیم و کرهٔ زمین عبورداد؟

معمولا جواب می‌دهند که این فاصله از قطر یك مو هم کمتر است: یك متر در مقابل چهل میلیون متر طول استوای زمین چه‌ارزشی دارد! ولی درحقیقت این فاصله چنین است:

$$\frac{۱۰۰}{۲\pi} = ۱۶ \quad \text{(سانتیمتر)}$$

نه‌تنها یك موش، بلکه یك‌گربهٔ بزرگ هم‌می‌تواند از این فاصله به‌راحتی عبور کند.

مفتولی دورخط استوا

مسئله

فرض کنید که مفتولی را دور استوای زمین محکم کشیده باشیم. اگر این مفتول یك‌درجه سرد بشود چه اتفاقی می‌افتد؟ وقتی که مفتول

---

*) پارادوکس به‌حقیقتی گفته می‌شود که به‌ظاهرغیرمنطقی بنظر می‌رسد. درمقابل پارادوکس، سفسطه قراردارد که مطلب نادرست راحقیقت جلوه می‌دهد.

سرد شود، کوتاه‌تر می‌شود، اگر فرض کنیم که به‌این مناسبت مفتول پاره نشود و کش پیدا نکند تا چه عمقی درخاك فرو می‌رود ؟

حل

بنظر می‌رسد که چنین تغییر ناچیزی در درجهٔ حرارت مفتول ، فقط یك‌درجه ، نمی‌تواند آنرا آنقدر کوتاه کند که در زمین فرو برود . ولی محاسبه ما را به نتیجهٔ دیگری می‌رساند .

اگر مفتولی را به اندازهٔ یك درجه سرد کنیم ، به‌اندازهٔ یك‌صد هزارم طول خودش کوتاه‌تر می‌شود . بنابراین مفتولی که ۴۰ میلیون کیلومتر (طول استوای زمین) طول دارد ، به اندازهٔ ۴۰۰ متر کوتاه می‌شود . ولی شعاع این دایرهٔ مفتولی خیلی کمتر از ۴۰۰ متر کوتاه می‌شود. برای اینکه بفهمیم شعاع این دایره‌چقدر کوچك می‌شود، باید ۴۰۰ را بر۶/۲۸ یعنی ۲π تقسیم کنیم . جواب مساوی ۶۴ متر می‌شود. به‌این‌ترتیب ، مفتولی که تنها به اندازهٔ یك درجه سرد شده است ، نه به‌میزان چند میلیمتر ، بلکه بیش از۶۰ متر درعمق زمین فرو می‌ردد !

واقعیت ومحاسبه

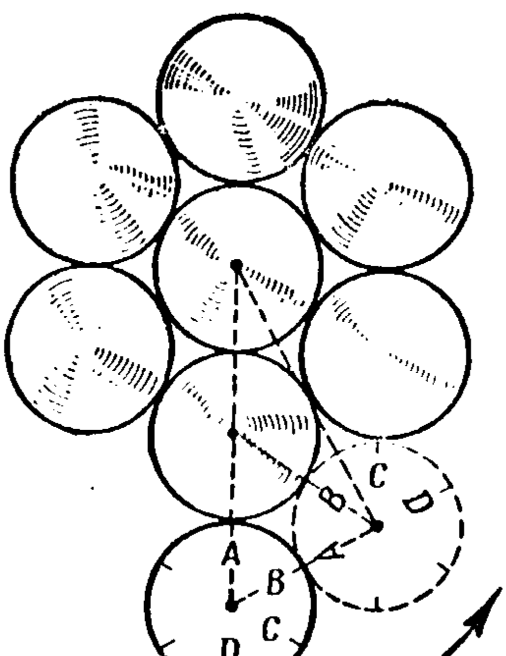
مسئله

درجلو شما هشت دایرهٔ مساوی قرار دارد (شکل ۱۲۳) . هفت دایره (هاشورزده) بدون حرکت است ودایرهٔ هشتم روی آنها ، بدون اینکه بلغزد ، می‌غلطد . دایرهٔ هشتم چند مرتبه دور خودش بچرخد تا

یکبار دایره‌های ثابت را دور بزند؟

البته شما می‌توانید جواب مسئله را عملا بدست آورید : هشت سکهٔ یکجور ومثلا دوریالی انتخاب کنید و شبیه شکل ۱۲۳ ، هفت‌تای آنها را روی میزمحکم کنید وسپس سکهٔ هشتم را دور آنها بچرخانید. برای تعیین تعداد دورها ، مثلا می‌توان از جهت عددی که روی سکه حك شده است استفاده کرد . هربار که عدد روی سکه وضع اولیهٔ خود راپیدا کرد ، خود سکه یك دورکامل دور مرکزش چرخیده است .

این آزمایش‌را درعمل، ونه درتصورخود، انجام دهید، می‌بینید که سکهٔ متحرك چهارمرتبه دور خودش می‌چرخد .



۱۲۳. دایرهٔ متحرك ضمن غلطیدن دور دایره‌های ساکن چند باردورخودش می‌چرخد؟

حالا کوشش می کنیم که جواب را به کمك استدلال و محاسبه بدست آوریم .

مثلامعین‌می کنیم که‌دایرهٔ‌متحرك، ضمن غلطیدن خود ، بـه چه قوسی از هریك‌ازدایره‌های ساکن تکیه می کند . برای این منظور فـرض می کنیم کـه حـرکت دایـرهٔ متحرکت از نقطهٔ **A** (پائین‌ترین نقطهٔ‌دایره‌های ساکن)شروع شود وآنقدرحرکت کند تا به‌اولین‌نقطهٔ تماس با دایره بعدی برسد (شکل۱۲۳ رابه‌بینید).

از روی شکل به‌سادگی ثابت می‌شود که قوس **AB** ، که ضمن این حـرکت پیمـوده شده است ، مساوی ۶۰ درجـه است . روی

هریك از دایره‌های ساکن ، ازاین قوس دومرتبه وجود دارد وبنابراین رویهم قوسی مساوی ۱۲۰ درجه و یا $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره را تشکیل می‌دهند .

به‌این‌ترتیب ، دایرهٔ‌متحرك، ضمن‌عبوراز $\frac{۱}{۳}$ محیط هریك‌ازدایرهای ساکن ، $\frac{۱}{۳}$ مرتبه دورخودش می‌چرخد . تعداد دایره‌های ساکن ۶ عدد است ، یعنی باید دایرهٔ متحرکت به‌اندازهٔ $۶ \times \frac{۱}{۳}$ یعنی ۲ مرتبه دور خودش بچرخد .

با آنچه که در عمل بدست آوردیم اختلاف پیدا می‌کند! ولی «واقعیت را نمی‌توان تغییرداد» .اگرمشاهده چیزی غیرازنتیجهٔ محاسبه باشد ، به‌این معنی است که درمحاسبه اشتباهی وجود دارد .

اشتباهی که در استدلال فوق وجود دارد پیدا کنید .

حل

وقتی که دایره‌ای ، بدون لغزیدن ، روی یك خط راست می‌غلطد ، زمانی که به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ محیط خود روی خط پیش رفته باشد ، خودش هم به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ مرتبه دور مرکزش چرخیده است . ولی وقتی که دایره روی یك خط منحنی می‌چرخد ، این استدلال نه درست است ونه با واقعیت تطبیق می‌کند . در مسئلهٔ مورد نظر ما وقتی دایرهٔ متحرك به اندازه $\frac{۱}{۳}$ محیط خود جلو برود ، $\frac{۲}{۳}$ مرتبه (و نه $\frac{۱}{۳}$) دور مرکزخود می‌چرخد وچون شش قوس از این نوع داریم ، بدست می‌آید :

$$۶ \times \frac{۲}{۳} = ۴ \quad \text{(دوان)}$$

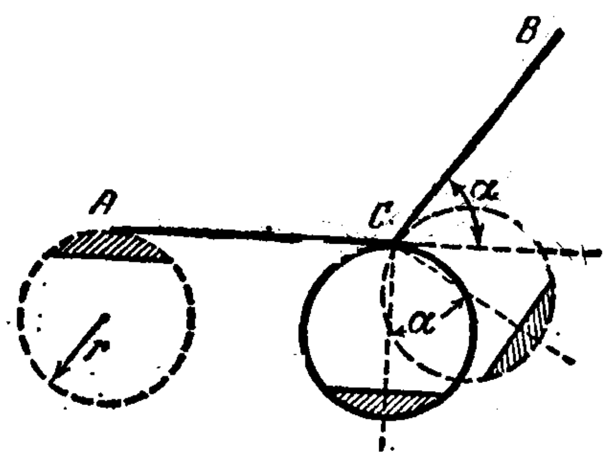
این مطلب را با مشاهده هم می‌توان تأیید کرد.

دایرهٔ خط چینی که درشکل ۱۲۳ وجود دارد، وضع دایرهٔ متحرك را پس‌ازآنکه به‌اندازهٔ قوس AB (= ۶۰ درجه) ازدایرهٔ ساکن (یعنی به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ محیط آن) جلورفته‌است، نشان می‌دهد. دروضع‌جدید، بالاترین نقطهٔ دایره، بجای نقطهٔ A، نقطهٔ C می‌باشد، که همانطور که به‌سادگی وازروی شکل‌دیده می‌شود، متناظرباچرخش ۱۲۰ درجه این نقطهٔ محیط دایره است، یعنی دایرهٔ متحرك درست $\frac{۱}{۳}$ مرتبه دور خودش چرخیده است به‌این ترتیب حرکت به‌اندازهٔ ۶۰ درجه متناظر با چرخش $\frac{۱}{۳}$ مرتبه به‌دورخودش خواهد بود.

بنابراین وقتی که دایره روی‌خط منحنی یاخط شکسته می‌غلطد، تعداد دفعاتی که دور مرکز خودش می‌چرخد با حالتی که روی یك خط راست به‌غلطد، فرق می‌کند.

***

حالا مختصری به‌جنبهٔ هندسی این واقعیت عجیب می‌پردازیم و از آن مهمتراینکه‌چرا معمولا این پدیده را نمی‌توان توجیه کرد.



۱۲۴. وقتی‌که دایره روی‌یك خط شکسته می‌غلطد، چگونه یك دورکامل دور خودش می‌چرخد؟

فرض کنید دایره‌ای‌به‌شعاع r روی خط راستی می‌غلطد. این‌دایره‌روی‌پاره‌خط

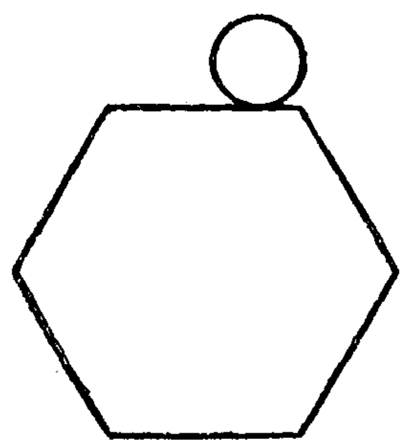
AB ، که طولی مساوی محیط دایـره داشته باشد ($2\pi r$) ، یکبار دورخودش دوران می کند . پاره خط AB رادرنقطهٔ وسط آن C ، خم می کنیم (شکل۱۲۴) وقطعهٔ CB را بازاویهٔ α نسبت به‌امتداداولیهٔ خود قرارمی‌دهیم .

حالا ، در وضع جدید ، دایره تا نقطهٔ C نیم دور دوران می کند وبرای اینکه به‌وضعی درآید که در نقطهٔ C بر CB مماس باشد ، باید دور مرکزش به‌اندازهٔ زاویهٔ α بچرخد (این دوزاویه‌به‌این علت برابرند که اضلاع آنها برهم عمود است) .

در این مورد ، بدون اینکه دایره روی پاره خط حرکت‌کند ، دور مرکزش چرخیده است . بنابراین دوران کامل به‌دور مرکز ، بستگی به‌شکستگی خط دارد .

چرخش اضافی نسبت به یك دور کامل برابر نسبت زاویهٔ α به زاویهٔ 2π یعنی $\frac{\alpha}{2\pi}$ خواهد بود . در امتداد پاره خط CD ، دایره همان چرخش عادی را دارد و بنابراین روی خط شکستهٔ ACD به انـدازهٔ $1+\frac{\alpha}{2\pi}$ دورخودش می‌چرخد .

حالا دیگر به‌سادگی می‌توانیم حساب کنیم‌که اگر دایره‌ای روی محیط یك شش ضلعی منتظم‌محدب ، بدون لغزش ، به غلطد، چند مرتبه دور مـرکز خـود دوران می کند (شکل ۱۲۵) . واضح است که تعداد دورها برابر است با تعداد دورهائی کـه روی خط راستی مساوی محیط (یعنی مجموع اضلاع) دور مرکزش می‌چرخد به‌اضافهٔ عددی که از



۱۲۵. وقتی کـه یك دایره روی محیط یك چند ضلعی می‌غلطد ، چند دور بیشترازوقتی که‌روی‌خطراستی به‌طول محیط حرکت‌کند ،دور مرکزخود دوران‌می‌کند.

نسبت مجموع زوایای خارجی شش ضلعی بر 2π بدست می‌آید و چون مجموع زوایای خارجی هرچند ضلعی غیرمشخص برابراست با چهارقائمه یعنی 2π، خواهیم داشت: $1=\frac{2\pi}{2\pi}$.

بنابراین ، در حرکت دایره روی شش ضلعی و همچنین روی هرچند ضلعی محدب ، همیشه نسبت به‌حرکت روی پاره خط راستی که طولش مساوی محیط چند ضلعی باشد ، یك حرکت دورانی بیشتر خواهیم داشت .

چون دایره‌را می‌توان چند ضلعی محدبی دانست که تعداداضلاع آن بی‌نهایت است (و طول هر ضلعش بی‌نهایت کوچك) ، بنابراین آنچه راکه در مورد چند ضلعی محدب گفتیم در مورد دایره هم صادق است : مثلاً اگر به‌مسئلهٔ اولی که مطرح کرده بودیم ، برگردیم ، وقتی که دایره‌ای روی دایره‌ای مساوی خودش به‌اندازهٔ ۱۲۰ درجه به‌غلطد، به‌اندازه $\frac{2}{3}$ محیط خود(ونه $\frac{1}{3}$) دور مرکزش چرخیده است و به‌این ترتیب حل مسئله دقیقاً ازلحاظ هندسی روشن می‌شود .

دختربچهٔ بندباز

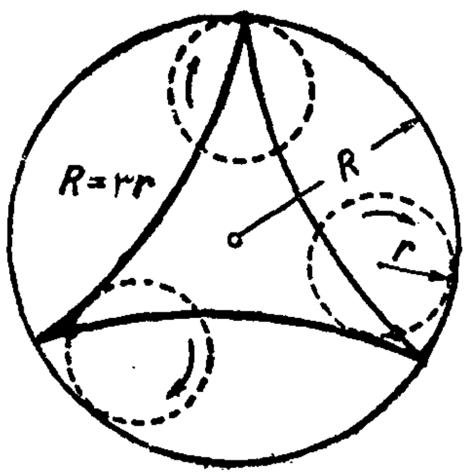
وقتی که‌دایره‌ای روی خطی که با آن‌دریك صفحه‌است می‌غلطد، هرنقطه از دایره هم روی صفحه تغییر مکان می‌دهد ، یعنی به اصطلاح

۱۲۶. سیکلوئید : مسیر نقطهٔ A از محیط دایره‌ای که بدون لغزش روی خط راستی می‌غلطد .

دارای خط سیری است .

اگر خط سیر یك نقطه از محیط دایره را ، وقتی که روی یك خط راست یامحیط دایره‌ای‌می‌غلطد ، دنبال کنیم، می‌بینم که منحنیهای مختلفی بدست می‌آید .

بعضی‌ازاین منحنی‌ها درشکلهای ۱۲۶ و ۱۲۷ داده شده است . سئوالی پیش می‌آید: آیا ممکن‌است نقطه‌ای از محیط دایره ، وقتی که در داخل یك دایرهٔ دیگرو مماس برمحیط آن می‌غلطد (شکل ۱۲۷) ، بجای خط منحنی ، یك خط راست رسم کند ؟ در نظر اول ، تصور می‌شود که‌این‌کارغیر ممکن‌است.

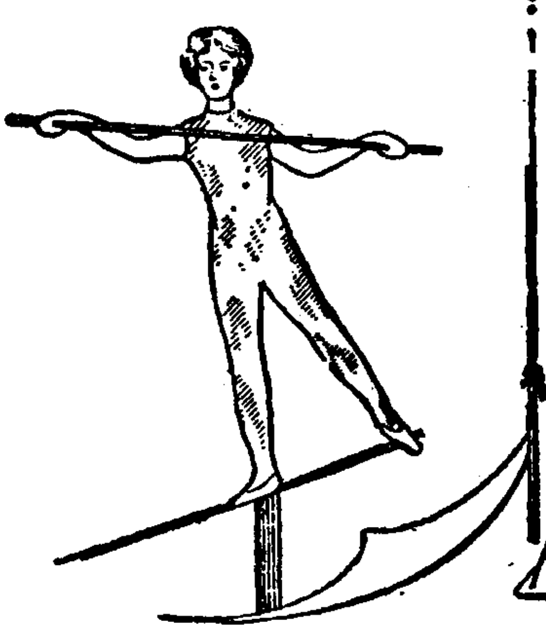


۱۲۷. شبه‌سیکلوئید سه شاخه، مسیر نقطه‌ای ازمحیط دایره ، وقتی‌که روی محیط ودر داخل دایـره‌ای‌بـه‌شعاع $R = ۳r$ می‌غلطد

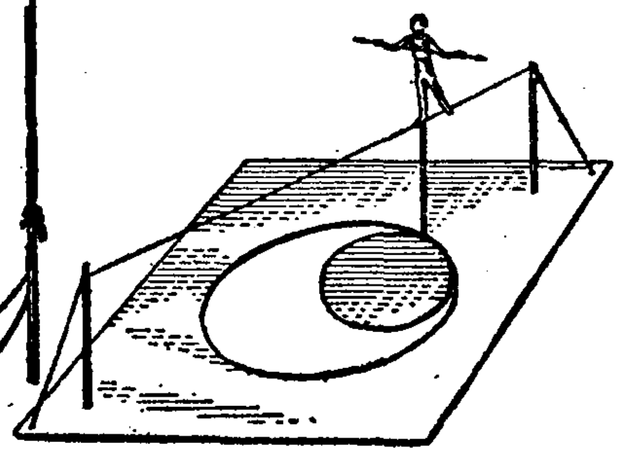
ولی بخصوص چنین وضعی را من با چشمان خودم دیده‌ام و آن بازی دختربچه‌ای‌روی‌طناب بود(شکل۱۲۸). شما هم می‌توانید خودتان و با سادگی آنرا تهیه کنید . روی یك صفحه ازمقوای کلفت و یا از تخته، دایره‌ای به‌قطر ۳۰ سانتیمتر رسم کنید ، بطوریکه قسمتی از صفحه باقی بماند وسپس یکی ازقطرهای آنرا از دوطرف ادامه دهید .

روی امتداد قطر ودر دوطرف آن سوزنهائی فرو کنید ، ازانتهای دو سوزن نخی بگذرانید . بنحوی که بطور افقی قرار گیرد و آنرا در دوطرف روی مقوا (یا تخته) محکم کنید . دایره‌ای را که رسم کرده‌اید ببرید و پنجره‌ای در مقوا به وجود آورید و سپس یك دایره مقوائی دیگر به قطر ۱۵ سانتیمتر درآن جا بدهید ، در کنارهٔ این

دایرهٔ کوچك هم سوزنی مطابق شکل ۱۲۹ فرو کنید ؛ از کاغذ ضخیم شکل دختربچه‌ای را درآورید و بالاك پای او را به سر سوزن محکم کنید .



۱۲۸ . دختربچهٔ بندباز



۱۲۹ . روی دایرهٔ متحرك نقاطی وجود دارد که روی خط راست حرکت می کنند.

حالا امتحان کنید که اگر دایرهٔ کوچك را روی محیط پنجره (دایرهٔ بزرگ) به‌غلطانید ، طوریکه همیشه بر آن مماس باشد ، نوك سوزن وهمراه آن شکل دختر بچه گاهی به‌جلو و گاهی به‌عقب ، ولی بهرحال‌درامتداد نخ کشیده، حرکت می کند . این مطلب رابه‌این‌ترتیب هم می‌توان روشن کرد که نقطهٔ واقع برمحیط دایرهٔ متحرك در امتداد قطر پنجره حرکت می کند .

پس چرادرمورد متشابه ، که درشکل ۱۲۷ نشان داده شده است، نقطهٔ واقع بردایرهٔ متحرك بجای خط راست ، یك منحنی رسم‌می کند (این منحنی شبه سیکلوئید نام دارد) ؟ رمز مطلب در نسبت قطر دایره

بزرگتر به‌دایرهٔ کوچکتراست .

مسئله

ثابت کنید که اگر دایره‌ای ، درداخل دایرهٔ دیگر و مماس بر آن به‌غلطد ، به‌شرطی که شعاع دایرهٔ بزرگتر دوبرابر شعاع دایرهٔ کوچکتر باشد ، هر نقطه از محیط دایرهٔ کوچکتر روی امتداد قطری از دایرهٔ بزرگتر حرکت می‌کند .

حل

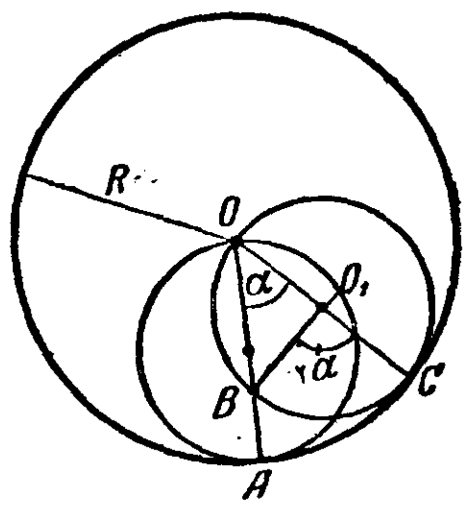
وقتی که قطر دایرهٔ O_1 نصف قطر دایرهٔ O باشد (شکل ۱۳۰) ، در هرلحظه‌ای ازحرکت دایرهٔ O_1 ، یکی از نقاط آن برمرکز دایرهٔ O واقع می‌شود .

تغییر مکان نقطهٔ A را تعقیب می‌کنیم .

فرض کنید دایرهٔ کوچکتر به‌اندازهٔ قوس AC غلطیده باشد.

در وضع جدید دایرهٔ O_1 ، نقطهٔ Aدرکجا قرارخواهدگرفت ؟

واضح است که باید نقطهٔ $\bar{A}$ در وضع جدید در جائی مثل نقطهٔ B باشد ، بطوریکه قوسهای AC و BC از لحاظ طول باهم برابر باشند (دایره بدون لغزش می‌غلطد) . فرض کنیم : $OA=R$ و $\widehat{AOC}=\alpha$ باشد ، در اینصورت $AC=R.\alpha$ وبنابراین $BC=R.\alpha$



۱۳۰. توضیح‌هندسی «دختربچهٔ بندباز»

می‌شود . ازطرف دیگر چون $O_1C = \frac{R}{2}$ است، زاویهٔ BO_1C مساوی

$\frac{R \cdot \alpha}{\frac{R}{2}}$ یعنی 2α می‌شود واز آنجا زاویهٔ BOC ، که یك زاویهٔ محاطی

است ، برابر $\frac{2\alpha}{2}$ یعنی α می‌شود و این به‌معنای آنست که B روی شعاع

OA قرار دارد .

***

پافنوتی لبوویچ چبیشف
(۱۸۲۱-۱۸۹۴)

آنچه را که اینجا دربارهٔ اسباب بازی دختر بچهٔ بند باز گفتیم ، مقدمهٔ ساده شده‌ای از تبدیل حرکت دورانی به‌حرکت روی خط مستقیم است .

شکل وطرح ساختمانی چنین تبدیلی حتی مورد توجه ای . ای . پولزونو ، مکانیسین اهل اورال واولین کاشف ماشین بخار ، نیز بوده است. معمولا این مکانیزم که نقطه‌ای با حرکت روی خط مستقیم به‌وجود می‌آورد ، دارای ساختمان لولائی است .

ریاضی‌دان بزرگ روس چبیشف (۱۸۲۱-۱۸۹۴) مطالب زیادی در زمینهٔ نظریهٔ ریاضی این مکانیزم از خود باقی گذاشته است . در حقیقت ، او تنها یك ریاضی‌دان نبود ، بلکه یك مکانیسین مشهور هم بود .

راهی از روی قطب

البته شما پرواز معروف گروموو قهرمان اتحاد شوروی و دوستان اورا از مسکو تا لوس‌آنجلس ازطریق قطب شمال بخاطردارید. م. م. گرومو توانست با پرواز ۲۶ ساعت و ۱۷ دقیقهٔ خود دو رکورد جهانی ازپروازبدون نشست بطور مستقیم (۱۰۲۰۰ کیلومتر) ومنکسر (۱۱۵۰۰ کیلومتر) ازخود بجا بگذارد .

چه تصور می‌کنید ، آیا وقتی‌که هواپیمای قهرمانان از روی قطب می‌گذشت ، همراه زمین دور محور زمین دوران می‌کرد یا نه ؟ اغلب جوابی برای این سئوال شنیده می‌شود ، ولی همیشه جوابها صحیح نیست . هرهواپیمائی ، و منجمله هواپیمائی که از روی قطب عبور می‌کند ، باید در گردش کرهٔ زمین شرکت داشته باشد . این وضع بدان مناسبت است که هواپیمای در حال پرواز ، تنها از قسمت جامد زمین جدا شده‌است، ولی هنوز درآتمسفر آن قرار دارد وهمراه آن درگردش زمین به دور محور خود شرکت می‌کند .

به این ترتیب ضمن پرواز از طریق قطب از مسکو به امریکا ، هواپیما همراه با زمین ، دورمحور زمین چرخیده است . خط سیر این پروازچگونه بوده است ؟

برای اینکه به این سئوال جواب صحیح داده شود، باید درنظر داشت‌که وقتی از « حرکت یك جسم » صحبت می‌کنیم ، بـه معنای اینست‌که موقعیت جسم مفروض نسبت به جسم دیگری تغییر می‌کند . سئوال دربارهٔ خط سیر وبطور کلی حرکت به شرطی معنا پیدا می‌کند که یك دستگاه محاسبه و یا بطور ساده یك جسم را نشان‌کرده باشیم (یا خودبخود معلوم باشد) که جسم مفروض نسبت به‌آن حرکت‌کند .

اگر نسبت به زمین درنظر بگیریم ، هواپیمای گروموو تقریباً در امتداد نصف‌النهار مسکو حرکت کرده است . نصف‌النهار مسکو ، مثل بقیهٔ نصف‌النهارها ، همراه زمین دور محور زمین می‌چرخد ؛ هواپیما هم ، وقتی که روی خط نصف‌النهار پرواز می کند ، در این چرخش شرکت دارد، ولی شکل این خط سیر برای ناظری که روی زمین‌است منعکس نمی‌شود ، زیرا این حرکت نسبت به جسم دیگری غیر از زمین انجام می‌گیرد .

بنابراین ، برای ما که محکم به زمین چسبیده‌ایم خط سیر این پروازقهرمانانه ازطریق قطب ، قوسی از دایرهٔ عظمیه است ، به‌شرطی که هواپیما دقیقاً روی نصف‌النهارحرکت کرده باشد وضمناً فاصلهٔ آن ازمرکززمین مقداری ثابت باقی مانده باشد .

حالا سئوال را به طریق دیگری مطرح می کنیم : ما حرکت هواپیما را نسبت به زمین دردست داریم و می‌دانیم که هواپیما و زمین مشترکاً دور محور زمین می‌چرخند ، یعنی حرکت هواپیما و زمین نسبت به‌جسم سومی انجام می‌گیرد ؛ خط سیر این پرواز برای ناظری که وابسته به این جسم سوم است ، چگونه خواهد بود؟

تا حدی این مسئلهٔ غیرعادی را ساده‌تر می کنیم . منطقهٔ نزدیك قطب سیارهٔ زمین را سطح دایره‌ای درنظر می‌گیریم که برصفحهٔ عمود بر محورزمین منطبق باشد . این صفحهٔ فرضی را همان «جسم» مورد نظرمی‌گیریم که دایرهٔ مفروض نسبت به‌آن دورمحورزمین می‌چرخد، و فرض می‌کنیم که یك چرخ کوکی در امتداد یکی از قطرهای این دایره به طور یکنواخت حرکت کند : این چرخ نقش هواپیمائی را به عهده دارد که در امتداد نصف‌النهار از طریق قطب عبورمی کند .

مسیر این چرخ روی صفحهٔ فرضی ما چگونه است (به عبارت

دقیق‌ترمسیر نقطه‌ای از چرخ و مثلا مرکز ثقل آن‌چیست) ؟

زمانی که طول می‌کشد تا این چرخ از یك انتهای قطر به‌انتهای دیگر قطر برسد به سرعت آن بستگی دارد .

سه حالت درنظر می‌گیریم :

۱) چرخ مسیرخود را در ۱۲ ساعت طی کند ؛

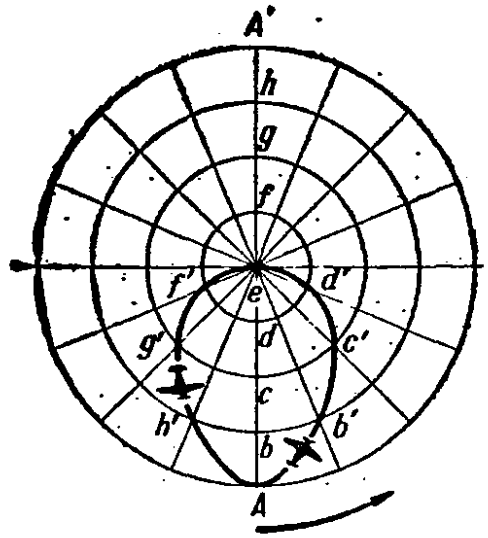
۲) این راه را در ۲۴ ساعت طی کند ؛

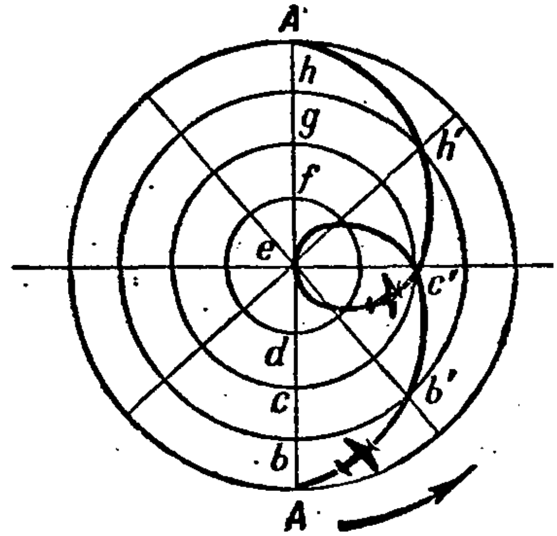
۳) و بالاخره همین راه را ۴۸ ساعته طی کند .

در تمام این حالتها دایرهٔ مفروض در ۲۴ ساعت یك دور کامل می‌زند .

حالت اول (شکل ۱۳۱) . چرخ قطر دایره را در ۱۲ ساعت طی می‌کند. در این مدت دایره نیم‌دورمی‌زند ، یعنی ۱۸۰ درجه می‌چرخد ونقاط A و ´A با یکدیگر تغییرجا می‌دهند . روی شکل ۱۳۱ قطر را به ۸ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم که چرخ از هریك این قسمتها در ۱/۵ ساعت(۱۲:۸) عبورمی‌کند. به‌بینیم جای‌چرخ پس از۱/۵ساعت بعد از شروع حرکت کجاست . اگر دایره دور خودش نمی‌چرخید ، در این مدت چرخ از نقطهٔ A به نقطهٔ b می‌رسید . ولی دایره هم در این فاصلهٔ زمانی به‌اندازهٔ °۲۲/۵=۸:°۱۸۰ دوران می‌کند. بنابراین نقطهٔ b به نقطهٔ ´b تغییر جا می‌دهد . ناظری که روی دایره باشد و همراه‌آن دوران کند ، متوجه این جابجائی نمی‌شود و فقط تغییرمحل چرخ را از A به b می‌بیند . ولی ناظری‌که خارج این دایره باشد و در دوران آن شرکت نکند چیز دیگری می‌بیند : برای او چرخ روی یك خط منحنی از نقطهٔ A به نقطهٔ ´b می‌رود . اگر این ناظر ۱/۵ ساعت دیگرخارج از دایره باشد ، می‌بیند که چرخ به‌نقطهٔ ´c می‌رسد. در ۱/۵ ساعت بعد برای این ناظر، چرخ قوس ´c´d را طی می‌کندو

بالاخره بعد از ۱/۵ ساعت دیگر چرخ به مرکز e می‌رسد .





۱۳۱ ۱۳۲

منحنی‌هائی که یك نقطه روی یك صفحهٔ ثابت رسم می‌کند،
وقتی‌که در دو حرکت مختلف شرکت داشته باشد .

اگر ناظری که در خارج دایره ایستاده است ، از اینجا به بعد مسیر چرخ‌را تعقیب کند، باتعجب‌مشاهده می‌کند که چرخ روی منحنی ef´g´h´A پیش می‌رود و حرکت آن ، بطورغیرمنتظره ، بجای اینکه بطرف نقطهٔ متقاطر A باشد ، به طرف جائی است که حرکت را شروع کرده است .

حل این معما خیلی ساده است : بعد از شش ساعت حرکت چرخ بر نیمهٔ دوم قطر دایره ، این نیم قطر همراه با دایره ۱۸۰درجهٔ کامل را چرخیده است و بنابراین برنیمهٔ اول قطرمنطبق می‌شود . وقتی که چرخ برمرکز دایره هم قرارگیرد، همراه باآن دورمرکزمی‌چرخد. روشن است که چرخ نمی‌تواند بطورکامل در مرکز دایره قرارگیرد ، بلکه تنها یك‌نقطهٔ آن برمرکزمنطبق می‌شود و دراین لحظه چرخ‌همراه با دایره دور این نقطه می‌چرخد . همین وضع هم برای هواپیما وقتی که به قطب می‌رسد ، پیش می‌آید. به این ترتیب حرکت چرخ روی

قطـر دایره از یك طرف به طرف دیگر ، به چشم ناظری که خارج از دایره قرار دارد ، بـه شکل دیگری جلوه می کند . کسی که روی دایره ایستاده است و همراه آن دورمرکز دایره می‌چرخد، این حرکت را مستقیم‌الخط می‌بیند ؛ درحالیکه اگر کسی ساکن باشد و در حرکت دایره به‌دورخودش شرکت نداشته باشد ، حرکت چرخ را روی یك خط منحنی ، بنحوی که در شکل ۱۳۱ نشان داده شده است (و شکل یك قطره را بخاطرمی آورد) ، می‌بیند.

اگر فرض کنیم که شما در مرکز زمین ایستاده باشید و از آنجا به‌پرواز هواپیما روی صفحهٔ فرضی عمود بر محور زمین نگاه کنید ، بااین شرایط خیالی که زمین شفاف باشد و شما و صفحه در چرخش زمین شرکت نداشته باشید و پرواز هواپیما از روی قطب ۱۲ ساعت طول بکشد ، بازهم مسیر آن را به شکل همین منحنی خواهید دید .

واین مثال جالبی است ازترکیب دوحرکت مختلف .

ولی درحقیقت پرواز ازطریق قطب ، از مسکو تا نقطهٔ متقاطر آن روی همان مدار ، ۱۲ ساعت طول نکشید و بنابراین ما به بررسی یکی دیگر از مسائل مقدماتی ترکیب دوحرکت می‌رسیم :

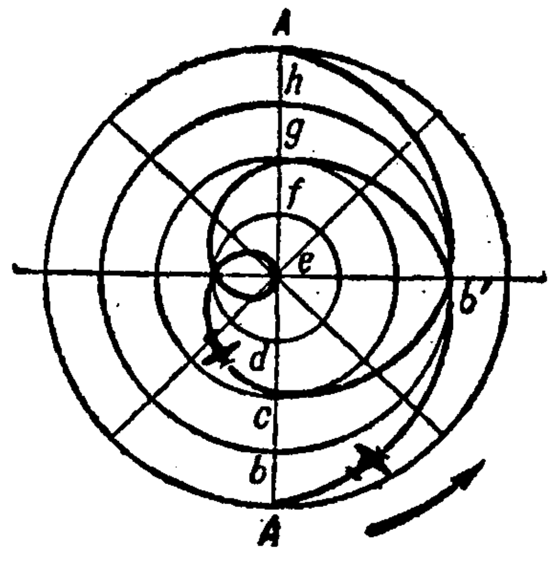
حـالت دوم (شکل ۱۳۲). چرخ ضمن ۲۴ ساعت از قطرعبور می کند. دراین مدت دایره یك دور کامل دوران می کند و برای ناظری که درحرکت صفحه شرکت نداشته باشد، مسیرحرکت چرخ به‌شکل منحنی که درشکل ۱۳۲ نشان داده شده است، می‌باشد .

حـالت سوم (شکل۱۳۳). دایره مثل حالتهای قبل در۲۴ساعت یك دوران کامل می کند ، در حالیکه چرخ ، قطر دایره را از یك انتها به انتهای دیگر در ۴۸ ساعت طی می کند .

در اینحالت ، چرخ از هر $\frac{۱}{۸}$ قطر در ۶=۴۸:۸ ساعت عبور می کند .

در جریان این ۶ ساعت ، دایره می‌تواند یك چهارم دور، یعنی ۹۰ درجه بزند . بنابراین بعد از آنکه شش ساعت از ابتدای حرکت بگذرد ، چرخ روی قطر بـه نقطهٔ b منتقل می‌شود (شکل ۱۳۳) ، ولی گردش دایره آنـرا به نقطهٔ b′ منتقل مـی کند . وقتی کـه شش ساعت دیگر بگذرد ، چرخ به نقطهٔ g می‌رسد وغیره . ضمن ۴۸ ساعت ، چرخ تمام قطر را طی می کند و دایره دو دور کامل می‌زند . نتیجه ترکیب این دوحرکت، درنظر کسی که ساکن است ، به‌صورت منحنی جالبی خواهد بود که در شکل ۱۳۳ با خط کلفت‌تر نشان داده شده است .

موردی راکه هم‌اکنون مورد مطالعه قراردادیم ، ما را به‌شرایط حقیقی پرواز از روی قطب نزدیك می‌کند. م. م. گروموو فاصلهٔ از



۱۳۳. منحنی دیگری از ترکیب دوحرکت .

مسکو تا قطب را تقریباً در ۲۴ ساعت طی‌کرد ؛ بنابراین ناظری که در مرکز زمین قرار گرفته است ، این قسمت از مسیر را به صورت خطی می‌بینید که تقریباً برنیمهٔ اول منحنی شکل ۱۳۳ منطبق است .

اما قسمت دوم پرواز گروموو چگونه بوده است؟ قسمت دوم پرواز را در مدتی یك برابرونیم مدت قسمت اول انجام داده است ، علاوه بر آن فاصلهٔ ازقطب تا لوس‌آنجلس هم یك‌برابرونیم فاصلهٔ از مسکو تا قطب شمال می‌باشد ، بنابراین مسیر قسمت دوم پرواز ، برای ناظر بدون حرکت ، منحنی است به همان شکل مسیر قسمت اول ، منتهی با طولی یك برابرونیم آن .

منحنی که به طور کلی در این پرواز بدست می‌آید در شکل ۱۳۴ نشان داده شده است .

ممکن است ، این وضع که نقاط شروع و پایان حرکت در شکل اینقدر به‌هم نزدیك‌اند ، برای بسیاری عجیب باشد . ولی نباید از نظر دور داشت که این شکل وضع مسکو و لوس آنجلس را در یك زمان نشان نمی‌دهد ، بلکه فاصلهٔ زمانی بین آنها $۲\frac{۱}{۲}$ شبانه روز است .

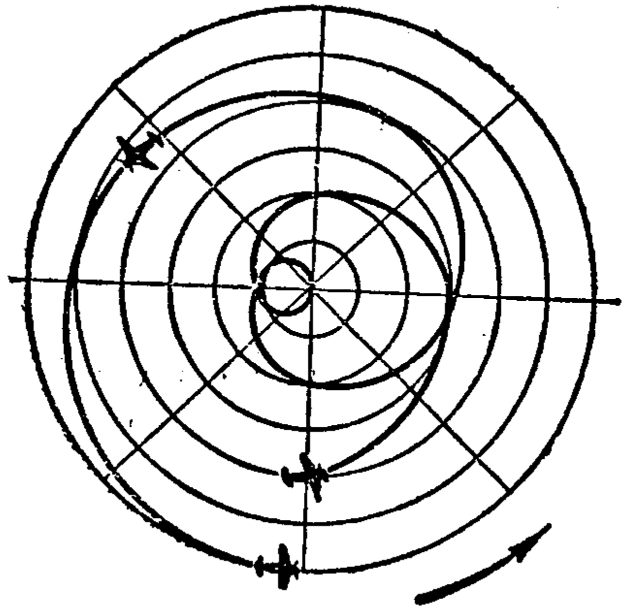
چنین است شکل تقریبی خط سیرپروازگروموو ازطریق قطب ، به شرطی‌که ناظرخارج ازمحیط پرواز ومثلا در مرکز کرهٔ زمین باشد.

آیا درست است که این مسیر پیچ‌دار طره مـانند را به عنوان پرواز از طریق قطب و بدون در نظر گرفتن هیچگونه نسبیتی صحیح بدانیم ؟ نه! این حرکت هم نسبی است : این مسیر نسبت به جسمی است که در دوران زمین به دور محورش شرکت نداشته باشد ، در عین حال این مسیر پرواز نسبت سطح متحرك زمین است .

اگر ما بتوانیم مسیر این پرواز را از ماه یا خورشید تعقیب کنیم* ، مسیر آن به صورت دیگری درخواهد آمد .

*) که در اینحال هم حرکت را نسبت به دستگاه مختصات وابسته به ماه یا خورشید در نظرگرفته‌ایم .

ماه درگردش شبانه روزی زمین شرکت ندارد ، ولی درعوض دور سیارهٔ ما هر ماه یك‌بار دوران می‌کند . در ۶۲ ساعتی که پروازاز مسکو تا لوس آنجلس انجام می‌گیرد ، ماه به اندازهٔ ۳۰ درجه دور



۱۳۴. مسیر پرواز ازمسکو تا لوس‌آنجلس ، به‌شرطی‌که ناظر نه درپروازو نه‌درگردش زمین به دورخود شرکت نداشته‌باشد.

زمین دوران می‌کند و این نمی‌تواند در خط سیر پرواز ، از لحاظ ناظری‌که در ماه است ، اثر نداشته باشد . درشکل خط سیر هواپیما برای ناظری‌که از خورشید نگاه می‌کند ، حرکت دیگری هم دخالت دارد و آن حرکت زمین بـه دور خورشید است . ف. انگلس هم در «دیاکتیك طبیعت» می‌گوید :

حرکت مطلق جسم وجود ندارد و فقط حرکت نسبی می‌تواند وجود داشته باشد .

طول تسمهٔ انتقال

وقتی که شاگردان مدرسهٔ حرفه‌ای کار خود را تمام کردند ،

استادکار مسئلهٔ زیر را موقع خداحافظی به‌آنها داد تا حل کنند.

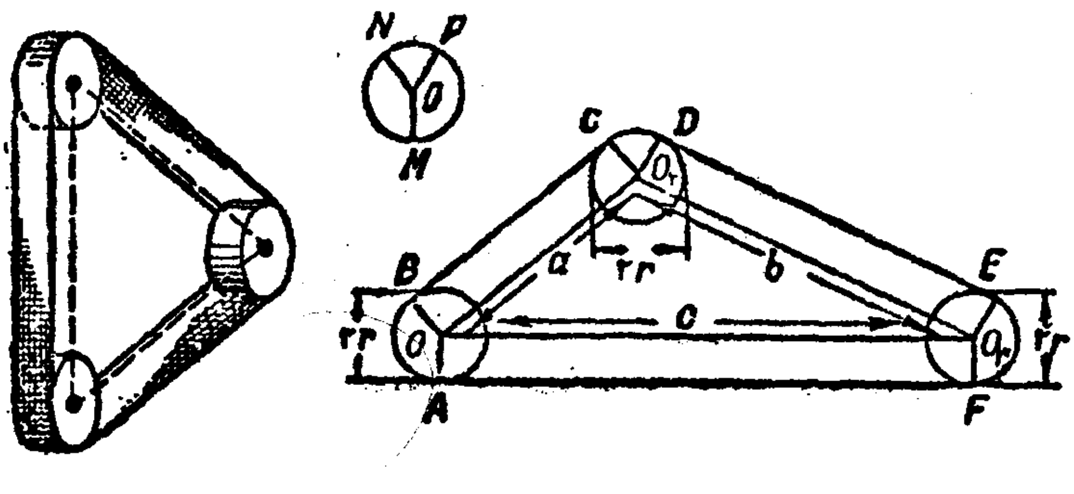
مسئله

« استادکار گفت :

« برای یکی از دستگاههای جدیدکارگاه به تسمهٔ انتقال احتیاج داریم ، منتهی بجای دو قرقره ، آنطور که معمولا پیش می‌آید ، می‌خواهیم روی سه قرقره حرکت کند. و استادکار طرح دستگاه انتقال حرکت را به شاگردان خود نشان داد (شکل ۱۳۵) . او ادامه داد :

« هر سه قرقره هم شکل و به یك اندازه‌اند. اندازهٔ اقطار و فاصلهٔ بین محورهای قرقره‌ها در طرح معین شده است.

« اگراین اندازه‌ها را بدانیم وبدون اطلاع از اندازه‌های دیگر، فوراً طول تسمهٔ انتقال را معین کنید.



۱۳۵. طرح دستگاه انتقال حرکت. با در دست داشتن این اندازه‌ها ، چگونه می‌توان طُول تسمهٔ انتقال را بدست آورد؟

دانش‌آموزان به‌فکرفرورفتند. یکی ازآنها بلافاصله‌جواب‌داد: «بنظرمن ، اشکال تنها دراینجاست که روی شکل اندازهٔ قوسهای AB، CD و EF ، یعنی طول قسمتهائی از تسمه که دور قرقره‌ها پیچیده است ، معین نشده است . برای تعیین طول هریك از این قوسها باید اندازهٔ زوایای مرکزی متناظر با آنها را دانست و بنظر من ، این اندازه‌ها را هم جز باکمك نقاله نمی‌توان بدست آورد» .

« استادکار جواب داد :

« زوایائی را هم که نام بردید ، می‌توان با توجه به مفروضاتی که در شکل معین شده است ، باکمك روابط مثلثاتی و جدول محاسبه کرد ، ولی این یك راه حل طولانی و بغرنج است . در اینجا به‌نقاله هیچ احتیاجی نیست ، زیرا به‌طول قوسهای مربوطه به طور جداگانه احتیاجی نداریم و کافی‌است ...» .

«یکی از بچه‌ها دنبال سخن راگرفت: ... که مجموع آنها را بدست آوریم» .

« ــ با این ترتیب که روش کاربرایتان روشن شد ، به منزل‌بروید و فردا جواب مسئله را برای من بیاورید ».

با توضیحات استادکار گمان می‌کنم که راه حل مسئله برای خواننده مشکل نباشد .

حل

در حقیقت طول تسمهٔ انتقال خیلی به‌سادگی بدست می‌آید . باید به مجموع فواصل محورها ، اندازهٔ محیط یکی از قرقره‌ها را اضافه کرد، یعنی‌اگرطول‌تسمه‌را l فرض‌کنیم بایدداشته باشیم:

$$l = a + b + c + ۲\pi r$$

هر کسی می‌تواند حدس بزند که مجموع قوسهائی که تسمهٔ انتقال در طول آنها دور قرقره‌ها پیچیده است ، باید مساوی محیط

یکی از قرقره‌ها باشد ، ولی هر کسی نمی‌تواند اثبات کند .

راه حل مسئله را ، با توجه به مفروضات ، می‌توان به طور خلاصه چنین بیان کرد :

فرض کنید BC ، DE و FA مماسهای بردایره‌ها باشند (شکل ۱۳۵) . از مرکز دایره‌ها به نقاط تماس وصل می‌کنیم . چون قرقره‌ها یکنواخت هستند ، شکلهـای O_1BCO_2 و O_2DEO_3 و O_1O_3EA مستطیل‌اند و بنابراین خواهیم داشت :

$$BC+DE+FA=a+b+c$$

حالا باید ثابت کنیم که مجموع قوسهای $AB+CD+EF$ برابر طول محیط یکی از دایره‌هاست .

برای این منظور دایرهٔ O را به شعاع r رسم می‌کنیم (شکل ۱۳۵- بالا) . در این دایره OM را موازی O_1A ، ON را موازی O_1B و OP را موازی O_2D رسم می‌کنیم ، در این صورت خواهیم داشت :

$$\widehat{MON}=\widehat{AO_1B} ، \widehat{NOP}=\widehat{CO_2D} ، \widehat{POM}=\widehat{EO_3F}$$

زیرا دو زاویهٔ با اضلاع موازی ، با هم برابرند .

از آنجا نتیجه می‌شود :

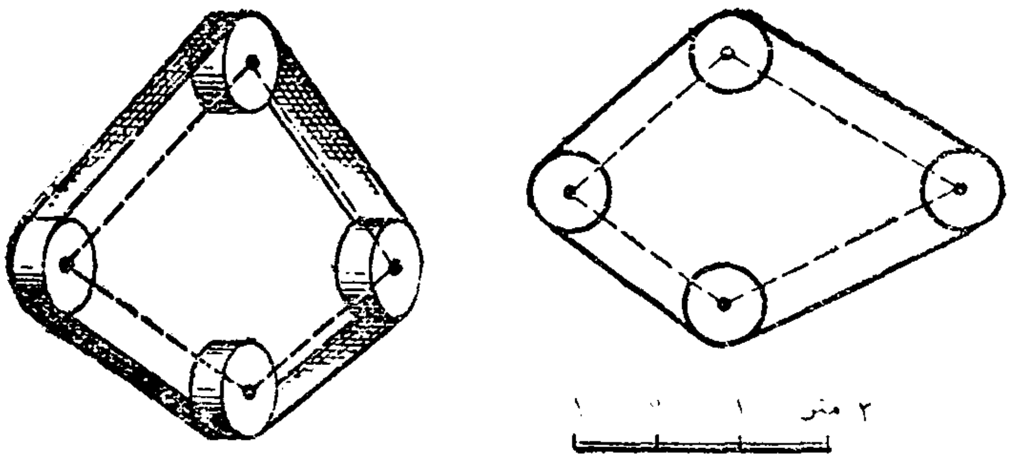
$$AB+CD+EF=MN+NP+PM=2\pi r$$

و بنابراین طول تسمه باید $l=a+b+c+2\pi r$ باشد .

با همین روش می‌توان ثابت کرد ،که نه فقط برای سه قرقره ، بلکه برای هر تعداد دلخواه قرقره ، طول تسمهٔ انتقال مساوی است با مجموع فواصل محورها به اضافهٔ طول محیط یکی از قرقره‌ها .

مسئله

در شکل ۱۳۶ طرح انتقال حرکت روی چهار قرقره داده شده است (قرقره‌های دیگر هم در فاصلهٔ آنها وجود دارد، منتهی چون در جواب مسئله تأثیری ندارد، در شکل رسم نشده‌اند). با استفاده از



۱۳۶. اندازه‌های لازم‌را روی شکل بدست‌آورید و باکمك‌آنها طول نوار انتقال حرکت را محاسبه کنید.

مقیاسی که در شکل داده شده است، اندازه‌های لازم را بدست آورید و طول نوار انتقال حرکت را محاسبه کنید.

کلاغ تیزهوش

در منتخبات دبیرستانی، داستان با مزه‌ای در بارهٔ «تیز هوشی کلاغ» وجود دارد. این یك داستان قدیمی است و از کلاغی روایت می‌شود که از تشنگی رنج می‌برد و کوزهٔ آبی پیدا کرد. آب در کوزه کم بود و منقار کلاغ به‌آن نمی‌رسید، برای اینکه بتواند از آب کوزه استفاده کند، شروع به‌ریختن خورده سنگ در کوزه کرد. با این تدبیر

سطح آب بالا آمد و به سر کوزه رسید و کلاغ توانست تشنگی خود را تسکین دهد.

در این باره بحث نمی‌کنیم که آیا کلاغ می‌تواند به این ترتیب فکر کندو راه چاره‌ای جستجو کند یا نه. مطلب را از لحاظ هندسی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مسئلهٔ زیر برای ما قابل طرح است.

مسئله

اگر فرض کنیم که در ابتدا آب تا نیمهٔ کوزه باشد، آیا کلاغ با روش فوق، موفق به خوردن آب می‌شود؟

حل

باید این مطلب را روشن کنیم که سطح اولیهٔ آب در کوزه در هر ارتفاعی باشد، نمی‌توان از روش کلاغ برای بالا بردن آن استفاده کرد.

برای سهولت کار، فرض می‌کنیم که کوزه به شکل مکعب مستطیل باشد و سنگهائی را که در آن می‌اندازیم به شکل گلوله‌های مساوی و یکنواخت باشند. واضح است که تنها بشرطی آب از سطح سنگها بالا می‌آید که ذخیرهٔ اولیهٔ آب از حجمی که در فاصلهٔ سنگها قرار دارد، بیشتر باشد: در اینصورت آب فواصل را پر می‌کند و از سطح سنگها بالاتر می‌آید. به‌بینیم حجم این فاصله‌ها چقدر است. برای اینکه کار محاسبه ساده‌تر بشود، بهتر آنست که گلوله‌های سنگی

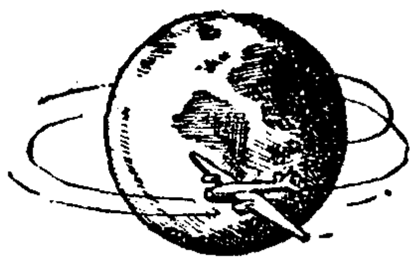
را چنان در نظر بگیریم که مرکز هر گلوله با مرکز گلولهٔ بالایی و مرکز گلولهٔ زیری روی یك خط راست قائم قرار گرفته باشند ، اگر قطر هر گلوله را d فرض کنیم ، حجم آن مساوی $\frac{1}{6}\pi d^3$ وحجم مکعب محیطی آن مساوی d^3 می‌شود . اختلاف این دو حجم یعنی $d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3$ عبارتست از قسمتی از حجم مکعب که به وسیلهٔ گلوله اشغال نشده است ، نسبت :

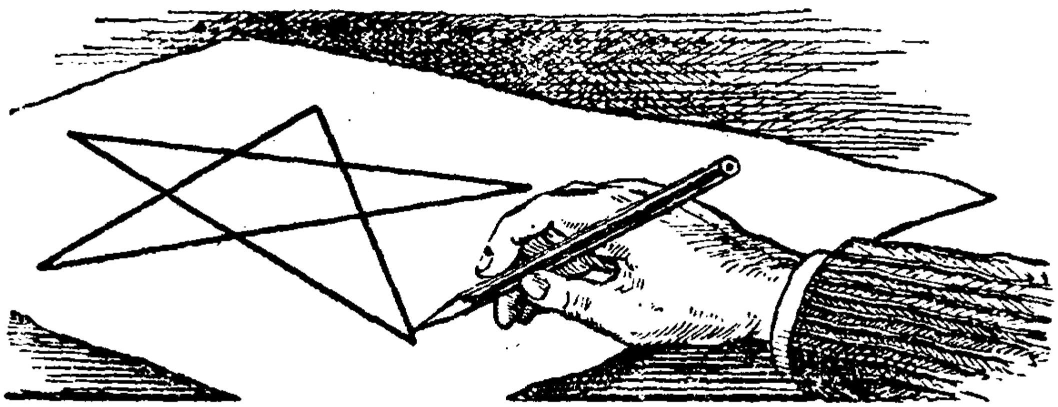
$$\frac{d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3}{d^3} = 0/48$$

به این معنی است که از هر مکعب به اندازهٔ ۰/۴۸ حجمش خالی می‌ماند . همین نسبت ، یعنی کمی کمتر از نصف ، مجموع فواصل خالی کوزه را تشکیل می‌دهد . اگر کوزه به شکل مکعب مستطیل و یا سنگها به شکل کره نباشد ، تغییر وضع خیلی ناچیز خواهد بود . در هرحالتی می‌توان نتیجه گرفت که اگر سطح اولیهٔ آب پائین‌تر از نیمهٔ کوزه باشد ، کلاغ با انداختن سنگ درآن ، موفق نمی‌شود سطح آب را به لبهٔ کوزه برساند.

اگر کلاغ بتواند سنگهائی را که در کوزه می‌اندازد کاملاً پهلوی هم قراردهد ، تازه آب کمی بیشتر از دوبرابر ارتفاع اولیهٔ خود را پیدا می کند . ولی کلاغ نمی‌تواند در این باره کاملا موفق شود : اگر مقداری از آب‌را که به‌خورد سنگها می‌رود به حساب بیاوریم و همچنین در نظر بگیریم که سنگها کاملا به هم چسبیده نیستند ، نتیجه

می‌گیریم که اگرسطح اولیهٔ آب از نیمهٔ کوزه پائین‌تر باشد ، کلاغ موفق به خوردن آب نمی‌شود .



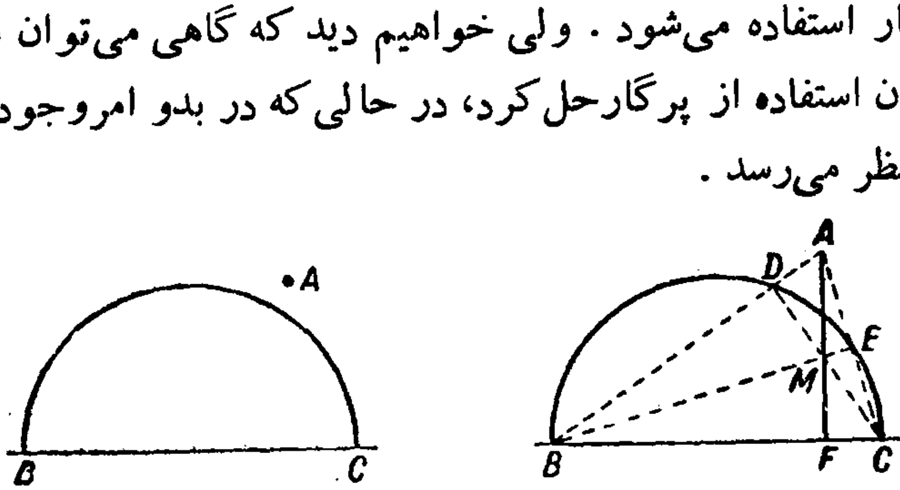


۱۰

هندسه بدون اندازه گیری و بدون محاسبه

رسم بدون پرگار

برای حل مسائل هندسی مربوط به ترسیم، معمولا از خط کش و پرگار استفاده می‌شود. ولی خواهیم دید که گاهی می‌توان مسائلی را بدون استفاده از پرگار حل کرد، در حالی که در بدو امر وجود پرگار لازم بنظر می‌رسد.



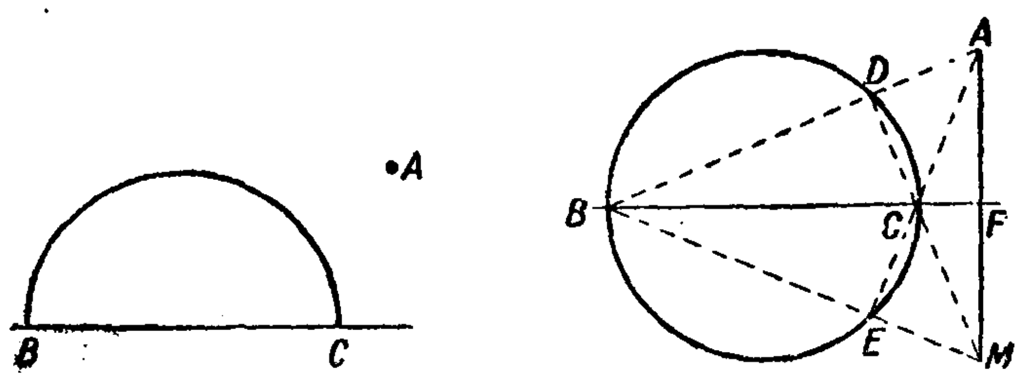
۱۳۷. رسم و حل یك مسئلهٔ هندسی (حالت اول)

مسئله

از نقطهٔ A (شکل ۱۳۷ــ سمت چپ) واقع در خارج نیمدایره، بدون استفاده ازپرگار ، عمودی برقطر آن رسم کنید . مرکز نیمدایره هم مشخص نشده است .

حل

برای حل مسئله ، از این خصوصیت مثلث استفاده می‌کنیم که ارتفاعات آن در یك نقطه به هم می‌رسند . نقطهٔ A را به B و C وصل می‌کنیم تا نقاط D و E بدست آید (شکل ۱۳۷ــ سمت‌راست). واضح است که خطوط BE و CD دو ارتفاع از مثلث ABC هستند . ارتفاع سوم ، همان عمود مجهول بر BC است که از محل تلاقی دو ارتفاع دیگر ، یعنی نقطهٔ M ، می‌گذرد . اگر با کمك خط‌کش A را به M وصل‌کرده و امتداد دهیم ، جواب مسئله بدست می‌آید ، بدون اینکه



۱۳۸. همان مسئله در حالت دوم

احتیاجی به وجود پرگار پیدا کرده باشیم . در حالتی‌که خط مجهول بر امتداد خط BC عمود باشد (شکل ۱۳۸) ، مسئله به‌شرطی حل

خواهد شد که به جای نیمدایره ، تمام دایره را در اختیارداشته باشیم. ازروی شکل ۱۳۸ معلوم است که اینحالت با حالت قبل هیچ تفاوتی ندارد ، جز اینکه در اینجا ارتفاعات مثلث ، بجای داخل ، در نقطه‌ای واقع در خارج مثلث ABC یکدیگر را قطع می کنند .

مرکز ثقل صفحه

مسئله

احتمالا شما اطلاع داشته باشید که مرکز ثقل یك صفحهٔ نازك ، اگر به شکل مسنطیل و یا لوزی باشد ، محل تلاقی اقطار آن و اگر به شکل مثلث باشد ، محل تلاقی میانه‌های آن و اگر به شکل دایره باشد ، مرکز آنست .

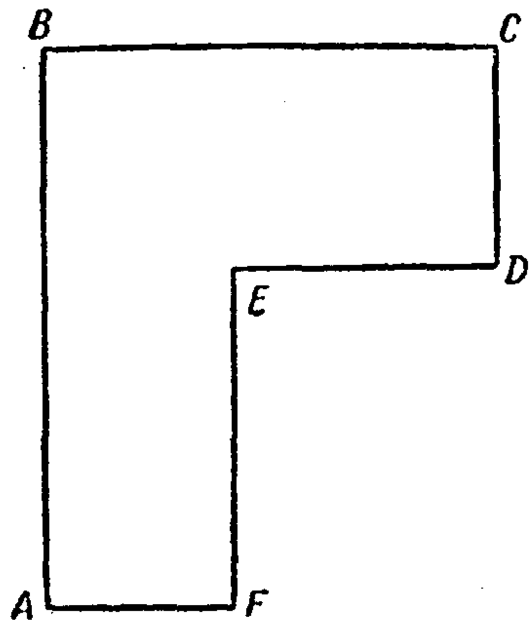
حالا می‌خواهیم مرکز ثقل صفحه‌ای را پیدا کنیم که از اتصال دو مستطیل (مثل شکل ۱۳۹) بدست آمده باشد .

فرض را براین می‌گیریم که تنها خط کش در اختیار داریم و هیچ‌گونه اندازه‌گیری و یا محاسبه هم نمی‌خواهیم انجام دهیم .

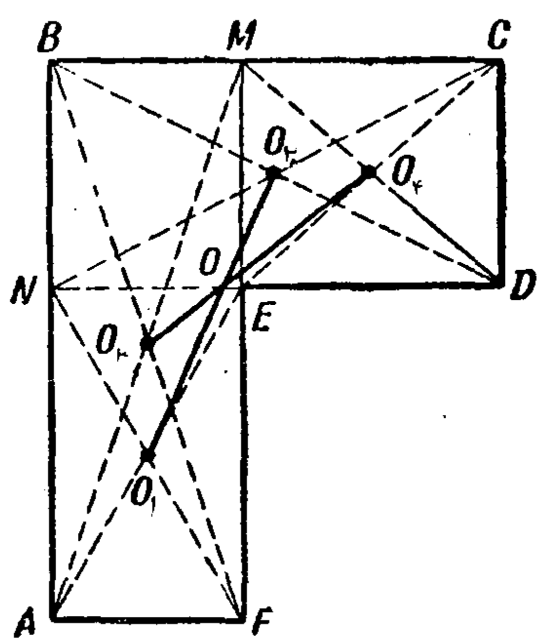
حل

DE را امتداد می‌دهیم تا AB را درنقطهٔ N قطع کند ، همچنین FF را امتداد می‌دهیم تا BC را در M قطع کند (شکل ۱۴۰) . ابتدا شکل رامجموعی ازدو مستطیل ANEF و NBCD درنظرمی‌گیریم. مرکز ثقل هریك از این‌دومستطیل بر محل تلاقی اقطار آنها یعنی نقاط O_1 و O_2 واقع‌است. بنابراین‌مرکز ثقل تمام‌شکل ABCDEF بر O_1O_2

واقع است . حالا شکل مفروض را به صورت مجموعی از دومستطیل ABMF و EMCD در نظر می‌گیریم. مرکز ثقل هریك از دومستطیل اخیرهم برمحل تلاقی اقطار آنها ، یعنی O_3 و O_4 قرار دارد. درنتیجه



۱۳۹. تنها با استفاده از خط کش ، مرکز ثقل این صفحه را پیدا کنید .



۱۴۰. مرکز ثقل صفحهٔ مفروض بدست آمده است .

مرکز ثقل تمام شکل بر خط O_3O_4 واقع است . به این ترتیب مرکز ثقل شکل بر محل تلاقی O_1O_2 و O_3O_4 ، یعنی نقطهٔ O ، قرار دارد و همهٔ این ترسیمات هم تنها با کمك خط کش انجام می‌گیرد .

مسئلهٔ ناپلئون

هم‌اکنون از ترسیمی گفتگو کردیم که تنها باکمك یك خط کش و بدون استفاده از پرگار به انجام رسید (با این شرط که یك دایره در شکل داده شده بود) . حالا به‌مسائلی می‌پردازیم که محدودیتی ازجهت عکس داشته باشند : بدون استفاده ازخط کش و تنها با در دست داشتن

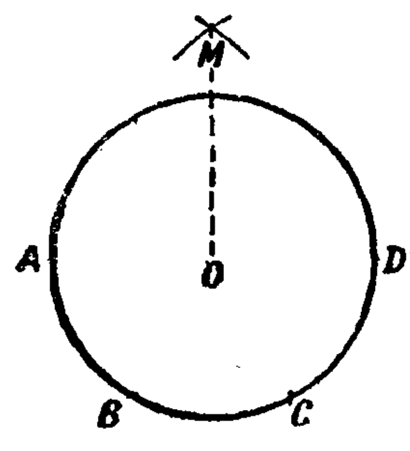
پرگار ترسیم را انجام دهیم . یکی از این مسائل مورد علاقهٔ ناپلئون اول بود . دانشمند ایتالیائی ماسکه‌رون هم در کتابی که در زمینهٔ این ترسیمات نوشته است، مسئلهٔ زیر را برای ریاضی‌دانان فرانسوی طرح کرده است .

مسئله

محیط دایرهٔ مفروضی را ، بدون استفاده از خط کش به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید . جای مرکز دایره معلوم است .

حل

فرض کنید که بخواهیم محیط دایرهٔ O (شکل ۱۴۱) را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم . از نقطهٔ دلخواهٔ A واقع بر محیط دایره ، سه بار به طور متوالی به اندازهٔ شعاع دایره جدا می کنیم : نقاط B ، C و D بدست می‌آید . به‌سادگی معلوم است که طول وتر AC (یعنی وتر قوسی که $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره است) ، ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی است و بنابراین برابر است با r√۳ (r شعاع دایره است) . همچنین واضح است که AD هم قطر دایره می‌شود . از نقاط A و D باشعاع‌مساوی AC ، قوسهایی رسم می کنیم، تا یکدیگر را در نقطهٔM قطع کنند . ثابت می کنیم که فاصلهٔ MO به اندازهٔ طول ضلع مربع



۱۴۱. تقسیم محیط دایره به چهارقسمت مساوی با استفاده از پرگار

محاط در این دایره است . در مثلث AMO داریم :

$$MO = \sqrt{AM^{2} - AO^{2}} = \sqrt{3r^{2} - r^{2}} = r\sqrt{2}$$

یعنی MO مساوی ضلع مربع محاطی است . حالا دیگر کافی است که پرگار را به اندازهٔ MO باز کنیم وبه‌اندازهٔ آن چهاربارمتوالی روی دایره جدا کنیم تا رئوس چهارضلعی محاط در دایره بدست آید، یعنی محیط دایره به چهار قسمت مساوی تقسیم شود .

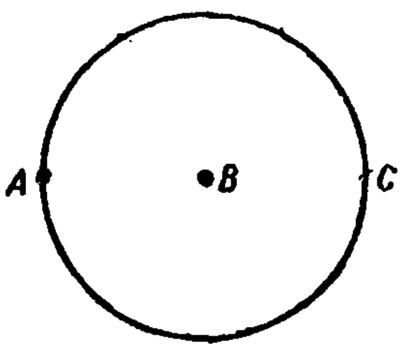
این هم مسئلهٔ سادهٔ دیگری از این قبیل :

مسئله

بدون استفاده از خط کش ، فاصلهٔ بین دونقطهٔ مفروض A و B (شکل ۱۴۲) را پنج برابر (ویا به‌طور کلی چند برابر) کنید .

حل

به مرکز B و شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل ۱۴۲) . روی محیط این دایره و از نقطهٔ A سه بار متوالی به اندازهٔ شعاع جدامی‌کنیم، نقطهٔ C بدست می‌آیدکه واضح است نقطهٔ متقاطر A می‌باشد . فاصلهٔ AC دو برابر فاصلهٔ AB می‌باشد . با رسم دایره‌ای به مرکز C و شعاع BC ، می‌توان با همین روش نقطهٔ متقاطر B را بدست آورد و یعنی نقطه‌ای که فاصلهٔ آن تا نقطهٔ A ، سه برابر فاصلهٔ AB باشد وغیره .

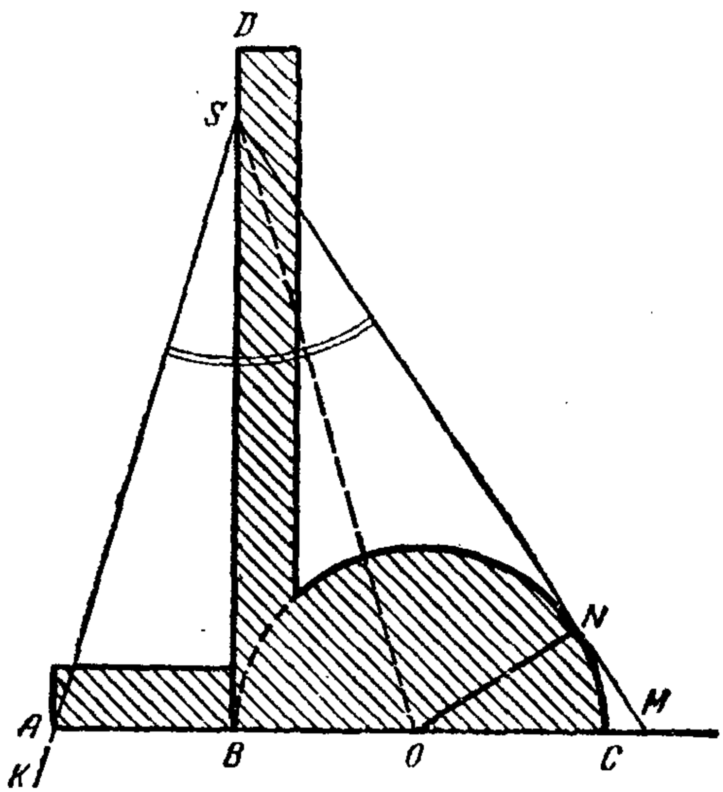


۱۴۲. چگونه می‌توان فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را تنها بااستفاده از پرگار ، n برابر کرد(n عددی‌است‌صحیح)

وسیلهٔ ساده‌ای برای تثلیث زاویه

تنها با بکار بردن خط کش وپرکار نمی‌توان یك زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد. ولی ریاضی‌دانها امکان این تقسیم را به‌کمك وسائل دیگر، نفی نکرده‌اند. برای این منظور ابزارهای زیادی ساخته شده است که ساده‌ترینِ آنها را شما می‌توانید از کاغذ ضخیم، مقوا و یا حلبی نازك درست کنید و بعنوان یك وسیلهٔ فرعی رسم در اختیار خود داشته باشید.

درشکل ۱۴۳، این وسیله را با اندازه‌های طبیعی داده‌ایم (شکل هاشور خورده). به‌نیمدایره‌ای باریکهٔ AB، به‌اندازهٔ شعاع نیمدایره، متصل شده است. امتداد باریکهٔ BD با خط AC زاویهٔ قائمه ساخته است و بر نیمدایره در نقطهٔ B مماس است؛ طول این باریکه دلخواه



۱۴۳. اسبابی که زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کند وطریقهٔ استفاده‌از آن

است . در همین شکل طریقهٔ استفادهٔ از آن هم روشن‌شده است. فرض کنید که می‌خواهیم زاویهٔ KSM را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم (شکل ۱۴۳) .

وسیله را چنان قرارمی‌دهیم که رأس زاویهٔ S برخط BD واقع شود ، یکی ازاضلاع زاویه ازنقطهٔ A بگذرد وضلع دیگر برنیمدایره مماس باشد*. سپس خطوط SB و SO را رسم می کنیم ، تقسیم زاویهٔ مفروض به سه قسمت مساوی انجام می‌گیرد . برای اثبات ، نقطهٔ O مرکز نیمدایره را به نقطهٔ تماس N وصل می کنیم . به سادگی ثابت می‌شود که مثلث ASB با مثلث SBO و مثلث SBO با مثلث OSN برابر است و از تساوی این سه مثلث نتیجه می‌شود که زوایای ASB، BSO و OSN با هم برابرند .

این طریقهٔ تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی ، یك طریقهٔ کاملا هندسی نیست ومناسب‌تر است که آن را یك وسیلهٔ مکانیکی بنامیم .

استفاده ازساعت برای تثلیث زاویه

مسئله

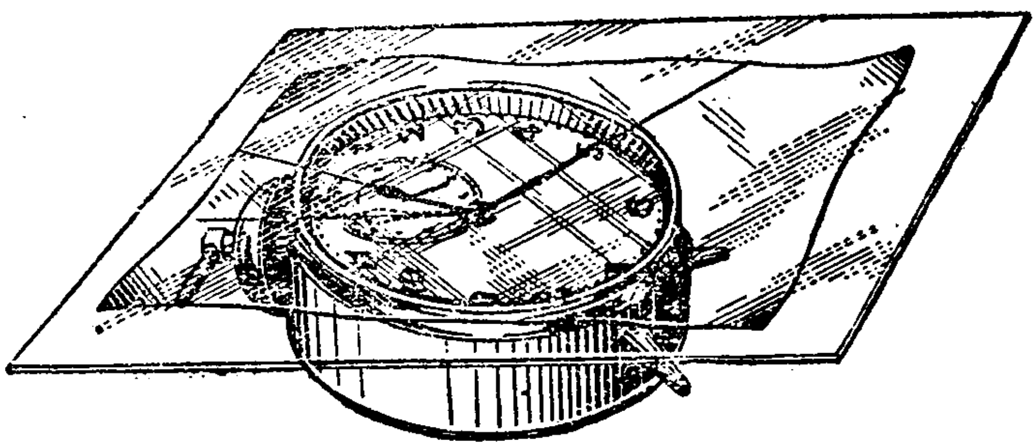
آیا می‌توان با استفاده از خط کش ، پرگار و ساعت ، زاویهٔ مفروضی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد ؟

---

*) اینکه بتوان هرزاویهٔ مفروض را به‌این ترتیب روی وسیله قرارداد، ناشی از خواص نقاط واقع بر نیم‌خطهائی است که زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم می کند: اگر ازنقطهٔ دلخواه O از نیم خط SO پاره خطهای $ON \perp SM$ و $OA \perp SB$ (شکل ۱۴۳) را رسم‌کنیم ، خواهیم داشت : $AB = OB = ON$ اثبات را به عهدهٔ خواننده می گذاریم .

حل

بله ممکن است ، زاویه را روی کاغذ شفافی رسم کنید و در لحظه‌ای که دوعقربهٔ ساعت رویهم‌قرار گرفته‌اند، کاغذراروی آن بگذارید به‌نحوی که رأس زاویه بر مرکز دوران عقربه‌ها و یك ضلع زاویه بر امتداد عقربه‌ها قرارگیرد (شکل ۱۴۴) . وقتی که عقربهٔ دقیقه شمار در امتداد ضلع دوم زاویه قرارگرفت ، درامتداد عقربهٔ ساعت شمار خطی رسم‌کنید . به این ترتیب زاویه‌ای به اندازهٔ حرکت عقربه ساعت‌شمار بدست‌می‌آید. حالا اگراین زاویه را باکمك پرگاروخط کش دوبرابر



۱۴۴. باکمك ساعت هم می‌توان زاویه را به‌سه قسمت مساوی تقسیم‌کرد .

کنیم و سپس زاویهٔ حاصل را دوباره دو برابر کنیم (طریقهٔ دو برابر کردن زاویه را درهندسه دیده‌ایم)، $\frac{1}{3}$ زاویهٔ مفروض بدست می‌آید .

درحقیقت ، وقتی‌که عقربهٔ دقیقه شمار به‌اندازهٔ زاویهٔ α حرکت کند ، عقربهٔ ساعت شمار در همان مدت به‌اندازهٔ $\frac{1}{12}$ آن ، یعنی $\frac{\alpha}{12}$، حرکت خواهد کرد و بعد از آنکه این زاویه را چهار برابر کنیم ،

زاویهٔ $\frac{\alpha}{۱۲}\times ۴$ یعنی $\frac{\alpha}{۳}$ بدست می آید .

تقسیم محیط دایره

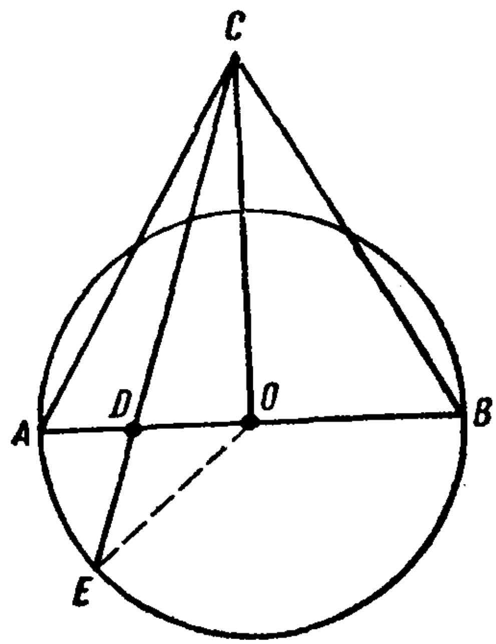
چگونه می‌توان روی یك صفحه ، چند ضلعی منتظمی با تعداد اضلاع دلخواه رسم کرد ؟

این مسئله منجر به‌حل مسئلهٔزیرمی‌شود :

محیط دایره‌ای را به n قسمت مساوی تقسیم کنید (n عددی است صحیح) .

***

واضح است که این مسئله را می‌توان باکمك نقاله حل کرد ، ولی این یك راه حل «به کمك چشم» است و ما می‌خواهیم مسئله را به طریق هندسی ، یعنی به کمك خط کش وپرگارحل کنیم .



۱۴۵. راه حل‌تقریبی تقسیم محیط دایره به n قسمت مساوی

قبلا سئوالی پیش می‌آید: از لحاظ نظری محیط دایره را با کمك‌خط کش‌وپرگاربه‌چندقسمت مساوی‌می‌توان‌تقسیم کرد؟ ریاضی دانها به‌این‌سئوال‌جواب داده‌اند. محیط دایره را به هر چند قسمت دلخواه نمی‌توان تقسیم کرد . می‌توان محیط دایره را به ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰ ، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ...، ۲۵۷ ، ... قسمت‌مساوی تقسیم کرد .

ولی بــه ۷ ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ... قسمت مساوی نمی‌توان تقسیم کرد .

اشکال دیگردر اینجاست که یك نوع روش رسم‌هم‌وجود ندارد: روشی که برای تقسیم محیط دایره به ۱۵ قسمت مساوی بکار می‌رود با روش تقسیم به‌۱۲ قسمت فرق دارد وغیره، وهمهٔ این روشهای مختلف را هم نمی‌توان بخاطر سپرد .

در عمل لازم است روشی پیدا شود (هرچند تقریبی) که به‌کمك آن بتوان محیط دایره را به‌هرچند قسمت مساوی تقسیم کرد .

متأسفانه در کتابهای‌درسی هم‌هیچ توجهی به‌این مسئله نشده‌است وبهمین مناسبت در اینجا ، یکی از روش‌های تقریبی ولی جالب حل این مسئله را ذکر می‌کنیم .

مثلا فرض کنید که بخواهیم محیط‌دایرهٔ مفروضی‌را (شکل۱۴۵) به ۹ قسمت مساوی تقسیم‌کنیم . روی قطری از دایره ، مثلا AB ، مثلث متساوی الاضلاع ABC را می‌سازیم و روی قطر AB نقطهٔ D را چنان اختیار می‌کنیم که $AD:AB=۲:۹$ باشد (در حالت کلی $AD:AB=۲:n$) .

C را به D وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع‌کند . در اینصورت قوس AE تقریباً مساوی $\frac{۱}{۹}$ محیط دایره خواهد بود (درحالت‌کلی $\widehat{AE}=\frac{۳۶۰^\circ}{n}$) ویا وتر AE مساوی‌ضلع یك ۹ ضلعی (و درحالت‌کلی n ضلعی) منتظم محاطی خواهد بود . اشتباهی که در این مورد پیش می‌آید قریب ۰/۸٪ است.

***

اگر رابطه بین زاویهٔ مرکزی AOE (که با ترسیم فوق بدست

می‌آید و عدد n را بدست آوریم ، به رابطهٔ دقیق زیر می‌رسیم :

$$tg\,ADE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2+16n-32}-n}{n-4}$$

که برای مقادیر بزرگ n ، می‌توان آنرا به رابطهٔ تقریبی زیر تبدیل کرد :

$$tg\,ADE \approx 4\sqrt{3}(n^{-1}-2n^{-2})$$

ازطرف دیگر ، برای تقسیم دقیق محیط دایره به n قسمت مساوی ، باید زاویهٔ مرکزی مساوی $\frac{360°}{n}$ بسازیم . مقایسهٔ زاویهٔ $\frac{360°}{n}$ و زاویهٔ ADE ، مقدار اشتباه ما را ، وقتی‌که قوس AE را $\frac{1}{n}$ محیط دایره به حساب می‌آوریم ، معین می‌کند .

جدول زیر برای بعضی از مقادیر n بدست می‌آید :

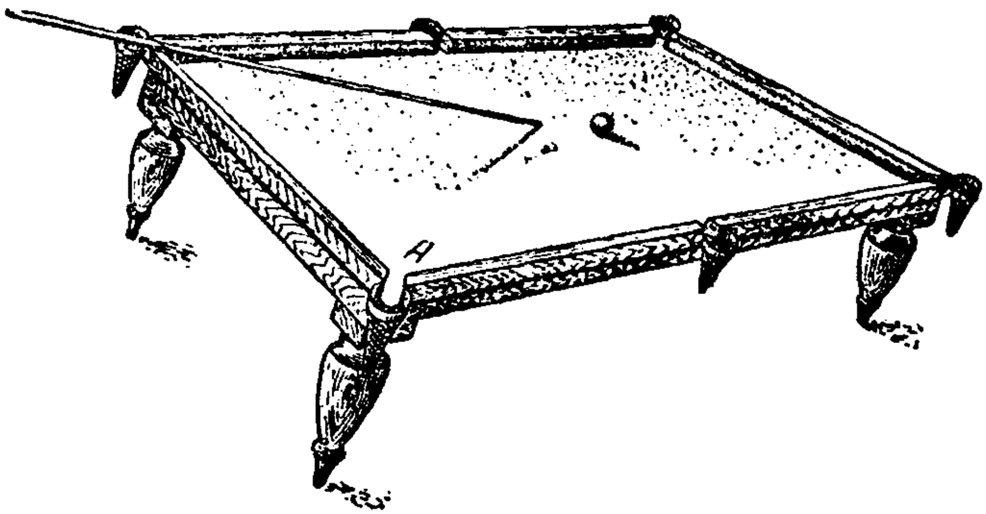
n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۱۰	۲۰	۶۰
$\frac{360°}{n}$	۱۲۰°	۹۰°	۷۲°	۶۰°	۵۱°۲۶'	۴۵°	۳۶°	۱۸°	۶°
زاویهٔ ADE	۱۲۰°	۹۰°	۷۱°۵۷'	۶۰°	۵۱°۳۱'	۵۴°۱۱'	۳۶°۲۱'	۱۸°۳۸'	۶°۲۶'
مقدارخطا %	۰	۰	۰/۰۷	۰	۰/۱۷	۰/۴۱	۰/۹۷	۳/۵	۷/۲

همان طور که از جدول دیده می‌شود ، با این روش می‌توان محیط دایره را به ۵ ، ۷ ، ۸ یا ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرد . در این موارد خطای نسبی حاصل از ۰٫۰۷ تا ۱ درصد است و چنین اشتباهی برای بسیاری از کارهای عملی قابل توجه نیست . با بزرگ شدن عدد n ، خطای نسبی هم زیادتر می‌شود ولی بهرحال ، این خطا برای هر مقدار دلخواه n از ۱۰٪ تجاوز نمی‌کند .

جهت ضربه

(مسئله‌ای در بارهٔ توپ بیلیارد)

برای فرستادن توپ بیلیارد به‌سوراخ، ضربهٔ مستقیم به‌آن وارد نمی‌کنند، بلکه آنرا مجبور می‌کنند که یك، دو و حتی سه بار به‌کنارهٔ میز برخورد کند و سپس به طرف سوراخ برود، به این ترتیب باید قبل از همه، یك مسئلهٔ هندسی را «در ذهن» حل کرد.



۱۴۶. مسئلهٔ هندسی میز بیلیارد

مهم اینست که بتوانیم «با چشم» اولین نقطه‌ای که توپ به‌کنار میز می‌خورد، پیدا کنیم، اگر توپ قابل ارتجاع و میزصاف باشد، بقیهٔ راه را طبق قانون انعکاس طی خواهد کرد (زاویهٔ تابش با زاویهٔ انعکاس برابر است).

مسئله

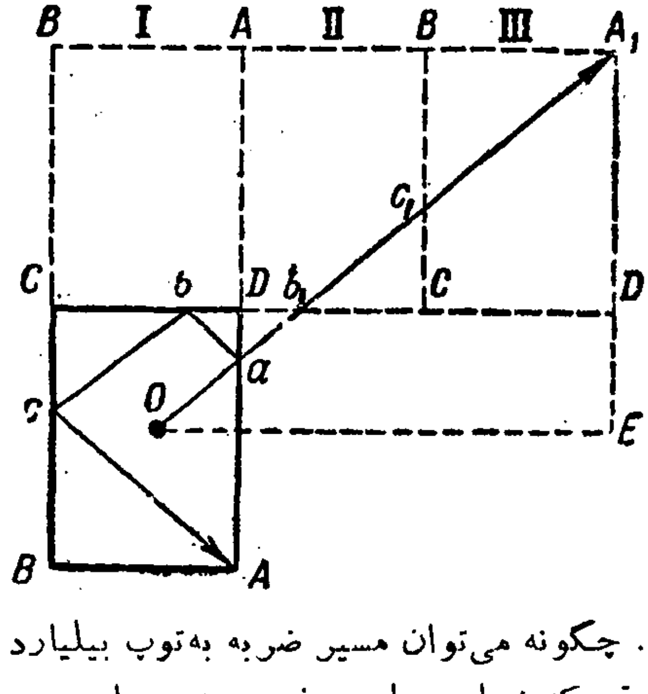
اگر توپ بیلیارد در وسط میز باشد وشما بخواهید بعد از سه

برخورد با کنارهٔ میز به سوراخ A وارد شود ، چگونه می‌توان از هندسه برای جهت ضربه‌ای که به‌توپ وارد می کنیم ، استفاده کرد ؟ (شکل ۱۴۶) .

حل

برای‌اینکه جهت ضربه‌را پیدا کنید ، باید سه میزدیگر، مساوی با میز بیلیارد (مطابق شکل ۱۴۷) در نظر بگیرید و جهت ضربه را چنان انتخاب‌کنید که امتداد آن از دورترین رأس میز سوم عبور کند.

فرض کنید OabcA مسیر گلوله باشد . اگر میز ABCD را دور ضلع CD به اندازهٔ ۱۸۰ درجه بچرخانیم . به وضع I قرار می‌گیرد ؛ سپس اگر میز را دور ضلع AD و یکبار دیگر دور ضلع BC به اندازهٔ ۱۸۰ درجه بچرخانیم ، به وضع III تبدیل می‌شود. در



۱۴۷. چگونه می‌توان مسیر ضربه به‌توپ بیلیارد را پیدا کرد، وقتی که بخواهیم باسه برخورد به‌میز، وارد سوراخ‌شود؟

نتیجه سوراخ A ، در جائی‌که با حروف A_1 نشان داده‌ایم ، واقع می‌شود .

با توجه به تساوی مثلثهای مربوطه، به سادگی ثابت می‌شود:

$$ab_1 = ab \; ; \; b_1c_1 = bc \; ; \; c_1A_1 = cA \; ;$$

و بنابراین طول پاره خط OA_1 مساوی طول خط شکستهٔ $OabcA$ می‌شود.

به این ترتیب اگر نقطهٔ A_1 را پیش خود تصور کنید و ضربه‌را در جهت OA_1 وارد کنید، توپ درمسیرخط شکستهٔ $OabcA$ حرکت خواهدکرد و وارد سوراخ A خواهد شد.

سئوال دیگری طرح می‌کنیم: با چه شرطی اضلاع OE و A_1E از مثلث قائم‌الزاویهٔ A_1EO برابرند؟

به سادگی دیده می‌شود که $OE = \frac{5}{2}AB$ و $A_1E = \frac{3}{2}BC$ می‌باشد. اگربخواهیم $OE = A_1E$ باشد باید $\frac{3}{2}BC = \frac{5}{2}AB$ ویا $AB = \frac{3}{5}BC$ باشد.

بنابراین اگرمیزبیلیاردچنان ساخته‌شده باشدکه ضلع کوچکترش $\frac{3}{5}$ ضلع بزرگترباشد، $OE = EA_1$ خواهد شد ودراینحالت ضربه‌ای که باید به توپ وسط میز وارد شود، درامتداد خطی است که باکنارهٔ میز زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

توپ «با هوش»

هم‌اکنون‌مسئله‌ای‌را دربارهٔ‌توپ بیلیاردبارسم‌هندسی‌حل کردیم؛ حالا اجازه بدهید خودتوپ بیلیارد یك مسئلهٔ قدیمی جالب راحل کند.

مگرچنین چیزی ممکن است؟ البته این درست است که توپ نمی‌تواند فکر کند، ولی در مواردی که باید محاسباتی انجام داد و

ضمناً معلوم است که چه اعمالی و به چه ترتیب روی عددها انجام می‌گیرد، می‌توان محاسبات مربوطه‌را به‌ماشین سپرد که هم به سرعت و هم بدون اشتباه به پایان می‌رساند .

برای این منظور وسائل زیادی : از ماشین‌های ساده حساب تا ماشین‌های بغرنج الکترونیکی ساخته‌اند .

غالباً پیش می‌آید که درمواقع بیکاری خود را به مسائلی از این قبیل مشغول می‌کنیم : اگر ظرفی با گنجایش معلوم پر از آب داشته باشیم ، باکمك دوظرف خالی دیگر، که‌گنجایش آنها هم معلوم است، چگونه می‌توان مقدار معینی آب را از ظرف خارج کرد ؟

اینست نمونه‌ای از اینگونه مسائل :

می‌خواهیم محتوی ظرفی را که با ۱۲ لیتر آب پر شده است ، به وسیلهٔ دوظرف خالی یکی با گنجایش ۹ لیتر و دیگری با گنجایش ۵ لیتر به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم . چگونه ؟

روشن است که برای حل این مسئله ، لازم نیست که با ظرفهای واقعی آزمایش کنیم ، بلکه‌کافی است « جابجائی آب » را روی کاغذ و مثلا به شکل زیر انجام دهیم :

ظرف ۹ لیتری	۰	۷	۷	۲	۲	۰	۹	۶	۶
ظرف ۵ لیتری	۵	۵	۰	۵	۰	۲	۲	۵	۰
ظرف ۱۲ لیتری	۷	۰	۵	۵	۱۰	۱۰	۱	۱	۶

در هر ستون مقدار آب داخل هر ظرف، بعد از تغییر نوشته شده است .

در ستون اول : ظرف ۵ لیتری را پر می‌کنیم ، ظرف ۹ لیتری خالی می‌ماند (۰) ودرظرف ۱۲ لیتری ، ۷ لیتر باقی می‌ماند .

در ستون دوم : از ظرف ۱۲ لیتری ، ۷لیتررا در ظرف ۹لیتری ریخته‌ایم وغیره .

در این طرح بطور کلی ۹ ستون وجود دارد ، یعنی برای حل این مسئله ۹ عمل لازم است .

کوشش کنید با تغییر نوع عمل‌ها ، راه حل دیگری برای این مسئله بدست آورید .

پس از مقداری کوشش وتجربه،مسلماً موفق‌می‌شوید؛ زیرا راه حل فوق تنها راه حل ممکن نیست و به طریقه‌های دیگری هم می‌توان به‌نتیجه‌رسید؛ ولی ممکن‌است راه‌حل‌شما با بیش‌از۹عمل‌به‌آخر برسد .

در مورد این مسئلهٔ جالب ، باید مطالب زیر روشن شود :

۱) آیا می‌شود یك ردیف عمل چنان معین کرد که بدون توجه به‌گنجایش ظرف‌های مفروض قابل اجرا باشند ؟

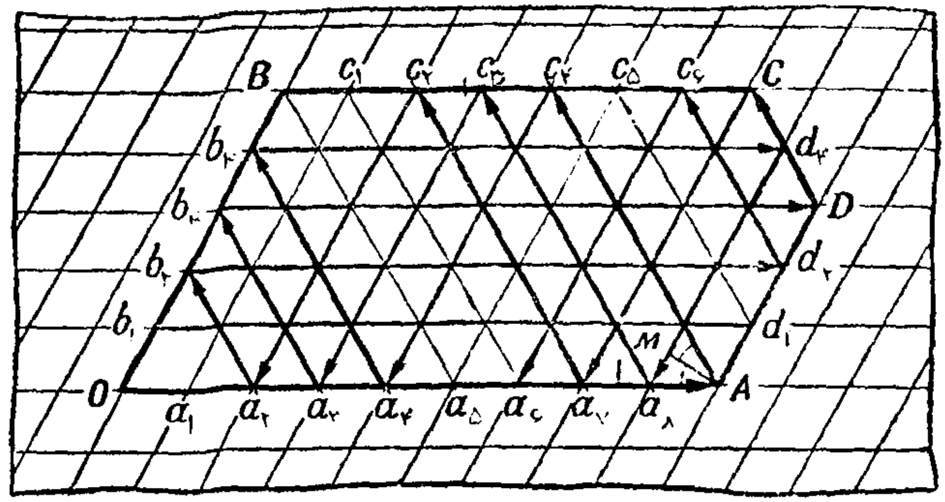
۲) آیا می‌توان به‌کمك دوظرف خالی ، از ظرف سومی که پر از آب است ، هر مقدار دلخواه آب برداشت، یعنی مثلا از ظرف۱۲ لیتری و به‌کمك ظرفهای ۹ و ۵ لیتری ، یك لیتر ، دولیتر، سه لیتر ، چهارلیتر وغیره تا ۱۱لیتر برداریم ؟

به همهٔ این سئوالات، توپ «با هوش» جواب می‌دهد، به‌شرطی که برای آن « میز بیلیاردی » با ساختمان مخصوص بسازیم .

روی یك ورق کاغذ ، خطهای موازی ومایلی چنان رسم کنید که خانه‌های شطرنجی به شکل لوزی با زاویهٔ حادهٔ ۶۰ درجه به وجود آید ، سپس شکل OBCDA را مطابق شکل ۱۴۸ بسازید .

این همان « میز بیلیارد » است . اگر تـوپ بیلیارد را در طول OA حرکت دهیم ، پس از برخورد به‌کنارهٔ AD ، طبق قانون «زاویهٔ تابش برابر است با زاویهٔ انعکاس» $(\widehat{OAM}=\widehat{MAc_4})$ ، توپ در

امتداد Ac_4 حرکت می‌کند (رأس یکی از لوزیهای کوچك)، سپس



۱۴۸. طرزعمل «توپ باهوش»

بعد از برخورد در c_4 با کنارهٔ BC روی امتداد c_4a_4 به حرکت درمی‌آید، وبعد به‌ترتیب روی خطهای a_4b_4 ، b_4d_4 ، d_4a_8 وغیره.

حالا به مسئلهٔ خودمان برمی‌گردیم : طبق شرط مسئله سه ظرف داریم : ۹ و ۵ و ۱۲ لیتری . شکلی شبیه ۱۴۸ می‌سازیم ، به‌طوری‌که ضلع OA شامل ۹ خانه ، OB شامل ۵ خانه ، AD شامل سه خانه (۳ = ۹ − ۱۲) ، و بالاخره BC شامل ۷ خانه* (۷ = ۵ − ۱۲) باشد .

متذکر می‌شویم کــه هر نقطهٔ واقع بر اضلاع شکل ، با تعداد خانه‌های معینی از OB و OA جدا شده است . مثلا فاصلهٔ نقطهٔ c_4 تا OB چهار خانه و تا OA پنج خانه است ، از نقطهٔ a_4 تا OB چهار خانه و تا OA صفر خانه است (زیرا a_4 روی OA واقع است) ، از نقطهٔ d_4 تا OB هفت خانه و تا OA چهار خانه است وغیره.

بنابراین هر نقطه‌ای از اضلاع شکل ، که توپ بیلیارد به آنجا

*) ظرفی‌که پر ازآب است ، همیشه بزرگترین ظرفهاست . اگر گنجایش ظرف‌های خالی را a و b و گنجایش ظرف پر را c فرض کنیم ، به شرطی‌که $c \leqslant a + b$ باشد ، باید « میز بیلیارد » را به شکل متوازی‌الاضلاعی با اضلاع مساوی a و b ساخت

می‌رسد ، به‌وسیلهٔ دو عدد مشخص می‌شود .

فرض‌می‌کنیم که اولین عدد، یعنی‌تعداد خانه‌هائی‌که نقطه را از OB) جدا می‌کند ، نمایندهٔ مقدار لیتر آب ظرف ۹ لیتری و دومین عدد ، یعنی تعداد خانه‌هائی که نقطه را از OA جدا می‌کند ، نمایندهٔ مقدار لیتر آب ظرف ۵ لیتری باشد . البته ، بقیهٔ آب ، در ظرف ۱۲ لیتری خواهد بود .

حالا دیگر همه چیز برای حل مسئله ، به‌کمك توپ بیلیارد ، آماده است .

توپ بیلیارد را درامتداد OA حرکت دهید وضمن‌اینکه متوجه نقاط برخورد آن باکناره‌های میز هستید ، حرکت آنرا تا a_6 تعقیب کنید (شکل ۱۴۸) .

اولین نقطهٔ برخورد : (۰ و ۹)A ؛ به این معنی است که پس‌از اولین عمل ، مقدار آب ظرفها به این صورت است :

ظرف ۹ لیتری	۹
ظرف ۵ لیتری	۰
ظرف ۱۲ لیتری	۳

این عمل ممکن است .

دومین نقطهٔ برخورد : (۵ و ۴)c_4 ؛ به این معنی است که توپ بیلیارد ما را به عمل زیر برای جابجا کردن آب راهنمائی می‌کند:

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	

و این هم عملی است .

سومین نقطهٔ برخورد : (۰ و ۴)a_4 ؛ توپ بیلیارد راهنمائی

می‌کند که در مرحلهٔ سوم باید ظرف ۵ لیتری را در ظرف ۱۲ لیـ
خالی کرد:

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	۴	
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	۰	
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	۸	

نقطهٔ چهارم : b_4(۴ و ۰) ؛ نتیجهٔ چهارمین جابجائی آب می‌دهد :

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	۴	۰	
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	۰	۴	
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	۸	۸	

نقطهٔ پنجم ؛ d_4(۴ و ۸) ؛ توپ راهنمائی می‌کند که ۸ لیتر آب را درظرف خالی ۹ لیتری بریزیم:

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	۴	۰	۸		
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	۰	۴	۴		
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	۸	۸	۰		

با ادامهٔ کار ، بالاخره به جدول زیر می‌رسیم :

ظرف ۹ لیتری	۹	۴	۴	۰	۸	۸	۳	۳	۰	۹	۷	۷	۲	۲	۰	۹	۶	۶
ظرف ۵ لیتری	۰	۵	۰	۴	۴	۰	۵	۰	۳	۳	۵	۰	۵	۰	۲	۲	۵	۰
ظرف ۱۲ لیتری	۳	۳	۸	۸	۰	۴	۴	۹	۹	۰	۰	۵	۵	۱۰	۱۰	۱	۱	۶

به این ترتیب بعد ازیك رشته‌عمل،با جابجاکردن آب به نتیجهٔ مطلوب رسیدیم : در دوظرف ، هرکدام ۶ لیتر آب وجود دارد ، توپ بیلیارد مسئله را حل کرد .

اگر اجازه بدهید که توپ حرکت خود را ادامه بدهد از تمام نقاط اضلاع (و به طور کلی تمام رئوس لوزی‌ها) ، خواهد گذشت و

سپس به نقطهٔ اولیهٔ O برخواهد گشت . این حرکت به معنای آنست که ازظرف ۱۲ لیتری می‌توان ازیك لیتر تا ۹ لیتر (باید مقدار برحسب لیتر وبا عدد صحیح بیان شده باشد) در ظرف۹ لیتری و ازیك‌تا ۵لیتر در ظرف پنج لیتری ریخت .

ولی توپ مسئله را بد حل کرده است . ما توانستیم مسئلهٔ را در ۹ حرکت حل کنیم ؛ در حالی‌که توپ ، آن را در ۱۸ حرکت حل کرده است.

ولی اگر کمی دقت کنیم ، می‌بینیم که توپ می‌تواند راه حلی کوتاه‌تر ازراه حل ما هم ، مشخص کند .

توپ‌رادرامتداد کنارهٔ OB حرکت می‌دهیم (شکل ۱۴۸) ومسیر آن را تعقیب می‌کنیم و فرض می‌کنیم که طبق قانون « زاویهٔ تابش مساوی است با زاویهٔ انعکاس » حرکت کند . توپ روی امتداد OB تا نقطهٔ B می‌رود ، در آنجا به کنارهٔ BC برخورد می‌کند و مسیر $Ba_{۵}$ را پیش می‌گیرد ، سپس روی $a_{۵}c_{۵}$ و $c_{۵}d_{۱}$ و $d_{۱}b_{۱}$ و $b_{۱}a_{۱}$ و $a_{۱}c_{۱}$ و بالاخره $c_{۱}a_{۶}$ حرکت می‌کند .

رویهم ۸ برخورد .

اگر مثل حالت قبل ، نقاط برخورد را با عدد مشخص کنیم ، به جدول زیر می‌رسیم :

ظرف ۹ لیتری	۰	۵	۵	۹	۰	۱	۱	۶
ظرف ۵ لیتری	۵	۰	۵	۱	۱	۰	۵	۰
ظرف ۱۲ لیتری	۷	۷	۲	۲	۱۱	۱۱	۶	۶

توپ کوتاه‌ترین راه حل ممکنه را(در ۸ حرکت) به‌ما می‌دهد.

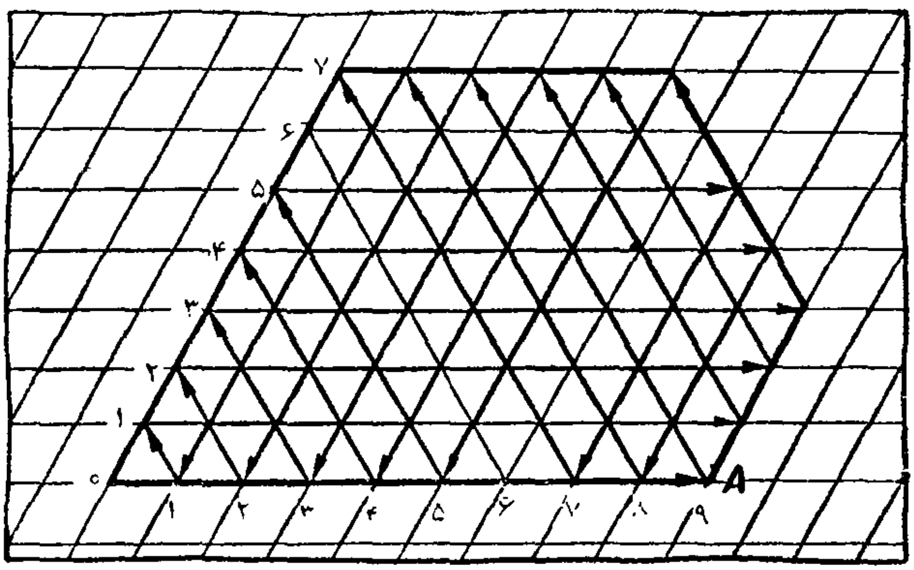
ولی مسئله‌ای ازاین‌نوع ممکن است اصلاجواب نداشته باشد.

توپ چگونه این امر را نشان می‌دهد؟

خیلی ساده: در این حالت، توپ به نقطهٔ O برمی‌گردد، بدون اینکه از نقطهٔ مورد نظر عبور کرده باشد.

در شکل ۱۴۹ شیوهٔ حل مسئله‌ای برای ظرف‌های ۹، ۷ و ۱۲ لیتری داده شده است:

۹ لیتری	۰	۷	۷	۰	۵	۵	۹	۰	۳	۳	۹	۰	۱	۱	۸	۸	۰	۴	۴	۹	۰	۲	۲	۹
۷ لیتری	۷	۰	۵	۵	۰	۷	۳	۳	۰	۷	۱	۱	۰	۷	۰	۴	۴	۰	۷	۲	۲	۰	۷	۰
۱۲ لیتری	۵	۵	۰	۷	۷	۰	۰	۹	۹	۲	۲	۱۱	۱۱	۴	۴	۰	۸	۸	۱	۱	۱۰	۱۰	۳	۳

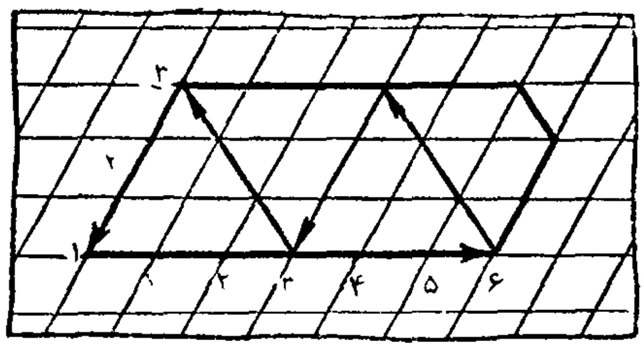


۱۴۹. حرکت توپ نشان می‌دهد که باکمك ظرف‌های ۷ لیتری و ۹ لیتری نمی‌توان آب ظرف ۱۲ لیتری را به دو قسمت مساوی تقسیم‌کرد.

جدول نشان می‌دهدکه اگر ظرف ۱۲ لیتری پر از آب باشد، باکمك ظرف‌های ۷ لیتری و ۹ لیتری، می‌توان هر مقدار دلخواه (به شرطی‌که برحسب لیتر عددی صحیح باشد) از آن برداشت به‌جز نصف آب، یعنی ۶ لیتر را.

در شکل ۱۵۰ طرح مسئله‌ای از این نوع، برای ظرف‌های ۳، ۶ و ۸ لیتری داده شده است. تـوپ در اینجـا، بعد از چهـار بار برخورد با کنارهٔ میز به نقطهٔ اولیهٔ O برمی‌گردد و جدول متناظر آن چنین است:

ظرف ۶ لیتری	۰	۳	۳	۶
ظرف ۳ لیتری	۳	۰	۳	۰
ظرف ۸ لیتری	۵	۵	۲	۲



۱۵۰. طرح مسئلهٔ دیگری از این نوع

جدول نشان می‌دهد که با ظرف‌های ۶ لیتری و ۳ لیتری، نمی‌توان از ظرف ۸ لیتری چهار و یا یك لیتر جدا کرد.

به‌این‌ترتیب «بیلیارد» ما با کمك توپ باهوشی که دارد، می‌تواند مثل یك ماشین حساب هرمسئله‌ای از این نوع را برای ما بدون اشتباه حل کند.

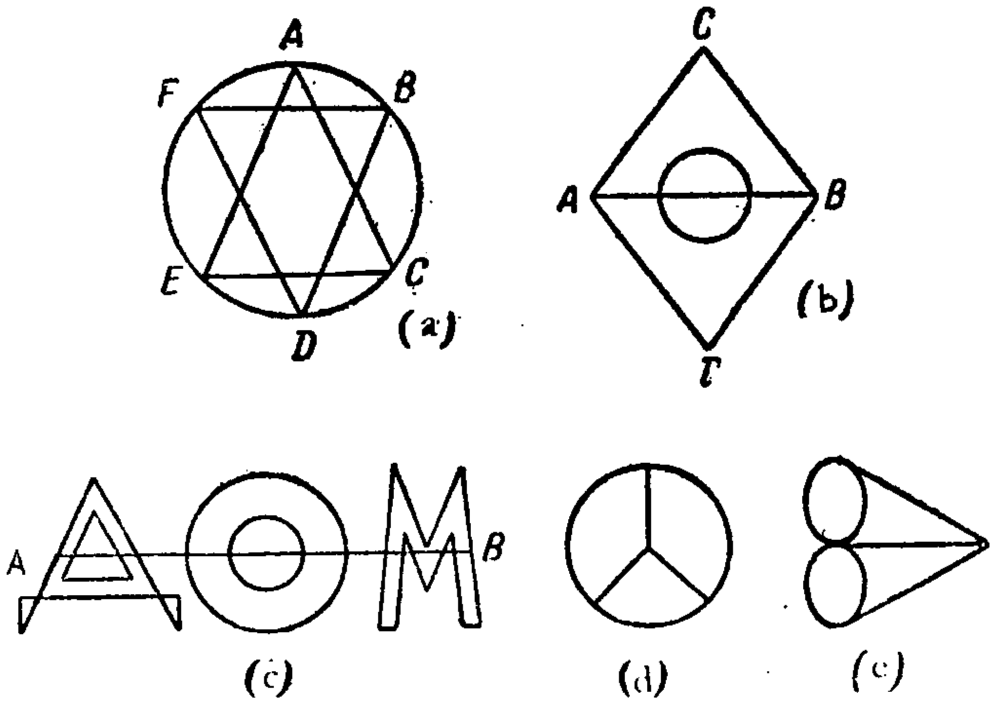
با یك حرکت قلم

مسئله

روی یك صفحهٔ کاغذ پنج تصویر شکل ۱۵۱ را رسم کنید و سعی

کنید که هریك از آنها را با یك حرکت قلم بکشید ، یعنی بدون اینکه قلم را از روی کاغذ بردارید و بدون اینکه از هرخط دو بار عبور کنید هریك از آنها را رسم کنید .

بسیاری از کسانی که به‌حل این مسئله می‌پردازند ، از شکل (d) شروع می‌کنند ، زیرا این شکل ساده‌تر از سایر اشکال به‌نظر می‌رسد، ولی هر کوششی برای رسم این شکل با یك‌حرکت‌قلم منجر به شکست می‌شود . آنها با ناراحتی و عدم اطمینان سراغ بقیهٔ شکلها می‌روند و



۱۵۱. با یك حرکت قلم و بدون اینکه از هر خط دوبار عبور کنید ، هریك از این شکل‌ها را رسم کنید.

با حیرت و خوشحالی می‌بینند که دو شکل اول ، بدون زحمت زیاد ، بـا یك حرکت قلم قـابل رسم هستند وحتی شکل بغرنج سوم (کلمهٔ « ДОМ » روسی به‌معنای «خانه») هم با مختصری تمرین رسم می‌شود . ولی‌برای شکل پنجم (e) ، مثل‌شکل (d) ، هیچ کوششی‌کار را به‌نتیجه نمی‌رساند .

به‌چه مناسبت برای یك شکل راه حلی از این بابت وجود دارد و برای شکل دیگر چنین راه حلی پیدا نمی‌شود ؟ آیا در مورد بعضی از این شکل‌ها، قابلیت کشف و تیزهوشی ماکافی نیست ، یا اینکه خود این مسائل اساساً قابل حل نیستند؟ آیا می‌شود نشانه‌ای پیدا کرد که از قبل بتوانیم قضاوت کنیم ، آیا هر شکل مفروضی را می‌توان با یك حرکت قلم رسم کرد یا نه ؟

حل

هر نقطه‌ای را که بیش از یك خط شکل ، از آن عبور می کند، گره می‌نامیم . اگر تعداد خط‌هائی که از یك گره می گذرد زوج باشد ، آن را گرهٔ زوج و در حالت عکس گرهٔ فرد گوئیم . در شکل (a) همهٔ گره‌ها زوج هستند ؛ در شکل (b) دو گرهٔ فردوجود دارد(نقاط A و B)؛ در شکل (c) گره‌های فرد ، همان نقاط انتهائی پاره خط AB است ؛ در شکل‌های (d) و (e) ، چهار گرهٔ فرد وجود دارد .

ابتدا به مطالعهٔ شکل‌هائی می‌پردازیم ، که در آن‌ها همهٔ نقاط گرهی زوج است ، مثل شکل (a) . مسیر خود را از نقطهٔ دلخواهی مانند S شروع می کنیم . وقتی که مثلا از نقطهٔ A عبور می کنیم ، دو خط رسم می‌شود : خطی که روی آن به A نزدیك شده‌ایم و دیگری خطی که روی آن از A دور می‌شویم ، چون در مورد یك گرهٔ زوج ، به تعداد خطوطی که به آن می‌رسند ، از آن خارج می‌شوند، ضمن عبور از یك گره به گرهٔ دیگر، هر بار از خطوط رسم نشده دو عدد کم می‌شود بنابراین اساساً عبور از این گره‌ها ممکن است و می‌توان به نقطهٔ S برگشت .

حالا فرض می کنیم به نقطهٔ شروع حرکت برگشته باشیم و دیگر

نتوانیم از آن خارج شویم ، ولی‌در شکل هنوز خط رسم نشده‌ای که مثلا ازگره B عبور کرده است،باقی مانده باشد . این وضع به معنای آنست که باید خط سیر خودراعوض کنیم : یعنی وقتی که به نقطهٔ B می‌رسیم ، قبل از اینکه از خط عبور بگذریم ، یك بار به‌B برگردیم و سپس راه سابق را ادامه دهیم .

مثلا فرض کنید که در شکل a به این ترتیب عمل کنیم : ابتدا روی محیط مثلث ACE حرکت کنیم، سپس وقتی که به A برگشتیم، مسیر محیط دایرهٔ ABCDEFA (شکل ۱۵۱) را طی کنیم . در این صورت محیط مثلث BDF رسم نشده باقی می‌ماند؛ بنابراین قبل از آنکه‌موقع ترك‌مثلاگره B ، روی‌قوس BC حرکت کنیم ، باید محیط مثلث BDF را به‌پیمائیم .

به این ترتیب ، اگر همهٔگره‌های شکل مفروض زوج باشند ، از هر نقطهٔ دلخواه آن‌که حرکت را شروع کنیم، می‌توانیم با یك حرکت قلم تمام آن را رسم کنیم ، ضمناً در این حالت ، شکل در همان جائی بسته می‌شود که حرکت را شروع کرده بودیم .

حالا به بررسی شکلی می پردازیم که در آن دو گرهٔ فرد وجود دارد .

مثلا شکل (b) دارای دوگرهٔ A و B فرد است .

این شکل را هم می‌توان با یك حرکت قلم رسم کرد .

حرکت را از گره فرد شمارهٔ ۱ شروع می کنیم و روی یك خط به گره فرد شماره ۲ می‌رویم ، مثلا از A تا B روی ACB در شکل (b) .

با رسم‌این خط ، یکی ازخطوطی را که از هریك ازگره‌های فرد

عبور می‌کرد استثنا کردیم ، مثل اینکه از ابتدا نبوده است . پس از رسم این خط هر دو گرۀ فرد به گره‌های زوج تبدیل می‌شوند و چون گره فرد دیگری روی شکل وجود ندارد ، با شکلی سر و کار پیدا می‌کنیم که همۀ گره‌های آن زوج است ؛ مثلا در شکل (b) ، پس از رسم خط ACB ، مثلث و دایره باقی می‌ماند .

قبلا ثابت کردیم که چنین شکلی را می‌توان با یك حرکت قلم رسم کرد، بنابراین تمام شکل هم با یك حرکت قلم قابل رسم است .

یك تبصرۀ تکمیلی : وقتی که‌ازگره فرد شمارۀ ۱ شروع به‌حرکت می‌کنیم ، باید راه خود را به طرف گره فرد شماره ۲ چنان انتخاب کنیم که شکلی جدا از شکل مفروض به وجود نیاورد . مثلا برای رسم شکل (b) ، اگر برای عبور ازگره A به‌گره B مسیرمستقیم AB را انتخاب کنیم، روش درستی پیش نگرفته‌ایم ، زیرا دراینصورت محیط دایره از بقیۀ شکل جدا و رسم آن غیر ممکن می‌شود .

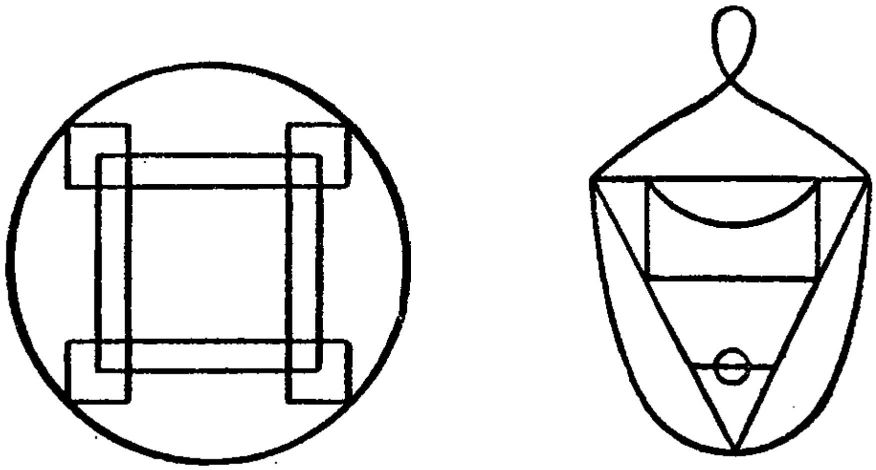
بنابراین، اگر شکل شامل دوگره فرد باشد ، می‌توان با موفقیت رسم را از یك‌گره فرد شروع کرد ودرگره فرد دوم به پایان رسم رسید. یعنی دو انتهای رسم از هم جدا است .

از اینجا به خودی خود نتیجه می‌شود که اگر تعداد گره‌های فرد یك‌شکل چهار باشد ،آن را می‌توان‌با دوحرکت قلم (و نه یك‌حرکت) رسم کرد ، مثل شکل‌های (d) و (e) .

بطوری که می‌بینید ، اگر طریق قضاوت درست را بیاموزیم ، می‌توان خیلی چیزها را بدون صرف بی‌جهت انرژی ووقت پیش‌بینی کرد . ولی یکی از بهترین راه‌های بدست آوردن قضاوت صحیح ، بخصوص آموزش هندسه است .

چه بسا که خواننده‌ای از استدلال این قسمت تا حدی احساس

خستگی بکند ، ولی در عوض به او یاد می‌دهد که چگونه استدلال کند و علاوه بر آن اطلاعات او را درزمینه‌هائی‌که برایش مبهم بود، زیادتر می کند .



۱۵۲. هریك از این دوشکل را با یك حرکت‌قلم رسم‌کنید.

شما همیشه می‌توانید ، ازقبل مشخص کنیدکه‌آیا شکل مفروض را می‌توان با یك حرکت قلم رسم‌کرد وضمناً درحالت امکان می‌دانید که ازکدام‌گره باید حرکت را شروع کنید .

علاوه بر آن حالا دیگر شما می‌توانید برای دوستـان خود ، شکلهائی از این قبیل رسم‌کنید و برای حل به‌آنها ارائه دهید .

حالا شکل‌هائی را که در اینجا (شکل ۱۵۲) رسم شده‌اند ، با یك حرکت قلم رسم کنید .

هفت پل‌کالنین‌گراد

دویست سال قبل در شهرکالنین گراد* هفت پل وجود داشت که سواحل رودخانهٔ پره‌گل را به‌هم مربوط می کرد (شکل ۱۵۳) .

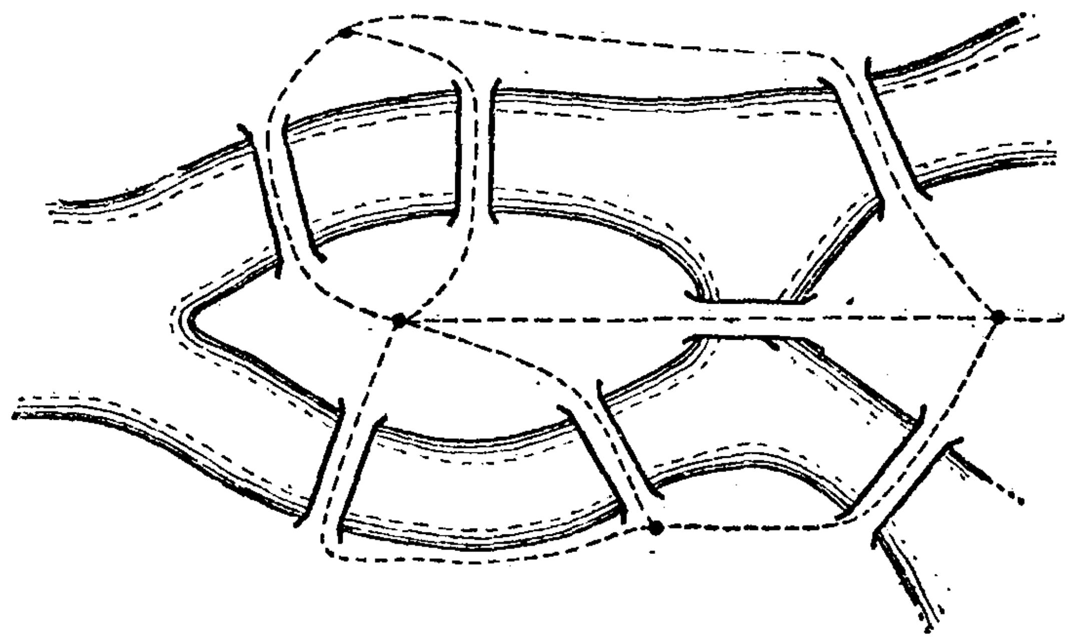
---

*) این شهر درآن زمان‌گنسبورگ نامیده می‌شد .

درسال ۱۷۳۶ اولر، بزرگترین ریاضی‌دان زمان خود (که در آن زمان ۳۰ سال داشت) حل این مسئله را طرح کرد: آیا می‌توان ضمن گردش در شهر از همهٔ این هفت پل عبور کرد، بطوری که از هریك آنها فقط یك بار بگذریم؟

به سادگی معلوم می‌شود که این‌مسئله همان مسئلهٔ رسم یك شکل با یك حرکت قلم منجر می‌شود.

اگرطرح مسیر عبور از پل‌ها را رسم کنید (خط‌چین‌ها درشکل ۱۵۳)، به یکی از شکل‌های سابق (شکل ۱۵۱ - e)، که دارای چهار گره فرد است. می‌رسیم. و دیگر شما می‌دانید که چنین شکلی را



۱۵۳. نمی‌توان از هرهفت پل طوری عبور کرد که از هر کدام آنها بیش از یك‌بار رد نشویم.

نمی‌توان با یك حرکت قلم رسم کرد و بنابراین نمی‌توان از هر هفت پل عبور کرد، بطوری که ازهریك آنها بیش ازیك‌بار رد نشده باشیم. اولر در آن موقع هم این مطلب را ثابت کرد.

شوخی هندسی

بعد از آنکه شما ودوستانتان ازرازرسم یك‌شکل با یك حرکت قلم آگاه شدید ، دوستانتان را جمع کنید و به آنها اطلاع دهید که می‌توانید شکلی شامل چهارگره فرد را (و مثلا دایره‌ای با دو قطر آن ـ شکل ۱۵۴) با یك حرکت قلم وبدون اینکه روی یك خط دوبار حرکت کنید ، رسم کنید .

۱۵۴. شوخی هندسی

شمـا به خوبی می‌دانید کـه این عمل غیر ممکن است ، ولـی می‌توانید به حرف خودعمل کنید . در اینجا حیلهٔ کوچکی در این باره را به شما یاد می‌دهیم.

رسم را ازنقطهٔ A روی محیط دایره شروع کنید (شکل۱۵۴) ،

وقتی که یك‌چهارم دایره را رسم کردید (قوس AB) ،کاغذ دیگری در در نقطهٔ B قرار دهید (و یا کاغذی را که روی آن رسم می کردید در قسمت پائین تا کنید) و با قلم‌خود رسم دایره‌را روی این‌کاغذ اضافی تا نقطهٔ D (نقطهٔ متقاطرB) ادامه دهید .

حالا کاغذ اضافی را بردارید (یا تای‌کاغذ را باز کنید) . در کاغذ اصلی شما یك ربع دایره (قوس AB) رسم شده است و نوك قلم شما در نقطهٔ D است (بدون اینکه قلم را از کاغذ جدا کرده باشید!)

دیگر تکمیل رسم مشکل نیست : ابتدا قوس DA را رسم می کنید،سپس قطرAC ، بعد قوس CD و از آنجا قطر DB وبالاخره قوس BC را ، مسیر دیگری هم از نقطهٔ D می‌توانید طی کنید. آنرا پیدا کنید .

تحقیق درستی شکل

مسئله

برای اینکه معلوم شود، قطعهٔ پارچهٔ بریده‌شده ، به شکل مربع هست یا نه ، خیاط آن را روی قطرهایش تاکرده و دید که کناره‌های آن در هر حال برهم منطبق شده است . آیا این آزمایش‌کافی است؟

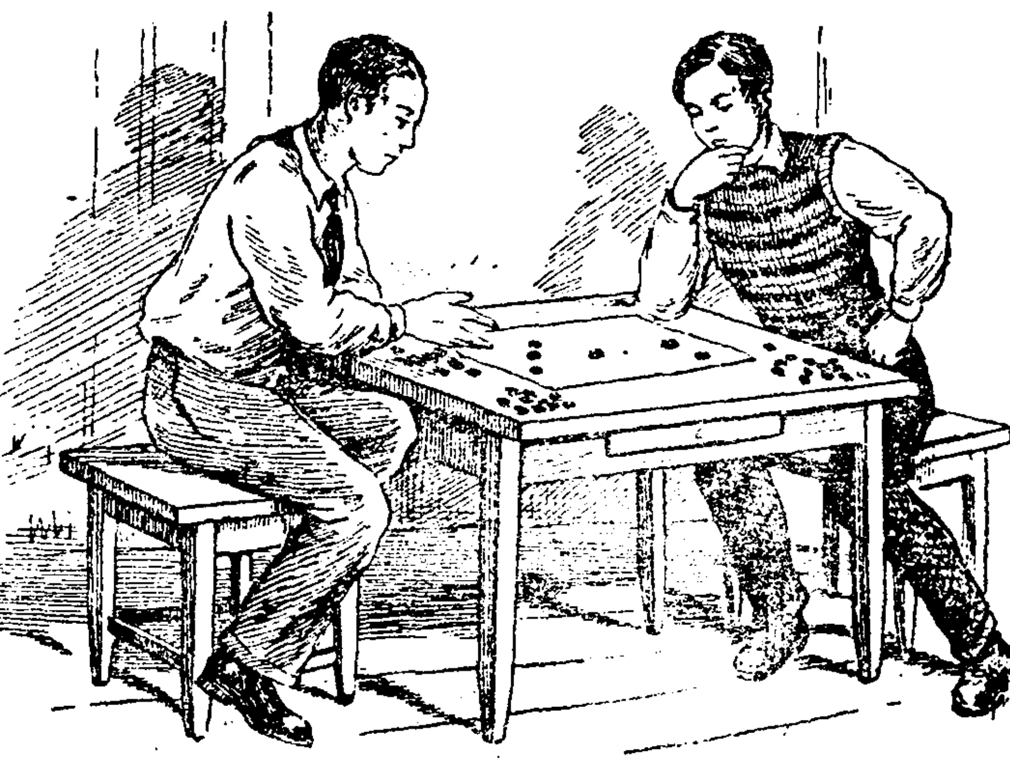
حل

این آزمایش خیاط ، تنها ثابت می کندکه هر چهار ضلع با هم برابر است ، می‌دانیم که تنها مربع دارای این خاصیت نیست ، بلکه

هر لوزی هم چهار ضلع مساوی دارد و لوزی تنها وقتی به مربع تبدیل می‌شود که زوایای آن قائمه باشد. بنابراین آزمایشی که به وسیلهٔ خیاط انجام‌گرفته است دلیل بر مربع بودن پارچه نیست . علاوه بر آن باید دید که آیا زوایای رأس آن قائمه هست یا نه . برای این منظور مثلا می‌توان قطعه پارچه را از وسط دو ضلع روبرو تا کرد ، در صورت قائمه بودن زوایا دو نیمهٔ آن‌کاملاً منطبق بریکدیگرقرار می گیرد .

بازی

برای بازی یك صفحه کاغذ مستطیل شکل وچندشکل یکنواخت متقارن ، مثل مهره‌های دومینو یا سکه‌هائی که یك ارزش داشته باشدو



۱۵۵. بازی هندسی ،کسی بازی را می‌برد که آخرین مهره را روی صفحه قراردهد.

و یا چند قوطی کبریت وغیره‌لازم است . تعداد این مهره‌ها باید آنقدر

باشد که بتوان با آن‌ها صفحهٔ کاغذ را پوشاند . برای بازی هم دو نفر لازم‌است، کسانی که بازی می کنند به‌نوبت مهره‌هارا درجای دلخواهی از صفحهٔ مستطیل شکل (جائی که آزاد باشد) می‌گذارند تا وقتی که دیگر جائی برای قرار دادن مهره باقی نمانده باشد .

مهره‌هائی راکه روی صفحه قرارگرفته نمی‌توان جابجا کرد . کسی برنده به حساب می آید که آخرین مهره را روی صفحه قراردهد.

مسئله

بازی به چه روشی ادامه پیدا کند ، تا کسی که بازی را شروع کرده است حتماً برنده شود ؟

حل

کسی که بازی را شروع کرده است باید دراولین حرکت، مرکز صفحه را اشغال کند ، یعنی مهرهٔ اول را چنان قرار دهد که مرکز تقارن آن حتی‌الامکان برمرکزصفحهٔ کاغذ منطبق باشد و درحرکت‌های بعدی باید مهرهٔ خود را درست قرینهٔ مهرهٔ بازیکن دوم قرار دهد (شکل ۱۵۵) .

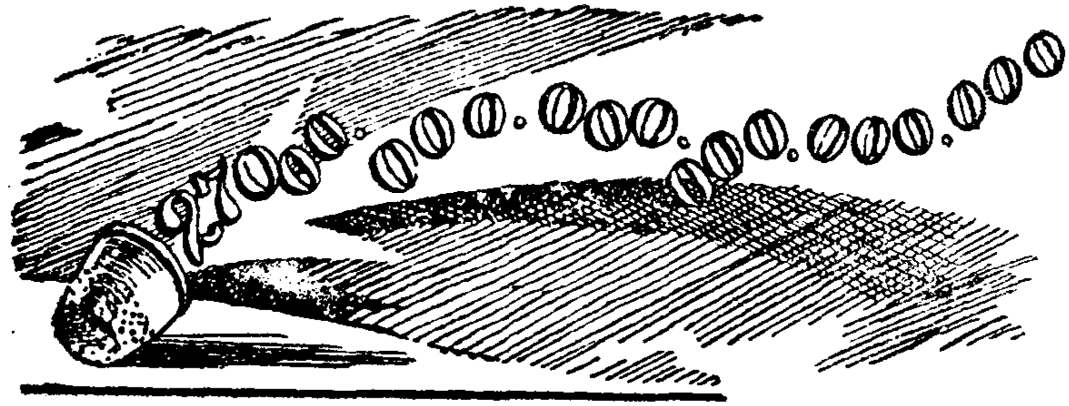
برای این منظور ، کسی که بازی را شروع کرده است ، باید اول جای مهرهٔ خود را پیدا کند و در این‌صورت برد او حتمی است .

تعبیرهندسی این روش چنین است : مستطیل دارای مرکز تقارن است ، بطوری که هر خط از این مرکز عبور کند اولا به وسیلهٔ این نقطه نصف می‌شود ثانیاً مستطیل را به دوقسمت مساوی تقسیم می کند. بنابراین به ازاءِ هرنقطه یا هرسطح کوچکی از مستطیل ، نقطه یا سطح

کوچك دیگری درمستطیل وجود دارد که متقارن آنست و تنها نقطه‌ای که متقارنی برای خود ندارد ، خود مرکز تقارن مستطیل است.

از اینجا نتیجه می‌شود که وقتی بازیکن اول مرکز مستطیل را اشغال می‌کند، هرنقطه‌ای از صفحه راکه رقیب او بگیرد ، نقطهٔ آزادی در سطح مستطیل باقی می‌ماند که قرینهٔ مهرهٔ رقیب او نسبت به مرکز مستطیل است .

به این ترتیب ، وقتی بـازی ادامه پیدا کند ، اجباراً به جائی می‌رسد که نفر دوم جای خالی برای مهرهٔ خود نمی‌بیند (زیرا در غیر اینصورت برای مهرهٔ نفراول هم جائی باقی مانده است) وکسی برنده می‌شود که بازی را شروع کرده است .



۱۱

مقادیر کوچك و بزرگ در هندسه

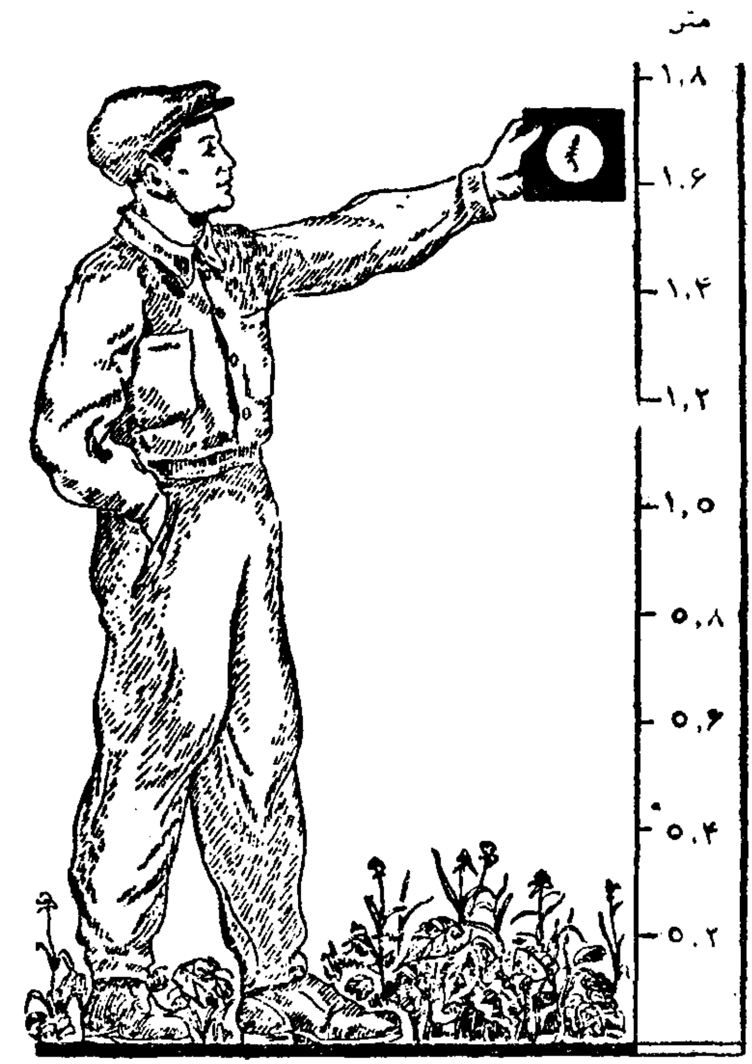
۲۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰
دریك انگشتانه

عدد ۲۸ همراه با ۱۸ صفر راکه در عنوان این بند نوشته شده، به طرق مختلف می‌توان خواند ، بعضی می‌گویند این ۲۷ تریلیون است ؛ بعضی دیگر و مثلا مـأمورین دارائی آن را ۲۷ کوین تیلیون می‌خوانند وبالاخره بعضی هم آن را به صورت ۲۷×۱۰^{۱۸} می‌نویسند ومی‌خوانند ۲۷ ضرب در ده به توان ۱۸ .

چگونه‌ممکن است یك‌چنین مقدارباورنکردنی در یك انگشتانه جا بگیرد ؟

صحبت بر سر ذراتی است که در هوای اطراف ما وجود دارد.

هوا هم مثل همهٔ اجسام دیگری که در جهان وجود دارد، مجموعه‌ای از ملکولهاست. فیزیك‌دانها ثابت کرده‌اند که در هر سانتیمتر مکعب (یعنی تقریباً دریك انگشتانه) درحرارت صفردرجه، به‌اندازهٔ ۲۷×۱۰^{۱۸} مولکول از هوای اطراف ما وجود دارد. عددی عظیم در مقابل ما وجود دارد. چگونه می‌توان تصور روشن وزنده‌ای از این عدد بدست آورد؟ یك چنین مجموعه‌ای را با چه چیزی می‌توان مقایسه کرد؟ با تعداد افراد روی زمین؟ نه! همهٔ افراد روی زمین فقط دوهزار ملیون (۲×۱۰^{۹}) نفرند، یعنی ۱۳ هزار ملیون مرتبه کمتر از مولکولهائی که دریك انگشتانه وجود دارد. اگر تمام ستارگان عالم که با قوی‌ترین



۱۵۶. جوان یك باسیل حصبه را، که ۱۰۰۰ مرتبه بزرگ شده است به دقت نگاه می‌کند.

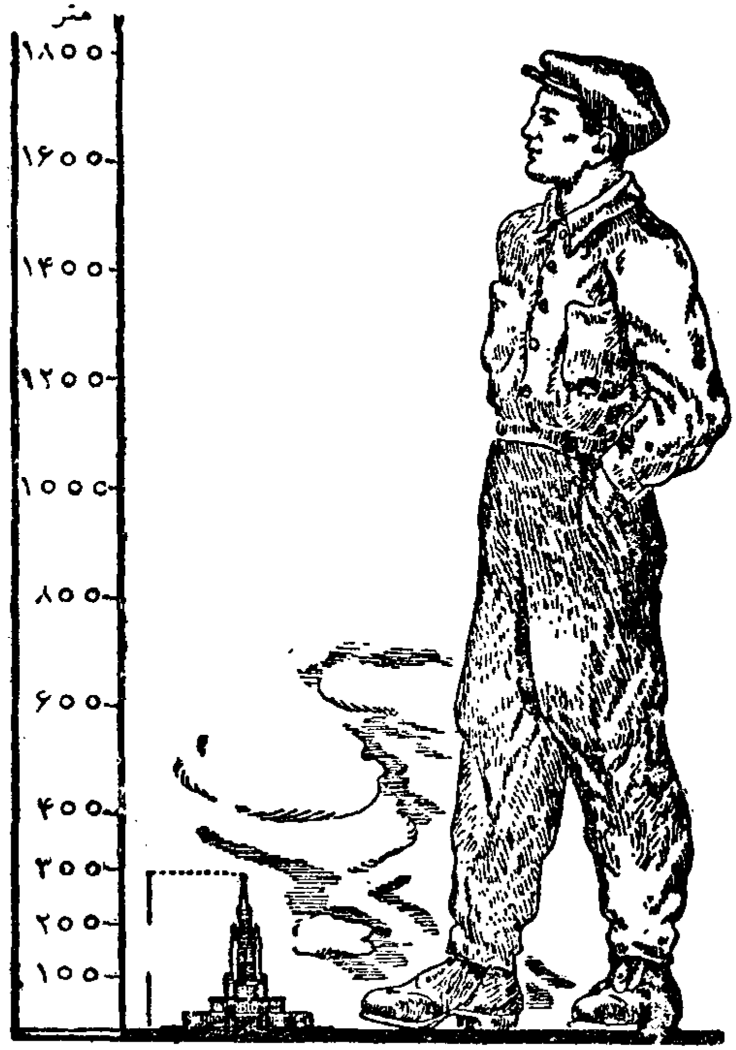
میکروسکوپها دیده می‌شوند ، سیاره‌هائی از خورشید ما بودند و اگر در هریك از این سیاره‌ها جمعیتی به اندازهٔ کرهٔ زمین وجود داشت ، در این صورت هم تعداد جمعیت مجموعهٔ آنها مساوی مولکولهای «ساکن» دریك انگشتانه نمی‌شد ، اگر شما می‌توانستید به‌طور لاینقطع مثلاهرصد مولکول را دریك دقیقه بشمارید، برای شمردن مولکولهای داخل یك انگشتانه ۵۰۰ هزار ملیون سال وقت لازم داشتید.

ما حتی عددهای خیلی کوچکتر را هم نمی‌توانیم به طور روشن پیش خود مجسم کنیم .

مثلا وقتی که به‌شما بگویند ، یك میکروسکپ ۱۰۰۰ باربزرگ می کند ، چه تصوری برای شما به وجود می‌آید ؟ مطلب برسربزرگی عدد هزار نیست ، بلکه صحبت از هزار برابر است و در این مورد تصور ما تا جائی که لازم است پیش نمی‌رود . ما اغلب نمی‌توانیم کوچکی واقعی اشیائی را که زیر میکروسکوپ به ترتیب مشابهی بزرگ می‌شوند، درست تخمین بزنیم. اگرباکتری حصبه را ۱۰۰۰بار بزرگ کنیم، به‌نظرمابه‌اندازهٔ مگس کوچکی‌می آید که ازفاصلهٔ معمولی دید، یعنی ۲۵ سانتی‌متر، دیده شود (شکل ۱۵۶) . ولی این‌باکتری در واقع چقدر کوچك است؟ فرض کنید همراه‌با باکتری ، شما هم۱۰۰۰ مرتبه بزرگ شوید . در این صورت قد شما ۱۷۰۰ متر خواهد شد ! سر شما از ابرها خواهد گذشت و مرتفع‌ترین ساختمان‌های مسکو از زانوی شما خیلی پائین‌ترخواهند بود (شکل ۱۵۷) . به همان نسبت که شماازیك چنین موجود عظیم‌الجثه‌ای کوچکترید، باکتری هم ازمگس کوچکتر است .

حجم و فشار

ممکن است فکر کنیم که آیا واقعاً ۲۷×۱۰^{۱۸} ملکول هوا برای یك انگشتانه زیاد نیست؟ بهیچ وجه! قطر یك مولکول اکسیژن یا



۱۵۷. جوانی که ۱۰۰۰ مرتبه بزرگ شده است.

ازت $\frac{۳}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ میلی متر (یا ۳×۱۰^{-۷} میلی‌متر) است. اگر حجم مولکول را برابر حجم مکعبی به‌ضلع قطر آن بگیریم، بدست‌می آید:

$$\left(\frac{۳}{۱۰^{۷}} \text{ میلی متر}\right)^{۳} = \frac{۲۷}{۱۰^{۲۱}} \text{ (میلی مترمکعب)}$$

تعداد مولکول‌های یك انگشتانه را ۲۷×۱۰^{۱۸} گرفتیم ، یعنی حجمی را که مولکول های انگشتانه اشغال کرده‌اند به تقریب برابر است با :

$$\frac{۲۷}{۱۰^{۲۱}} \times ۲۷ \times ۱۰^{۱۸} = \frac{۷۲۹}{۱۰^{۳}} \text{(میلی مترمکعب)}$$

یعنی قریب یك میلی‌متر مکعب ، که فقط یك هزارم سانتی متر مکعب است. فاصلهٔ بین مولکول‌ها خیلی بیش‌از اندازهٔ خود آنهاست و در همین فواصل است که مولکول‌ها حرکت می کنند . در حقیقت ، همان طور که می‌دانیم ، ذرات هـوا در یك‌جا آرام نمی‌مانند : در حالی که مجموعه‌های کوچکی را تشکیل می‌دهند ، دائماً و با بی‌نظمی ازجائی به‌جای‌دیگرحرکت می کنند . اکسیژن،گاز کربنیك، هیدرژن، ازت وسایرگازها دارای اهمیت صنعتی هستند ، ولی برای نگاهداری آن‌ها بـه مقدار زیاد ، مخزن‌های عظیمی احتیـاج دارند . مثلا یك تن (۱۰۰۰ کیلوگرم) ازت در فشار معمولی به ۸۰۰ مترمکعب جا احتیاج دارد ، یعنی برای نگهداری تنها یك تن ازت خالص مخزنی با ابعاد ۸ × ۱۰ × ۱۰ متر لازم می‌شود . ولی برای نگهداری یك تن هیدرژن خالص ، مخزنی خیلی بزرگ و به گنجایش ۱۰۰۰۰ متر مکعب مورد احتیاج است .

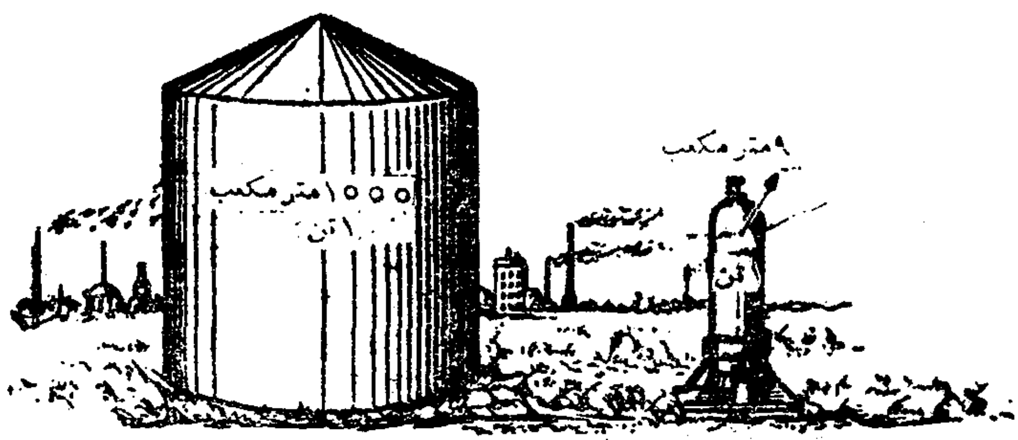
آیا نمی‌شود مولکول‌های گاز را به هم نزدیکتر کرد ؟ مهندسین همین‌کار را می کنند و با کمك فشار گازها را متراکم می کنند . ولی این‌کار ساده نیست . فراموش نکنیدکه هر نیروئی به گاز وارد شود ، به وسیلهٔ‌گاز به دیوارهٔ ظرف‌منتقل می‌شود. دیوارهٔ مستحکمی‌لازم‌است که به وسیلهٔ فشارگاز متلاشی نشود .

صنعتگران ما ، با وسائل شیمیائی جدید ، فولادهائی ساخته‌اند که در مقابل فشارهای عظیم ، درجهٔ حرارت بالا و فعل و انفعالات

شیمیائی گازها، به خوبی مقاومت می کنند .

حالا مهندسین ما می‌تواند گاز هیدرژن را ۱۱۶۳ بار متراکم کنند، بطوری که یك‌تن هیدرژن را ، که درفشار معمولی جو ۱۰۰۰۰ متر مکعب حجم دارد ، در مخزن کوچکی به حجم ۹ متر مکعب جا دهند (شکل ۱۵۸) .

فکر می کنید برای اینکه حجم هیدرژن را ۱۱۶۳ بار کم کنیم ، چه فشاری باید به آن وارد کنیم ؟ با توجه به این قانون فیزیك که می‌گوید : بهر نسبتی که بخواهیم حجم گاز کم شود، باید به همان‌نسبت فشار آن را زیاد کنیم ، به این نتیجه می‌رسیم که باید فشار بر هیدرژن را۱۱۶۳ بار زیاد کنیم. ولی آیا در واقع امر هم همین طور است؟ نه ! در واقع باید هیدرژن فشاری معادل ۵۰۰۰ جو را تحمل کند ، یعنی فشار را باید ۵۰۰۰ مرتبه زیاد کرد نه ۱۱۶۳ مرتبه، زیرا حجم وقتی



۱۵۸. یك تن هیدرژن در فشار یك جو (سمت چپ) و در فشار ۵۰۰۰ جو (سمت راست) (در شکل تناسب رعایت نشده است)

متناسب با عکس فشار تغییر می کند که فشار خیلی زیاد نباشد و برای فشارهای زیاد، این قانون تطبیق نمی کند . مثلا اگر به یك تن گاز ازت فشاری معادل هزار جو وارد کنیم ، حجم آن به جای ۸۰۰ متر مکعب

(که حجم آن درفشارمعمولی یك جو است) ، ۱/۷ متر مکعب خواهد شد ، درحالیکه اگر فشاررا به ۵۰۰۰ جو برسانیم (یعنی ۵ برابر کنم)، حجم آن فقط تا ۱/۱ متر مکعب پائین می‌آید .

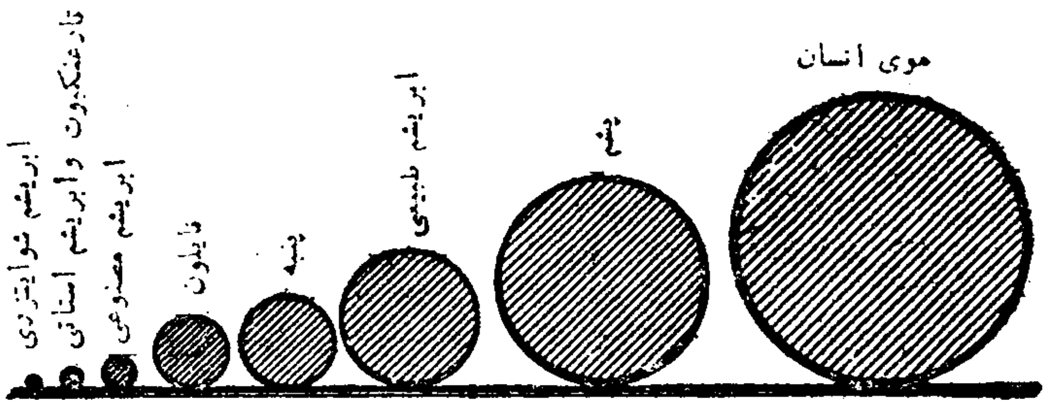
نازك‌تر از تار عنکبوت ، و محکم‌تر از فولاد

مقطع یك نخ یا یك مفتول یا حتی یك تار عنکبوت ، همه از لحاظ هندسی شکلی دارند، که اغلب به دایره نزدیك‌است . ضمناً قطر مقطع عرضی ، یا اگر بشودگفت ، ضخامت یك تار عنکبوت تقریباً ۵ میکرون ($\frac{۵}{۱۰۰۰}$ میلی‌متر) است . آیا از تار عنکبوت نازکتر هم وجود دارد ؟ کدام هنرمند است که نازك‌ترین « نخ‌ها » را می‌ریسد ؟ عنکبوت یا ، شاید ، کرم ابریشم ؟ نه ، قطر رشتهٔ ابریشم طبیعی ۱۸ میکرون است ، یعنی $۳\frac{۱}{۲}$ مرتبه ضخیم‌تر از یك تار عنکبوت .

بشر از دیر باز آرزو داشته است که با مهارت خود بتواند بر هنر عنکبوت و کرم ابریشم برتری پیداکند . افسانهٔ قدیمی دربارهٔ یك زن یونانی وجود دارد که در آن از ریسندگی شگفت‌آور او صحبت می‌شود . او به چنان کمالی از صنعت رسیده بود که پارچه‌های بافت اومثل تارعنکبوت نازك، مثل شیشه روشن و مثل هوا سبك بود . حتی الههٔ دانائی هم که پشتیبان صنعت‌گران است ، به پای اونمی‌رسید .

این افسانه (که همچون بسیاری از افسانه های قدیمی تخیلی است) ، در زمان ما صورت عمل یافته است . هنرمند امروز ، مهندس شیمی نام داردکه با استفاده از چوب معمولی می‌تواند نخ مصنوعی بسازدکه به طور عجیبی محکم و فوق‌العاده نازك باشد . مثلا رشته‌های

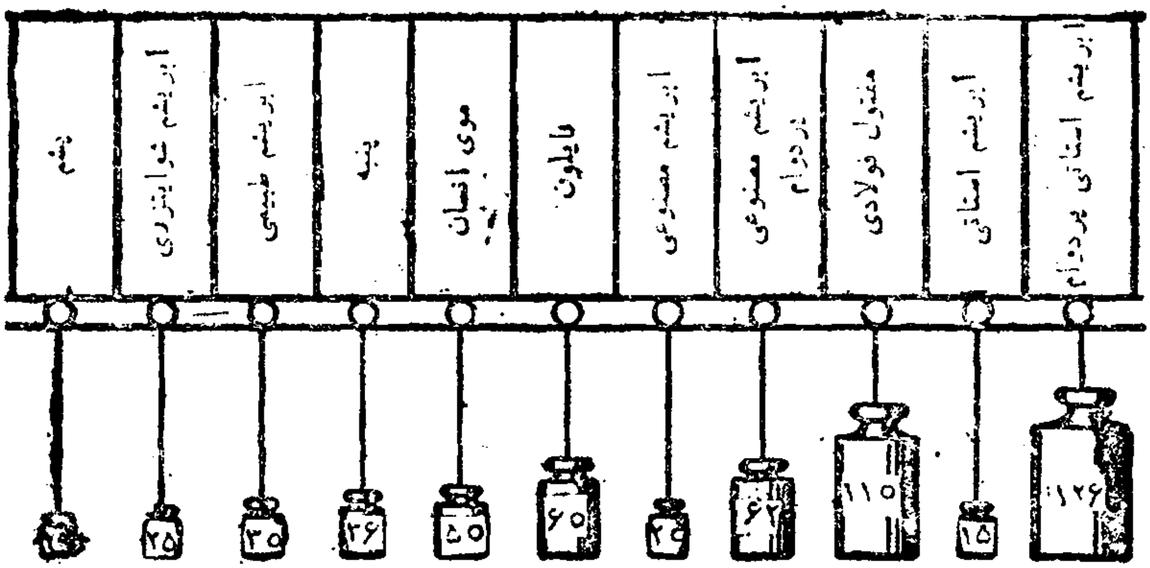
ابریشمی که با روش صنعتی شوایتزر ساخته می‌شود $۲\frac{۱}{۲}$ مرتبه نازکتر از تار عنکبوت هستند و از لحاظ استحکام از رشته‌های ابریشم طبیعی بدتر نیستند. هر میلی متر مربع مقطع ابریشم طبیعی تا ۳۰ کیلوگرم باررا تحمل می‌کند ورشتهٔ شوایتزری (مس آمونیاکی) تا۲۵ کیلوگرم.



۱۵۹. مقایسهٔ ضخامت رشته‌های مختلف

روش تهیهٔ ابریشم شوایتزری (مس آمونیاکی) هم خیلی جالب است. چوب را به سلولز تبدیل می‌کنند و سلولزرا در محلول آمونیاك مس (محلول شوایتزر) حل می‌کنند. محلول را از سوراخ باریکی وارد آب می‌کنند، آب جلو حل شدن را می‌گیرد و به‌این ترتیب رشته‌هائی بدست می‌آورند و آن را دور دستگاه مربوطه می‌پیچند. ضخامت رشته‌های ابریشم شوایتزر ۲ میکرون است. با ضخامت یك میکرونی هم «استاتی» نامیده می‌شود که بازهم نوعی ابریشم مصنوعی است. عجیب است که بعضی از ابریشم‌های استاتی از مفتول فولادی هم محکم‌ترند. اگر مفتول فولادی قدرت مقاومت ۱۱۰ کیلو گرم بار را برهرمیلی متر مکعب مقطع عرضی خود دارد، رشتهٔ ابریشم استاتی می‌تواند ۱۲۶ کیلو گرم را بر هر میلی متر مکعب مقطع خود تحمل کند.

برای همهٔ شما روشن است که ابریشم مصنوعی، رشته هائی به ضخامت ۴ میکرون و مقاومت حدی ۲۰ تا ۲۶ کیلوگرم برهر میلی‌متر مربع دارد. در شکل ۱۵۹ ضخامت تارعنکبوت با موی انسان و انواع رشته‌های مصنوعی پشم و پنبه مقایسه شده است و در شکل ۱۶۰ استحکام آنها برحسب کیلوگرم بریك‌میلی‌متر مقایسه شده است. الیاف مصنوعی (و یا نام دیگر آنها: الیاف ترکیبی) یکی از کشفیات بسیار مهم‌صنعت جدید است که دارای اهمیت‌اقتصادی فوق‌العاده می‌باشند. مهندس بویانوو چنین می‌نویسد: «پنبه با کندی رشد می کند و مقدار



۱۶۰. مقاومت حدی الیاف (برحسب کیلوگرم بریك میلی متر مربع مقطع عرضی)

محصول آن هم بستگی به‌آب و هوا وحاصلخیزی زمین دارد. سازندهٔ ابریشم طبیعی ـ کرم ابریشم ـ امکانات خیلی محدودی دارد. او در تمام زندگی خود پیله‌ای به‌وجود می‌آورد که فقط ۰٫۵ گرم رشتهٔ ابریشم دارد...

مقدار ابریشم صنعتی، که از یك مترمکعب چوب و از راه اعمال شیمیائی بدست‌می‌آید به‌اندازهٔ ۳۲۰۰۰۰ پیلهٔ ابریشم‌یا به‌اندازهٔ

پشمی که از ۳۰ گوسفند در سال بدست می‌آید و یا به اندازهٔ محصول متوسط پنبه از نیم هکتار زمین است . این مقدار پیله برای تهیهٔ چهار هزار جفت جوراب ساق بلند زنـانه و یا ۱۵۰۰ متر پارچهٔ ابریشمی کافی است» .

دو ظرف

اگر ، ضمن گفتگو از مقادیر بزرگ و کوچك در هندسه ، به‌جای مقایسهٔ عددهـا ، به مقایسهٔ سطوح و احجام بپردازیم ، به نـارسائی ، تصورات خود بیشتر معتقد می‌شویم . مسلماً هر کسی بدون تأمل جواب می‌دهد که ۵ کیلوگرم مربا از ۳ کیلو گرم بیشتر است ، ولی همیشه نمی‌توان بلافاصله تصمیم گرفت که کدامیك ازدوظرفی که روی میز است گنجایش بیشتری دارد .

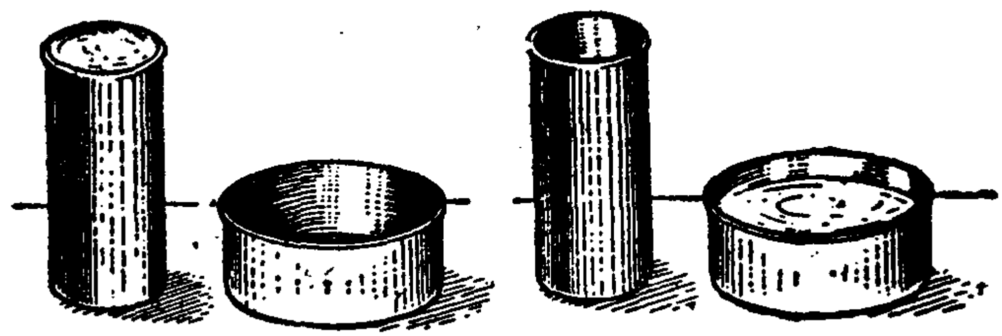
مسئله

کدامیك از دوظرف شکل ۱۶۱ جادارتر است ، ظرف سمت راست یا ظرف سمت چپ ؟ به‌شرطی که ظرف سمت چپ سه برابر بلندتر و دو برابر تنگ‌تر از ظرف سمت راست است .

حل

احتمالا برای بسیاری غیرمنتظره باشد که ظرف بلندتر گنجایش کمتری‌نسبت به‌ظرف پهن‌تر دارد. ضمناًاین مطلب را می‌توان‌به‌سادگی و با محاسبه تحقیق‌کرد : سطح قاعدهٔ ظرف پهن ۲×۲ یعنی چهار مرتبه بیشتر از ظرف تنگ و ارتفاع آن سه مرتبه کمتر از آنست .

بنابراین حجم ظرف پهن $\frac{۴}{۳}$ حجم ظرف دیگر است . اگر محتوی



۱۶۲. نتیجهٔ خالی کردن ظرف بلندتر در ظرف پهن‌تر.

۱۶۱. کدام ظرف گنجایش بیشتری دارد ؟

ظرف بلندتر را در ظرف پهن‌تر بریزیم ، تنها $\frac{۳}{۴}$ حجم آن را اشغال می‌کند (شکل ۱۶۲) .

سیگار بزرگ

مسئله

پشت ویترین یك مغازهٔ سیگار فروشی سیگار برگی گذاشته‌اند که ۱۵ مرتبه طویل‌تر و ۱۵ مرتبه کلفت‌تر از سیگار معمولی است . اگر برای درست کردن یك سیگار با اندازه‌های معمولی نیم‌گرم توتون لازم‌باشد، برای پر کردن سیگار نمونه‌ای که پشت ویترین مغازه گذاشته شده است، چقدر توتون لازم است ؟

حل

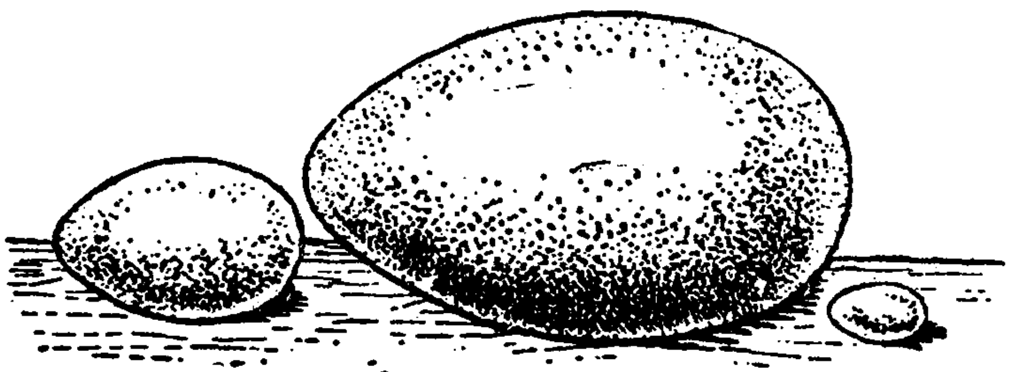
$$\frac{1}{2} \times 15 \times 15 \times 15 \# 1700 \quad \text{(گرم)}$$

یعنی بیش از $1\frac{1}{2}$ کیلوگرم .

تخم شتر مرغ

مسئله

در شکل ۱۶۳ تخم مرغ (سمت راست) و تخم شترمرغ (سمت چپ) با یك مقیاس رسم شده است (شکل وسط تخم نوعی شتر مرغ در ماداگاسگار است که در مسئلهٔ بعـدی از آن صحبت خواهد شد) .



۱۶۳، مقایسهٔ تخم شترمرغ ، شترمرغ ماداگاسکار و مرغ

به شکل نگاه کنید و بگوئید محتوی تخم شترمرغ چقدر بیشتر از تخم مرغ است ؟ با یك نگاه سطحی ، این طور به نظر می‌رسد که اختلاف نباید خیلی بـزرگ باشد . ولی نتیجه‌ای که از محاسبهٔ صحیح هندسی بدست می‌آید خیلی حیرت انگیز است .

حل

با اندازه‌گیری مستقیم روی شکل، معلوم می‌شود که طول تخم شتر مرغ $۲\frac{۱}{۲}$ برابر طول تخم مرغ است . بنابراین حجم تخم شتر مرغ به اندازهٔ

$$۲\frac{۱}{۲}\times ۲\frac{۱}{۲}\times ۲\frac{۱}{۲}=\frac{۱۲۵}{۸}$$

یعنی تقریباً ۱۵ برابر حجم تخم مرغ است .

بایك تخم شتر مرغ می‌توان یك خانوادهٔ پنج نفری را غذا داد، به شرطی که برای هر نفر به اندازهٔ سه تخم مرغ به حساب آوریم .

تخم شترمرغ ماداگاسگار

مسئله

در ماداگاسگار گاهی شتر مرغهای بزرگی پیدا می‌شود که تخمهائی به‌طول ۲۸ سانتی‌متر می‌گذارند (شکل ۱۶۳ ـ وسط). ضمناً طول تخم مرغ ۵ سانتی متر است . می‌خواهیم حجم تخم مرغ را با حجم تخم شترمرغ ماداگاسگار مقایسه کنیم .

حل

حاصل ضرب $\frac{۲۵}{۸}\times\frac{۲۵}{۸}\times\frac{۲۵}{۸}$ را بدست می‌آوریم ، تقریباً ۱۷۰ می‌شود می‌شود . یك تخم شتر مرغ ماداگاسگار به اندازهٔ قریب

دویست تخم مرغ است! بیش از پنجاه نفر می‌توانند با این یك تخم تغذیه شوند. وزن این تخم قریب ۸ تا ۹ کیلوگرم است.

مسئله

اختلاف بین اندازه‌ها وقتی بیشتر نمایان می‌شود که تخم پرندگان آشناتررا مقایسه کنیم. تخم قو و صعوه (که از کوچکترین وظریفترین پرندگان است). در شکل ۱۶۴ دورهٔ این تخم‌ها با اندازهٔ طبیعی خود رسم شده‌است، نسبت حجم آنها چقدر است؟

حل

طول هر دو را اندازه می‌گیریم، ۱۲۵ و ۱۳ میلی‌متر بدست می‌آید. اگر عرض آنها را هم اندازه بگیریم، ۸۰ و ۹ میلی‌متربدست می‌آید. به سادگی دیده می‌شود که این عددها تقریباً متناسبند، اگر تناسب زیر را تشکیل دهیم:

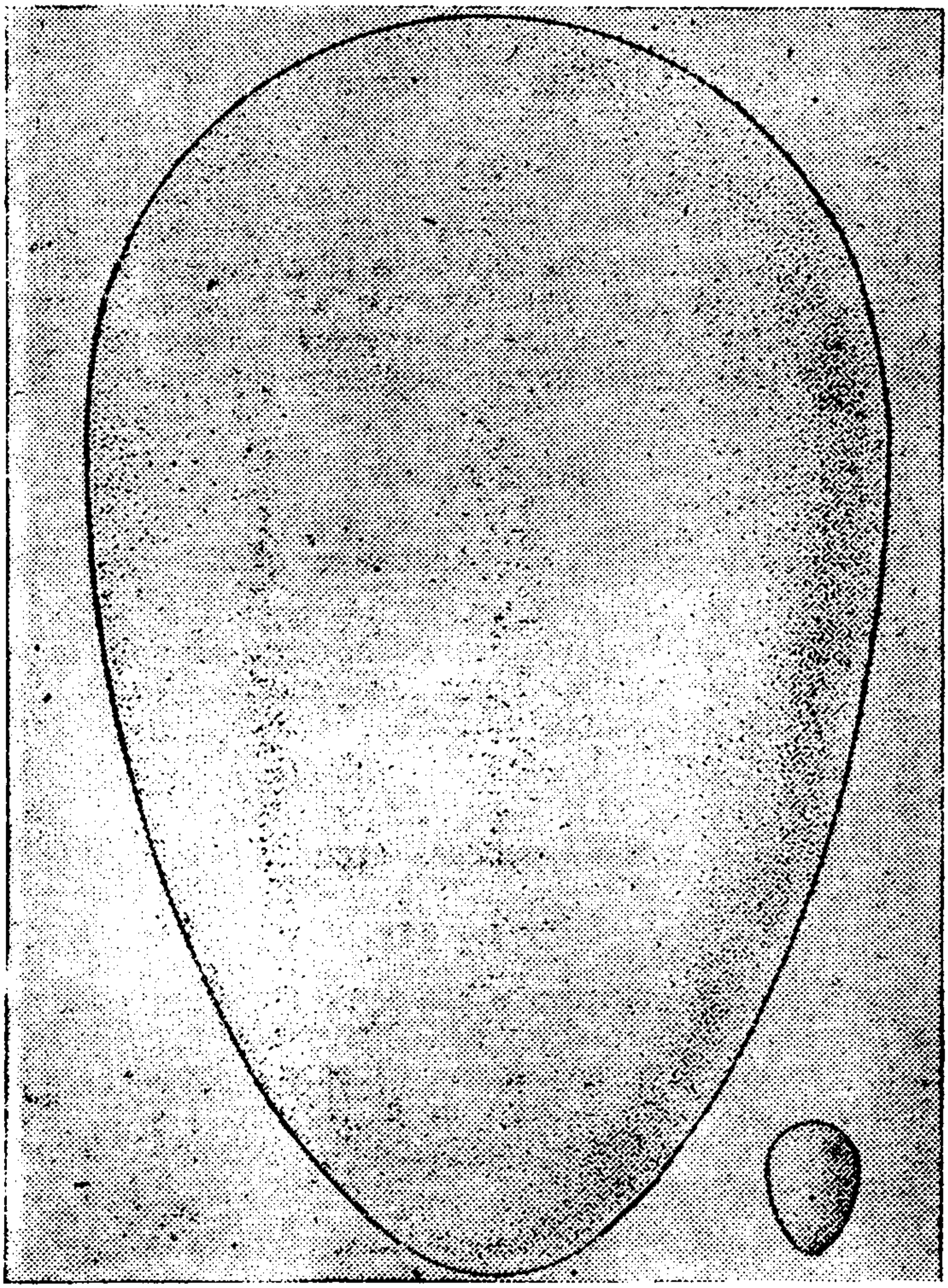
$$\frac{۱۲۵}{۸۰}=\frac{۱۳}{۹}$$

برای حاصل ضرب طرفین و حاصل‌ضرب وسطین آن به‌ترتیب ۱۱۲۵ و ۱۰۴۰ بدست می‌آید که خیلی کم اختلاف دارند.

بنابراین اگر آنها را به عنوان دو جسمی که از لحاظ هندسی متشابهند، در نظر بگیریم، اشتباه زیادی نکرده‌ایم. به این ترتیب نسبت حجم آنها چنین می‌شود:

$$\frac{80^3}{9^3}=\frac{510000}{730}=700$$

یعنی تخم قو ۷۰۰ برابر تخم صعوه حجم دارد .



۱۶۴. تخم قو و تخم صعوه (با اندازه‌های طبیعی) ، حجم یکی چند برابر حجم دیگری است ؟

تعیین وزن پوست تخم پرنده ، بدون شکستن آن

مسئله

دو تخم پرنده ، هم شکل و با اندازه‌های مختلف در اختیار داریم. می‌خواهیم بدون‌شکستن آنها ، وزن تقریبی‌پوست آنها را تعیین کنیم. برای این‌عمل چه اندازه‌گیری، توزین و محاسبه‌ای لازم است ؟ ضخامت پوست دو تخم را یکنواخت به حساب می‌آوریم.

حل

طول محوربزرگترهردوتخم‌را اندازه می‌گیریم: D و d بدست می‌آید. وزن پوست تخم اول را x و وزن پوست دومی را y می‌گیریم وزن پوست‌ها متناسب با سطح آن‌ها ، یعنی مربع اندازه‌های خطی آنهاست. بنابراین‌اگرضخامت پوستها رایکنواخت فرض کنیم، تناسب زیر را خواهیم داشت :

$$x:y=D^2:d^2$$

دوتخم را وزن می‌کنیم : عددهای P و p بدست می‌آید. وزن دوجسم متناسب با حجم‌های آن‌ها ، یعنی متناسب با مکعب اندازه‌های خطی آنهاست ، بنابراین داریم :

$$(P-x):(p-y)=D^3:d^3$$

و به این ترتیب دو معادله بر حسب مجهولات x و y بدست می‌آید که از حل آنها خواهیم داشت :

$$x=\frac{p\cdot D^3-P\cdot d^3}{d^2(D-d)} \quad ; \quad y=\frac{p\cdot D^3-P\cdot d^3}{D^2(D-d)}$$

اندازهٔ سکه‌های ما

وزن‌سکه‌ها متناسب با قیمت آنهاست ، یعنی یك سکهٔ دوریالی دو برابر سکهٔ یك ریالی و یك سکهٔ ۵ ریالی ۵ برابر سکهٔ یك ریالی وزن دارد و غیره . همین مطلب در مورد اندازه‌های آنها هم صحیح است، چون سکه‌های یك‌نواخت از لحاظ هندسی با یکدیگر متشابه‌اند، اگر قطر یکی از آنها را داشته باشیم ، می‌توانیم قطر بقیهٔ سکه‌ها را بدست آوریم . نمونه‌هائی در این مورد ذکر می کنیم .

مسئله

قطر یك سکهٔ ۵ ریالی ۲۶ میلی‌متر است . قطر سکهٔ دو ریالی چقدر می‌شود ؟

حل

وزن و بنابراین حجم سکهٔ دو ریالی تقریباً $\frac{۲}{۵}$ ، یعنی ۰/۴ ، حجم سکهٔ ۵ ریالی است . بنابراین نسبت اندازه‌های خطی آنها $\sqrt[3]{۰/۴}$ یعنی تقریباً ۰/۷۴ می‌شود . از آنجا سکهٔ دو ریالی مساوی ۰/۷۴ × ۲۶ یعنی تقریباً ۲۰ میلی‌متر می‌شود (درحقیقت قطر سکه‌های ۲ ریالی ۲۲ میلی‌متر است) .

سکهٔ ده میلیون ریالی

مسئله

یك سکهٔ خیالی ده ملیون ریالی در نظر بگیرید، که به همان شکل سکه‌های موجود باشد و وزنش هم به‌همان نسبت زیادتر باشد. قطر یك چنین سکه‌ای چقدر خواهد بود؟ اگر این سکه را پهلوی یك اتومبیل روی کنارهٔ خود نگه داریم، تا چند برابر ارتفاع اتومبیل خواهد بود؟

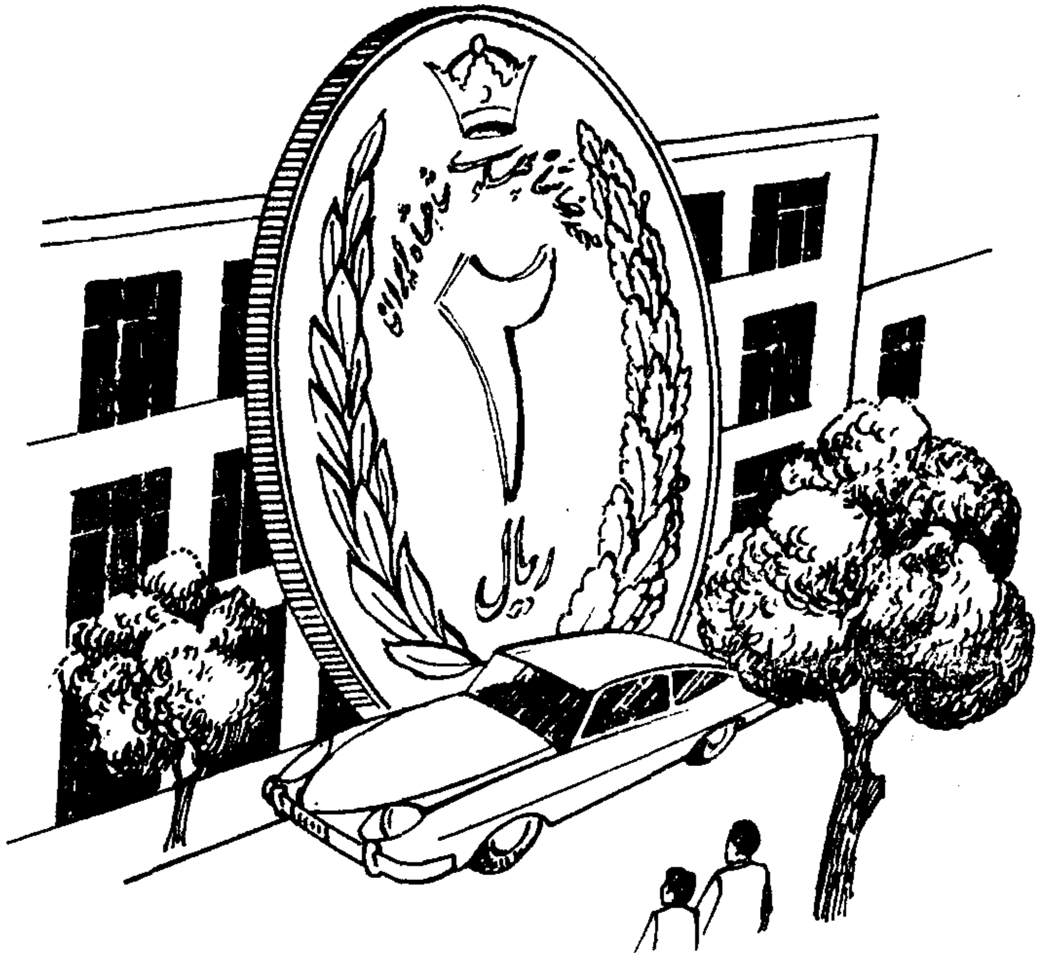
حل

آنقدرها که گمان می‌رود، اندازه‌های این سکه بزرگ نیست. قطر چنین سکه‌ای نزدیك ۳/۸ متر، یعنی کمی بیش از ارتفاع یك طبقه عمارت، خواهد شد. درحقیقت حجم این سکه باید ۵۰۰۰ ۰۰۰ برابر حجم سکهٔ دو ریالی باشد وبنابراین قطر آن $\sqrt[3]{5000\ 000}$، یعنی ۱۷۲ برابر قطر سکهٔ دو ریالی است.

اگر ۲۲ میلی متر (قطر سکهٔ دو ریالی) را در ۱۷۲ ضرب کنیم تقریباً ۳/۸ متر بدست می‌آید، که برای یك چنین سکهٔ پرقیمتی خیلی زیاد نیست.

مسئله

حالا حساب کنید، اگر یك سکهٔ دو ریالی قطری مساوی ارتفاع یك ساختمان چهار طبقه داشته باشد، چه ارزشی دارد (شکل ۱۶۵)؟



۱۶۵. این سکهٔ عظیم دو ریالی معادل چه سکه‌ای است ؟

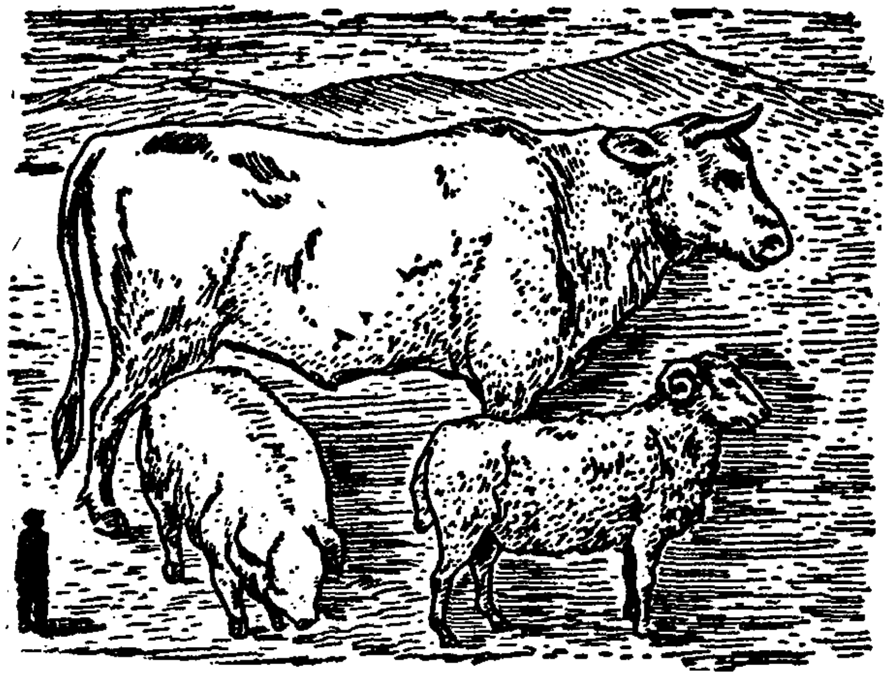
تصاویر روزنامه‌ای

با توجه به مسائلی که دراینجا ذکر کردیم ، دیگرشما یادگرفتید که برای مقایسهٔ حجم دو جسم (که ازلحاظ هندسی متشابه‌اند) چگونه از اندازه‌های خطی آنها استفاده کنید . شما دیگر تحت تأثیر تصاویر ظاهری قرار نمی‌گیرید و اشتباهی را که تصاویر روزنامه‌ای به شما تلقین می کنند ، برطرف می کنید .

مسئله

نمونه‌ای ازاینگونه‌تصاویررا مطرح‌می کنیم. اگرمصرف گوشت

روزانهٔ یك نفر را به‌طورمتوسط ۴۰۰ گرم فرض‌کنیم ، ضمن ۶۰ سال زندگی قریب ۹ تن گوشت مصرف خواهد کرد . چون وزن یك گاو بزرگ قریب $\frac{۱}{۲}$ تن است ، یك نفر در جریان ۶۰ سال زندگی خود ۱۸ گاو را خورده است .



۱۶۶. یك نفر در جریان زندگی خود چقدر گوشت می‌خورد (کشف اشتباه تصویر)

در شکل ۱۶۶، که از یك روزنامهٔ انگلیسی برداشته شده است، مصرف‌گوشت‌یك نفردرجریان زندگی را به‌وسیلهٔ تصویریك‌گاوعظیم، نسبت به انسان ، نشان داده است . آیا این تصویر درست است ؟ مقیاس صحیح کدام است؟

حل

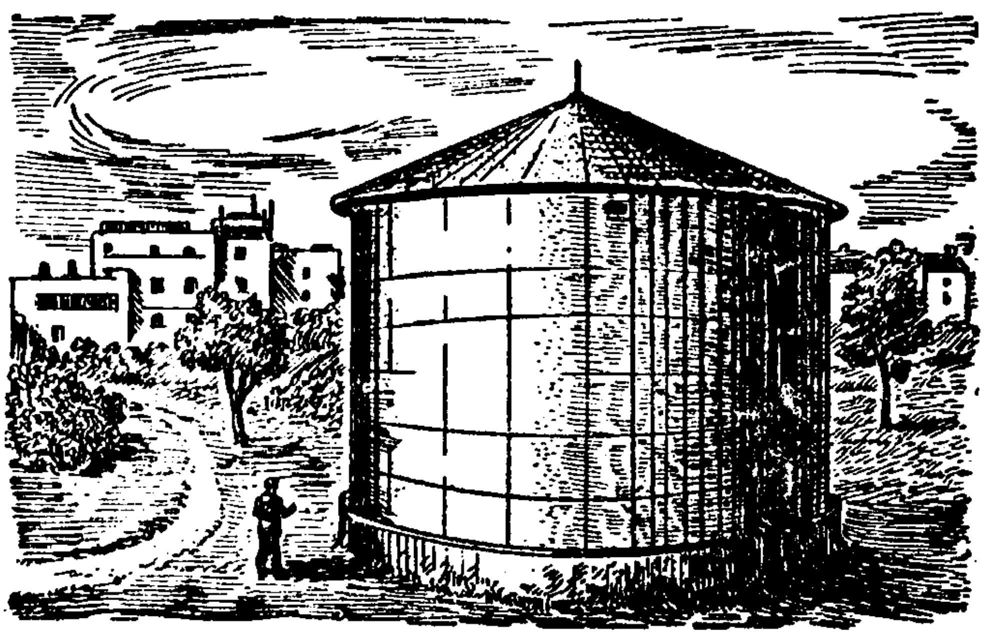
تصویر صحیح نیست .گاوی که در شکل نشان داده شده است ، هم از جهت طول و هم از جهت عرض ۱۸ بار از گاو معمولی بزرگتر

است و بنابراین حجم آن ۱۸ × ۱۸ × ۱۸ یعنی **۵۸۳۲** بار بزرگتر از حجم یك‌گاو معمولی است. چنین گاوی را انسان به شرطی می‌تواند مصرف کند که لااقل دوهزار سال عمر کند!

تصویر صحیح گاو در این مورد باید از جهت طول و عرض $\sqrt{۱۸}$ ، یعنی ۲/۶ برابرگاو معمولی باشد، و چنین تصویری آنقدرها بزرگ نیست که بتواند بیننده را در مورد گوشت مصرفی انسان، به حیرت بیندازد.

مسئله

در شکل ۱۶۷ نمایش دیگری ازاین‌گونه موارد داده شده‌است.



۱۶۷. انسان درجریان زندگی خود چقدر آب می‌خورد؟
(اشتباه نقاش درکجاست؟)

انسان در هرروز به طور متوسط $۱\frac{۱}{۲}$ لیتر(۷-۸لیوان) از نوشیدنی‌های مختلف می‌خورد. در ۷۰ سال زندگی، مقدار آب مصرفی یك نفر

۴۰۰۰۰ لیتر می‌شود . اگردر یك سطل ۱۴ لیتر آب جا بگیرد، نقاش ظرف را به چه اندازه باید رسم کند تا ۳۳۰۰ برابر بیشتر از یك سطل باشد . اواین تصویر را درشکل ۱۶۷ نشان داده است . آیا تصورنقاش درست است ؟

حل

اندازه‌های مخزن شکل، خیلی اغراق آمیز است . عرض‌ظرفی که باید رسم شود، نسبت به یك سطل معمولی باید به اندازهٔ $\sqrt[3]{۳۳۰۰}=۱۴/۹$ ، یعنی تقریباً ۱۵ مرتبه بزرگتر باشد . اگر ارتفاع و پهنای‌سطل معمولی‌را ۳۰ سانتی‌متربگیریم، برای‌اینکه تمام‌آب مصرفی یك عمر انسان را ذخیره کنیم به مخزنی احتیاج داریم که ارتفاع و و پهنای آن ۴/۵ مترباشد . در شکل ۱۶۸ چنین ظرفی را با مقیاس صحیح نشان داده‌ایم .

۱۶۸. تصویر صحیح (شکل ۱۶۷ را ببینید)

نمونه‌هائی که ذکر کردیم، ضمناً نشان می‌دهد که نمایش‌عددهای بزرگ به‌صورت حجم اجسام ، معمولا نمی‌تواند تأثیرلازمی را که انتظار

می‌رود ، داشته باشد و بدون تردید در این گونه موارد نمایش‌های ستونی بر روش‌های دیگر رجحان دارد.

وزن معمولی ما

اگر بدن تمام مردم را متشابه بگیریم (که فقط به طور متوسط درست است)، آنوقت می‌توان وزن افراد را ازروی قد آن‌ها محاسبه کرد . برای این منظور مردی را که ۱/۶۵ متر (به طور متوسط) قد دارد ، ۶۴ کیلوگرم (این مقدار وزن متوسط مرد بین ملت‌های مختلف است) و زنی راکه ۱/۵۵ متر (به طورمتوسط) قد دارد ، ۵۵ کیلوگرم (وزن بدن به طور متوسط برای زن‌های ملت‌های مختلف) ، به حساب می‌آوریم ، نتایجی که ضمن این محاسبه بدست می‌آید ، ممکن است برای بسیاری غیر منتظره باشد .

مثلا به‌بینیم وزن عادی مردی که ۱۰ سانتی متر کوتاه‌تر از حد متوسط است ، چقدر می‌شود .

معمولا این مسئله رااغلب چنین حل می کنند : نسبت ۱۰ سانتی متر را به ۱۶۵ سانتی‌متر بدست می‌آورند و سپس به همین نسبت از وزن معمولی مرد کم می‌کنند ، یعنی از ۶۴ کیلو گرم به اندازهٔ $\frac{۱۰}{۱۶۵} \times ۶۴$ کیلوگرم کم می‌شودو به‌عنوان جواب ۶۱ کیلوگرم بدست می‌آید .

این طریقهٔ محاسبه نادرست است .

وزن صحیح موقعی بدست می‌آید که آن را از تناسب زیر بدست آوریم :

$$۶۴ : x = ۱/۶۵^{۳} : ۱/۵۵^{۳}$$

و از آنجا :

$$x \neq ۵۳ \text{(کیلوگرم)}$$

که اختلاف آن با محاسبهٔ عادی فوق خیلی قابل توجه است : ۸ کیلوگرم :

به همین ترتیب برای وزن مردی که ۱۰ سانتی متر بلندتر از حد متوسط است ، باید تناسب زیر را تشکیل دهیم :

$$۵۴ : x = ۱/۶۵^۳ : ۱/۷۵^۳$$

جواب $x = ۷۶$ کیلوگرم می‌شود ، یعنی ۱۲ کیلوگرم بیشتر از حد متوسط و این افزایش خیلی بیشتر از آنچه که معمولاً گمان می‌رود، می‌باشد .

بدون تردید ، محاسباتی از این قبیل در طب عملی و برای تعیین وزن معمولی ، برای محاسبهٔ میزان دوا و غیره ، اهمیت فوق‌العاده دارد .

غول پیکر و کوتوله

نسبت بین وزن‌های یك آدم غول‌پیکر و یك کوتوله چقدر است ؟ من حدس می‌زنم که برای بسیاری غیرمحتمل به نظر می‌رسد که مثلا غول ۵۰ مرتبه از کوتوله سنگین‌تر باشد . ولی محاسبهٔ هندسی می‌تواند در این مورد نتیجهٔ صحیح را بدست بدهد .

یکی از این غول‌پیکرهای بلندقامت، که وجود او کاملا تصدیق شده است ، وینکل‌مایر اطریشی است که ۲۷۸ سانتی متر قد داشته است ؛ دیگری کرای از اهالی آلزاس بود با ۲۷۵ سانتی‌مترقد؛ وسومی ابریك انگلیسی با ۲۶۸ سانتی‌متر قد و دربارهٔ او حکایت می کنند که چپق خود را با فانوس خیابان روشن می کرد .

همهٔ آن‌ها به اندازهٔ یك متر کامل از آدم معمولی بلندتر بودند. بر عکس کوتوله‌هائی تا قد ۷۵ سانتی متر، یعنی یك متر کم‌تر از قد معمولی دیده شده‌اند، چه نسبتی بین حجم و وزن یکی از این غول‌ها با حجم و وزن کوتوله‌ها وجود دارد؟

این نسبت چنین است:

$$۲۷۵^۳:۷۵^۳=۱۱^۳:۳^۳=۴۹$$

یعنی وزن یکی از این غول‌پیکرها تقریباً ۵۰ برابر وزن کوتوله است.

اگر خبر مربوط به کوتاه‌ترین زن عرب به نام عقیب با قد ۳۸ سانتی‌متر و بلندترین قدها ـ ۳۲۰ سانتی متر صحیح باشد، این نسبت خیلی عجیب‌تر می‌شود؛ بلند قد ترین غول‌ها هشت مرتبه بزرگ‌تر از این کوتوله است و بنابراین ۵۹۳ مرتبه سنگین‌تر خواهد بود. خبر صحیح‌تر مربوط به بوفون است که کوتوله‌ای با قد ۴۳ سانتی متر اندازه گرفته است. این کوتوله ۴۰۵ مرتبه سبك تر از بلند قد ترین آدم‌هاست.

هندسهٔ گولیور

مؤلف «سفرهای گولیور» با احتیاط فوق‌العاده‌ای از درگیر شدن با روابط هندسی پرهیز می‌کند. بدون تردید خواننده متوجه می‌شود که در کشور لی‌لی‌پوت هر فوت آن‌ها معادل یك اینچ ما و برعکس در کشور غول‌ها هر اینچ آن‌ها معادل یك فوت ماست، به عبارت دیگر در لی‌لی‌پوت همهٔ مردم، همهٔ اشیاء و همهٔ محصولات طبیعت ۱۲ مرتبه کوچك‌تر از اندازهٔ طبیعی و در کشور غول‌ها به همین اندازه بزرگ‌تر از اندازهٔ طبیعی هستند. این اولین نسبت مربوط به روابط سادهٔ بین

آن‌هاست ، ولی اگر سئوالاتی از نوع زیر مطرح کنیم ، به روابط بغرنج‌تری برخورد می‌نمائیم .

۱) گولیور چند برابریکی از اهالی لی‌لی‌پوت نهار می‌خورد؟

۲) گولیور برای تهیهٔ لباس خود چند برابر یکی از ساکنین لی‌لی پوت ماهوت لازم دارد ؟

۳) یك سیب از کشور غول‌ها چقدر وزن دارد ؟

مؤلف «سفرهای گولیور» در اکثر موارد با موفقیت از عهدهٔ حل چنین مسائلی برمی‌آید . اوبه‌درستی استدلال می‌کندکه چون قد لی‌لی پوت ۱۲ مرتبه کوتاه‌تر از قد گولیور است ، بنابراین حجم بـدن او ۱۲ × ۱۲ × ۱۲ ، یعنی ۱۷۲۸ مرتبه کمتر از حجم گولیور می‌شود و برای‌سیر کردن‌گولیورباید۱۷۲۸برابرغذای‌یك لی‌لی‌پوت، غذا فراهم کرد . و ما در «سفرها» مطلب زیر در بارهٔ نهارگولیور می‌خوانیم :

« سیصد آشپز برای من غذا تهیه می‌کردند . در اطراف خانهٔ من کلبه‌هائی بود که در آن‌ها آشپزی می‌کردند و آشپزها و خانواده‌های آن‌ها در آن‌جا زندگی می‌کردند . وقتی که ساعت نهار می‌رسید ، ۲۰ نفر پیشخدمت را می‌گرفتم و روی میز می‌گذاشتم و ۱۰۰ نفر دیگردر در پائین بـه خـدمت مشغول می‌شدند ؛ بعضی غـذا می‌آوردند ، بقیـه بشکه‌های کوچك‌شراب‌را ودیگران آشامیدنی‌هارا که روی‌به‌چوب‌هائی آویزان کرده بودند و هر چوب را بر شانهٔ دو نفر تکیه داده بودند . آنهائی که دربالا ایستاده بودند، برحسب احتیاج، همهٔ اینها را باکمك ریسمان و قرقره بالا می‌کشیدند. . .».

سویفت نویسندهٔ کتاب « سفرها » مقدار پارچه‌ای را هم که برای لباس‌گولیورلازم است ، درست حساب کرده است .

سطح بدن گولیور به اندازهٔ ۱۴۴ = ۱۲ × ۱۲ مرتبه بیشتر از سطح بدن یك لی‌لی‌پوت است و بنابراین مقدار پارچه‌ای که برای لباس او لازم است همینقدر برابر بیشتر از یك آدم اهل لی‌لی‌پوت می‌باشد. سویفت از زبان گولیور همهٔ اینها را به حساب می‌آورد « ۳۰۰ خیاط

۱۶۹. خیاطهای لی‌لی‌پوت ، اندازه‌های گولیور را معین می‌کنند .

لی‌لی‌پوت به‌کار گمارده شدند (شکل۱۶۹) تایك دست لباس کامل محلی برای او دوختند » (به خاطر عجله‌ای که در کار داشتند تعداد خیاطها را دو برابر گرفته بودند) .

برای سویفت بسته به احتیاج ، محاسبات مشابهی تقریباً در هر صفحه ، پیش می‌آید و به طور کلی همهٔ آن‌ها را هم به درستی انجام می‌دهد . همان طور که به قول شعر پوشکین در «یه‌وگه‌نین آنه‌گین» : «زمان با تقویم مطابق می‌شود»، در «سفرهای گولیور» سویفت هم همهٔ اندازه‌ها به درستی با هندسه تطبیق می‌کند . تنهاگاهی و به خصوص وقتی که کشور غولها را توصیف می‌کند ، از عهدهٔ مقیاس‌های لازم برنیامده است و به اشتباهاتی برخورد می‌کنیم .

« یکبار (گولیور نقل می‌کند) یکی از شاهزادگان درباری مرا به‌باغ دعوت کرد. وقتی که من گردش کنان زیر یك درخت رسیدم ، او شاخهٔ درخت را گرفت و آن را روی سر من تکان داد . سیب‌هائی که هریك به‌اندازهٔ یك‌بشکه بود، با سروصدای زیاد به‌طرف زمین ریخت یکی از آن‌ها به پشت من خورد و مرا از پا انداخت...».

گولیور بعد از این ضربه با سلامتی روی پا می‌ایستد . ولی به‌سادگی می‌توان حساب کرد که ضربهٔ یك‌چنین سیبی کاملا نابود کننده است:سیب موردبحث ۱۷۲۸ مرتبه‌سنگین‌تر ازسیب‌های معمولی‌است، یعنی ۸۰ کیلوگرم وزن دارد و ضمناً از ارتفاعی که ۱۲ برابر ارتفاع درخت معمولی است فرو افتاده است . انرژی ضربه‌ای که از چنین سیبی به وجود می‌آید ۲۰۰۰۰ برابر انرژی سقوط یك سیب معمولی است و تنها می‌تواند با انرژی‌گلولهٔ توپ مقایسه شود...

سویفت اشتباه بزرگی هم درنیروی عضلانی غول‌ها کرده‌است. در فصل اول دیدیم که قدرت حیوانات بزرگ متناسب با اندازه‌های آنها نیست . اگر مفروضات خیالی سویفت را در بارهٔ غول‌ها قبول کنیم ، نیروی عضلانی آنها ۱۴۴ برابر نیروی‌گولیور می‌شود ، در‌حالی که وزن آنها ۱۷۲۸ برابر وزن‌گولیور است . اگر گولیور دارای

نیروئی باشد که بتواند باری ، که تقریباً مساوی وزن خودش می‌باشد، بلند کند ، اهالی کشور غول‌ها در وضعی هستند که حتی از عهدهٔ حمل وزن عظیم خود هم بر نمی‌آیند . آنها باید در یك جا بدون حرکت دراز بکشند و از هر حرکت جالب توجهی عاجز باشند . قدرتی که سویفت برای آنها مجسم کرده است ، تنها ناشی از یك اشتباه در محاسبه است .

چرا گرد وغبار و ابر درهوا شناورند ؟

«برای اینکه آنها سبك‌تر ازهوا هستند» ، این یك جواب معمولی است که بسیاری به‌طور قطع به‌آن باور دارند و هیچ دلیلی برای‌تردید در آن نمی‌بینند : ولی این توضیح ، با همهٔ سادگی فریبندهٔ خود ، بکلی غلط است . گرد وغبار نه تنهاسبك‌تر از هوا نیستند ، بلکه صدها وحتی هزاران بار سنگین‌تر از آن هستند .

منظور از «گرد و غبار» چیست ؟ قسمت‌های بسیار کوچکی از اجسام سنگین مختلف : ذرات سنگ و شیشه ؛ تکه‌های کوچك زغال، چوب وفلزات؛ الیاف‌پارچه وغیره. آیا همهٔ‌این مواد ازهوا سبك‌ترند؟ اگر به جدول مربوط به‌وزن مخصوص اجسام مراجعه‌کنیم ، به‌سادگی متوجه می‌شویم که هریك از این مواد یا چندین برابر نسبت به آب سنگین‌تر ویا فقط دو ـ سه مرتبه ازآن سبك‌ترند . اماآب ۸۰۰ مرتبه از هوا سنگین‌تر است و بنابراین گرد و غبار (اگر نگوئیم چند هزار مرتبه) لااقل چند صد مرتبه سنگین‌تر از هواست . حالا به خوبی می‌فهمیم که چرا علت ظاهری حرکت گرد و غبار در هوا معقول و منطقی نیست .

پس علت حقیقی این امر چیست ؟ قبل از همه باید متذکر شد

که ما ، وقتی از شنا کردن گرد وغبار صحبت می کنیم ، خود پدیده را به شکل نادرستی طرح می کنیم . فقط اجسامی در هوا (یا آب) شنا می کنندکه وزن آن‌ها از وزن هوا (یا آب) هم حجمشان تجاوز نکند. ولی وزن یك ذرهٔ‌گرد و غبارازوزن هوای هم‌حجمش چندین باربیشتر است و بنابراین نمی‌تواند در هوا شنا کند . گرد و غبار در هوا شنا نمی‌کنند ، بلکه پرواز می‌کنند ، یعنی به آرامی فرود می‌آیند ، ضمن اینکه مقاومت هوا سقوط آنها را کندتر می کند. وقتی که‌گردو غبار در حال سقوط‌اند ، باید از بین ذرات هوا راه خود را باز کنند ، آنها را کنار بزنند و یا با خود همراه بیاورند و به هر حال هر یك از این حالت‌هاانرژی سقوط راکاهش می‌دهد . هرچه سطح جسم (یا دقیق‌تر سطح مقطع آن)نسبت به‌وزن‌آن بیشتر باشد ، این‌کاهش‌بیشترمی‌شود. وقتی‌که اجسام‌بزرگ وسنگین‌سقوط‌می کنند ، عمل کند کنندهٔ مقاومت هوا برای ما محسوس نیست ، زیرا وزن آنها خیلی بیشتر از نیروی مقاومت هو است .

به‌بینیم وقتی که جسم کوچك می‌شود ، چه پیش می آید. هندسه می‌تواند در این مورد به ماکمك‌کند . به سادگی فهمیده می‌شود که با کاهش حجم ، وزن جسم نسبت به‌سطح مقطع آن خیلی سریع‌ترکاهش پیدا می کند :کاهش وزن متناسب با توان سوم اندازه‌های خطی است، درحالی که‌کاهش مقاومت متناسب با سطح ، یعنی توان دوم اندازه‌های خطی است .

اینکه این مطلب از لحاظ بحث ما تا چه اندازه اهمیت دارد ، بامثال زیرروشن می‌شود. دو کره درنظر می‌گیریم که‌از یك جنس‌یکی به‌قطر ۱۰ سانتیمتر و دیگری به قطر ۱ میلی‌متر باشد. نسبت اندازه‌های خطی این دو کره مساوی ۱۰۰ است ، زیرا ۱۰ سانتی‌متر ۱۰۰ مرتبه

ازیك میلی‌متر بزرگتر است . کرهٔ کوچك 100^3 مرتبه یعنی یك‌ملیون مرتبه از کرهٔ بزرگ سبك‌تر است ، ولی مقاومتی که در مقابل حرکت او از طرف هوا به‌وجود می‌آید فقط 100^2 مرتبه (یعنی ده هزارمرتبه) نسبت به کرهٔ بزرگ کاهش می‌یابد . واضح است که کرهٔ کوچك باید آهسته‌تر از کرهٔ بزرگ سقوط کند . به‌طور خلاصه علت این‌که ذرات گرد وغبار خود را درهوا حفظ می کنند ، به‌مناسبت اندازه‌های کوچك آنهاست و مطلقاً به سبکتر بودن آنها ازهوا مربوط نیست . یك قطرهٔ آب به‌شعاع ۰٫۰۰۱ میلی‌متر با سرعت ۰٫۱ میلی‌متر در ثانیه در هوا سقوط‌می کندو کافی است که درهوا جریان‌ضعیفی ، که برای مامحسوس نیست به‌وجود آید تا این سقوط آرام را ازبین ببرد .

به‌همین علت است که درجائی که رفت و آمد زیاداست ، نسبت به نقاط غیرمسکونی‌گرد وخاك کمتر روی اشیاء می‌نشیند ، همچنین‌در روز کمتر ازشب (اگرچه‌به نظر می‌رسد که‌بایدعکس آن باشد) : رفت وآمد در هوا ، جریان گرد بادی به وجود می‌آورد ، در حالی که در هوای آرام و اطاق‌های غیر مسکونی تقریباً چنین حالتی‌وجودندارد.

اگر سنگ مکعب شکل به ضلع یك سانتی متر را به صورت ذرات مکعب شکلی بـه ضلـع ۰٫۰۰۰۱ سانتی‌متر در آوریم ، سطح کلی مجموعهٔ‌گردها ۱۰۰۰۰ برابرسطح سنگ اصلی می‌شودوبنابراین مقاومت هوا در مقابل حرکت آن‌ها هم ده هزار برابر خواهد شد . ذرات گرد وغبار هم اکثر به همین اندازه‌اند و بنابراین بـا افزایش مقاومت هوا ، نمود سقوط به‌کلی تغییرمی کند.

ابرهم به همین علت در هوا «شنا می کند». مدت‌هاست که این نظریهٔ به ظاهر صحیح را رد کرده‌اند که‌گویا ابرعبارتست ازحباب‌های آبی که از بخارآب پرشده‌اند . ابرعبارتست از تجمع مجموعهٔ‌بزرگی

از قطرات بسیار ریز ومتصل آب . اگر چه این قطره‌های آب ۸۰۰بار از هوا سنگین‌ترند ، تقریباً سقوط نمی‌کنند ، یعنی با سرعتی به‌طرف پائین می‌آیند که تقریباً محسوس نیست . علت این وضع همان چیزی است که در مورد گرد و غبار گفتیم ، یعنی بزرگی سطح آنها نسبت به وزنشان .

ضعیف‌ترین حرکتی که هوا به طرف بالا داشته باشد ، نه تنها قادر است که سقوط ابررا متوقف کند و آنرا در سطح معینی نگه دارد، بلکه حتی آنرا به‌طرف بالا می‌برد.

علت اصلی و وجودی این پدیده ، وجود هواست ؛ در خلاءِ هم گرد وغبار وهم ابر(اگر بتوانند وجود داشته باشند) به همان‌سرعت سنگ‌های بزرگ سقوط می‌کنند .

احتیاجی به ذکر این مطلب نیست که فرودآمدن آرام انسان با چتر (قریب ۵ متر درثانیه) هم پدیده‌ای کاملا متشابه پدیدۀ مورد بحث ما است .

۱۲

اقتصاد هندسی

چگونه « پاخوم » زمین خرید ؟

(مسئلهٔ تولستوی)

این فصل را با داستان مشهور ل. ن. تولستوی به نام « آیا مردم به زمین زیادی نیاز دارند؟» شروع می کنیم .

***

« پاخوم گفت ـ پس قیمتش چقدر است؟

« ـ قیمت‌های ما ثابت است : ۱۰۰۰ روبل برای هرروز.

« پاخوم نفهمید.

«ــ این چه جور مقیاسی است ــ روز ؟ مساوی چند دسیاتین* است ؟

«ــما نمی‌توانیم آن‌را حساب کنیم . هرچقدر که در یك روزراه بروی،همان مقدارزمین‌رابه‌قیمت ۱۰۰۰ روبل‌به شما واگذار می کنیم.

« پاخوم به حیرت فرورفت.

« ــ ولی آخر در روز از زمین زیادی می‌توان عبور کرد .

« پیرمرد خنده را سرداد .

« همهٔ آنها مال تست ، فقط نکته‌ای وجود دارد : اگرنتوانی در روز به همان جای اولیهٔ خود برگردی ، پولت از بین می‌رود .

« پاخوم گفت : بنابراین باید توجه کنید که من از کجا عبور می کنم .

« ــ ما هرجا که تو انتخاب کنی می‌ایستیم، تو شروع به دورزدن می کنی ، بیلچه‌ای با خود برمیداری و هرجا که لازم بدانی چاله‌ای می کنی‌وعلف‌ها راکنار میزنی؛بعداً فاصلهٔ بین چاله‌ها را شخم خواهیم زد . به هرطریقی که مایلی دور بزن ، فقط باید موقع غروب آفتاب در نقطهٔ شروع حرکت خود باشی . تمام زمینی را که دور زده‌ای متعلق به توخواهد بود .

«باشقیرها متفرق شدند . قرار گذاشتند فردا صبح زود جمع شوند و منتظر طلوع آفتاب بمانند» .

***

«در علفزار جمع شدند ، سپیده دم شروع می‌شد . پیر مرد به پاخوم نزدیك شد وهمان طور که با دست نشان می‌داد ، گفت :

« ــ اینها همه مال ماست ، تا آنجائی که چشمت کار می کند.

---

*) دسیاتین : مقیاس‌سطح در روسیهٔ قدیم برابر ۱۰۹ هکتار.

هر قدر می‌خواهی انتخاب کن .

« پیر مرد کلاه از سر برداشت ، روی زمین گذاشت و گفت :

« ـ اینهم علامت . ازاینجا حرکت کن و به همین جا هم برگرد هرچقدر از زمین را که دور بزنی مال توخواهد بود .

« همینکه خورشید از پشت کوه سر برآورد ، پاخوم بیلچه را برداشت وبه‌طرف دشت به راه افتاد .

« بعد از آنکه یك ورست رفت ، چاله‌ای کند . باز به حرکت خود ادامه داد و در سرراه خود چالهٔ دیگری کند .

« ۵ ورست رفت . به خورشید نگاه کرد ، دیگر موقع صبحانه بود... پاخوم پیش خود فکر کرد: پنج ورست دیگر می‌روم ، آنوقت به طرف چپ می‌پیچم . باز هم به‌طور مستقیم حرکت کرد و سپس فکر کرد : خوب دیگربرای این ضلع کافی است، باید جهت را عوض کنم . چالهٔ بزرگی حفر کرد و به طرف چپ پیچید .

« پاخوم روی این ضلع هم مقدار زیادی پیش رفت ؛ بعد زاویهٔ دوم را ساخت و به‌طرف‌چپ پیچید. پاخوم به طرف‌جائی که با شقیرها بودند، نگاه کرد . آفتاب بر آن می‌تابید ومردم روی آن دیده می‌شدند. پیش خود فکر کرد : اضلاع را بزرگ گرفته‌ام ، باید این ضلع را کوچکتر بگیرم. روی ضلع سوم پیش رفت . به خورشید نگاه کرد ، دیگردرحال‌پائین‌رفتن‌بود . برای ضلع سوم تنها ۲ورست‌انتخاب کرد. تاجای اولش ۱۵ ورست راه بود. فکر کرد که باید به‌طور مستقیم خود را برساند .

« پاخوم به‌سرعت چاله‌ای کند و مستقیماً به طرف‌تپه به راه‌افتاد.

« پاخوم‌راست به‌طرف تپه می‌رفت ، ولی به سختی می‌توانست راه را ادامه دهد . احتیاج زیادی به استراحت داشت، ولی ممکن‌نبود،

زیرا به موقع و تا غروب آفتاب به مقصد نمی‌رسید . خورشید دیگر با افق فاصلهٔ زیادی نداشت .

« پاخوم به زحمت راه می‌رفت ، ولی بهرحال قدم به قدم جلو می‌رفت . هنوز راه نسبتاً زیادی بود ، بازهم عجله کرد ...

« پاخوم می‌دوید ، عرق از سر ورویش می‌ریخت، پیراهن به بدنش‌چسبیده بود، دهنش خشك شده‌بود، نفس‌او مثل کورهٔ آهنگری بود و قلبش مثل ضربهٔ چکش صدا می کرد .

۱۷۵. پاخوم با آخرین نیروی خود می‌دوید و خورشید درحال غروب کردن بود.

« پاخوم با آخرین نیروی خود می‌دوید ، خورشید هم در حال غروب بود . آهان دیگر خورشید غروب کرد (شکل ۱۷۰) .

خورشید به‌افق رسیده بود ، ولی‌جای اولیه هم خیلی دور نبود: کلاهی که روی زمین بود و خود پیرمردی که روی زمین نشسته بود ، به‌خوبی دیده می‌شد .

« پاخوم به خورشید نگاه کرد ، حتی قسمتی از آن به زمین فرو رفته بود . پا خوم آخرین نیروی خود را به‌کار برد . نفس عمیقی کشید و به‌طرف تپه شروع به دویدن کرد. آهان ، اینهم کلاه . خودرا به جلو انداخت و با دست‌هایش کلاه راگرفت .

« پیرمرد فریاد زد : آه جوان ! زمین زیادی بدست آوردی.

«کارگرها جلو رفتند و خواستند او را از زمین بلند کنند ، ولی دیدند که خون از دهان پاخوم می‌ریزد . پاخوم مرده بود...»

مسئلهٔ تولستوی

ازجنبهٔ ملالت‌آورپایان‌این داستان می‌گذریم‌وبه جنبهٔ هندسی آن می‌پردازیم . آیا با معلوماتی که در این داستان داده شده ، می‌توان فهمید که چند دسیاتین زمین به پاخوم رسیده است ؟ درنظر اول ممکن است مسئله غیرقابل حل جلوه کند ، ولی می‌توان با سادگی‌تمام آن را حل کرد .

حل

اگریکبار دیگر وبا دقت داستان را مطالعه‌کنیم وتمام اطلاعات هندسی که در آن وجود دارد ، جداکنیم وروی‌کاغذ بیاوریم ، می‌بینیم

که مفروضات برای حل کامل مسئله کافی هستند . حتی می‌توان شکل زمینی را که پاخوم تصاحب کرده است ، رسم کرد .

قبل ازهمه معلوم می‌شود که پاخوم روی محیط یك چهارضلعی حرکت کرده است . برای ضلع اول این چهارضلعی می‌خوانیم :

«پنج ورست رفت ... پنج ورست دیگر هم رفت ، آنوقت به به طرف چپ پیچید...» .

یعنی اولین ضلع این‌چهارضلعی تقریباً مساوی ۱۰ ورست‌است.

برای ضلع دوم، که با ضلع اول‌تشکیل یك‌زاویهٔ قائمه می‌دهد، اطلاعی در داستان وجود ندارد .

طول ضلع سوم ، که به نوبهٔ خود برضلع دوم عمود است ، در داستان مستقیماً معین شده است: «روی ضلع سوم فقط دو ورست پیش رفت » .

طول ضلع چهارم هم مستقیماً داده شده است : « تـا جای اولیه تنها ۱۵ ورست باقی مانده بود» * .

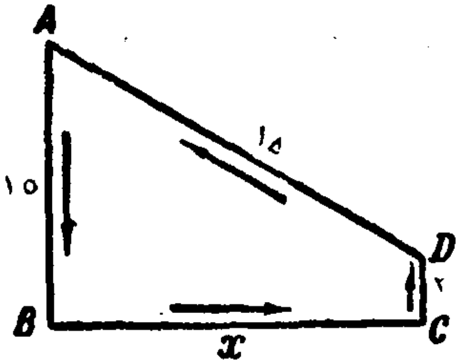
با این مفروضات ، می‌توان شکل قطعه زمین متعلق به پاخوم را رسم کرد (شکل ۱۷۱) . در چهار ضلعی ABCD ، که به این ترتیب بدست می‌آید، ضلع AB مساوی ۱۰ ورست ، CD مساوی ۲ورست و AD مساوی ۱۵ ورست است . ضمناً زوایای B و C هم قائمه‌اند ، اگر ازنقطهٔ D ، عمود DE را برAB فرودآوریم ، به سادگی می‌توان طول مجهول BC را بدست آورد (شکل ۱۷۲). در مثلث قائم‌الزاویهٔ AED ، طول وتر AD = ۱۵ وضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ AE = ۸ معلوم است . از آنجا خواهیم داشت :

$$\mathrm{ED}=\sqrt{۱۵^۲-۸^۲}=\sqrt{۱۶۱}\approx ۱۳$$

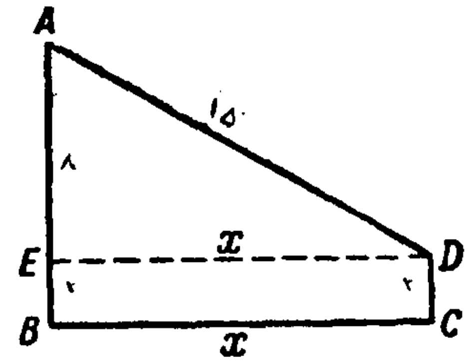
*) ولی در اینجا این مطلب نامفهوم است که چگونه پاخوم توانست ، ازچنین فاصله‌ای ، افراد را روی تپه تشخیص بدهد .

بنابراین ضلع دوم چهارضلعی تقریباً مساوی ۱۳ ورست است.

همان طور که دیده می‌شود ، می‌توان شکل مسیر پاخوم را رسم کرد وبدون تردید، وقتی که تولستوی داستان خود را می‌نوشته است، طرحی شبیه شکل۱۷۱ جلو خود داشته است .



۱۷۱. مسیر پاخوم



۱۷۲. محاسبهٔ ضلع مجهول

حالا به سهولت می‌توان مساحت ذوزنقهٔ ABCD را ، که از مستطیل EBCD ومثلث قائم‌الزاویهٔ AED تشکیل شده است،محاسبه کرد . این مساحت چنین است :

$$۲ \times ۱۳ + \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۳ = ۷۸ \quad \text{(ورست مربع)}$$

البته اگر طبق رابطهٔ مساحت ذوزنقه هم عمل می‌کردیم، به‌همین نتیجه می‌رسیدیم :

$$\frac{AB+CD}{۲} \times BC = \frac{۱۰+۲}{۲} \times ۱۳ = ۷۸ \quad \text{(ورست مربع)}$$

پاخوم‌قطعه زمین وسیعی به مساحت ۷۸ ورست مربع ویا تقریباً ۸۰۰۰ دسیاتین در اختیار داشت . برای او هر دسیاتین به مبلغ $۱۲\frac{۱}{۲}$ کوپك تمام شده بود .

ذوزنقه یا مستطیل

مسئله

پاخوم در مرگبارترین روز زندگی خود ۱۵+۲+۱۳+۱۰ یعنی ۴۰ ورست راه را در طول محیط ذوزنقه طی کرد. او درشروع حرکت خود می‌خواست روی محیط یك مستطیل حرکت کند و به‌این مناسبت روی محیط ذوزنقه حرکت کرد که درمحاسبه اشتباه کرده بود. توجه به این مطلب جالب است که آیا به نفع پاخوم بود که به جای مستطیل، روی محیط یك ذوزنقه حرکت‌می‌کرد، یا به ضرر او ؟ درچه حالتی صاحب زمینی با مساحت حداکثر می‌شد ؟

حل

مستطیل با محیط ۴۰ ورست را به انواع مختلف می‌توان‌ساخت و درهر مورد مساحت دیگری بدست می‌آید. در اینجا مساحت بعضی ازاین مستطیل‌ها را معین می‌کنیم :

۱۴×۶=۸۴ ورست مربع

۱۳×۷=۹۱ »

۱۲×۸=۹۶ »

۱۱×۹=۹۹ »

می‌بینیم که در تمام این نمونه‌ها ، مساحت حاصل از محیط ۴۰ ورست ، بیش از مورد ذوزنقه بدست می‌آید . ولی می‌توان با محیط

۴۰ ورست ، مستطیلهائی ساخت که مساحت آن‌ها از مساحت ذوزنقه کمتر باشد:

$$۱۸ \times ۲ = ۳۶ \text{ ورست مربع}$$

$$۱۹ \times ۱ = ۱۹ \quad \text{»}$$

$$۱۹\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = ۹\frac{۳}{۴} \quad \text{»}$$

بنابراین به این سئوال مسئله ، نمی‌توان جواب معینی داد . با محیط مساوی محیط ذوزنقه ، مستطیل‌هائی وجود دارد که سطح بیشتر نسبت به ذوزنقه دارند ، مستطیل‌هائی هم هست که سطحشان کمتر است با وجود این می‌توان جواب کاملا مشخصی به این سئوال داد : در بین همهٔ مستطیل‌هائی که محیط مساوی دارند، سطح کدام یك از همه بیشتر است؟ با مقایسهٔ مستطیل‌هائی که به عنوان نمونه ذکر کردیم ، متوجه می‌شویم که هرچه اختلاف طول و عرض مستطیل کمتر باشد ، مساحت آن بیشتر است . بنابراین اگر طول و عرض مستطیل اختلافی نداشته باشند ، یعنی مستطیل به مربع تبدیل شود . سطح آن حداکثر مقدار ممکن خواهد بود . در این‌صورت مساحت آن مساوی ۱۰ × ۱۰ یعنی ۱۰۰ ورست مربع خواهد شد . به سادگی دیده می‌شود که مساحت این مربع از مساحت هر مستطیلی به محیط ۴۰ ورست بیشتر است . اگر پاخوم روی محیط چنین مربعی حرکت می‌کرد ، با همان مقدار راه می‌توانست ۲۲ ورست مربع بیشتر زمین بدست آورد .

خاصیت قابل توجه مربع

این‌خاصیت جالب‌مربع ، که درمقایسه‌با مستطیل‌هائی که‌محیطی مساوی محیط آن دارند ، سطح بیشتری دارد ؛ برای بسیاری روشن

نیست . به‌همین مناسبت این حکم را دقیقاً اثبات می کنیم .

محیط شکل مستطیل شکلی‌را p می‌گیریم . اگر مربعی با همین محیط را درنظر بگیریم ، طول هرضلع آن مساوی $\frac{p}{4}$ می‌شود. ثابت می کنیم که اگر یك ضلع این مربع را به اندازهٔ b کوچك و ضلع دیگرش را به‌همین اندازه بزرگ کنیم، یعنی مستطیلی به محیط مساوی محیط مربع بدست آوریم ، سطحی کوچکتر از سطح مربع خواهد داشت . به‌عبارت دیگر ثابت می کنیم که $\left(\frac{p}{4}\right)^2$ ، یعنی سطح مربع ، بزرگتر است از $\left(\frac{p}{4}-b\right)\left(\frac{p}{4}+b\right)$ سطح مستطیل . به‌این ترتیب باید صحت نامساویِ زیر را ثابت‌کنیم :

$$\left(\frac{p}{4}\right)^2>\left(\frac{p}{4}-b\right)\left(\frac{p}{4}+b\right)$$

سمت راست نامساوی $\left(\frac{p}{4}\right)^2-b^2$ است و بنابراین نامساوی فوق به صورت زیر در می آید :

$$0>-b^2 \Longrightarrow b^2>0$$

و نامساوی اخیر هم‌واضح‌است : مجذور هر عدد مثبت یا منفی‌بزرگتر از صفراست . بنابراین نامساوی اصلی هم که به نامساوی اخیر منجر شد ، صحیح است .

به این ترتیب بین مستطیل‌های با محیط مساوی ، حداکثرسطح متعلق به مربع است .

از اینجا ضمناً این‌نتیجه هم بدست می آید که‌ازبین مستطیل‌های با مساحت مساوی، مربع حداقل محیط را دارد . در این مورد به‌طریق

زیر می‌توان استدلال کرد. فرض می کنیم که این‌حکم صحیح نباشد و مستطیل A ، درحالی که سطحی مساوی سطح مربع B دارد ، محیطی کوچکتر از محیط مربع داشته باشد. مربع C را چنان رسم می کنیم که محیطش مساوی محیط مستطیل A باشد ، در این صورت سطح این مربع ازسطح مستطیل A وبنابراین ازسطح مربع B بیشترخواهد بود. به‌چه نتیجه‌ای رسیدیم؟ مربع C محیطی کمتر از مربع B دارد، در حالی که سطح آن از سطح مربع B بیشتر است. و واضح است که این ممکن نیست : چون ضلع مربع C کوچکتر از ضلع مربع B است ، باید مساحتش هم کوچکتر باشد. بنابراین نمی‌تواند مستطیل A هم‌سطح با مربع Bوجود داشته باشد، بطوری که‌محیطش ازمحیط مربع کوچکتر باشد. به عبارت دیگر بین مستطیل‌هائی که سطح مساوی دارند ، محیط مربع ازهمه کمتر است.

اگر پاخوم از این خاصیت مربع اطلاع داشت ، می‌توانست با محاسبهٔ صحیح نیروی خود ، قطعه زمین مستطیل شکلی با حداکثر مساحت را بدست آورد. اگرفرض کنیم که او می‌توانست ، بدون این که فشار زیادی به خودش وارد کند ، روزی ۳۶ ورست راه برود ، روی مربعی به ضلع ۹ ورست حرکت می کرد ؛ در این صورت قطعه زمینی به مساحت ۸۱ ورست مربع بدست می‌آورد ، یعنی ۳ ورست مربع بیشتر از قطعه زمینی که جان خود را برسر آن‌گذاشت. برعکس اگر او تصور می کرد که مثلا قطعه زمینی به مساحت ۳۶ ورست مربع برایش کافی است، می‌توانست بدون اینکه انرژی زیادی مصرف کند، روی محیط مربع به ضلع ۶ ورست حرکت کند.

قطعه زمین به شکل دیگر

ولی ، شاید برای پاخوم با صرفه‌تر بود ، اگر قطعه زمین را به شکل مستطیل درنظر نمی‌گرفت ، بلکه آن را به شکل دیگر ، مثلاچهار ضلعی ، مثلث ، پنج ضلعی وغیره انتخاب می کرد .

این سئوال را می‌توان با دقت ریاضی مورد مطالعه قرار داد ؛ ولی شرح آن خوانندهٔ ما را خسته می کند و به همین مناسبت ازبررسی دقیق آن می‌گذریم و تنها نتیجه را ذکر می کنیم :

اولا می‌توان ثابت کرد که از بین همهٔ چهار ضلعی‌های به محیط ثابت، سطح مربع ازهمه بیشتر است. بنابراین اگرپاخوم می‌خواست زمینی به شکل چهارضلعی داشته باشد ، به هیچ ترتیبی سطحی بیشتر از ۱۰۰ ورست مربع بدست‌نمی‌آورد (حداکثرقدرت او را ۴۰ورست در روز به حساب آورده‌ایم) .

ثانیاً می‌توان‌ثابت کرد که سطح‌مربع‌ازسطح هرمثلثی که محیطی برابر محیط مربع داشته باشد ، بیشتر است . مثلث متساوی‌الاضلاعی که همین محیط را داشته باشد ، به ضلع $۱۳\frac{۱}{۳}=\frac{۴۰}{۳}$ ورست خواهد بود و بنابراین سطح آن (طبق رابطهٔ $S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ ، S را مساحت و a را ضلع مثلث‌گرفتیم) چنین می‌شود :

$$\frac{۱}{۴}\left(\frac{۴۰}{۳}\right)^۲\sqrt{۳}=۷۷ \text{ (ورست مربع)}$$

یعنی حتی کمتر از مساحت ذوزنقه‌ای که پاخوم روی محیط آن حرکت‌کرده است، سپس می‌توان ثابت‌کرد (وما این مطلب را بعداً

ثابت خواهیم کرد) که از بین مثلث‌های با محیط ثابت ، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از همه بیشتر است. بنابراین ، وقتی که این بزرگترین مثلث‌ها ، سطحی کمتر از سطح مربع دارد ، سطح هر مثلث دیگری هم که با همین محیط باشد ، ازسطح مربع کوچکتر است .

ولی اگرسطح مربع را با سطح پنج ضلعی ، شش ضلعی‌وغیره که با همان محیط باشند ، مقایسه کنیم ، دیگر حق تقدم مربع از بین می‌رود : پنج ضلعی منتظم سطح بیشتری پیدا می کند،شش ضلعی‌منتظم بازهم بیشتر و غیره . مثلا درمورد شش‌ضلعی منتظم می‌توان به‌سادگی آزمایش کرد . وقتی کــه محیط شش ضلعی۴۰ ورست باشد ، ضلع آن $\frac{۴۰}{۶}$ ورست و مساحت آن (طبق رابطهٔ $S = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$) چنین می‌شود :

$$\frac{۳}{۲}\left(\frac{۴۰}{۶}\right)^۲\sqrt{۳} = ۱۱۵ \text{ (ورست مربع) }$$

اگر پاخوم برای قطعه زمین انتخابی خود ، شکل شش ضلعی‌را درنظرمی‌گرفت، به‌اندازهٔ ۸۷ — ۱۱۵ یعنی **۳۷**ورست مربع زمین‌بیشتر بدست می‌آورد که در حقیقت از شکل مربعی آنهم ۱۵ ورست مربع بیشتر است (البته برای چنین مسیری ، می‌بایست با وسیلهٔ زاویه‌یاب مجهز باشد).

مسئله

با کمك شش چوب کبریت شکلی با مساحت ماکزیمم درست کنید .

حل

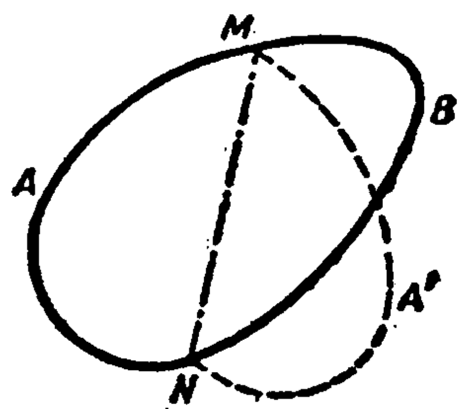
با شش چوب کبریت می‌توان انواع مختلف شکل‌ها را درست

کرد : مثلث متساوی‌الاضلاع ، مستطیل، انواع متوازی‌الاضلاع، انواع پنج‌ضلعی‌هـای نامنظم ، انواع شش‌ضلعی‌های نامنظم و بالاخره شش ضلعی منتظم . کسی که هندسه می‌داند ، از قبل و بدون اینکه به مقایسهٔ مساحت این اشکال بپردازد ، می‌داندکه سطح کدامیك از آنها از همه بیشتر است: شش‌ضلعی منتظم.

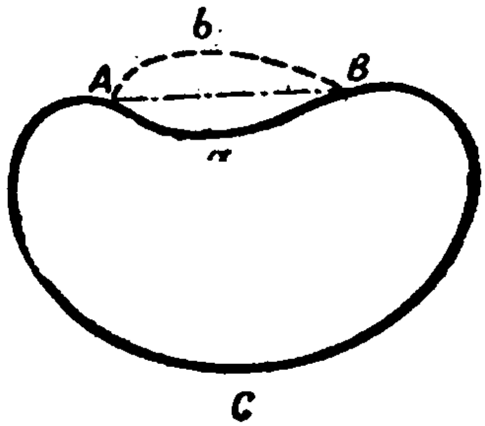
اشکال به‌مساحت حداکثر

می‌توان با دقت هندسی‌ثابت کرد که اگرمحیط را ثابت بگیریم، هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی منتظم بیشتر باشد ، مساحت آن بیشتر است . و بنابراین حداکثرمساحت ، برای محیط ثابت ، متعلق به‌دایره است. اگر پاخوم همین ۴۰ ورست را روی محیط یك دایره می‌دوید ، صاحب قطعه زمینی می‌شد که مساحت آن چنین است :

$$\pi \left(\frac{۴۰}{۲\pi}\right)^{۲} = ۱۲۷ \quad \text{(ورست مربع)}$$



۱۷۴. اگـر وتری محیط شکل محدب‌بامساحت ماکزیمم‌را به دو قسمت‌مساوی تقسیم‌کند ، مساحت آن‌راهم‌به دوقسمت مساوی تقسیم خواهد کرد .



۱۷۳. ثابت می‌کنیم که شکل با حد اکثر مساحت ، بـاید محدب باشد.

و مساحت بیشتر از این مقدار ، برای شکلی که محیطی مساوی ۴۰ ورست داشته باشد ، درهیچ حالتی بدست نمی‌آید ، خواه این‌شکل مستقیم‌الخط باشد یا منحنی‌الخط .

دربارهٔ این خاصیت عجیب دایره کمی بیشتر صحبت می کنیم : دایره ازهرشکل دیگری که همان محیط راداشته باشد، مساحت بیشتری را در خود جا می‌دهد . ممکن است بعضی ازخوانندگان مایل باشند ، روش استدلال این‌گونه احکام را بدانند . ما اثبات این حکم را (که صحیح است اما کاملا دقیق نیست) که متعلق به ژاکوب‌شتینر است، ذکر می کنیم . این استدلال خیلی طولانی است ، ولی می‌توان از قسمت‌های خسته کنندهٔ آن صرفنظر کرد، بدون اینکه به فهم قسمت های بعدی لطمه‌ای بزند .

باید ثابت کرد که ازبین‌اشکال مختلف با محیط مساوی، سطح دایره ازهمه بیشتراست . قبل‌از همه ثابت می کنیم که شکل مورد نظر باید محدب باشد . این به معنای آنست که هر وتر آن بایدکاملا درداخل شکل قرار گرفته باشد شکل AaBC (شکل۱۷۳) در نظر بگیرید ، که دارای وتر خــارجی AB می‌باشد . قرینهٔ قوس a را نسبت وتر AB پیدا می کنیم، قوس b بدست‌می آید. با این‌تغییر،محیط شکل A B C تغییر نمی کند ، در حالی که واضح است که مساحت آن زیاد می‌شود . بنابراین شکلی از نوعAaBC نمی‌تواندشکلی باشد که‌با محیط ثابت، مساحت حداکثر را شامل شود .

به‌این ترتیب شکل مورد نظر حتماً محدب است . حالا می‌توانیم خاصیت دیگری ازاین‌شکل‌را ثابت کنیم: هروتری که محیط آن‌را به‌دو قسمت مساوی تقسیم کند، مساحت آن را هم به دوقسمت مساوی تقسیم خواهد کرد. فرض کنیدAMBN(شکل۱۷۴)،شکل‌موردنظر باشدو وتر

MN آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده باشد . ثابت می کنیم که مساحت AMN مساوی مساحت MBN است . اگریکی از این دو قسمت مساحتی بیشتر از دیگری داشته باشد و مثلا $AMN > MNB$ باشد ، می‌توان قرینهٔ شکل AMN را نسبت بـه MN بدست آورد ، دراین‌صووت شکل AMA´N بدست مـی‌آیدکـه سطح آن از سطح شکل اولیه AMBN بیشتر است ، درحالی که محیط آنها با هم برابر است . یعنی ، شکل AMBN که درآن یکی از وترها ، محیط را به دو قسمت مساوی و مساحت را به دو قسمت نامساوی تقسیم می کند ، نمی‌تواند شکل موردنظر باشد (یعنی نمی‌تواند حداکثرمساحت را به ازاءِ محیط مفروض داشته باشد) .

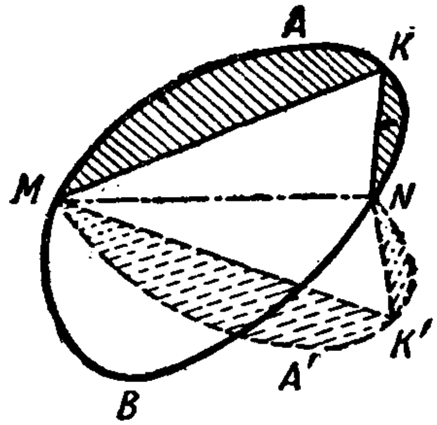
قبل از اینکه ادامه بدهیم ، قضیهٔ کمکی زیررا هم ثابت می ـ کنیم : از بین مثلث‌هائی که دوضلع ثابت دارند ، مساحت مثلثی حد اکثر است که درآن زاویهٔ بین این دوضلع قائمه باشد . برای اینکه‌این قضیه را ثابت کنیم ، از بیان مثلثاتی مساحت مثلث بر حسب اضلاع a و b و زاویهٔ C استفاده می کنیم :

$$S = \frac{1}{2} a\ b\ \sin C$$

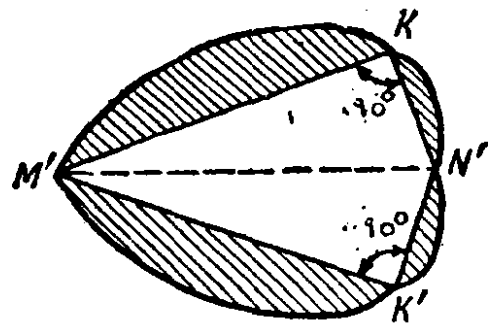
و واضح است کـه این عبارت وقتی به حد اکثر خود می‌رسد (با مفروض بودن اضلاع a و b) که درآن $\sin C$ حد اکثرمقدارخود ، یعنی واحد ، را اختیار کند . ولی زاویه‌ای که سینوس آن برابر واحد باشد ، زاویهٔ قائمه است و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

حالا می‌توانیم به مسئلهٔ اصلی بپردازیم و ثابت کنیم که از بین همهٔ اشکال با محیط ثابت ، مساحت دایره حداکثر مقدارممکن است.

برای این منظور ابتدا فرض می کنیم شکل محدب MANBM، کـه دایره نیست ، دارای این خاصیت باشد (شکل ۱۷۵). وتر M N را چنان رسم می کنیم که محیط آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کند وما می‌دانیم که در این‌صورت مساحت شکل هم به دو قسمت مساوی تقسیم خواهدشد. قرینهٔ نیمهٔ MKN را نسبت به خط MN بدست‌می آوریم . (MK´N)



۱۷۵ . فرض می کنیم کـه شکل محـدبی غیر از دایـره دارای مساحت حداکثر باشد



۱۷۶. ثابت می کنیم که بین همهٔ اشکال با محیط مساوی، مساحت حد اکثر متعلق به دایره است .

شکل MNK´M دارای محیط و مسـاحتی مسـاوی محیط و مساحت شکل اولیهٔ MKNM می‌باشد . چون قوس MKN نیم‌دایره نیست (زیرا دراین‌صورت چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند) ، روی آن می‌توان نقطه‌ای چنان پیداکرد که از آنجا پاره خط MN با زاویهٔ قائمه دیده نشود . این نقطه را K و قرینهٔ آن را K´ فرض می کنیم ، یعنی‌زوایای K و K´ قائمه نیستند. اگر اضلاع MK، KN، MK´، NK´ را باز کنیم ، می‌توانیم ترتیبی‌بدهیم که زوایای بین آنها ۹۰ درجه بشود و به این ترتیب دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی بدست‌آوردیم . وترهای

این دو مثلث را مثل شکل ۱۷۶ روی هم قرارمی‌دهیم و قطعات هاشور خوردهٔ شکل اصلی را در مجـاور اضلاع آنهـا می‌گذاریم ، شکل M´KN´K´M´ بدست می‌آید کـه محیطی مساوی شکل اصلی دارد ولی مساحتی بیشتر از آن (زیرا مثلث هـای قائم‌الـزاویهٔ M´KN´ و M´K´N´ مساحت‌هائی بیشتر از مثلث های غیرقائم‌الزاویهٔ MKN و MK´N دارند) . بنابراین یك شکل‌غیردایره نمی‌تواند با محیط ثابت، دارای مساحت حداکثر باشد . و تنها درمورد دایره است که نمی‌توان شکل دیگری به‌دست آورد که مساحت بیشتر داشته باشد .

این‌بود استدلال‌مربوط به‌این قضیه‌که بین اشکال با محیط ثابت، مساحت دایره حداکثر مقدار ممکن است .

به سادگی می‌توان صحت این مطلب را هم ثابت‌کردکه از بین اشکال با مساحت ثابت ، محیط دایره از همه‌کمتر است . برای این منظور می‌توان شبیه‌آنچه‌که قبلا درمورد مربع استدلال‌کردیم ، انجام داد .

میخ

مسئله

کـدام میخ مشکل‌تر بیرون کشیده می‌شود ؛ گرد ، مربعی یـا مثلثی ؟ به شرطی‌که همه به یك اندازه فرو رفته باشند و سطح مقطع عرضی آن‌ها هم برابر باشد .

حل

از اینجاشروع‌می کنیم که میخی محکم‌ترخواهدبود که به‌مصالح

اطراف باسطح بیشتری تماس‌داشته باشد. کدام یك ازاین میخ‌ها سطح جانبی بیشتری دارند؟ ما دیگر می‌دانیم که اگر مساحتها برابر باشند، محیط مربع کمتر از محیط مثلث و محیط دایره کمتر از محیط مربع است، اگر ضلع مربع را واحد فرض کنیم، محاسبه برای هریك از این سه مقدارعددهای ۴/۵۳ ، ۴ و ۳/۵۵ را بدست می‌دهد. بنابراین میخ مثلثی باید محکم‌تر از دیگران باشد.

ولی اینگونه میخها را تهیه نمی‌کنند و یا لااقل موقع خرید به آنها برخورد نمی‌کنیم. شاید علت این امر آن باشد که اینگونه میخ‌ها به سادگی خم می‌شوند و می‌شکنند.

جسم با حجم حداکثر

شبیه‌خاصیتی که درمورد دایره ذکر کردیم، برای کره‌هم می‌توان گفت: از بین اجسام با سطح کل مساوی، حجم کره حداکثر مقدار ممکن‌رادارد. و برعکس از بین اجسام با حجم مساوی، کره حداقل سطح را دارد. این خصوصیت در زندگی عملی هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. وقتی که سماور بشکل کره ساخته شود، سطح کمتری نسبت به سماور استوانه‌ای و یا انواع دیگر آن، با همان گنجایش دارد، و چون یك جسم حرارت خود را تنها از طریق سطح خارجی خود از دست می‌دهد، سماور کره‌ای شکل، دیرتر از انواع دیگر آن سرد می‌شود. مثلا مخزن میزان الحراره در حالتی که به شکل استوانه باشد (و نه کره) سریع‌تر گرم و یا سرد می‌شود (یعنی درجهٔ حرارت محیط خود را قبول می‌کند).

به همین علت، وقتی که کرهٔ زمین (که شامل پوستهٔ جامد و

قسمت مرکزی است) به دلایل مختلف تغییر شکلی در سطحش پیدا می‌شود، باید از حجمش کم شود ، یعنی منقبض ومتراکم شود: هربار که سطح زمین ازگردی خود تغییر شکل می‌دهد ، مواد داخلی آن به هم فشرده‌تر می‌شوند. ممکن است همین حقیقت هندسی با زلزله‌ها و یا به‌طور کلی پدیده‌های زیرزمینی ارتباط داشته باشد ، ولی دراین‌باره بیش ازهمه باید زمین شناسان قضاوت کنند .

حاصل ضرب عوامل مساوی

مسائلی از قبیل آنچه‌که در اینجا حل کردیم مربوط به مطالعهٔ جنبهٔ اقتصادی آن‌هاست ؛ با صرف نیروی معینی (مثلا عبور از ۴۰ ورست راه) چگونه می‌توان بهترین و با صرفه ترین نتیجه را بدست آورد (بزرگترین قطعه زمین را متصرف شد)؟ به همین مناسبت عنوان این‌فصل را «اقتصاد هندسی» نام‌گذاشتیم. ولی این یك نوع ساده‌کردن عنوان است؛ درریاضیات مسائلی ازاین قبیل‌نام دیگری دارند : مسائل «ماکزیمم و می‌نیمم» . این مسائل به اندازهٔ‌کافی چه از لحاظ موضوع و چه از لحاظ روش راه حل متنوع‌اند. بعضی از آن‌ها تنها به کمك ریاضیات عالی حل می‌شوند ، ولی بسیاری از آن‌ها را می‌توان با اطلاعات مقدماتی ریاضی و با روشهای ساده حل کرد . در اینجا تعدادی از این‌گونه مسائل را از مبحث هندسه ، با استفاده از خاصیت جالب «حاصل ضرب عوامل مساوی» ، حل می کنیم .

برای حالتی‌که با دوعامل سروکار داشته باشیم ، این خاصیت برای‌ما روشن است. می‌دانیم‌که مساحت مربع ازمساحت هرمستطیلی که محیطی برابر باآن داشته باشد، بیشتر است. اگر این‌حکم هندسی

را به‌زبان حساب ترجمه کنیم ، چنین می‌شود: اگر بخواهیم عددی را به دوقسمت چنان تقسیم کنیم که حاصل ضرب آنها حداکثر مقدارممکن شود، باید عدد مفروض را به دوقسمت مساوی تقسیم کنیم، مثلا از همهٔ حاصل‌ضرب‌های

$$۱۳\times ۱۷ \text{ ، } ۱۶\times ۱۴ \text{ ، } ۱۲\times ۱۸ \text{ ، } ۱۱\times ۱۹ \text{ ، } ۱۰\times ۲۰ \text{ ، } ۱۵\times ۱۵ \text{ و } \ldots$$

که حاصل‌جمع عوامل هریك از آن‌هامساوی ۳۰ می‌باشد ، بزرگترین مقدار متعلق به ۱۵×۱۵ است ، حتی اگر با حاصل ضرب عددهای کسری مثل $۱۵\frac{۱}{۲} \times ۱۴\frac{۱}{۲}$ مقایسه شود .

همین حکم در مورد حاصل‌ضرب سه عاملی که مجموع مساوی دارند ، صادق است : حاصل ضرب آن‌ها وقتی حداکثر مقدار ممکن می‌شود که این عوامل با هم برابر باشند . فرض می کنیم سه عامل x و y و z به مجموع a باشند :

$$x+y+z=a$$

x و y را غیر مساوی درنظر می‌گیریم. اگر به جای هریك آنها نصف مجموعشان ، یعنی $\frac{x+y}{۲}$ را در نظر بگیریم ، مجموع عوامل تغییر نمی کند :

$$\frac{x+y}{۲}+\frac{x+y}{۲}+z=x+y+z=a$$

ولی با توجه به حالت قبل داریم :

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)\left(\frac{x+y}{۲}\right)>xy$$

بنابراین حاصل‌ضرب سه عامل

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z$$

از حاصل‌ضرب xyz بزرگتر است :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z>xyz$$

به‌طور کلی اگر بین عوامل x و y و z لااقل دو عامل نامساوی وجود داشته باشد، می‌توان سه عدد به‌مجموع $x+y+z$ پیدا کرد که حاصل ضرب آنها از xyz بیشتر باشد، وقتی که هر سه عامل با هم برابر باشند، چنین تغییری ممکن نیست . بنابراین به ازاء $x+y+z=a$ ، وقتی حاصل‌ضرب xyz ماکزیمم است که داشته باشیم :

$$x=y=z$$

با اطلاع از این خاصیت عوامل مساوی ، می‌توان مسائل جالبی را حل کرد .

مثلث با مساحت حداکثر

مسئله

اگر مجموع اضلاع یك مثلث مقدار ثابتی باشد، آن را بچه‌شکلی باید انتخاب کنیم تا مساحت حداکثر داشنه باشد؟

ما قبلا دیدیم که این خاصیت مربوط به مثلث متساوی‌الاضلاع است . ولی چگونه می‌توان آن را اثبات کرد ؟

حل

مساحت S مثلث بر حسب اضلاع a و b و c و محیط

$a+b+c=2p$ به صورت زیر بیان می‌شود :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

و از آنجا :

$$\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c)$$

مساحت S مثلث وقتی حداکثر است که مجذور آن S^2 و یا $\frac{S^2}{p}$ عبارت (p مساوی نصف محیط و بنا برفرض مقدار ثابتی است) حداکثر مقدار ممکن باشد . ولی چون دو طرف تساوی با هم حداکثر می‌شوند ، مسئله به اینجا منجر می‌شود که به‌بینیم حاصل ضرب

$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

در چه صورت حداکثر مقدار ممکن است . مجموع این سه عامل مقداری است ثابت :

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=3p-2p=p$$

وبنابراین حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که این عوامل با هم برابر باشند ، یعنی داشته باشیم :

$$p-a=p-b=p-c$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$a=b=c$$

بنابراین از بین مثلث‌های با محیط ثابت،مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سطح حداکثر است .

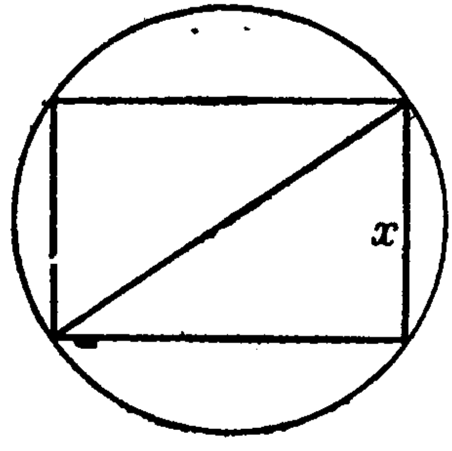
تیری با حداکثر وزن

مسئله

می‌خواهیم از یك تیر چوبی استوانه‌ای، تیرچهار گوشی باوزن حداکثر اره کنیم ؛ این کار را به چه ترتیب انجام دهیم ؟

حل

روشن است که مسئله به اینجا منجر می‌شود که در یك دایره مستطیلی با سطح ماکزیمم محاط کنیم. اگرچه بعد از مطالبی که دیده‌ایم ، خواننده می‌داند که این مستطیل باید به صورت مربع در آید ، ولی بد نیست آنرا بدقت ثابت کنیم .



۱۷۷. چگونه تیر چهارگوشی با وزن حداکثر درست کنیم ؟

یکی از اضلاع مستطیل مجهول را x می‌گیریم (شکل ۱۷۷) ، در این صورت ضلع دیگر آن مساوی $\sqrt{4R^2-x^2}$ می‌شود ، R را شعاع دایرهٔ مقطع چوب گرفته‌ایم ، مساحت مستطیل چنین می‌شود :

$$S=x\sqrt{4R^2-x^2} \Longrightarrow S^2=x^2(4R^2-x^2)$$

چون مجموع عوامل x^2 و $4R^2-x^2$ مقداری است ثابت $(x^2+4R^2-x^2=4R^2)$ ، بنابراین مجموع آنها S^2 وقتی ماکزیمم

است که داشته باشیم :

$$x^2 = 4R^2 - x^2 \Longrightarrow x = R\sqrt{2}$$

که دراین‌صورت مساحت S ، یعنی‌سطح مستطیل مجهول، هم ماکزیمم می‌شود .

بنابراین سطح مستطیل بـا مساحت حداکثر باید برابر $R\sqrt{2}$ ، یعنی ضلع مربع محاطی ، باشد . تیر چهارگوش وقتی حجم حداکثر خواهد داشت که مقطع عرضی آن، مربع محاط درمقطع‌تیراستوانه‌ای باشد .

از مثلث مقوائی

مسئله

یك قطعه مقوا را به شکل مثلث در دست داریـم . می‌خواهیم مستطیلی از این‌مثلث جدا کنیم که یك ضلعش برقاعدهٔ مثلث منطبق‌باشد و مساحتش حداکثر مقدار ممکن شود .

حل

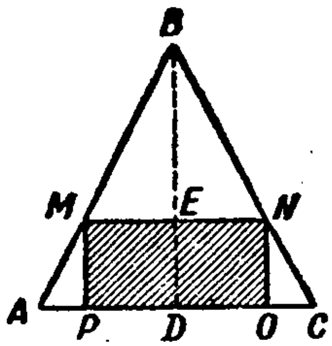
ABC را مثلث مفروض (شکل۱۷۸) و MNOP را مستطیلی که بعد از برش بدست می‌آید ، درنظر می‌گیریم . از تشابه دو مثلث ABC و NBM داریم :

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NM} \Longrightarrow NM = \frac{BE \cdot AC}{BD}$$

اگـر ضلع MN از مستطیل مجهول را BE، y یعنی فاصلهٔ این

ضلع از رأس مثلث را x، قاعدهٔ AC مثلث را a و ارتفاع آن را h بگیریم، رابطهٔ فوق به‌صورت زیر در می‌آید:

$$y=\frac{ax}{h}$$



۱۷۸. مستطیلی با مساحت حداکثر در مثلث محاط کنید.

و مساحت S مستطیل مطلوب $MNOP$ چنین می‌شود:

$$S=MN\cdot NO=MN(BD-BE)=$$
$$=(h-x)y=(h-x)\frac{ax}{h}$$

و بنابراین:

$$\frac{Sh}{a}=(h-x)x$$

مساحت S وقتی ماکزیمم است که $\frac{Sh}{a}$، یعنی حاصل‌ضرب عوامل $(h-x)$ و x ماکزیمم باشد. ولی مجموع این دوعامل مقداری است ثابت:

$$(h-x)+x=h$$

بنابراین حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که با هم برابر باشند:

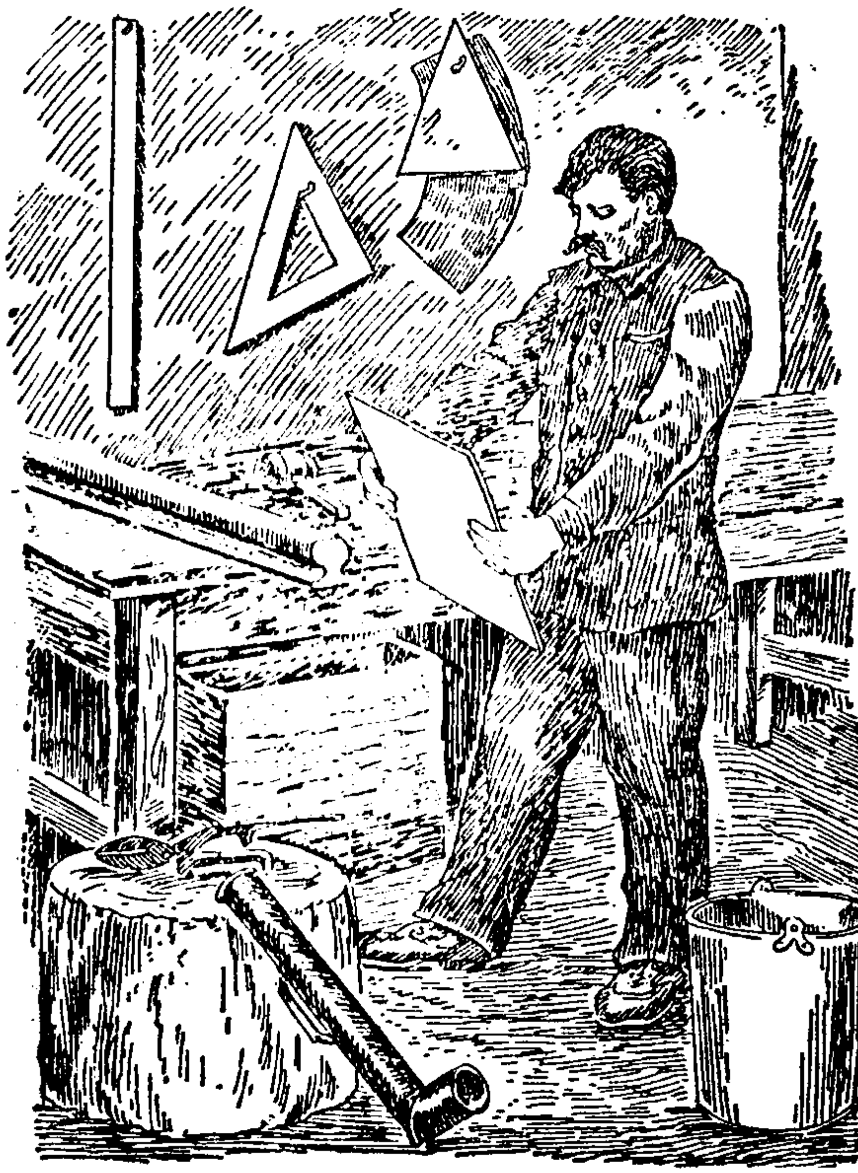
$$h-x=x \implies x=\frac{h}{۲}$$

باید ضلع MN از وسط ارتفاع مثلث بگذرد، یعنی خط واصل بین اوساط دو ضلع مثلث باشد. به این ترتیب طول و عرض مستطیل به ترتیب مساوی $\frac{a}{۲}$ و $\frac{h}{۲}$ می‌شود.

مشکل حلبی ساز

مسئله

به حلبی سازی سفارش رسید که از یك قطعه حلبی مربع شکل به‌ضلع ۶۰ سانتی‌متر جعبه‌ای با کف مربع و بدون سر بسازد ، به‌نحوی گنجایش جعبه حداکثر مقدار ممکن باشد .



۱۷۹. مشکل حلبی ساز

حلبی سازمدتی دربارهٔ انتخاب عرض کنارهٔ جعبه آزمایش کرد، ولی نتوانست جواب مشخصی بدست آورد (شکل ۱۷۹) . آیا شما می‌توانید مشکل او را حل کنید ؟

حل

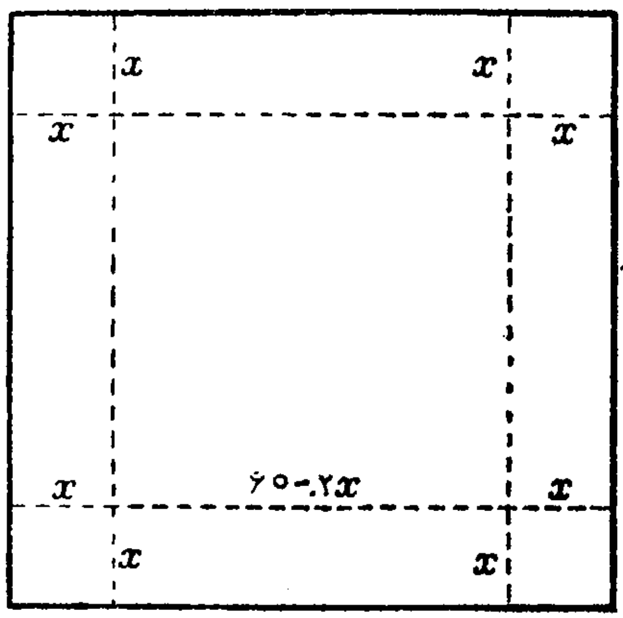
عرض حاشیه‌ای را که باید تا کرد مساوی x می‌گیریم (شکل ۱۸۰) ، دراین‌صورت ضلع‌مربع کف جعبه‌مساوی $۶۰ - ۲x$ می‌شود؛ وحجم جعبه به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$V = (۶۰ - ۲x)(۶۰ - ۲x)x$$

به ازاءِ چه مقداری از x ، این‌حاصل‌ضرب حداکثرمی‌شود؟ اگرمجموع این سه عامل مقداری ثابت بود ، حاصل ضرب آن‌ها وقتی حداکثر می‌شد که با هم برابرباشند. ولی دراینجا مجموع این عوامل مقداری ثابت نیست:

$$(۶۰ - ۲x) + (۶۰ - ۲x) + x =$$
$$= ۱۲۰ - ۳x$$

و با تغییر x ، تغییر می‌کند .



۱۸۰. حل مسئلهٔ حلبی ساز

ولی می‌توان ترتیبی داد که مجموع این عوامل مقداری ثابت بشود : برای این منظور کافی است طرفین تساوی را در۴ ضرب کنیم ، دراین صورت بدست می‌آید :

$$۴V = (۶۰ - ۲x)(۶۰ - ۲x)۴x$$

و دیگر مجموع این عوامل مقداری است ثابت :

$$(60-2x)+(60-2x)+4x=120$$

بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی حداکثر می‌شود که این عوامل با هم برابر باشند ، یعنی داشته باشیم :

$$60-2x = 4x \implies x=10$$

که به ازاءِ آن V ۴ و در نتیجه V ماکزیمم می‌شود .

به این ترتیب ، جعبهٔ مورد نظر وقتی حداکثر حجم را خواهد داشت که روی ورقهٔ حلبی ، از چهار طرف حاشیه‌ای به عرض ۱۰ سانتی‌متر به‌وجود آوریم . این حجم ماکزیمم مساوی ۱۰ × ۴۰ × ۴۰ یعنی ۱۶۰۰۰ سانتی متر مکعب خواهد شد . اگر حاشیه را کمتر و یا بیشتر از ۱۰ سانتی متر بگیریم ، درهر حال گنجایش جعبه کمتر می‌شود مثلا :

$$9\times42\times42 = 15876 \text{ (سانتی مترمکعب)}$$

$$11\times38\times38 = 15884 \text{ (سانتی مترمکعب)}$$

که در هر حال از ۱۶۰۰۰ سانتی مترمکعب کمتر است .*

مشکل تراشکار

مسئله

تراشکاری می‌خواهد ازیك مخروط ، استوانه‌ای بیرون بیاورد ،

---

* اگر مسئله را در حالت کلی و برای ورقهٔ حلبی مربع شکل به ضلع a حل کنیم ، عرض حاشیهٔ کناره‌ها مساوی $\frac{a}{6}$ خواهد شد ، زیرا برای اینکه حاصل ضرب $(a-2x)(a-2x)x$ و یا $(a-2x)(a-2x)4x$ حداکثر باشد ، باید داشته باشیم : $a-2x=4x$ و یا $x=\frac{a}{6}$.

به نحوی که مقدار تراشیده‌شده از مخروط، حداقل مقدار ممکن باشد (شکل ۱۸۱) . تراشکار در بارهٔ شکل استوانه فکر می‌کرد : آیا آن

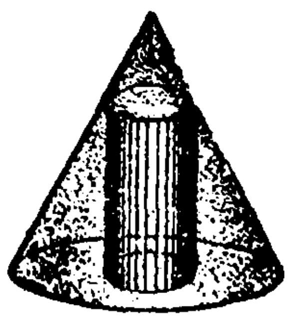
۱۸۱. مشکل تراشکار

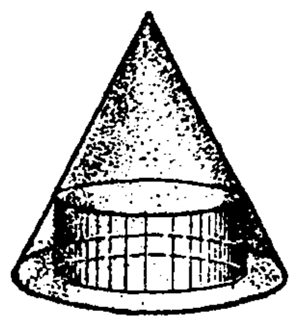
را باریك وبلند در آورد (شکل ۱۸۲) ، یا پهن و کوتاه (شکل ۱۸۳) . او بالأخره نتوانست مخروطی را پیدا کند که حجم حداکثر داشته‌باشد، یعنی حداقل مادهٔ مخروط تراشید بشود . شما می‌توانید مسئلهٔ تراشکار را حل کنید ؟

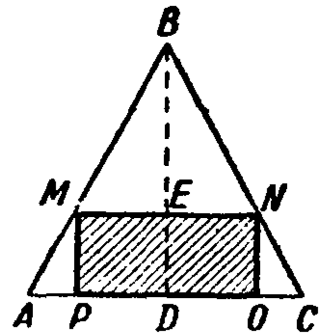
حل

مسئله را باید به‌طریق هندسی حل کرد. فرض کنیم **ABC** مقطع

محوری مخروط (شکل۱۸۴)، BD ارتفاع آن، که به h نشان می‌دهیم AD = DC شعاع قاعدهٔ آن، که با R نشان می‌دهیم، باشد. مقطع استوانه‌ای که می‌خواهیم از این مخروط جدا کنیم، MNOP خواهد







۱۸۴. مقطع محوری مخروط استوانه

۱۸۳

۱۸۲. از مخروط می‌توان استوانه‌ای جدا کرد که بلند و باریک باشد، یا کوتاه و بلند. در چه حالتی حجم آن حداکثر است؟

بود. باید به‌ببینیم فاصلهٔ BE = x (فاصله رأس مخروط از قاعدهٔ بالای استوانه) چقدر باشدتا حجم استوانه حداکثر مقدار ممکن شود.

شعاع r قاعدهٔ استوانه (PD یا ME) از تناسب زیر به سادگی بدست می‌آید:

$$\frac{ME}{AD}=\frac{BE}{BD}$$

و از آنجا:

$$\frac{r}{R}=\frac{x}{h}\Longrightarrow r=\frac{Rx}{h}$$

ارتفاع ED استوانه برابر است با h − x. بنابراین حجم آن چنین می‌شود:

$$V=\pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^2(h-x)=\pi\frac{R^2x^2}{h^2}(h-x)$$

و از آنجا :

$$\frac{Vh^{2}}{\pi R^{2}}=x^{2}(h-x)$$

درعبارت $\frac{Vh^{2}}{\pi R^{2}}$ ، مقادیر h ، π و R ثابت‌اند و تنها V متغیر است ، ما می‌خواهیم x را چنان پیدا کنیم که به ازاء آن ، V ماکزیمم باشد . ولی واضح است کـه وقتی V مـاکزیمم باشد ، $\frac{Vh^{2}}{\pi R^{2}}$ یا $x^{2}(h-x)$ هم مـاکزیمم خواهد بود . عبارت اخیر در چه صورت ماکزیمم می‌شود ؟ در اینجا سه عامل متغیرداریم : x ، x و $(h-x)$.

اگر مجموع این متغیرها مقداری ثابت بود ، حاصل ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم می‌شد که باهم برابرباشند. با دوبرابر کردن طرفین تساوی ، می‌توان‌ترتیبی داد که حاصل جمع متغیرها مقداری ثابت بشود در این صورت داریم :

$$\frac{2Vh^{2}}{\pi R^{2}}=x^{2}(2h-2x)$$

حالا مجموع سه عامل متغیر مقداری است ثابت :

$$x+x+2h-2x=2h$$

بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که این عوامل با هم برابر باشند :

$$x=2h-2x \implies x=\frac{2h}{3}$$

در اینصورت مقدار $\frac{2Vh^{2}}{\pi R^{2}}$ و همراه آن V حجم استوانه حد اکثر مقدار ممکن می‌شود .

حالادیگر می‌دانیم که چگونه باید استوانهٔمورد نظررا تراشید :

قاعدهٔ بالای آن باید با رأس مخروط به اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع مخروط فاصله داشته باشد .

چگونه تخته را دراز کنیم

گاهی پیش می‌آید که برای تهیهٔ یك شیئی ، چه در کارگاه و چه در منزل ، اندازه‌های مادهٔ اصلی که در اختیار ما هست به اندازهٔ لازم نیست .

۱۸۵. چگونه می‌توان یك تخته را به اندازهٔ لازم درآورد ؟

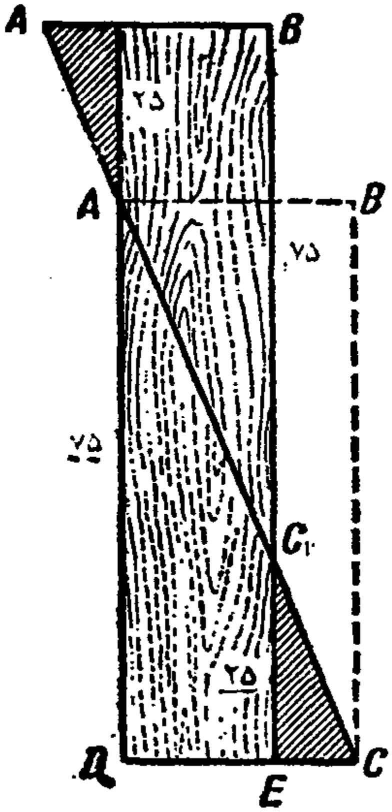
در این صورت باید اندازه‌های شیئی را تغییر داد و آنرا برای منظور مورد نظر آماده کرد ودر بسیاری موارد می‌توان به کمك هندسه، مقداری فراست و محاسبه به هدف مورد نظر رسید .

مثلا فرض کنید که می‌خواهید یك قفسهٔ کتاب به طول یك متر و عرض ۲۰ سانتی متر بسازید ، ولی اندازهٔ تخته‌ای که در اختیار دارید با آن فرق دارد ، مثلا طول آن کوتاهتر : ۷۵ سانتی متر و عرض آن بیشتر: ۳۰ سانتی متر است (شکل ۱۸۵- سمت چپ) .

چگونه باید عمل کرد ؟

مثلا می‌توان به‌این ترتیب عمل کرد که در طول تخته یك حاشیهٔ ۱۰ سانتی‌متری ببریم (قسمت نقطه چین). سپس این حاشیه‌را به‌سه‌قسمت مساوی ۲۵ سانتی متری تقسیم کنیم ، آنوقت از وصل دو قطعه از این قطعات به‌تختهٔ اصلی، اندازهٔ مورد نظر بدست می‌آید (شکل ۱۸۵ -پائین) .

این راه حل از لحاظ تعداد عملیات مقرون به صرفه نیست (سه برش وسه اتصال) و از لحاظ استحکام هم کافی نیست (جائی که تخته‌ها به هم متصل شده‌اند ، استحکام ضعیف می‌شود) .



۱۸۶. حل مسئلهٔ بزرگ کردن تخته

مسئله

راه حلی برای درست کردن تختهٔمورد نظر پیدا کنید که در آن سه برش و تنها یك اتصال وجود داشته باشد .

حل

باید (شکل۱۸۶) تختهٔ ABCD را روی قطر AC ببریم و نیمی از آن را (مثلا مثلث ABC) در امتداد قطر حرکت دهیم، تا طول مجموعه مساوی یك متر بشود. حالا دو نیمهٔ تخته را در طول $AC_۱$ متصل می‌کنیم و اضافه‌های آن را (مثلث‌های هاشور خورده) می‌بریم. تخته‌ای که می‌خواهیم بدست می‌آید.

در حقیقت از تشابه دومثلث ADC و $C_۱EC$ داریم:

$$AD : DC = C_۱E : EC \Longrightarrow EC = \frac{DC}{AD} \cdot C_۱E$$

و یا:

$$EC = \frac{۳۰}{۷۵} \times ۲۵ = ۱۰ \quad \text{(سانتی متر)}$$

$$DE = DC - EC = ۳۰ - ۱۰ = ۲۰ \quad \text{(سانتی متر)}$$

کوتاهترین راه

به عنوان پایان کار، مسئله‌ای از «ماکزیمم و می‌نیمم» را مطرح می‌کنیم که راه حل فوق‌العاده ساده‌ای از لحاظ هندسی دارد.

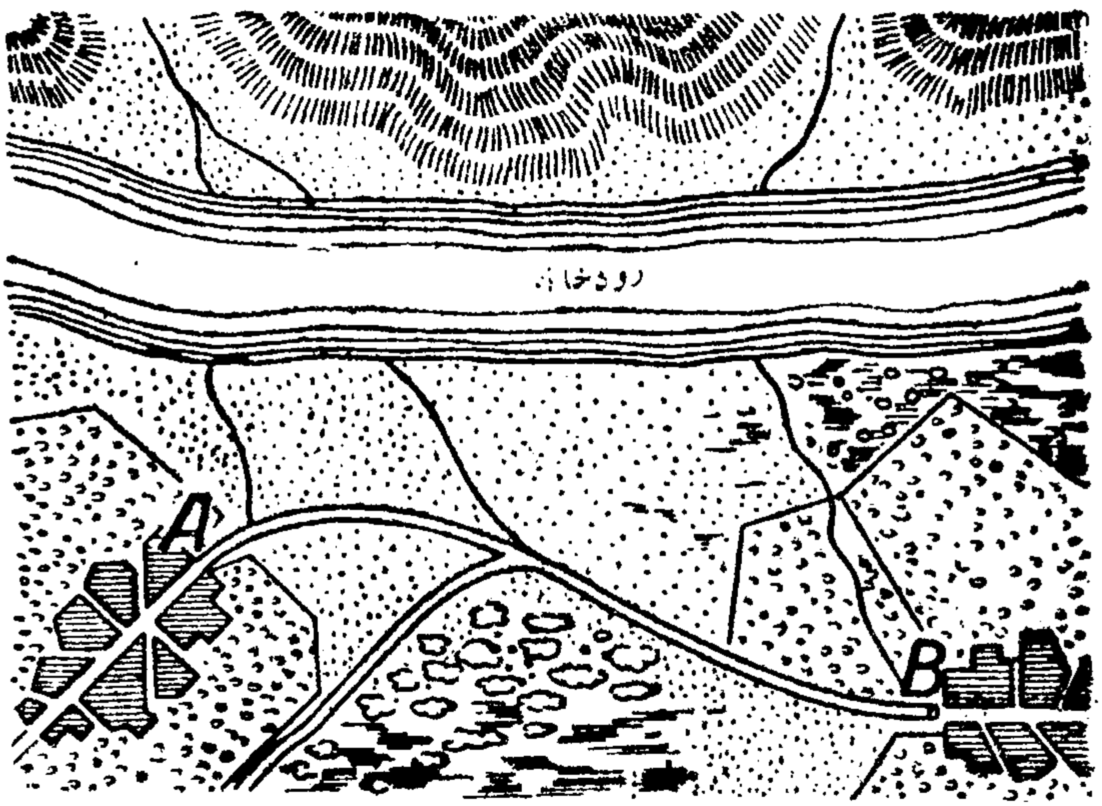
مسئله

می‌خواهیم درساحل رودخانه‌برج آبی بسازیم که‌از آنجابه‌وسیلهٔ لوله، آب را به مزارع A و B برسانیم (شکل ۱۸۷). جای برج آب را در چه نقطه‌ای انتخاب کنیم تا طول مجموع لوله‌هائی که از آنجا به دو مزرعه می‌رود می‌نیمم باشد؟

حل

مسئله به اینجا منجر می‌شود که کوتاهترین راه از A به ساحل و از آنجا به B را جستجو کنیم .

فرض می‌کنیم که راه مورد نظر ACB باشد (شکل ۱۸۸) . شکل را روی CN تا می‌کنیم ، نقطهٔ ´B بدست می‌آید . اگر ACB



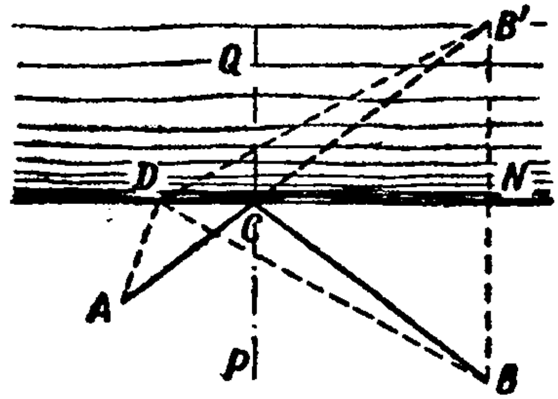
۱۸۷. مسئله‌ای در باره ساختن برج آب

کوتاه‌ترین راه باشد ، چون ´CB = CB است ، راه ´ACB باید از هر راه دیگری (مثلا ´ADB)کوتاه‌تر باشد. بنابراین برای پیدا کردن کوتاه‌ترین راه کافی است نقطهٔ C ، یعنی محل تلاقی ´AB را با ساحل رودخانه پیدا کنیم . در این صورت اگر از C به B وصل کنیم هر دو قسمت کوتاه‌ترین راه از A تا B بدست می‌آید .

از نقطهٔ C عمودی بر CN رسم می‌کنیم ، به سادگی معلوم می‌شود که زوایای ACP و BCP که دو قسمت کوتاه‌ترین راه با این عمود می‌سازند ، با یکدیگر برابرند :

$$\widehat{ACP} = \widehat{B'CQ} = \widehat{BCP}$$

طبق قانون انعکاس نور، وقتی که بر یك آینه می‌تابد: زاویهٔ تابش



۱۸۸. حل هندسی مسئلهٔ انتخاب کوتاهترین راه

برابر است با زاویهٔ انعکاس . بنابراین نتیجه می‌شود که شعاع نور ، ضمن انعکاس ، مسیر خود را چنان انتخاب می‌کند که کوتاهترین راه باشد. نتیجه‌ای که حتی برای هرون هندسه دان و فیزیك دان اسکندریه در دوهزار سال قبل هم‌روشن بوده است.

بها: ۱۵۰ ریال