

جرج ف. سیمونز

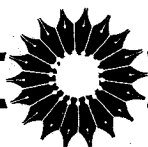


www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها

ترجمه
دکتر علی اکبر بابائی
دکتر ابوالقاسم میامئی



معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها

تألیف جرج ف. سیمونز

ترجمه
دکتر علی اکبر بابائی

دکتر ابوالقاسم میامنی

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



DIFFERENTIAL EQUATIONS
with Applications and Historical Notes
George F. Simmons
by McGraw-Hill Inc., 1972

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها

تألیف جرج ف. سیمونز

ترجمه علی اکبر بابائی، ابوالقاسم میامنی

ویراسته دکتر منوچهر وصال، محمد باقری

مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۴

مرکز نشر دانشگاهی، چاپ چهارم ۱۳۷۲

تعداد ۴۰۰۰

چاپ و صحافی: فرهنگ

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

Simmons, George Finaly, 1925-

سیمونز، جرج

معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها

عنوان اصلی:

Differential equations with applications and historical notes.

واژه نامه: ص.

کتابنامه: ص.

۱. معادله های دیفرانسیل. الف. بابائی، علی اکبر، مترجم. ب. میامنی، ابوالقاسم،

مترجم. ج. عنوان

۵۱۵/۳۵

QA ۳۷۱

ISBN: 964-01-0154-0

شابک: ۹۶۴-۰۱-۱۵۴-۰

فهرست

صفحه	عنوان
هفت	پیشگفتار مترجمین
نه	پیشگفتار مؤلف
سیزده	پیشنهادهایی به مدرس
	۱ ماهیت معادلات دیفرانسیل
۱	۱. مقدمه
۳	۲. نکات کلی در مورد جوابهای معادلات دیفرانسیل
۹	۳. دسته‌های منحنی. مسیرهای متعامد
۱۵	۴. رشد، تلاشی، و واکنشهای شیمیایی
۲۰	۵. سقوط اجسام و دیگر مسائل مربوط به آهنگ تغییرات
۲۶	۶. منحنی کوتاهترین زمان، فرما و برنولی‌ها
	۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
۳۹	۷. معادلات همگن -
۴۲	۸. معادلات کامل -
۴۶	۹. عامل انتگرال ساز -
۵۲	۱۰. معادلات خطی -
۵۲	۱۱. کاهش مرتبه
۵۷	۱۲. زنجیر آویخته. منحنیهای تعقیب
۶۳	۱۳. مدارهای ساده الکتریکی
۷۱	پیوست الف. روشهای عددی

۳ معادلات خطی مرتبه دوم

۷۹	۱۴. مقدمه
۸۳	۱۵. جواب عمومی معادله همگن
۸۸	۱۶. استفاده از يك جواب معلوم برای یافتن جوابی دیگر
۹۱	۱۷. معادله همگن با ضرایب ثابت
۹۲	۱۸. روش ضرایب نامعین
۹۸	۱۹. روش تغییر پارامترها
۱۰۱	۲۰. ارتعاشات در دستگاههای مکانیکی
۱۰۹	۲۱. قانون گرانش نیوتن و حرکت سیارات
۱۱۶	پیوست الف. اویلر
۱۱۹	پیوست ب. نیوتن

۴ نظریه نوسان و مسائل مقدار مرزی

۱۲۵	۲۲. ویژگیهای کیفی جوابها
۱۳۲	۲۳. قضیه مقایسه استورم
۱۳۵	۲۴. مقادیر ویژه، توابع ویژه، و تارمرتعش
۱۴۴	پیوست الف. مسائل منظم استورم - لیوویل

۵ جوابهای سری توانی و توابع خاص

۱۵۳	۲۵. مقدمه. مروری بر سریهای توانی
۱۶۱	۲۶. جوابهای به صورت سری معادلات مرتبه اول
۱۶۵	۲۷. معادلات خطی مرتبه دوم. نقاط عادی
۱۷۴	۲۸. نقاط غیرعادی منظم
۱۸۳	۲۹. نقاط غیرعادی منظم (ادامه مطلب)
۱۹۰	۳۰. معادله فوق هندسی گاوس
۱۹۶	۳۱. نقطه در بینهایت
۲۰۰	پیوست الف. دو اثبات همگرایی
۲۰۳	پیوست ب. چند جمله‌ایهای هرمیت و مکانیک کوانتومی
۲۱۴	پیوست ج. گاوس
۲۲۲	پیوست د. چند جمله‌ایهای چیبیشف و خاصیت مینی‌ماکس
۲۳۱	پیوست ه. معادله ریمان

۶ برخی توابع خاص فیزیک ریاضی

۲۴۳	۳۲. چند جمله‌ایهای لژاندر
-----	---------------------------

۳۳. خواص چند جمله‌ایهای لژاندر ۲۵۰
 ۳۴. توابع بسل. تابع گاما ۲۵۶
 ۳۵. خواص توابع بسل ۲۶۷
 پیوست الف. چند جمله‌ایهای لژاندر و نظریهٔ پتانسیل ۲۷۵
 پیوست ب. توابع بسل و غشای مرتعش ۲۸۲
 پیوست ج. چند خاصیت دیگر از توابع بسل ۲۸۷

۷ دستگاههای معادلات مرتبه اول

۳۶. ملاحظات کلی دربارهٔ دستگاهها ۲۹۳
 ۳۷. دستگاههای خطی ۲۹۷
 ۳۸. دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت ۳۰۵
 ۳۹. دستگاههای غیرخطی. معادلات شکار و شکارچی و لترا ۳۱۳

۸ معادلات غیرخطی

۴۰. دستگاههای خودگردان. صفحهٔ فاز و پدیده‌های آن ۳۲۱
 ۴۱. انواع نقاط بحرانی. پایداری ۳۲۷
 ۴۲. نقاط بحرانی، و پایداری در دستگاههای خطی ۳۳۷
 ۴۳. بررسی پایداری با روش مستقیم لیاپونوف ۳۴۹
 ۴۴. نقاط بحرانی سادهٔ دستگاههای غیرخطی ۳۵۵
 ۴۵. مکانیک غیرخطی. دستگاههای پایستار ۳۶۵
 ۴۶. جوابهای دوره‌ای قضیهٔ پوانکاره. بندیکسون ۳۷۲
 پیوست الف. پوانکاره ۳۸۰
 پیوست ب. اثبات قضیهٔ لینار ۳۸۳

۹ حساب تغییرات

۴۷. مقدمه. برخی از مسائل نمونهٔ مطلب مورد بحث ۳۸۹
 ۴۸. معادلهٔ دیفرانسیل اویلر برای تابع اکسترمال ۳۹۲
 ۴۹. مسائل هم پیرامونی ۴۰۲
 پیوست الف. لاگرانژ ۴۱۳
 پیوست ب. اصل همیلتن و نتایج آن ۴۱۴

۱۰ تبدیلات لاپلاس

۵۰. مقدمه ۴۲۷
 ۵۱. چند نکته در مورد نظریهٔ لاپلاس ۴۳۱

۴۳۶	۵۲. موارد استعمال در معادلات دیفرانسیل
۴۴۲	۵۳. مشتق و انتگرال تبدیل لاپلاس
۴۴۸	۵۴. همگردش و مسئله مکانیکی آبل
۴۵۲	پیوست الف. لاپلاس
۴۵۶	پیوست ب. آبل
	۱۱ وجود و یگانگی جوابها
۴۶۱	۵۵. روش تقریبات متوالی
۴۶۶	۵۶. قضیه پیکار
۴۷۷	۵۷. دستگاهها. معادله خطی مرتبه دوم
۴۸۱	جوابها
۵۰۷	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۵۱۳	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۵۱۹	فهرست راهنما

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار مترجمین

با توجه به کاربرد و اهمیت بسزای ریاضیات و بویژه معادلات دیفرانسیل در یاری رساندن به درک و توجیه پدیده‌های علمی و نظر به اینکه کتابهای ریاضی که تاکنون به زبان فارسی تألیف یا ترجمه شده‌اند، احتیاجات فعلی ما را آن گونه که باید و شاید بر نمی‌آورند، بر آن شدیم که به ترجمه کتاب حاضر پردازیم تا ما نیز در رفع این کمبود سهمی داشته باشیم. سطح این کتاب، به گونه‌ای است که خواننده آشنا با ریاضیات عمومی از عهده فهم آن بر می‌آید. یکی از ویژگیهای این کتاب توجهی است که به کاربردهای معادلات دیفرانسیل شده است و می‌تواند برای دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی مفید باشد. علاوه بر آن دارای یادداشتهایی تاریخی است که به مطالب کتاب، روح بیشتری می‌بخشد و خواننده را کم و بیش با زندگی ریاضیدانان و پژوهشهای آنان آشنا می‌کنند و او را سرشوق می‌آورند. در ترجمه این کتاب سعی بر آن بوده است تا حد امکان اصالت مطالب حفظ و از واژه‌ها و عباراتی استفاده شود که هم معمول باشند و هم روان. البته اگر توفیقی در این امر حاصل شده باشد، نسبی است. از این رو، نظرات اصلاحی همکاران محترم، دانشجویان عزیز و سایر استفاده‌کنندگان گرامی را با کمال رغبت می‌پذیریم و از آنان پیشاپیش تشکر می‌کنیم و امیدواریم که با ارسال اصلاحات پیشنهادی خود ما را در اعتلای کیفیت چاپ دوم کتاب یاری دهند.

در خاتمه، از آقای منوچهر قمصری که در ابتدای کار از همکاری ایشان برخوردار بوده‌ایم، از مسئولین مرکز نشر دانشگاهی که انتشار این کتاب را بر عهده گرفته‌اند، از ویراستاران کتاب که زحمت و ویرایش کتاب را تقبل کرده‌اند و نیز از تمامی کسانی که به نحوی در امر انتشار و چاپ کتاب سهیم بوده‌اند تشکر می‌کنیم.

دکتر ابوالقاسم میامنی
دانشگاه صنعتی اصفهان
آذر ۱۳۶۳

دکتر علی اکبر بابائی
دانشگاه صنعتی اصفهان

پیشگفتار مؤلف

این نکته درخور توجه است که هر کتاب درسی جدید درباره موضوعی قدیمی باید نقطه نظر معین و معقولی را عرضه کند که در کتابهای قبلی ارائه نشده باشد. یقیناً چنین نقطه نظری بازتابی از تجربه، سلیقه، و تمایلات شخصی نویسنده است، و بنا براین باید در ابتدا بوضوح بیان گردد، تا کسانی که با آن موافق نیستند به کتاب دیگری رجوع کنند. همچنانکه در زیر ملاحظه خواهید کرد، آرایش و محتویات این کتاب به طرق گوناگون بیانگر نظرات شخصی من است.

جایگاه معادلات دیفرانسیل در ریاضیات. ۳۰۰ سال است که آنالیز توانا ترین شاخه ریاضیات بوده، و مبحث معادلات دیفرانسیل بخش عمده آن است. این موضوع، هدف طبیعی حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی و مهمترین بخش ریاضیات در درک علوم طبیعی است. همچنین، در مسائل عمیق تری که زائیده همین بخش از ریاضیات هستند، معادلات دیفرانسیل منبع اکثر ایده ها و نظریه هایی است که آنالیز عالی را تشکیل می دهند. سری توانی، سری فوریه، تابع گاما و توابع ویژه دیگر، معادلات انتگرالی، قضایای وجود و نیاز به توجیه دقیق بسیاری از روندهای تحلیلی - همگی، در طبیعی ترین زمینه خود، در کار ما ظاهر می شوند، و در مرحله بعدی انگیزش اصلی مطالعه و تحقیق در آنالیز مختلط، نظریه سری فوریه و بسطهای متعامد عمومی تر، انتگرال گیری لبگ، فضاهای متریک و فضاهای هیلبرت، و بسیاری دیگر از مباحث زیبای ریاضیات نوین را فراهم می کنند. به عنوان مثال، نشان خواهم داد که یکی از ایده های اصلی آنالیز مختلط، رهانیدن سریهای توانی از قید محدوده دستگاه اعداد حقیقی است، و کسانی که کوشیده اند با استفاده از سریهای توانی حقیقی معادلات دیفرانسیل را حل کنند، این انگیزه را بوضوح درک می کنند. بدیهی است که در گیاه شناسی، هیچکس نمی تواند بدون درک معقولی از ریشه ها، ساقه ها و برگها که شکوفه های گیاهان گلدار را تغذیه و تقویت می کنند به ارزش این شکوفه ها

كاملاً پى ببرد. همين اصل در رياضيات نيز صحت دارد، ليكن اغلب از آن صرف نظر مى گردد يابه بوته فراموشى سپرده مى شود.

در رياضيات نيز همچون ديگر فعاليتهاى بشرى، تفنن امرى رايج است، و همواره مشكل مى توان دستاوردهاى ماندگار و گذراى شخص در طول حياتش را از يكدیگر جدا كرد. درحال حاضر، يك جريان قوى تجريد در دوره هاى بالاتر از ليسانس رياضى وجود دارد. اين جريان بسيارى از طرح هاى پراكنده را از چشم انداز زدوده و به جاى آنها نظريه هاى شسته و رفته عمومى آورده است. چنانچه جانب اعتدال نگاه داشته شود، اين نظريه هاى عمومى هم مفيد و هم ارضا كننده مى باشند، ليكن يكي از نتايج تأسف بار پرداختن بيش از حد به آنها، اين است كه چنانچه دانشجويى طى دوره ليسانس، مقدار كمى راجع به موضوعات گوناگون و ارزشمندی چون معادله موج، تابع فوق هندسى گاوس، تابع گاما، و مسائل اساسى حساب تغييرات (و مطالب فراوان ديگر) فرانگيرد، بعيد است كه بعدها به چنين كاري مبادرت ورزد. مناسبترين فرصت براى آشنائى كلى با چنين ايده هاى، يك درس مقدماتى غير فشرده در زمينه معادلات ديفرانسيلى است. بعضى از كتابهاى موجود در اين زمينه، سياحت با اتوبوسى را به يادمان مى آورد كه راننده آن به قصد پيروي از برنامه معين به قدرى تند مى راند كه مسافران فرصت چندانى، يا هيچ فرصتى، براى لذت بردن از مناظر نمى يابند. بگذاريد گاهگاهى ديرمان شود و از سياحت لذت بيشترى ببريم.

كاربردها. بديهى است كه هيچ چيز بجز تغيير، دايمى نيست، و هدف اوليه معادلات ديفرانسيلى آن است كه وسيله اى براى مطالعه تغييرات جهان مادى باشد. بنا بر اين، هر كتاب عمومى درباره اين موضوع، اگر ميزان معقولى از كاربردهاى علمى آن را در بر نگيرد، همان قدر بيهوده و بى لطف است كه نوشتن مقاله اى درباره تخم مرغ، بدون ذكر نقشى كه تخم مرغ در توليد مثل دارد. اين كتاب آنچنان بنا شده است كه هر فصل آن، بجز فصل آخر، حداقل يك - و اغلب چندين - «دستاورده» عمده، به صورت يك مسئله علمى كلاسيك، در حد امكانات روشهاى آن فصل ارائه مى كند. اين كاربردها مشتمل اند بر:

مسئله منحنى كو تا بهترين زمان؛

فرمول اينشتين $E = mc^2$ ؛

قانون گرانش نيوتن؛

معادله موج براى تار مرتعش؛

نوسانگر همساز در ميكانيك كوانتومى؛

نظريه پتانسيل؛

معادله موج براى غشاي مرتعش؛

معادلات شكار و شكارچى؛

ميكانيك غير خطى؛

اصل هميلتن، و

مسئله ميكانيكى آبل.

به گمان من، بررسی ریاضی این مسائل، در زمرهٔ افتخارات مهم تمدن غرب است، و امیدوارم که خواننده بامن موافق باشد.

مسئلهٔ دقت ریاضی. در مراحل عالی ریاضیات محض، هر بحثی که قرار است يك اثبات باشد، باید بتواند در برابر سخت‌ترین انتقادات کارشناسان شكاك تاب بیاورد. این، یکی از قواعد بازی است، و در صورتی که مایل به بازی باشید، باید به قواعد گردن نهید. اما این تنها بازی ممکن در این دیار نیست.

بعضی قسمتهای ریاضیات وجود دارند - شاید نظریهٔ اعداد و جبر مجرد - که در تمام مراحل آنها سطوح بالایی از اثبات دقیق می‌تواند مطرح باشد. لیکن در معادلات دیفرانسیل مقدماتی پافشاری موشکافانه بر دقت نظری، منجر به گرفتن عصارهٔ موضوع می‌شود، به طوری که تنها سبوس خشک به جای می‌ماند. هدف اصلی من در این کتاب آن است که دانشجورا برای درک ماهیت و اهمیت معادلات دیفرانسیل یاری دهم، و برای این مقصود، خیلی ترجیح می‌دهم که گهگاه مطلب غیر دقیق لیکن قابل درک شود تا اینکه کاملاً دقیق ولی غیر قابل درک باشد. به هیچ وجه علاقه ندارم که يك ساختمان ریاضی بنا کنم که از نظر منطقی بی‌عیب باشد و در آن، تعاریف، قضایا، و برهانهای دقیق چنان بایکدیگر پیوند یابند که در برابر خواننده‌ای که می‌خواهد به درون راه یابد، سدی استوار پدید آورند.

با وجود این ساده‌گیری، گهگاه و به‌طور مشخص در فصل ۱۱ و پیوستهای الف از فصول ۴ و ۵، و پیوست ب از فصل ۸، به بحثهای نسبتاً دقیقی پرداخته‌ام، منظور این نیست که بقیهٔ این کتاب نادقیق است، بلکه منظور آن است که تکیهٔ ما بر جنبهٔ عملی ریاضیات است که هدف اصلیش ایجاد روشهایی برای حل مسائل علمی است - در مقابل ریاضیات نظری که ایده‌ها و ابزارهای تولید شده توسط ریاضیات علمی را تحلیل و تنظیم می‌کند.

به گمان برخی افراد، يك بحث ریاضی یا برهان است و یا برهان نیست. در زمینهٔ آنالیز مقدماتی، من با این نظر موافق نیستم، و در عوض، برای اعتقاد که نقش اصلی يك برهان، همانا متقاعد کردن معقولانهٔ شنونده است. به نظر من، دقت ریاضی همانند پوشاك است: مدل آن باید مناسب موقعیت باشد، و اگر بیش از حد گشاد یا تنگ باشد از راحتی می‌کاهد و آزادی حرکت شخص را محدود می‌کند.

تاریخچه و زندگینامه. بنا به يك مثل قدیمی ارمنی: «کسی که بی‌خبر از پیشینیان باشد، به‌سپری کردن زندگی در دنیای تنگ و تاریک زمان خود محکوم است.» ریاضیات بدون تاریخچه، به معنای ریاضیات عاری از عظمت است، زیرا ریاضیات که یکی از هنرهای والای تمدن است - مانند سایر هنرها - بدین لحاظ عظمت دارد که حاصل آفرینش بشری است.

در عصر سلطهٔ فزایندهٔ فرهنگ همگانی و بی‌هویتی ناشی از دیوان سالاری، اطلاع از این امر مایهٔ بسی خوشوقتی است که مطالب ضروری ریاضیات را کامپیوتر چاپ نکرده یا يك کمیته تصویب نکرده است، بلکه کار فردی و نبوغ شخصی چند انسان برجسته آنها را پدید آورده است. یادداشتهای متعدد راجع به زندگینامهٔ افراد در این کتاب، بازتابی از علاقهٔ من به شناساندن اندکی از دستاوردها و خصایل شخصی این انسانهای شگفت‌انگیز است.

اکثر یادداشتهای طولانی در پیوستها جای داده شده اند، ولی هریک از آنها با کار خاصی از آن شخص که در مَن مورد بحث قرار گرفته است، ارتباط مستقیم دارد. این یادداشتهای بزرگترین ریاضیدانان سه قرن گذشته بجز چندتن را شامل می شود: فرما، نیوتن، برنولی ها، اویلر، لاگرانژ، لاپلاس، گاوس، آبل، همیلتون، لیوویل، چیشف، هریت، ریمان و پوانکاره. همان طور که ت. س. الیوت^۱ در یکی از مقالات خود نوشته است: «شخصی می گفت: نویسندگان گذشته از ما فاصله گرفته اند، زیرا ما خیلی بیشتر از آنچه آنها می دانستند، می دانیم. دقیقاً همین طور است، و ما می دانیم که چنین اند».

ارائه تاریخچه و زندگینامه، بسیار پیچیده است، و من آگاهم که بندرت مطلبی در یادداشتهایم واقعاً به همان سادگی است که می توانست باشد و از این بابت متأسفم. همچنین باید به خاطر اشارات بیش از حد فشرده به مفاهیم ریاضی که بسیاری از خوانندگان دانشجو هنوز با آنها مواجه نگشته اند، پوزش بطلبم. لیکن دانشجوی علاقمند باید بتواند، به کمک کتابخانه ای خوب، اغلب آنها را برای خود روشن نماید. حداقل اینکه، چنین کوششهایی ممکن است شخص را در کسب احساس تنوع وسیع ریاضیات کلاسیک یاری دهد. و این جنبه ای از موضوع است که در برنامه تحصیلی دوره لیسانس، تقریباً یافت نمی شود.

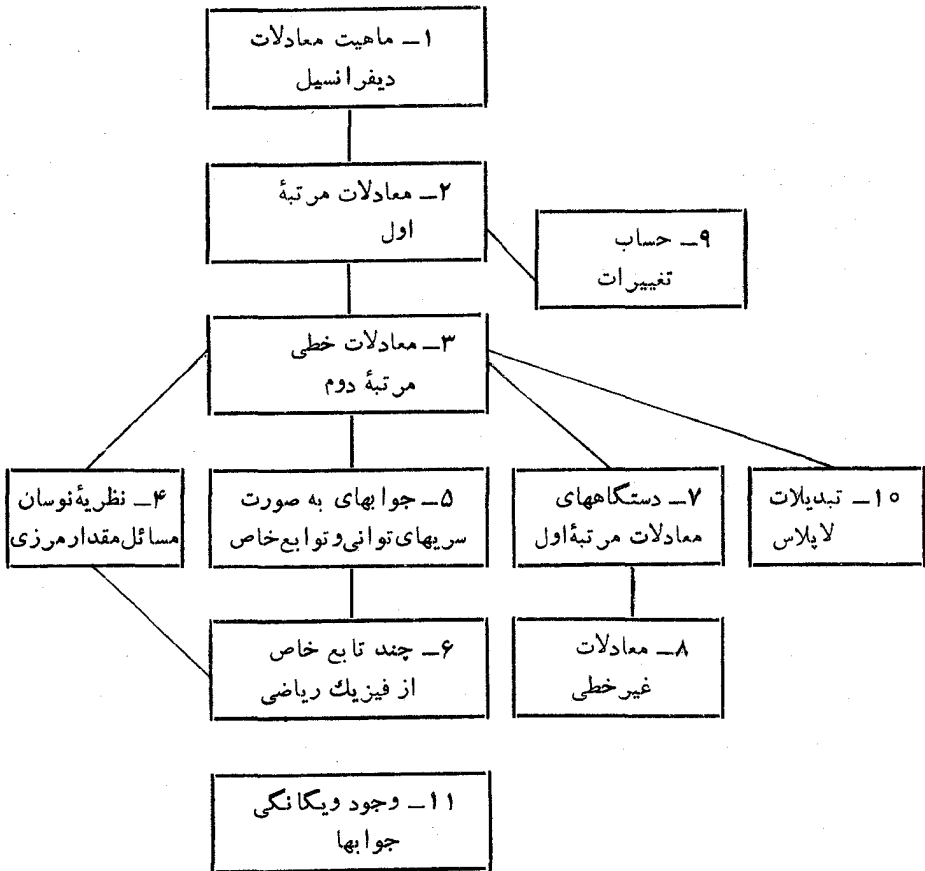
جورج ف. سیمونز^۲

1. T. S. Eliot

2. George F. Simmons

پیشنهادهایی به مدرس

نمودار زیر بستگی منطقی فصول را به یکدیگر نشان می‌دهد و راههای گوناگون استفاده از این کتاب را، بسته به سلیقه معلم و معلومات قبلی و اهداف دانشجویان، پیشنهاد می‌کند.



فصول ۱، ۲ و ۹ نسبتاً ساده هستند، و بسیاری از مطالب دو فصل اول اغلب در دروس حساب دیفرانسیل و انتگرال ارائه می‌شوند. فصل ۳ شالودهٔ بنای کتاب است. فصول ۴، ۵ و ۶ نظریهٔ پیشرفته‌تر معادلات خطی مرتبهٔ دوم و جوابهای به صورت سری را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهند، و فصل ۱۰ یک شیوهٔ تکمیلی را ارائه می‌کند. هدف فصول ۷ و ۸ بحث پیرامون معادلات غیر خطی مرتبهٔ دوم است و فصول ۸ و ۱۱ به ریاضیات مورد توجه دوران ما، از همه نزدیکتر است. ضمناً گوشزد می‌شود که مطالب مطرح شده در بخشهای ۲۸ تا ۳۵ تقریباً دشوارند و برای معلمی که درس کوتاهی ارائه می‌کند، شاید بهتر آن باشد که آنها را تنها به دانشجویان مشتاق تر خود عرضه کند.

دانشمند، طبیعت را به خاطر فایده اش مطالعه نمی کند: آن را برای این مطالعه می کند که از آن لذت می برد، و از طبیعت لذت می برد زیرا که زیباست. اگر طبیعت زیبا نبود، ارزش شناختن نداشت، و اگر طبیعت ارزش شناختن نداشت، زندگی هم ارزش زیستن نداشت. البته، من در اینجا از آن گونه زیبایی که حواس را متأثر می کند، یعنی از زیبایی اوصاف و ظواهر سخن نمی گویم؛ نه آنکه این گونه زیبایی را دست کم بگیرم، چنین چیزی نیست؛ اما این زیبایی ربطی به علوم ندارد؛ منظوم زیبایی ژرفتری است که از نظم هماهنگ اجزای وجود می آید، و هوش ناب قادر به درک آن است.

هانری پوانکاره

هرگاه يك رشته ریاضی از منشأ تجربی خود دور شود، یا چنانچه نسلهای دوم یا سوم تنها به طور غیرمستقیم از ایده های ناشی از «واقعیت» الهام بگیرند، خطرات بسیار جدی پیش می آید. رشته مزبور بیشتر و بیشتر به زیبایی ناب توجه می کند و بیشتر و بیشتر به سوی «هنر برای هنر» می گراید. چنانچه زمینه مورد نظر را موضوعات مرتبطی احاطه کرده باشند که با تجربه حتی روابط نزدیکی دارند، یا اگر رشته مزبور تحت تأثیر اشخاصی با شرم فوق العاده پیشرفته قرار گیرد، این امر لزوماً بد نخواهد بود. ولی این خطر جدی وجود دارد که موضوع در جهت حداقل مقاومت گسترش یابد، و این جویبار، دور از سرچشمه، به شاخه های ناچیز فراوان تقسیم گردد و این رشته به توده ای از مطالب جزئی و پیچیده نابسامان بدل شود. به عبارت دیگر هر رشته ریاضی، بسیار دور از منشأ تجربی یا پس از گسترش «انتزاعی» فراوان، در معرض خطر تباهی قرار می گیرد.

جان فون نویمان

درست همان طور که استنتاج باید توسط شهود تکمیل شود، حرکت به سوی تعمیم پیشرو نیز باید به وسیله احترام و عشق به جزئیات رنگارنگ تعدیل شود. مسئله خاص نباید به مرتبه مثال خاصی از نظریه های کلی مهم تنزل داده شود. درواقع نظریه های عمومی از بررسی مسائل خاص پدید می آیند و اگر برای تشریح و تنظیم خواص مشخص تر موارد گوناگون به خدمت گرفته نشوند، بی معنا خواهند بود. اثر متقابل بین کلیت و فردیت، استنتاج و ابداع، منطق و تخیل - این است جوهر ژرف ریاضیات زنده. هر يك از این جنبه های ریاضی می تواند محور يك دستاورد مشخص باشد. همه اینها در يك مبحث خیلی پیشرفته، به کار خواهند رفت. به طور کلی چنین مبحثی از يك زمینه «لموس» آغاز می شود، آنگاه به وسیله تجرید، سنگلاخها را رها می کند و به لایه های رفیع هوای لطیف صعود می کند، جایی که در آن پرواز و نظاره آسان است. پس از این پرواز، نوبت به آزمون حساس فرود و دستیابی به اهداف خاص در دشتهای پست نویافته از «واقعیت» منفرد می رسد. خلاصه آنکه، پرواز به کلیت مجرد باید از واقعیت عینی و خاص آغاز شود و بدان بازگردد.

ریچارد کورانت

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ماهیت معادلات دیفرانسیل

۱. مقدمه

هر معادله مشتمل بر یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل می نامند. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت (دینامیک، شیمی، زیست شناسی، و نجوم) طبیعی ترین بیان خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می یابند. کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنین در خود ریاضیات، خصوصاً در هندسه، و در مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر علوم کاربرده فراوان اند.

دلیل این کار آیی گسترده معادلات دیفرانسیل با سانی قابل درک است، یادآوری می کنیم که چنانچه $y = f(x)$ تابعی مفروض باشد، آنگاه مشتق آن dy/dx را می توان به عنوان میزان تغییر y نسبت به x در نظر گرفت. در هر روند طبیعی، متغیرهای مربوطه و میزان تغییرات آنها به وسیله اصول علمی اساسی حاکم بر آن روند، به یکدیگر مربوط می شوند. هنگامی که این ارتباط با علایم ریاضی بیان شود، نتیجه اغلب یک معادله دیفرانسیل است.

مثال زیر می تواند این نکات را روشن کند. طبق قانون دوم حرکت نیوتن، a ، شتاب جسمی به جرم m متناسب است با نیروی کل F وارد بر آن، با ثابت تناسب $1/m$ ، بنابراین
$$a = F/m$$

$$ma = F \quad (1)$$

به عنوان مثال فرض کنید جسمی به جرم m ، تنها تحت تأثیر ثقل زمین، آزادانه سقوط کند.

در این حالت تنها نیروی وارد بر آن mg است که در آن g شتاب ثقل زمین است^۱. هرگاه y فاصله جسم از ارتفاع ثابتی باشد، آنگاه شتاب جسم d^2y/dt^2 است و رابطه (۱) به صورت زیر درمی آید:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg$$

یا

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g \quad (۲)$$

چنانچه وضعیت را، با این فرض که هوا نیز نیروی مقاومی متناسب با سرعت جسم بر آن اعمال می کند، تغییر دهیم، آنگاه نیروی کل وارد بر جسم $mg - k(dy/dt)$ است و رابطه (۱) چنین خواهد شد:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt} \quad (۳)$$

معادلات (۲) و (۳) معادلات دیفرانسیلی هستند که خواص اساسی روندهای فیزیکی مورد نظر را بیان می کنند.

به عنوان مثالهای بیشتری از معادلات دیفرانسیل، معادلات زیر را ذکر می کنیم:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (۴)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky \quad (۵)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2} \quad (۶)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (۷)$$

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0 \quad (۸)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (۹)$$

۱. در اکثر کاربردها، g را می توان روی سطح زمین، ثابت در نظر گرفت، و مقدار آن تقریباً ۹۸۰ سانتی متر بر مجذور ثانیه است.

متغیر وابسته در هر يك از این معادلات y و متغیر مستقل، t یا x است. حروف m ، k ، و p معرف ثابتها هستند. معادله دیفرانسیل معمولی یا عادی معادله ای است که تنها يك متغیر مستقل در آن وجود داشته باشد، بنابراین تمام مشتقات موجود در آن مشتقات معمولی می باشند. همه معادلات بالا معمولی هستند. مرتبه معادله دیفرانسیل، مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله است. معادلات (۴) و (۶) معادلات مرتبه اول و معادلات دیگر از مرتبه دوم اند. معادلات (۸) و (۹) کلاسیک هستند و بترتیب، به معادله لژاندر^۱ و معادله بسل^۲ موسوم اند. هر کدام از این دو معادله تاریخچه مفصلی دارد که به صدها سال قبل برمی گردد. همه این معادلات را بعداً بتفصیل مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

معادله دیفرانسیل بامشتق جزئی، معادله ای است که مشتمل بر بیش از يك متغیر مستقل است، بنابراین مشتقات موجود در آن، مشتقات جزئی هستند. به عنوان مثال، هرگاه $w = f(x, y, z, t)$ تابعی از زمان و سه مختص قائم يك نقطه در فضا باشد، آنگاه معادلات زیر، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خواهند بود:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

این معادلات نیز کلاسیک هستند، و بترتیب معادله لاپلاس^۳، معادله حرارت، و معادله موج نامیده می شوند. هر کدام از این معادلات در فیزیک نظری اهمیت زیادی دارد و مطالعه آنها موجب ظهور بسیاری از نظرات مهم ریاضی شده است. معادلات دیفرانسیل جزئی عموماً در فیزیک محیطهای پیوسته پیش می آید. مانند مسائل مشتمل بر میدانهای الکتریکی، دینامیک سیالات، پخش، و حرکت موجی. نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی با نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی خیلی متفاوت و تقریباً از هر لحاظ بسیار مشکلتر است. فعلاً برای مدتی توجه خود را منحصرأ به معادلات دیفرانسیل معمولی معطوف خواهیم داشت.

۲. نکات کلی در مورد جوابهای معادلات دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام، عموماً، به صورت

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

یا با استفاده از علامت «پریم» برای مشتقات، به صورت

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

نوشته می‌شود. بحث نظری مناسبی در مورد این معادله باید مبتنی بر مطالعه دقیق خواصی از تابع F باشد که صریحاً فرض شده‌اند. ولی، تأکید می‌مورد بر نکات ظریف نظریه اغلب مانع از آن می‌شود که دریا بیم و واقعاً چه چیزی در جریان است. بنابراین سعی خواهیم کرد که دست کم در حال حاضر، از توجه بیش از حد در مورد اینگونه مطالب اجتناب ورزیم.

تحقیق اینکه تابع مفروض $y = y(x)$ جواب معادله‌ای نظیر (۱) باشد، معمولاً کار ساده‌ای است. در اینجا کافی است مشتقات $y(x)$ را محاسبه کنیم و نشان دهیم که جایگذاری $y(x)$ و مشتقاتش در معادله، آنرا تبدیل به اتحادی بر حسب x می‌کنند. بدین ترتیب مشاهده می‌کنیم که

$$y = e^{2x} \quad \text{و} \quad y = e^{3x}$$

هر دو جوابهای معادله مرتبه دوم

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (2)$$

هستند، و به‌طور کلیتر

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (3)$$

نیز به‌ازای هر مقداری که برای ثابتهای c_1 و c_2 انتخاب کنیم، جواب معادله (۲) است. اغلب جوابهای معادلات دیفرانسیل به‌شکل توابعی که به صورت ضمنی تعریف شده، ظاهر می‌شوند و گاهی بیان متغیر وابسته بر حسب متغیر مستقل به‌طور صریح مشکل و یا غیرممکن است. به‌عنوان مثال،

$$xy = \log y + c \quad (4)$$

به‌ازای هر مقدار از ثابت c يك جواب معادله

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy} \quad (5)$$

است. این امر را می‌توان با مشتقگیری از معادله (۴) و مرتب کردن نتیجه، باسانی تحقیق کرد. مثلهایی که آورده شد این موضوع را نیز نشان می‌دهند که جواب هر معادله دیفرانسیل معمولاً شامل يك یا چند ثابت اختیاری است که تعداد ثابتها برابر با مرتبه معادله دیفرانسیل است.

در اکثر حالات، کاربرد اینگونه شیوه‌ها در مورد جواب احتمالی معادله دیفرانسیل کار ساده‌ای است، لیکن آغاز کردن با معادله دیفرانسیل و یافتن جوابی برای آن، طبعاً، بسیار دشوارتر است. بموقع روشهای اصولی و منظمی جهت حل معادلاتی نظیر (۲) و (۵) ارائه خواهیم کرد. در حال حاضر، به ذکر چند نکته در مورد جنبه‌های عمومی جوابها اکتفا می‌کنیم.

ساده‌ترین معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (۶)$$

است و آن را بانوشتن

$$y = \int f(x) dx + c \quad (۷)$$

حل می‌کنیم. در بعضی حالات انتگرال نامعین رابطه (۷) را می‌توان به وسیله روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبه کرد. در حالات دیگر ممکن است یافتن فرمولی برای این انتگرال دشوار یا غیرممکن باشد. به عنوان مثال، می‌دانیم که

$$\int e^{-x^2} dx \quad \text{و} \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

را نمی‌توان بر حسب تعدادی متناهی از توابع مقدماتی بیان کرد.^۱ اما به یاد داریم که

$$\int f(x) dx$$

صرفاً علامتی برای تابعی (هر تابعی) است که مشتق آن $f(x)$ باشد، لذا تقریباً همواره می‌توانیم بانوشتن رابطه (۷) به صورت زیر، مفهوم معتبری برای آن قائل شویم

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + c \quad (۸)$$

اساس مطلب این است که این انتگرال معین تابعی از حد بالایی x (حرف t زیر علامت انتگرال فقط یک متغیر ظاهری است) است و این تابع، هنگامی که تابع زیر انتگرال در ناحیه انتگرال گیری پیوسته باشد، موجود و مشتق آن $f(x)$ است.^۲

۱. خواننده‌ای که در مورد دلایل این موضوع کنجکاو باشد می‌تواند به

D. G. Mead, *Integration, Am. Math. Monthly*, Vol. 68, pp. 152-156, 1961.

رجوع کند. برای توضیحات اضافی به،

G. H. Hardy, «The Integration of Functions of a Single Variable», Cambridge University Press, London, 1916.

یا به،

J. F. Ritt, «Integration in Finite Terms», Columbia University Press, New York, 1948.

مراجعة کنید.

۲. این بیان صورتی از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

معادله مرتبه اول عمومی، حالت خاص (۱) است که با قرار دادن $n = 1$ حاصل می شود:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (9)$$

معمولا انتظار داریم که يك چنین معادله ای دارای جواب باشد و این جواب شامل يك ثابت دلخواه باشد. اما معادله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

جواب حقیقی ندارد و معادله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

تنها دارای جواب واحدی به صورت $y = 0$ است (که شامل ثابت اختیاری نیست). مواردی از این قبیل، موجب طرح سؤالات نظری مشکلی راجع به وجود و ماهیت جوابهای معادلات دیفرانسیل می شود. در این جا نمی توانیم وارد بحث کاملی راجع به این سؤالات شویم، ولی اگر توصیفی شهودی از چند مطلب اساسی ارائه دهیم، ممکن است این موضوعها روشن شوند.

به خاطر سهولت، فرض کنیم که معادله (۹) را بتوان نسبت به dy/dx حل کرد.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (10)$$

همچنین فرض می کنیم که $f(x, y)$ تابع پیوسته ای، در درون مربع مستطیل R واقع در صفحه xy ، باشد. معنای هندسی يك جواب (۱۰) را می توان به بهترین وجه به شرح زیر درك کرد (شکل ۱). چنانچه $P_0 = (x_0, y_0)$ نقطه ای در R باشد، آنگاه عدد

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_0} = f(x_0, y_0)$$

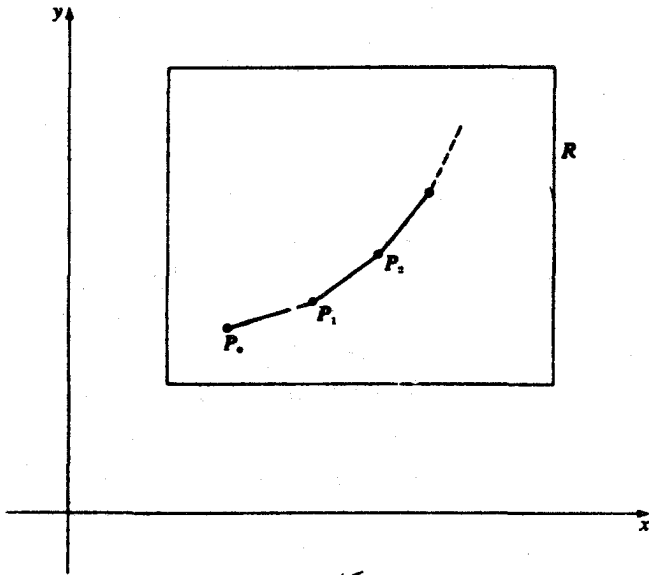
راستایی را در P_0 معین می کند. حال فرض می کنیم $P_1 = (x_1, y_1)$ نقطه ای نزدیک به P_0 ، در این راستا، باشد و از رابطه زیر برای تعیین راستایی جدید در P_1 استفاده می کنیم:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} = f(x_1, y_1)$$

سپس فرض می کنیم $P_2 = (x_2, y_2)$ نقطه ای نزدیک به P_1 ، در این راستای جدید باشد و از عدد

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_2} = f(x_2, y_2)$$

استفاده می‌کنیم تا باز جهت دیگری را در P_4 تعیین نماییم. اگر این روند را ادامه دهیم، خط شکسته‌ای به دست خواهیم آورد که نقاط P_0 و P_1 و P_2 و P_3 و ... در طول آن همانند مهره‌هایی پراکنده شده‌اند؛ حال اگر تصور کنیم که این نقاط متوالی به‌همدیگر نزدیک و تعدادشان زیاد شود، خط شکسته به‌منحنی همواری میل می‌کند که از نقطه اولیه P_0 می‌گذرد. این منحنی يك جواب $y = y(x)$ معادله (۱۰) است، زیرا در هر نقطه (x, y) آن، شیب منحنی به‌وسیله $f(x, y)$ تعیین می‌گردد و این دقیقاً همان شرطی است که در معادله دیفرانسیل خواسته شده است. اگر این عمل را از نقطه اولیه دیگری شروع کنیم، آنگاه عمده ما منحنی (یا جواب) متفاوتی به‌دست خواهیم آورد. بنابراین جوابهای معادله (۱۰) دسته‌ای منحنی تشکیل



شکل ۱

خواهند داد که به منحنیهای انتگرال^۱ موسوم‌اند. علاوه بر این حدس، معقول به‌نظر می‌رسد که از هر نقطه در R تنها يك منحنی انتگرال (۱۰) می‌گذرد. این بحث تنها به‌منظور آماده‌سازی زمینه برای بیان دقیق‌تر، پیش‌کشیده شده است.

قضیه الف. (قضیه پیکارد^۲) اگر توابع $f(x, y)$ و $\partial f / \partial y$ در مستطیل بسته R پیوسته باشند، از هر نقطه (x_0, y_0) ، واقع در درون R ، يك منحنی انتگرال منحصر به‌فرد معادله $dy/dx = f(x, y)$ می‌گذرد.

۱. گاهی جوابهای معادله دیفرانسیل، انتگرالهای معادله نامیده می‌شوند، چراکه مسئله یافتن آنها، کم‌وبیش، تعمیمی از مسئله عادی انتگرال‌گیری است.

چنانچه در این قضیه يك مقدار ثابت x_0 را در نظر بگیریم، آنگاه منحنی انتگرالی که از نقطه (x_0, y_0) می گذرد با انتخاب y_0 کاملاً معین می شود. به این طریق ملاحظه می کنیم که منحنیهای انتگرال (۱۰) آنچه را که دسته ای از منحنیهای يك پارامتری نامیده می شود تشکیل می دهند. معادله این دسته منحنی را می توان به صورت زیر نوشت

$$y = y(x, c) \quad (11)$$

که در آن انتخاب مقادیر مختلف برای پارامتر c ، منحنیهای متفاوتی از دسته منحنی را به دست می دهد. منحنی انتگرالی که از (x_0, y_0) می گذرد متناظر است با مقداری از c که برای آن $y_0 = y(x_0, c)$ است. اگر این عدد را با c نشان دهیم، آنگاه رابطه (۱۱) را جواب عمومی معادله (۱۰) می خوانند، و $y = y(x, c_0)$ جواب خصوصی صادق در شرط اولیه

$$y = y_0 \quad \text{وقتی} \quad x = x_0$$

خوانده می شود.

ویژگی اساسی جواب عمومی (۱۱) آن است که ثابت c موجود در آن را می توان طوری انتخاب کرد که منحنی انتگرال از هر نقطه مفروض در مستطیل مورد نظر بگذرد. قضیه پیکار در فصل یازدهم اثبات می شود. این اثبات کاملاً پیچیده است و احتمالاً بهتر است آن را تا وقتی که خواننده تجربه قابل ملاحظه ای در قسمتهای ساده تر موضوع کسب نماید، به تعویق اندازیم. خود قضیه را می توان با تضعیف فرضهایش در جهات مختلف تقویت کرد و نیز می توان طوری آن را تعمیم داد که در مورد معادلات مرتبه n قابل حل نسبت به مشتق مرتبه m ، به کار رود. توصیف مفصل این نتایج خارج از بحث فعلی است و ما در حال حاضر به بررسی کلی مفاهیم اساسی قناعت می کنیم. در بقیه این فصل بعضی از موارد کاربرد علمی معادلات دیفرانسیل را مورد بررسی قرار می دهیم.

تمرین

۱- تحقیق کنید که توابع (ضمنی یا صریح) زیر، جوابهای معادلات دیفرانسیل مربوط هستند:

$$y' = 2x \quad y = x^2 + c \quad (\text{الف})$$

$$xy' = 2y \quad y = cx^2 \quad (\text{ب})$$

$$yy' = e^{xz} \quad y^2 = e^{xz} + c \quad (\text{ج})$$

$$y' = ky \quad y = ce^{kx} \quad (\text{د})$$

$$y'' + 4y = 0 \quad y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \quad (\text{ه})$$

$$y'' - 4y = 0 \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \quad (\text{و})$$

$$y'' - 4y = 0 \quad y = c_1 \sinh 2x + c_2 \cosh 2x \quad (\text{ز})$$

$$xy' + y = y' \sqrt{1 - x^2} \quad y = \sin^{-1} xy \quad (\text{ح})$$

$$xy' = y + x^2 + y^2 \quad y = x \tan x \quad (\text{ط})$$

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad x^2 = 2y^2 \log y \quad (\text{ی})$$

$$2xyy' = x^2 + y^2 \quad y^2 = x^2 - cx \quad (\text{ک})$$

$$y + xy' = x^2 (y')^2 \quad y = c^2 + c/x \quad (\text{ل})$$

$$y' = y^2 / (xy - x^2) \quad y = ce^{x^2} \quad (\text{م})$$

$$(y \cos y - \sin y + x)y' = y \quad y + \sin y = x \quad (\text{ن})$$

$$1 + y^2 + y^2 y' = 0 \quad x + y = \tan^{-1} y \quad (\text{س})$$

۲- جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بیاید:

$$xy' = 1 \quad (\text{ب}) \quad y' = e^{2x} - x \quad (\text{الف})$$

$$y' = \sin^{-1} x \quad (\text{د}) \quad y' = xe^{x^2} \quad (\text{ج})$$

۳- برای هریک از معادلات دیفرانسیل زیر، جوابی خصوصی بیاید که شرط اولیه داده شده را ارضا کند:

$$x = 1 \text{ وقتی } y = 3, y' = xe^x \quad (\text{الف})$$

$$x = 0 \text{ وقتی } y = 1, y' = 2 \sin x \cos x \quad (\text{ب})$$

$$x = e \text{ وقتی } y = 0, y' = \log x \quad (\text{ج})$$

۳. دسته‌های منحنی. مسیرهای متعامد

دیدیم که جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول معمولاً شامل یک ثابت اختیاری موسوم به «پارامتر» است. وقتی مقادیر مختلفی به این پارامتر نسبت داده می‌شود، یک دسته منحنی تک پارامتری به دست می‌آوریم. هر یک از این منحنیها یک جواب خصوصی، یا منحنی انتگرال، معادله دیفرانسیل مفروض است و همه آنها باهم جواب عمومی آن را تشکیل می‌دهند.

برعکس، همان‌طور که انتظار می‌رود، منحنیهای هر دسته منحنی تک پارامتری، منحنیهای انتگرال یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستند. چنانچه دسته منحنی به صورت زیر باشد:

$$f(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

معادله دیفرانسیلش با انجام مراحل زیر به دست می‌آید. نخست از (۱) به‌طور ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم تا رابطه‌ای به صورت زیر به دست آید:

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right) = 0 \quad (2)$$

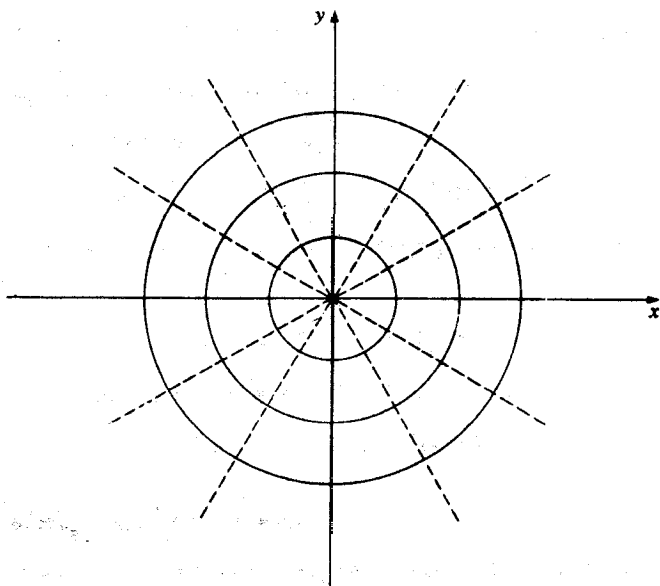
سپس بین روابط (۱) و (۲) پارامتر c را حذف می‌کنیم تا رابطه

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (3)$$

که همان معادله دیفرانسیل مطلوب است، به دست آید. به عنوان مثال، رابطه

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (4)$$

معادله دسته تمام دایره‌ای است که مرکز آنها مبدأ مختصات می‌باشد (شکل ۲).



شکل ۲

بامشتق‌گیری نسبت به x ، این رابطه به صورت زیر درمی‌آید:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

و از آنجایی که c در رابطه اخیر وجود ندارد، نیازی به حذف آن نیست و

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (5)$$

معادله دیفرانسیل دسته دایره‌مفروض است. همین‌طور

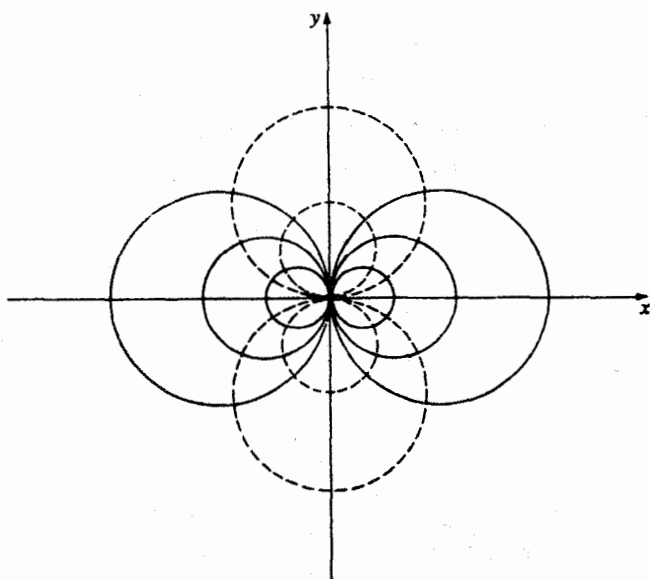
$$x^2 + y^2 = 2cx \quad (۶)$$

معادله دسته تمام دوایری است که در مبدأ مختصات بر محور y مماس هستند، (شکل ۳). وقتی از طرفین این معادله نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 2c$$

یا

$$x + y \frac{dy}{dx} = c \quad (۷)$$



شکل ۳

از آنجا که پارامتر c هنوز در (۷) وجود دارد، لازم است که آن را با ترکیب روابط (۶) و (۷) حذف کنیم. این عمل نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad (۸)$$

و این معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای (۶) است.

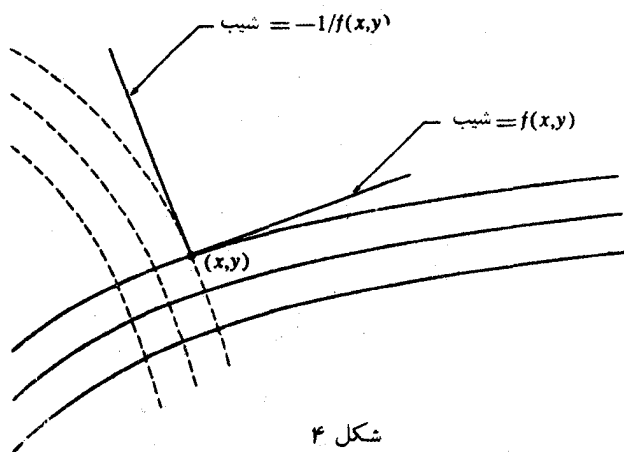
به عنوان یک کاربرد جالب این عملیات مسئله یافتن مسیرهای متعامد را بررسی می‌کنیم. برای آنکه توضیح داده باشیم که این مسئله چیست، مشاهده می‌کنیم که دسته دوایر نمایش داده شده به وسیله رابطه (۴) و دسته خطوط مستقیمی که از مبدأ مختصات می‌گذرند،

یعنی $y = mx$ (خطوط نقطه چین شکل ۲) خاصیت زیر را دارند: هر منحنی در هریک از دسته‌ها بر تمام منحنیهای دسته دیگر عمود است، هر گاه دو دسته منحنی بدین طریق به هم دیگر مربوط شوند، هریک را دسته مسیرهای متعامد دسته دیگری نامند. مسیرهای متعامد در هندسه منحنیهای مسطح و نیز در بعضی قسمتهای ریاضیات کار بسته مورد توجه هستند. برای مثال، چنانچه جریان الکتریکی در یک ورقه مسطح هادی جاری شود، خطوط هم‌پتانسیل، مسیرهای متعامد خطوط جریان هستند.

در مثال مربوط به دواپری که مرکزشان مبدأ است، از لحاظ هندسی واضح است که مسیرهای متعامد خطوط مستقیمی هستند که از مبدأ می‌گذرند و برعکس. ولی برای اینکه از عهده تشریح حالات پیچیده‌تر برآییم، به یک روش تحلیلی برای یافتن مسیرهای متعامد نیاز داریم. فرض کنید که

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (۹)$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای باشد که با خط پر در شکل (۴) نشان داده شده‌اند. این منحنیها این گونه مشخص می‌شوند که شیب هریک از آنها در هر نقطه (x, y) واقع بر آن منحنی برابر با $f(x, y)$ است.



شکل ۴

مسیر متعامد نقطه‌چینی که از همان نقطه (x, y) می‌گذرد، بر منحنی اول عمود است و شیب آن منفی معکوس شیب اولی است. بنابراین، در امتداد هر مسیر متعامد، داریم

$$dy/dx = -1/f(x, y)$$

$$-\frac{dx}{dy} = f(x, y) \quad (۱۰)$$

بنابراین روش ما برای یافتن مسیرهای متعامد یک دسته منحنی مفروض به قرار زیر است: ابتدا، معادله دیفرانسیل دسته منحنیها را می‌یابیم و سپس $-dx/dy$ را به جای dy/dx

در آن می‌گذاریم تا معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد به‌دست آید و سرانجام این معادله دیفرانسیل جدید را حل می‌کنیم.

با کار بست روش مذکور در مورد دسته دوایر رابطه (۴)، نتیجه می‌شود که معادله

$$x + y \left(-\frac{dx}{dy} \right) = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (11)$$

معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد می‌باشد. حال می‌توان متغیرها را در (۱۱) جدا نمود و نتیجه گرفت

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

انتگرال‌گیری مستقیم از این رابطه چنین نتیجه می‌دهد که

$$\log y = \log x + \log c$$

یا

$$y = cx$$

معادله مسیرهای متعامد است.

اغلب مناسب است که دسته منحنیهای داده شده را بر حسب مختصات قطبی بیان کنیم. در این حالت از این موضوع استفاده می‌کنیم که اگر ψ زاویه بین شعاع حامل و خط مماس باشد، آنگاه $\tan \psi = r \frac{d\theta}{dr}$ (شکل ۵). با استناد به بحث بالا، برای یافتن معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد در معادله دیفرانسیل دسته منحنیهای داده شده به‌جای این عبارت، منفی عکس آن یعنی $-dr/r d\theta$ را می‌گذاریم. به‌عنوان مثالی برای روشن کردن ارزش این تکنیک، مسیرهای متعامد دسته دوایر رابطه (۶) را پیدا می‌کنیم. چنانچه از مختصات قائم استفاده کنیم از رابطه (۸) نتیجه می‌شود که معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد عبارت است از

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad (12)$$

متأسفانه در این معادله متغیرها را نمی‌توان از یکدیگر جدا نمود و لذا بدون آگاهی از تکنیک‌های بیشتری در مورد حل معادلات دیفرانسیل نمی‌توانیم قدمی فراتر بگذاریم. ولی اگر از مختصات قطبی استفاده کنیم، معادله دسته منحنیها را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$r = 2c \cos \theta \quad (13)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{dr}{d\theta} = -rc \sin \theta \quad (۱۴)$$

و پس از حذف c بین (۱۳) و (۱۴) به این نتیجه می‌رسیم که

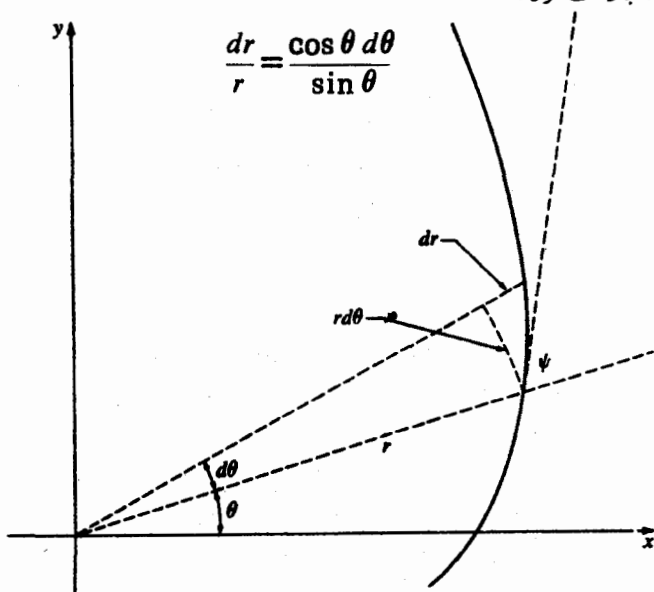
$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی داده شده است. در نتیجه

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد آن است. در این حالت متغیرها را می‌توان جدا کرد و رابطه زیر را به دست آورد:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$



شکل ۵

پس از انتگرال‌گیری مشاهده می‌کنیم که معادله

$$\log r = \log (\sin \theta) + \log rc$$

یا

$$r = rc \sin \theta \quad (۱۵)$$

معادلهٔ مسیوهای متعامد است. توجه کنید که رابطه (۱۵) معادلهٔ دستهٔ تمامی دایری است که در مبدأ مختصات بر محور xy مماس اند (به منحنیهای نقطه‌چین شکل ۳ مراجعه شود).
 در فصل ۲ تعدادی از شیوه‌های کاملتر حل معادلات مرتبهٔ اول را بررسی می‌کنیم. از آنجایی که توجه فعلی ما بیشتر به کاربردها مبدول می‌شود تا به روشهای صوری، تمامی مسائل داده شده در این فصل به وسیلهٔ روش جدا کردن متغیرها، یعنی به همان طریقی که در بالا ملاحظه کردیم، حل می‌شوند.

تمرین

۱- هر يك از دسته منحنیهای زیر را رسم کنید، مسیرهای متعامد مربوطه را بیایید و آنها را نیز به شکل اضافه کنید:

$$r = c(1 + \cos \theta) \quad \text{(ج)} \quad xy = c \quad \text{(الف)}$$

$$y = ce^x \quad \text{(د)} \quad y = cx^2 \quad \text{(ب)}$$

۲- دسته سهمیهای $y^2 = 2c(x+c)$ را که محور آنها، محور xy و کانون آنها، مبدأ مختصات است رسم کنید و معادلهٔ دیفرانسیل این دسته منحنی را بیایید. نشان دهید که این معادلهٔ دیفرانسیل وقتی که dy/dx با $-dx/dy$ جایگزین شود تغییر نمی‌کند. از این موضوع چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۳- منحنیهایی را بیایید که در هر يك از شرایط هندسی زیر صدق کنند:
 الف) قسمتی از مماس بر منحنی که به محورهای مختصات محدود شده است، توسط نقطهٔ تماس به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

ب) طول تصویر قسمتی از خط عمود بر منحنی واقع بین نقطهٔ (x, y) و محور xy ، بر روی محور xy ها برابر با واحد باشد.

ج) طول تصویر قسمتی از خط مماس بر منحنی واقع بین نقطهٔ (x, y) و محور xy ها، بر روی محور xy ها برابر با واحد باشد.

د) زاویهٔ قطبی θ و زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس بر منحنی (زاویهٔ ψ) برابر باشند یعنی، $\theta = \psi$.

ه) زاویهٔ ψ بین شعاع و مماس، ثابت باشد.

۴- يك منحنی از مبدأ در صفحهٔ xy شروع می‌شود و در ربع اول صفحهٔ مختصات گسترش می‌یابد. مساحت سطح زیر منحنی از نقطهٔ $(0, 0)$ تا نقطهٔ (x, y) يك سوم مساحت سطح مربع مستطیلی است که دو نقطهٔ یاد شده دو رأس متقابل آن هستند. معادلهٔ این منحنی را بیایید.

۴. رشد، تلاشی و واکنشهای شیمیایی

اگر در مولکولی این گرایش وجود داشته باشد که خود به خود به مولکولهای کوچکتری تجزیه شود و آهنگ این تلاشی (تجزیه) از حضور مواد دیگر تأثیر نپذیرد، طبیعی است که

انتظار داشته باشیم تعداد این نوع مولکولها که در واحد زمان تلاشی می شوند متناسب با مقدار کل مولکولهای موجود باشد. این گونه واکنشهای شیمیایی را واکنشهای مرتبه اول می نامند.

به عنوان مثال فرض کنید که در آغاز کار x گرم از ماده موجود باشد و در یک واکنش مرتبه اول تلاشی شود. اگر در زمان بعدی t ، جرم ماده x گرم باشد. آنگاه اصل فوق الذکر معادله دیفرانسیل زیر را به دست می دهد.

$$-\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0 \quad (1)$$

[از آنجایی که dx/dt آهنگ رشد x می باشد، $-dx/dt$ آهنگ تلاشی است و رابطه (۱) چنین بیان می کند که آهنگ تلاشی x متناسب با x است.] چنانچه متغیرهای رابطه (۱) را جدا کنیم، حاصل چنین می شود:

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

که بعد از انتگرال گیری به صورت زیر در می آید

$$\log x = -kt + c$$

اعمال شرط اولیه

$$t=0 \quad x=x_0 \quad (2)$$

در رابطه اخیر نتیجه می دهد $c = \log x_0$ ، پس

$$\log x = -kt + \log x_0, \quad \log(x/x_0) = -kt, \quad x/x_0 = e^{-kt},$$

و

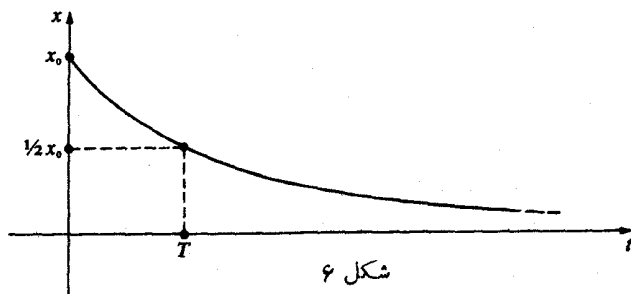
$$x = x_0 e^{-kt} \quad (3)$$

بنابراین این تابع جواب معادله دیفرانسیل (۱) است که در شرط اولیه (۲) صدق می کند. نمودار تابع (۳) در شکل (۶) رسم شده است. ثابت مثبت k ، ثابت آهنگ تغییر نامیده می شود، زیرا مقدار آن نشان دهنده آهنگ پیشرفت این واکنش است.

تعداد خیلی کمی از واکنشهای شیمیایی مرتبه اول شناخته شده اند که مهمترین آنها تلاشی رادیو اکتیو است.

مناسب است که آهنگ تلاشی یک عنصر رادیو اکتیو را بر حسب نیم عمرش بیان کنیم، که عبارت است از زمان لازم برای آنکه مقدار معینی از عنصر مورد نظر به نصف تقلیل یابد. اگر در فرمول (۳) $x_0/2$ را به جای x بگذاریم، معادله زیر را به دست خواهیم آورد

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kt}$$



که در آن T نیم عمر عنصر می باشد، بنا براین

$$kT = \log 2$$

بامعلوم بودن یکی از مقادیر k یا T (از طریق مشاهده یا تجربه)، به کمک رابطه بالا، می توان دیگری را تعیین کرد.

این ایده ها اساس ابزار علمی نسبتاً جدیدی هستند که در زمین شناسی و باستان شناسی از اهمیت خاصی برخوردار است. اصولاً از عناصر رادیواکتیوی که در طبیعت یافت می شوند (بانیوم عمر شناخته شده) می توان برای تعیین تاریخ وقایعی که از چند هزار تا چند میلیارد سال قبل اتفاق افتاده است استفاده کرد. مثلاً ایزوتوپ معمولی اورانیوم بانیوم عمر ۴٫۵ میلیارد سال، طی چند مرحله به هلیوم و یک ایزوتوپ سرب متلاشی می شود. وقتی که یک صخره شامل اورانیوم به حالت گداخته باشد، نظیر گدازه ای که از دهانه کوه آتشفشان بیرون می ریزد، سرب حاصله از این روند تلاشی، بر اثر جریانهای موجود در گدازه پراکنده می شود، اما پس از آن که صخره به صورت جامد درآمد، سرب در جای خود سخت می شود و در کنار اورانیوم مادر (اولیه) به طور پیوسته انباشته می گردد. تجزیه قطعه ای از گرانیست می تواند نسبت سرب به اورانیوم را تعیین کند و این نسبت، تخمین مدت زمان سپری شده از لحظه بحرانی (که گرانیست به صورت بلور درآمد است) را امکان پذیر می سازد. برای تعیین عمر چندین روش که در آنها تلاشی توریم و ایزوتوپهای اورانیوم به ایزوتوپهای مختلف سرب، به کار می روند متداول است. روش دیگر مبتنی بر تلاشی پتاسیم به آرگون، بانیوم عمر ۱٫۳ میلیارد سال است، اما روش دیگری که برای تعیین عمر قدیمی ترین صخره ها ارجحیت دارد، روشی است که مبتنی بر تلاشی روییدوم به استرانسیوم، بانیوم عمر ۵ میلیارد سال است. این بررسی ها پیچیده اند و نسبت به انواع بسیاری از خطاها حساس هستند و لیکن اغلب می توان از یکی برای تحقیق درستی نتیجه حاصل از دیگری استفاده نمود و به کمک آنها می توان تاریخهای قابل اطمینانی برای بسیاری از حوادث تاریخ زمین شناسی که با تشکیل صخره های آذرین مرتبطند، بدست آورد. صخره های بادهای میلیون سال عمر، کاملاً جوان هستند. حوزه عمر صدها میلیون سال امری عادی است و کهنسالترین صخره هایی که تا به حال کشف شده اند عمرشان به بیش از ۳ میلیارد سال می رسد. البته این حد پایینی برای عمر پوسته زمین و بنا براین برای خود زمین است. بر اساس بررسی های دیگری که از انواع گوناگون اطلاعات نجومی، تعیین عمر کانیهای موجود در سنگهای آسمانی و نظیر آنها استفاده می کند، عمر احتمالی زمین

حدود ۴۵ میلیارد سال برآورد شده است.^۱

عناصر رادیواکتیو فوق‌الذکر آن‌چنان به‌کندی متلاشی می‌شوند که روشهای تعیین عمر مبتنی بر آنها برای تعیین زمان حوادثی که در زمانی نسبتاً جدید اتفاق افتاده است، مناسب نیستند. این شکاف با کشف رادیوکرین توسط ویلارد لیبی^۲ در اواخر دهه ۱۹۴۰ پر شد. رادیوکرین یک ایزوتوپ رادیواکتیو کرین با نیم عمر حدود ۵۶۰۰ سال است. در سال ۱۹۵۰، لیبی و همکارانش تکنیک تاریخ‌گذاری رادیوکرین را تکمیل کردند. این تکنیک تاریخ‌گذاری، ساعت‌های زمین‌شناسی کند فوق‌الذکر را تکمیل کرد و امکان تعیین زمان حوادث مراحل جدید تردوران یخبندان و بعضی حرکات و فعالیت‌های بشر ماقبل تاریخ را فراهم آورد. سهم این روش در زمین‌شناسی و باستان‌شناسی پلیستوسن (عصر چهارم زمین‌شناسی) قابل توجه بوده است.

به‌طور خلاصه، حقایق و اصول مربوط به این موضوع، به‌قرار زیرند. رادیوکرین تحت تأثیر عمل نوترون‌های اشعه کیهانی بر ازلت، در لایه‌های بالایی جو تولید می‌شود. این رادیوکرین به‌دی اکسید کرین اکسیده می‌شود. این دی اکسید کرین به‌نوبه خود به‌وسیله باد، با دی اکسید کرین غیر رادیواکتیو موجود مخلوط می‌شود. از آنجا که رادیوکرین پیوسته ایجاد می‌شود و به‌طور دائم نیز به‌ازت تجزیه می‌شود، نسبت آن به کرین معمولی در جو، دیرزمانی است که به‌حالت تعادل رسیده است. همگی نباتات هوازی و همچنین حیواناتی که از این گیاهان تغذیه می‌کنند، این قسم رادیوکرین را به‌یافتهای خود وارد می‌کنند. مادامی که یک گیاه یا حیوان زنده است، نسبت این رادیوکرین ثابت باقی می‌ماند، لیکن وقتی آن گیاه یا حیوان می‌میرد، از جذب رادیوکرین جدید باز می‌ایستد، در حالی که رادیوکرین موجود در هنگام مرگ، روند پایدار تلاشی را ادامه می‌دهد. بنابراین، اگر یک قطعه چوب سال‌خورده نیمی از رادیواکتیویته یک درخت زنده را دارا باشد، عمرش ۵۶۰۰ سال و اگر فقط یک چهارم آن را دارا باشد، عمرش ۱۱۲۰۰ سال است. این اصل روشی برای تاریخ‌گذاری هر جسم قدیمی که منشأ آلی داشته باشد، مثل چوب، زغال‌چوب، الیاف گیاهی، گوشت، پوست، استخوان یا شاخ، به‌دست می‌دهد. اعتبار این روش با به‌کار بردن آن در مورد مغز چوب درختان «غول» کالیفرنیا که با توجه به دوایر رشدشان، عمری بین ۳۰۰۰ تا ۴۰۰۰ سال دارند و در مورد وسایل قبور مصری که عمرشان مستقلاً شناخته شده، تحقیق گردیده است. در این زمینه، اشکالاتی عملی وجود دارد، ولیکن این روش به‌شرط آنکه فاصله زمانی مورد نظر زیاد نباشد (کمتر از ۵۰۰۰۰ سال)، از دقت قابل ملاحظه‌ای برخوردار است.

تاریخ‌گذاری به‌طریق رادیوکرین در مورد هزاران نمونه به‌کار بسته شده است و دهها آزمایشگاه این نوع کارها را انجام می‌دهند. از جالب‌ترین موارد تخمین عمر، چند نمونه زیر را می‌توان نام برد: لفاف کتابی اشعیای نبی از طومارهای بحرالمیت که اخیراً

۱. برای بحث کامل پیرامون این موضوع و نیز بسیاری روشهای دیگر و نتایج حاصل از علم زمین‌شناسی رجوع کنید به

F.E. Zeuner, «Dating the Past.» 4th ed. Methuen, London, 1958.

2. Willard Libby

درغاری در فلسطین یافت شده و تصور شده است که مربوط به قرن اول یساروم قبل از میلاد مسیح باشد، ۲۰۰ ± ۱۹۱۷ سال؛ زغال یافته شده در غار لاسکوک^۱ در جنوب فرانسه، که دارای نقاشیهای قابل توجهی از دوران ماقبل تاریخ می باشد، ۹۰۰ ± ۱۵۵۱۶ سال؛ زغال مربوط به آثار پیش از تاریخ در استون هنج^۲ در جنوب انگلستان، ۲۷۵ ± ۳۷۹۸ سال، زغال متعلق به یک درخت سوخته شده در زمان انفجار آتشفشانی که دریاچه کریتر^۳ را در اورگون^۴ به وجود آورد، ۲۵۰ ± ۴۵۳۶ سال؛ زیستگاههای انسان باستان در سرانیمکره غربی با استفاده از قطعات زغال چوب، صندلهای الیافی، خردههای استخوان سوخته شده نوعی گاو میش و نظایر اینها، تاریخ گذاری شده است. نتایج حاصله حاکی از آن است که انسان در حدود دوران آخرین عصر یخبندان یعنی حدود ۱۱۵۰۰ سال قبل به دنیای جدید پانهاد. در آن زمان سطح آب اقیانوسها اساساً پایین تر از سطح کنونی بود و بشر آن زمان می توانست مسیر سیبری به آلاسکا را از طریق تنگه برینگ^۵، پیاده طی کند.^۶

شاید به نظر برسد که این ایده ها از موضوع معادلات دیفرانسیل نسبتاً دور هستند. ولی عملاً متکی بر پایه ریاضی عرضه شده توسط معادله (۱) و جواب آن که توسط فرمول (۳) داده شده است، می باشند. در مسائل زیر از خواننده خواهیم خواست که شیوه های مشابهی را در سؤالات مطروحه در شیمی، زیست شناسی و فیزیک به کار برد.

تمرین

- ۱- فرض کنید که دوماه شیمیایی به صورت محلول بایکدیگر واکنش انجام می دهند تا ترکیبی را بسازند. اگر واکنش به وسیله برخورد و اندرکنشهای مولکولهای این دوماه انجام پذیرد، انتظاری رود که نرخ تشکیل ترکیب، متناسب با تعداد برخوردها در واحد زمان باشد، که این به نوبه خود با مقادیر مواد تبدیل نشده متناسب است. هر واکنش شیمیایی که به این صورت انجام شود به واکنش مرتبه دوم موسوم است و از این قانون واکنش اغلب به نام قانون اثر جرم یاد می شود. واکنش مرتبه دومی را در نظر بگیرید که در آن x گرم از ترکیب شامل ax گرم از ماده اول و bx گرم از ماده دوم باشد به طوری که $a+b=1$. چنانچه در ابتدای آزمایش aA گرم از ماده اول و bB گرم از ماده دوم موجود باشد و در $t=0$ داشته باشیم $x=0$ ، مطلوب است تعیین x به صورت تابعی از t .
- ۲- فرض کنید که در زمان $t=0$ تعداد x باکتری در یک محلول غذایی گذاشته شده باشند

1. Lascaux
2. Stonehenge
3. Crater
4. Oregon
5. Bering Straits

۶. لیبی جایزه نوبل سال ۱۹۶۰ را در شیمی به خاطر کاری که در بالا شرح دادیم از آن خود ساخت. شرح خود او از این روش همراه با دشواریها و نتایج آن را می توان در کتاب وی به نام «Radiocarbon Dating», 2nd. ed. University of Chicago Press, 1955 یافت. همچنین به کتاب

G.C. Baldwin, «America's Buried Past» Putnam, New York, 1962

رجوع کنید.

و x تعداد باکتریها در زمان t باشد. چنانچه غذا و محیط زیست نامحدود باشد در نتیجه، تعداد باکتریها در هر لحظه با آهنگی متناسب با تعداد باکتریها در آن لحظه، افزایش یابد، x را به صورت تابعی از t به دست آورید.

۳- اگر در مسئله ۲، محیط زیست محدود باشد و مواد غذایی باکتریها با آهنگ ثابتی تأمین شود، آنگاه رقابتی بر سر تأمین غذا و محیط زیست به میان خواهد آمد، به طوری که سرانجام تعداد باکتریها در سطح ثابت x_1 تثبیت خواهد شد. به فرض آنکه تحت این شرایط آهنگ رشد تعداد باکتریها هم با x و هم با $x - x_1$ متناسب باشد، x را به صورت تابعی از t بیابید.

۴- فرض کنید که فشار p هوا در ارتفاع h از سطح دریا، متناسب با جرم ستون هوای بالای واحد سطح افقی در آن ارتفاع باشد و نیز این که حاصلضرب حجم در فشار برای جرم معینی از هوا در تمام ارتفاعات، ثابت بماند. اگر در سطح دریا $p = p_0$ باشد، p را به صورت تابعی از h به دست آورید.

۵- فرض کنید که آهنگ سرد شدن یک جسم داغ، با اختلاف دمای بین آن جسم و محیط اطرافش متناسب باشد. (قانون سرد شدن نیوتن) ^۱ جسمی تادمای 110°C گرم می شود و سپس در هوای 10°C قرار می گیرد. پس از یک ساعت دمای آن به 60°C می رسد. چه مدت دیگر برای سرد شدن جسم تادمای 30°C لازم است؟

۶- مطابق «قانون جذب لامبرت» ^۲، درصد نور تابشی جذب شده به وسیله لایه نازکی از ماده نیمه شفاف، متناسب با ضخامت لایه است. ^۱ اگر نور خورشید با تابش قائم بر آب اقیانوس، در عمق ۳ متری به یک دوم شدت اولیه اش کاهش یابد، در چه عمقی به یک شانزدهم شدت اولیه اش کاهش خواهد یافت؟ این مسئله را مستقیماً، و همچنین با تشکیل و حل یک معادله دیفرانسیل حل کنید.

۵. سقوط اجسام و دیگر مسائل مربوط به آهنگ تغییرات

در این بخش، مسئله دینامیکی تعیین حرکت یک ذره را روی یک مسیر مفروض و تحت اثر نیروهای مفروض بررسی می کنیم. در اینجا تنها دو حالت ساده را مدنظر قرار می دهیم: یکی مسبر قائم که در آن، ذره یا آزادانه تحت تأثیر نیروی ثقل تنها، و یا با به حساب آوردن نیروی مقاومت هوا سقوط می کند؛ و دیگری مسیر دایره ای که نمونه اش حرکت گلوله یک آونگ است.

سقوط آزاد. مسئله سقوط آزاد جسم را در بخش ۱ مورد بحث قرار دادیم و به معادله

۱. نیوتن خود این قاعده را برای تخمین دمای یک گلوله آهنی سرخ داغ به کار برد. در آن زمان اطلاعات موجود در مورد قوانین انتقال حرارت آن قدر کم بود، که نتیجه گیری او تقریب خامی بیش نبود، اما بیشک بهتر از هیچ بود.

۲. یوهان هاینریش لامبرت «Johann Heinrich Lambert» منجم، ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی-سوئیسی و مردی اهل علم بود. او اساساً خود آموخته بود و آشناری درباره مدارهای ستاره های دنباله دار، نظریه نور و ساختن نقشه ها انتشار داد. روش تصویر هم مساحت لامبرت را تمامی نقشه کشان نجومی می شناسند. در بین ریاضیدانان از او به عنوان اولین کسی که گنگ بودن π را اثبات نمود، یاد می شود.

دیفرانسیل زیر دست یافتیم:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g \quad (۱)$$

که در آن، y ارتفاع جسم از يك مكان ثابت است. انتگرال گیری از طرفین رابطه (۱)، معادله سرعت را به دست می دهد

$$v = \frac{dy}{dt} = gt + c_1 \quad (۲)$$

چون ثابت c_1 ، بوضوح، مقدار v در لحظه $t = 0$ است، لذا c_1 سرعت اولیه v_0 است و رابطه (۲) به صورت زیر درمی آید:

$$v = \frac{dy}{dt} = gt + v_0 \quad (۳)$$

حاصل انتگرال گیری از این رابطه چنین می شود:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c_2$$

ثابت c_2 مقدار y در لحظه $t = 0$ و یا موضع اولیه y_0 است. بنابراین در نهایت چنین به دست می آوریم

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \quad (۴)$$

که جواب عمومی معادله (۱) می باشد. اگر جسم سقوط را از حال سکون و در نقطه $y = 0$ شروع کرده باشد، در نتیجه $v_0 = y_0 = 0$ است و روابط (۳) و (۴) به صورت زیر درمی آیند:

$$v = gt \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

حذف t بین این دو رابطه معادله مفید زیر را به دست می دهد:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (۵)$$

این معادله سرعت را بر حسب مسافت سقوط بیان می کند. از اصل پایستگی انرژی نیز می توان به نتیجه مذکور دست یافت. اصل پایستگی انرژی می گوید:

مقدار ثابت = انرژی پتانسیل + انرژی جنبشی

چون در $y = 0$ جسم از حال سکون سقوط می کند، این امر که انرژی جنبشی کسب شده برابر با انرژی پتانسیل از دست رفته است، نتیجه می دهد که

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

واز آن رابطه (۵) مستقیماً به دست می‌آید.

سقوط تأخیری. اگر فرض کنیم که هوا بر جسم سقوط کننده نیروی مقاومی متناسب با سرعت آن وارد می‌کند، معادله دیفرانسیل حرکت چنین خواهد شد:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - c \frac{dy}{dt} \quad (۶)$$

که در آن $c = k/m$ [معادله ۱-۳] را ببینید. با گذاشتن v به جای dy/dt ، رابطه اخیر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dv}{dt} = g - cv \quad (۷)$$

متغیرهای این معادله را جدا می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{g - cv} = dt$$

و

$$-\frac{1}{c} \log(g - cv) = t + c_1$$

لذا

$$g - cv = c_2 e^{-ct}$$

از شرط اولیه $v = 0$ در لحظه $t = 0$ ، نتیجه می‌شود $c_2 = g$ ، پس

$$v = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}) \quad (۸)$$

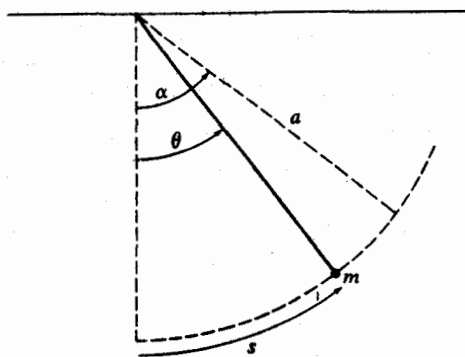
از آنجا که c مثبت است، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، داریم $v \rightarrow g/c$. این مقدار حدی را سرعت نهایی می‌نامند. اگر بخواهیم، می‌توانیم در رابطه (۸) به جای v ، dy/dt بگذاریم و دوباره انتگرال گیری کنیم و y را به صورت تابعی از t بیابیم.

حرکت آونگ. آونگی را در نظر می‌گیریم که شامل گلوله‌ای به جرم m ، متصل به انتهای میله‌ای به طول a و جرم ناچیز است. اگر گلوله چنان به یک طرف کشیده شود که با امتداد قائم زاویه α بسازد و سپس رها شود (شکل ۷)، طبق اصل پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(a \cos \theta - a \cos \alpha) \quad (۹)$$

از آنجا که $s = a\theta$ و $v = ds/dt = a(d\theta/dt)$ ، این رابطه چنین می‌شود:

$$\frac{1}{2} a^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = ga(\cos \theta - \cos \alpha), \quad (10)$$



شکل ۷

حال رابطه اخیر را، نسبت به t حل می‌کنیم، با توجه به اینکه برای مقادیر کوچک t ، θ با افزایش t کاهش می‌یابد

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}$$

اگر T دوره تناوب، یعنی مدت زمان لازم برای يك نوسان کامل باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{T}{2} = -\sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{\alpha}^{\circ} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}$$

یا

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{\circ}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} \quad (11)$$

مقدار T در این فرمول به α بستگی دارد و به همین دلیل است که آهنگ نمایش زمان در ساعت‌های آونگی بسته به این که گلوله آونگ زاویه کوچکتر یا بزرگتری را بپیماید، تغییر می‌کند. این فرمول دوره تناوب را می‌توان به صورت مناسب‌تری مطابق زیر بیان نمود. از آنجا که

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

و

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

داریم

$$T = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)}} \\ = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}} \quad , \quad k = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (12)$$

حال با نوشتن $\sin(\theta/2) = k \sin \phi$ ، متغیر را از θ به ϕ تبدیل می‌کنیم، به طوری که وقتی θ از ۰ تا α افزایش می‌یابد، ϕ از ۰ تا $\pi/2$ افزایش یابد و داریم:

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \phi d\phi$$

یا

$$d\theta = \frac{2k \cos \phi d\phi}{\cos(\theta/2)} = \frac{2\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)} d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

این رابطه ما را قادر می‌سازد که رابطه (۱۲) را به صورت زیر بنویسیم:

$$T = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} F(k, \pi/2) \quad (13)$$

که در آن

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

تابعی است از k و ϕ و انتگرال بیضوی از نوع اول^۱ نامیده می‌شود. انتگرال بیضوی از نوع دوم،

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi,$$

در رابطه با مسئله یافتن محیط بیضی (مسئله ۵ را ببینید) ظاهر می‌شود. این انتگرالهای بیضوی را نمی‌توان بر حسب توابع مقدماتی محاسبه نمود. چون این انتگرالها به وفور در کاربردهای مهندسی ظاهر می‌شوند، غالباً مقادیرشان به عنوان توابع عددی از k و ϕ ، در جدولهای ریاضی داده می‌شود.

بحث در مورد مسئله آونگ تا اینجا روی معادله مرتبه اول (۱۰) متمرکز بوده است. برای مقاصد خاصی مناسب‌تر است که معادله مرتبه دومی را اختیار کنیم که از مشتق-

۱. مرسوم است که در مورد انتگرالهای بیضوی برخلاف روش معمول، حد بالایی و متغیر ظاهری زیر انتگرال را با یک حرف نشان می‌دهند.

گیری (۱۰) نسبت به t حاصل می‌شود:

$$a \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta \quad (14)$$

حال اگر به خاطر آوریم که برای مقادیر کوچک θ عبارت $\sin \theta$ تقریباً برابر θ است، از رابطه (۱۴) معادله تقریبی زیر حاصل می‌شود

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{a} \theta = 0 \quad (15)$$

بعداً خواهیم دید که جواب عمومی معادله مرتبه دوم مهم زیر

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

عبارتست از

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

بنابراین، از رابطه (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\theta = c_1 \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t + c_2 \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \quad (16)$$

شرط اولیه $\theta = \alpha$ و $d\theta/dt = 0$ در $t = 0$ نتیجه می‌دهد که $c_2 = \alpha$ و $c_1 = 0$ و از آنجا رابطه (۱۶) چنین خواهد شد

$$\theta = \alpha \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \quad (17)$$

دوره تناوب این جواب تقریبی معادله (۱۴)، برابر $2\pi\sqrt{a/g}$ می‌باشد. جالب توجه است که این مقدار دقیقاً برابر با مقدار T حاصل از رابطه (۱۳) برای $k = 0$ است، که وقتی آونگ تحت زوایای بسیار کوچکی نوسان کند، تقریباً درست است.

تمرین

۱- اگر مقاومت هوا نیروی کندکننده‌ای متناسب با مجذور سرعت بر جسمی در حال سقوط به جرم m وارد کند، رابطه (۷) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^2$$

که در آن $c = k/m$. اگر در لحظه $t = 0$ ، $v = 0$ را به صورت تابعی از t بیابید. سرعت نهایی در این حالت چقدر است؟

۲- يك اژدر، در لحظه‌ای که سوختش به اتمام می‌رسد، با تندی ۱۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت است. چنانچه نیروی مقاومت آب متناسب با تندی اژدر باشد و اگر پس از طی مسافت يك کیلومتر ونیم، تندی حرکت اژدر به ۵۰ کیلومتر در ساعت کاهش یابد، اژدر چه مسافتی را پس از اتمام سوخت طی خواهد کرد؟^۱

۳- نیروی ثقل وارد بر جسمی به جرم m در سطح زمین برابر با mg است. ولسی، در فضا، بنا به قانون گرانش نیوتن این نیرو با عکس مجذور فاصله جسم تا مرکز زمین متناسب است. اگر قرار باشد خمپاره‌ای که از سطح زمین، به طرف بالا شلیک شده است، به طور نامحدود به حرکت خود ادامه دهد، نشان دهید که سرعت اولیه خمپاره باید حداقل برابر با $\sqrt{2gR}$ باشد که در آن، R شعاع کره زمین (۶۴۰۰ کیلومتر) است. این سرعت فراد تقریباً ۱۱ کیلومتر در ثانیه و یا حدود ۴۰۰۰۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد.
(راهنمایی: اگر x فاصله خمپاره تا مرکز کره زمین و $v = dx/dt$ سرعت آن باشد، آنگاه

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

۴- در درون زمین، نیروی ثقل متناسب با فاصله تا مرکز است. اگر سوراخی از يك قطب زمین به قطب دیگر آن حفر شود و سنگی در این سوراخ رها شود، با چه سرعتی به مرکز زمین خواهد رسید؟

۵- نشان دهید که محیط بیضی $x = a \cos \theta$ و $y = b \sin \theta$ ، به فرض $a < b$ ، برابر است با $\frac{1}{2} \pi b^2 e$ که در آن، e خروج از مرکز بیضی است.

۶- نشان دهید که طول يك کمان از منحنی $y = \sin x$ برابر $\frac{1}{2} \pi$ است.

۷- نشان دهید که طول کل منحنی پروانه به معادله $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ برابر با $\frac{1}{2} \pi a^2$ می‌باشد.

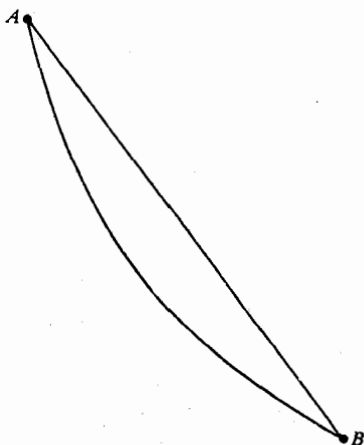
۶. منحنی کوتاهترین زمان. فرما و برنولی‌ها

تصور کنید که نقطه A به وسیله سیم مستقیمی به نقطه پایتتر B ، در شکل ۸، متصل باشد و مهره‌ای بتواند بدون اصطکاک از A تا B روی سیم بلغزد. همچنین، می‌توانیم حالتی را در نظر بگیریم که در آن سیم به صورت قوسی از دایره درآمده باشد، به طوری که حرکت مهره، همانند گلوله آونگ در حال پایین رفتن باشد. در کدام مسیر، مهره کمترین زمان را برای رسیدن از A به B لازم دارد، در امتداد مسیر مستقیم یا در امتداد مسیر دایره‌ای؟ گالیله بر این اعتقاد بود که مهره در امتداد مسیر دایره‌ای سریعتر پایین خواهد آمد و احتمالاً سایرین نیز اغلب با او هم عقیده بودند. سالها بعد، در سال ۱۶۹۶، یوهان برنولی^۲ مسئله‌ای عمومیتر

۱. در بررسی مسائل دینامیکی با استفاده از بر دارها، کلمات سرعت و تندی از یکدیگر کاملاً متمایز هستند. اما در حالت‌های نسبتاً ساده می‌توانیم (و مرسوم است که) این دو را کم و بیش معادل یکدیگر در نظر بگیریم.

مطرح نمود. او سیمی را در نظر گرفت که به شکل یک منحنی دلخواه خمیده شده بود و این سؤال را مطرح کرد که در بین بینهایت منحنی ممکن، روی کدام یک مهره در کوتاهترین زمان پایین خواهد آمد؟ این منحنی، موسوم به منحنی کوتاهترین زمان^۱ است. هدف این بخش، درک جواب شگفت‌انگیز برنولی برای این مسئله^۲ زیباست.

مطلب را با بررسی مسئله‌ای از مبحث نور که به این موضوع نامربوط به نظر می‌رسد شروع می‌کنیم. شکل ۹ (الف) حالتی را نشان می‌دهد که در آن پرتوی نورانی با سرعت v_1 از A به P می‌رود و سپس به محیطی غلیظ‌تر وارد می‌شود و با سرعت کمتر v_2 از P به B می‌رود.



شکل ۸

زمان کل لازم برای رفتن از A به B ، برحسب حروف به کار رفته در شکل برابر است با:

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

اگر فرض کنیم که این پرتو نورانی قادر است برای رفتن از A به B مسیری را اختیار کند که زمان T کمترین شود، در آن صورت $dT/dx = 0$ و به کمک روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

و یا

۱. brachistochrone، که از دو کلمه یونانی brachistos به معنای کوتاهترین و chronos به معنای زمان تشکیل شده است.

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

این قانون شکست اسنل^۱ است که ابتدا به طور تجربی و به صورت ساده‌تر (ثابت) $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 =$ کشف شد. این فرض را که نور برای رفتن از نقطه‌ای به نقطه دیگر مسیری را می‌پیماید که به حداقل زمان نیاز باشد، اصل حداقل زمان فرما می‌نامند. این اصل نه تنها اساس معقولی برای قانون اسنل به دست می‌دهد بلکه می‌توان آن را برای یافتن مسیر پرتوی نورانی که از محیطی با چگالی متغیر می‌گذرد نیز به کار برد؛ در این حالت عموماً نور به جای خط مستقیم، در امتداد منحنی گذر خواهد کرد. در شکل ۹ (ب) یک محیط نوری لایه لایه داریم. در هر یک از لایه‌ها سرعت نور ثابت است، لیکن سرعت از هر لایه به لایه زیرینش کاهش می‌یابد. پرتو نورانی ضمن عبور از لایه‌ای به لایه دیگر، بیشتر و بیشتر به طرف امتداد قائم شکسته می‌شود و اگر قانون اسنل در مورد مرزهای بین لایه‌ها به کار برده شود، نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = \frac{\sin \alpha_4}{v_4}$$

حال اگر این لایه‌ها نازکتر و در نتیجه تعدادشان بیشتر گردد، در حالت حدی سرعت نور با پایین آمدن پرتو، به طور پیوسته کاهش می‌یابد و به این نتیجه می‌رسیم که

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{مقدار ثابت}$$

این حالت در شکل ۹ (ج) نشان داده شده است و تقریباً همان حالتی است که برای پرتویی از نور خورشید که بر زمین می‌تابد پیش می‌آید، بدین ترتیب که هنگام پایین آمدن درجو، سرعتش با افزایش تراکم محیط کاهش می‌یابد.

حال به مسئله برنولی برمی‌گردیم و دستگاه مختصاتی مانند شکل ۱۰ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که مهره (مانند پرتو نور) می‌تواند مسیری برای فرود انتخاب کند که لغزیدنش از A به B در کمترین زمان ممکن صورت گیرد. از این بحث نتیجه می‌شود که

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{مقدار ثابت} \quad (۱)$$

بنابر اصل پایستگی انرژی، سرعت مهره در ارتفاعی مفروض، منحصرأ با کاهش انرژی پتانسیلش در رسیدن به آن ارتفاع معین می‌شود و به هیچ وجه به مسیری که مهره برای رسیدن به سطح

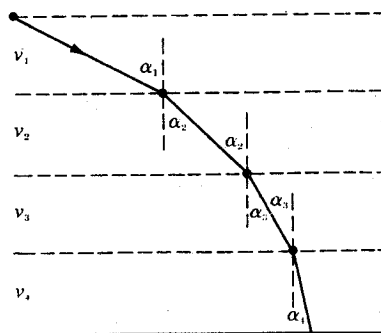
۱. ویلبررد اسنل (Willebrord Snell ۱۵۹۱-۱۶۲۶) منجم و ریاضیدان هلندی بود. در سن ۲۲ سالگی به عنوان استاد ریاضی در لیدن جانشین پدرش شد. شهرتش بیشتر به خاطر کشف قانون شکست نور در سال ۱۶۲۱ است که نقش مهمی در پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریه موجی نور ایفا کرد.

مزبور طی می کند مربوط نیست. از این مطلب، همانند بخش قبل، نتیجه می شود که

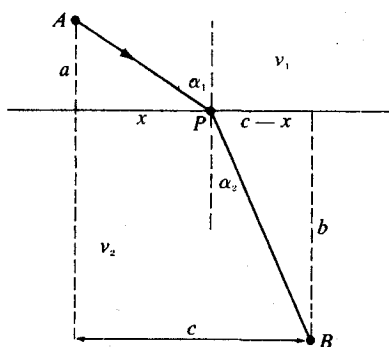
$$v = \sqrt{2gy} \quad (۲)$$

با توجه به شکل هندسی مسئله می توان نوشت:

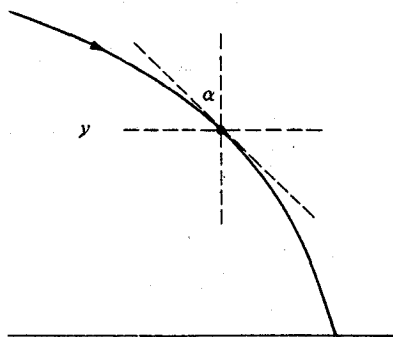
$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sec \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (۳)$$



ب



الف



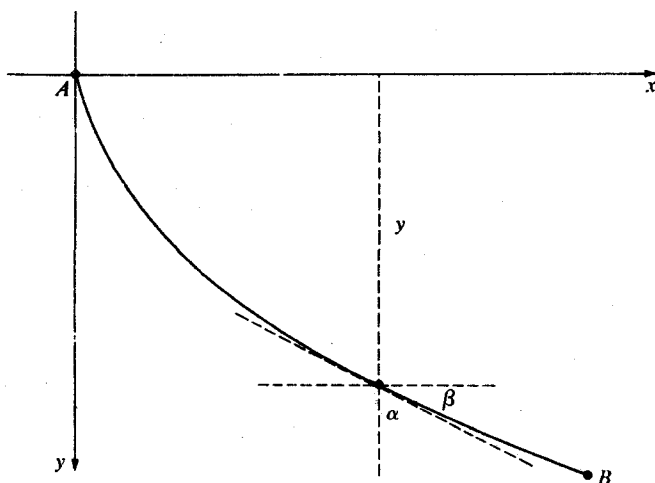
ج

شکل ۹

با ترکیب روابط (۱) و (۲) و (۳) که از نورشناسی، مکانیک، و حساب دیفرانسیل و انتگرال گرفته شده اند، رابطه زیر به دست می آید:

$$y[1 + (y')^2] = c \quad (۴)$$

که معادله دیفرانسیل منحنی کوتاهترین زمان محسوب می شود.



شکل ۱۰

حال بحث خود را کامل می‌کنیم و باحل معادله (۴)، می‌بینیم که منحنی کوتاهترین زمان واقعاً چیست. اگر به جای y' عبارت dy/dx را قرار دهیم و متغیرها را از هم جدا کنیم، رابطه (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$dx = \left(\frac{y}{c-y} \right)^{1/2} dy$$

حال، متغیر جدید ϕ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left(\frac{y}{c-y} \right)^{1/2} = \tan \phi \quad (5)$$

به طوری که $y = c \sin^2 \phi$ ، $dy = 2c \sin \phi \cos \phi d\phi$ ، و

$$dx = \tan \phi dy = 2c \sin^2 \phi d\phi = c(1 - \cos 2\phi) d\phi.$$

حال از طرفین این رابطه انتگرال می‌گیریم، نتیجه می‌شود

$$x = \frac{c}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + c_1$$

منحنی باید از مبدأ مختصات بگذرد، لذا به کمک رابطه (۵)، وقتی $\phi = 0$ ، داریم $x = y = 0$ و در نتیجه $c_1 = 0$. بنابراین

$$x = \frac{c}{2} (2\phi - \sin 2\phi) \quad (6)$$

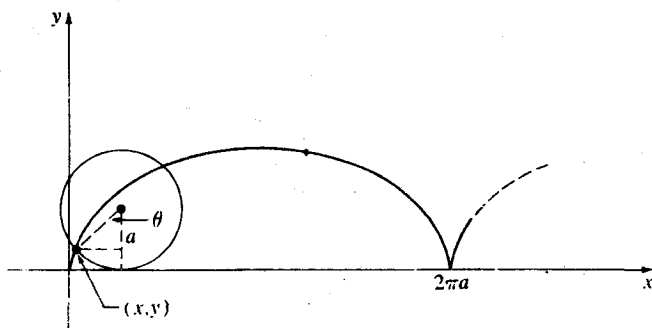
$$y = c \sin^2 \phi = \frac{c}{4}(1 - \cos 2\phi) \quad (۷)$$

حال اگر مقادیر $a = c/2$ و $\theta = 2\phi$ را در روابط (۶) و (۷) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad \text{و} \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (۸)$$

این روابط، معادلات پارامتری متعارف منحنی چرخزاد (شکل ۱۱) هستند، که وقتی دایره‌ای به شعاع a ، بر محور x می‌غلتد، نقطه‌ای از محیط دایره، این منحنی را به وجود می‌آورد. توجه می‌کنیم که مقدار واحدی از a وجود دارد که اولین کمان این چرخزاد را وادار به عبور از B در شکل ۱۰ می‌کند؛ زیرا اگر a بتواند از صفر تا بینهایت بزرگ شود، کمان بزرگتر و بزرگتر می‌شود و سراسر ربع اول صفحه را می‌پوشاند. واضح است که با انتخاب مقدار مناسب برای a ، کمان از نقطه B خواهد گذشت.

شاید خواننده، در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، با برخی از خواص هندسی منحنی چرخزاد آشنا شده باشد. مثلاً، طول یک کمان چرخزاد، ۴ برابر قطر دایره مولد و مساحت سطح زیر کمان آن، ۳ برابر مساحت دایره مزبور است. این منحنی جالب، خواص قابل توجه دیگری، هم از لحاظ هندسی و هم از جنبه فیزیکی، دارد که برخی از آنها در مسائل زیر توصیف می‌شوند.



شکل ۱۱

امیدواریم که این بحث ضروری در جزئیات، جنبه‌های فکری چشمگیر راه حل برنولی برای مسئله‌اش را از نظر دور نکرده باشد، چرا که راه حل مزبور، از جنبه هنری و لایبی برخوردار است. مسئله منحنی کوتاهترین زمان گذشته از اینکه فی نفسه جالب است، بیشتر از این نظر اهمیت دارد که منشأ تاریخی حساب تغییرات بوده است. حساب تغییرات شاخه‌ای نیرومند از آنالیز است که در زمان حاضر عمیقاً به درون سادگیهای پنهان در قلب جهان فیزیکی نفوذ کرده است. درباره این موضوع در فصل ۹ بحث خواهیم کرد، و برای یافتن معادلاتی نظیر (۴) که در انواع گسترده‌ای از مسائل مشابه کاربرد دارد، روشی کلی ارائه خواهیم کرد.

یادداشتی درباره فرما. پیردو فرما^۱ (۱۶۰۱-۱۶۶۵) بزرگترین ریاضیدان قرن هفدهم بود، لیکن عدم علاقه وی به انتشار کشفیاتش، تأثیر کار او را محدود می کرد. قسمت عمده کشفیات فرما از نامه هایی که او به دوستان خود نوشته و یادداشت هایی که در حاشیه کتابهایش کرده است، به دست آمده اند. شغل او قضاوت و مشاورت پارلمانی شاه در حاکم نشین تولوز فرانسه بود. با این حال، کار ذوقی و علاقه شخصی اش ریاضیات بود. در سال ۱۶۲۹ هندسه تحلیلی را ابداع نمود ولی چون در سال ۱۶۳۷ دکارت نظرات مشابه خود را در این زمینه سریعاً به چاپ رساند، قسمت اعظم افتخار نصیب دکارت شد. در این زمان - سیزده سال قبل از تولد نیوتن - فرما همچنین روشی برای ترسیم مماس بر منحنیها و یافتن ماکزیمم و می نیمم کشف نمود که مقدمات حساب دیفرانسیل را تشکیل می داد. نیوتن، در نامه ای که در سال ۱۹۳۴ یافت شد، اعتراف کرده است که بعضی از نظرات اولیه خود را در این زمینه مستقیماً از فرما اخذ کرده است. فرما به اتفاق پاسکال طی يك سری نامه که در سال ۱۶۵۴ نوشته شد، مفاهیم بنیادی نظریه احتمال را به وجود آورد. کشف اصل حداقل زمان و ارتباط این اصل با شکست نور، در سال ۱۶۵۷ توسط فرما، نخستین گامی بود که در جهت يك نظریه منسجم نورشناسی برداشته شد. ولی، نبوغ فرما در نظریه اعداد به برجسته ترین وجهی جلوه گر شده؛ زیرا جای تردید است که بصیرت او در خواص اعداد صحیح و مثبت، آشنا ولی اسرارآمیز، تاکنون همتایی داشته باشد. ما تعدادی از کشفیات بسیار وی در این زمینه را متذکر می شویم.

۱. قضیه دوم جذوری فرما: هر عدد اول به صورت $4n+1$ را می توان به يك طریق و تنها به يك طریق، به صورت مجموع دو مجذور نوشت.
۲. قضیه فرما: چنانچه p عددی اول و n عددی صحیح و مثبت باشد، آنگاه p عدد $n^p - n$ را می شمارد.
۳. قضیه آخر فرما: اگر $n > 2$ ، اعداد صحیح و مثبت x, y, z وجود ندارند که در معادله $z^n = x^n + y^n$ صدق کنند.

او قضیه اخیر را در رابطه با مطلبی راجع به اینکه معادله $z^2 = x^2 + y^2$ جوابهای صحیح زیادی دارد، در حاشیه یکی از کتابهایش نوشت، سپس این نکته و سوسه انگیز را افزود، «اثبات واقعاً شگفت انگیزی برای این مدعا یافته ام که در حاشیه این کتاب نمی گنجد». متأسفانه تاکنون هیچکس دیگر اثباتی برای آن نیافته است و قضیه آخر فرما تا به امروز به عنوان یکی از عاجز کننده ترین مسائل حل نشده ریاضی باقی مانده است. یافتن اثباتی برای این قضیه، جاودانگی آنی به یابنده اعطا خواهد کرد ولیکن باید به دانشجوی جاه طلب هشدار داد که صدها سال است که ریاضیدانان توانا در این زمینه سعی بیهوده به خرج داده اند.

یادداشتی درباره خانواده برنولی. اکثر مردم واقفند که یوهان سباستین باخ یکی از بزرگترین آهنگ سازان تمام دورانها بود. ولی کمتر کسی بخوبی آگاه

است که خانواده پرثمر باخ در این زمینه از آنچنان نبوغ پایداری برخوردار بود که از قرن شانزدهم تا قرن نوزدهم دهها نفر از خانواده باخ موسیقیدانان برجسته‌ای شدند. در واقع، بخشهایی در آلمان وجود داشت که در آنها کلمه باخ به تنهایی به معنای موسیقیدان بود. نقش خانواده باخ در موسیقی را، برنولی‌ها در ریاضیات و علوم ایفا کردند. این خانواده برجسته سویی طی سه نسل هشت ریاضیدان تحویل جامعه داد که سه‌تای آنها فوق‌العاده بودند. اینها نیز به نوبه خود بازماندگانی داشتند که در بسیاری از زمینه‌های علمی ممتاز بودند.

یاکوب برنولی^۱ (۱۶۵۴-۱۷۰۵) به اصرار پدرش به مطالعه الهیات پرداخت ولی در اولین فرصت به خاطر عشقش به علوم، آن را رها ساخت. حساب دیفرانسیل و انتگرال جدید نیوتن و لایب‌نیتس را نزد خود فراگرفت و از سال ۱۶۸۷ تاهنگام وفاتش در دانشگاه بازل^۲ استاد ریاضی بود. آثاری در مورد سری‌های بینهایت دارد. منحنی‌های ویژه بسیاری را مطالعه نمود، مختصات قطبی را ابداع کرد و اعداد برنولی را که در بسط سری‌نمایی تابع $\tan x$ ظاهر می‌شوند، معرفی کرد. وی در کتاب خود تحت عنوان فن حدس زدن^۳ اصول اساسی نظریه احتمالات معروف به قضیه برنولی یا قانون اعداد بزرگ‌ترا بیان کرد. این قانون بدین قرار است: اگر احتمال يك حادثه معین p باشد و اگر n تجربه مستقل با k بار موفقیت صورت گرفته باشد، آنگاه وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $k/n \rightarrow p$. در وهله اول به نظر می‌رسد که این قضیه بدیهی است لیکن در درون این بیان انبوه درهم پیچیده مسائل فلسفی (وریاضی) نهفته است که منبع مباحثه‌ای است که از زمان برنولی تا به امروز ادامه داشته است.

برادر جوان‌تر یاکوب یعنی یوهان برنولی (۱۶۷۷-۱۷۴۸) نیز مانند برادرش زندگی خود را، بغلط با مطالعه پزشکی، آغاز کرد و در سال ۱۶۹۴ با نوشتن مقاله‌ای درباره انقباض ماهیچه موفق به اخذ دکترای دانشگاه بازل گردید. با این حال او نیز شیفته حساب دیفرانسیل و انتگرال شد و خیلی سریع در این رشته صاحب نظر گردید و آن را در بسیاری مسائل هندسه، معادلات دیفرانسیل و مکانیک به کار بست. در سال ۱۶۹۵ به سمت استادی ریاضیات و فیزیک دانشگاه گرونینگن هلند گمارده شد و پس از مرگ یاکوب، به جای برادرش استاد دانشگاه بازل شد. گاهی برادران برنولی روی يك مسئله کار می‌کردند که این وضع به لحاظ طبایع حسود و زودرنج آنها برایشان ناخوشایند بود. گهگاه اختلاف عقیده بین آنها تا سرحد يك کینه‌توزی تلخ همراه با ناسزاگویی در ملاعام اوج می‌گرفت، نظیر آنچه که در مورد مسئله منحنی کوتاهترین زمان اتفاق افتاد. در سال ۱۶۹۶ یوهان مسئله‌ای را برای زور آزمایی فکری به ریاضیدانان اروپا ارائه کرد. این مسئله توجه فراوانی برانگیخت. نیوتن، لایب‌نیتس و همچنین برنولی‌ها آن را حل کردند. راه حلی که یوهان ارائه داد (که آن را قبلاً دیدیم) ظریفتر بود. حال آنکه راه حل یاکوب - گرچه نسبتاً خام و دشوار، ولی - کلی‌تر بود. این وضعیت موجب آغاز نزاع تندی گردید

که چندین سال ادامه یافت و غالباً به ناسزاگویی شدیدی می کشید که بیشتر درخور نزاعهای خیابانی بود تا بحثهای علمی. ظاهراً در این بین یوهان فتنه جو تر از دیگری بوده است؛ زیرا مدتی بعد، او در حالتی که بر اثر شدت حسادت از جا در رفته بود، پسر خود را به دلیل اینکه از فرهنگستان فرانسه جایزه ای را که خودش بدان چشم طمع داشت دریافت نموده بود، از خانه بیرون انداخت.

این پسر، که دانیل برنولی (۱۷۵۰-۱۷۸۲) نام داشت مانند پدرش به تحصیل پزشکی پرداخت و با نوشتن رساله ای درباره عملکرد ریه ها به اخذ درجه ای نایل آمد. او نیز مانند پدرش بزودی راه را به روی ذوق و استعداد فطریش گشود و در سن پترزبورگ استاد ریاضیات شد. در سال ۱۷۷۳ به بازل بازگشت و متوالیاً استاد گیاه شناسی، کالبدشناسی، و فیزیک گردید. از فرهنگستان فرانسه ده جایزه، از جمله همان که پدرش را به خشم انداخت، دریافت نمود و در طول سالها، آثار بسیاری در فیزیک، احتمالات، حساب دیفرانسیل و انتگرال، و معادلات دیفرانسیل منتشر کرد. وی در کتاب مشهورش تحت عنوان هیدرودینامیک به بحث پیرامون مکانیک سیالات پرداخت و نخستین بررسی را در مورد نظریه جنبشی گازها ارائه نمود. از نظر بسیاری افراد او اولین دانشمند فیزیک ریاضی واقعی بوده است.

تمرین

۱- سیمی را که به شکل چرخزاد (۸) خم شده است در نظر بگیرید و آن را مانند شکل (۱۰) وارونه کنید. اگر مهره ای از مبدأ مختصات رها شود و بدون اصطکاک بر روی سیم و به طرف پایین بلغزد، نشان دهید که مهره در مدت زمان $\pi\sqrt{a/g}$ به نقطه زیرین $(\pi a, 2a)$ می رسد.

۲- نشان دهید که $\pi\sqrt{a/g}$ مسئله (۱) هم چنین مدت زمانی است که مهره از هر نقطه دیگر منحنی به نقطه زیرین منحنی می لغزد، به طوری که مهره در مدت زمانهای مساوی به نقطه زیرین می رسد و این زمان به محل رها شدن مهره بستگی ندارد. این خاصیت به خاصیت همزمانی (توتو کرون) چرخزاد موسوم است (در زبان یونانی توتو به معنای همان و کرونوس به معنای زمان است).

تمرینهای گوناگون فصل اول

۱- یک روز صبح، برف شروع به باریدن کرد و این بارندگی در طول روز یکسره ادامه یافت. در ساعت دوازده ظهر یک برف پاک کن، با آهنگ ثابتی از لحاظ حجم برف پاک شده در ساعت، شروع به تمیز کردن جاده کرد. برف پاک کن تا ساعت ۲ بعد از ظهر ۲ کیلومتر از جاده را تمیز کرد و یک کیلومتر دیگر را تا ساعت ۴ بعد از ظهر تمیز کرد. در چه ساعتی برف شروع به باریدن نموده است؟

۲- شعاع یک گلوله نفتالین که در ابتدا ۱/۲ سانتیمتر است، پس از یک ماه به ۱/۴ سانتیمتر می رسد. به فرض آنکه گلوله نفتالین با آهنگی متناسب با سطحش تبخیر شود، شعاع آن را

- به صورت تابعی از زمان بیاید. پس از چندماه دیگر گلوله بکلی تبخیر می شود؟
- ۳- تانکی محتوی ۴۰۰ لیتر آب خالص است. از لحظه $t = 0$ ، آب شوری که در هر لیتر آن ۱۰۰ گرم نمک وجود دارد با آهنگ چهار لیتر در دقیقه، به داخل تانک جاری می شود و مخلوط حاصله (که با بهم زدن یکنواخت نگاه داشته می شود) با همان آهنگ به خارج جریان می یابد. چه موقعی ۲۵ کیلو گرم نمک حل شده در تانک وجود خواهد داشت؟
- ۴- تانک بزرگی محتوی ۴۰۰ لیتر آب شور است که ۱۰۰ کیلو گرم نمک در آن حل شده است. از لحظه $t = 0$ ، آب خالص، با آهنگ ۱۲ لیتر در دقیقه، به درون تانک می ریزد و مخلوط (که با بهم زدن یکنواخت نگاه داشته می شود)، با آهنگ ۸ لیتر در دقیقه، به خارج جاری می شود. چقدر طول می کشد تا مقدار نمک موجود در تانک به ۵ کیلو گرم تقلیل یابد.
- ۵- یک تسوپ را گبی صاف، دو کی شکل به طول ۳۰ سانتیمتر و قطر ۱۵ سانتیمتر در هوای آزاد در معرض ریزش باران قرار دارد. آب در چه مسیرهایی از روی تسوپ به پایین جاری می شود؟

۶- اگر c ثابتی مثبت و a پارامتری مثبت باشد، آنگاه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

معادله دسته تمام بیضی‌ها ($a > c$) و هذلولی‌ها ($a < c$) با کانونهای واقع در نقاط $(\pm c, 0)$ است. نشان دهید که این دسته مقاطع مخروطی هم‌کانون، «برخود عمود» است (مسئله ۳-۲ را ببینید).

۷- مطابق قانون تورریچلی^۱ سرعت خروج آب از سوراخی واقع در کف یک مخزن آب روباز، برابر با سرعتی است که آب در صورت سقوط آزاد از سطح آب تاسوراخ به دست می آورد. ظرفی به شکل نیمکره به شعاع R در ابتدا پراز آب است و در لحظه $t = 0$ ته ظرف به شکل دایره کوچکی به شعاع r سوراخ می شود. چه مدت زمان طول می کشد تا ظرف خالی شود؟

۸- ساعت آبی قدیمی، ظرفی بود که آب می توانست از سوراخ کوچکی در ته آن، خارج گردد. از این ساعت اغلب در دادگاههای یونانی و رومی جهت تعیین زمان سخنرانیهای وکلا و جلوگیری از سخنرانی بیش از حد استفاده می شد. در صورتی که بخواهیم سطح آب با آهنگ ثابتی پایین آید، شکل ساعت آبی را مشخص کنید.

۹- در ته هر یک از دو مخزن روباز، سوراخی کوچک و یکسان ایجاد شده است، آب این دو

۱. اوانجلیستا تورریچلی Evangelista Torricelli (۱۶۰۸-۱۶۴۷) فیزیکدان و ریاضیدان ایتالیایی و یکی از مریدان و منشی گالیله بود. علاوه بر بیان اصلی که در بالا از آن یاد شد، نخستین نظرات صحیح در مورد فشار جوی و ماهیت خلاها را که از نظر گالیله پنهان مانده بود، مطرح ساخت و بارومتر را به عنوان کاربردی از نظریه های خود اختراع کرد. به

James B. Conant. «Science and Common Sense», pp. 63-71, Yale University Press, New Haven, Conn., 1951

مخزن در يك زمان تخلیه می شود. یکی از دومخزن استوانه ای است بامحور قائم و دیگری مخروطی است که رأس آن در پایین است. اگر قاعده های این دومخزن برابر و ارتفاع استوانه h باشد، ارتفاع مخروط چقدر است؟

۱۰- يك قوطی استوانه ای که قسمتی از آن با آب پر شده است، با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور خود دوران می کند. نشان دهید که سطح آب به شکل يك سهمی دوار در می آید (راهنمایی: نیروی جذب به مرکز وارد بر ذره ای از آب به جرم m که در سطح آزاد واقع است برابر با $m\omega^2 x$ است که در آن x فاصله ذره تا محور دوران است و این نیرو بر آید نیروی روبه پایین ثقل mg و نیروی عکس العمل قائم R ناشی از واکنش سایر ذرات آب مجاور ذره مزبور است.)

۱۱- مهره ای را در بالاترین نقطه يك دایره که در صفحه قائم قرار گرفته است در نظر بگیرید. فرض کنید که این نقطه به هريك از نقاط پاینتر دایره توسط يك سیستم مستقیم متصل شده باشد. اگر مهره بر روی سیم بدون اصطکاک بلغزد، نشان دهید که مدت زمان لازم برای رسیدن مهره به دایره ثابت است و به موقعیت نقطه پاینتر بستگی ندارد.

۱۲- نیم متر از زنجیری به طول ۲ متر، از میز آویزان شده است. زنجیر بدون اصطکاک شروع به بلغزیدن می کند. مدت زمانی را بیابید که طول می کشد تا زنجیر از میز بیفتد.

۱۳- تجربه می گوید که اگر شخصی يك سر طنابی را که به دور يك تیر چوبی پیچیده شده است بگیرد، می تواند با نیروی کوچکی در برابر نیروی بسیار بزرگتری که به انتهای دیگر وارد می شود مقاومت کند. به طور کمی، به سادگی می توان دید که اگر T و $T + \Delta T$ نیروهای کشش طناب برای زوایای θ و $\theta + \Delta\theta$ در شکل ۱۲ باشند، در آن صورت نیروی قائمی تقریباً برابر با $T\Delta\theta$ به وسیله طناب در ناحیه ای بین θ و $\theta + \Delta\theta$ بر تیر وارد می شود. از این مطلب چنین بر می آید که اگر μ ضریب اصطکاک بین طناب و تیر باشد، آنگاه ΔT تقریباً برابر با $\mu T\Delta\theta$ خواهد بود. از این موضوع استفاده کنید و معادله دیفرانسیل رابط بین T و θ را به دست آورید. برای یافتن T به صورت تابعی از θ و μ ، و نیروی T وارده به وسیله شخص، این معادله را حل کنید.

۱۴- بار L به وسیله يك ستون مخروطی مدور نگهداری می شود. چگالی ماده تشکیل دهنده ستون a می باشد. اگر شعاع مقطع فوقانی ستون r باشد، شعاع r را در فاصله x از مقطع بالا به دست آورید، در صورتی که مساحت هر مقطع افقی متناسب با کل بارهای وارده بر آن باشد.

۱۵- رئیس جمهور و نخست وزیر قهوه سفارش می دهند و در يك زمان فنجانهای قهوه با دماهای یکسان دریافت می دارند. رئیس جمهور بلافاصله مقدار کمی کرم خنک به قهوه خود می افزاید ولیکن تاده دقیقه بعد، قهوه را نمی نوشد. نخست وزیر پس از دریافت قهوه ۱۰ دقیقه صبر می کند و سپس همان مقدار کرم خنک به قهوه خود می افزاید و شروع به نوشیدن آن می کند. چه کسی قهوه داغتر می نوشد؟

۱۶- يك ناوشکن، در مه غلیظ، به دنبال شکار يك زیر دریایی است. در يك لحظه مه بالا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۷. معادلات همگن

در حالت کلی، حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بسیار مشکل است. حتی معادله بظاهر ساده

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

را در حالت کلی نمی توان حل کرد، به این مفهوم که هیچ فرمولی که جواب را برای کلیه حالات به دست دهد موجود نیست. از طرف دیگر برخی انواع متعارف از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول وجود دارند که راه حل های عادی آنها در دسترس است. در این فصل مختصراً تعداد کمی از انواعی را که موارد استعمال متعدد دارند، بررسی می کنیم. از آنجا که هدف اصلی ما کسب مهارت عملی است، سؤالات مربوط به پیوستگی، مشتق پذیری و صفر شدن احتمالی مخرج کسرها و غیره را کلاً مسکوت خواهیم گذاشت. بعداً هنگامی که برخی زمینه های لازم به وجود آمد، مسائلی که ماهیت ریاضی محض دارند، مورد بحث قرار می گیرند.

ساده ترین معادله از انواع متعارف، معادله ای است که در آن متغیرها جدا شدنی هستند:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

برای حل این معادله کافی است معادله را به شکل $h(y)dy = g(x)dx$ بنویسیم و انتگرال بگیریم:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

مثالهای متعددی از این روش را در فصل قبل دیده ایم.

معادله همگن کمی پیچیده تر از این حالت است. تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه n گوئیم هرگاه رابطه

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

برای کلیه مقادیر x, y, t که در آن x, y, t به نحوی مناسب محدود شده اند، برقرار باشد. مثلا $x^2 + xy, \sqrt{x^2 + y^2}, \sin(x/y)$ توابعی همگن از درجات ۲، ۱ و ۰ هستند. معادله دیفرانسیل

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

را همگن گوئیم هرگاه M و N توابعی همگن و همدرجه باشند. این معادله را می توان به شکل

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

نوشت که در آن $f(x, y) = -M(x, y)/N(x, y)$ بوضوح همگن و از درجه صفر است. چگونگی حل معادله (۱) بر این امر استوار است که با جایگزینی $z = y/x$ معادله فوق به معادله ای با متغیرهای جدا شدنی تبدیل می شود. برای مشاهده مطلب توجه می کنیم که رابطه

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$$

به ما امکان می دهد که با جایگزینی $z = y/x$ رابطه زیر را به دست آوریم

$$f(x, y) = f(1, y/x) = f(1, z)$$

سپس از آنجا که $y = zx$ و

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx} \quad (2)$$

معادله (۱) به

$$z + x \frac{dz}{dx} = f(1, z)$$

تبدیل می شود و متغیرها جدا شدنی هستند:

$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}$$

اکنون با انتگرال گیری و سپس تبدیل z به y/x حل معادله را کامل می کنیم.

مثال ۱. معادله $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$ را حل کنید.

کار را با نوشتن معادله به شکلی که در بالا پیشنهاد شد، شروع می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

با توجه به اینکه تابع سمت راست بوضوح همگن از درجه صفر است آن را می‌توان به صورت تابعی صرفاً از $z = y/x$ بیان کرد. این کار بسادگی با تقسیم صورت و مخرج کسر بر x انجام می‌شود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y/x}{1-y/x} = \frac{1+z}{1-z}$$

سپس با استفاده از رابطه (۲) متغیرها را جدا می‌کنیم و معادله زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{(1-z)dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}$$

با انتگرال گیری از این رابطه، خواهیم داشت

$$\tan^{-1} z - \frac{1}{2} \log(1+z^2) = \log x + c$$

با گذاشتن y/x به جای z ، رابطه

$$\tan^{-1} \frac{y}{x} = \log \sqrt{x^2 + y^2} + c$$

را به عنوان جواب مطلوب به دست می‌آوریم.

تمرین

۱- نشان دهید که معادلات زیر همگن هستند، و آنها را حل کنید.

$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y' - 2xy - 2y^2 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y' = 2(x^2 + y^2) \tan^{-1} \frac{y}{x} + xy \quad (\text{ج})$$

$$x \sin \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \sin \frac{y}{x} + x \quad (\text{د})$$

$$xy' = y + 2xe^{-y/x} \quad (\text{ه})$$

۲- با به کار بردن مختصات دکارتی، مسیرهای متعامد دسته تمام دوایری را که در مبدأ مختصات

بر محور y ها مماس هستند به دست آورید.

۳- نشان دهید که با جایگزینی $z = ax + by + c$ ، معادله $y' = f(ax + by + c)$ به معادله‌ای با متغیرهای جدا شدنی تبدیل می‌شود، و این روش را برای حل معادلات زیر به کار گیرید:

$$y' = (x + y)^2 \quad (\text{الف})$$

$$y' = \sin^2(x - y + 1) \quad (\text{ب})$$

۴- الف) هر گاه $ae \neq bd$ ، نشان دهید مقادیر ثابت h و k را می‌توان طوری انتخاب کرد که با جایگذاری $x = z - h$ ، $y = w - k$ ، معادله

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$$

به معادله همگن تبدیل شود.

ب) اگر $ae = bd$ ، جایگذاری مناسبی چنان پیدا کنید که توسط آن معادله (الف) به معادله با متغیرهای جدا شدنی تبدیل شود.

۵- معادلات زیر را حل کنید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x - y - 6} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x + y - 6} \quad (\text{ب})$$

۸. معادلات کامل

اگر دسته منحنی $f(x, y) = c$ داده شده باشد، معادله دیفرانسیل آن را می‌توان به شکل $df = 0$ و یا

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

نوشت. مثلاً معادله دیفرانسیل دسته منحنی $x^2 y^2 = c$ به صورت $2xy^2 dx + 2x^2 y dy = 0$ است. حال، وضعیت عکس را در نظر می‌گیریم و بحث را با معادله زیر شروع می‌کنیم:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

هر گاه تابع $f(x, y)$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N \quad (2)$$

(۱) را می توان به شکل

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad \text{یا} \quad df = 0$$

نوشته که جواب عمومی آن عبارت است از

$$f(x, y) = c$$

در چنین حالتی عبارت $Mdx + Ndy$ را دیفرانسیل کامل و معادله (۱) را معادله دیفرانسیل کامل گوئیم.

گاهی اوقات می توان صرفاً با جستجو، کامل بودن معادله را تحقیق کرد و تابع f را یافت. مثلاً دیده می شود که سمت چپ معادلات

$$y dx + x dy = 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

بترتیب دیفرانسیل x/y و xy هستند، لذا جواب عمومی این معادلات به ترتیب $x/y = c$ و $xy = c$ هستند. ولی واضح است که جز در حالات بسیار ساده، حل معادله با «تشخیص نظری» عملی نیست. آنچه لازم است، آزمونی برای تحقیق کامل بودن معادله و روشی برای به دست آوردن تابع f است. در زیر، این آزمون و روش را ارائه می دهیم.

فرض کنید معادله (۱) کامل است بنابراین تابعی مانند f وجود دارد که در معادله (۲) صدق می کند. از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می دانیم که مشتقات جزئی مرتبه دوم آمیخته تابع f باهم برابرند:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (3)$$

از این رابطه^۱ داریم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4)$$

بنابراین، رابطه (۴) شرط لازم برای کامل بودن معادله (۱) است. ثابت می کنیم که این شرط کافی نیز هست، به این نحو که نشان می دهیم اگر (۴) برقرار باشد، تابع f را که در (۲) صدق کند می توان یافت. با انتگرال گیری از اولین معادله (۲) نسبت به x شروع می کنیم

۱. خواننده باید بداند که برابری (۳) هنگامی درست است که هر دو طرف این معادله، موجود و پیوسته باشند، و این شرایط تقریباً برای همه توابعی که در عمل ممکن است ظاهر شوند، صادق است. پیش فرض ما در تمامی این فصل این است که همه توابع مورد بحث شرایط پیوستگی و مشتق پذیری را به حد کافی برای تضمین صحت عملیاتی که روی آنها انجام می شود دارا هستند، (اولین پاراگراف بخش ۷ را ببینید).

$$f = \int M dx + g(y) \quad (۵)$$

«ثابت انتگرال» که در رابطه فوق ظاهر می‌شود، تابعی دلخواه از y است، چرا که باید با مشتق‌گیری نسبت به x صفر شود. این امر مسئله ما را به یافتن تابعی مثل $g(y)$ منجر می‌کند، با این خاصیت که تابع بیان شده توسط (۵) باید دومین معادله (۲) را نیز ارضا کند. با مشتق‌گیری از رابطه (۵) نسبت به y و مساوی قرار دادن آن با N ، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M dx + g'(y) = N$$

لذا

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$$

از این رابطه نتیجه می‌شود

$$g(y) = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy \quad (۶)$$

مشروط به اینکه تابع زیر انتگرال صرفاً تابعی از y باشد. این در صورتی است که مشتق تابع زیر انتگرال نسبت به x مساوی صفر باشد؛ و از آنجا که مشتق مورد نظر عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned}$$

با رجوع به فرض (۴) استدلال کامل می‌شود.

خلاصه اینکه ما قضیه زیر را ثابت نموده‌ایم: معادله (۱) کامل است اگر و فقط اگر $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$ ؛ و در این صورت، جواب عمومی آن، $f(x, y) = c$ است، که در آن تابع f توسط (۵) و (۶) معین می‌شود. در اینجا باید بر دو نکته تأکید کنیم: جواب عمومی معادله (۱) معادله $f(x, y) = c$ است، نه تابع f و روش یافتن f که در روابط (۵) و (۶) ارائه شده است باید فرا گرفته شود، و نه خود فرمولها.

مثال ۰۱. معادله $e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0$ را از نظر کامل بودن بیازمایید، و

در صورت کامل بودن آنرا حل کنید.

در این جا داریم

$$M = e^y \quad \text{و} \quad N = xe^y + 2y$$

بنابراین

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \quad \text{و} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y$$

لذا شرط (۴) ارضا می شود و معادله مورد بحث کامل است. این شرط مبین آن است که تابع f وجود دارد به قسمی که:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + 2y$$

با انتگرال گیری از اولین معادله نسبت به x خواهیم داشت

$$f = \int e^y dx + g(y) = xe^y + g(y)$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + g'(y)$$

از آنجا که این مشتق جزئی همچنین باید با $xe^y + 2y$ برابر باشد، خواهیم داشت $g'(y) = 2y$ ، در نتیجه $g(y) = y^2$ و $f = xe^y + y^2$. حال فقط کافی است توجه کنیم که $c = xe^y + y^2$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مورد نظر است.

تمرین

تعیین کنید کدامیک از معادلات زیر کامل است و آنهایی را که کامل هستند، حل کنید.

$$\left(x + \frac{2}{y}\right) dy + y dx = 0 \quad -1$$

$$(\sin x \tan y + 1) dx + \cos x \sec^2 y dy = 0 \quad -2$$

$$(y - x^2) dx + (x + y^2) dy = 0 \quad -3$$

$$(2y^2 - 4x + 5) dx = (4 - 2y + 2xy) dy \quad -4$$

$$O(y + y \cos xy) dx + (x + x \cos xy) dy = 0 \quad -5$$

$$\cos x \cos^2 y dx + 2 \sin x \sin y \cos y dy = 0 \quad -6$$

$$(\sin x \sin y - xe^y) dy = (e^y + \cos x \cos y) dx \quad -7$$

$$-\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} dx + \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} dy = 0 \quad -۸$$

$$(1+y) dx + (1-x) dy = 0 \quad -۹$$

$$(2xy^2 + y \cos x) dx + (3x^2 y^2 + \sin x) dy = 0 \quad -۱۰$$

$$dx = \frac{y}{1-x^2 y^2} dx + \frac{x}{1-x^2 y^2} dy \quad -۱۱$$

۹. عامل انتگرال ساز

احتمالاً خواننده توجه کرده است که معادلات دیفرانسیل کامل نسبتاً نادر هستند، چرا که کامل بودن معادله، مستلزم تعادل دقیقی در شکل معادله است و با مختصر تغییری در این شکل، تعادل متغی خواهد شد. امکان دارد خواننده با علم به این امر، در ارزشمندی بحث در مورد معادله کامل تردید کند. در این بخش کوشش می کنیم که پاسخگوی این تردیدها باشیم. بسادگی مشاهده می شود که معادله

$$y dx + (x^2 y - x) dy = 0 \quad (۱)$$

کامل نیست، چرا که $\partial M / \partial y = 1$ و $\partial N / \partial x = 2xy - 1$. اما، هرگاه طرفین معادله را در $1/x^2$ ضرب کنیم، معادله به صورت

$$\frac{y}{x^2} dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

درمی آید که معادله ای کامل است. تا چه حد می توان معادلات غیر کامل دیگر را با روش فوق کامل نمود؟ به عبارت دیگر، هرگاه معادله

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (۲)$$

کامل نباشد، تحت چه شرایطی، تابع $\mu(x, y)$ با این شرط که معادله

$$\mu(M dx + N dy) = 0$$

کامل باشد، وجود دارد؟ هر تابع μ که این چنین عمل کند، عامل انتگرال ساز (۲) خوانده می شود. بنابراین $1/x^2$ عامل انتگرال ساز (۱) است. ثابت می کنیم هرگاه (۲) دارای یک جواب عمومی باشد، دارای عامل انتگرال ساز نیز خواهد بود.

فرض کنید که معادله (۲) دارای یک جواب عمومی به صورت

$$f(x, y) = c$$

باشد، با مشتق گیری c را حذف می کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (۳)$$

از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

بنابراین

$$\frac{\partial f / \partial x}{M} = \frac{\partial f / \partial y}{N} \quad (۴)$$

هرگاه نسبت مشترك (۴) را با $\mu(x, y)$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N$$

باضرب کردن معادله (۴) در μ ، معادله به صورت

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

یا

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

تبدیل می‌شود که معادله‌ای کامل است. این استدلال نشان می‌دهد که در صورتی که معادله (۴) جواب داشته باشد، آنگاه معادله حداقل دارای يك عامل انتگرال ساز μ است. عملاً معادله مذکور دارای بینهایت عامل انتگرال ساز است؛ زیرا هرگاه $F(f)$ تابعی دلخواه از f باشد، آنگاه

$$\mu F(f)(M dx + N dy) = F(f) df = d\left[\int F(f) df\right]$$

بنابراین $\mu F(f)$ نیز عامل انتگرال ساز معادله (۴) خواهد بود.

بحث ما تا اینجا هنوز به مسئله عملی یافتن عامل انتگرال ساز نرسیده است. در حالت کلی، این امر کاملاً مشکل است. اما حالاتی چند موجودند که برای آنها روشهای صوری وجود دارد. برای نشان دادن اینکه چگونه این روشها به کار می‌آیند، فرض می‌کنیم μ عامل انتگرال ساز (۴) باشد:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

با بسط این رابطه خواهیم داشت

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

یا

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (۵)$$

به نظر می‌رسد که مسئله حل معادله دیفرانسیل معمولی (۲) را به مسئله بمراتب مشکندر حل معادله با مشتقات جزئی (۵) تبدیل کرده‌ایم، از سوی دیگر هیچ احتیاجی به جواب عمومی (۵) نداریم، چرا که هر جواب خاص برای مقصود ما کفایت می‌کند. و از این نظر، معادله (۵) بیش از آنچه به نظر می‌رسد مفید است. مثلاً فرض کنید (۲) دارای عامل انتگرال‌سازی مانند μ باشد که صرفاً تابع x است. در این حالت $\partial \mu / \partial x = d\mu / dx$ و $\partial \mu / \partial y = 0$ ، بنابراین (۵) را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} \quad (۶)$$

نوشت. از آنجا که سمت چپ صرفاً تابعی از x است، سمت راست نیز چنین خواهد بود. چنانچه بنویسیم

$$\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = g(x)$$

رابطه (۶) به صورت

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = g(x)$$

یا

$$\frac{d(\log \mu)}{dx} = g(x)$$

تبدیل می‌شود. لذا

$$\log \mu = \int g(x) dx$$

و

$$\mu = e^{\int g(x) dx} \quad (۷)$$

این استدلال مسلماً برگشت پذیر است: هرگاه عبارت سمت راست رابطه (۶) صرفاً تابعی از x ، مثلاً $g(x)$ ، باشد، در این صورت رابطه (۷) تابعی مانند μ را خواهد داد که صرفاً تابعی از x است و در رابطه (۵) صدق می‌کند و بنابراین عامل انتگرال‌ساز معادله (۲) است.

مثال ۱. در مورد معادله (۱) داریم

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2 y - x} = \frac{-2(xy - 1)}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x}$$

که صرفاً تابعی از x است. بنابراین، همانطور که قبلاً دیدیم

$$\mu = e^{\int -(2/x) dx} = e^{-2 \log x} = x^{-2}$$

عامل انتگرال ساز (۱) است.

استدلالی مشابه روش زیر را برای حالتی که معادله (۲) عامل انتگرال سازی صرفاً وابسته به y دارد، به دست می دهد: هرگاه عبارت

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} \quad (۸)$$

تابعی تنها از y مانند $h(y)$ باشد، در این صورت

$$\mu = e^{\int h(y) dy} \quad (۹)$$

نیز صرفاً تابعی از y است که در معادله (۵) صدق می کند و در نتیجه عامل انتگرال ساز معادله (۲) خواهد بود.

تکنیک مفید دیگری نیز برای تبدیل معادلات غیر کامل ساده به معادلات کامل وجود دارد. برای تشریح آن، دوباره معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر می گیریم و آن را به صورت زیر مرتب می کنیم

$$x^2 y dy - (x dy - y dx) = 0 \quad (۱۰)$$

عبارت داخل پرانتز خواننده را به یاد دیفرانسیل y/x

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2} \quad (۱۱)$$

می اندازد و تقسیم طرفین رابطه (۱۰) بر x^2 مطرح می شود. این کار، معادله را به $y dy - d(y/x) = 0$ تبدیل می کند، لذا جواب عمومی آن آشکارا به صورت زیر است

$$\frac{1}{2} y^2 - \frac{y}{x} = c$$

با توجه به ترکیب $x dy - y dx$ و استفاده از (۱۱)، عملاً به عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل (۱) دست یافته ایم. در زیر چند فرمول دیفرانسیل دیگر داده شده اند که اغلب در شرایط مشابهی مفید واقع می شوند

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2} \quad (۱۲)$$

$$d(xy) = x dy + y dx \quad (۱۳)$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(x dx + y dy) \quad (۱۴)$$

$$d\left(\tan^{-1} \frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} \quad (۱۵)$$

$$d\left(\log \frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{xy} \quad (۱۶)$$

از روابط فوق مشاهده می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل بسیار ساده $y dx - x dy = 0$ دارای عوامل انتگرال‌سازی به صورت $1/x^2$ ، $1/y^2$ ، $1/(x^2 + y^2)$ ، و $1/xy$ است و بنابراین از راه‌های گوناگون قابل حل است.

مثال ۲. شکل آینهٔ مقعری را چنان تعیین کنید که نوری که از منبع واقع در مبدأ مختصات بر آن می‌تابد، به صورت ستونی از پرتوها، به موازات محور x ها منعکس گردد. آینه به شکل سطح دواری خواهد بود که از دوران منحنی APB (شکل ۱۳) حول محور x ها به وجود می‌آید. بنابر قانون انعکاس $\alpha = \beta$. با بررسی هندسی شکل خواهیم داشت، $\phi = \beta$ و $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$. چون $\tan \theta = y/x$

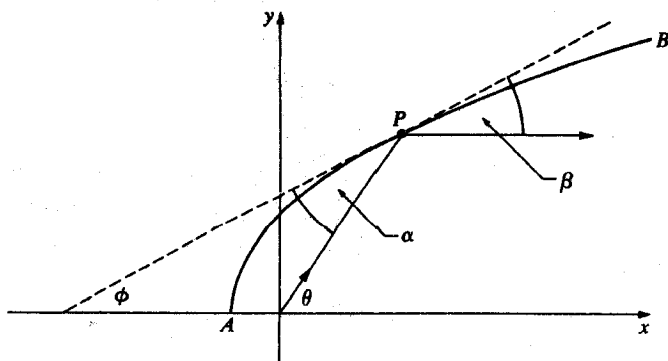
$$\tan \theta = \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$$

داریم

$$\frac{y}{x} = \frac{2 dy/dx}{1 - (dy/dx)^2}$$

با حل این معادله درجهٔ دوم نسبت به dy/dx خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$



شکل ۱۳

یا

$$x dx + y dy = \pm \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

با استفاده از (۱۴)، می توان نوشت

$$\pm \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx$$

بنابراین

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + c$$

که پس از ساده کردن چنین می شود:

$$y^2 = 2cx + c^2.$$

این معادله دسته تمام سهمی هایی است که کانونشان مبدأ مختصات و محور تقارنشان محور x هاست. معمولاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال ثابت می شود که همه سهمی ها خاصیتی مشهور به خاصیت کانونی دارند. نتیجه مثال فوق این است که سهمی ها تنها منحنی هایی هستند، که این خاصیت را دارند.

تمرین

۱- نشان دهید هرگاه $(\partial M / \partial y - \partial N / \partial x) / (Ny - Mx)$ تابعی از $z = xy$ ، مانند $g(z)$ باشد، در این صورت

$$\mu = e^{\int g(z) dz}$$

یک عامل انتگرال ساز (۲) است.

۲- هر یک از معادلات زیر را با به دست آوردن یک عامل انتگرال ساز، حل کنید:

$$(3x^2 - y^2) dy - 2xy dx = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(xy - 1) dx + (x^2 - xy) dy = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x dy + y dx + 3x^2 y^2 dy = 0 \quad (\text{ج})$$

۳- تحت چه شرایطی معادله (۲) عامل انتگرال سازی که تابع $z = x + y$ باشد، دارد؟

۴- هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

$$x dy - y dx = (1 + y^2) dy \quad (\text{الف})$$

$$y dx - x dy = xy^2 dy \quad (\text{ب})$$

$$x dy = (x^5 + x^2 y^4 + y) dx \quad (\text{ج})$$

$$(y + x) dy = (y - x) dx \quad (\text{د})$$

$$x dy = (y + x^2 + y^2) dx \quad (ه)$$

۱۰. معادلات خطی

مهمترین نوع معادلات دیفرانسیل، معادلات خطی هستند که در آنها مشتق بالاترین مرتبه، تابعی خطی از مشتقات مراتب پایینتر است. بنابراین، شکل کلی معادله خطی مرتبه اول به صورت زیر است

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$$

و شکل عمومی معادله خطی مرتبه دوم عبارت است از

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + r(x)$$

و به همین ترتیب می توان ادامه داد. روشن است که ضرایب موجود درست راست این عبارات یعنی $p(x)$ ، $q(x)$ ، $r(x)$ و غیره صرفاً توابعی از x هستند. هدف ما در حال حاضر، بررسی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است که آن را به شکل متعارف زیر می نویسیم

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (۱)$$

ساده ترین روش حل این معادله، با مشاهده رابطه زیر به دست می آید

$$\frac{d}{dx}(e^{Pdx} y) = e^{Pdx} \frac{dy}{dx} + y P e^{Pdx} = e^{Pdx} \left(\frac{dy}{dx} + P y \right) \quad (۲)$$

بر طبق این رابطه، چنانچه طرفین معادله (۱) را در e^{Pdx} ضرب کنیم، معادله به صورت

$$\frac{d}{dx}(e^{Pdx} y) = Q e^{Pdx} \quad (۳)$$

در می آید و با انتگرال گیری از آن، رابطه زیر حاصل می شود

$$e^{Pdx} y = \int Q e^{Pdx} dx + c$$

بنابراین

$$y = e^{-Pdx} \left(\int Q e^{Pdx} dx + c \right) \quad (۴)$$

جواب عمومی معادله (۱) است.

مثال. معادله $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 3x$ را حل کنید.

واضح است که این معادله خطی و در آن $P(x) = 1/x$ است، لذا داریم

$$\int p dx = \int \frac{dx}{x} = \log x \quad \text{و} \quad e^{\int p dx} = e^{\log x} = x$$

باضرب طرفین معادله در x و یادآوری رابطه (۳) خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}(xy) = 3x^2$$

بنابراین

$$xy = x^3 + c \quad \text{یا} \quad y = x^2 + cx^{-1}$$

آنچنانکه شیوه حل معادله بالا نشان می‌دهد، نبایستی سعی کنیم فرمول پیچیده (۴) را یاد بگیریم و به نحوی مکانیکی آن را در داخل معادلات خطی به کار بندیم. بلکه، بسیار بهتر است روش به دست آوردن فرمول (۴) را به خاطر آوریم و آن را به کار ببریم: طرفین را در $e^{\int p dx}$ ضرب کنید و انتگرال بگیرید. نکته منفی در این مبحث این است که به نظر می‌رسد همه چیز بستگی به حقیقت بیان شده در (۲) دارد. به سخن دیگر، به نظر می‌رسد که عامل انتگرال ساز، $e^{\int p dx}$ ، به طور مرموزی از آسمان نازل شده است. در تمرین ۱ زیر، از خواننده خواسته شده است که با روشهای بخش ۹ عامل انتگرال ساز را خود به دست آورد.

تمرین

- ۱- معادله (۱) را به شکل $Mdx + Ndy = 0$ بنویسید و با به کارگیری مطالب بخش ۹ نشان دهید که این معادله عامل انتگرال سازی مانند μ دارد که صرفاً تابعی از x است. μ را بیابید و با حل معادله کامل $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ ، رابطه (۴) را به دست آورید.
- ۲- هریک از معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$x \frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \quad (\text{الف})$$

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^{2x}} \quad (\text{ب})$$

$$(1 + x^2) dy + 2xy dx = \cot x dx \quad (\text{ج})$$

$$y' + y = 2xe^{-x} + x^2 \quad (\text{د})$$

$$y' + y \cot x = 2x \csc x \quad (\text{ه})$$

$$(2y - x^2)dx = xdy \quad (و)$$

۳- معادله $y^n \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ که به معادله برنولی شهرت دارد، درحالات $n=0$ یا $n=1$ خطی است. نشان دهید این معادله برای سایر مقادیر n نیز با تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ قابل تبدیل به معادله خطی است، سپس با به کار گرفتن این روش، معادلات زیر را حل کنید

$$xy' + y = x^2 y^2 \quad \text{الف)}$$

$$xy^2 y' + y^2 = x \cos x \quad \text{ب)}$$

۴- نماد متداول dy/dx معمولاً وقتی به کار گرفته می شود که y متغیر وابسته و x متغیر مستقل باشد. در تلاش برای حل معادله دیفرانسیل، گاهی اوقات گذاشتن x به جای y و y به جای x و کار کردن با معادله حاصل مفید است. این روش را در معادلات زیر به کار گیرید:

$$(e^x - 2xy)y' = y^2 \quad \text{الف)}$$

$$y - xy' = y^2 y' e^x \quad \text{ب)}$$

۵- مسیرهای متعامد دسته منحنی $y = x + ce^{-x}$ را به دست آورید.

۶- با توجه به رابطه (۴) می دانیم که جواب عمومی معادله خطی مرتبه اول، یک دسته منحنی به شکل زیر است

$$y = cf(x) + g(x)$$

بعکس، نشان دهید که معادله دیفرانسیل هر دسته منحنی به شکل بالا، خطی است.

۱۱. کاهش مرتبه

همچنانکه دیده ایم، شکل عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

است. در این بخش، دونوع خاص از معادلات مرتبه دوم را بررسی می کنیم که باروش معادلات مرتبه اول قابل حل هستند.

متغیر وابسته ظاهر نمی شود. هرگاه معادله فاقد y باشد، آنرا می توان به شکل زیر

نوشت.

$$f(x, y', y'') = 0 \quad (۱)$$

در این حالت، متغیر وابسته جدید p را به کار می بریم و می نویسیم

$$y' = p \quad \text{و} \quad y'' = \frac{dp}{dx} \quad (۲)$$

این جایگذاری، معادله (۱) را به معادله مرتبه اول

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0 \quad (3)$$

تبدیل می کند.

چنانچه بتوانیم جوابی برای معادله (۳) بیابیم، می توانیم به جای p در این جواب، dy/dx بگذاریم و به حل نتیجه آن پردازیم. این روش، حل معادله مرتبه دوم (۱) را به حل متوالی دو معادله مرتبه اول تبدیل می کند.

مثال ۱. معادله $xy'' - y' = 3x^2$ را حل کنید.

متغیر وابسته یعنی y در معادله فوق موجود نیست، بنابراین با توجه به (۲)، ایسن معادله به شکل

$$x \frac{dp}{dx} - p = 3x^2$$

یا

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 3x$$

تبدیل می شود، که معادله ای خطی است. این معادله را با روش بخش ۱۰ حل می کنیم،

$$p = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1 x$$

بنا بر این

$$y = x^3 + \frac{1}{4}c_1 x^2 + c_2$$

جواب مطلوب است.

متغیر مستقل ظاهر نمی شود. هرگاه x صریحاً ظاهر نشود معادله مرتبه دوم می تواند به شکل زیر نوشته شود

$$g(y, y', y'') = 0 \quad (4)$$

در اینجا نیز مانند حالت قبل، متغیر وابسته جدید p را به کار می بریم، ولی این بار y'' را بر حسب مشتق p نسبت به y بیان می کنیم

$$y' = p \quad \text{و} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} \quad (5)$$

بدین ترتیب می توانیم (۴) را به شکل

$$g\left(y, p, p \frac{dp}{dx}\right) = 0 \quad (۶)$$

بنویسیم و از این جا به بعد مثل حالت قبل پیش رویم و با حل متوالی دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول، معادله را حل کنیم.

مثال ۳. معادله $y'' + k^2 y = 0$ را حل کنید.

به کمک (۵)، این معادله را به صورت

$$p \frac{dp}{dy} + k^2 y = 0 \quad \text{یا} \quad p dp + k^2 y dy = 0$$

می نویسیم. از این معادله انتگرال می گیریم

$$p^2 + k^2 y^2 = k^2 a^2$$

بنابراین

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm k \sqrt{a^2 - y^2}$$

یا

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm k dx$$

انتگرال گیری مجدد، رابطه زیر را خواهد داد

$$\sin^{-1} \frac{y}{a} = \pm kx + b$$

بنابراین

$$y = a \sin(\pm kx + b) \quad \text{یا} \quad y = A \sin(kx + B)$$

این جواب عمومی معادله را می توان به شکل زیر نوشت

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \quad (۷)$$

که از بسط $\sin(kx + B)$ و تغییر شکل ثابتها به دست می آید.

معادله ای که در مثال ۲ حل شد، در کاربردها اکثراً ظاهر می شود (بخش ۵

را ببینید). این معادله خطی است، و جواب آن، (۷)، در فصل بعد، نظریه عمومی معادلات خطی مرتبه دوم جای داده خواهد شد.

تمرین

۱- معادلات زیر را حل کنید.

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$xy'' = y' + (y')^2 \quad (\text{ب})$$

$$y'' - k^2 y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$x^2 y'' = 2xy' + (y')^2 \quad (\text{د})$$

۲- جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را که در شرایط داده شده صدق می کند، به دست آورید:

$$x = 0 \quad \text{الف} \quad (x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0, \quad y' = 0, \quad y = 1 \quad \text{وقتی که}$$

$$x = 0 \quad \text{ب} \quad yy'' = y^2 y' + (y')^2, \quad y' = 1, \quad y = -\frac{1}{y} \quad \text{وقتی که}$$

۳- معادله $y'' = 1 + (y')^2$ را با هر دو روش ذکر شده در این بخش حل کنید، و نتایج را بایکدیگر وفق دهید.

۴- سیمی به شکل چرخزادی خم شده است که معادلات پارامتری آن $x = a(\theta - \sin \theta)$ و $y = a(1 - \cos \theta)$ است و طبق شکل ۱۵ وارونه قرار گرفته است. هرگاه مهره کوچکی روی سیم رها شود و بدون اصطکاک و تنها در اثر نیروی ثقل بلغزد، نشان دهید سرعت آن، v در معادله

$$4av^2 = g(s_0^2 - s^2)$$

صدق می کند که در آن s و s_0 طول دوقوس از منحنی هستند که به پایسترین نقطه منحنی منتهی می شوند و انتهای دیگرشان به ترتیب نقطه شروع حرکت مهره و مکان مهره در هر زمان بعد از شروع حرکت است. بامشتق گیری از رابطه فوق، معادله زیر حاصل می شود

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{4a} s = 0$$

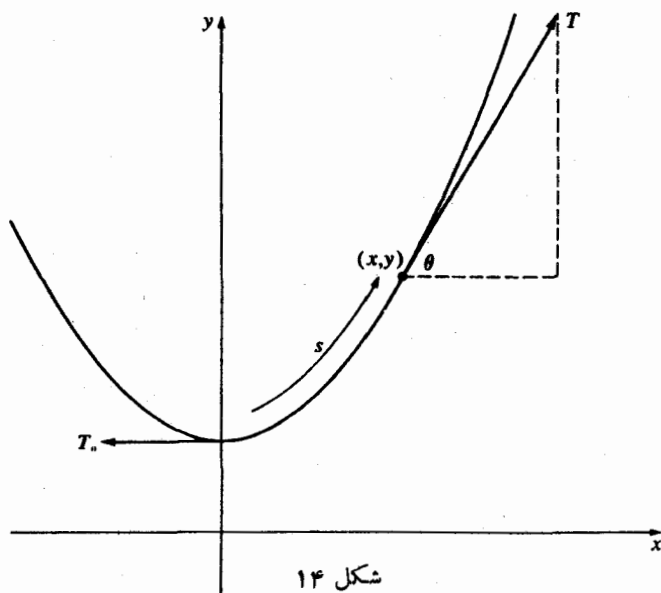
از این جا s را به صورت تابعی از t به دست آورید و زمان تناوب حرکت را تعیین کنید. توجه کنید که این نتایج خاصیت همزمانی چرخزاد را، که در مسئله ۶-۲ مورد بحث قرار گرفت، ثابت می کند.

۱۲. زنجیر آویخته. منحنیهای تعقیب

اکنون به بحث در مورد چندین کاربرد می پردازیم که معادلات دیفرانسیل حاصل از آنها با روشهای این فصل قابل حل هستند.

مثال ۰۱. شکل یک زنجیر قابل انعطاف را که در دو نقطه محکم شده و در اثر وزن خود آویزان است، به دست آورید.

فرض می کنیم محور y ها از پایین ترین نقطه زنجیر عبور کند (شکل ۱۴) و نیز s طول قوس منحنی از پایین ترین نقطه تا نقطه (x, y) باشد، و فرض می کنیم $w(s)$ وزن مخصوص



شکل ۱۴

طول زنجیر باشد. معادله منحنی را با توجه به این امر به دست می آوریم که قطعه زنجیر واقع بین (x, y) و پایین ترین نقطه، تحت تأثیر سه نیرو در حال تعادل است: کشش افقی T_0 در پایین ترین نقطه، کشش متغیر T در (x, y) که به دلیل انعطاف پذیری زنجیر، بر آن مماس است و بالاخره نیروی وزن این قطعه که رو به پایین می باشد. مولفه افقی T را با T_0 و مولفه عمودی T را با وزن زنجیر برابر می گیریم

$$T \cos \theta = T_0, \quad T \sin \theta = \int_0^s w(s) ds$$

از اولین معادله فوق نتیجه می شود که

$$T \sin \theta = T_0 \tan \theta = T_0 \frac{dy}{dx}$$

بنابراین

$$T_0 y' = \int_0^s w(s) ds$$

در اینجا با مشتق گیری نسبت به x ، انتگرال حذف می شود:

$$T_0 y'' = \frac{d}{dx} \int_0^s w(s) ds = \frac{d}{ds} \int_0^s w(s) ds \frac{ds}{dx} = w(s) \sqrt{1 + (y')^2}$$

بنابراین

$$T_0 y'' = w(s) \sqrt{1 + (y')^2} \quad (1)$$

معادله دیفرانسیل منحنی مورد نظر است، و خود منحنی با حل این معادله به دست می آید. برای ادامه حل مسئله باید اطلاع مشخصی در مورد تابع $w(s)$ داشته باشیم. معادله (۱) را در حالتی که $w(s)$ ثابت و برابر w_0 است حل می کنیم:

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}, \quad a = \frac{w_0}{T}. \quad (2)$$

مطابق روش مذکور در بخش ۱۱، با جایگذاری $y' = p$ و $y'' = dp/dx$ معادله (۲) به معادله

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = a dx \quad (3)$$

تبدیل می شود. اکنون از رابطه (۳) انتگرال می گیریم و با استفاده از اینکه برای $x=0$ ، p مساوی با صفر است معادله زیر حاصل می گردد

$$\log(p + \sqrt{1 + p^2}) = ax$$

معادله فوق را بر حسب p حل می کنیم، به دست می آید:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}(e^{ax} - e^{-ax})$$

هرگاه محور y ها را در ارتفاع مناسبی قرار دهیم، به نحوی که در $x=0$ داشته باشیم $y = 1/a$ ، تابع

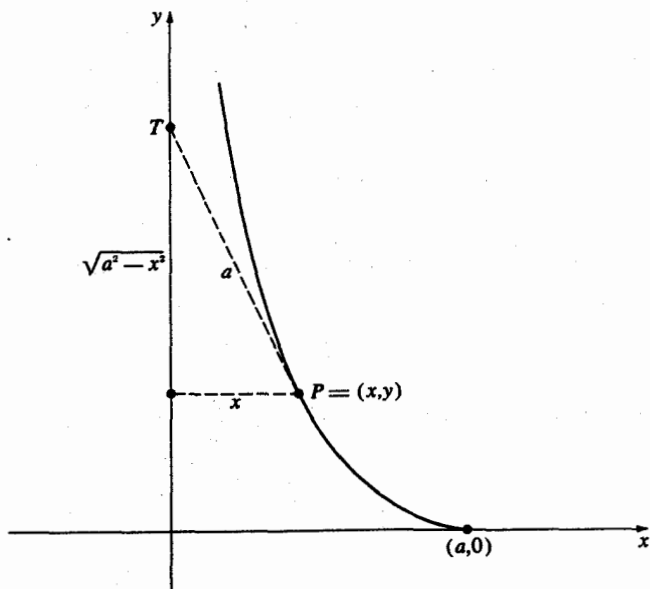
$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) = \frac{1}{a} \cosh ax$$

به دست می آید که منحنی آن شکل زنجیر یکنواختی است که تحت تأثیر وزنش آویخته شده است. این منحنی، زنجیری نامیده می شود. زنجیری ها در مسائل جالب دیگری نیز ظاهر می شوند. مثلاً در فصل ۹ نشان خواهیم داد که اگر کمان واصل دو نقطه مفروض و واقع در بالای محور x ها حول این محور دوران کند، آنگاه مساحت سطح حاصل از این دوران می نیمم است، هرگاه این کمان بخشی از یک منحنی زنجیری باشد.

مثال ۲. نقطه P در صفحه xy با نخ PT به طول a به آرامی کشیده می شود. هرگاه T از مبدأ مختصات شروع به حرکت کند و در جهت مثبت محور y ها حرکت نماید، و چنانچه P از نقطه $(a, 0)$ شروع به حرکت کند، مسیر p به چه صورت خواهد بود؟ این منحنی کشاننده نامیده می شود.

از شکل ۱۵ به آسانی دیده می شود که معادله دیفرانسیل مسیر عبارت است از:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$



شکل ۱۵

با جدا کردن متغیرها و انتگرال گیری و استفاده از این موضوع که در $x=a$ داریم $y=0$ ، نتیجه می شود که

$$y = a \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

معادله کشاننده است. این منحنی دارای اهمیت قابل ملاحظه ای است، زیرا سطح حاصل از دوران این منحنی حول محور y ها، مدلی برای هندسه غیر اقلیدسی از نوع لباچفسکی است.

مثال ۳. خرگوشی از مبدأ مختصات در جهت مثبت محور y ها و با تندی a شروع به دویدن می کند. همزمان با آن سگی از نقطه $(0, c)$ با تندی b به تعقیب او می پردازد. مسیر سگ را تعیین کنید.

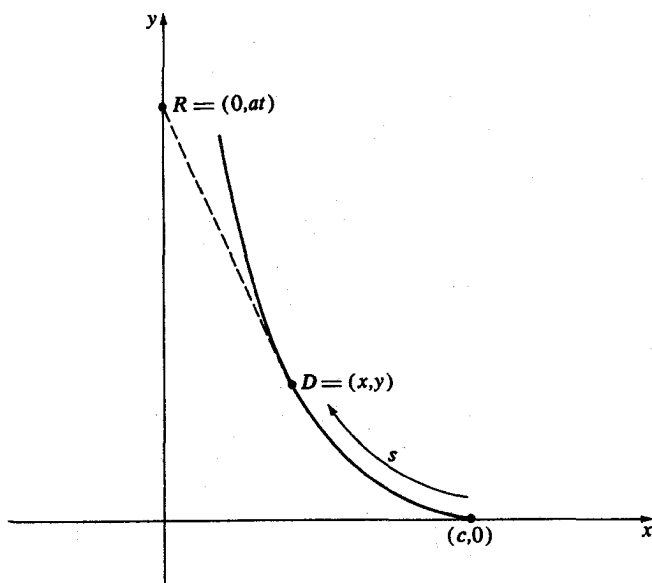
t ثانیه بعد از شروع حرکت هر دو، خرگوش به نقطه $R = (0, at)$ و سگ به نقطه $D = (x, y)$ می رسند (شکل ۱۶). چون خط DR بر مسیر مماس است، خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-at}{x} \quad \text{یا} \quad xy' - y = -at \quad (4)$$

برای حذف t ، ابتدا از (۴) نسبت به x مشتق می گیریم

$$xy'' = -a \frac{dt}{dx} \quad (5)$$

از آنجا که $ds/dt = b$ داریم



شکل ۱۶

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{b} \sqrt{1+(y')^2}. \quad (۶)$$

در (۶) علامت منفی به این علت ظاهر شده است که با کاهش x مقدار s افزایش می‌یابد. هرگاه (۵) و (۶) را ترکیب کنیم، معادله دیفرانسیل مسیر به دست می‌آید:

$$xy'' = k \sqrt{1+(y')^2}, \quad k = \frac{a}{b} \quad (۷)$$

جایگزینی $y' = p$ و $y'' = dp/dx$ معادله (۷) را به

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k \frac{dx}{x}$$

تبدیل می‌کند که با انتگرال‌گیری و به کار بردن این شرط اولیه که در $x=c$ مقدار p برابر صفر است، خواهیم داشت

$$\log(p + \sqrt{1+p^2}) = \log\left(\frac{x}{c}\right)^k$$

این معادله را بر حسب p با سانی می‌توان حل کرد و مقدار حاصل برای p برابر است با

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{c}\right)^k - \left(\frac{c}{x}\right)^k \right]$$

برای ادامه حل و یافتن y به صورت تابعی از x ، باید اطلاعات بیشتری در مورد k داشته باشیم. در مسئله ۸، از خواننده می‌خواهیم که برخی از امکانات را بررسی کند.

مثال ۴. محورهای x و y خط $x=c$ و دو ساحل رودخانه‌ای هستند، که جریان آب در آن دارای تندی ثابت a در جهت منفی محور y هاست. یک قایق در نقطه $(c, 0)$ وارد رودخانه می‌شود و با تندی ثابت b نسبت به آب، مستقیماً به سوی مبدأ حرکت می‌کند، مسیر قایق چیست؟ مؤلفه‌های سرعت قایق (شکل ۱۷) عبارت‌اند از

$$\frac{dx}{dt} = -b \cos \theta \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = -a + b \sin \theta,$$

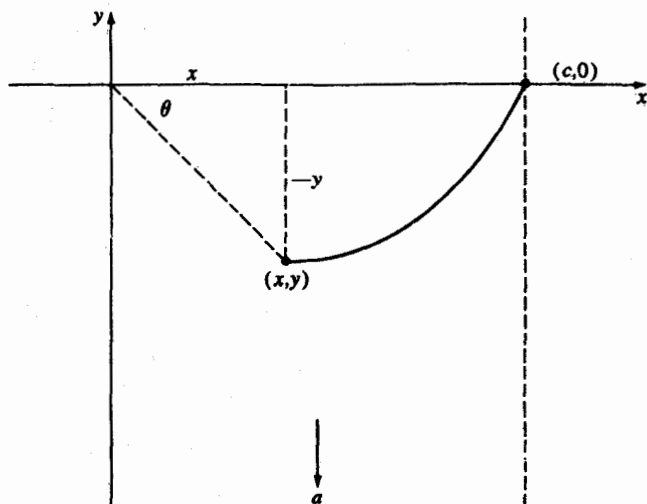
بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-a + b \sin \theta}{-b \cos \theta} = \frac{-a + b(-y/\sqrt{x^2 + y^2})}{-b(x/\sqrt{x^2 + y^2})} \\ &= \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} + by}{bx} \end{aligned}$$

این معادله همگن است، و جواب آن که باروش بخش y به دست می‌آید، عبارت‌است از

$$c^k(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = x^{k+1}$$

که در آن $k = a/b$. واضح است که سرنوشت قایق بستگی به رابطه b با a دارد. در تمرین ۹ از خواننده، خواسته شده است معلوم کند که تحت چه شرایطی قایق به ساحل می‌رسد.



شکل ۱۷

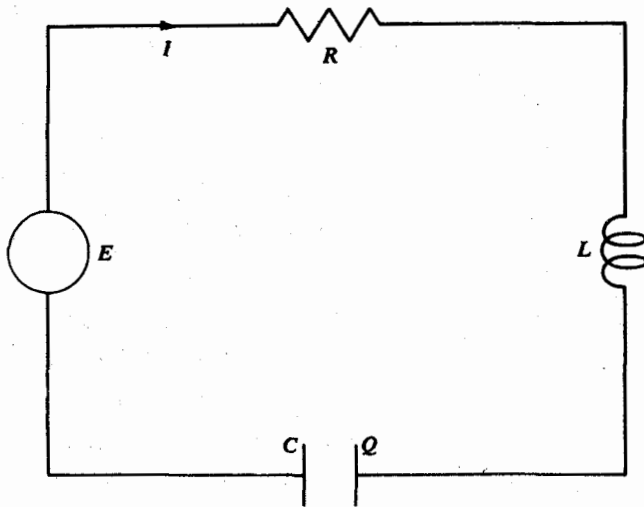
تمرین

- ۱- در مثال ۱، نشان دهید که کشش T در هر نقطه دلخواه (x, y) از زنجیر، برابر w_0 است.
- ۲- هرگاه زنجیر مثال ۱، تحت تأثیر باری با وزن مخصوص افقی $L(x)$ باشد، چه معادله دیفرانسیلی به جای (۱) باید به کار گرفته شود؟
- ۳- شکل يك کابل را که وزن مخصوص آن صرف نظر کردنی است [یعنی $w(s) = 0$] و وزن پلي با وزن مخصوص افقی ثابت $L(x) = L_0$ را تحمل می کند، تعیین کنید.
- ۴- هرگاه طول هر قطعه کوچک از يك کابل کشسان با وزن مخصوص یکنواخت، متناسب با کشش کابل در آن قطعه باشد، نشان دهید که اگر کابل مزبور در اثر وزن خود آویخته شود، به شکل سهمی درخواهد آمد.
- ۵- پرده ای از میله هایی باریک ساخته شده است که به سیمی با وزن ناچیز آویزانند. اگر میله ها نزدیک بهم و در فاصله های افقی مساوی باشند و لبه پایینی پرده افقی فرض شود، شکل سیم را تعیین کنید.
- ۶- کدام منحنی واقع در بالای محور x ها این خاصیت را دارد که طول قوس بین هر دو نقطه روی منحنی، متناسب با سطح زیر آن قوس است؟
- ۷- نشان دهید که کشاننده مثال ۲ بردسته دواپری با شعاع a و مرکز واقع بر محور y ها عمود است.
- ۸- الف) در مثال ۳، فرض کنید که $a < b$ (بنابراین $k < 1$) و y را به صورت تابعی از x به دست آورید. وقتی سگ به خرگوش می رسد، خرگوش چه مسافتی طی کرده است؟
ب) فرض کنید $a = b$ و y را به شکل تابعی از x تعیین کنید. سگ تا چه حد به خرگوش نزدیک می شود؟
- ۹- در مثال ۴، معادله مسیر را بر حسب y حل کنید و شرایطی برای a و b تعیین کنید که قایق بتواند به ساحل مقابل برسد. قایق در کجا به ساحل می رسد؟

۱۳. مدارهای ساده الکتریکی

در این قسمت، آن دسته از معادلات دیفرانسیل خطی را بررسی می کنیم که جریان الکتریسته را در مدار الکتریکی ساده ای که در شکل ۱۸ نشان داده شده است، تعیین می کنند. این مدار شامل چهار عنصر الکتریکی است که عملکرد هر يك از آنها با سانی و بدون نیاز به معلومات خاصی در مورد الکتریسته قابل درك است.

الف. منبع نیروی محرکه الکتریکی E (باتری یا مولد برق) که بار الکتریکی را هدایت و جریان الکتریکی I را تولید می کند. نیروی محرکه الکتریکی E بسته به ماهیت منبع می تواند ثابت یا تابعی از زمان باشد.



شکل ۱۸

ب. مقاومت الکتریکی R که با ایجاد افتی برابر با $E_R = RI$ در نیروی محرکه الکتریکی در مقابل جریان مقاومت می‌کند. معادله

$$E_R = RI$$

قانون اهم^۱ نامیده می‌شود.

ج. خود القا با ضریب خود القا L ، که به وسیله ایجاد افتی در E به اندازه

$$E_L = L \frac{dI}{dt}$$

با هر تغییری در جریان الکتریکی مخالفت می‌کند.

د. خازن با ظرفیت C که بار الکتریکی Q را در خود ذخیره می‌کند. بار ذخیره شده در خازن با ورود بار اضافی مقابله می‌کند، و افتی که بدین ترتیب در مقدار E حاصل می‌شود عبارت است از:

$$E_C = \frac{1}{C} Q$$

۱. گئورگ زیمنون اهم Georg Simon Ohm (۱۷۸۷-۱۸۵۴) فیزیکدان آلمانی که تنها خدمت مهم او به علم، کشف قانون فوق‌الذکر است. هنگامی که وی در سال ۱۸۲۷ این کشف را اعلام کرد، چون بیش از حد قابل قبول، ساده بود، مورد قبول واقع نشد، به همین سبب او را غیر قابل اعتماد دانستند و آنچنان با وی بدرفتاری شد که از استادی دانشگاه کولن استعفا کرد و قبل از اثبات صحت نظرش سالها در عزت و فقر بسربرد. یکی از شاگردان وی در کولن پتر دیریکله بود، که بعدها یکی از برجسته‌ترین ریاضی دانان قرن نوزدهم گردید.

بعلاوه، چون شدت جریان، آهنگ سیلان بار الکتریکی، و بنا بر این آهنگ تغییر بار ذخیره شده درخازن را نشان می‌دهد، داریم

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

این عناصر مدار باید دیگر بر طبق قانون کیرشهوف^۱ عمل می‌کنند، که براساس آن، جمع جبری نیروهای محرکه الکتریکی در مدار بسته صفر است. بنا بر این اصل، داریم

$$E - E_R - E_L - E_C = 0$$

یا

$$E - RI - L \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} Q = 0$$

که آن را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = E \quad (۱)$$

بسته به شرایط، می‌توان I یا Q را متغیر وابسته فرض کرد. در حالت اول، با مشتق‌گیری از رابطه (۱) نسبت به t و قرار دادن I به جای dQ/dt ، می‌توان Q را حذف کرد:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt} \quad (۲)$$

در حالت دوم، تنها با قرار دادن dQ/dt به جای I داریم

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E \quad (۳)$$

این معادلات خطی مرتبه دوم را بعداً به تفصیل بیشتر بررسی خواهیم کرد. در این بخش مقصود ما اساساً بررسی معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \quad (۴)$$

است، که از معادله (۱) درحالتی که خازن در مدار نباشد، حاصل می‌گردد. مثال ۱. معادله (۴) را درحالتی حل کنید که نیروی محرکه الکتریکی ثابت E_0 در

۱. گوستاو روبرت کیرشهوف Gustav Robert Kirchhoff (۱۸۲۴-۱۸۸۷) دانشمند دیگر آلمانی است که هر دانشجوی فیزیک مقدماتی با کارهایش در مورد مدارهای الکتریکی آشناست. وی همچنین اصول تجزیه طیفی را پایه‌گذاری کرد و راه را برای موارد استعمال طیف‌نمایی در تعیین ترکیب شیمیایی ستاره‌ها هموار کرد.

در $t = 0$ به مدار اعمال می‌شود، و جریان اولیه در آن I_0 است. برای $t \geq 0$ ، معادله این مدار به شکل

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E_0$$

است. در اینجا متغیرها را می‌توان جدا کرد که در نتیجه رابطه

$$\frac{dI}{E_0 - RI} = \frac{1}{L} dt$$

به دست می‌آید. با انتگرال‌گیری و به کار بردن شرط اولیه $I = I_0$ در $t = 0$ ، رابطه زیر به دست می‌آید

$$\log(E_0 - RI) = -\frac{R}{L}t + \log(E_0 - RI_0)$$

بنابراین

$$I = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right)e^{-Rt/L}$$

توجه کنید که شدت جریان I شامل یک بخش حالت ماندگار E_0/R و یک بخش گذرای $(I_0 - E_0/R)e^{-Rt/L}$ است که با ازدیاد t به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه، قانون اهم $E_0 = RI$ برای مقادیر بزرگ t تقریباً صادق است. هم‌چنین مشاهده می‌شود که هرگاه $I_0 = 0$ ، داریم

$$I = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

و هرگاه $E_0 = 0$ ، داریم $I = I_0 e^{-Rt/L}$.

تمرین

۱- معادله (۴) را درحالتی که شدت جریان اولیه I_0 و نیروی محرکه الکتریکی E که در $t = 0$ اعمال می‌شود برابر است با

$$E = E_0 e^{-kt} \quad \text{(الف)}$$

$$E = E_0 \sin \omega t \quad \text{(ب)}$$

حل کنید.

۲- مداری را در نظر بگیرید که توسط معادله (۴) توصیف شود و نشان دهید که:

(الف) هرگاه شدت جریان ماکزیمم یا می‌نیمم باشد، قانون اهم صادق است.

(ب) نیروی محرکه E در شدت جریان ماکزیمم، نزولی و در شدت جریان می‌نیمم، صعودی است.

تمرینهای گوناگون فصل دوم

در ۲۵ معادله دیفرانسیل زیر، نمونه‌هایی از تمام انواع معادلات مورد بحث در این فصل وجود دارد. آنها را حل کنید.

$$yy'' = (y')^2 \quad -۱$$

$$(1 - xy)y' = y^2 \quad -۲$$

$$(2x + 3y + 1)dx + (2y - 3x + 5)dy = 0 \quad -۳$$

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} \quad -۴$$

$$y^2 dx = (x^2 - xy) dy \quad -۵$$

$$(x^2 y^2 + y) dx = (x^2 y^2 - x) dy \quad -۶$$

$$yy'' + (y')^2 - 2yy' = 0 \quad -۷$$

$$x dy + y dx = x \cos x dx \quad -۸$$

$$xy dy = x^2 dy + y^2 dx \quad -۹$$

$$(e^x - 3x^2 y^2)y' + ye^x = 2xy^2 \quad -۱۰$$

$$y'' + 2x(y')^2 = 0 \quad -۱۱$$

$$(x^2 + y) dx = x dy \quad -۱۲$$

$$xy' + y = x^2 \cos x \quad -۱۳$$

$$(6x + 4y + 3)dx + (3x + 4y + 2)dy = 0 \quad -۱۴$$

$$\cos(x + y) dx = x \sin(x + y) dx + x \sin(x + y) dy \quad -۱۵$$

$$x^2 y'' + xy' = 1 \quad -۱۶$$

$$(y^2 e^{xy} + \cos x) dx = (e^{xy} + xye^{xy}) dy = 0 \quad -۱۷$$

$$y' \log(x - y) = 1 + \log(x - y) \quad -۱۸$$

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \quad -۱۹$$

$$(y^2 - 3xy - 2x^2) dx = (x^2 - xy) dy \quad -۲۰$$

$$(1 + x^2)y' + 2xy = 2x^2 \quad -۲۱$$

$$e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = y \sin xy dx + x \sin xy dy \quad -۲۲$$

$$(1 + x^2)y'' + xy' = 0 \quad -۲۳$$

$$(xe^x + y - x^2) dy = (2xy - e^x - x) dx \quad -۲۴$$

$$e^x(1+x) dx = (xe^x - ye^x) dy \quad -۲۵$$

۲۶- فرض کنید عنصر رادیواکتیو مفروض A در اثر تلاشی به عنصر رادیواکتیو دیگری به نام B تجزیه می‌شود و B نیز به نوبه خود به عنصر C تجزیه می‌گردد. اگر مقدار A در ابتدا x فرض شود و اگر مقادیر A و B در لحظه t ، بترتیب، x و y باشند و k_1 و k_2 ثابتهای آهنگ این دو واکنش باشند، y را به صورت تابعی از t تعیین کنید.

۲۷- بشکه‌ای حاوی ۲۰۰ لیتر آب نمک است که ۱۲ کیلوگرم نمک در آن حل شده است. از لحظه $t=0$ به بعد، آب با آهنگ ۸ لیتر در دقیقه به این بشکه وارد می‌شود، و مخلوط نیز با همین آهنگ از بشکه خارج می‌شود و به درون بشکه‌های دیگری که در ابتدا حاوی ۲۰۰ لیتر آب خالص است می‌ریزد. تعیین کنید در چه زمانی بشکه دوم حاوی بیشترین مقدار نمک است.

۲۸- يك تعمیم طبیعی معادله خطی مرتبه اول

$$y' = p(x) + q(x)y$$

معادله ریکاتی^۱

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

است. در حالت کلی، این معادله با روشهای مقدماتی قابل حل نیست. اما، هرگاه يك جواب خصوصی از معادله به صورت $y_1(x)$ در دست باشد، جواب عمومی به صورت

$$y(x) = y_1(x) + z(x)$$

۱. کنت باکوپو فرانسسکو ریکاتی Count Jacopo Francesco Riccati (۱۶۷۶-۱۷۵۴) دانشمندی ایتالیایی بود که در ریاضیات، فیزیک و فلسفه آثاری دارد. او را باید ناشر اصلی افکار نیوتن در ایتالیا بحساب آورد. زمانی ریاست آکادمی علوم سن پترزبورگ به وی پیشنهاد گردید، اما وی طبعاً زندگی راحت و بی دغدغه اشرافی خود را در ایتالیا به مسئولیتهای اداری در روسیه ترجیح داد. اگرچه وی در محافل علمی زمان خود، بسیار مشهور بود، اما امروزه یاد او فقط از طریق معادله دیفرانسیلی که به نام اوست در اذهان مانده است. وحتی این امر از تصادفات تاریخ است، چراکه ریکاتی صرفاً حالاتی خاص از این معادله را بررسی کرد بدون اینکه جوابی برای آنها بیابد، و بسیاری از این حالات خاص بشکل موفقیت آمیزی توسط اعضای خانواده برنولی بررسی شدند. جزئیات این داستان پیچیده را می‌توان در کتاب

G.N. Watson «A Treatise on the Theory of Bessel Functions» 2d ed., pp. 1-3, Cambridge, London, 1944.

یافت. معادله خاص ریکاتی $y' + by^2 = cx^m$ بر حسب تعدادی متناهی جمله قابل حل است اگر و تنها اگر، m برابر با -۲ یا به شکل $4k/(2k+1)$ — به ازای عدد صحیح k باشد (تمرین ۸-۳۵ راکه بعداً خواهد آمد نگاه کنید).

خواهد بود، که در آن $z(x)$ ، جواب عمومی معادله برنولی

$$z' - (q + 2ry_1)z = rz^2$$

است. این مطلب را ثابت کنید و جواب عمومی معادله

$$y' = \frac{y^4}{x} + x^3 y^2 - x^5$$

را که يك جواب خصوصی آن $y_1(x) = x$ است، به دست آورید.

مسائل دینامیکی با جرم متغیر. در صفحات قبل، بسیاری از موارد استعمال قانون دوم نیوتن را به شکلی که در بخش اول ارائه شده بود:

$$F = ma$$

بررسی کردیم، که در آن F نیروی وارد به جسمی به جرم m و باشتاب a است. اما باید توجه داشت که این رابطه تنها برای حالتی که جرم ثابت است به کار می رود. در واقع قانون نیوتن تا اندازه ای کلی تر است. و چنین بیان می شود که هرگاه نیروی F بر جسمی به جرم m وارد شود، اندازه حرکتی مانند mv ، (v سرعت جسم است) با آهنگی برابر با آن نیرو تولید می کند:

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

این معادله در حالتی که m ثابت است به $F = ma$ تبدیل می شود. برای به کار بردن این شکل از قانون نیوتن در مورد جسم متحرک با جرم متغیر، لازم است اندازه حرکت ناشی از نیروی F از اندازه حرکت ناشی از الحاق جرم از يك منبع خارجی به جسم متمایز شود. بنابراین، هرگاه جرمی با سرعت $v + w$ (که w سرعت نسبت به m است) و با آهنگ dm/dt به m افزوده شود، باید اثر F در افزایش اندازه حرکت با $(v + w) dm/dt$ تکمیل گردد. پس

$$(v + w) \frac{dm}{dt} + F = \frac{d}{dt}(mv)$$

که به شکل زیر ساده می شود

$$w \frac{dm}{dt} + F = m \frac{dv}{dt}$$

توجه داریم که، بسته به اینکه جرم جسم در حال افزایش و یا کاهش باشد، dm/dt مثبت یا منفی است و بسته به حرکت نسبی جرم افزوده شده یا کاسته شده از آن، w مثبت یا منفی

می باشد. این ایده ها در تمرینهای زیر مورد بحث و بررسی قرار می گیرند.

۲۹- موشکی با جرم بدنه m_1 حامل مقداری سوخت با جرم اولیه m_2 می باشد. موشک در اثر احتراق سوختش از سطح زمین به طور عمودی به طرف بالا پرتاب می شود و آهنگ احتراق سوخت آن مقداری ثابت است مانند a (به طوری که $dm/dt = -a$ که در آن m جرم کل متغیر موشک است). مواد سوخته شده با سرعت b نسبت به موشک از عقب آن خارج می شوند. هر گاه از تمامی نیروهای خارجی، بجز نیروی ثقل mg ، صرف نظر کنیم (g را ثابت فرض می کنیم)، ارتفاع و سرعت موشک را در لحظه اتمام سوخت تعیین کنید (سرعت اتمام سوخت و ارتفاع اتمام سوخت).

۳۰- يك قطره باران کروی، تحت تأثیر نیروی ثقل از حالت سکون شروع به سقوط می کند. هر گاه قطره مزبور در حین حرکت، ذرات بخار را با آهنگی متناسب با سطح خود جذب کند (ذرات بخار ساکن فرض می شوند)، و شعاع اولیه قطره صفر فرض شود، ثابت کنید که قطره مورد نظر با شتاب ثابت $g/2$ سقوط می کند.

۳۱- يك قطره باران کروی در محیطی با رطوبت یکنواخت، از حالت سکون شروع به سقوط می کند. هر گاه قطره در حین حرکت ذرات رطوبت را، که در حالت سکون فرض می شوند، جذب کند و شعاع اولیه آن صفر فرض شود، نشان دهید که قطره مزبور با شتاب ثابت $g/7$ سقوط می کند.

۳۲- نظریه نسبیت خاص اینشتین بیان می کند که m جرم ذره ای که با سرعت v حرکت می کند برابر است با

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (*)$$

که در آن c سرعت نور و m_0 جرم سکون ذره است.

الف) هر گاه ذره در فضای تهی از حالت سکون خارج شود و تحت تأثیر میدان ثقل ثابتی برای مدتی طولانی در خلا حرکت کند با اختیار $w = -v$ ، v را به عنوان تابعی از زمان بیابید و نشان دهید که وقتی $t \rightarrow \infty$ آنگاه $v \rightarrow c$.

ب) فرض کنید که $M = m - m_0$ افزایش جرم ذره باشد. هر گاه E افزایش متناظر انرژی آن، برابر با کار انجام شده نیروی F وارد بر ذره باشد به طوری که

$$E = \int_0^v F dx = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv) dx = \int_0^v v d(mv)$$

تحقیق کنید که

۱. انریکو فرمی پیشنهاد کرده است که هر گاه پدیده ای که در فوق توصیف شد، در مورد ذرات باردار غبار بین ستارگان، که در اثر میدانهای مغناطیسی ستارگان شتابدار می شوند به کار رود، تاحدی می تواند منشأ پرتوهای کیهانی را توجیه کند.

$$E = Mc^2 \quad (**)$$

ج) رابطه (*) را از رابطه (**) به دست آورید.

پیوست الف. روشهای عددی

در این فصل چندین تکنیک برای حل انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به وسیله فرمول ارائه کرده ایم. متأسفانه، این روشها همواره در مورد معادلات ناشی از مسائل عملی قابل اعمال نمی باشند. در چنین حالاتی چه می توان کرد؟ شاید خواننده با روش سیمسون، آشنا باشد که بر اساس آن می توان مقدار عددی هرانتگرال معین را با دقت دلخواه محاسبه کرد. این روش ارتباطی به یافتن فرمولی برای بیان انتگرال نامعین مربوطه ندارد. به همین ترتیب، روشهایی نیز برای یافتن جواب عددی تقریباً همه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، وقتی شرط اولیه داده شده است، وجود دارد که جواب معادلات را با هر تقریب دلخواه به دست می دهد. از این روشها صرف نظر از اینکه معادله بر حسب توابع مقدماتی قابل حل باشد یا نه، می توان استفاده کرد. بررسی ومطالعه چنین روشهایی بخشی از آنالیز عددی را تشکیل می دهد، که شاخه ای از ریاضیات است و هدفش محاسبه تقریبی جوابهای عددی مسائل ریاضی به صورت اعشاری است.

برای درک اینکه منظور از جواب عددی معادله دیفرانسیل چیست، مسئله ساده مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم

$$y(0) = 1, \quad y' = y \quad (1)$$

e^x جواب بدیهی این معادله است که برای اغلب مقاصد نظری کفایت می کند. اما در کاربرد عملی ممکن است دانستن مقدار عددی این جواب در $x = 0.5$ لازم باشد، و عدد اعشاری 1.6487212707 ، احتمالاً از نماد $e^{0.5}$ مفیدتر است. برخلاف جواب نظری معادله (۱) که به وسیله e^x داده می شود، جواب عددی معادله به وسیله جدول مقادیر e^x ارائه می گردد.

در این پیوست چندین روش محاسبه جواب عددی تقریبی برای مسئله مقدار اولیه به صورت زیر را شرح می دهیم

$$y(x_0) = y_0, \quad y' = f(x, y) \quad (2)$$

فرض خواهیم کرد که این مسئله دارای جواب یگانه ای است که با $y(x)$ نشان داده می شود. این روشها عبارت از دستورالعمل هایی محاسباتی اند که کاملاً مستقل از این واقعیت هستند که فرمولی برای بیان $y(x)$ موجود هست یا نه و صرفاً بر اساس اطلاعاتی که از (۲) حاصل می شوند قرار دارند. بنا بر این، این روشهای عددی و دیگر روشهای مشابه آنها در حکم چاره نهایی برای مسائل با شرایط اولیه ای است که یا جواب دقیق آنها قابل حصول نیست و یا جوابشان آن چنان مخلوط درهم و برهمی از توابع ضمنی است که برای مقاصد عملی تقریباً غیر قابل استفاده است.

بگذارید ماهیت این روشهای عددی را کمی مشخص تر کنیم. تابع $y(x)$ را برای

همه مقادیر x در یک فاصله تقریب نخواهیم زد، بلکه این عمل را تنها برای یک دنباله گسسته از نقاط که از x شروع می‌شوند، انجام خواهیم داد، مثلاً برای دنباله‌ای همچون

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h, \dots$$

که در آن h عدد مثبتی است. این بدان مفهوم است که می‌خواهیم مقدار تقریبی y_1 را برای مقدار دقیق $y(x_1)$ ، مقدار تقریبی y_2 را برای مقدار دقیق $y(x_2)$ ، الی آخر تعیین کنیم. هر روش عددی که تشریح می‌کنیم قاعده‌ای خواهد بود، که براساس آن y_{n+1} را می‌توان با استفاده از y_n محاسبه کرد. از آنجا که مقدار اولیه $y(x_0) = y_0$ معلوم است (به‌طور دقیق)، هرگاه قاعده ذکر شده را برای $n=0$ اعمال کنیم y_1 محاسبه می‌شود و با $n=1$ ، y_2 به دست می‌آید، والی آخر. هدف کلی ما این است که درباره هر روش اطلاعات مشروحی ارائه دهیم تا خواننده در صورت نیاز، خود قادر به اعمال آنها باشد^۱.

برای روشن شدن مطلب، روشهای مورد بحث را در مورد مسئله ساده

$$y(0) = 1, \quad y' = x + y \quad (3)$$

که معادله آزمایشی می‌نامیم، اعمال می‌کنیم. واضح است که معادله (۳) خطی است و جواب دقیق آن باسانی تعیین می‌شود

$$y = 2e^x - x - 1. \quad (4)$$

معادله (۳) را به دو دلیل به عنوان مسئله آزمایشی انتخاب کرده‌ایم. اولاً این معادله آنقدر ساده است که می‌توان در آن، روشهای عددی را بدون اینکه قدمهای اصلی در لبای محاسبات محو گردند به کار گرفت. ثانیاً، جواب دقیق (۴) به آسانی برای مقادیر مختلف x با استفاده از جدول مقادیر e^x قابل محاسبه است. بنابراین وسیله‌ای در اختیار داریم که با آن می‌توان دقت جوابهای حاصل از روشهای عددی را سنجید.

روش اولیو. هرگاه از طرفین معادله دیفرانسیل (۲) از x_0 تا $x_1 = x_0 + h$ انتگرال بگیریم و شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ را اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx$$

یا

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx \quad (5)$$

۱. برای بحث بیشتر و بررسی دقیقتر مسائل پیچیده خطا و دقت به کتابهای زیر مراجعه کنید:
J. B. Scarborough, «Numerical Mathematical Analysis» 5th ed., Johns Hopkins, Baltimore, 1962.

یا

W. Jennings, «First Course in Numerical Methods», Macmillan, New York, 1964.

چون در رابطه (۵) تابع مجهول $y = y(x)$ در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است بیشتر از این نمی توانیم پیش برویم مگر آنکه ابتدا بطریقی این انتگرال را تقریب بزنیم و هر نوع تقریب، روشی عددی برای حل (۲) به دست می دهد.

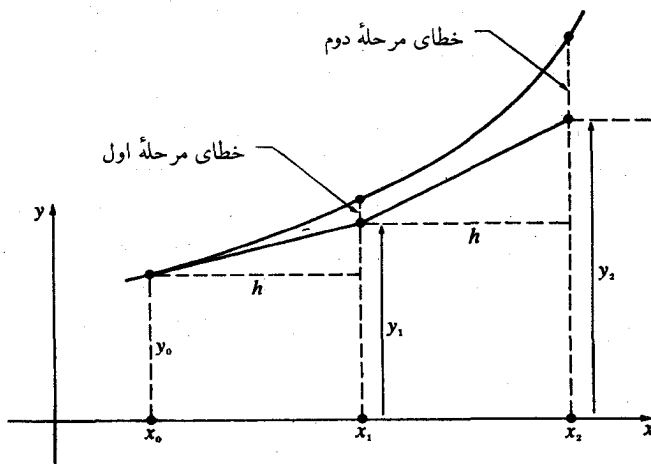
روش اوایلر بسیار ساده ولی نسبتاً خالی از دقت است. بررسی این روش از این جهت ارزشمند است که راه را برای فهم روشهای دقیقتر و در عین حال پیچیده تر هموار می کند. منظور یافتن y_1 ، یعنی مقدار تقریبی $y(x_1)$ است، با این فرض که تغییرات تابع زیر انتگرال $f(x, y)$ در (۵) در فاصله $x_0 \leq x \leq x_1$ آنقدر کم است که، با جایگزینی $f(x_0, y_0)$ یعنی مقدار تابع در نقطه انتهای چپ فاصله به جای $f(x, y)$ ، تنها خطای کمی حاصل می شود:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0, y_0) dx = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) \\ = y_0 + h f(x_0, y_0) \quad (6)$$

اکنون می توان به همین روش y_2 را بر حسب y_1 توسط رابطه $y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$ محاسبه کرد، و در حالت عمومی خواهیم داشت

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (7)$$

تعبیر هندسی این روابط در شکل ۱۹ مشخص شده است که در آن، منحنی هموار جواب دقیق (ولی مجهول) معادله (۲) است که توسط خط شکسته تقریب شده است. برای فهم شکل، توجه کنید که $f(x_0, y_0)$ شیب خط مماس بر منحنی جواب در نقطه مبدأ (x_0, y_0) است. برای روشن کردن روش اوایلر آنرا در مورد مسئله آزمایشی (۳)، به کار می بریم. با انتخاب



فاصل به طول $h = 0.2$ ، جواب را در نقاط $1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.0$ x_n تقریب می‌زنیم. بهتر است محاسبات را به صورت جدول ۱ مرتب کنیم. در اولین سطر این جدول، شرط اولیه $y = 1$ برای $x = 0$ ، مقدار شیب $y' = x + y = 1.00$ را تعیین می‌کند. چون $h = 0.2$ و $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ ، مقدار بعدی یعنی y_1 برابر با $1.20 = 1.00 + 0.2(1.00)$ است.

جدول ۱

x_n	y_n	شیب $= x_n + y_n$	$y_{n+1} = y_n + 0.2(\text{شیب}) = y_{n+1}$
0.0	1.00	1.00	$1.00 + 0.2(1.00) = 1.20$
0.2	1.20	1.40	$1.20 + 0.2(1.40) = 1.48$
0.4	1.48	1.88	$1.48 + 0.2(1.88) = 1.86$
0.6	1.86	2.46	$1.86 + 0.2(2.46) = 2.35$
0.8	2.35	3.15	$2.35 + 0.2(3.15) = 2.98$
1.0	2.98		

سپس، این تقریب، به ستون مربوط به y_n در سطر دوم منتقل می‌شود و همین روند برای به‌دست آوردن y_4 تکرار می‌شود و مقدار 1.48 برای آن به‌دست می‌آید. دو رقم اعشاری را حفظ کرده‌ایم و مقدار تقریبی حاصل برای $y(1)$ برابر با 2.98 است. مقدار دقیق حاصل از رابطه (۴)، برابر با 3.3656 است و بنابراین خطا حدود 14% درصد است. هرگاه محاسبات مشابهی را برای $h = 0.1$ انجام دهیم، مقدار تقریبی حاصل برای $y(1)$ برابر با 3.18 خواهد بود، و مقدار خطا به حدود 8% درصد کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توانیم دقت این روش را با انتخاب مقادیر کوچکتر h افزایش دهیم، ولی این عمل به قیمت محاسباتی بیشتر تمام می‌شود.

روش اویلر اصلاح‌شده. واضح است که خطاهای به‌این بزرگی (۱۴ درصد و ۸ درصد) رضایت‌بخش نیستند. این خطاها را می‌توان با انتخاب مقادیر بسیار کوچکتر h به‌میزان قابل ملاحظه‌ای کاهش داد، اما راه بهتر، یافتن روشهای دقیقتر است. مثلاً با گذاشتن مقدار متوسط مقادیر f در نقاط انتهایی چپ و راست فاصله، یعنی $[f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))]/2$ به جای تابع زیر انتگرال، می‌توانیم انتظار بهبود نتیجه را داشته باشیم. این درحقیقت استفاده از روش دوزنقه در تقریب انتگرال معین (۵) است، و به جای (۶) خواهیم داشت:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))] \quad (8)$$

اشکال (۸) در این است که مقدار $y(x_1)$ نامعلوم است. اما، اگر به‌جای $y(x_1)$ از مقدار تقریبی آن که توسط روش ساده اویلر به‌دست می‌آید استفاده کنیم و آن را با $z_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

نشان دهیم، رابطه (۸) به صورت قابل استفاده زیر درخواست آمد:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4} [f(x_0, y_0) + f(x_1, z_1)]$$

به طور کلی تر

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})] \quad (9)$$

که در آن

$$z_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (10)$$

در مورد مسئله آزمایشی (۳) با فاصله‌های به طول $h = 0.2$ روابط فوق به صورت زیر درمی‌آیند

$$z_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n).$$

و

$$y_{n+1} = y_n + 0.1[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + z_{n+1})].$$

محاسبات را با $n = 0$ آغاز می‌کنیم و مقادیر اولیه $x_0 = 0.0$ و $y_0 = 10000$ را به کار می‌گیریم (این بار سه رقم اعشار را حفظ می‌کنیم) و می‌نویسیم

$$z_1 = 10000 + 0.2(0.0 + 10000) = 10200$$

و

$$y_1 = 10000 + 0.1[(0.0 + 10000) + (0.2 + 10200)] = 10240$$

جدول ۲ مقادیر تقریبی جواب‌ها برای نقاط $0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ نشان می‌دهد که با ادامه عملیات به دست می‌آیند. تقریب حاصل برای مقدار $y(1)$ برابر با 3406 است. لذا خطای این روش حدود یک درصد است که نشان دهنده یک بهبود واقعی است.

جدول ۲

x_n	y_n	z_{n+1}	y_{n+1}
0.0	10000	10200	10240
0.2	10240	10528	10577
0.4	10577	10973	10932
0.6	10932	11558	11631
0.8	11631	12317	12406
1.0	12406		

روش رونگه - کوتا^۱. این روش مؤثر قادر به ارائه نتایجی دقیق است بدون اینکه لازم باشد h را چندان کوچک انتخاب کنیم که در آن محاسبات طولانی شوند. ما در اینجا شیوه به دست آوردن این روش را شرح نخواهیم داد، و صرفاً نحوه استفاده از آن را تشریح می‌کنیم^۲. برای یافتن y_{n+1} برحسب x_n و y_n ابتدا چهار مقدار زیر را به ترتیب به دست می‌آوریم.

$$m_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$m_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}\right),$$

$$m_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}\right),$$

$$m_4 = hf(x_n + h, y_n + m_3).$$

حال مقدار y_{n+1} برابر خواهد بود با:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \quad (11)$$

کار آئی این روش از اینجا روشن می‌شود که برای $n=0$ ، روش فوق معادل به کارگیری قاعده سیمسون در تقریب انتگرال معین (۵) است البته به شرط آنکه تابع زیر انتگرال $f(x, y)$ تابعی صرفاً از x باشد^۳.

اکنون رابطه (۱۱) را برای تقریب $y(1)$ در مسئله آزمایشی (۳) به کار می‌گیریم. با $h=1$ تنها یک مرحله لازم است، و داریم

$$m_1 = 1(0+1) = 1,$$

$$m_2 = 1(0+0.5+1+0.5) = 2,$$

$$m_3 = 1(0+0.5+1+1) = 2.5,$$

۱. کارل رونگه Carl Runge (۱۸۵۶-۱۹۲۷)، از سال ۱۹۰۴ تا ۱۹۲۵ استاد ریاضیات کار بسته در دانشگاه گوتینگن بود. او به خاطر کارهایش در زمینه اثر زیمان و بخاطر کشف قضیه‌ای که پیش در آمد قضیه معروف تو - زیگل - رات در معادلات دیوفانتوسی بود، شهرت دارد. م. و. کوتا M. W. Kutta (۱۸۶۷-۱۹۴۴) دانشمند آلمانی دیگری در ریاضیات کار بسته بود که به خاطر سهمش در نظریه کوتا - ژوکوفسکی (راجع به نیروی بالابر لایه هوا در آئرو دینامیک) شهرت دارد.

۲. برای آشنایی با یکی از روشهای به دست آوردن آن، نگاه کنید به W. Jennings, «First Course in Numerical Methods», pp. 143-147, Macmillan, New York, 1964.

۳. نگاه کنید به

Scarborough., pp. 357-358.

$$m_4 = 1(0 + 1 + 1 + 2.5) = 4.5,$$

پس

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(1 + 2 + 5 + 4.5) = 3.417.$$

این تقریب حتی از تقریب روش اوایلر اصلاح شده با $h = 0.2$ بهتر است. در جدول ۳ نتایج مربوط به مسئله آزمایشی با $h = 0.2$ بر اساس روش رونگه - کوتا را نشان داده ایم. مشاهده می شود که مقدار تقریبی $y(1)$ برابر با ۳.۴۳۶ است، که منطبق بر مقدار دقیق $y(1)$ تا سه رقم اعشار است.

متداول است که در این مرحله نکاتی درباره استفاده از کامپیوترهای رقمی سریع در به کار گرفتن این روشها گفته شود. اما نگارنده ترجیح می دهد که به پند آن تاریخ نگار بزرگ هنر توجه کند که گفت «نادان آنکه بیش از آنچه دارد می بخشد.»

جدول ۳

x_n	y_n	m_1	m_2	m_3	m_4	y_{n+1}
0.0	1.0000	0.2000	0.2400	0.2444	0.289	1.2443
0.2	1.2443	0.289	0.337	0.342	0.397	1.584
0.4	1.584	0.397	0.456	0.462	0.529	2.044
0.6	2.044	0.529	0.602	0.609	0.691	2.651
0.8	2.651	0.690	0.779	0.788	0.888	3.436
1.0	3.436					

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

معادلات خطی مرتبه دوم

۱۴. مقدمه

در فصول قبل انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل را که بر حسب توابع مقدماتی آشنا قابل حل هستند، مطالعه نمودیم. روشهای تشریح شده احتیاج به تبحر قابل ملاحظه در فنون انتگرال گیری دارد و کاربردهای جالب و فراوان آنها رنگ و بوی عملی دارد. ولی متأسفانه باید پذیرفت که این قسمت از مطالب تا حدی شبیه کیسه ای پر از ترفندهای گوناگون شده است و کمتر ماهیت معادلات دیفرانسیل و حل آنها در حالت کلی را روشن می کند. در این فصل یکدسته مهم از معادلات را که دارای نظریه ای غنی و پر کاربرد هستند مورد بحث قرار خواهیم داد. خواهیم دید که به کمک چند اصل ساده می توان به این نظریه، ساختمانی منسجم و ارضا کننده داد.

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به صورت کلی

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

و یا به صورت ساده تر

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (1)$$

می باشند. همچنانکه از ظاهر علائم بر می آید $P(x)$ ، $Q(x)$ ، و $R(x)$ توابعی فقط از x (یا شاید مقادیری ثابت) هستند. واضح است که با انتخاب ۱ به عنوان ضریب y'' در معادله، به هیچ وجه از کلیت مسئله کاسته نمی شود، زیرا می توان این شکل را

همیشه با يك تقسيم به دست آورد. معادلات از این نوع در فیزیک، بخصوص در رابطه با ارتعاشات در مکانیک و در رابطه با نظریه مدارهای الکتریکی، از اهمیت زیادی برخوردارند. به علاوه، همانطور که در فصول بعد خواهیم دید، ایده‌های زیبا و عمیقی در ریاضیات محض از مطالعه این معادلات ناشی شده‌اند.

از این امر که معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را می‌توان به سادگی حل کرد، نباید برداشت اشتباهی نمود. در حالت کلی، معادله (۱) را نمی‌توان به‌طور صریح بر حسب توابع مقدماتی شناخته شده حل کرد، و یا حتی به مرحله انتگرال‌گیری رساند. برای دست‌یابی به جواب، معمولاً لازم می‌شود که به روش‌های بی‌نهایتی از این یا آن نوع، که معمولاً سری‌های بینهایت هستند، متوسل شد. بسیاری از معادلات خاص که کاربردهای بویژه مهمی دارند، مثل معادلات لواندر و بیسل که در بخش ۱ بدانها اشاره شد، مفصلاً مطالعه شده‌اند، و نظریه مربوط به هر يك از این معادلات اغلب چنان پیچیده بوده است که گویی به تنهایی بخش کاملی از آنالیز را بنا می‌نهد. این مطالب را در فصول ۵ و ۶ مورد بحث قرار خواهیم داد.

در این فصل بررسی مفصل‌تر در مورد روش‌های واقعی حل معادله (۱)، اغلب، منحصر به حالت خاصی می‌شود که ضرایب $P(x)$ و $Q(x)$ ثابت باشند. همچنین باید تأکید کنیم که اغلب ایده‌ها و روش‌های مورد بحث را می‌توان بلافاصله و بدون هیچ تغییری در اصول بنیادی، بلکه تنها با پیچیدگی بیشتر در جزئیات حاشیه‌ای، به معادلات خطی مراتب بالاتر تعمیم داد. با محدود کردن توجه خود به معادلات مرتبه دوم، از حداکثر سادگی و سهولت بهره‌مند می‌شویم، بدون آنکه ایده‌های اصلی را خدشه‌دار نموده باشیم، و در عین حال، بحث ما، آنقدر کلیت خواهد داشت که تقریباً همه معادلات خطی حائز بیشترین اهمیت در ریاضی و فیزیک را در برگیرد.

از آنجا که در حالت کلی نمی‌توان جواب صریحی از معادله (۱) را، برای بررسی، به دست آورد. اولین وظیفه ما آن است که مطمئن شویم این معادله واقعاً دارای جوابی هست. قضیه وجود و یگانگی زیر در فصل ۱۱ ثابت شده است.

قضیه ۱۰. فرض کنید که توابع $P(x)$ ، $Q(x)$ ، و $R(x)$ در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته باشند. هرگاه x_0 نقطه‌ای متعلق به $[a, b]$ باشد، و هرگاه y_0 ، y_0' دو عدد دلخواه باشند، آنگاه معادله (۱) دارای يك و تنها يك جواب $y(x)$ در آن فاصله است به‌طوری‌که $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y_0'$.

بنابراین تحت این شرایط، در هر نقطه x_0 از $[a, b]$ مقادیر $y(x)$ و $y'(x)$ را می‌توان بدخواه تعیین کرد و در این صورت دقیقاً يك جواب (۱) روی $[a, b]$ وجود خواهد داشت که مقادیر تعیین شده در نقطه مفروض را اختیار کند؛ یا به زبان هندسی‌تر، معادله (۱) در

۱. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که $a < b$ ، آنگاه نماد $[a, b]$ نشانگر فاصله‌ای است متشکل از همه x های حقیقی که در $a \leq x \leq b$ صدق می‌کنند. این فاصله را بسته گویند زیرا شامل نقاط انتهایی خود است. فاصله باز حاصل از حذف نقاط انتهایی را با (a, b) نشان می‌دهند، و توسط نامساویهای $a < x < b$ مشخص می‌شود.

فاصله $[a, b]$ دارای جواب یگانه‌ای است که از نقطه معین (y_0, x_0) با ضریب زاویه داده شده y' می‌گذرد. در بحث‌های کلی در خلال بقیه این فصل، همواره (بدون آنکه صریحاً ذکر کنیم) شرایط قضیه الف را فرض شده در نظر خواهیم گرفت.

جمله $R(x)$ در معادله (۱) را به این دلیل از بقیه جملات مجزا کردیم و به طرف راست منتقل نمودیم که شامل متغیر وابسته y یا هیچ کدام از مشتقات آن نمی‌باشد. اگر $R(x)$ متحد با صفر باشد، معادله (۱) به معادله همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

تبدیل می‌گردد (این استفاده سنتی از کلمه همگن را نباید با کاربرد سنتی و کاملاً متفاوت به کار رفته در بخش ۷، اشتباه کرد). اگر $R(x)$ متحد با صفر نباشد، معادله (۱) را غیرهمگن گویند. جهت مطالعه معادله غیرهمگن (۱) لازم است که معادله همگن (۲) را نیز که از جایگزینی صفر به جای $R(x)$ در معادله (۱) به دست می‌آید همراه آن بررسی کنیم. دلیل این امر را می‌توان بسادگی دریافت. فرض کنید بطریقی بفهمیم که $y_g(x, c_1, c_2)$ جواب عمومی معادله (۲) است (چون معادله از مرتبه دوم است انتظار داریم که جواب عمومی شامل دو عدد ثابت دلخواه باشد) و فرض کنید $y_p(x)$ جواب خصوصی معینی از معادله (۱) باشد. حال چنانچه $y(x)$ جوابی از معادله (۱) باشد، آنگاه یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که $y(x) - y_p(x)$ يك جواب معادله (۲) است:

$$\begin{aligned} & (y - y_p)'' + P(x)(y - y_p)' + Q(x)(y - y_p) \\ &= [y'' + P(x)y' + Q(x)y] - [y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p] \\ &= R(x) - R(x) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

از آنجا که $y_g(x, c_1, c_2)$ جواب عمومی معادله (۲) است، نتیجه می‌گیریم که با انتخاب دو عدد ثابت مناسب c_1 و c_2 می‌توان نوشت $y(x) - y_p(x) = y_g(x, c_1, c_2)$ یا

$$y(x) = y_g(x, c_1, c_2) + y_p(x)$$

این استدلال قضیه زیر را ثابت می‌کند.

قضیه ب. هرگاه y_g جواب عمومی معادله (۲) و y_p يك جواب خصوصی معادله (۱) باشد، آنگاه $y_g + y_p$ جواب عمومی معادله (۱) خواهد بود.

در بخش ۱۹ خواهیم دید که با دانستن y_g ، يك دستورالعمل صوری برای یافتن y_p وجود دارد. این مطلب نشان می‌دهد که مسئله اصلی در نظریه معادلات خطی همان حل معادله همگن است. به همین دلیل، بیشتر توجه ما وقف بررسی ساختمان y_g و مطالعه روشهای مختلف یافتن شکل صریح آن (که هیچ يك در تمام حالات کارآمد نیست) خواهد شد. اولین نکته‌ای که باید در رابطه با معادله همگن (۲) بدان توجه کنیم آن است که تابع $y(x)$ متحد با صفر - یعنی $y(x) = 0$ برای همه x ها - همواره يك جواب است. این را جواب

صفر معادله می‌نامند، که غالباً مورد توجه نیست. نکته اساسی مربوط به چگونگی ساختمان جواب معادله (۲) در قضیه زیر آمده است.

قضیه ج. هرگاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله (۲) باشند، آنگاه

$$(4) \quad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

نیز، به‌ازای هردو عدد ثابت اختیاری c_1 و c_2 ، جواب آن معادله خواهد بود. اثبات. قضیه فوق طی روابط زیر مستقیماً اثبات می‌شود

$$\begin{aligned} & (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + P(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + Q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + P(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + Q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + c_2 [y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

ضرایب اعداد c_1 و c_2 صفرند زیرا بنا به فرض، y_1 و y_2 جوابهای (۲) هستند.

بنا به دلایلی مربوط به جبر مقدماتی بردارها، جواب (۴) را عموماً يك ترکیب خطی از جوابهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ می‌نامند. با استفاده از این اصطلاح قضیه ج را می‌توان به صورتی دیگر بیان نمود:

هر ترکیب خطی از دو جواب معادله همگن (۲) نیز يك جواب آن است. فرض کنید که به طریقی دو جواب معادله (۲) را یافته باشیم. آنگاه این قضیه جواب دیگری از معادله را به‌دست می‌دهد که حاوی دو عدد ثابت دلخواه است و بنا بر این ممکن است جواب عمومی معادله (۲) باشد. در اینجا يك مشکل وجود دارد: هرگاه یکی از جوابهای y_1 یا y_2 مضرب ثابتی از دیگری باشد، مثلاً $y_1 = k y_2$ ، آنگاه داریم:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 k y_2 + c_2 y_2 = (c_1 k + c_2) y_2 = c y_2$$

که تنها يك ثابت اساسی در آن وجود دارد. بر این اساس، منطقی است امیدوار باشیم که هرگاه هیچ‌یک از جوابهای y_1 و y_2 مضربی از دیگری نباشد، آنگاه

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

جواب عمومی معادله (۲) باشد. این مطلب را در بخش بعد به اثبات خواهیم رساند.

اکنون جا دارد متذکر شویم که بخش عظیمی از نظریه معادلات دیفرانسیل خطی متکی به خواص اساسی بیان شده در قضایای ب و ج است. ضمن دقت در محاسبات (۳) و (۵)، می‌بینیم که این خواص خود ناشی از خطی بودن مشتق‌گیری است، یعنی اینکه رابطه

$$[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

برای هردو عدد ثابت دلخواه α و β و هردو تابع مشتق‌پذیر دلخواه $f(x)$ و $g(x)$ درست است.

تمرین

۱- با تحقیق و بررسی، جواب عمومی معادله $y'' = e^x$ را بیابید.

۲- برای هر يك از معادلات زیر، يك جواب خصوصی پیدا کنید:

$$x^2 y'' + x^2 y' + xy = 1 \quad (\text{الف})$$

$$y'' - 2y' = 6 \quad (\text{ب})$$

$$y'' - 2y = \sin x \quad (\text{ج})$$

۳- با حذف اعداد ثابت c_1 و c_2 ، معادله دیفرانسیل هر يك از دسته منحنی‌های زیر را بیابید:

$$y = c_1 x + c_2 x^2 \quad (\text{الف})$$

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \quad (\text{ب})$$

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \quad (\text{ج})$$

۴- تحقیق کنید که $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^5$ يك جواب معادله

$$x^2 y'' - 3x y' - 5y = 0$$

است در هر فاصله $[a, b]$ که شامل صفر نباشد. اگر $x_0 \neq 0$ و اگر y_0 و y'_0 دلخواه باشند، نشان دهید که c_1 و c_2 را به يك و تنها يك طریق می‌توان انتخاب کرد به طوری که $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$.

۵- نشان دهید که $y = x^2 \sin x$ و $y = 0$ هر دو جواب معادله

$$x^2 y'' - 4x y' + (x^2 + 6)y = 0$$

هستند و هر دو در شرایط $y'(0) = 0$ و $y(0) = 0$ صدق می‌کنند. آیا این با قضیه الف تناقض دارد؟ اگر ندارد، چرا؟

۶- هر گاه يك جواب معادله (۲) در فاصله $[a, b]$ ، در هر نقطه از این فاصله برمحور x ها مماس باشد، آنگاه آن جواب باید متحد با صفر باشد. چرا؟

۷- اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله (۲) در فاصله $[a, b]$ باشند و صفر مشترکی در این فاصله داشته باشند، نشان دهید که یکی از این جوابها مضرب ثابتی از دیگری است. [توجه کنید که نقطه x_0 را صفر تابع $f(x)$ گویند هر گاه $f(x_0) = 0$].

۱۵. جواب عمومی معادله همگن

هر گاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشند و یکی از آنها مضرب ثابتی از دیگری باشد، می‌گویند آنها در $[a, b]$ وابسته خطی هستند. در غیر این صورت، اگر هیچ يك مضرب ثابتی از دیگری نباشد، آنها را مستقل خطی می‌نامند. باید

توجه داشت که اگر تابع $f(x)$ متحد با صفر باشد، آنگاه $f(x)$ و هر تابع $g(x)$ ، وابسته خطی هستند، زیرا $g(x) = 0 \cdot f(x)$.
در این بخش، هدف اثبات قضیه زیر است.

قضیه الف. هرگاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای مستقل خطی معادله همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

در فاصله $[a, b]$ باشند، آنگاه

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (2)$$

جواب عمومی معادله (۱) در $[a, b]$ است بدین معنی که هر جواب معادله (۱) در این فاصله را می‌توان با انتخاب مناسب اعداد ثابت c_1 و c_2 از (۲) به دست آورد.

به کمک چند لم و ایده‌های کمکی اثبات را در چند مرحله ارائه خواهیم کرد.

فرض کنید که $y(x)$ يك جواب معادله (۱) در فاصله $[a, b]$ باشد. باید نشان دهیم که اعداد ثابت c_1 و c_2 را می‌توان چنان یافت که برای همه x ها در $[a, b]$ ، رابطه

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

برقرار باشد. بنابر قضیه ۱۴-الف، هر جواب معادله (۱) در فاصله $[a, b]$ با مقدار آن و اندازه مشتق در يك نقطه کاملاً مشخص می‌شود. در نتیجه، چون توابع $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ و $y(x)$ هر دو جواب معادله (۱) در فاصله $[a, b]$ هستند، کافی است نشان دهیم که برای نقطه‌ای چون x_0 در فاصله $[a, b]$ می‌توان c_1 و c_2 را چنان یافت که روابط

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$

و

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

برقرار باشند.

برای آنکه بتوان این دستگاه را برای مجهولهای c_1 و c_2 حل کرد، کافی است دترمینان

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

مقداری مخالف صفر داشته باشد. این امر ما را به بررسی تابعی از x به صورت

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

که به **رونسکی** y_1 و y_2 مشهور است و توجه خاص به اینکه آیا این تابع در x_0 صفر

۱. هوینه رونسکی Hoëné Wronski (۱۷۷۸-۱۸۵۳) يك لهستانی تهیدست با شخصیتی غریب بود که بیشتر عمرش را در فرانسه گذراند. دترمینان رونسکی که در بالا ذکر شد تنها کاروی در زمینه ریاضیات است. او تنها ریاضیدان لهستانی قرن نوزدهم است که امروز نامش باقی مانده است و این امر بدین لحاظ که در قرن بیستم، لهستان چهره‌های برجسته‌ای عرضه کرده است، کمی تعجب‌آور است.

می‌شود، هدایت می‌کند. اولین لم، با اثبات بی اهمیت بودن موقعیت نقطه x_0 ، مسئله را ساده می‌کند.

لم ۱. فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله (۱) در فاصله $[a, b]$ باشند، آنگاه رونسکیی آنها، یعنی $W = W(y_1, y_2)$ ، در فاصله $[a, b]$ ، یا همواره صفر است و یا هرگز صفر نمی‌شود.

اثبات. نخست توجه می‌کنیم که

$$W' = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

سپس، چون y_1 و y_2 هر دو جواب معادله (۱) هستند، داریم:

$$y_1'' + P y_1' + Q y_1 = 0$$

و

$$y_2'' + P y_2' + Q y_2 = 0$$

حال معادله اول را در y_2 و دومی را در y_1 ضرب و سپس از هم کسر می‌کنیم، در نتیجه داریم

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

یا

$$\frac{dW}{dx} + PW = 0$$

جواب عمومی این معادله مرتبه اول عبارت است از

$$W = ce^{-\int P dx}$$

و با توجه به اینکه قسمت نمایی هرگز صفر نمی‌شود، اثبات تکمیل است.

این لم، هدف کلی ما از اثبات قضیه را به نشان دادن این مطلب، که رونسکیی هر دو جواب مستقل خطی دلخواه برای معادله (۱) متحد با صفر نیست، تحویل می‌کند. این موضوع به میزانی فراتر از حد مورد نیاز، در لم بعد ثابت شده است.

لم ۲. اگر توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله (۱) در فاصله $[a, b]$ باشند، این دو تابع وابسته خطی هستند، اگر و تنها اگر رونسکیی آنها یعنی $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$ متحد با صفر باشد.

اثبات. مطلب را با این فرض که y_1 و y_2 وابسته خطی اند آغاز می‌کنیم و از آن نتیجه می‌گیریم که $y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$. اگر یکی از جوابها در $[a, b]$ متحد با صفر باشد، نتیجه فوق روشن است. بنابراین، بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم که هیچکدام صفر نیستند؛ و با توجه به این نکته و وابستگی خطی آنها، نتیجه

می شود که، هر کدام مضرب ثابتی از دیگری هستند. بنا بر این يك عدد c وجود دارد به طوری که $y_2 = cy_1$ و در نتیجه $y_2' = cy_1'$. از حذف c بین این دو رابطه در می یابیم که $y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$ ، و این نیمی از لم را ثابت می کند.

حال فرض می کنیم که رونسکیی متحد با صفر باشد و وابستگی خطی را ثابت می کنیم. هر گاه y_1 در فاصله $[a, b]$ متحد با صفر باشد، آنگاه (همان طور که در آغاز این بخش اشاره کردیم) توابع وابسته خطی هستند. بنا بر این می توانیم فرض کنیم که y_1 متحد با صفر نیست، در این صورت از پیوستگی تابع y_1 نتیجه شود که y_1 در يك زیر فاصله $[c, d]$ از $[a, b]$ هرگز صفر نمی شود. چون رونسکیی در $[a, b]$ متحد با صفر است، می توانیم آن را به y_2 تقسیم کنیم تا رابطه

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0.$$

در $[c, d]$ به دست آید. این رابطه را می توان به صورت $(y_2/y_1)' = 0$ نوشت و با انتگرال گیری نتیجه می شود که، برای عدد ثابتی مانند k و کلیه x های فاصله $[c, d]$ $y_2/y_1 = k$ یا $y_2(x) = k y_1(x)$. سرانجام چون مقادیر $y_2(x)$ و $k y_1(x)$ در فاصله $[c, d]$ برابرند، مشتقشان نیز در این فاصله برابر خواهد بود، و با توجه به قضیه ۱۴-الف می توانیم برابری

$$y_2(x) = k y_1(x)$$

را برای همه x های فاصله $[a, b]$ نتیجه بگیریم، و این خود اثبات را کامل می کند. با این لم اثبات قضیه الف کامل می شود.

معمولا، ساده ترین راه برای اثبات استقلال خطی دو جواب مقادله (۱) در يك فاصله آن است که نشان دهیم، در این فاصله نسبت این دو مقدار ثابت نیست، و در اغلب حالات، این مطلب با تحقیق و بررسی روشن می گردد. ولی، در بعضی مواقع، براحتی می توان آزمون صوری موجود در لم ۲ را به کار گرفت: رونسکیی را محاسبه می کنیم و نشان می دهیم که مخالف صفر است. هر دو روش در مثال زیر توصیف شده اند.

مثال ۱. نشان دهید که $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ جواب عمومی معادله $y'' + y = 0$ در هر فاصله است، و جواب خصوصی را طوری بیابید که شرایط $y(0) = 2$ و $y'(0) = 3$ را ارضا کند.

این حقیقت را که $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \cos x$ جواب هستند به سادگی می توان از جایگزینی آنها در معادله نتیجه گرفت. استقلال خطی آنها در هر فاصله را می توان از اینجا نتیجه گرفت که $y_1/y_2 = \tan x$ ثابت نیست و یا از این مطلب که رونسکیی هرگز صفر نمی شود:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

چون توابع $P(x) = 0$ و $Q(x) = 1$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته‌اند، از قضیه الف نتیجه می‌شود که $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ جواب عمومی معادله داده شده در فاصله $[a, b]$ است. علاوه بر این، چون فاصله $[a, b]$ را می‌توان بدون آنکه شامل نقاط ناپیوستگی $P(x)$ یا $Q(x)$ گردد، تا بینهایت گسترش داد، این جواب عمومی برای کلیه x ها معتبر است. برای یافتن جواب خصوصی مورد نظر، دستگاه

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 2$$

$$c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 = 3$$

را حل می‌کنیم. حل این دستگاه نتیجه می‌دهد که $c_1 = 3$ و $c_2 = 2$ ، و بنابراین $y = 3 \sin x + 2 \cos x$ جوابی خصوصی است که در شرایط داده شده صدق می‌کند. مفاهیم وابستگی و استقلال خطی در پهنه‌ای وسیعتر از آنچه در اینجا آمده است، اهمیت دارند. همان‌طور که ممکن است خواننده تاکنون دریافته باشد، شاخه مهمی از ریاضیات معروف به جبر خطی چندان بیش از بررسی مجرد این مفاهیم همراه با کاربردهای فراوان، نیست.

تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۴، استقلال خطی را به کمک رونسکی نشان دهید.

۱- نشان دهید که e^x و e^{-x} جوابهای مستقل خطی معادله $y'' - y = 0$ در هر فاصله‌ای هستند.

۲- نشان دهید که در هر فاصله‌ای که شامل صفر نباشد، $y = c_1 x + c_2 x^2$ جواب عمومی معادله

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

است و جوابی خصوصی را که در شرایط $y(1) = 3$ و $y'(1) = 5$ صدق کند، تعیین کنید.

۳- نشان دهید که $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ در هر فاصله‌ای جواب عمومی

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

می‌باشد و جوابی خصوصی را که در شرایط $y(0) = -1$ و $y'(0) = +1$ صدق می‌کند بیابید.

۴- ثابت کنید که $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ جواب عمومی معادله

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

در هر فاصله‌ای است.

۵- دو تابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2|x|$ را در فاصله $[-1, 1]$ در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید که رونسکی آنها، $W(f, g)$ ، متحد با صفر است.

ب) نشان دهید که f و g وابسته خطی نیستند.

(ج) آیا (الف) و (ب) در تناقض با هم هستند؟ اگر نیستند، چرا؟

۶- واضح است که $\sin x$ ، $\cos x$ و $\sin x - \cos x$ دو جفت متمایز از جوابهای مستقل خطی معادله $y'' + y = 0$ هستند. بنابراین، اگر y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

باشند، مشاهده می‌کنیم که y_1 و y_2 توسط این معادله به طور منحصر به فرد مشخص نمی‌شوند.

(الف) نشان دهید که

$$P(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

و

$$Q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

بنابراین، معادله توسط هر جفت جواب مستقل خطی مفروض، به طور منحصر به فرد معین می‌گردد.

(ب) به کمک (الف) معادله $y'' + y = 0$ را از هر یک از دو جفت جوابهای مستقل خطی فوق‌الذکر به دست آورید.

(ج) به کمک (الف) معادله تمرین ۴ را از جفت جوابهای مستقل خطی e^{2x} و $x e^{2x}$ به دست آورید.

۱۶. استفاده از يك جواب معلوم برای یافتن جوابی دیگر

همانطور که ملاحظه کردید، هرگاه دو جواب مستقل خطی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ از معادله همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (۱)$$

را بدانیم بسادگی می‌توانیم جواب عمومی آن را بنویسیم. اما y_1 و y_2 را چگونه می‌توان یافت؟ متأسفانه هیچ گونه روش کلی برای این کار وجود ندارد. ولی، برای یافتن y_2 به کمک جواب معلوم y_1 روشی متعارف وجود دارد. این روش دارای اهمیت قابل ملاحظه‌ای است، زیرا در بسیاری از حالات می‌توان يك جواب y_1 از معادله را به وسیله تحقیق و بررسی و یا از راهی دیگر به دست آورد.

برای تشریح این روش، فرض می‌کنیم $y_1(x)$ جواب غیر صفر معلومی از معادله (۱) باشد، به طوری که برای هر عدد ثابت c ، $c y_1(x)$ نیز جواب است. ایده‌ی اساسی آن است که به جای عدد ثابت c تابع مجهولی مانند $v(x)$ جایگزین و سپس سعی کنیم v را چنان بیابیم که $y_2 = v y_1$ جوابی برای معادله (۱) گردد. در ابتدا کار آبی این روش اصلاً محسوس نیست ولی در عمل مفید واقع می‌شود. برای آنکه متوجه شویم چگونه ممکن است بفکر

امتحان این روش افقیم، به خاطر می آوریم که استقلال خطی دو جواب y_1 و y_2 مستلزم این است که نسبت y_2/y_1 تابعی غیر ثابت از x ، مانند v باشد، و اگر بتوانیم v را بیابیم، در آن صورت چون y_1 را می دانیم، y_2 را پیدا می کنیم و مسئله حل می شود.

حال فرض می کنیم که $y_2 = v y_1$ جواب معادله (۱) باشد، به طوری که

$$y_2'' + P y_2' + Q y_2 = 0 \quad (2)$$

و سعی می کنیم که تابع مجهول $v(x)$ را بیابیم. با جایگزینی تابع $y_2 = v y_1$ و عبارات

$$y_2' = v y_1' + v' y_1 \quad \text{و} \quad y_2'' = v y_1'' + 2v' y_1' + v'' y_1$$

در معادله (۲) و مرتب کردن نتیجه، به دست می آوریم که

$$v(y_1'' + P y_1' + Q y_1) + v'' y_1 + v'(2 y_1' + P y_1) = 0$$

از آنجا که y_1 جواب معادله (۱) است، این رابطه به صورت

$$v'' y_1 + v'(2 y_1' + P y_1) = 0$$

و یا

$$\frac{v''}{v'} = -2 \frac{y_1'}{y_1} - P$$

درمی آید. حال با يك انتگرال گیری نتیجه می شود :

$$\log v' = -2 \log y_1 - \int P dx$$

بنابراین

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}$$

و

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx \quad (3)$$

تنها چیزی که باقی می ماند، اثبات این ادعاست که y_1 و $y_2 = v y_1$ که در آن v توسط (۳) داده شده است، در واقع مستقل خطی هستند، و این مطلب در تمرین ۱ به عهده خواننده و اگذار شده است.

مثال ۰۹. $x y_1 = x$ جوابی از معادله $x^2 y'' + x y' - y = 0$ است که به دلیل سادگی اش، با تحقیق و بررسی یافته می شود. مطلوب است تعیین جواب عمومی این معادله. ابتدا معادله داده شده را به صورت (۱) درمی آوریم:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

چون $P(x) = 1/x$ ، جواب دومی که مستقل خطی از اولی باشد به صورت $y_2 = v y_1$ است، که در آن

$$v = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int 1/x \, dx} \, dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\log x} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1}$$

و از آنجا $y_2 = (-1/x)y_1$ ، بنابراین جواب عمومی معادله، $y = c_1 x + c_2 x^{-1}$ است.

تمرین

۱- اگر y_1 يك جواب غير صفر معادله (۱) باشد و $y_2 = v y_1$ ، که در آن v مطابق فرمول (۳) داده شده است، جواب دوم یافته شده در متن باشد، با محاسبه رونسکی y_1 و y_2 ، نشان دهید که این دو جواب مستقل خطی اند.

۲- با استفاده از روش این بخش، جواب عمومی هر يك از معادلات زیر را به کمک جواب داده شده y_1 به دست آورید:

$$y'' + y = 0, \quad y_1 = \sin x \quad (\text{الف})$$

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^x \quad (\text{ب})$$

۳- معادله $x y'' + 3 y' = 0$ دارای جواب واضح $y_1 = 1$ است. جواب عمومی معادله را بیابید.

۴- نشان دهید که $y_1 = x^2$ يك جواب معادله $x^2 y'' + x y' - 4 y = 0$ است، و جواب عمومی معادله را بیابید.

۵- معادله $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ حالت خاصی از معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

به ازای $p=1$ است. روشن است که يك جواب آن $y_1 = x$ است. جواب عمومی آن را بیابید.

۶- معادله $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1/4)y = 0$ حالتی خاص از معادله بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2)y = 0$$

به ازای $p=1/2$ است. تحقیق کنید که $y_1 = x^{-1/2} \sin x$ در هر فاصله‌ای که تنها شامل مقادیر مثبت x باشد، يك جواب معادله است، و جواب عمومی معادله را بیابید.

۷- با استفاده از این که $y_1 = x$ يك جواب واضح هر يك از معادلات زیر است جواب عمومی آنها را بیابید.

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad (\text{ب})$$

۸- جواب عمومی معادله $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$ را بیابید.

۹- تحقیق کنید که $y_1 = e^x$ يك جواب معادله $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ است و جواب عمومی آن را تعیین کنید.

۱۰- جواب عمومی معادله $y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0$ را پیدا کنید.

۱۷. معادله همگن با ضرایب ثابت

اکنون موقع آن است که بررسی کاملی از معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ را در حالت خاصی که $P(x)$ و $Q(x)$ مقادیر ثابت p و q هستند، ارائه کنیم:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (۱)$$

بحث را با این مطلب شروع می‌کنیم که مشتقات تابع نمائی e^{mx} همگی مضارب ثابتی از خود آن هستند. این امر ما را به ملاحظه تابع

$$y = e^{mx} \quad (۲)$$

با عدد ثابت مناسب m ، به عنوان يك جواب احتمالی معادله (۱) راهنمایی می‌کند. چون $y' = me^{mx}$ و $y'' = m^2 e^{mx}$ ، از جایگزینی این عبارات در معادله (۱) خواهیم داشت

$$(m^2 + pm + q)e^{mx} = 0 \quad (۳)$$

و چون e^{mx} هرگز صفر نمی‌شود، (۳) وقتی و فقط وقتی برقرار است که m در معادله کمکی

$$m^2 + pm + q = 0 \quad (۴)$$

صدق کند. دیرینه m_1 و m_2 این معادله، یعنی، مقادیری از m که به ازای آنها (۲) جواب معادله (۱) است، توسط فرمول معادله درجه دوم زیر بدست می‌آیند

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (۵)$$

برای بحث و بررسی کامل این موضوع، سه حالت برای (۵) در نظر می‌گیریم.

ریشه‌ها حقیقی و متمایزند. روشن است که ریشه‌های m_1 و m_2 اعداد حقیقی و متمایزند اگر و تنها اگر $p^2 - 4q > 0$. در این حالت دو جواب

$$e^{m_1 x} \text{ و } e^{m_2 x}$$

برای معادله (۱) به دست می‌آید. چون نسبت

$$\frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x}$$

ثابت نیست، این جوابها مستقل خطی هستند و

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad (6)$$

جواب عمومی معادله (۱) است.

ریشه‌ها مختلف و متمایزند. ریشه‌های m_1 و m_2 اعداد مختلط متمایزند اگر و تنها

اگر $0 < p^2 - 4q$. در این حالت m_1 و m_2 را می‌توان به صورت $a \pm ib$ نوشت، که با توجه به فرمول اوایلر

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (7)$$

دو جواب معادله (۱) عبارت می‌شوند از

$$e^{m_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \quad (8)$$

و

$$e^{m_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) \quad (9)$$

از آنجا که، جوابهای به صورت توابع حقیقی مورد نظر ماست، روابط (۸) و (۹) را یک بار با هم جمع و نتیجه را تقسیم بر ۲ و بار دیگر از یکدیگر کسر و نتیجه را تقسیم بر $2i$ می‌گیریم، تا جوابهای

$$e^{ax} \cos bx \text{ و } e^{ax} \sin bx \quad (10)$$

به دست آیند. این جوابها مستقل خطی اند، بنا بر این جواب عمومی معادله (۱) در این حالت عبارت است از

$$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \quad (11)$$

به این مطلب از زاویه دیگری نیز می‌توان نظر کرد. اگر p و q در معادله (۱) اعداد حقیقی باشند، تابع با مقادیر مختلط $w(x) = u(x) + iv(x)$ در معادله (۱) صدق می‌کند اگر و تنها اگر توابع $u(x)$ و $v(x)$ به تنهایی در معادله (۱) صدق کنند. نتیجتاً، هر جواب مختلط (۱) شامل دو جواب حقیقی است، و (۸) دو جواب (۱۰) را یکجا شامل می‌شود. ریشه‌ها حقیقی و برابرند. روشن است که ریشه‌های m_1 و m_2 حقیقی و برابرند اگر و تنها اگر $0 = p^2 - 4q$. در این حالت، تنها یک جواب $y = e^{mx}$ با $m = -p/2$ به دست می‌آوریم. ولی به کمک روش بخش قبل بسادگی می‌توان به جواب مستقل خطی دیگری دست یافت، زیرا چنانچه $y_1 = e^{(-p/2)x}$ ، آنگاه

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} (-p dx) dx = \int \frac{1}{e^{-px}} e^{-px} dx = x$$

و لذا $y_2 = v y_1 = x e^{mx}$. در این حالت جواب عمومی معادله (۱) عبارت می‌شود از

۱. فرض بر آن است که خواننده با جبر مقدماتی اعداد مختلط آشناست. فرمول اوایلر (۷) بخشی متعارف از هر درس حساب دیفرانسیل و انتگرال است و یا باید باشد.

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \quad (12)$$

مختصر آنکه، سه حالت ممکن است، و جواب عمومی معادله همگن با ضرایب ثابت بسته به چگونگی جوابهای m_1 و m_2 از معادله کمکی (۴)، توسط فرمولهای (۶)، (۱۱) و (۱۲) تعیین می گردند. روشن است که ماهیت کیفی این جواب عمومی توسط علامت و بزرگی نسبی مقادیر p و q به طور کامل معین می شود، و تغییر این مقادیر می تواند باعث تغییری اساسی در جواب عمومی گردد. این مطلب برای فیزیکدانانی که به جزئیات تحلیل دستگاههای مکانیکی و یامدارهای الکتریکی مشخص شده توسط (۱) می پردازند اهمیت دارد. برای مثال، اگر $q < p^2$ ، نمودار جواب عبارت از موجی است که دانه آن، بسته به اینکه p مثبت یا منفی باشد، به طور نمایی کم یا زیاد می شود. این مطلب و نظایر آن دستاوردهای واضحی از بحث فوق اند و در کتابهایی که به بررسی کاملتری از کاربردهای فیزیکی معادلات دیفرانسیل می پردازند، به طور جامع مورد بحث واقع شده اند.

ایده های این بخش قبل از همه مرهون اوپلر است. شرح مختصر برخی از دستاوردهای فراوان این نابغه بزرگ علوم در پیوست الف آمده است.

تقریر

۱- جواب عمومی هر يك از معادلات زیر را بیاسد:

$$\text{الف) } y'' + y' - 6y = 0 \quad \text{ه) } y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\text{ب) } y'' + 2y' + y = 0 \quad \text{و) } y'' - 9y' + 20y = 0$$

$$\text{ج) } y'' + 8y = 0 \quad \text{ز) } 2y'' + 2y' + 3y = 0$$

$$\text{د) } 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

۲- نشان دهید که جواب عمومی معادله (۱)، وقتی $x \rightarrow \infty$ ، به سمت صفر میل می کند، اگر و تنها اگر p و q هر دو مثبت باشند.

۳- بدون استفاده از فرمولهای یافته شده در این بخش، نشان دهید که مشتق هر جواب معادله (۱) نیز يك جواب است.

۴- معادله

$$x^2 y'' + p x y' + q y = 0$$

را که در آن p و q ثابت اند، معادله همبعد اوپلر^۱ می نامند، نشان دهید که تغییر متغیر مستقل $x = e^t$ آنرا به معادله ای با ضرایب ثابت تبدیل می کند، و به کمک این روش جواب عمومی هر يك از معادلات زیر را بیابید:

۱. این معادله را معادله همبعد کوشی نیز می نامند. پژوهشهای اوپلر چنان وسیع بود که عده زیادی از ریاضیدانان سعی بر آن دارند که با نامیدن معادلات، فرمولها، قضایا، و دیگر مطالب اوپلر به اسم اولین کسی که بعد از او به مطالعه آن پرداخته است، از اشتباه جلوگیری کنند.

$$x^2 y'' + 3xy' + 10y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$2x^2 y'' + 10xy' + 8y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0 \quad (\text{ج})$$

۵- در تمرین ۴، با تغییر متغیر مستقل x به $z = \log x$ ، برخی معادلات همگن با ضرایب متغیر را به معادلات با ضرایب ثابت تبدیل کردیم. معادله همگن کلی

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

و تغییر متغیر مستقل $z = z(x)$ را که در آن $z(x)$ تابع نامشخصی از x است، در نظر بگیرد. نشان دهید که به این ترتیب می‌توان معادله $(*)$ را به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کرد اگر و تنها اگر $(Q' + 2PQ)/Q^{3/2}$ مقدار ثابتی باشد، که در آن صورت $z = \int \sqrt{Q(x)} dx$ نتیجه مطلوب را به دست می‌دهد.

۱۸. روش ضرایب نامعین

در دو بخش قبل روش‌های گوناگونی جهت یافتن جواب عمومی معادله همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (۱)$$

ارائه نمودیم. همان طور که ملاحظه شد، این روش‌ها را تنها در تعداد معدودی حالت خاص می‌توان به کاربرد؛ وقتی که ضرایب $P(x)$ و $Q(x)$ ثابت باشند؛ و همچنین هنگامی که این ضرایب ثابت نباشند اما آنقدر ساده باشند که بتوانیم یک جواب غیر صفر را، به روش تحقیق و بررسی بیابیم. خوشبختانه وسعت این دسته از معادلات چنان است که تعداد مهمی از کاربردها را در بر می‌گیرد. ولی، باید توجه کرد که تعداد زیادی از معادلات همگنی که در ریاضی و فیزیک اهمیت دارند جزو این دسته از معادلات نیستند، و آنها را تنها می‌توان با روش سری‌ها که در فصل ۵ ارائه شده است حل کرد.

در این بخش و بخش بعد توجه خود را به حل معادله غیر همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (۲)$$

در حالتی که $y_g(x)$ جواب عمومی معادله همگن (۱) در دست است معطوف می‌کنیم. بنا بر قضیه ۱۴-ب، اگر $y_p(x)$ یک جواب خصوصی معادله (۲) باشد، آنگاه،

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

جواب عمومی معادله (۲) است. ولی چگونه می‌توان y_p را به دست آورد؟ این مسئله‌ای عملی است که اکنون مورد بررسی قرار می‌گیرد.

هنگامی که (۲) به صورت

$$y'' + py' + qy = R(x) \quad (۳)$$

باشد، برای یافتن y_p می‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد. در این معادله p و q

ثابت اند و $R(x)$ تابعی نمایی، سینوسی، کسینوسی، کثیر الجمله‌ای، یا ترکیبی از اینهاست. بعنوان نمونه معادله

$$y'' + py' + qy = e^{ax} \quad (۴)$$

را مطالعه می‌کنیم، از آنجا که مشتق‌گیری از تابع نمایی e^{ax} صرفاً خود آن تابع را با تغییری احتمالی در ضریب عددیش به دست می‌دهد، طبیعی است حدس بزنیم که تابعی به صورت

$$y_p = Ae^{ax} \quad (۵)$$

جواب خصوصی معادله (۴) باشد. در اینجا A ضریب ناهعینی است که باید چنان تعیین گردد که (۵) عملاً در معادله (۴) صدق کند. از جایگزینی (۵) در (۴) به دست می‌آوریم:

$$A(a^2 + pa + q)e^{ax} = e^{ax}$$

بنابراین

$$A = \frac{1}{a^2 + pa + q} \quad (۶)$$

عبارت (۵) به ازای این مقدار A جواب معادله (۴) می‌گردد مگر موقعی که مخرج سمت راست رابطه (۶) صفر شود. منشأ این مشکل را بسادگی می‌توان فهمید، چرا که این استثنا وقتی پیش می‌آید که a ریشه معادله کمکی

$$m^2 + mp + q = 0 \quad (۷)$$

باشد، و می‌دانیم که در این حالت عبارت (۵) طرف چپ (۴) را صفر می‌کند و نمی‌تواند در معادله (۴)، که طرف راست آن صفر نیست، صدق کند.

در این حالت استثنایی، برای ادامه این روش چه باید کرد؟ در بخش قبل دیدیم که، وقتی معادله کمکی ریشه مضاعف دارد، جواب مستقل خطی دیگر معادله همگن را می‌توان از ضرب ریشه اول در x به دست آورد. با این راهنمایی، تابع

$$y_p = Axe^{ax} \quad (۸)$$

را برای آزمایش در نظر می‌گیریم. با جایگزینی (۸) در (۴)، به دست می‌آید

$$A(a^2 + pa + q)xe^{ax} + A(2a + p)e^{ax} = e^{ax}$$

اما با توجه به این فرض که a ریشه معادله (۷) است، عبارت داخل پرانتز اول صفر است و لذا

$$A = \frac{1}{2a + p} \quad (۹)$$

این رابطه، ضریب قابل قبولی برای (۸) به دست می‌دهد مگر وقتی که $a = -p/2$ ، یعنی، با استثنای وقتی که a ریشه مضاعف (۷) باشد. امید هست که روش موفق فوق در این حالت نیز نتیجه دهد، لذا تابع

$$y_p = Ax^2 e^{ax} \quad (10)$$

را امتحان می‌کنیم. اگر رابطه (۱۰) را در معادله (۴) جایگزین کنیم می‌بینیم که

$$A(a^2 + pa + q)x^2 e^{ax} + 2A(2a + p)xe^{ax} + 2Ae^{ax} = e^{ax}$$

حال چون فرض بر این است که a ریشه مضاعف (۷) است، هر دو عبارت داخل پرانتز صفر است و داریم

$$A = \frac{1}{2} \quad (11)$$

به‌طور خلاصه: اگر a ریشه معادله کمکی (۷) نباشد، آنگاه (۴) يك جواب خصوصی به صورت Ae^{ax} دارد. اگر a ریشه ساده (۷) باشد، آنگاه (۴) هیچ جوابی به صورت Ae^{ax} ندارد ولی جوابی به صورت Axe^{ax} دارد و اگر a ریشه مضاعف باشد، آنگاه (۴) هیچ جوابی به صورت Axe^{ax} ندارد ولی جوابی به شکل $Ax^2 e^{ax}$ دارد. در هر يك از این حالات، فرمولی برای A داده شده است، ولی این تنها به منظور روشن ساختن منطق حاکم بر کار است. در عمل ساده‌تر آن است که، A را از جایگزینی مستقیم در معادله مورد نظر به دست آوریم.

حالات مهم دیگری که می‌توان آن را به کمک روش ضرایب نامعین حل کرد وقتی است که طرف راست معادله (۴) عبارت $\sin bx$ باشد:

$$y'' + py' + qy = \sin bx \quad (12)$$

از آنجا که مشتقات $\sin bx$ مضارب ثابتی از $\sin bx$ و $\cos bx$ هستند، تابع

$$y_p = A \sin bx + B \cos bx \quad (13)$$

را برای امتحان در نظر می‌گیریم. حال ضرایب مجهول A و B را می‌توان از جایگزینی عبارت (۱۳) در معادله (۱۲) و برابر قراردادن ضرایب $\sin bx$ و $\cos bx$ در طرفین معادله حاصل به دست آورد. این مراحل وقتی که طرف راست معادله (۱۲) عبارت $\cos bx$ و یا ترکیبی خطی از $\sin bx$ و $\cos bx$ ، یعنی تابعی به صورت $\alpha \sin bx + \beta \cos bx$ باشد، نیز به کار می‌رود. مانند مورد قبل، اگر عبارت (۱۳) در معادله همگن متناظر (۱۲) صدق کند این روش دیگر کارآیی نخواهد داشت. در این مورد برای پیشبرد روش فوق می‌توان از

$$y_p = x(A \sin bx + B \cos bx) \quad (14)$$

به جای (۱۳) برای آزمایش استفاده کرد.

سرانجام، حالتی را در نظر می‌گیریم که طرف راست معادله (۴) کثیرال جمله باشد:

$$y'' + py' + qy = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (15)$$

چون مشتق کثیرال جمله نیز کثیرال جمله است، به جستجوی يك جواب خصوصی به صورت

$$y_p = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n \quad (16)$$

می پردازیم. اگر (۱۶) را در معادله (۱۵) بگذاریم، برای یافتن ضرایب مجهول A_0, A_1, \dots, A_n کافی است ضرایب توانهای مشابه x در دو طرف معادله را باهم برابر قرار دهیم. اگر احياناً مقدار ثابت q صفر باشد، x^{n-1} جمله با بزرگترین توان x در طرف چپ (۱۵) خواهد بود، بنابراین، در این حالت تابع به صورت

$$\begin{aligned} y_p &= x(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n) \\ &= A_0x + A_1x^2 + \dots + A_nx^{n+1} \end{aligned} \quad (17)$$

را برای امتحان اختیار خواهیم کرد. اگر p و q هر دو صفر باشند، آنگاه (۱۵) را می توان یکباره با انتگرالگیری مستقیم حل کرد.

بحث فوق نشان می دهد که شکل جواب خصوصی معادله (۳) را اغلب می توان از شکل $R(x)$ ، یعنی عبارت طرف راست معادله، استنباط نمود. عموماً این مطلب هنگامی صحیح است که تابع $R(x)$ دارای تعدادی متناهی مشتق اساساً متفاوت باشد. نحوه کارآیی این روش را برای توابع نمایی، سینوسی و کسینوسی، و کثیرال جمله ای دیده ایم. در تمرین ۳ چگونگی کاربرد این روش را برای حالتی که $R(x)$ مجموع چنین توابعی باشد توصیف خواهیم نمود. برای مواردی که $R(x)$ حاصلضرب این گونه توابع مقدماتی باشد، می توان روشهایی ارائه کرد که قدری پیچیده تر هستند، اما این حالت برای کاربردهای عملی عمدتاً غیر ضروری است. خلاصه اینکه، اصل مطلب عبارت است از حدس هشیارانه عبارتی مشتمل بر تعداد کافی ضرایب نامعین، که بتوان آنها را منطبق با شرایط تنظیم کرد.

تمرین

۱- جواب عمومی هر يك از معادلات زیر را بیابید:

$$y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x} \quad (\text{الف})$$

$$y'' + 4y = 3 \sin x \quad (\text{ب})$$

$$y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x} \quad (\text{ج})$$

$$y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12 \quad (\text{د})$$

$$y'' - y' - 6y = 20e^{-2x} \quad (\text{ه})$$

$$y'' - 3y' + 2y = 14 \sin 2x - 18 \cos 2x \quad (\text{و})$$

$$y'' + y = 2 \cos x \quad (\text{ز})$$

$$y'' - 2y' = 12x - 10 \quad (\text{ح})$$

۲- اگر k و b اعداد ثابت مثبتی باشند، جواب عمومی معادله

$$y'' + k^2y = \sin bx$$

را بیابید.

۳- اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای معادله

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$$

و

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$$

باشند، نشان دهید که $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ جواب معادله

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$$

است. با استفاده از این اصل، جواب عمومی معادله

$$y'' + 4y = 4\cos 2x + 6\cos x + 8x^2 - 4x$$

را بیابید.

۱۹. روش تغییر پارامترها

روشی که در بخش ۱۸ برای تعیین جواب خصوصی معادله غیرهمگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (۱)$$

شرح داده شد دارای دو محدودیت اساسی است: فقط وقتی می‌توان از آن استفاده کرد که $P(x)$ و $Q(x)$ ضرایب ثابتی باشند، و حتی در این حالت نیز وقتی این روش کارآیی دارد که عبارت طرف راست، یعنی $R(x)$ بسیار ساده باشد. ولی، در چهارچوب این محدودیتها، روش فوق ساده‌ترین روش است.

حال به ارائه روش قویتری می‌پردازیم که بدون توجه به ماهیت P ، Q و R ، و تنها به شرط آنکه جواب معادله همگن مربوطه

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (۲)$$

معلوم باشد همواره قابل اجراست. فرض کنید که جواب عمومی معادله (۲)، یعنی

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (۳)$$

را به طریقی یافته باشیم. این روش شیء روشی است که در بخش ۱۶ مورد بحث واقع شد؛ یعنی، به جای مقادیر ثابت c_1 و c_2 ، توابع مجهول $v_1(x)$ و $v_2(x)$ را قرار می‌دهیم، و سعی می‌کنیم v_1 و v_2 را چنان بیابیم که

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2 \quad (۴)$$

جواب معادله (۱) گردد.^۱ برای یافتن دو تابع مجهول v_1 و v_2 لازم است که دو معادله شامل

۱. به همین دلیل این روش را تغییر پارامترها می‌نامیم، چه در اینجا اعداد ثابت c_1 و c_2 را متغیر در نظر می‌گیریم.

این دو تابع داشته باشیم. یکی از این معادلات را از این که (۴) باید جواب (۱) باشد به دست می آوریم. بزودی روشن خواهد شد که دومین معادله چه باید باشد. ابتدا مشتق (۴) را به دست می آوریم و به قرار زیر مرتب می کنیم:

$$y' = (v_1 y_1' + v_2 y_2') + (v_1' y_1 + v_2' y_2) \quad (5)$$

با مشتق گیری مجدد، مشتقات مرتبه دوم توابع مجهول v_1 و v_2 نیز ظاهر می شوند. با صفر گرفتن عبارت داخل پرانتز دوم می توان از این پیچیدگی احتراز کرد:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \quad (6)$$

و از آنجا

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \quad (7)$$

بنابراین

$$y'' = v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2' \quad (8)$$

از جایگزینی (۴)، (۷)، و (۸) در (۱)، و مرتب کردن نتیجه، چنین به دست می آوریم

$$v_1 (y_1'' + P y_1' + Q y_1) + v_2 (y_2'' + P y_2' + Q y_2) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \quad (9)$$

از آنجا که y_1 و y_2 جوابهای معادله (۲) می باشند، دو عبارات داخل پرانتز برابر با صفرند، و (۹) به صورت

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \quad (10)$$

ساده می شود. معادلات (۶) و (۱۰) دو معادله شامل دو مجهول v_1' و v_2' اند:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x)$$

که آنها را می توان مستقیماً حل کرد و چنین به دست آورد:

$$v_1' = \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad \text{و} \quad v_2' = \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad (11)$$

چون با توجه به استقلال خطی y_1 و y_2 ، رونسکی در مخرجهای v_1' و v_2' مخالف صفر است، این دو جواب معتبرند. برای یافتن v_1 و v_2 کافی است از روابط (۱۱) انتگرال بگیریم:

$$v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{و} \quad v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad (12)$$

حال می توانیم مطالب فوق را جمع بندی کنیم و عبارت

$$y = y_1 \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad (13)$$

را جواب خصوصی مطلوب برای معادله (۱) به شمار آوریم.

خواننده توجه خواهد کرد که این روش نارساییهایی مختص به خود دارد. بخصوص، ممکن است محاسبه انتگرالهای (۱۲) مشکل و یا غیرممکن باشد. علاوه بر این، حتی قبل از شروع به کار، باید جواب عمومی معادله همگن مربوطه، یعنی معادله (۲)، را بدانیم، ولی این اشکالی بی اهمیت است زیرا اگر جواب عمومی (۲) را نداشته باشیم بعید است که به دنبال جواب خصوصی (۱) باشیم.

مثال ۱. يك جواب خصوصی معادله $y'' + y = \csc x$ را بیابید.

معادله همگن مربوطه، یعنی $y'' + y = 0$ دارای جواب عمومی

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

است، بنابراین $y_1 = \sin x$ ، $y_2 = \cos x$ ، $y_1' = \cos x$ ، $y_2' = -\sin x$ و $y_1 y_2' - y_2 y_1' = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ رونسکی y_1 و y_2 عبارت است از

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

بنابراین از (۱۲) به دست می آوریم که

$$v_1 = \int \frac{-\cos x \csc x}{-1} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log(\sin x)$$

و

$$v_2 = \int \frac{\sin x \csc x}{-1} dx = -x$$

نتیجتاً

$$y = \sin x \log(\sin x) - x \cos x$$

جواب خصوصی مطلوب است.

تمرین

۱- ابتدا با تحقیق و بررسی و سپس با روش تغییر پارامترها، يك جواب خصوصی معادله زیر را بیابید:

$$y'' - 2y' + y = 2x$$

۲- ابتدا با روش ضرایب نامعین و سپس با روش تغییر پارامترها، يك جواب خصوصی معادله

$$y'' - y' - 6y = e^{-x}$$

را بیابید.

۳- مطلوب است تعیین يك جواب خصوصی هريك از معادلات زیر:

$$y'' + 4y = \tan 2x \quad (\text{الف})$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x \quad (\text{ب})$$

$$y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x} \quad (\text{ج})$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x \quad (\text{د})$$

۴- مطلوب است تعیین جواب عمومی هريك از معادلات زیر:

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2 \quad (\text{الف})$$

$$(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1)^2 \quad (\text{ب})$$

۳۰. ارتعاشات در دستگاههای مکانیکی

به طور کلی، ارتعاش وقتی رخ می‌دهد که تعادل يك دستگاه فیزیکی در حال تعادل پایدار را برهم زنیم، زیرا آنگاه دستگاه تحت تأثیر نیروهای واقع می‌شود که سعی دارند آنرا به حال تعادل بازگردانند. در این بخش خواهیم دید که چگونه بررسی چنین وضعیتهایی می‌تواند به معادلهٔ دیفرانسیلی به صورت

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = R(t)$$

منجر گردد، و نیز خواهیم دید که چطور بررسی این معادلات می‌تواند شرایط فیزیکی را روشن کند.

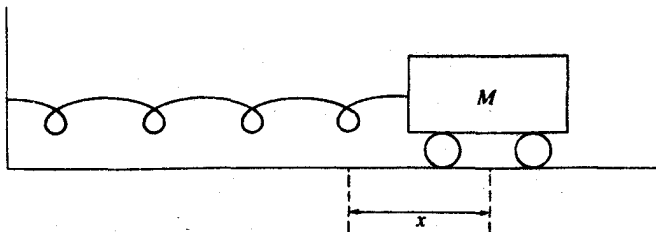
ارتعاشات همساز سادهٔ نامیرا. به عنوان مثالی که آنرا دنبال خواهیم کرد، يك گاری به

جرم M را در نظر می‌گیریم که به وسیله يك فنر به دیوار مجاور بسته شده باشد (شکل ۲۰). وقتی گاری در $x = 0$ به حال تعادل است، فنر هیچ نیرویی بر گاری وارد نمی‌کند. اگر گاری به اندازه x جابجا شود، آنگاه فنر نیروی بازگرداننده‌ای برابر $F_p = -kx$ به آن وارد می‌کند. در اینجا مقدار عدد ثابت و مثبت k به سختی فنر بستگی دارد. بنا بر قانون دوم نیوتن در مورد حرکت، کل نیروی وارد بر گاری برابر با حاصلضرب جرم گاری درشتاب آن است و لذا داریم

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F, \quad (1)$$

یا

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0 \quad (2)$$



شکل ۲۰

با انتخاب $a = \sqrt{k/M}$ ، معادله حرکت را می‌توان به صورت

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0 \quad (3)$$

ساده کرد و جواب عمومی آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = c_1 \sin at + c_2 \cos at \quad (4)$$

اگر گاری را تا موقعیت نقطه $x = x_0$ بکشیم و در لحظه $t = 0$ بدون سرعت اولیه رها کنیم، شرایط اولیه عبارت خواهند بود از

$$x = x_0 \text{ و } v = \frac{dx}{dt} = 0, t = 0 \quad \text{وقتی} \quad (5)$$

از آنجا به سادگی نتیجه می‌شود که $c_1 = 0$ و $c_2 = x_0$ ، بنابراین (۴) به

$$x = x_0 \cos at \quad (6)$$

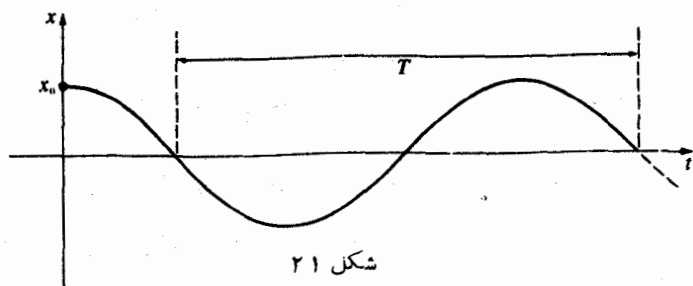
تبدیل می‌شود. منحنی نمایش (۶) در شکل ۲۱ رسم شده است. دامنه این ارتعاش همساز ساده برابر با x_0 است و چون دوره تناوب T برابر با زمان لازم جهت یک ارتعاش کامل است، داریم $aT = 2\pi$ و

$$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (7)$$

بسمت f برابر با تعداد ارتعاشهای کامل در واحد زمان است، بنابراین $fT = 1$ و

$$f = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (8)$$

از رابطه (۸) روشن می‌شود که اگر سختی فنر افزایش یابد یا جرم گاری کاهش یابد، بسمت این ارتعاش افزایش خواهد یافت، و این مطلب به‌طور حسی نیز قابل پیش‌بینی است.



شکل ۲۱

ارتعاشات میرا . به عنوان مثالی دیگر در بررسی این مسئله فیزیکی، اثر اضافی نیروی میرایی چون F_d را در نظر می گیریم. این نیرو می تواند مربوط به چسبندگی محیطی باشد (چون هوا، آب، روغن و غیره) که گاری در آن حرکت می کند. فرض می کنیم که این نیرو نیز در جهت خلاف حرکت و مقدار آن متناسب با سرعت است یعنی $F_d = -c(dx/dt)$ ، در اینجا عدد ثابت و مثبت c به میزان مقاومت آن ماده بستگی دارد. تحت این شرایط، معادله به صورت (۱)

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F_s + F_d \quad (9)$$

و لذا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M} x = 0 \quad (10)$$

درمی آید، که آن را نیز برای راحتی، با انتخاب $b = c/2M$ و $a = \sqrt{k/M}$ به صورت

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + a^2 x = 0 \quad (11)$$

می نویسیم. معادله کمکی مربوطه عبارت است از

$$m^2 + 2bm + a^2 = 0 \quad (12)$$

که m_1 و m_2 ، ریشه های آن، برابرند با

$$m_1, m_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2} \quad (13)$$

البته نوع جواب عمومی (۱۱) توسط اعداد m_1 و m_2 مشخص می گردد. همان طور که می دانیم، باید سه حالت در نظر گرفت :

حالت الف. $b^2 - a^2 > 0$ یا $b > a$. به بیان ساده این بدان معناست که نیروی اصطکاک

ناشی از چسبندگی در مقایسه با سختی فنربزرگ است. در نتیجه m_1 و m_2 اعدادی منفی و متفاوت اند و بنابراین جواب عمومی معادله (۱۱) چنین می شود:

$$x = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \quad (14)$$

که اگر با توجه به شرایط اولیه (۵) اعداد c_1 و c_2 را محاسبه کنیم، (۱۴) به صورت

$$x = \frac{x_0}{m_1 - m_2} (m_1 e^{m_2 t} - m_2 e^{m_1 t}) \quad (15)$$

درمی آید. نمودار این تابع در شکل ۲۲ رسم شده است. روشن است که در اینجا ارتعاشی رخ نمی دهد، و گاری صرفاً به حالت تعادلش بازمی گردد. این نوع حرکت را فوق میرا می نامند. حال فرض کنید که چسبندگی محیط کمتر و کمتر شود تا به شرط حالت بعد برسیم. حالت ب. $b^2 - a^2 = 0$ یا $b = a$. در این حالت $m_1 = m_2 = -b = -a$ و جواب عمومی (۱۱) عبارت است از

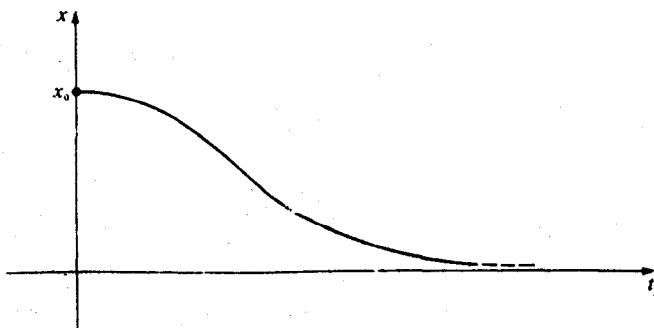
$$x = c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at} \quad (16)$$

که با توجه به شرایط اولیه (۵)، به صورت زیر نوشته می شود

$$x = x_0 e^{-at} (1 + at) \quad (17)$$

نمودار این تابع شبیه است به نمودار تابع (۱۵)، و هنوز هیچ ارتعاشی نخواهیم داشت. هر حرکتی از این نوع را میرای بحرانی می نامند. حال هرگاه چسبندگی قدری کم شود، این کاهش هرچقدر ناچیز باشد، آنگاه حرکت ارتعاشی می شود، و آنرا تحت میرا می نامند، این حالت واقعاً جالبی است که ذیلاً مورد بحث قرار می دهیم.

حالت ج. $b^2 - a^2 < 0$ یا $b < a$. در این حالت m_1 و m_2 دو عدد مختلط مزدوج به صورت $-b \pm i\alpha$ هستند، که در آن



$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$$

و جواب عمومی معادله (۱۱) به صورت زیر است

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t) \quad (18)$$

اگر c_1 و c_2 را با توجه به شرایط اولیه (۵) محاسبه کنیم، خواهیم داشت

$$x = \frac{x_0}{\alpha} e^{-bt} (\alpha \cos \alpha t + b \sin \alpha t) \quad (19)$$

با انتخاب $\theta = \tan^{-1}(b/\alpha)$ ، عبارت (۱۹) را می توان به صورت گویاتر

$$x = \frac{x_0 \sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \theta) \quad (20)$$

نوشت. همان طور که از شکل ۲۳ پیداست این تابع نوسانی است و دامنه آن به طور نمایی کم می شود.

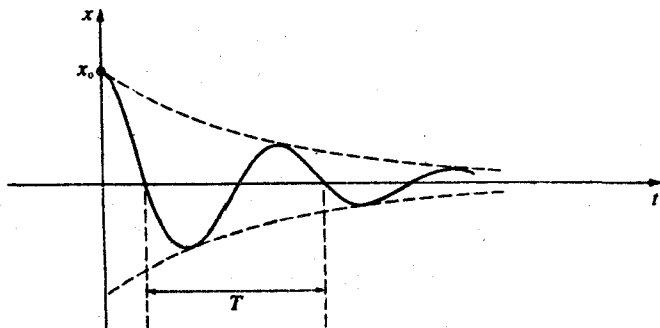
این تابع، متناوب - به معنای صریح کلمه - نیست، ولی نمودارش موضع تعادل $x=0$ را در فواصل منظم قطع می کند. هرگاه «دوره تناوب» آن، یعنی T را زمان یک «نوسان» کامل بگیریم، آنگاه $\alpha T = 2\pi$ و

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/M - c^2/4M^2}} \quad (21)$$

همچنین «بسامد» آن برابر می شود با

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}} \quad (22)$$

معمولا این عدد را بسامد طبیعی دستگاه می نامند. وقتی چسبندگی محیط ناچیز باشد، به طوری



که بتوانیم $c = 0$ بگیریم، روشن است که (۲۱) و (۲۲) تبدیل به (۷) و (۸) می‌شوند. علاوه بر این، درمقایسه (۸) با (۲۲) متوجه می‌شویم که مطابق انتظارمان بسامد ارتعاش در اثر میرایی کاهش می‌یابد.

نوسانات واداشته. از آنجا که ارتعاشات فوق‌الذکر، تنها تحت تأثیر نیروهای درونی دستگاه تولید می‌شوند، ارتعاشات آزاد نامیده می‌شوند. حال مطالعه خود را به حالتی که یک نیروی خارجی $F_e = f(t)$ نیز بر گاری وارد شود، گسترش می‌دهیم. چنین نیرویی می‌تواند از طرق گوناگون پدیدار گردد؛ مثلاً، از ارتعاشات دیواری که گاری توسط فنر به آن متصل شده است، یا از اثر یک میدان مغناطیسی خارجی بر گاری (اگر گاری از آهن باشد). در این حالت به جای معادله (۹) خواهیم داشت

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F_s + F_d + F_e \quad (23)$$

بنابراین

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (24)$$

مهمترین حالت وقتی است که نیروی خارجی وارده متناوب و به صورت $f(t) = F_0 \cos \omega t$ باشد که در این صورت (۲۴) به صورت

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (25)$$

درمی‌آید. ماقبل معادله همگن مربوطه، یعنی معادله (۱۰)، را حل کرده‌ایم، بنابراین برای یافتن جواب (۲۵) کافی است یک جواب خصوصی آن را بیابیم. با روش ضرایب نامعین بسادگی می‌توان این عمل را انجام داد. نتیجتاً عبارت $x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ را به عنوان جواب آزمایشی اختیار می‌کنیم و آن را در معادله (۲۵) جایگزین می‌نماییم. دو معادله زیر برای یافتن A و B حاصل می‌شود

$$\omega c A + (k - \omega^2 M) B = F_0$$

$$(k - \omega^2 M) A - \omega c B = 0$$

جواب این دستگاه عبارت است از

$$A = \frac{\omega c F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2} \quad \text{و} \quad B = \frac{(k - \omega^2 M) F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}$$

بنابراین جواب خصوصی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$x = \frac{F_0}{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2} [\omega c \sin \omega t + (k - \omega^2 M) \cos \omega t] \quad (26)$$

هر گاه $\phi = \tan^{-1}[\omega c / (k - \omega^2 M)]$ انتخاب شود، جواب (۲۶) را می توان به صورت مفیدتر

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (27)$$

نوشت. حال اگر فرض کنیم با حالت تحت میرایی مواجه هستیم، جواب عمومی معادله (۲۵) برابر می شود با

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos at + c_2 \sin at) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (28)$$

جمله اول، بوضوح، گذرا است، یعنی وقتی $t \rightarrow \infty$ ، مقدار آن به سمت صفر می گراید. در واقع، چه حرکت تحت میرا باشد و چه نباشد، مادامی که تا حدی میرایی وجود داشته باشد، این نتیجه نیز حقیقت خواهد داشت (به تمرین ۱۷-۲ رجوع کنید). لذا با گذشت زمان این حرکت، سرشت جمله دوم، یعنی قسمت حالت ماندگار را به خود می گیرد. بر این اساس جمله گذرا را می توان نادیده گرفت و گفت که برای t های بزرگ جواب معادله (۲۵) اساساً همان جواب خصوصی (۲۷)، است. بسامد این ارتعاش اجباری برابر با بسامد نیروی خارجی، یعنی $\omega / 2\pi$ است، و دامنه آن با ضریب

$$\frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}} \quad (29)$$

برابر است.

نکات جالبی در عبارت دامنه نهفته است. زیرا این عبارت علاوه بر ω و F_0 به k ، c و M نیز وابسته است. به عنوان نمونه، اگر c خیلی کوچک و ω نزدیک به $\sqrt{k/M}$ باشد (به طوری که $k - \omega^2 M$ خیلی کوچک باشد)، یعنی حرکت به آهستگی میرا شود و بسامد نیروی خارجی، یعنی $\omega / 2\pi$ نزدیک به بسامد طبیعی

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}$$

باشد، آنگاه دامنه خیلی بزرگ خواهد بود. این پدیده مشهور به تشدید است. يك مثال كلاسیك در این مورد، ارتعاش اجباری پلی است كه يك ستون نظامی با بسامد گام خیلی نزدیک به بسامد طبیعی پل، بر آن رژه می روند.

سرانجام، به طور خلاصه به ذکر رابطه بین مسئله مکانیکی فوق الذکر و مسئله الکتریکی مورد بحث در بخش ۱۳ می پردازیم. در آن بخش نشان دادیم که هر گاه يك مدار الکتریکی ساده شامل يك مقاومت، يك القاگر و يك خازن تحت تأثیر نیروی محرکه الکتریکی متناوب $E = E_0 \cos \omega t$ باشد، آنگاه Q ، مقدار بار خازن، توسط معادله دیفرانسیل

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E_0 \cos \omega t$$

داده می‌شود. این معادله شباهت چشمگیری به معادله (۲۵) دارد. بویژه، تناظرهای زیر جلب توجه می‌کنند:

$$L \leftrightarrow M \quad \text{جرم}$$

$$R \leftrightarrow c \quad \text{چسبندگی}$$

$$\frac{1}{C} \leftrightarrow k \quad \text{سختی فنر}$$

$$Q \leftrightarrow x \quad \text{تغییر مکان}$$

این تشابه بین دستگاههای مکانیکی و الکتریکی، بیان ریاضی دو دستگاه را یکی می‌کند و ما را قادر می‌سازد تمام نتیجه‌ها را مستقیماً از اولی به دومی انتقال دهیم. بنابراین در مدار الکتریکی داده شده يك مقاومت بحرانی خواهیم داشت که برای مقاومت‌های کمتر از آن رفتار آزاد مدار ارتعاشی است با بسامد طبیعی معین، نوسان واداشته حالت ماندگار بار Q ، و پدیده تشدید را داریم که در شرایط مناسب اتفاق می‌افتد.

تمرین

- ۱- نوسان واداشته (۲۷) در حالت تحت میرا را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین بسامد نیروی خارجی به طوری که دامنه (۲۹) ماکزیمم شود. آیا چنین بسامد نیروی خارجی لزوماً وجود دارد؟ این مقدار از بسامد نیروی خارجی را (اگر موجود باشد) بسامد تشدید می‌نامند. نشان دهید که این مقدار همواره از بسامد طبیعی کمتر است.
- ۲- ارتعاش آزاد تحت میرایی را که توسط رابطه (۲۵) توصیف شده است در نظر بگیرید. نشان دهید که x ماکزیمم مقدار خود را به ازای مقادیر t برابر با $0, T, 2T, \dots$ اختیار می‌کند، که T «دوره تناوب» مذکور در رابطه (۲۱) است. هرگاه x_1 و x_2 دومقدار ماکزیمم متوالی x باشند، نشان دهید که $x_1/x_2 = e^{bT}$. لگاریتم این مقدار، یعنی bT را کاهش لگاریتمی ارتعاش می‌نامند.
- ۳- جسم کروی شنواری به شعاع r را در نظر بگیرید که نصف آن زیر آب باشد. اگر آن را کمی بیشتر در آب فروبریم، نیروی بازگرداننده‌ای برابر با وزن آب جابجا شده آن را به طرف بالا فشار می‌دهد، و اگر کره را در این حالت رها کنیم، روی آب بالا و پایین خواهد رفت. در صورتی که از اصطکاک آب صرف نظر شود، دوره تناوب نوسان کره را به دست آورید.

۴- فرض کنید که بین دو نقطه از سطح زمین توپل مستقیمی احداث شده باشد، اگر در این توپل راه آهنی کشیده شود، و از نیروی اصطکاک صرف نظر کنیم، و قطاری که در يك انتهای

تونل قرار می گیرد، تحت تأثیر نیروی وزن خود به حرکت درآید و در انتهای دیگر تونل متوقف شود و مجدداً برگردد، نشان دهید که زمان لازم برای رفت و برگشت قطار در کلیه چنین تونلهایی یکسان است، و مقدار آن را تخمین بزنید.

۲۱. قانون گرانش نیوتن و حرکت سیارات

قانون عکس مجذور جاذبه در بسیاری از پدیده‌های طبیعی مانند مدار سیارات حول خورشید، حرکت ماهواره‌ها حول زمین، مسیر حرکت ذرات باردار در فیزیک اتمی و غیره ظاهر می‌شود، به طوری که هر تحصیل کرده رشته علوم باید اطلاعاتی در مورد نتایج آن داشته باشد. هدف ما در این بخش به دست آوردن قوانین کپلر در مورد حرکت سیارات از قانون گرانش عمومی نیوتن است. بدین منظور حرکت جسم کوچکی به جرم m (سیاره) را که تحت تأثیر نیروی جاذبه یک جسم بزرگ ثابت به جرم M (خورشید) است، بررسی می‌کنیم.

برای بحث در مورد ذره متحرکی که نیروی وارد به آن همیشه در امتداد خط واصل بین ذره و نقطه ثابتی است، معمولاً آسانترین راه آن است که سرعت، شتاب، و نیرو را به مؤلفه‌هایی در امتداد آن خط و امتداد عمود بر آن تجزیه کنیم. بنابراین جسم ثابت M را در مبدأ دستگاه مختصات قطبی (شکل ۲۴) فرض می‌کنیم و بردار شعاعی از مبدأ به ذره متحرک m را به صورت

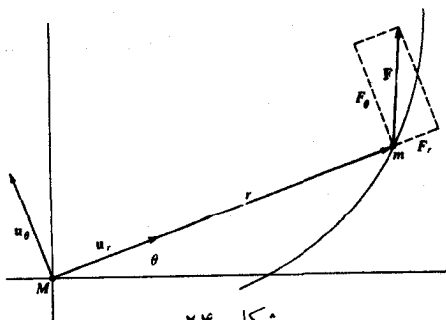
$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \quad (۱)$$

نشان می‌دهیم، در اینجا \mathbf{u}_r بردار یکه در جهت \mathbf{r} افست^۱ روشن است که

$$\mathbf{u}_r = i \cos \theta + j \sin \theta \quad (۲)$$

و \mathbf{u}_θ بردار یکه عمود بر \mathbf{u}_r ، در جهت ازدیاد θ ، برابر است با

$$\mathbf{u}_\theta = -i \sin \theta + j \cos \theta \quad (۳)$$



شکل ۲۴

۱. در اینجا طبق معمول برای نمایش بردارها از حروف سیاه استفاده می‌کنیم.

روابط ساده

$$\frac{du_r}{d\theta} = u_\theta \quad \text{و} \quad \frac{du_\theta}{d\theta} = -u_r$$

که از مشتق گیری (۲) و (۳) به دست می آیند، برای محاسبه سرعت \mathbf{v} و شتاب \mathbf{a} ، ضروری هستند. با مشتق گیری مستقیم از (۱) خواهیم داشت:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} = r \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r \quad (۲)$$

و

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \dot{r} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{u}_\theta + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r \quad (۵)$$

هرگاه نیروی وارد بر m ، یعنی \mathbf{F} را به صورت

$$\mathbf{F} = F_\theta \mathbf{u}_\theta + F_r \mathbf{u}_r \quad (۶)$$

بنویسیم، به کمک (۵) و (۶) و قانون دوم حرکت نیوتن $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ ، نتیجه می شود که

$$F_\theta = m \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \dot{r} \frac{d\theta}{dt} \right) \quad \text{و} \quad m \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = F_r \quad (۷)$$

این معادلات دیفرانسیل حرکت ذره m را، بدون توجه به ماهیت نیرو، توصیف می کنند. هدف بعدی ما آن است که با فرضهای خاصی درمورد مقدار و جهت نیروی \mathbf{F} ، اطلاعاتی از این معادلات استخراج کنیم.

نیروهای مرکزی. \mathbf{F} را نیروی مرکزی نامند، هرگاه فاقد مؤلفه عمود بر \mathbf{r} باشد، یعنی

$$F_\theta = 0. \quad \text{با این فرض، اولین معادله (۷) به صورت}$$

$$r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \dot{r} \frac{d\theta}{dt} = 0$$

نوشته می شود. حال اگر طرفین آن را در r ضرب کنیم به صورت

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \dot{r} r \frac{d\theta}{dt} = 0$$

و یا

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

در می آید. بنابراین

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (۸)$$

که در آن h مقدار ثابتی است. فرض می کنیم که h مثبت باشد، یعنی جرم m در جهت خلاف

حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کند. هرگاه $A = A(t)$ برابر باشد با مساحت جارو شده توسط بردار r از یک وضعیت مرجع ثابت به طوری که $dA = r^2 d\theta / 2$ ، آنگاه (۸) حاکی از آن است که

$$dA = \frac{1}{2} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} h dt \quad (9)$$

هرگاه از طرفین (۹) از t_1 تا t_2 انتگرال بگیریم، چنین به دست می آوریم

$$A(t_2) - A(t_1) = \frac{1}{2} h (t_2 - t_1) \quad (10)$$

این رابطه قانون دوم کپلر را به دست می دهد: بردار شعاعی r از خورشید به سیاره در فواصل زمانی مساوی مساحت‌های مساوی را جارو می کند.^۱

نیروهای گرانشی مرکزی. اکنون حالت خاصی را در نظر می گیریم که اندازه نیروی مرکزی مربوطه - بنا بر قانون گرانش نیوتن - متناسب است با حاصلضرب دو جرم و معکوس مجذور فاصله بین آنها :

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (11)$$

حرف G نمایشگر ثابت گرانشی است که یکی از ثابت‌های عمومی طبیعت است. هرگاه (۱۱) را با انتخاب $k = GM$ به صورت مختصر وساده

$$F_r = -\frac{km}{r^2}$$

بنویسیم، آنگاه معادله دوم (۷) به صورت

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{k}{r^2} \quad (12)$$

نوشته می شود. چنانچه متغیر جدید $z = 1/r$ را در نظر بگیریم و به جای t از θ به عنوان متغیر مستقل استفاده کنیم، معادله به صورتی آشنا تبدیل خواهد شد. برای انجام این تبدیل، ابتدا باید عبارات زیر را محاسبه کنیم.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \frac{h}{r^2} = -h \frac{dz}{d\theta}$$

۱. وقتی که تیکو براهه منجم دانمارکی در سال ۱۶۰۱ فوت کرد، برای دستیارش یوهانس کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) مقادیر زیادی از داده‌های خام مربوط به موقعیت سیارات در زمانهای مختلف به جای ماند. کپلر پس از مرگ او بیست سال روی این داده‌ها کار کرد تا سرانجام موفق شد سه قانون زیبا و ساده خود را در مورد حرکت سیارات کشف کند، که مرحله اعتلای هزاران سال رصدهای محض نجومی بود.

و

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{d\theta} \right) = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dz}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{d^2 z}{d\theta^2} \frac{h}{r^2} = -h^2 z \frac{d^2 z}{d\theta^2}$$

هرگاه عبارت اخیر را در رابطه (۱۲) قرار دهیم، و به جای r و $d\theta/dt$ بترتیب $1/z$ و hz^2 بگذاریم، خواهیم داشت

$$-h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} - \frac{1}{z} h^2 z^4 = -kz^2$$

یا

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2} \quad (13)$$

بسادگی می‌توان دید که جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$z = A \sin \theta + B \cos \theta + \frac{k}{h^2} \quad (14)$$

برای سادگی، جهت محور قطبی را چنان تغییر می‌دهیم که وقتی $\theta = 0$ ، r مینیمم گردد. (یعنی، m در کمترین فاصله از مبدأ باشد.) این بدان معناست که z باید در این جهت ماکزیمم باشد، بنابراین، در $\theta = 0$ داریم

$$\frac{dz}{d\theta} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2 z}{d\theta^2} < 0$$

این شرایط نتیجه می‌دهند که $A = 0$ و $B > 0$. حال اگر به جای z عبارت $1/r$ را بگذاریم، در آن صورت (۱۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$r = \frac{1}{k/h^2 + B \cos \theta} = \frac{h^2/k}{1 + (Bh^2/k) \cos \theta}$$

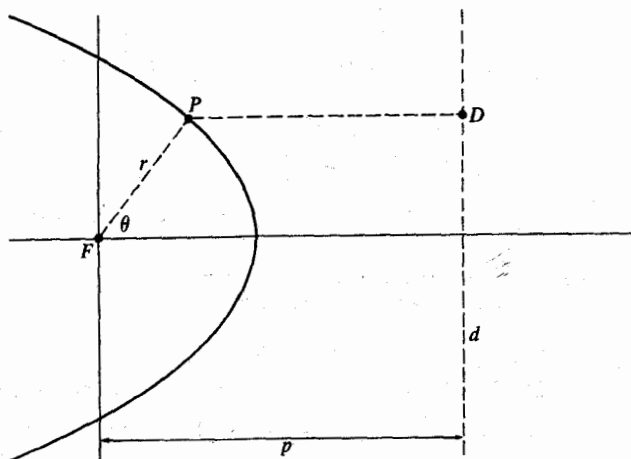
و چنانچه $e = Bh^2/k$ ، آنگاه معادله مدار به صورت

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos \theta} \quad (15)$$

درمی‌آید که در آن e مقدار ثابت مثبتی است.

حال یادآور می‌شویم (شکل ۲۵) که مکان هندسی تعریف شده توسط رابطه $PF/PD = e$ یک مقطع مخروطی با کانون F ، خط هادی d ، و خروج از مرکز e است. وقتی این عبارت را بر حسب r و θ بنویسیم، بسادگی دیده می‌شود که

$$r = \frac{pe}{1 + e \cos \theta}$$



شکل ۲۵

معادله قطبی مقطع مخروطی است، و بسته به اینکه $e < 1$ ، $e = 1$ ، یا $e > 1$ ، مقطع مخروطی، بیضی، سهمی، و یا هذلولی است. این نکات نشان می‌دهد که مدار (۱۵) يك مقطع مخروطی با خروج از مرکز $e = Bh^2/k$ است، و چون سیارات در دستگاه خورشیدی باقی می‌مانند، و بنابراین روی يك مدار بسته حرکت می‌کنند، پس قانون اول کپلر به این صورت به دست می‌آید: مدار هر سیاره يك بیضی است که خورشید در یکی از کانونهایش قرار دارد.

معنای فیزیکی خروج از مرکز e از معادله (۴) نتیجه می‌شود که انرژی جنبشی m

برابر است با

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \quad (16)$$

انرژی پتانسیل دستگاه برابر است با منهای کار لازم جهت حرکت دادن m به بینهایت (جایی که انرژی پتانسیل صفر است)، بنابراین

$$-\int_r^\infty \frac{km}{r^2} dr = \frac{km}{r} \Big|_r^\infty = -\frac{km}{r} \quad (17)$$

هرگاه E انرژی کل دستگاه باشد که با توجه به اصل بقای انرژی مقداری ثابت است، از (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}m \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] - \frac{km}{r} = E \quad (18)$$

در لحظه $\theta = 0$ ، (۱۵) و (۱۸) چنین به دست می‌دهند

$$r = \frac{h^2/k}{1+e} \quad \text{و} \quad \frac{mr^2}{2} \frac{h^2}{r^4} - \frac{km}{r} = E$$

چنانچه بین این دو رابطه r را حذف و e را محاسبه کنیم، درمی یابیم که

$$e = \sqrt{1 + E \left(\frac{2h^2}{mk^2} \right)}$$

این کار به ما امکان می دهد که معادله (۱۵) را برای مدار به صورت

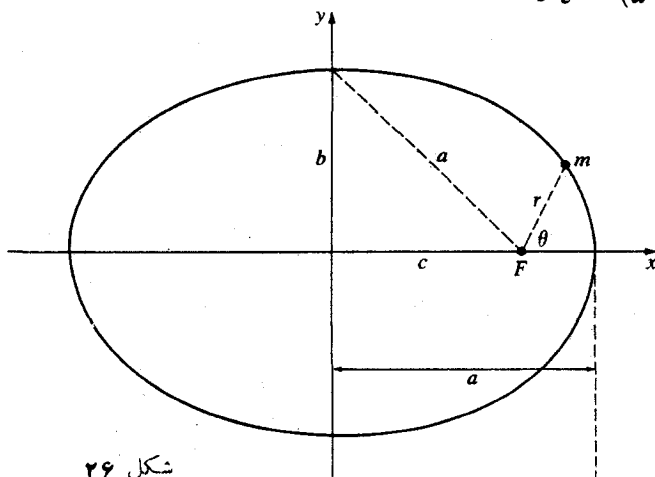
$$r = \frac{h^2/k}{1 + \sqrt{1 + E(2h^2/mk^2)} \cos \theta} \quad (19)$$

بنویسیم. با توجه به (۱۹) واضح است که مدار بیضی، سهمی و یا هذلولی است بسته به اینکه $E < 0$ ، $E = 0$ ، و یا $E > 0$. بنابراین روشن است که کیفیت مدار m توسط E ، یعنی انرژی کل آن، به طور کامل مشخص می گردد. بنابراین سیارات در منظومه شمسی دارای انرژی منفی هستند و مسیرشان بیضی است، و اجسامی که با سرعت زیاد از منظومه شمسی عبور می کنند دارای انرژی مثبت اند و روی مسیرهای هذلولی شکل حرکت می کنند. جالب توجه است که چنانچه این امکان وجود می داشت که سیاره ای مانند زمین را از پشت با نیروی زیاد چنان فشار دهیم که سرعتش افزایش یابد و انرژی کل آن بیشتر از صفر گردد، آنگاه زمین وارد یک مدار هذلولی شکل می گردید و برای همیشه منظومه شمسی را ترك می کرد.

دوره تناوب دوران سیارات. حال توجه خود را به حالتی معطوف می کنیم که در آن مدار بیضی (شکل ۲۶) به معادله قطبی (۱۵) و به معادله دکارتی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

است. از هندسه تحلیلی مقدماتی می دانیم که $e = c/a$ و $c^2 = a^2 - b^2$ ، بنابراین $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$



شکل ۲۶

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (20)$$

a ، مقدار متوسط فاصله m تا کانون F ، نصف مجموع کمترین و بیشترین مقدار r است، بنابراین از (۱۵) و (۲۰) به دست می آوریم که

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2/k}{1+e} + \frac{h^2/k}{1-e} \right) = \frac{h^2}{k(1-e^2)} = \frac{h^2 a^2}{k b^2}$$

و در نتیجه

$$b^2 = \frac{h^2 a}{k} \quad (21)$$

هر گاه T دوره تناوب m (یعنی، زمان لازم برای يك دوران کامل روی مدار) باشد، آنگاه چون مساحت بیضی برابر با πab است، از رابطه (۱۰) نتیجه می شود که $\pi ab = hT/2$. با توجه به (۲۱) چنین نتیجه می شود

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 b^2}{h^2} = \left(\frac{4\pi^2}{k} \right) a^3 \quad (22)$$

در بررسی حالت ایده آل فعلی، ثابت $k = GM$ به جرم مرکزی M بستگی دارد و به جرم m وابسته نیست، بنابراین، رابطه (۲۲) برای کلیه سیارات منظومه شمسی برقرار است و این خود قانون سوم کپلر است: مجذور دوره تناوب گردش سیارات با مکعب فاصله متوسط آنها تا خورشید متناسب است.

البته ایده اصلی مطرح شده در این بخش متعلق به نیوتن است (پیوست ب). ولی، اثباتی که در اینجا آمده است کاملاً متفاوت با بحث اولیه اوست، زیرا او هیچگاه از روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال به طور صریح استفاده نکرد.

تمرین

۱- نشان دهید که دو قانون اول کپلر به شکل معادلات (۸) و (۱۵) نتیجه می دهند که m با نیرویی متناسب با مجذور معکوس r به سوی مبدأ جذب می شود. این حقیقت، کشف بنیادی نیوتن بود، زیرا موجب شد که نیوتن قانون گرانش خود را بنا نهد و به بررسی نتایج آن بپردازد.

۲- نشان دهید که تندی v سیاره در هر نقطه از مدارش از رابطه

$$v^2 = k \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

به دست می آید.

۳- فرض کنید زمین منفجر و به قطعاتی متلاشی گردد که با تندی یکسان (نسبت به خورشید) در جهات مختلف و مدارهای مختص خود به حرکت در آیند. نشان دهید کلیه قطعاتی

که روی خورشید نمی افتند یا از منظومه شمسی فرار نمی کنند دوباره در همان نقطه به همدیگر خواهند رسید.

پیوست الف . اوپلر

لئونهارت اوپلر (۱۷۵۷-۱۷۸۳) بزرگترین دانشمند سوئسی و یکی از سه ریاضیدان برجسته دوران نوین بود (دو نفر دیگر گاوس و ریمن بودند). در مقایسه با مؤلفین تمام رشته ها و در همه اعصار اوپلر شاید پرکارترین آنها بود. انتشار مجموعه آثار او در سال ۱۹۱۱ آغاز شد، و تخمین زده اند که تکمیل نهایی این طرح به بیش از ۱۰۰ جلد کتاب بزرگ نیاز دارد. نوشته های او نمونه ای از سادگی و روشنی است. اوپلر هرگز به طور خلاصه و فشرده نمی نوشت، و همیشه ایده های فراوان و پهنه وسیع مطالب مورد توجه خود را در نوشته هایش به طور آشکار منعکس می نمود. آراگو، فیزیکدان فرانسوی، در سخنرانی خود راجع به استعداد بی نظیر اوپلر، گفته است که «اوپلر به همان راحتی که انسان نفس می کشد یا عقاب در باد پرواز می کند، بدون تلاش محسوس، محاسبه می کرد». با وجود آنکه اوپلر در ۱۷ سال آخر عمرش از کوری مطلق رنج می برد، به یاری حافظه قوی و تخیل پر بارش و به کمک کسانی که گفته های او را یادداشت می کردند توانست به نوشتن کتابها و مقالاتش ادامه دهد و بازده فوق العاده کار خود را نیز بیفزاید.

اوپلر اهل بازل و در دانشگاه شاگرد یوهان برنولی بود، و لسی بزودی از معلم خود پیشی گرفت. زندگی شغلی او در فرهنگستانهای علوم برلین و سن پترزبورگ گذشت. او مردی با فرهنگ وسیع بود، و در زبانها و ادبیات کلاسیک تبحر فراوانی داشت (او حماسه یونانی اثتید سروده ویرژیل را حفظ بود). و به چندین زبان زنده، فیزیولوژی، طب، گیاه شناسی، جغرافی، و همه زمینه های علوم فیزیک شناخته شده در آن زمان، مسلط بود. اما استعدادش در ماوراء الطبیعه، و بحث و جدل ضعیف بود، و در مباحثه شفاهی دربار فردریک کبیر که بین تعداد زیادی از افراد خوش طبع با و لثر صورت گرفت، مقام دوم را کسب کرد. زندگی خصوصیش آنقدر که از مردی با ۱۳ فرزند انتظار می رود کم حادثه و آرام بود.

گرچه اوپلر معلم نبود، تأثیرش روی معلمان ریاضی از هر شخص دیگری عمیقتر بود. این تأثیر عمدتاً به خاطر سه مقاله مهم او بود که ذیلاً ذکر می شود؛ مدخل در آنالیز بینهایت کوچکها (۱۷۴۸)^۱، تأسیس حساب دیفرانسیل (۱۷۵۵)^۲ و تأسیس حساب انتگرال (۱۷۶۸-۱۷۹۴)^۳. این ادعای قدیمی که، کلیه کتب درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی و پیشرفته ای که از سال ۱۷۴۸ به بعد چاپ شده است اساساً یا کپی کتاب اوپلر و یا کپی کپی کتاب

1. Introductio in Analysin Infinitorum
2. Institutiones Calculi Differentialis
3. Institutiones Calculi Integralis

اولر است^۱، تاحدود زیادی واقعیت دارد. در این کتب اکتشافات افراد قبل از او جمع آوری و تنظیم شده اند و سرشار از ایده های خود اوایلرند. او هندسه تحلیلی مسطحه و فضائی را تکمیل کرد و تعمیم داد و چگونگی برخورد تحلیلی با مثلثات را مطرح ساخت، و بانی بررسیهای جدید در مورد توابع $\log x$ و e^x بوده است. وی نظریه ای سازگار از لگاریتم اعداد منفی و موهومی ابداع نمود، و کشف کرد که $\log x$ دارای بینهایت مقدار است. آثار او موجب شد که نمادهای e ، π ، و i بین همه ریاضیدانان رایج شود، و او بود که آنها را در رابطه شگفت انگیز $1 + i^\pi = 0$ به هم مربوط نمود. این حالت خاصی از فرمول مشهور وی به صورت $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ است که توابع نمایی و مثلثاتی را به هم پیوند می دهد. از جمله دیگر کارهای او در نشانه گذاریهای متعارف ریاضی $\sin x$ ، $\cos x$ ، استفاده از $f(x)$ به عنوان تابع به طور عام، و استفاده از \sum برای جمع است^۲. او اولین و بزرگترین فرد متبحر در سری های بینهایت، حاصل ضرب های بینهایت و کسره های مسلسل بود، و کارهایش مملو از اکتشافات چشمگیر در این زمینه هاست. او مسائل خاص و عینی را بر نظریه های کلی که امروزه متداول است ترجیح می داد، و بصیرت کم نظیر، او با کشف روابط بین فرمولهای بظاهری ارتباط، راههای بسیاری به سوی مباحث جدید آنالیز گشود که بسط آنها را به عهده ریاضیدانان بعد از خود گذاشت^۳.

او نظرات مهم فراوانی در زمینه معادلات دیفرانسیل مطرح کرد: روشهای مختلف تقلیل مرتبه، مفهوم عامل انتگرال ساز (که غالباً ضریب اوایلر خوانده می شود)، قسمتهای اصلی نظریه معادلات خطی مرتبه دوم به طریق داده شده در این فصل، جوابهای سری توانی، همه را مدیون اوایلر هستیم^۴. علاوه بر این، او اولین بحث منظم و اصولی حساب تغییرات را (بر پایه معادله دیفرانسیل بنیادی خود را جمع به منحنی مینیم کننده) بیان کرد، انتگرالهای اوایلری را که توابع گاما و بتا را تعریف می کنند کشف نمود، و ثابت اوایلر، یعنی

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = 0.5772 \dots$$

۱. مراجعه شود به مقاله زیر

C. B. Boyer, The Foremost Textbook of Modern Times, *Am. Math. Monthly*, vol. 58, pp. 223-226. 1951.

2. F. Cajori, "A History of Mathematical Notations," Open Court, La Salle, Ill., 1929.

۳. به خواننده ای که می خواهد آشنایی دست اول با اندیشه اوایلر به دست آورد توصیه می کنیم که فصل ششم از جلد اول کتاب برجسته ج. پولیا (G. Polya)، تحت عنوان

Mathematics and Plausible Reasoning

را که توسط موسسه انتشارات دانشگاه پرینستون در ۱۹۵۴ چاپ شده است، مطالعه نماید.

۴. رجوع شود به یادداشتهای تاریخی ای. ل. اینس (E. L. Ince) در صفحات ۵۳۳-۵۳۶ کتابش به نام Ordinary Differential Equations, Dover, New York, 1956

را که مهمترین عدد خاص ریاضی پس از π و e است، معرفی کرد^۱. او قبل از آنکه فوریه، بسل، و لاپلاس حتی متولد شده باشند، با سری فوریه کار کرد، در مطالعه ارتعاشات غشای دایره شکل تحت کشش با تسوابع بسل مواجه شد، و از تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده کرد. منشأ توپولوژی (که یکی از نیروهای نافذ ریاضیات نوین است) در راه حل پیشنهادی او برای مسئله پل کونیگسبرگ و فرمول وی به صورت $V - E + F = 2$ ، راجع به تعداد رئوس، اضلاع، و وجوه چند وجهی‌های ساده، نهفته است.

در نظریه اعداد، اولین اثبات منتشر شده قضیه فرما و قضیه دو مجذوری فرما متعلق به اوست. (به بخش ۶ رجوع شود). او سپس، با معرفی تابع اویلر ϕ ، قضیه نخست فوق‌الذکر را که از قضایای کلاسیک است تعمیم داد؛ اثبات قضیه دوم به قیمت هفت سال تلاش متناوب وی تمام شد. علاوه بر این، او ثابت کرد که هر عدد صحیح و مثبتی را می‌توان به صورت مجموع چهار مجذور نوشت، قانون عکس مجذورات را بررسی، و نظریه افزاها را ابداع کرد، که این خود با مسائلی از قبیل تعیین تعداد راه‌های ممکن برای نوشتن یک عدد صحیح و مثبت مفروض به صورت مجموع مجذورات اعدادی صحیح و مثبت، مربوط می‌شود.

قسمتی از جالب‌ترین کارهای اویلر به دنباله اعداد اول (یعنی اعداد صحیح و بزرگتر از یک مانند p که تنها مقسوم علیه‌های مثبتشان ۱ و p باشد) مربوط می‌گردد. استفاده او از واگرایی سری همساز $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ در اثبات قضیه اقلیدس، که مدعی وجود بینهایت عدد اول است، چنان ساده و استادانه است که به خود اجازه می‌دهیم آن را در اینجا بیاوریم؛ فرض کنید که تنها N عدد اول داشته باشیم که عبارت باشند از p_1, p_2, \dots, p_N . آنگاه هر عدد صحیح بزرگتر از یک چون n را می‌توان به صورت منحصر بفرد $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_N^{a_N}$ تجزیه کرد. هرگاه a بزرگترین این توانها باشد، آنگاه

$$1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_N} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^a}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^a}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_N} + \frac{1}{p_N^2} + \dots + \frac{1}{p_N^a}\right)$$

این رابطه بسادگی از ضرب عوامل سمت راست به دست می‌آید. ولی فرمول ساده جملات این حاصلضرب، از اعداد

$$\frac{1}{1 - 1/p_N}, \dots, \frac{1}{1 - 1/p_2}, \frac{1}{1 - 1/p_1}$$

کمترند، لذا نامساوی

۱. رجوع شود به مقاله

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{p_1}{p_1 - 1} \frac{p_2}{p_2 - 1} \dots \frac{p_N}{p_N - 1}$$

برای هر n برقرار است. این نتیجه با واگرایی سری همساز متناقض است، و نشان می‌دهد که تعداد اعداد اول نمی‌تواند متناهی باشد. اوایلر همچنین ثابت کرد که سری معکوس اعداد اول، یعنی سری

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$$

واگراست، و اتحاد شگفت‌انگیز

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s}, \quad s > 1$$

را، که در آن عبارت طرف راست، حاصلضرب اعداد $(1 - p^{-s})^{-1}$ برای کلیه اعداد اول p است، کشف کرد. ما در یادداشت خود راجع به ریمان، در پیوست ه از فصل ۵، بازهم به این اتحاد بازخواهیم گشت.

در زمان اوایلر تمایزی بین ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی وجود نداشت و از نظر او جهان فیزیکی زمینه‌ای مناسب برای روشهای آنالیز وی فراهم می‌آورد. اساس مکانیک کلاسیک توسط نیوتن نهاده شد، ولی طراح اصلی آن اوایلر بود. او اولین کسی بود که ایده جرم نقطه‌ای یا ذره را طی مقاله‌ای در سال ۱۷۳۶ بصراحت مطرح ساخت، و همچنین اولین کسی بود که شتاب ذره متحرک روی منحنی را مطالعه کرد و علامت بردار را در مورد شتاب و سرعت به کار گرفت. موفقیتهای پیاپی او در فیزیک ریاضی چنان زیاد، و تأثیر او چنان فراگیر بوده است که اکثر اکتشافاتش را ابداً به او نسبت نداده‌اند و فیزیکدانها آنها را به عنوان بخشی از نظم طبیعی اشیا، بدیهی پنداشته‌اند. با این حال معادلات حرکت اوایلر برای دوران جسم صلب، معادله هیدرودینامیکی اوایلر در مورد جریان سیال تراکم ناپذیر ایده‌آل، قانون اوایلر در مورد خمش تیرهای کشسان، و بار بحرانی اوایلر در نظریه کمانش ستونها، همه در حال حاضر به نام او خوانده می‌شود. در موارد متعددی رشته تفکر علمی‌اش او را به ایده‌هایی هدایت می‌کرد که معاصرانش هنوز آمادگی پذیرش آنها را نداشتند. به عنوان مثال، اوایلر پدیده فشار تشعشی را که برای نظریه نوین پایداری ستاره‌ها حیاتی است، بیش از یک قرن قبل از آنکه ماکسول نظریه آنرا طی تحقیقاتش در مورد الکترومغناطیس دوباره کشف کند، پیش‌بینی کرده بود.

اوایلر، شکسپیر ریاضیات بود. کار او جهانی است، سرشار از جزئیات است و هیچ‌گاه به کنه آن نمی‌توان رسید.

پیوست ب. نیوتن

اکثر افراد با نام و شهرت جهانی آیزک نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) آشنا هستند، زیرا او به عنوان کاشف قانون گرانش، دو قرن و نیم پس از مرگش، هنوز شهرت جهانی دارد. اما

مطلبی که کمتر بدان توجه می‌شود، حوزه بسیار وسیع دستاوردهای فراوان اوست که در واقع علوم فیزیکی نوین را پدید آورده است و در نتیجه تأثیر او در تعیین جهت زندگی متمدن عمیقتر از ترقی و سقوط ملت‌ها بوده است. کسانی که حق قضاوت دارند متفقاً، او را یکی از معدود اندیشمندان بشریت می‌دانند.

نیوتن در یک خانواده کشاورز در ده وولستورپ^۱ انگلستان متولد شد. درباره سالهای اول زندگی‌اش اطلاع زیادی در دست نیست، و زندگی دانشگاهی او در دوره لیسانس در کمبریج بظاهر چندان ممتاز نبوده است. در سال ۱۶۶۵ میلادی شیوع طاعون باعث تعطیل دانشگاه‌ها شد، و نیوتن به خانه‌اش در ده مراجعت نمود و تا سال ۱۶۶۷ میلادی در آنجا ماند. در طول این دوسال تنهایی روستایی - درس بین بیست و دو تا بیست و چهار سالگی - نبوغ خلاقش به صورت دریایی از اکتشافات بی‌همتا در تاریخ فکر بشر نمودار شد؛ سری دوجمله‌ای برای توانهای منفی و کسری؛ حساب دیفرانسیل و انتگرال؛ گرانش عمومی به عنوان کلید توضیح سازوکار (مکانیسم) منظومه شمسی؛ و تجزیه نور خورشید به یناب قابل رؤیت به وسیله منشور، با اشاره به نقش آن در درک رنگهای رنگین کمان و به طور کلی ماهیت نور. در سالهای پیریش خاطرات دوران جوانی معجزه آسای خود را چنین بیان کرده است: آن زمانها بهترین دوران عمر من در کشفیات بود و بیش از هر زمان دیگر، به ریاضیات و فلسفه [یعنی علوم] توجه داشتم.

نیوتن همواره شخصی درونگرا و راز نگهدار بود، و اغلب اکتشافات شگفت‌آورش را نزد خود حفظ می‌کرد. او تمایلی به انتشار کارهای خود نداشت و اغلب کارهای برجسته خود را، به اصرار و پافشاری دوستانش، جمع‌آوری می‌کرد. با این حال، شایستگی بی‌ظنیر او بر استادش آیزک بارو^۲ چنان آشکار بود که بارو در سال ۱۶۶۹ به نفع دانشجوی خود از استادی استعفا داد (اتفاقی که در محیط دانشگاهی بی‌سابقه بود!) و نیوتن ۲۷ سال پس از آن در کمبریج ماند. کشفیات ریاضی او هرگز به طور منظم و منسجم منتشر نشد، و به طور محدود و تاحدی بتصادف، از طریق گفتگوها، و نامه‌هایی که در پاسخ سؤالات دیگران می‌نوشت، معلوم گشت. او ظاهراً اطلاعات ریاضی خود را عمدتاً بعنوان وسیله مناسبی جهت مطالعه مسائل علمی در نظر می‌گرفت، و توجه نسبتاً کمی به خود آنها داشت. در همین زمان لایب‌نیتس نیز مستقلاً در آلمان حساب دیفرانسیل و انتگرال را کشف کرد، و بر اثر مکاتبات پیگیر خود با برنولی‌ها، و کارهای بعدی اوایلر، رهبری آنالیز نوین به اروپا منتقل شد، و حدود ۲۰۰ سال در آنجا باقی ماند^۳.

1. Woolsthorpe

2. Isaac Barrow

۳. خواندن مکاتبات نیوتن با لایب‌نیتس (از طریق اولدنبورگ) در سالهای ۱۶۷۶ و ۱۶۷۷ میلادی جالب است (رجوع کنید به

H. W. Turnbull, ed., "The Correspondence of Isaac Newton", Cambridge, New York, 1959-1961)

در باره زندگی نیوتن در سالهای اول استادی اش در کمبریج اطلاعات زیادی در دست نیست، ولی یقین است که نورشناسی و ساختن تلسکوپ جزو کارهای مورد علاقه اش بوده است. او برای تراشیدن عدسی، روشهای زیادی را، به کمک وسایل ساخت خودش، تجربه کرد و در حدود سال ۱۶۷۰ اولین تلسکوپ بازتابی را ساخت که صورت اولیه وسایل عظیمی است که امروزه در مون پالومار^۱ و سراسر جهان به کار می رود. تناسب، و سادگی تجزیه مشوری او در مورد پرتو خورشید، (که از کارهای اولیه اوست)، همواره این کار را در ردیف یکی از کارهای کلاسیک ابدی در علوم تجربی، مشخص کرده است. ولی این تنها آغاز کار بود، زیرا او همچنان در جهت درک عمیق خواص شکست انگیز نور پیش رفت، و تمام تلاشهای او در این جهت ادامه یافت تا آنجا که نبوغ تجربی متعالی وی آشکار گردید. نیوتن بعضی از اکتشافات خود را منتشر کرد، ولی برخورد دانشمندان بزرگ آن زمان با این انتشارات چنان نابخردانه بود که او را به کناره گیری واداشت و مصمم کرد که از آن به بعد تنها برای ارضای میل خود کار کند. بیست سال بعد نزد لایب نیتس چنین درد دل کرد «در مورد پدیده رنگها ... من تصور می کنم مطمئن ترین توضیحات را یافته ام، ولی از ترس انکار و جاروچنگال اشخاص نادان از انتشار آنها خودداری می کنم»^۲.

در اواخر دهه ۱۶۷۰ نیوتن به یکی از حالات بی میلی دوره ای اش نسبت به علوم دچار شد، و توان خود را به مسیرهای دیگری متوجه ساخت. طی این مدت هیچ مطلبی راجع به دینامیک و نقل منتشر نکرد، و اکتشافات فراوان او در این زمینه ها دست نخورده در کشوی میزش ماند. ولی سرانجام، پس از آنکه در اثر دعاوی و انتقادهای رابرت هوک^۳ برانگیخته و خشمگین گشت، و توسط ادموند هالی^۴ (کاشف ستاره دنباله دار هالی) سیاستمداران تسکین داده شد، مجدداً به این مسائل روی آورد و نوشتن کتاب برجسته اش تحت عنوان اصول (*Principia*) را آغاز نمود. نیوتن در تلاشهای علمی اش تقریباً شبیه به یک کوه آتشفشان، با دورانهای خاموشی طولانی، بود که گاه گاهی با فعالیت های تقریباً فوق بشری فروزان می گشت. وقتی کتاب اصول که طی ۱۸ ماه تمرکز کامل و باور نکردنی فکری نوشته شده بود، در سال ۱۶۸۷ منتشر شد بلافاصله به عنوان یکی از برجسته ترین دستاوردهای فکر بشر شناخته شد. نیوتن در این کتاب اصول اساسی مکانیک نظری و دینامیک

→ در بندهای ۱۶۵، ۱۷۲، ۱۸۸، ۲۰۹ نیوتن، سری دو جمله ای خود را مورد بحث قرار می دهد ولی در عین حال با جملاتی مقلوب به اختفای ایده هایش راجع به حساب دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل می پردازد، در حالی که لایب نیتس نظر خود راجع به حساب دیفرانسیل و انتگرال را بروشنی آشکار می کند. بند ۱۹۰ نیز بسیار جالب است، زیرا نیوتن در آنجا مطالبی می نویسد که احتمالاً اولین بیان و اثبات قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

1. Mount Palomar

۲. مراجعه شود به قسمت ۴۲۷ از مکاتبات نیوتن در منبع مذکور در پانویس ۳ صفحه ۱۲۰.

3. Robert Hooke

4. Edmund Halley

سیالات را طرح کرد؛ اولین بیان ریاضی حرکت موج را ارائه کرد؛ قوانین کپلر را از قانون عکس مجذور فاصله گرانش به دست آورد؛ و چگونگی مدار ستاره‌های دنباله‌دار را توضیح داد؛ جرم زمین، خورشید، و سیارات قمردار را محاسبه کرد؛ پخش‌شدگی شکل زمین را بیان کرد، و از آن برای توضیح تقویم اعتدالین استفاده کرد؛ و نظریهٔ جزر و مد را پایه‌گذاری کرد. اینها تنها شمه‌ای از کار پرشکوه اوست. مطالعهٔ کتاب اصول همواره مشکل بوده است، زیرا سبک و شیوهٔ آن دارای کیفیت ناآشنا و دور از دسترس است، که شاید برای چنین محتوای پراهمیتی مناسب باشد. همچنین، ریاضیات فشردهٔ به کار رفته در آن تقریباً متشکل از تمامی هندسهٔ کلاسیک است، که در آن زمان چندان پرورده نشده بود و حالا هم کمتر بدان می‌پردازند^۱. نیوتن در دینامیک و مکانیک سماوی به موفقیتی دست یافت که کپرنیک، کپلر، و گالیله راه آن‌را هموار کرده بودند. این پیروزی چنان کامل بود که در طول دو قرن بعد از آن، کار بزرگترین دانشمندان این رشته‌ها چندان از پانویسهایی براین کار عظیم نیوتن تجاوز نکرد. در اینجا خوب است یادآوری کنیم که منشأ علم بینابنمایی، که نقش کم‌نظیری در گسترش دانش نجوم به جهان ماورای منظومهٔ شمسی داشته است، در تجزیهٔ بینایی نور خورشید توسط نیوتن نهفته بود.

پس از اوجگیری پر قدرت نبوغ وی که منجر به آفرینش کتاب اصول شد، نیوتن دوباره از علوم روی برگرداند. در سال ۱۶۹۶ کمبریج را به قصد لندن ترک کرد تا سرپرست (وبعدا کارفرمای) ضرابخانه گردد، و در بقیهٔ عمر طولانی خود کمی وارد اجتماع شد و حتی شروع به برخورداری از موقعیت استثنایی خود در رأس دانشمندان مشهور کرد. این تغییر و تحول در علائق و محیط اطرافش، چیزی از قدرت نبوغ سرشار او نکاست. به عنوان مثال، آخر وقت یکی از بعد از ظهرهای روزی سخت و خسته کننده، در ضرابخانه مطلع شد که برنولی زیرکترین ریاضیدانان جهان را برای حل مسئلهٔ منحنی کوتاهترین زمان به مبارزه طلبیده است و قبل از آن که به بستر برود آن‌را حل کرد.

انتشار کتاب او تحت عنوان نورشناسی^۲ در سال ۱۷۰۴ یکی از با ارزش‌ترین کارها در زمینهٔ علوم بود. در این کتاب او کارهای قبلی خود را در مورد نور و رنگ جمع‌آوری کرد و توسعه داد. وی به عنوان پیوست، سؤالات مشهور خود، یا اندیشه‌هایی در زمینه‌هایی از علوم را، که بعدها مجال پرداختن به آنها را نیافت، اضافه کرد. قسمتی از این سؤالات به یک عمر مطالعات وی در علم شیمی (یا به اصطلاح آن زمان کیمیاگری) مربوط بود. او نتایج مقدماتی اما بی‌نهایت دقیقی را، بر مبنای تجربه، برای تشریح ماهیت احتمالی ماده به دست

۱. اشکال دیگر آن است که این «هندسه» اغلب ترجمه‌ای از استدلال حساب دیفرانسیل و انتگرال به زبان هندسی است، و همین موضوع خواندن آن‌را برای خوانندگان معاصر تقریباً غیرممکن می‌سازد. مراجعه شود به

Newton and the Attraction of a Sphere, in J. E. Littlewood, "A Mathematician's Miscellany," pp. 94-99 Methuen, London, 1963.

2. Opticks

آورد، و با آنکه بررسی اندیشه‌هایش راجع به اتم (و حتی هسته) مستلزم آزمایشهای دقیقتر اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بود، معلوم شد که ایده‌های اصلیش کاملاً درست بوده است.^۱ بنابراین، در این رشته از علوم نیز توانایی و دقت شگفت‌انگیز مشهود علمی او نه تنها از معاصرانش بلکه از چندین نسل بعد از وی به مراتب جلوتر بود. علاوه بر این دو مطلب حیرت‌انگیز از سؤالات ۱ و ۳۰ را به ترتیب نقل می‌کنیم: «آیا اجسام از راه دور بر نور اثر نمی‌کنند، و با تأثیرشان پرتوهای نور را خمیده نمی‌کنند؟» و «آیا اجسام مادی و نور قابل تبدیل به یکدیگر نیستند؟» از کلمات فوق چنین به نظر می‌رسد که نیوتن در اینجا خمش گرانشی نور و هم‌ارزی جرم و انرژی را بیان می‌کند - که نتایج اصلی نظریه نسبیت هستند. در موارد دیگر نیز به نظر می‌رسد که به‌طور شهودی اسرارآمیز، مطالبی بیش از آنچه می‌توانست و یامی‌خواست بیان کند، می‌دانست، همان‌طور که از این جمله مرموز او به دوستش برمی‌آید: «این برای من به کمک منبعی که از آن نتیجه‌گیری کرده‌ام روشن است، وای نمی‌کنم آن را برای دیگران اثبات کنم».^۲ ماهیت این «منبع» هر چه بوده باشد، بدون شک به قدرت تمرکز خارق‌العاده‌ی وی مربوط بوده است. وقتی که از او سؤال شد که اکتشافات خود را چگونه انجام داده‌اید، پاسخ داد که «مطلب را به‌طور دایم در نظر می‌گیرم و منتظر می‌شوم که نخستین پرتوها اندک‌اندک تبدیل به روشنائی کامل گردند». این موضوع به نظر ساده می‌رسد، ولی هر شخص با سابقه در علوم یا ریاضیات می‌داند که نگاه داشتن مداوم مسئله‌ای برای بیش از چند ثانیه یا چند دقیقه در ذهن، چقدر مشکل است. توجه شخص سست می‌شود، مسئله بارها از نظر دور می‌شود و بارها باید تلاش آنرا برگرداند. به‌قرار گفته‌های شاهدان، ظاهراً نیوتن قادر بود تقریباً بدون تلاش، حواس خود را برای ساعتها، روزها، و بلکه هفته‌ها روی مسئله‌ای متمرکز کند، و حتی احتیاجات گهگاه او به غذا و خواب بندرت رشته فکر او را درمورد مطلبی که با آن درگیر بود، قطع می‌کرد.

اغلب، نیوتن را يك خردگرای تمام‌عیار و تجسمی از عصر خردگرایی توصیف می‌کنند. شاید دقیق‌تر آن باشد که راجع به او از دید قرون وسطی بیندیشیم: شخصی مقدس، گوشه‌نشین و دارای قوه شهودی که علوم و ریاضیات را ابزار کشف معمای جهان می‌دانست.

۱. مراجعه شود به

S. I. Vavilov, Newton and The Atomic Theory, in "Newton Tercentenary Celebrations", Cambridge University Press, New York, 1947.

۲. مراجعه شود به بند ۱۹۳ از مکاتبات نیوتن.

نظریهٔ نوسان و مسائل مقدار مرزی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۲۲. ویژگیهای کیفی جوابها

احساس آنکه يك معادلهٔ دیفرانسیل باید حل شود، طبیعی است و یکی از اهداف عمدهٔ کار ما در فصل سوم، گسترش راههایی برای یافتن جوابهای صریح معادلهٔ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (۱)$$

بود. اما متأسفانه، همانگونه که سعی داشتیم بر آن تأکید کنیم، حل این معادله بر حسب توابع مقدماتی آشنا بندرت امکان پذیر است. این وضعیت ما را بر آن می‌دارد تا با طرح مسئله در يك سطح بالاتر، به دنبال دورنماهای گسترده‌تر باشیم و دریابیم که هدف واقعی، درك ماهیت و ویژگیهای جوابهای معادلهٔ (۱) است. چنانچه بتوان با استفاده از فرمولهای مقدماتی برای این جوابها به هدف مزبور دست یافت، مراد حاصل است. در غیر این صورت، سعی خواهیم کرد تا راههای دیگری برای نیل به این هدف بگشاییم. در این فصل توجه خود را به مسئلهٔ فراگیری هر چه بیشتر خصوصیات اساسی جوابهای (۱) به وسیلهٔ تحلیل مستقیم خود معادله، و بدون داشتن عبارتهای رسمی برای جوابهای معادله، معطوف می‌داریم. مقدار اطلاعات مفید و جالبی که می‌توان از این راه به دست آورد شگفت‌انگیز است.

به عنوان مثالی از این فکر که ویژگیهای زیادی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان بدون حل سنتی معادله، به وسیلهٔ مطالعهٔ خود معادله کشف کرد، به بحث در مورد معادلهٔ آشنای زیر می‌پردازیم

$$y'' + y = 0. \quad (۲)$$

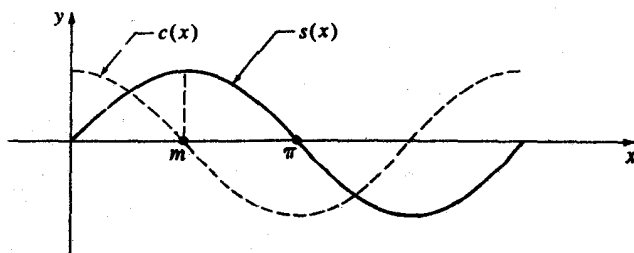
بخوبی می دانیم که $y_1(x) = \cos x$ و $y_2(x) = \sin x$ دو جواب مستقل خطی معادله (۲) هستند که کاملاً توسط شرایط اولیه $y_1(0) = 1$ ، $y_1'(0) = 0$ ، $y_2(0) = 0$ ، $y_2'(0) = 1$ تعیین می شوند و جواب عمومی معادله (۲) به صورت $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ است. معمولاً با این تفاسیر معادله (۲) کاملاً حل شده تلقی می گردد، زیرا با توابع سینوس و کسینوس از قبل آشنایی داریم، و مطالب زیادی درباره آنها می دانیم. اما می توانیم برای دانش خود درباره $\sin x$ و $\cos x$ يك جنبه تاریخی قائل شویم و به منظور تأکید بر نقطه نظرهای فعلی مان، فعلاً این آشناییها را نادیده می گیریم. هدف این است که بینیم چگونه می توان خواص آنها را از معادله (۲) و شرایط اولیه ای که در آن صدق می کنند، استخراج کرد. تنها ابزارهایی که به کار خواهیم برد، بحثهای کیفی و اصول کلی تشریح شده در بخشهای ۱۴ و ۱۵ هستند.

بنابراین، فرض می کنیم که $y = s(x)$ جوابی از معادله (۲) باشد که در شرایط اولیه $s(0) = 1$ و $s'(0) = 0$ صدق کند. اگر سعی کنیم نمودار $s(x)$ را، با فرض آنکه x از صفر افزایش می یابد، رسم کنیم، شرایط اولیه ایجاب می کنند که منحنی از مبدأ مختصات شروع شود و با شیب اولیه y' ، افزایش یابد. (شکل ۲۷). از خود معادله چنین بر می آید که $s''(x) = -s(x)$ ، لذا وقتی که منحنی در بالای محور x قرار می گیرد $s''(x)$ عددی منفی است که با صعود منحنی کاهش می یابد. از آنجا که $s''(x)$ آهنگ تغییر شیب $s'(x)$ است، هرچه منحنی بالاتر می رود، این شیب، با آهنگی فزاینده کاهش می یابد، و باید در نقطه ای مثل $x = m$ صفر شود. با ازدیاد x ، منحنی به سمت محور x پایین می آید، $s'(x)$ با يك آهنگ نزولی کاهش می یابد و منحنی محور x را در نقطه ای که آن را بنا به تعریف می توان π نامید، تلاقی می کند. از آنجا که $s''(x)$ تنها به $s(x)$ بستگی دارد، ملاحظه می کنیم که نمودار منحنی از $x = 0$ تا $x = \pi$ نسبت به خط $x = m$ متقارن است، بنابراین $\pi/2 = m$ و $s'(\pi) = -1$. بحث مشابهی نشان می دهد که قسمت بعدی منحنی، به شکل وارونه اولین کمان است و منحنی را می توان به همین ترتیب تا بینهایت ادامه داد.

برای اینکه به نتایج بیشتری نایل آییم، بهتر است در این مرحله تابع $y = c(x)$ را جوابی از (۲) فرض کنیم که به وسیله شرایط اولیه $c(0) = 1$ و $c'(0) = 0$ معین می شود. این شرایط (شکل ۲۷) چنین بیسان می دارند که نمودار $c(x)$ از نقطه (۰ و ۱) شروع می شود و با شیب اولیه صفر به طرف راست حرکت می کند. از آنجا که به کمک معادله (۲) می دانیم که $c''(x) = -c(x)$ ، بنا به همان دلایل قبلی، منحنی به پایین خم می شود و محور x را تلاقی می کند. طبعاً می توان حدس زد که ارتفاع اولین کمان $s(x)$ يك و اولین صفر $c(x)$ در $\pi/2$ باشد و الی آخر، لیکن برای تبدیل این گمانها به واقعیات از اثبات روابط زیر آغاز می کنیم

$$s'(x) = c(x) \quad \text{و} \quad c'(x) = -s(x) \quad (3)$$

برای اثبات اولین تساوی، مشاهده می کنیم که از (۲)، $y'' + y' = 0$ یا $y''' + y' = 0$ ، به دست می آید، بنابراین مشتق هر جواب (۲) نیز يك جواب است (به تمرین ۱۷-۳ مراجعه



شکل ۲۷

کنید). بنابراین $s'(x)$ و $c(x)$ هردو جوابهای (۲) هستند و با توجه به قضیه ۱۴-الف کافی است نشان دهیم که مقادیر و مشتقهای این دو تابع در $x=0$ برابر است. این مطلب مستقیماً از شرایط $s'(0)=1$ ، $c'(0)=0$ ، $s''(0)=-s(0)=0$ و $c(0)=1$ ، $s'(0)=1$ حاصل می‌شود. فرمول دوم (۳) نتیجهٔ مستقیمی از اولی است، زیرا $c'(x)=s''(x)=-s(x)$. حال از (۳) برای اثبات رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$s(x)^2 + c(x)^2 = 1 \quad (4)$$

از آنجا که مشتق طرف چپ رابطه (۴) برابر است با

$$2s(x)c(x) - 2c(x)s(x)$$

که صفر می‌باشد، ملاحظه می‌کنیم که $s(x)^2 + c(x)^2$ مقدار ثابتی است و این مقدار ثابت، برابر با یک است، چرا که $s(0)^2 + c(0)^2 = 1$. از (۴) بلافاصله نتیجه می‌گیریم که ارتفاع اولین کمان $s(x)$ برابر با یک و اولین صفر $c(x)$ برابر $\pi/2$ است. این نتیجه همچنین به ما امکان می‌دهد که نشان دهیم $s(x)$ و $c(x)$ مستقل خطی‌اند، زیرا رونسکی آنها برابر است با

$$\begin{aligned} W[s(x), c(x)] &= s(x)c'(x) - c(x)s'(x) \\ &= -s(x)^2 - c(x)^2 = -1 \end{aligned}$$

به همین طریق، می‌توان مطلب را ادامه داد و مطالب زیر را نیز استخراج کرد:

$$s(x+a) = s(x)c(a) + c(x)s(a) \quad (5)$$

$$c(x+a) = c(x)c(a) - s(x)s(a) \quad (6)$$

$$s(2x) = 2s(x)c(x) \quad (7)$$

$$c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2 \quad (8)$$

$$s(x+2\pi) = s(x) \quad (9)$$

$$c(x+2\pi) = c(x) \quad (10)$$

اثبات این روابط مشکل نیست و این کار را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۱ را ببینید).
ضمن سایر مطالب، از نتایج بالا بسادگی می‌بینیم که صفرهای مثبت $s(x)$ و $c(x)$ بترتیب عبارت‌اند از π ، 2π ، 3π ، ... و $\pi/2$ ، $\pi/2 + \pi$ ، $\pi/2 + 2\pi$ ، ...

درباره بحث بالا باید به دو نکته اساسی اشاره شود. اول آنکه، تقریباً همه ویژگیهای مهم توابع $\sin x$ و $\cos x$ را از معادله (۲) و تنها به وسیله روشهای معادلات دیفرانسیل، بدون هیچ گونه استفاده از دانش قبلی‌مان در مثلثات، استخراج کرده‌ایم. دوم آنکه، ابزار مورد استفاده ماعداً استدلالهای متکی به تحذب (شامل علامت و اندازه مشتق دوم) و خواص بنیادی معادلات خطی بیان شده در بخشهای ۱۴ و ۱۵ بود.

ناگفته نماند که، بسیاری از ویژگیهای فوق‌الذکر توابع $\sin x$ و $\cos x$ تنها مختص این توابع هستند. با این وجود، مشخصه اصلی رفتار آنها - یعنی این حقیقت که نحوه نوسانهایشان چنان است که صفرهایشان متمایزند و بطور متناوب ظاهر می‌شوند - را می‌توان بسیار فراتر از این توابع خاص تعمیم داد. نتیجه زیر در این جهت، به قضیه مجزا کننده استورم موسوم است.

قضیه الف. اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

باشند، صفرهای این توابع متمایز و یک در میان خواهند بود، بدین معنا که $y_1(x)$ دقیقاً یک بار بین دو صفر متوالی $y_2(x)$ صفر می‌شود و برعکس.

اثبات. استدلال عمدتاً متکی به این حقیقت است که (به‌لم‌های بخش ۱۵ مراجعه کنید) چون y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند، رونسکی آنها، یعنی

$$W(y_1, y_2) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

صفر نمی‌شود و بنا بر این از آنجا که این رونسکی پیوسته است، علامتش باید ثابت باشد. اولاً، به سبب دیده می‌شود که y_1 و y_2 نمی‌توانند صفر مشترکی داشته باشند، چرا که در این صورت، رونسکی در آن نقطه صفر خواهد شد، که این غیرممکن است. حال فرض می‌کنیم که x_1 و x_2 دو صفر متوالی y_2 باشند و نشان می‌دهیم که y_1 بین این دو مقدار صفر می‌شود. واضح است که رونسکی در x_1 و x_2 به صورت $y_1(x)y_2'(x)$ درمی‌آید، لذا $y_1(x)$ و $y_2'(x)$ در هر یک از این نقاط مخالف صفر اند. علاوه بر این، $y_2'(x_1)$ و $y_2'(x_2)$ باید

۱. ژاک شارل فرانسوا استورم Jacques Charles Francois Sturm (۱۸۵۵-۱۸۰۳) یک ریاضیدان سوییسی بود که بیشتر عمرش را در پاریس به سر برد. وی مدتی معلم خصوصی خانواده دو بروی بود و پس از احراز سمتهای گوناگون دیگر، سرانجام کرسی مکانیک دانشگاه سوربون را پس از پواسون به دست آورد. کار اساسی او همان چیزی بود که امروزه به نام نظریه معادلات دیفرانسیل استورم لیوویل موسوم است که، هم در ریاضیات محض و هم در ریاضیات کاربردی، اهمیت روزافزونی داشته است.

مختلف علامه باشند، زیرا اگر y در x_1 صعودی است، باید در x_2 نزولی باشد، و برعکس. از آنجا که رونسکی علامت ثابتی دارد، $y_1(x_1)$ و $y_1(x_2)$ نیز باید مختلف علامه باشند، و بنابراین، با توجه به پیوستگی، $y_1(x)$ باید در نقطه‌ای بین x_1 و x_2 صفر شود. توجه می‌کنیم که y_1 نمی‌تواند بیش از یکبار بین x_1 و x_2 صفر گردد، زیرا اگر چنین شود، بحث مشابهی نشان می‌دهد که y_2 باید بین این صفرهای y_1 نیز صفر شود که با فرض اولیه راجع به اینکه x_1 و x_2 دو صفر متوالی y_2 هستند، تناقض دارد.

استدلالهای مذکور که بر پایهٔ تحذب برای معادلهٔ $y'' + y = 0$ داده شده است روشن می‌کند که برای بحث در نوسان جوابها مناسب است که با معادلاتی کار کنیم که در آنها جملهٔ مشتق اول موجود نباشد. حال نشان می‌دهیم که هر معادلهٔ به صورت

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (11)$$

را می‌توان با یک تغییر ساده در متغیر وابسته، به صورت زیر نوشت:

$$u'' + q(x)u = 0 \quad (12)$$

معمولا (۱۱) را شکل استاندارد و (۱۲) را شکل نرمال معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم همگن می‌نامند. برای اینکه (۱۱) را به شکل نرمال بنویسیم، فرض می‌کنیم که $y(x) = u(x)v(x)$ پس $y' = uv' + u'v$ و $y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$. با جانشین کردن این عبارات در (۱۱)، چنین نتیجه می‌شود:

$$vu'' + (2v' + Pv)u' + (v'' + P'v + Qv)u = 0 \quad (13)$$

از صفر قراردادن ضریب u' و حل معادلهٔ حاصله درمی‌یابیم که به‌ازای

$$v = e^{-\int P(x) dx} \quad (14)$$

معادلهٔ (۱۳) به شکل نرمال (۱۲) تبدیل می‌شود، که در آن

$$q(x) = Q(x) - \frac{1}{P}P'(x) \quad (15)$$

از آنجا که $v(x)$ به صورت داده شده در (۱۴) هرگز صفر نمی‌شود، تبدیل معادلهٔ (۱۱) به (۱۲)، به صورت فوق هیچ گونه اثری بر صفرهای جوابها ندارد و لذا تأثیری بر پدیده‌های مربوط به نوسان، که در حال حاضر مورد توجه ماست، نخواهد داشت. حال نشان خواهیم داد که اگر تابع $q(x)$ در رابطهٔ (۱۲) منفی باشد، جوابهای این معادله به هیچ وجه نوسان نخواهند کرد.

قضیهٔ ب. اگر $q(x) < 0$ و $u(x)$ یک جواب غیر صفر معادلهٔ $u'' + q(x)u = 0$ باشد، آنگاه $u(x)$ حداکثر دارای یک صفر است.

اثبات. فرض کنید x_0 یک صفر $u(x)$ باشد، پس $u(x_0) = 0$. از آنجا که $u(x)$ غیر

صفر است (یعنی، متحد با صفر نیست)، قضیه ۱۴-الف نشان می‌دهد که $u'(x_0) \neq 0$ برای مشخص شدن بحث، فرض می‌کنیم که $u'(x_0) > 0$ و در این صورت $u(x)$ در فاصله‌ای واقع در طرف راست x_0 مثبت است. از آنجا که $q(x) < 0$ ، تابع $u''(x) = -q(x)u(x)$ در همین فاصله مثبت است. این بدان معنی است که شیب $u'(x)$ تابعی صعودی است، لذا $u(x)$ نمی‌تواند در طرف راست x_0 دارای صفری باشد و اثبات مشابهی نشان می‌دهد که این تابع در طرف چپ x_0 نیز صفری نخواهد داشت. برای حالت $u'(x_0) < 0$ نیز می‌توان دلیل مشابهی ارائه داد. لذا $u(x)$ یا هرگز صفر نیست. یا تنها یک صفر دارد و اثبات قضیه در اینجا تمام است.

از آنجا که به بررسی نوسان جوابها علاقمندیم، این نتیجه ما را به مطالعه معادله (۱۲) در حالت خاصی که $q(x)$ تابع مثبتی باشد، سوق می‌دهد. ولی حتی در این حالت ویژه نیز نمی‌توان ادعا کرد که جوابها لزوماً نوسان خواهند کرد. برای آنکه به جریان پی ببریم، فرض می‌کنیم که $u(x)$ جواب غیر صفر معادله (۱۲) با $q(x) > 0$ باشد. هرگاه قسمتی از نمودار را که بالای محور x واقع شده است در نظر بگیریم (شکل ۲۸)، چون $u''(x) = -q(x)u(x)$ منفی است $u'(x)$ ، شیب تابع، نزولی خواهد بود. چنانچه این شیب منفی شود، روشن است که جایی در طرف راست، محور x را قطع خواهد کرد و صفری برای $u(x)$ به دست می‌آید. می‌دانیم که این حالت وقتی پیش می‌آید که $q(x)$ ثابت باشد. حالت دیگر این است که، گرچه $u'(x)$ نزول می‌کند، لیکن هرگز صفر نمی‌شود و همانطوری که در قسمت بالایی شکل ۲۸ ملاحظه می‌کنید، منحنی به بالا رفتن خود ادامه می‌دهد. از این ملاحظات بخوبی واضح می‌شود که وقتی x افزایش می‌یابد، اگر $q(x)$ خیلی سریع کاهش نیابد، $u(x)$ دارای صفرهایی خواهد بود. این مطلب ما را به قضیه بعدی هدایت می‌کند.

قضیه ج. فرض می‌کنیم که $u(x)$ یک جواب غیر صفر معادله $u'' + q(x)u = 0$ باشد و تابع $q(x)$ برای هر $x > 0$ ، مثبت باشد. اگر داشته باشیم

$$\int_1^{\infty} q(x) dx = \infty \quad (16)$$

آنگاه $u(x)$ صفرهایی بیشمار در قسمت مثبت محور x خواهد داشت.

اثبات. فرض می‌کنیم که خلاف این مطلب درست باشد، یعنی فرض می‌کنیم که تعداد صفرهایی $u(x)$ در فاصله $0 < x < \infty$ حداکثر متناهی باشد، به طوری که نقطه‌ای مانند $x_0 > 1$ وجود داشته باشد با این ویژگی که برای تمام مقادیر $x \geq x_0$ ، داشته باشیم $u(x) \neq 0$. بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم که $u(x)$ ، برای هر $x \geq x_0$ ، مثبت است؛ زیرا در صورت لزوم می‌توان $u(x)$ را با قرینه آن، $-u(x)$ ، تعویض کرد. هدف آن است که بانشان دادن اینکه $u'(x)$ جایی در طرف راست x_0 منفی است فرض فوق را به تناقض منجر کنیم، زیرا با توجه به مطالب بالا در چنین حالتی $u(x)$ باید در طرف

راست x_0 نیز صفر شود. چنانچه برای $x > x_0$ ، بتوسیم

$$v(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)},$$

خواهیم داشت

$$v'(x) = q(x) + v(x)^2$$

حال اگر از طرفین این رابطه از x_0 تا x ، با توجه به $x > x_0$ ، انتگرال بگیریم، نتیجه چنین می شود

$$v(x) - v(x_0) = \int_{x_0}^x q(x) dx + \int_{x_0}^x v(x)^2 dx$$

حال، با استفاده از (۱۶) نتیجه می گیریم که برای x هایی به اندازه کافی بزرگ، $v(x)$ مثبت است. این امر نشان می دهد که $u(x)$ و $u'(x)$ برای x های بقدر کافی بزرگ، مختلف-العلامه اند، لذا $u'(x)$ منفی است و اثبات تمام است.

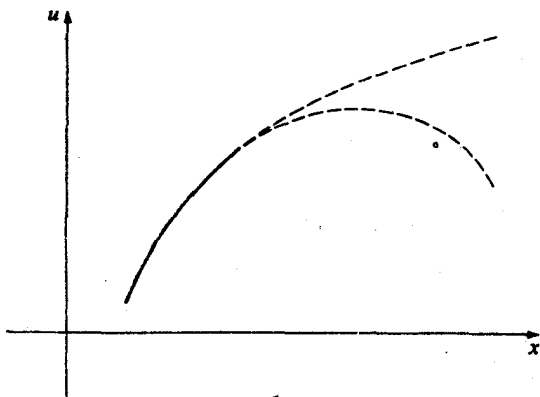
تمرین

- ۱- فرمولهای (۵) تا (۱۵) را از طریق استدلالهایی هماهنگ با بحث اخیر اثبات کنید.
- ۲- نشان دهید که صفرهای توابع $a \sin x + b \cos x$ و $c \sin x + d \cos x$ ، وقتی که $ad - bc \neq 0$ ، متمایزند و يك درمیان قرار می گیرند.

۳- شکل نرمال معادلهٔ «بسل»

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0$$

را بیابید و از آن برای اثبات اینکه هر جواب غیر صفر این معادله صفرهای مثبت بیشماري دارد، استفاده کنید.



شکل ۲۸

۴- فرضهای قضیه ج در معادله $y'' + (k/x^2)y = 0$ برقرار نیستند، لیکن نتیجه آن، بسته به مقدار عدد ثابت و مثبت k ، گاهی درست و گاهی نادرست است. نشان دهید که تعداد صفرهای مثبت هر جواب غیر صفر این معادله برای $k > 1/4$ نامتناهی و برای $k \leq 1/4$ متناهی است.

۲۳. قضیه مقایسه استورم

در این بخش مطالعه خود را درباره رفتار نوسانی جوابهای غیر صفر معادله دیفرانسیل

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

ادامه می‌دهیم. در این معادله $q(x)$ تابعی مثبت است. مطلب را با قضیه‌ای که امکان نوسانهای بیشمار را در فاصله‌های بسته متغی می‌سازد، شروع می‌کنیم.

قضیه الف. فرض کنید که $y(x)$ یک جواب غیر صفر معادله (۱) در فاصله بسته $[a, b]$ باشد. آنگاه تعداد صفرهای $y(x)$ در این فاصله، حداکثر متناهی است.

اثبات. خلاف این امر را فرض می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم که تعداد صفرهای $y(x)$ در فاصله $[a, b]$ نامتناهی باشد. از این فرض نتیجه می‌شود که در فاصله $[a, b]$ نقطه‌ای مانند x_0 و یک دنباله از صفرهای $x_n \neq x_0$ وجود دارد به طوری که $x_n \rightarrow x_0$.^۱ از آنجا که در نقطه x_0 تابع $y(x)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، می‌توان نوشت:

$$y(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} y(x_n) = 0$$

و

$$y'(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

با توجه به قضیه ۱۴-الف، این مطالب دلالت بر آن دارند که $y(x)$ یک جواب صفر معادله (۱) است و این تناقض، برهان را کامل می‌کند.

حال به خاطر می‌آوریم که قضیه مجزاکننده استورم می‌گوید که صفرهای هر زوج جواب (غیر صفر) معادله (۱)، بسته به اینکه این جوابها وابسته خطی یا مستقل خطی باشند، منطبق بر همدیگر یا متناوبند، بنابراین، تمامی جوابهای (۱) اساساً با یک سرعت نوسان می‌کنند، بدین مفهوم که در یک فاصله داده شده اختلاف تعداد صفرهای هر جواب با تعداد صفرهای هر جواب دیگر بیش از یک نیست. از طرف دیگر، واضح است که جوابهای معادله

$$y'' + 4y = 0 \quad (2)$$

۱. در این استنتاج، از قضیه بولتسانو- وایرشتراس در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته که بیانگر یکی از ویژگیهای توپولوژیکی اساسی دستگاه اعداد حقیقی است، استفاده می‌کنیم.

سریعتر از جوابهای معادله

$$y'' + y = 0 \quad (۳)$$

نوسان می‌کنند، یعنی صفرهای بیشتری دارند، چرا که فاصلهٔ هر دو صفر از جوابی مانند $y = \sin 2x$ از معادلهٔ (۲) تنها نصف فاصلهٔ هر دو صفر از جوابی مانند $y = \sin x$ از معادلهٔ (۳) است. نتیجهٔ زیر که به قضیهٔ مقایسهٔ استودم موسوم است، نشان می‌دهد که این رفتاری نوعی است، بدان معنا که نوسانهای جوابهای (۱)، هنگامی که $q(x)$ افزایش می‌یابد، سریعتر می‌شوند.

قضیهٔ ب. فرض می‌کنیم که $y(x)$ و $z(x)$ دو جواب غیر صفر معادلات

$$y'' + q(x)y = 0$$

و

$$z'' + r(x)z = 0$$

باشند، توابع $q(x)$ و $r(x)$ مثبت باشند و داشته باشیم $q(x) > r(x)$. آنگاه $y(x)$ بین هر دو صفر متوالی $z(x)$ لااقل یکبار صفر می‌شود.

اثبات. فرض می‌کنیم که x_1 و x_2 دو صفر متوالی $z(x)$ باشند، یعنی $z(x_1) = z(x_2) = 0$ و $z(x)$ در فاصلهٔ باز (x_1, x_2) صفر نشود. همچنین فرض می‌کنیم که $y(x)$ در فاصلهٔ (x_1, x_2) صفر نمی‌شود و قضیه را با رسیدن به یک تناقض، به اثبات می‌رسانیم. واضح است که بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که هر دو تابع $y(x)$ و $z(x)$ در فاصلهٔ (x_1, x_2) مثبت هستند، زیرا اگر لازم باشد، می‌توانیم منفی تابع را به جای آن بگذاریم. اگر با نوشتن رونسکی

$$W(y, z) = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$$

به صورت $W(x)$ ، تأکید کنیم که W تابعی از x است، در فاصلهٔ (x_1, x_2) خواهیم داشت:

$$\frac{dW(x)}{dx} = yz'' - zy''$$

$$= y(-rz) - z(-qy)$$

$$= (q-r)yz > 0$$

حال از طرفین این نابرابری از x_1 تا x_2 انتگرال می‌گیریم، می‌بینیم که

$$W(x_2) > W(x_1) \quad \text{یا} \quad W(x_2) - W(x_1) > 0$$

ولی رونسکی در x_1 و x_2 به $y(x)z'(x)$ تبدیل می‌شود، لذا

$$W(x_2) \geq 0 \quad \text{و} \quad W(x_1) \leq 0$$

و این همان تناقض مورد نظر است.

از این قضیه چنین نتیجه می شود که هر گاه در معادله (۱)، داشته باشیم $q(x) > k^2 > 0$ ، آنگاه هر جواب باید بین هر دو صفر متوالی $y(x) = \sin k(x - x_0)$ که جوابی از معادله $y'' + k^2 y = 0$ است، صفر گردد، و بنابراین باید در هر فاصله به طول π/k صفر شود. به عنوان مثال، چنانچه معادله بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0$$

را در نظر بگیریم و شکل نرمال آن، یعنی

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 2p^2}{4x^2}\right) u = 0$$

را با معادله $u'' + u = 0$ مقایسه کنیم مستقیماً به قضیه زیر می رسم:

قضیه ج. فرض می کنیم که $y_p(x)$ يك جواب غير صفر معادله بسل در قسمت مثبت محور x باشد. اگر $0 \leq p < 1/2$ ، آنگاه هر فاصله ای به طول π حداقل يك صفر تابع $y_p(x)$ را در بر می گیرد؛ اگر $p = 1/2$ ، آنگاه فاصله بین صفرهای متوالی تابع $y_p(x)$ دقیقاً برابر π است در صورتی که $p > 1/2$ ، آنگاه هر فاصله ای به طول π شامل حداکثر يك صفر تابع $y_p(x)$ است.

تقرین

۱- فرض کنید x_1 و x_2 صفرهای مثبت و متوالی يك جواب غير صفر $y_p(x)$ از معادله بسل باشند.

الف) اگر $0 \leq p < 1/2$ ، نشان دهید که $x_2 - x_1$ کمتر از π است و هنگامی که $x_1 \rightarrow \infty$ ، این تفاضل به π میل می کند.

ب) اگر $p > 1/2$ ، نشان دهید که $x_2 - x_1$ بزرگتر از π است و هنگامی که $x_1 \rightarrow \infty$ این تفاضل به π میل می کند.

۲- چنانچه $y(x)$ يك جواب غير صفر معادله $y'' + q(x)y = 0$ باشد، نشان دهید که هر گاه برای يك مقدار $k > 1/4$ نامساوی $q(x) > k/x^2$ برقرار باشد، آنگاه $y(x)$ دارای بینهایت صفر مثبت است و هر گاه $q(x) < 1/4x^2$ ، آنگاه تعداد صفرهای مثبت $y(x)$ متناهی است.

۳- هر جواب غير صفر معادله $y'' + (\sin^2 x + 1)y = 0$ دارای بینهایت صفر مثبت است. قضیه ای بیان و اثبات کنید که این حکم را به عنوان حالت خاص دربرداشته باشد.

۲.۴. مقادیر ویژه، توابع ویژه و تار مرتعش

بررسی نوسانها، راه را برای بررسی اجمالی ایده‌هایی که از نیمهٔ قرن هیجدهم تا به امروز در آنالیز اهمیت شایانی داشته‌اند، هموار می‌سازد.

مطلب را با جستجوی جوابی غیرصفر، همچون $y(x)$ ، برای معادلهٔ

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (۱)$$

که در شرایط مرزی

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (۲)$$

صدق کند، آغاز می‌کنیم. پارامتر λ در معادلهٔ (۱) می‌تواند هر مقدار حقیقی را اختیار کند، و قسمتی از کار ما یافتن مقادیری از λ است که مسئله به ازای آنها قابل حل باشد. در مطالعات قبلی خود تنها به بررسی مسائلی مقدار اولیه پرداختیم، و ضمن آن به جستجوی جوابی برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم برآمدیم که دو شرط را در یک مقدار از متغیر مستقل ارضا کند. در اینجا با وضع کاملاً متفاوتی مواجه هستیم، چرا که می‌خواهیم در دو مقدار متمایز x ، یک شرط ارضا شود. مسائلی از این نوع به مسائلی مقدار مرزی موسوم‌اند و به‌طور کلی - هم از لحاظ نظری و هم از لحاظ عملی - خیلی مشکندر و گسترده‌تر از مسائل مقدار اولیه هستند.

با این حال، در مسئلهٔ مطرح شده توسط (۱) و (۲) مشکلی وجود ندارد. چنانچه λ منفی باشد، قضیهٔ ۲.۲-ب می‌گوید که تنها جواب صفر (۱) در شرایط (۲) صدق می‌کند و اگر $\lambda = 0$ ، جواب عمومی (۱) عبارت از $y(x) = c_1 x + c_2$ خواهد بود و به‌همان نتیجه خواهیم رسید. بنابراین، مسئله به‌حالتی که در آن λ مثبت است، محدود می‌شود، در این حالت جواب عمومی (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x$$

و چون $y(0) = 0$ باید برابر با صفر باشد، این جواب به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (۳)$$

بنابراین، اگر مسئله جوابی داشته باشد، آن جواب باید به‌صورت (۳) باشد. برای اینکه شرط مرزی دوم، یعنی $y(\pi) = 0$ ارضا شود، واضح است که $\sqrt{\lambda} \pi$ باید به ازای یک عدد صحیح و مثبت n ، برابر با $n\pi$ گردد، بنابراین $\lambda = n^2$. به عبارت دیگر، λ باید برابر با یکی از اعداد ۱، ۴، ۹، ... باشد. این مقادیر را مقادیر ویژهٔ مسئله و جوابهای مربوط به آنها، یعنی

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots \quad (۴)$$

را توابع ویژه می‌نامند. واضح است که مقادیر ویژه به وسیلهٔ مسئله، به‌طور منحصر بفرد، مشخص می‌شوند، لیکن برای توابع ویژه این طور نیست؛ زیرا کلیهٔ مضارب ثابت و غیر صفر (۴) مانند $a_1 \sin x$ ، $a_2 \sin 2x$ ، $a_3 \sin 3x$ ، ... نیز توابع ویژه هستند. به‌دو

حقیقت توجه می‌کنیم: مقادیر ویژه دنباله‌ای صعودی از اعداد مثبت تشکیل می‌دهند که به بینهایت میل می‌کند و تابع ویژه n ام، یعنی $\sin nx$ ، در نقاط انتهایی فاصله $[0, \pi]$ صفر می‌شود و در درون این فاصله دقیقاً دارای $(n-1)$ صفر است.

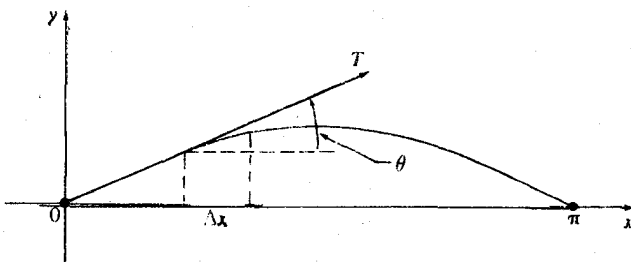
حال یکی از مسائل کلاسیک فیزیکی مسئله تار مرتعش را بررسی می‌کنیم. هدف این است که بفهمیم مقادیر ویژه و توابع ویژه چگونه ایجاد می‌شوند. فرض می‌کنیم که یک تار انعطاف‌پذیر روی محور x محکم کشیده شده است و در دو نقطه، که برای سهولت آنها را در $x=0$ و $x=\pi$ ، اختیار می‌کنیم، بسته شده است. آنگاه تار را در صفحه xy می‌کشیم (شکل ۲۹) در نتیجه به شکل منحنی $y=f(x)$ درمی‌آید و سپس آن را رها می‌کنیم. برای به دست آوردن معادله حرکت، مسئله را با پذیرفتن چند فرض ساده می‌کنیم، اول آنکه ارتعاش حاصل کاملاً عرضی است. این بدان معناست که مختص x هر یک از نقاط تار ثابت است، بنابراین مختص y آن تنها به x و زمان t بستگی دارد. در نتیجه، جابجایی تار از وضعیت تعادلش به وسیله تابعی مانند $y=y(x, t)$ داده می‌شود، و مشتقهای زمانی آن، یعنی $\partial y / \partial t$ و $\partial^2 y / \partial t^2$ نمایشگر سرعت و شتاب تار هستند. حرکت قطعه کوچکی از تار را که طول آن در وضعیت تعادل Δx است در نظر می‌گیریم. چنانچه چگالی خطی جرم تار $m=m(x)$ باشد، جرم قطعه مزبور $m \Delta x$ است و طبق قانون دوم حرکت نیوتن نیروی عرضی وارد بر تار عبارت است از

$$F = m \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5)$$

از آنجا که تار قابل انعطاف است، کشش $T=T(x)$ در هر نقطه در امتداد مماس (شکل ۲۹) است و $T \sin \theta$ مؤلفه y آن است. حال فرض می‌کنیم که حرکت تار صرفاً در اثر کشش آن است. در نتیجه، F برابر با اختلاف بین مقادیر $T \sin \theta$ در دو انتهای این قطعه، یعنی برابر با $\Delta(T \sin \theta)$ می‌باشد، لذا معادله (۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\Delta(T \sin \theta) = m \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (6)$$

چنانچه ارتعاشات نسبتاً کوچک باشند، به طوری که θ کوچک باشد و $\sin \theta$ تقریباً برابر با $\tan \theta = \partial y / \partial x$ شود، (۶) را می‌توان بدین صورت نوشت:



شکل ۲۹

$$\frac{\Delta(T\partial y/\partial x)}{\Delta x} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

و وقتی Δx به صفر میل کند، چنین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۷)$$

فعلا می‌خواهیم در این معادله، تنها به حالتی که هر دو مقدار m و T ثابت‌اند توجه کنیم، بنا بر این

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (۸)$$

که در آن $a = \sqrt{T/m}$. به دلایلی که در تمرینها خواهند آمد، معادلهٔ (۸) را معادلهٔ یک بعدی موج می‌نامند. در جستجوی جوابی به صورت $y(x, t)$ هستیم که در شرایط مرزی

$$y(0, t) = 0 \quad (۹)$$

و

$$y(\pi, t) = 0 \quad (۱۰)$$

و شرایط اولیهٔ

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (۱۱)$$

و

$$y(x, 0) = f(x) \quad (۱۲)$$

صدق کند. شرایط (۹) و (۱۰) فرض ثابت بودن دایمی دو انتهای تار در نقاط $x=0$ و $x=\pi$ را بیان می‌کنند، و شرایط (۱۱) و (۱۲) حاکی از آنند که تار هنگام رها شدن بی حرکت و به شکل $y=f(x)$ بوده است. اما، این نکته را به صراحت تذکر می‌دهیم، که استنتاج روابط (۷) و (۸) ربطی به هیچ یک از این شرایط ندارد.

برای معادلهٔ (۸) راه حلی رسمی به روش جداسازی متغیرها ارائه می‌کنیم. این کار عبارت است از جستجوی جوابهایی به شکل

$$y(x, t) = u(x)v(t) \quad (۱۳)$$

(یعنی قابل تجزیه به صورت حاصلضرب توابعی باشند که هریک تنها به یکی از متغیرهای مستقل وابسته باشد). وقتی (۱۳) در معادلهٔ (۸) گذاشته شود، خواهیم داشت

$$a^2 u''(x)v(t) = u(x)v''(t)$$

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{v''(t)}{v(t)} \quad (۱۴)$$

چون طرف چپ این معادله تابعی از x و طرف راست آن تابعی از t است، معادله (۱۴)، تنها وقتی می‌تواند برقرار باشد که هردو طرف آن ثابت باشند. چنانچه این ثابت را با $-\lambda$ نشان دهیم، (۱۴) به دو معادله دیفرانسیل معمولی، برای $u(x)$ و $v(t)$ ، تجزیه می‌شود:

$$u'' + \lambda u = 0 \quad (۱۵)$$

و

$$v'' + \lambda a^2 v = 0 \quad (۱۶)$$

برای ارضا کردن (۹) و (۱۰) می‌توان (۱۵) را با شرایط مرزی $u(0) = u(\pi) = 0$ حل کرد. قبلاً دیده‌ایم که این مسئله جواب غیرصفر دارد، اگر و تنها اگر به ازای عدد صحیح و مثبتی چون n ، داشته باشیم $\lambda = n^2$ و جوابهای مربوط به این اعداد، یعنی توابع ویژه، عبارت‌اند از:

$$u_n(x) = \sin nx$$

همین‌طور، برای این λ ها (مقادیر ویژه) جواب عمومی (۱۶) به‌صورت

$$v(t) = c_1 \sin nat + c_2 \cos nat$$

است و اگر برای ارضای (۱۱) شرط $v'(0) = 0$ را اعمال کنیم، آنگاه $c_1 = 0$ و جوابها عبارتند از:

$$v_n(t) = \cos nat$$

بنابراین، حاصلضربهای مربوطه (۱۳) برابرند با

$$y_n(x, t) = \sin nx \cos nat$$

هر يك از این توابع، به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، در معادله (۸) و شرایط (۹)، (۱۰) و (۱۱) صدق می‌کند و به سادگی می‌توان دید که همین مطلب در مورد هر مجموع متناهی از مضارب ثابت y_n ها مانند

$$a_1 \sin x \cos at + a_2 \sin 2x \cos 2at + \dots + a_n \sin nx \cos nat$$

نیز صحت دارد. چنانچه به‌طور صوری جلو برویم—یعنی همه‌سؤالات مربوط به همگرایی، مشتق‌پذیری جمله به‌جمله، و نظایر اینها را از نظر دور بداریم—هر سری نامتناهی به‌صورت

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \cos nat = a_1 \sin x \cos at + a_2 \sin 2x \cos 2at + \dots + a_n \sin nx \cos nat + \dots \quad (۱۷)$$

نیز جوابی است که در (۹)، (۱۰) و (۱۱) صدق می‌کند. این موضوع ما را به شرط پایانی (۱۲) می‌رساند، یعنی اینکه، برای $t = 0$ جواب (۱۷) باید شکل

اولیه تار را به دست دهد:

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx + \dots \quad (18)$$

هنگامی که در سال ۱۷۵۵، این روابط توسط دانیل برنولی ارائه شد، برای بسیاری از ریاضیدانان رابطه (۱۸) بجز در مواردی که تابع f از نوع بسیار خاص باشد، غیرممکن به نظر می آمد. در طول قرن بعد معلوم شد که این فکر نادرست بوده است و در واقع عباراتی به شکل (۱۸) برای دسته های بسیار وسیعی از توابع $f(x)$ که در 0 و π صفر می شوند، معتبر است. به فرض اینکه این موضوع درست باشد، هنوز مسئله یافتن ضرایب a_n ، وقتی تابع $f(x)$ داده شده باشد، باقی می ماند. این مسئله در سال ۱۷۷۷ توسط اوایلر حل شد، و حل او بود که موضوع گسترده سری فوریه را پیش کشید. این ضرایب را به روشهایی که با الگوی وسیع تری از ایده ها مناسب است، خواهیم یافت.

توابع ویژه $u_m(x)$ و $u_n(x)$ ، یعنی $\sin mx$ و $\sin nx$ ، در معادلات

$$u_m'' = -m^2 u_m \text{ و } u_n'' = -n^2 u_n$$

صدق می کنند. چنانچه معادله اول را در u_n و معادله دوم را در u_m ضرب کنیم و معادلات حاصل را از همدیگر کم کنیم، خواهیم داشت:

$$u_n u_m'' - u_m u_n'' = (n^2 - m^2) u_n u_m$$

و یا

$$(u_n u_m' - u_m u_n')' = (n^2 - m^2) u_n u_m \quad (19)$$

حال از طرفین (۱۹) از 0 تا π انتگرال می گیریم، و با استفاده از اینکه

$$u_n(x) = \sin nx \text{ و } u_m(x) = \sin mx$$

هر دو در 0 و π صفر می شوند، چنین به دست می آوریم

$$(n^2 - m^2) \int_0^\pi u_m(x) u_n(x) dx = \left[u_n(x) u_m'(x) - u_m(x) u_n'(x) \right]_0^\pi = 0$$

بنابراین

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = 0 \quad \text{وقتی که } m \neq n \quad (20)$$

این نتیجه ما را به این فکر می اندازد که طرفین (۱۸) را در $\sin nx$ ضرب کنیم و جمله به جمله از صفر تا π انتگرال بگیریم. هنگامی که این عملیات انجام گردد، همه جملات (۲۰) صفر خواهند شد و تنها چیزی که خواهد ماند عبارت است از

$$\int_0^\pi f(x) \sin nx dx = a_n \int_0^\pi \sin^2 nx dx$$

و چون

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \frac{\pi}{2}$$

می توان نوشت

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (21)$$

این a_n ها به ضرایب فوریه $f(x)$ موسوم اند و رابطه (۲۱)، فرمول اویلر خوانده می شود. با این ضرایب، (۱۸) را سری سینوسی فوریه $f(x)$ یا بسط تابع ویژه ای $f(x)$ بر حسب توابع ویژه $\sin nx$ می نامند، و (۱۷) جواب برنولی معادله موج نامیده می شود.

واضح است که جواب بالا برای معادله موج، به علت آنکه با روشهای قابل تردید به دست آمده است و سؤالاتی بی پاسخ مانده اند، صورت معما به خود گرفته است، و در واقع، از نظر بررسی دقیق، تنها ارزش پیشنهادی دارد. لیکن حتی همین مقدار نیز با ارزش است، زیرا بعضی از سؤالات مطرح شده - بخصوص سؤالات مربوط به معنا و اعتبار (۱۸) - بسیار مفید هستند. مثلاً، اگر a_n ها به کمک (۲۱) محاسبه شوند و برای تشکیل سری طرف راست (۱۸) به کار روند، تحت چه شرایطی این سری همگرا خواهد شد؟ و اگر در نقطه ای مانند x همگرا شود، آیا مجموعش الزاماً به $f(x)$ میل خواهد کرد؟ این سؤالات و جوابهایشان زمینه اصلی نظریه سری فوریه^۱ را تشکیل می دهند.

در اینجا خلاصه ای از يك جواب سؤالات بالا را بیان می کنیم و بررسی مفصل این شاخه غنی از آنالیز را به جلد دیگری از این سری کتابها موکول می کنیم.

تابع $f(x)$ مورد نظر در فاصله $[0, \pi]$ تعریف می شود و در نقاط انتهایی این فاصله صفر می گردد. فرض می کنیم که $f(x)$ در سراسر این فاصله پیوسته باشد و مشتق آن نیز، بجز احياناً در تعدادی متناهی از ناپیوستگی های جبهشی که در آنها حد چپ و راست مشتق موجود و متناهی ولی متفاوت اند، پیوسته باشد. به زبان هندسی، نمودار چنین تابعی، يك منحنی پیوسته است با این خاصیت که جهت مماس، ضمن حرکت در امتداد منحنی، به طور پیوسته تغییر

۱. ژوزف فوریه Joseph Fourier (۱۷۶۸-۱۸۳۰) دانشمند برجسته فیزیک ریاضی، دوست ناپلئون بود و ولینمعت خود را در سال ۱۷۹۸ تا مصر همراهی کرد. در بازگشت، حاکم بخش ایزر در جنوب شرقی فرانسه گردید و در این سمت، اولین جاده واقعی بین گرنوبل و تورینو را ساخت. وی همچنین جوانی به نام شامپولیون را که بعدها طریقه خواندن سنگنبشته هیروگلیفی «روزتا» را کشف کرد، مساعدت کرد. او در خلال این سالها روی نظریه رسانایی گرما کار کرد و در سال ۱۸۲۲ مقاله مشهورش را تحت عنوان نظریه تحلیلی گرما (Théorie Analytique de la Chaleur) منتشر ساخت. وی در این مقاله از سریهائی که امروزه به نام او خوانده می شود، استفاده مبسوطی کرد. با این حال، وی سهمی در ایجاد نظریه ریاضی این سریها نداشت. این سریها خیلی پیشتر، توسط، اویلر، دانیل برنولی، لاگرانژ و دیگران شناخته شده بودند. فوریه معتقد به این عقیده عجیب بود که گرمای کویر، برای يك زندگی سالم، محیط زیست ایده آلی است و از این رو خود را مانند يك کالبد مومیایی شده می پیچید و در اتاقهای فوق العاده گرم زندگی می کرد.

می‌کند، بجز احتمالاً در تعدادی متناهی از «گوشه‌ها» که جهت آن به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند. تحت این شرایط بسط (۱۸) معتبر است؛ بدین معنا که، اگر a_n ها را به کمک (۲۱) تعریف کنیم، آنگاه سری طرف راست در هر نقطه، به مقدار تابع در همان نقطه، همگرا می‌شود. این بیان صورت خاصی از قضیه کلی تری است که بعضی مواقع قضیه بسط فوری نامیده می‌شود. لزوم ساختن يك نظریه دقیق از اینجا معلوم می‌شود که اگر $f(x)$ صرفاً پیوسته فرض گردد و چیزی راجع به مشتق آن گفته نشود، می‌دانیم که احتمال دارد سری طرف راست (۱۸) در بعضی نقاط واگرا شود.

جهت دیگر بررسی، مطالعه امکان بسط‌هایی بر حسب توابع ویژه، همانند بسط (۱۸)، برای سایر مسائل مقادیر مرزی است. اگر موضوع اعتبار چنین بسط‌هایی را کنار بگذاریم، مسئله اصلی این می‌شود که در حالات دیگر نشان دهیم که به اندازه کافی مواد اولیه مناسب در دسترس داریم؛ به عبارت دیگر، يك دنباله از مقادیر ویژه به همراه توابع ویژه مربوطه که در شرایطی نظیر (۲۵) صدق کنند، موجود است.

به عنوان مثال، تار مرتعشی را که در بالا مطالعه کردیم، با این اختلاف مهم و اساسی که تار غیر همگن است، در نظر می‌گیریم. در این صورت چگالی آن $m = m(x)$ ممکن است از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کند. در این وضعیت، (۸) به صورت رابطه زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m(x)}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (22)$$

چنانچه مجدداً دنبال جوابی به شکل (۱۳) بگردیم، (۲۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{u''(x)}{m(x)u(x)} = \frac{1}{T} \frac{v''(t)}{v(t)}$$

و همچون گذشته، به مسئله مقادیر مرزی زیر می‌رسیم:

$$u'' + \lambda m(x)u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0 \quad (23)$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه در این حالت کدام‌اند؟ ناگفته نپیداست که بدون اطلاع دقیق از مشخصات تابع چگالی $m(x)$ نمی‌توانیم جواب دقیقی عرضه کنیم. لیکن لااقل می‌توانیم نشان دهیم که این مقادیر ویژه و توابع ویژه وجود دارند. جزئیات این بحث در پیوست الف آمده است.

تکمیل

۱- در هر يك از حالات زیر λ_n ، مقادیر ویژه، و $y_n(x)$ ، توابع ویژه، را برای معادله $y'' + \lambda y = 0$ بیابید.

$$y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0 \quad (\text{ب})$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y(0) = 0, y(L) = 0 \quad L > 0 \quad \text{وقتی} \quad (\text{د})$$

$$y(-L) = 0, y(L) = 0 \quad L > 0 \quad \text{وقتی} \quad (\text{ه})$$

$$y(a) = 0, y(b) = 0 \quad a < b \quad \text{وقتی} \quad (\text{و})$$

دو مسئله زیر را، بدون توجه به موضوعاتی از قبیل مشتق پذیری توابع و همگرایی سریها، حل کنید.

۲- اگر $y = F(x)$ يك تابع دلخواه و a عدد مثبتی باشد. آنگاه $y = F(x+at)$ نمایشگر موجی، به شکل ثابت است که در امتداد محور x با سرعت a به طرف چپ حرکت می کند (شکل ۳۰). همین طور، چنانچه $y = G(x)$ تابع دلخواه دیگری باشد، آنگاه $y = G(x-at)$ موجی است که به طرف راست حرکت می کند، و کلیترین بیان موج يك بعدی با سرعت a عبارت است از

$$y(x, t) = F(x+at) + G(x-at) \quad (*)$$

الف) نشان دهید که (*) در معادله موج (۸) صدق می کند.

ب) بسادگی می توان مشاهده نمود که عدد ثابت a در معادله (۸) بعد سرعت دارد. همچنین، بدون اثبات روشن است که اگر اختلالی در يك تار کشیده شده ایجاد کنیم، امواج ناشی از آن، در هر دو جهت حرکت می کنند و از منبع اختلال دور می شوند. این ملاحظات متغیرهای جدید $\alpha = x+at$ و $\beta = x-at$ را مطرح می سازند. نشان دهید که با این متغیرهای مستقل، معادله (۸) به صورت

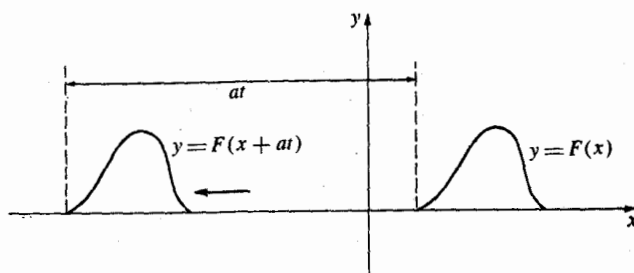
$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

درمی آید، و از این رابطه، (*) را به وسیله انتگرال گیری به دست آورید. فرمول (*) را جواب دالامبر معادله موج می نامند. این فرمول توسط دالامبر و کمی بعد مستقل از وی، توسط اوایلر نیز به دست آمد (هر دو این فرمول را در سال ۱۷۴۷ کشف کردند).

۳- تار را در نظر می گیریم که در امتداد محور x از $-\infty$ تا $+\infty$ محکم کشیده شده است. فرض کنید تغییرشکلی به صورت $y = f(x)$ در تار ایجاد و سپس آن را رها کنیم، و فرض کنید حرکتی که در تار به وجود می آید به کمک معادله موج (۸) بیان گردد.

الف) با استفاده از (*) نشان دهید که جابجایی تار از فرمول دالامبر حاصل می گردد:

۱. ژان لورون دالامبر Jean le Rond d'Alembert (۱۷۱۷-۱۷۸۳) فیزیکدان، ریاضیدان و ادیب فرانسوی بود. او در علوم به خاطر اصل دالامبر در مکانیک و راه حل وی برای معادله موج شهرت دارد. کار اساسی او در زندگی، همکاری با دیدرو در تهیه دایرةالمعارف مشهور اوست، که با تأکید بر علوم و ادبیات و حمله به نیروهای ارتجاعی در کلیسا و دولت، نقش مهمی را در دوران روشنگری فرانسه بازی کرد. او دوست اوایلر، لاگرانژ و لاپلاس بود.



شکل ۳۰

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] \quad (**)$$

راهنمایی: شرایط اولیه (۱۱) و (۱۲) را به‌خاطر آورید.

(ب) علاوه بر این، فرض کنید که تار در نقاط $x = \pi$ و $x = 0$ می‌حرکت باقی ماند (این گونه نقاط گره نام دارند)، به طوری که $y(\pi, t) = y(0, t) = 0$ ، و با استفاده از (***) نشان دهید که $f(x)$ تابعی فرد و متناوب، با دورهٔ تناوب 2π است [بدین معنا که

$$f(x + 2\pi) = f(x) \text{ و } f(-x) = -f(x)]$$

(ج) نشان دهید که چون $f(x)$ تابعی فرد و متناوب با دورهٔ تناوب 2π است، الزاماً در نقاط 0 و π صفر می‌شود.

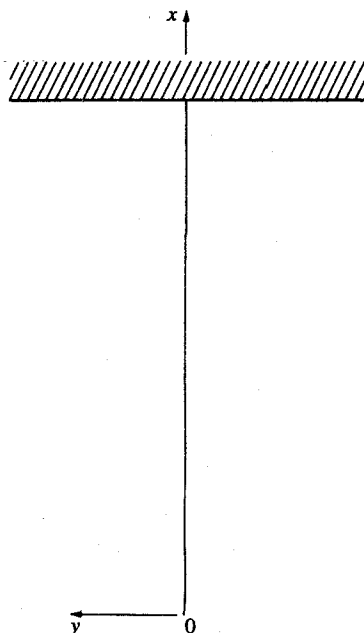
(د) نشان دهید که جواب برنولی (۱۷) را می‌توان به صورت (***) نوشت.

راهنمایی: $2 \sin nx \cos nat = \sin[n(x + at)] + \sin[n(x - at)]$

۴- زنجیر قابل انعطاف یکنواختی که چگالی جرمی اش ثابت و برابر m_0 است، از یک انتهایش آویزان و آزاد است. چنانچه دستگاه مختصات را آن طور که در شکل (۳۱) می‌بینید اختیار کنیم، هنگامی که اختلالی در وضع زنجیر ایجاد گردد، ارتعاشات عرضی آن به وسیلهٔ معادلهٔ (۷) بیان می‌شود. در این حالت کشش T در هر نقطه برابر وزن قسمتی از زنجیر است که زیر آن نقطه قرار دارد و بنابراین از رابطهٔ $T = m_0 x g$ به دست می‌آید. در این رابطه g شتاب ثقل زمین است. با حذف m_0 معادلهٔ (۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g x \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

الف) فرض کنید که این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی، جوابی به صورت $y(x, t) = u(x)v(t)$ دارد و به عنوان یک نتیجه نشان دهید که $u(x)$ باید در معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر صدق کند



شکل ۳۱

$$\frac{d}{dx} \left(gx \frac{du}{dx} \right) + \lambda u = 0 \quad (***)$$

(ب) اگر متغیر مستقل را از x به $z = \sqrt{\lambda x/g}$ تغییر دهیم، نشان دهید که معادله $(***)$ به صورت

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + zu = 0$$

درمی آید، که (صرف نظر از علایم) معادله بسل ۱- (۹) در حالت ویژه $p=0$ ، است.

پیوست الف . مسائل منظم استورم - لیوویل

نظریه عمومی مقادیر ویژه، توابع ویژه، و بسط بر حسب توابع ویژه یکی از عمیقترین و غنیترین بخشهای ریاضیات نوین است. در این پیوست توجه خود را به بخشی کوچک ولی مهم از این موضوع گسترده معطوف می داریم. هدف نخستین ما آن است که ثابت کنیم هر مسئله مقدار مرزی از نوع ۲۴- (۲۳) که از تار مرتعش غیر همگن ناشی می شود، دارای مقادیر ویژه و توابع ویژه ای است که خواصی مشابه با آنچه در بخش ۲۴ دیدیم، دارد. با انجام این کار، درخواستیم یافت که با یک تغییر متغیر ساده می توانیم این نتیجه را به دسته نسبتاً عمومیتری از مسائل تعمیم دهیم.

مطلب را با چندین پی‌آمد ساده از قضیه مقایسه استورم آغاز می‌کنیم.

لم ۱. فرض می‌کنیم که $y(x)$ و $z(x)$ دو جواب غیر صفر
 $y'' + q(x)y = 0$

$$z'' + r(x)z = 0$$

باشند، که در آن $q(x)$ و $r(x)$ توابع مثبت و پیوسته‌ای هستند به طوری که $q(x) > r(x)$.
 فرض می‌کنیم که $y(x)$ و $z(x)$ هر دو در نقطه‌ای مانند b_0 صفر می‌شوند، و $z(x)$ دارای تعداد
 متناهی یا نامتناهی صفرهای متوالی $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ در طرف راست b_0 است.
 آنگاه تعداد صفرهای $y(x)$ در هر فاصله بسته $[b_0, b_n]$ لااقل برابر تعداد صفرهای $z(x)$ در آن
 فاصله است؛ و اگر صفرهای متوالی $y(x)$ در طرف راست b_0 عبارت از $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
 باشند، آنگاه برای هر n داریم، $a_n < b_n$.

اثبات. به کمک قضیه مقایسه استورم (قضیه ۲۳-ب)، $y(x)$ در هر یک از فاصله‌های
 $(b_0, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{n-1}, b_n)$ ، لااقل دارای یک صفر است و هر دو حکم بالا
 نتیجه مستقیم این مطلب است.

لم ۲. فرض می‌کنیم که $q(x)$ تابع پیوسته و مثبتی باشد که در فاصله بسته $[a, b]$ در
 نامساویهای

$$0 < m^2 < q(x) < M^2$$

صدق کند. اگر $y(x)$ یک جواب غیر صفر $y'' + q(x)y = 0$ در این فاصله باشد، و اگر x_1 و
 x_2 دو صفر متوالی $y(x)$ باشند، آنگاه

$$\frac{\pi}{M} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{m} \quad (1)$$

علاوه بر این، چنانچه $y(x)$ در a و b و در $n-1$ نقطه دیگر در فاصله باز (a, b) صفر
 شود، آنگاه

$$\frac{m(b-a)}{\pi} < n < \frac{M(b-a)}{\pi} \quad (2)$$

اثبات. اثبات (۱) را از مقایسه معادله داده شده با معادله $z'' + m^2 z = 0$ آغاز

۱. پیوستگی این توابع ضریب همواره بطور ضمنی جزء فرض بوده است. در اینجا این فرض را
 صریحاً بیان کرده‌ایم، زیرا در اثبات لم ۳ از بعضی خواص توابع پیوسته مثبت در فواصل بسته
 استفاده چشمگیری خواهیم کرد.

می‌کنیم. يك جواب غير صفر اين معادله كه در x_1 صفر می‌شود عبارت است از $z(x) = \sin m(x - x_1)$. چون صفر بعدی $z(x)$ ، $x_1 + \pi/m$ است و بنا بر قضیه ۲۳-ب x_2 باید قبل از این صفرواقع گردد، داریم $x_2 < x_1 + \pi/m$ یا $x_2 - x_1 < \pi/m$. بحث مشابهی نامساوی دیگر (۱) را به دست می‌دهد.

برای اثبات (۲)، ابتدا توجه می‌کنیم که تعداد n زیر فاصله بین $n+1$ صفر وجود دارد، بنابراین با توجه به (۱) داریم،

$$b - a = \text{مجموع طولهای } n \text{ زیر فاصله } < n(\pi/m)$$

پس $m(b-a)/\pi < n$. به همین طریق می‌توان نشان داد که $b-a > n(\pi/M)$ یا $n < M(b-a)/\pi$.

نتیجه مقدماتی اساسی ما لم بعدی است.

لم ۳. فرض می‌کنیم که $q(x)$ تابع پیوسته و مثبتی باشد و معادله دیفرانسیل

$$y'' + \lambda q(x)y = 0 \quad (3)$$

را در فاصله بسته $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. به ازای هر يك از مقادیر λ ، فرض می‌کنیم که $y_\lambda(x)$ جواب منحصر به فرد معادله (۳) باشد که شرایط اولیه $y_\lambda(a) = 0$ و $y'_\lambda(a) = 1$ را ارضا می‌کند، آنگاه يك دنباله صعودی از اعداد مثبت به صورت

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

وجود دارد که به پینهایت میل می‌کند و دارای این خاصیت است که: $y_\lambda(b) = 0$ اگر و تنها اگر λ مساوی یکی از λ_n ها باشد. از این گذشته، تابع $y_{\lambda_n}(x)$ دقیقاً $(n-1)$ صفر در فاصله باز (a, b) دارد.

اثبات. با توجه به قضیه ۲۳-ب واضح است که وقتی $\lambda \leq 0$ ، $y_\lambda(x)$ صفری در طرف راست a ندارد. می‌خواهیم رفتار نوسانی $y_\lambda(x)$ را ضمن صعود λ از ۰ مشاهده کنیم. مطلب را چنین آغاز می‌کنیم که با توجه به پیوستگی $q(x)$ ، اعداد مثبت m و M وجود دارند به قسمی که در فاصله $[a, b]$ داریم $m^2 < q(x) < M^2$. بنابراین، به معنای بیان شده در بخش ۲۳، $y_\lambda(x)$ در فاصله $[a, b]$ سریعتر از جوابهای معادله

$$y'' + \lambda m^2 y = 0$$

و کندتر از جوابهای معادله

$$y'' + \lambda M^2 y = 0$$

نوسان می‌کند. با توجه به لم ۲، هنگامی که λ مثبت و کوچک است (آن قدر کوچک که داشته باشیم $\pi/\sqrt{\lambda}M \geq b-a$) تابع $y_\lambda(x)$ در فاصله $[a, b]$ در طرف راست a صفری ندارد؛

و هنگامی که λ آن قدر افزایش یابد که $\pi/\sqrt{\lambda}m \leq b-a$ آنگاه $y_\lambda(x)$ حداقل یک چنین صفری دارد. به طریق مشابه، با افزایش λ به سمت ∞ ، تعداد صفرهای $y_\lambda(x)$ در $[a, b]$ به سمت ∞ میل می‌کند. از لم ۱ چنین نتیجه می‌شود که هرچه λ بزرگ‌تر می‌شود، صفر $y_\lambda(x)$ در طرف راست a ، به طرف چپ حرکت می‌کند و در اینجا می‌پذیریم که حرکت این صفر پیوسته است (این مطلب را می‌توان ثابت کرد). نتیجتاً، وقتی که λ از صفر شروع می‌کند و به سمت ∞ افزایش می‌یابد، مقادیر بشمار از $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ وجود دارند به‌طوری‌که یک صفر $y_\lambda(x)$ به b می‌رسد و سپس وارد فاصله می‌شود، بنابراین $y_{\lambda_n}(x)$ در a و b صفر می‌شود و $(n-1)$ صفر در (a, b) دارد. برای اینکه نشان دهیم دنبالهٔ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ به سمت ∞ میل می‌کند از نامساوی (۲) استفاده می‌کنیم که در این حالت به‌صورت

$$\frac{\sqrt{\lambda_n} m(b-a)}{\pi} < n < \frac{\sqrt{\lambda_n} M(b-a)}{\pi}$$

یا

$$\frac{n^2 \pi^2}{M^2(b-a)^2} < \lambda_n < \frac{n^2 \pi^2}{m^2(b-a)^2}$$

درمی‌آید.

معادلهٔ (۳) حالت خاصی است از معادلهٔ استورم - لیوویل که در زیر آمده است:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda q(x)y = 0 \quad (4)$$

که در آن $p(x) = 1$. در اینجا فرض می‌کنیم که توابع $p(x)$ و $q(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته و مثبت هستند و نیز فرض می‌کنیم که $p(x)$ دارای مشتق پیوسته‌ای در این فاصله است. اگر متغیر مستقل معادلهٔ (۴) را از x به متغیر جدید w که به‌صورت

$$w(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}$$

تعریف می‌شود، به‌طوری‌که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{dy}{dw} \text{ و } \frac{dw}{dx} = \frac{1}{p(x)}$$

آنگاه (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^2 y}{dw^2} + \lambda q_1(w)y = 0 \quad (5)$$

که تابع $q_1(w)$ در فاصلهٔ تبدیل‌یافتهٔ $0 \leq w \leq c = w(b)$ مثبت و پیوسته است. با استفاده

از لم ۳ در معادله (۵)، بلافاصله می‌توان حکم زیر را برای (۴) به دست آورد.

قضیه الف. مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{dy}{dx}\right] + \lambda q(x)y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0 \quad (6)$$

که $p(x)$ و $q(x)$ شرایط فوق‌الذکر را ارضا می‌کنند. حال، دنباله‌ای صعودی از اعداد مثبت، مانند

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

وجود دارد که به سمت ∞ میل می‌کند و دارای این خاصیت است که معادله (۶) وقتی و فقط وقتی يك جواب غیر صفر دارد که λ برابر با یکی از λ_n ها باشد. جواب متناظر $\lambda = \lambda_n$ منحصر به فرد است و فقط ضریب ثابت آن دلخواه است، و دقیقاً $n-1$ صفر در فاصله باز (a, b) دارد.

اعداد λ_n مقادیر ویژه مسئله (۶) و جوابهای مربوطه، $y_n(x)$ ، توابع ویژه هستند. بنابراین داریم:

$$\frac{d}{dx}\left[p \frac{dy_m}{dx}\right] + \lambda_m q y_m = 0$$

و

$$\frac{d}{dx}\left[p \frac{dy_n}{dx}\right] + \lambda_n q y_n = 0$$

اگر این معادلات را، به ترتیب، در y_m و y_n ضرب و نتایج را از هم کم کنیم، خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dx}\left[p\left(y_n \frac{dy_m}{dx} - y_m \frac{dy_n}{dx}\right)\right] + (\lambda_m - \lambda_n) q y_m y_n = 0$$

که پس از انتگرال‌گیری از a تا b به صورت

$$\left[p\left(y_n \frac{dy_m}{dx} - y_m \frac{dy_n}{dx}\right)\right]_a^b + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b q y_m y_n dx = 0$$

درمی‌آید. از آنجا که $y_m(x)$ و $y_n(x)$ هر دو در a و b صفر می‌شوند، جمله اول طرف چپ صفر است و نتیجه می‌گیریم که

$$\int_a^b q y_m y_n dx = 0, \quad \text{اگر } m \neq n \quad (7)$$

از این محاسبات قضیه بعدی به دست می آید.

قضیه ب. توابع ویژه مسئله مقدار مرزی (۶) در رابطه (۷) صدق می کنند.

محتوای این قضیه معمولاً چنین بیان می شود که توابع ویژه $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$ در فاصله $[a, b]$ نسبت به تابع وزن $q(x)$ متعامدند. بویژه، همان طور که در بخش ۲۲ دیدیم، توابع

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \quad (۸)$$

توابع ویژه مسئله $y'' + \lambda y = 0$ با شرایط $y(0) = y(\pi) = 0$ هستند و بنابراین در فاصله $[0, \pi]$ نسبت به تابع وزن ۱ متعامدند.

درست همان طور که توابع (۸) پایه سری سینوسی فوریه توابعی است که در 0 و π صفر می شوند، توابع ویژه (۶) را می توان برای یافتن بسط تابع $f(x)$ که در a و b صفر می شود، بر حسب توابع ویژه، به کار برد:

$$f(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x) + \dots \quad (۹)$$

اگر طرفین این رابطه را در $y_n(x) q(x)$ ضرب کنیم و از a تا b جمله به جمله انتگرال بگیریم و از رابطه (۷) استفاده کنیم، ضریب a_n به صورت زیر به دست می آید:

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_a^b q(x) y_n(x) f(x) dx \quad (۱۰)$$

که در آن

$$\alpha_n = \int_a^b q(x) y_n(x)^2 dx$$

بسطهایی به صورت (۹) را که ضرایب آنها در (۱۰) داده شده اند، اغلب بسطهای استورم-لیوویل می نامند. این بسطها برای دسته های وسیعی از توابع معتبرند، لیکن مطالعه دقیق این گونه مسائل از حوزه کار این کتاب خارج است.

آخرین نکته این که، معمولاً (۶) را یک مسئله منظم استورم-لیوویل می خوانیم، چرا که فاصله آن متناهی است و توابع $p(x)$ و $q(x)$ در تمامی این فاصله مثبت و پیوسته اند. مسائل غیرعادی وقتی ظاهر می شوند که فاصله نامتناهی باشد یا اگر فاصله متناهی است، $p(x)$ یا $q(x)$ در یک یا هر دو نقطه انتهایی فاصله صفر یا ناپیوسته باشد. این مسائل به طور قابل ملاحظه ای مشکل ترند و مسلماً در چارچوب این پیوست قرار نمی گیرند. متأسفانه، بسیاری از جالبترین معادلات دیفرانسیل بدین معنی غیر عادی هستند. معادلات زیر را به عنوان مثال ذکر می کنیم:

معادله لژاندر

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1$$

معادلهٔ چبیشف

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)^{1/2} \frac{dy}{dx}] + \lambda(1-x^2)^{-1/2} y = 0, \quad -1 < x < 1$$

معادلهٔ هرمیت

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2} \frac{dy}{dx}] + \lambda e^{-x^2} y = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

و معادلهٔ لاگر

$$\frac{d}{dx}[x e^{-x} \frac{dy}{dx}] + \lambda e^{-x} y = 0, \quad 0 \leq x < \infty$$

این معادلات مجدداً در فصل پنجم ظاهر خواهند شد و از دیدگاهی کاملاً متفاوت مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

یادداشت دربارهٔ لیوویل. ژوزف لیوویل (۱۸۰۹-۱۸۸۲) استاد گرانقدر کولژ دو فرانس پاریس و بنیان‌گذار و سردبیر مجلهٔ «ریاضیات محض و کاربردی» بود، مجلهٔ ادواری مشهوری که در طول قرن نوزدهم نقش مهمی در سرنوشت ریاضیات فرانسه بازی کرد. ولی بنابه دلایلی دستاوردهای چشمگیر او به عنوان یک ریاضیدان خلاق آن طور که باید و شاید مورد تقدیر قرار نگرفته است. این حقیقت که مجموعه آثار وی هرگز به چاپ نرسیده است، قصوری اسف بار، بلکه تعجب‌آور از جانب هم میهنان وی می‌باشد.

او اولین کسی بود که یک مسئلهٔ مقدار مرزی را از طریق حل معادلهٔ انتگرال معادل آن حل کرد، روشی که در اوایل دهه ۱۹۰۰ میلادی به وسیلهٔ فرد هولم و هیلبرت در یکی از زمینه‌های عمدهٔ آنالیز نوین بسط داده شد. نظریهٔ دیفرانسیل گیری کسری هوشیارانهٔ او به این سؤال دیرینه پاسخ گفت که برای علامت $d^n y/dx^n$ ، وقتی که n عددی صحیح مثبت نباشد، چه مفهوم معقولی می‌توان قایل شد. او یک قضیهٔ بنیادی آنالیز مختلط را کشف کرد که امروزه به قضیهٔ لیوویل مشهور است - و براساس آن، هر تابع تام و کراندار الزاماً مقداری ثابت است - و از آن به عنوان پایهٔ نظریهٔ توابع بیضوی خود استفاده کرد. یک قضیهٔ بسیار مشهور از لیوویل نیز در مکانیک هامیلتونی وجود دارد که بر طبق آن، انتگرالهای حجم، در فضای فاز، مستقل از زمان اند. نظریهٔ انتگرالهای توابع مقدماتی او، شاید اصیلترین کار وی باشد، زیرا طی آن ثابت کرد که انتگرالهایی از قبیل

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\log x}$$

و نیز انتگرالهای بیضوی از نوع اول و دوم را نمی‌توان برحسب تعدادی متناهی

از توابع مقدماتی بیان کرد^۱.

نظریه جالب و در عین حال مشکل اعداد غیر جبری، شاخه مهم دیگری از ریاضیات است که از کارهای لیوویل سرچشمه گرفت. غیر گویایی اعداد π و e - یعنی اینکه اعداد مزبور ریشه هیچ معادله خطی به صورت $ax+b=0$ با ضرایب صحیح نیستند - در قرن هیجدهم به وسیله لامبرت و اوپلر به اثبات رسیده بود. در سال ۱۸۴۴ لیوویل نشان داد که e ریشه هیچ معادله درجه دومی با ضرایب صحیح نیز نیست. این مطلب او را به این حدس رساند که e غیر جبری است، یعنی در هیچ معادله چند جمله‌ای با ضرایب صحیح همچون

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

صدق نمی‌کند. کوشش او برای اثبات این مطلب به جایی نرسید، لیکن نظرات او در توفیق هرمیت در سال ۱۸۷۳ و سپس در اثبات سال ۱۸۸۲ لیندمان در مورد اینکه π نیز غیر جبری است، سهم بسزایی داشت. سرانجام نتیجه حاصل از کار لیندمان نشان داد که مسئله قدیمی تریبیک دایره به وسیله خط کش و پرگار غیر ممکن است. یکی از دستاوردهای عظیم ریاضیات عصر نوین، اثبات عرضه شده توسط گلفوند در سال ۱۹۲۹ در مورد غیر جبری بودن e^π بود، لیکن تا به حال اطلاعی درباره ماهیت اعداد $e + \pi$ ، $e\pi$ یا π^e به دست نیامده است. لیوویل، همچنین، یک شرط کافی برای غیر جبری بودن اعداد کشف کرد و در سال ۱۸۴۴ از آن برای حصول به نخستین مثالها از اعداد حقیقی که غیر جبری بودن آنها قابل اثبات است استفاده کرد. یکی از این مثالها عدد زیر است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n!} = \frac{1}{10^1!} + \frac{1}{10^2!} + \frac{1}{10^3!} + \dots = 0.11000100\dots$$

این روشهای او به تحقیقات گسترده دیگری در قرن بیستم نیز منجر گردیده است.^۲

۱. مراجعه کنید به

D. G. Mead, *Integration*, *Am. Math. Monthly* vol. 68, pp. 152-156, 1961.

و برای توضیحات بیشتر

G. H. Hardy, «The Integration of Functions of a Single Variable», Cambridge, London, 1916.

یا

J. F. Ritt, «Integration in Finite Terms», Columbia, New York, 1948.

را ملاحظه کنید.

۲. با مراجعه به کتاب

A. O. Gelfond, «Transcendental and Algebraic Numbers», Dover, New York, 1960.

می‌توان تا حدودی به عمق و پیچیدگی این مطلب پی برد.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

جوابهای سری توانی و توابع خاص

۲۵. مقدمه. مروری بر سریهای توانی

اغلب توابع خاصی که در آنالیز مقدماتی ظاهر می شوند متعلق به دسته ای از توابع، مشهور به توابع مقدماتی، هستند. برای توصیف این دسته از توابع یادآوری می کنیم که تابع جبری، چند جمله ای، تابع گویا، و در حالت کلی تر هر تابعی مانند $y = f(x)$ است که در معادله ای به صورت زیر صدق کند:

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + P_1(x)y + P_0(x) = 0$$

در این معادله توابع $P_i(x)$ چند جمله ای هستند. توابع مقدماتی عبارت اند از توابع جبری و توابع متعالی (یا غیر جبری) مقدماتی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می گردند؛ یعنی توابع مثلثاتی، مثلثاتی معکوس، نمایی، و توابع لگاریتمی، و دیگر توابعی که از جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، یا ترکیب این توابع به وجود می آیند. بنا بر این

$$y = \tan \left[\frac{xe^{1/x} + \tan^{-1}(1+x^2)}{\sin x \cos^2 x - \sqrt{\log x}} \right]^{1/3}$$

یک تابع مقدماتی است.

بعد از توابع مقدماتی، توابع متعالی از دهه های بالاتر که اغلب توابع خاص نامیده می شوند قرار دارند. از آغاز قرن هجدهم صدها تابع خاص به لحاظ اهمیت و جذابیت

کافی تا حدودی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بسیاری از این توابع تقریباً به طور کامل فراموش شده‌اند، ولی برخی، همچون تابع گاما، تابع زتای ریمان، توابع بیضوی، و توابعی که در فیزیک ریاضی همچنان مورد استفاده می‌باشند، باعث ایجاد نظریه‌های مبسوطی گردیده‌اند. در بین این توابع، چند تابع وجود دارد که آنقدر در مفهوم و عمل غنی هستند که صرف تاریخچه هر کدام از آنان کتابی حجیم را پر خواهد کرد.

توجه مشتاقانه بزرگترین ریاضیدانان قرون هیجدهم و نوزدهم میلادی - از جمله اوپلر، گاوس، آبل، یا کوپی، و ایرشتراس، ریمان، هریت، و پوانکاره - موجب گسترش مبحث توابع خاص شده است. اما سلیقه‌ها بازمان تغییر می‌کنند، و امروزه اغلب ریاضیدانان ترجیح می‌دهند که به جای بررسی یک تابع مهم، به بررسی دسته‌های وسیعی از توابع (توابع پیوسته، توابع انتگرال‌پذیر و غیره) پردازند. با وجود این، هنوز عده بسیاری بیوگرافی را بر جامعه‌شناسی ترجیح می‌دهند، و یک بررسی متعادل نمی‌تواند هیچک از این دو نظر را نادیده انگارد.

توابع خاص، بسته به منشأ، ماهیت و کاربردشان، انواع نسبتاً گسترده‌ای دارند. ولی، یک دسته بزرگ آنان که از درجه همگونی قابل توجهی برخوردارند توابعی هستند که به صورت جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ظاهر می‌شوند. بسیاری از این توابع در ارتباط با معادلات دیفرانسیل جزئی مربوط به فیزیک ریاضی کاربرد پیدا می‌کنند. این توابع همچنین، در نظریه بسطهای متعادل به عنوان منبع تاریخی اصلی آنالیز خطی، که نقش اساسی در شکل‌گیری قسمت اعظمی از ریاضیات محض نوین ایفا کرده است، اهمیت می‌یابند.

ابتدا سعی می‌کنیم چگونگی پیدایش این توابع را به طریقی کلی درک کنیم. یادآوری می‌کنیم که هرگاه بخواهیم معادله دیفرانسیل ساده

$$y'' + y = 0 \quad (1)$$

را حل کنیم، توابع آشنای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای این منظور در دسترس هستند اما در مورد معادله

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (2)$$

چنین نیست، چرا که معادله بالا را نمی‌توان بر حسب توابع مقدماتی حل کرد. در واقع باید گفت که هیچ معادله خطی مرتبه دوم شناخته شده‌ای (بجز معادلات با ضرایب ثابت یا معادلاتی که با تغییر متغیر مستقل به این گونه معادلات تبدیل می‌گردند) که بتوان آن را بر حسب توابع مقدماتی حل کرد، وجود ندارد. در فصل ۴ دریافتیم که برخی از خواص عمومی جوابهای چنین معادله‌ای را اغلب می‌توان بدون حل آن معادله به دست آورد. ولی هرگاه

۱. خواننده‌ای که می‌خواهد تصویری از وسعت این قسمت آنالیز داشته باشد می‌تواند به کتاب سه جلدی زیر مراجعه کند،

"Higher Transcendental Functions," A. Erdélyi (ed.), Mc Graw - Hill, New York, 1953 - 1955.

معادله خاصی از این نوع دارای آن چنان اهمیتی باشد که جواب صریحی را بطلید، در آن صورت چه می‌توان کرد؟ روش ما در این فصل حل معادله برحسب سریهای توانی و به کار بردن این سریها برای تعریف توابع خاص جدید است. آنگاه خواص این توابع را به وسیله بسط سری آنها مورد بررسی قرار می‌دهیم. چنانچه موفق به شناخت کافی این توابع شویم، این توابع مانند «توابع آشنا» می‌توانند به منزله ابزاری برای مطالعه مسئله‌ای که منجر به معادله دیفرانسیل اصلی شده است مورد استفاده قرار گیرند. نیازی به گفتن نیست که توصیف برنامه بالا از اجرای آن ساده‌تر است و تنها در مواردی ارزشمند است که تابع دارای کاربردهای متنوع مهم باشد.

از تذکرات بالا روشن می‌شود که سریهای توانی در سرتاسر این فصل به میزان وسیعی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. فرض بر آن است که اغلب خوانندگان، طی یک درس ریاضی عمومی قبلی، به اندازه کافی با سریها آشنایی یافته‌اند. با وجود این به خاطر آنهايي که احتمالاً این مبحث را تا حدودی به فراموشی سپرده‌اند، نکات اساسی در این مورد را باختصار مرور می‌کنیم.

الف. سری نامتناهی به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (3)$$

را سری توانی از x می‌نامند. سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots \quad (4)$$

سری توانی از $x - x_0$ است که تا اندازه‌ای کلی‌تر از (۳) است. ولی (۴) را همواره می‌توان با گذاشتن $x - x_0$ به جای x (که صرفاً یک انتقال دستگاه مختصات است) به (۳) تبدیل کرد. بنابراین، در اغلب موارد بحث خود را به سریهای توانی از شکل (۳) محدود خواهیم کرد.

ب. سری (۳) را در نقطه x همگرا گویند هرگاه حد

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n x^n$$

وجود داشته باشد، و در این حالت مجموع این سری، مقدار این حد است. واضح است که (۳) همواره در $x = 0$ همگراست. تمامی سریهای توانی از x از لحاظ نحوه توزیع نقاط همگرایی‌شان به سه دسته اصلی تقسیم می‌شوند. این دسته‌ها به وسیله مثالهای زیر مشخص می‌گردند:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + \dots \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (۶)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (۷)$$

اولین سری فوق برای همه مقادیر x بجز $x = 0$ و اگر است (یعنی همگرا نیست)؛ دومین سری برای تمام مقادیر x همگراست؛ و سومین سری برای $|x| < 1$ همگرا و برای $|x| > 1$ واگراست. رفتار برخی سریهای توانی از x ، مانند (۵) است، و تنها برای $x = 0$ همگرا هستند. این سریها مورد توجه ما نیستند. برخی، مانند (۶)، برای همه مقادیر x همگرا هستند. کار با این سریها از همه ساده تر است. بقیه سریها همگی تقریباً شبیه (۷) هستند. این بدان مفهوم است که به هر سری از این نوع عدد حقیقی مثبتی مانند R ، به نام شعاع همگرایی، متناظر می گردد که سری برای $|x| < R$ همگرا و برای $|x| > R$ واگراست [در مورد (۷)، $R = 1$].

متداول است که برای حالتی که سری تنها در $x = 0$ همگراست R را برابر با صفر و برای حالتی که سری برای تمام مقادیر x همگرا باشد R را برابر با ∞ قرار دهیم. با این قرارداد می توان تمام حالات را بایک عبارت توصیف کرد: هر سری توانی از x دارای یک شعاع همگرایی R ، ($0 \leq R \leq \infty$) است به طوری که سری برای $|x| < R$ همگرا و برای $|x| > R$ واگراست. باید توجه داشت که هرگاه $R = 0$ ، هیچ پای وجود ندارد که در $|x| < R$ صدق کند، و هنگامی که $R = \infty$ آنگاه هیچ پای وجود ندارد که $|x| > R$ را ارضا کند.

در بسیاری از حالتها، مقدار R را می توان به طریق زیر به دست آورد. فرض می کنیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

یک سری از اعداد ثابت غیر صفر باشد. از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به خاطر داریم که هرگاه حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$$

وجود داشته باشد، براساس آزمون نسبت، برای $L < 1$ سری همگرا و برای $L > 1$ سری واگراست. در مورد سری توانی (۳)، این مطلب بیان می کند که هرگاه همه a_n ها مخالف صفر باشند، و در نقطه ثابت $x \neq 0$ ، داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L$$

آنگاه سری (۳) برای $L < 1$ همگرا و برای $L > 1$ واگرا خواهد بود. هرگاه حد زیر موجود باشد، ملاحظات بالا فرمول

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

را به دست می‌دهد (هرگاه $|a_n/a_{n+1}| \rightarrow \infty$ را برابر با ∞ می‌گیریم). صرفنظر از اینکه رابطه بالا را بتوان به کاربرد یانه، باید دانست که R همواره وجود دارد؛ و چنانچه R متناهی و غیرصفر باشد، فاصله همگرایی $-R < x < R$ را آنچنان تعیین می‌کند که در داخل این فاصله سری همگرا و خارج از آن واگرا باشد. در هریک از نقاط انتهایی فاصله همگرایی سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

ج. فرض می‌کنیم که سری (۳) برای $|x| < R$ با $R > 0$ همگرا باشد، و مجموع آن را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (۸)$$

در این صورت، برای $|x| < R$ ، تابع f خود به خود پیوسته است و دارای مشتقاتی از تمام مراتب است. بعلاوه، از این سری می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت، به این معنا که

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3 \times 2a_3 x + \dots$$

و الی آخر، و برای $|x| < R$ ، هریک از سری‌های حاصل همگرا می‌باشند. این مشتق‌گیری پی‌درپی سری‌ها به فرمول اساسی زیر، که a_n ها را به $f(x)$ و مشتقات آن ربط می‌دهد، منجر می‌شود:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (۹)$$

بعلاوه، غالباً دانستن این نکته مفید است که از سری (۸) می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت به شرط آنکه حدود انتگرال‌گیری در داخل فاصله همگرایی واقع باشند.

هرگاه سری توانی دیگری از x داشته باشیم که برای $|x| < R$ به تابعی، مانند $g(x)$ ، همگرا شود، به‌طوری‌که

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \quad (۱۰)$$

سری‌های (۸) و (۱۰) را می‌توان جمله به جمله جمع یا تفریق کرد:

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \dots$$

این سریها را همچنین می توان، مانند چند جمله ایها، در یکدیگر ضرب کرد، بدین معنا که

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

که در آن $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$. هرگاه هر دو سری مورد بحث به یک تابع همگرا شوند، به قسمی که برای $|x| < R$ ، $f(x) = g(x)$ ، در آن صورت فرمول (۹) حاکی از آن است که ضرایب هر دو سری باید برابر باشند: یعنی $a_0 = b_0$ ، $a_1 = b_1$ ، \dots ، بویژه، هرگاه برای $|x| < R$ ، داشته باشیم $f(x) = 0$ ، آنگاه $a_0 = 0$ ، $a_1 = 0$ ، \dots

د. فرض می کنیم که تابع $f(x)$ ، برای $|x| < R$ با $R > 0$ ، پیوسته و دارای مشتقات تمام مراتب باشد. آیامی توان $f(x)$ را به صورت یک سری توانی نمایش داد؟ اگر از (۹) برای تعریف a_n ها استفاده کنیم، آنگاه طبیعی است انتظار داشته باشیم که بسط

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \quad (11)$$

در تمام فاصله مورد نظر برقرار باشد. این مطلب غالباً صحیح است، ولی متأسفانه گاهی اوقات نادرست درمی آید. یک روش برای بررسی اعتبار این بسط در یک نقطه مشخص x واقع در فاصله مورد نظر، استفاده از فرمول تیلور است:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) x^k}{k!} + R_n(x)$$

که در آن، باقی مانده $R_n(x)$ مساوی است با

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{n+1}$$

که در آن، \bar{x} نقطه ای بین ۰ و x است. برای تحقیق درستی (۱۱)، کافی است نشان دهیم که هرگاه $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه $R_n(x)$ به سمت صفر میل می کند. با این روش، با آسانی می توان بسطهای آشنای زیر را به دست آورد که برای تمام مقادیر x صادق اند:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (12)$$

۱. برای مطالب بعدی مفید خواهد بود اگر توجه کنیم که c_n را به دو صورت معادل زیر می توان نوشت:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \text{و} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (13)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (14)$$

هرگاه سری توانی همگرای خاصی داده شده باشد، چگونه می توان تابعی را که مجموع سری است مشخص نمود؟ در حالت کلی این کار غیر ممکن است، چرا که تنها تعداد بسیار کمی از سری های توانی مجموعی به شکل توابع مقدماتی آشنا دارند.

ه. تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 تحلیلی گوییم، هرگاه بسط سری توانی آن به صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (15)$$

در يك همسایگی x_0 معتبر باشد. در این حالت a_n ها لزوماً از رابطه

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

به دست می آیند و (۱۵) را سری تیلور $f(x)$ در x_0 می نامند. بنابراین (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) بیان کننده این مطالب اند که توابع e^x ، $\sin x$ ، $\cos x$ در $x_0 = 0$ تحلیلی اند، و سریهای داده شده، سری تیلور این توابع در این نقطه اند. اغلب سؤالات مربوط به تحلیلی بودن توابع را می توان توسط مطالب زیر پاسخ داد:

- چند جمله ایها و توابع e^x ، $\sin x$ و $\cos x$ در تمامی نقاط تحلیلی هستند.
- هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در x_0 تحلیلی باشند، در آن صورت توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ و $f(x)/g(x)$ [با فرض $g(x_0) \neq 0$] نیز در نقطه x_0 تحلیلی اند.
- اگر تابع f در x_0 تحلیلی و $f^{-1}(x)$ معکوس پیوسته آن باشد، در آن صورت $f^{-1}(x)$ در $f(x_0)$ تحلیلی خواهد بود، مشروط به اینکه $f'(x_0) \neq 0$.
- اگر تابع $g(x)$ در x_0 ، و تابع $f(x)$ در نقطه $g(x_0)$ تحلیلی باشد، آنگاه تابع $f(g(x))$ در نقطه x_0 تحلیلی است.
- مجموع سری توانی در همه نقاط داخل فاصله همگرایی تحلیلی است.

برخی از این مطالب را می توان به آسانی با روش های مقدماتی ثابت کرد، ولی در مورد بقیه چنین نیست. به طور کلی، رفتار توابع تحلیلی تنها در زمینه گسترده تر نظریه توابع مختلط به طور کامل قابل درک است.

تمرین

- با استفاده از آزمون نسبت نشان دهید که شعاع همگرایی سری های (۵)، (۶) و (۷)

بترتیب برابرند با $R=0$ ، $R=\infty$ ، و $R=1$.

۲- هرگاه p صفر یا عدد صحیح مثبتی نباشد، نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-n+1)}{n!} x^n$$

برای $|x| < 1$ همگرا و برای $|x| > 1$ واگراست.

۳- نشان دهید که در سری‌های سمت راست بسطهای (۱۳) و (۱۴)، $R=\infty$.

۴- از فرمول تیلور برای اثبات درستی بسطهای (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) برای تمام مقادیر x استفاده کنید. راهنمایی: برای هر ثابت a حد $a^n/n!$ صفر است (چرا؟)

۵- در جبر مقدماتی دیده‌ایم که:

$$1 + x + x^2 + \dots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1$$

از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید که بسطهای

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

و

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

برای $|x| < 1$ معتبرند. از بسط اخیر برای اثبات روابط

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

و

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

در فاصله $|x| < 1$ استفاده کنید.

۶- از اولین بسط مسئله ۵ برای یافتن سری توانی $1/(1-x)^2$ به طرق زیر استفاده کنید:

الف) به وسیله مجذور کردن؛

ب) با مشتق‌گیری.

۷- الف) نشان دهید که سری بسط $\cos x$

$$y = 1 - \frac{x^2}{1 \times 2} + \frac{x^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - \frac{x^6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} + \dots$$

دارای خاصیت $y'' = -y$ و بنا بر این يك جواب معادله (۱) است.

(ب) نشان دهید که سری

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots$$

برای همه مقادیر x همگراست، و تحقیق کنید که يك جواب معادله (۲) است. [توجه کنید که سری مزبور را می توان از سری داده شده در (الف) با جایگزینی هر عامل فرد از مخرج به وسیله عدد زوج بعدیش، به دست آورد. مجموع این سری یکی از توابع خاص مفید است که آن را با $J_0(x)$ نشان می دهند و تابع بسل مرتبه ۰ می نامند؛ در فصل آتی این تابع مفصلاً مورد بررسی قرار خواهد گرفت.]

۲۶. جوابهای به صورت سری معادلات مرتبه اول

بارها تأکید کرده ایم که بسیاری از معادلات دیفرانسیل جالب و مهم را با هیچ يك از روشهایی که در فصلهای گذشته مورد بحث قرار گرفت نمی توان حل کرد، و همچنین گفتیم که جوابهای این نوع معادلات را می توان بر حسب سری توانی به دست آورد. مقصود ما در این بخش تشریح این روش، با نشان دادن چگونگی عملکرد آن در مورد معادلات مرتبه اولی است که با روشهای مقدماتی بسادگی حل می شوند. به عنوان اولین مثال، معادله

$$y' = y \quad (۱)$$

را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که این معادله دارای جوابی به شکل سری توانی

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (۲)$$

باشد، که برای $|x| < R$ ، $R > 0$ ، همگراست؛ عبارت دیگر فرض می کنیم که معادله (۱) دارای جوابی باشد که در مبدأ تحلیلی است. از هر سری توانی در فاصله همگرایی اش می توان جمله به جمله مشتق گرفت، لذا

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1} x^n + \dots \quad (۳)$$

از آنجا که $y' = y$ ، سری های (۲) و (۳) باید دارای ضرایب برابر باشند:

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \quad \dots, \quad (n+1)a_{n+1} = a_n, \dots$$

با این معادلات می توانیم هر a_n را بر حسب a_0 بیان کنیم:

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \times 3}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{a_0}{n!}, \dots$$

هنگامی که این ضرایب در (۲) قرار داده شوند، جواب سری توانی مورد نظر به دست می آید

$$y = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) \quad (4)$$

که در آن هیچ شرطی برای a_0 وجود ندارد. درك این نکته اساسی است که تا اینجا این جواب صرفاً آزمایشی است، زیرا هیچ تضمینی در مورد اینکه معادله (۱) جوابی به شکل سری توانی (۲) داشته باشد، وجود ندارد. استدلال بالا فقط نشان می دهد که اگر معادله (۱) دارای چنین جوابی باشد، در این صورت این جواب باید به صورت (۴) باشد. در هر حال از آزمون نسبت بلافاصله دیده می شود که سری (۴) برای کلیه مقادیر x همگراست، و بنابراین مشتق گیری جمله به جمله معتبر است، و (۴) عملاً جوابی برای معادله (۱) است. در این حالت، بآسانی می توان سری (۴) را به عنوان بسط سری توانی e^x تشخیص داد، بنا بر این رابطه (۴) را می توان به شکل:

$$y = a_0 e^x$$

نوشت. لازم به تذکر نیست، که این جواب را مستقیماً می توان از رابطه (۱) با تفکیک متغیرها و انتگرال گیری به دست آورد. با وجود این، تشخیص این مطلب مهم است که حتی اگر معادله (۱) به وسیله روشهای مقدماتی قابل حل نبود و سری (۴) به عنوان بسط هیچ يك از توابع آشنا تشخیص داده نمی شد، باز هم سری (۴) کاملاً ارزشمند بود.

این مثال، روشی مناسب برای یافتن بسط سری توانی يك تابع مفروض را عرضه می کند: یافتن معادله دیفرانسیلی که تابع مفروض در آن صدق کند، سپس حل معادله به وسیله سری توانی.

برای نمونه تابع

$$y = (1+x)^p \quad (5)$$

را در نظر می گیریم، که در آن p مقدار ثابت دلخواهی است. بآسانی دیده می شود که تابع (۵) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر است:

$$(1+x)y' = py, \quad y(0) = 1 \quad (6)$$

همچون گذشته، فرض می کنیم که معادله (۶) جوابی به صورت سری توانی داشته باشد،

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (7)$$

که شعاع همگرایی آن مثبت باشد. از این فرض نتیجه می شود که

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1} x^n + \dots$$

$$xy' = a_1 x + 2a_2 x^2 + \dots + na_n x^n + \dots$$

$$py = pa_0 + pa_1 x + pa_2 x^2 + \dots + pa_n x^n + \dots$$

با توجه به معادله (۶)، مجموع دو سری اول باید باسومی برابر باشد، لذا بامساوی قرار دادن ضرایب توانهای پیاپی x به معادلات

$$a_1 = pa_0, \quad 2a_2 + a_1 = pa_1, \quad 3a_3 + 2a_2 = pa_2, \quad \dots, \\ (n+1)a_{n+1} + na_n = pa_n, \quad \dots$$

می‌رسیم. با توجه به شرط اولیه (۶)، $a_0 = 1$ ، بنابراین داریم:

$$a_1 = p, \quad a_2 = \frac{a_1(p-1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}, \\ a_3 = \frac{a_2(p-2)}{3} = \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \times 3}, \quad \dots \\ a_n = \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-n+1)}{n!}, \quad \dots$$

با این ضرایب، سری (۷) به صورت

$$y = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots \\ + \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (8)$$

درمی‌آید. برای استنتاج اینکه سری (۸) در واقع جواب مطلوب است، کافی است مشاهده شود که این سری برای $|x| < 1$ همگراست (تمرین ۲۵-۲ را نگاه کنید). با مقایسه دو جواب (۵) و (۸)، و استفاده از این امر که معادله (۶) تنها یک جواب دارد، برای $|x| < 1$ خواهیم داشت

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots \\ + \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (9)$$

این نتیجه به سری دو جمله‌ای مشهور است، و قضیه بسط دو جمله‌ای را برای هر توان دلخواه تعمیم می‌دهد.^۱

۱. همچنان‌که خواننده از جیب مقدماتی به‌خاطر می‌آورد، قضیه دو جمله‌ای می‌گوید که هرگاه n عددی صحیح و مثبت باشد، آنگاه

تمرین

۱- معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = 2xy \quad (\text{الف})$$

$$y' + y = 1 \quad (\text{ب})$$

برای هر حالت، جواب سری توانی به صورت $\sum a_n x^n$ را بیابید، سعی کنید تشخیص دهید که سری حاصل بسط کدام تابع آشناست، و درستی استنتاج خود را با حل مستقیم این معادلات تحقیق کنید.

۲- معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$xy' = y \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y' = y \quad (\text{ب})$$

برای هر حالت، جواب سری توانی این معادلات را به صورت $\sum a_n x^n$ بیابید، معادله را مستقیماً حل کنید، و هراشکالی که ظاهری شود توضیح دهید.

۳- با حل معادله $y' = (1 - x^2)^{-1/2}$ به دو روش، تابع $\sin^{-1} x$ را به صورت سری توانی به شکل $\sum a_n x^n$ بیان کنید. (راهنمایی: سری دو جمله‌ای را به خاطر آورید.) از این نتیجه برای یافتن فرمول زیر استفاده کنید:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \times \frac{1}{5 \times 2^5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \times \frac{1}{7 \times 2^7} + \dots$$

۴- معادلات دیفرانسیلی که در متن آورده شد و تمرینهای قبلی تماماً خطی هستند. معادله

$$y' = 1 + y^2 \quad (*)$$

غیرخطی است، بسادگی می‌توان به‌طور مستقیم مشاهده کرد که $y = \tan x$ جوابی خصوصی است که در شرط اولیه $y(0) = 0$ صدق می‌کند. فرض کنید معادله $(*)$ جوابی به صورت

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^k + \dots + x^n$$

یا به صورت فشرده‌تر

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

که در آن $\binom{n}{k}$ ضریب دو جمله‌ای است و توسط رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

سری توانی $\sum a_n x^n$ دارد و a_n ها را به دو طریقی که در زیر خواهد آمد بیابید و نشان دهید که

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$$

الف) با روشی که در متن برای مثالها به کار رفت (بخصوص توجه کنید که غیرخطی بودن معادله تا چه حد فرمولها را پیچیده ترمی کند)؛

ب) با مشتق گیری متوالی از (*) و یافتن روابط

$$y'' = 2y'y, \quad y''' = 2yy'' + 2(y')^2, \dots$$

و استفاده از رابطه $a_n = f^{(n)}(0)/n!$

۵- معادله زیر را به وسیله هریک از روشهای پیشنهاد شده در تمرین ۲ حل کنید:

$$y' = x - y, \quad y(0) = 0$$

سری حاصل نمایش دهنده کدام يك از توابع آشناست؟ درستی نتیجه خود را با حل مستقیم این معادله خطی مرتبه اول تحقیق کنید.

۲۷. معادلات خطی مرتبه دوم. نقاط عادی

اکنون توجه خود را به معادله خطی مرتبه دوم همگن کلی به صورت

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

معطوف می کنیم. چنانکه می دانیم چنین معادله ای را گهگاه می توان برحسب توابع مقدماتی آشنا حل کرد. مثلاً، این امر در حالتی که $P(x)$ و $Q(x)$ مقادیر ثابتی باشند، و همچنین در چند حالت دیگر اتفاق می افتد. ولی، در بیشتر حالات، این نوع معادلات که هم از نظر ریاضیات محض و هم از نظر ریاضیات کاربردها اهمیت شایانی دارند، با روشهای مقدماتی قابل حل نیستند و آنها را فقط با روشهای سری توانی می توان حل کرد.

نکته اساسی در مورد معادله دیفرانسیل (۱) آن است که رفتار جوابهای آن در نزدیکی نقطه x بستگی به رفتار توابع ضریبی $P(x)$ و $Q(x)$ در مجاورت آن نقطه دارد. در این بخش خود را به حالتی که توابع $P(x)$ و $Q(x)$ به مفهوم تحلیلی بودن در x ، «خوش رفتار» می باشند محدود می کنیم. معنی این مطلب آن است که هریک از آنها در يك همسایگی این نقطه دارای بسطی به صورت سری توانی می باشند. در چنین حالتی نقطه x را نقطه عادی معادله (۱) می نامند، و ثابت می شود که هر جواب معادله نیز در این نقطه تحلیلی است. به بیان دیگر، تحلیلی بودن ضرایب (۱) در نقطه ای معین، متضمن تحلیلی بودن جوابهای معادله در آن نقطه است. هر نقطه ای را که نقطه عادی معادله (۱) نباشد نقطه غیرعادی می نامند. حکمی را که در پاراگراف بالا بیان کردیم ثابت خواهیم کرد، ولی نخست به بررسی

برخی مثالهای روشنگر می‌پردازیم.
در مورد معادلهٔ آشنای

$$y'' + y = 0 \quad (۲)$$

توابع ضربی $P(x) = 0$ و $Q(x) = 1$ هستند. این توابع در تمامی نقاط تحلیلی‌اند، بنابراین در صدد یافتن جوابی به‌شکل

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (۳)$$

برمی‌آییم. با مشتق‌گیری از رابطه (۳) داریم

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1} x^n + \dots \quad (۴)$$

و

$$y'' = 2a_2 + 2 \times 3a_3 x + 3 \times 4a_4 x^2 + \dots + (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \dots \quad (۵)$$

هرگاه (۵) و (۳) را در معادله (۲) بگذاریم و این دوسری را جمله به‌جمله باهم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$(2a_2 + a_0) + (2 \times 3a_3 + a_1)x + (3 \times 4a_4 + a_2)x^2 + (4 \times 5a_5 + a_3)x^3 + \dots + [(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n]x^n + \dots = 0$$

از مساوی صفر قراردادن ضرایب توانهای x خواهیم داشت،

$$2a_2 + a_0 = 0, \quad 2 \times 3a_3 + a_1 = 0, \quad 3 \times 4a_4 + a_2 = 0$$

$$4 \times 5a_5 + a_3 = 0, \dots, (n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0, \dots$$

به کمک این روابط می‌توان a_n را برحسب a_1 یا a_0 ، بسته به اینکه n زوج باشد یا فرد، محاسبه کرد:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{2 \times 3}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{3 \times 4} = \frac{a_0}{2 \times 3 \times 4}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{4 \times 5} = \frac{a_1}{2 \times 3 \times 4 \times 5}, \dots$$

با این ضرایب، معادله (۳) به

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{a_1}{2 \times 3} x^3 + \frac{a_0}{2 \times 3 \times 4} x^4 + \frac{a_1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} x^5 - \dots$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \quad (۶)$$

تبدیل می‌شود. دوسری داخل پرانتز را به $y_1(x)$ و $y_2(x)$ نمایش می‌دهیم. به‌طور صوری نشان داده‌ایم که برای هر دو ثابت دلخواه a_0 و a_1 ، (۶) در (۲) صدق می‌کند. بویژه، با انتخاب $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$ مشاهده می‌شود که تابع y_1 در این معادله صدق می‌کند، و با انتخاب $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ می‌بینیم که y_2 نیز در معادله صادق است. درست همچون مثالهای بخش قبل، تنها مطلبی که باقی می‌ماند بررسی همگرایی سری‌هایی است که توابع y_1 و y_2 را تعریف می‌کنند. آزمون نسبت بلافاصله نشان می‌دهد که هر یک از این سری‌ها، و بنا بر این سری (۶)، برای تمام مقادیر x همگراست (تمرین ۲۵-۳ را نگاه کنید). از اینجا نتیجه می‌شود که همهٔ عملیات انجام شده در مورد سری (۳) مجاز بوده است، و لذا سری (۶) دیگر نه جواب صوری بلکه جوابی معتبر برای معادله (۲) است. از این گذشته، توابع y_1 و y_2 مستقل خطی هستند زیرا روشن است که هیچ یک از این سریها مضرب ثابتی از دیگری نیست. به این ترتیب مشاهده می‌کنیم که (۶) جواب عمومی معادله (۲) است، و هر جواب خصوصی با مشخص کردن مقادیر $a_0 = y(0)$ و $a_1 = y'(0)$ به دست می‌آید.

در مثال بالا با آسانی می‌توان تشخیص داد که دوسری داخل پرانتز بسط توابع $\cos x$ و $\sin x$ می‌باشند، و بنا بر این رابطه (۶) را می‌توان به صورت

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

نوشت. طبعاً، این نتیجه از همان آغاز هم قابل پیش‌بینی بود، زیرا (۲) معادلهٔ بسیار ساده‌ای است که با جوابهای آن کاملاً آشنا هستیم. اما، این نتیجه را صرفاً باید به حساب حسن تصادف گذاشت، زیرا شناسایی اکثر جوابهای به‌صورت سری که بدین طریق به دست می‌آیند کاملاً غیر ممکن است و این جوابها توابعی را نشان می‌دهند که از قبل آنها را نمی‌شناختیم. برای روشن شدن این نکته، از همین روش برای حل معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \quad (۷)$$

استفاده می‌کنیم. در اینجا p عددی ثابت است. روشن است که توابع ضربی

$$P(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \quad \text{و} \quad Q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2} \quad (۸)$$

در مبدأ تحلیلی‌اند. بنابراین، مبدأ یک نقطهٔ عادی معادله است، و انتظار داریم که جوابی به شکل $y = \sum a_n x^n$ موجود باشد. چون $y' = \sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ، بسطهای زیر را برای تک تک عبارات سمت چپ معادله (۷) به دست می‌آوریم:

$$y'' = \sum (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

$$-x^2 y'' = \sum -(n-1)na_n x^n$$

$$-2xy' = \sum -2na_n x^n$$

و

$$p(p+1)y = \sum p(p+1)a_n x^n$$

بر اساس معادله (۷)، لازم است که مجموع این سریها صفر شود، و بنابراین ضریب x^n باید به ازای تمام n ها برابر با صفر باشد:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)na_n - 2na_n + p(p+1)a_n = 0$$

با عملیات مختصری، چنین نتیجه می شود

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (9)$$

درست همچون مثال گذشته، این رابطه بازگشتی ما را قادر می سازد تا، بسته به اینکه n زوج یا فرد باشد، a_n را بر حسب a_0 یا a_1 به دست آوریم:

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{1 \times 2} a_0,$$

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{2 \times 3} a_1,$$

$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{3 \times 4} a_2 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} a_0,$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4 \times 5} a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} a_1,$$

$$a_6 = -\frac{(p-4)(p+5)}{5 \times 6} a_4 = -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} a_0,$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6 \times 7} a_5$$

$$= -\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!} a_1$$

و الی آخر. با قراردادن این ضرایب در جواب مفروض $y = \sum a_n x^n$ ، داریم

$$y = a_0 \left[1 - \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} x^4 - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} x^6 + \dots \right]$$

$$+ a_1 \left[x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!} x^2 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} x^5 - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!} x^7 + \dots \right] \quad (۱۰)$$

که به منزله جواب سری (۷) است.

هنگامی که p عدد صحیح نباشد، شعاع همگرایی هردو سری داخل کروش به برابر یک است. این مطلب با سانی با استفاده از رابطه بازگشتی (۹) مشاهده می گردد: برای اولین سری، فرمول بالا (با قرار دادن $2n$ به جای n) نتیجه می دهد که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، داریم

$$\left| \frac{a_{2n+2} x^{2n+2}}{a_{2n} x^{2n}} \right| = \left| - \frac{(p-2n)(p+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \right| |x|^2 \rightarrow |x|^2$$

و برای سری دوم نیز همین طور است. همچون گذشته، این واقعت که شعاع همگرایی هر یک از سریها مثبت است صحت عملیات انجام شده را تصدیق می کند و نشان می دهد که سری (۱۰) برای کلیه مقادیر a_1 و a_2 ، جوابی معتبر برای معادله (۷) است. هر یک از توابع داخل کروش به یک جواب خصوصی است؛ و از آنجا که استقلال خطی توابعی که توسط این سریها تعریف می شوند، روشن است، سری (۱۰) جواب عمومی معادله (۷) در فاصله $|x| < 1$ است.

توابع تعریف شده توسط (۱۰) توابع لژاندر نامیده می شوند، و در حالت کلی توابعی مقدماتی نیستند. ولی، هنگامی که p یک عدد صحیح غیر منفی باشد، یکی از دو سری متناهی است و بنا بر این یک چند جمله ای می باشد - اولین سری، برای p زوج، دومین سری برای p فرد - درحالی که سری دیگر همچنان یک سری نامتناهی باقی می ماند. مشاهده این امر مارا به جوابهای خصوصی معادله (۷) سوق می دهد که به چند جمله ایهای لژاندر مشهورند و خواص و کاربردهایشان در فصل ۶ بررسی خواهد شد.

اکنون روش مذکور در این مثالها را برای اثبات قضیه کلی زیر در مورد ماهیت جوابها در نزدیکی نقاط عادی، به کار می بریم.

قضیه الف. هرگاه x_0 یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (۱۱)$$

باشد و a_0 و a_1 دو ثابت دلخواه باشند، تابع منحصر به فردی مثل $y(x)$ وجود دارد که در x_0 تحلیلی است و در یک همسایگی نقطه x_0 در معادله (۱۱) صدق می کند، و شرایط اولیه $y(x_0) = a_0$ و $y'(x_0) = a_1$ را ارضا می کند. علاوه، هرگاه بسطهای سری توانی $P(x)$ و $Q(x)$ در فاصله $|x - x_0| < R$ ، $R > 0$ ، معتبر باشند، بسط سری توانی این جواب نیز در همین فاصله معتبر خواهد بود.

اثبات. به خاطر سادگی، بحث خود را به حالت $x_0 = 0$ ، منحصر می کنیم. این امر به ما

امکان می‌دهد که به جای کار کردن با سریهای توانی بر حسب $x - x_0$ ، با سریهای توانی بر حسب x سروکار داشته باشیم، و این کار از کلیت مسئله نمی‌کاهد. با این ساده کردن مختصر، مفروضات قضیه چنین خواهد شد که $P(x)$ و $Q(x)$ در مبدأ تحلیلی اند و بنابراین دارای بسطهای سری توانی زیر هستند:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots \quad (12)$$

و

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots \quad (13)$$

که در فاصله‌ای مانند $|x| < R$ ، $R > 0$ ، همگرا هستند. با به خاطر داشتن شرایط اولیه ذکر شده، کوشش می‌کنیم جوابی برای معادله (۱۱) به شکل سری توانی

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (14)$$

به دست آوریم، که شعاع همگرایی آن حداقل برابر با R باشد. با مشتق گیری از رابطه (۱۴) داریم

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \quad (15)$$

و

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \\ &= 2a_2 + 2 \times 3a_3 x + 3 \times 4a_4 x^2 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

اکنون، از قاعده ضرب دوسری نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} P(x)y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n p_{n-k} (k+1) a_{k+1} \right] x^n \end{aligned} \quad (17)$$

و

$$\begin{aligned} Q(x)y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k} a_k \right) x^n \end{aligned} \quad (18)$$

با قراردادن (۱۶)، (۱۷)، و (۱۸) در (۱۱) و جمع کردن جمله به جمله سریها، خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + \sum_{k=0}^n q_{n-k}a_k \right] x^n = 0$$

بنابراین، رابطه بازگشتی زیر برای a_n ها به دست می آید:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = - \sum_{k=0}^n [(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k] \quad (19)$$

برای مقادیر $n = 0, 1, 2, \dots$ این رابطه به صورت زیر در می آید:

$$2a_2 = -(p_0a_1 + q_0a_0)$$

$$2 \times 3a_3 = -(p_1a_1 + 2p_0a_2 + q_1a_0 + q_0a_1)$$

$$3 \times 4a_4 = -(p_2a_1 + 2p_1a_2 + 3p_0a_3 + q_2a_0 + q_1a_1 + q_0a_2),$$

...

این فرمولها مقادیر a_2, a_3, \dots را بر حسب a_0 و a_1 تعیین می کنند، بنابراین سری حاصل، (۱۴)، که از نظر محاسباتی در معادله (۱۱) و شرایط اولیه مفروض صدق می کند، به شکل منحصر به فردی توسط این شرایط تعیین می گردد.

حالا فرض می کنیم بتوان ثابت کرد که سری (۱۴) که ضرایب آن توسط رابطه (۱۹) تعریف شده اند، برای مقادیر $|x| < R$ واقعاً همگراست. در آن صورت براساس نظریه عمومی سریهای توانی، عملیاتی صوری که روی سری (۱۴) انجام گرفت (مشتق گیری جمله به جمله، ضرب، و جمع جمله به جمله) تا در معادله (۱۱) صدق کند، تأیید می شوند، و اثبات کامل خواهد بود. این استدلال ساده نیست. جزئیات آن را در پیوست الف آورده ایم تا خواننده در صورت تمایل از آن چشم پوشی کند.

تذکر چند نکته نهایی لازم است. در مثالها، برای تعیین ضرایب جوابهای سری مجهول، تنها با آنچه به فرمولهای بازگشتی دو جمله ای مشهورند، مواجه گشتیم. سادگی این فرمولها کار تعیین جمله عمومی سری حاصل و کسب اطلاعات دقیق راجع به شعاعهای همگرایی آنها را نسبتاً آسان می کند. ولی از فرمول (۱۹) روشن است که در حالت کلی نباید چنین سادگی را انتظار داشت. در بیشتر موارد، بهترین کاری که می توان کرد این است که شعاعهای همگرایی بسطهای سری $P(x)$ و $Q(x)$ را به دست آوریم و از قضیه بالانتيجه بگیریم که شعاع همگرایی جواب سری باید حداقل برابر با کوچکترین این اعداد باشد. به این ترتیب، برای معادله لواندر با توجه به معادله (۸) و بسط آشنای

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots, \quad R=1$$

روشن است که برای هر دو تابع $P(x)$ و $Q(x)$ ، داریم $R=1$. بنابراین بلافاصله وبدون محاسبات بیشتر، در می یابیم که هر جواب معادله به شکل $\sum a_n x^n$ باید حداقل در فاصله $|x| < 1$

معتبر باشد.

تمرین

۱- جواب عمومی معادله $y'' + 2xy' - 2y = 0$ را برحسب سری توانی از x به دست آورید. آیا می‌توانید این جواب را برحسب توابع مقدماتی بیان کنید؟

۲- معادله $y'' + xy' + y = 0$ را در نظر بگیرید:

الف) جواب عمومی $y = \sum a_n x^n$ آنرا به شکل $y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ بیان کنید، به طوری که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ سری‌های توانی باشند.

ب) به کمک آزمون نسبت نشان دهید، همان طوری که قضیه الف حکم می‌کند، هر دو سری $y_1(x)$ و $y_2(x)$ برای کلیه مقادیر x ، همگرا هستند.

ج) نشان دهید که $y_1(x)$ بسط تابع $e^{-x^2/2}$ به سری است، و از این مطلب برای یافتن جواب مستقل دیگری از معادله به وسیله روش بخش ۱۶، استفاده کنید، و برای خود روشن‌سازید که این جواب دوم همان تابع $y_2(x)$ است که در قسمت (الف) به دست آمد.

۳- نشان دهید که معادله $y'' + y' - xy = 0$ دارای فرمول بازگشتی سه جمله‌ای است، و جوابهای سری $y_1(x)$ و $y_2(x)$ این معادله را چنان بیابید که

$$y_1'(0) = 0, y_1(0) = 1 \quad (\text{الف})$$

$$y_2'(0) = 1, y_2(0) = 0 \quad (\text{ب})$$

قضیه الف تضمین می‌کند که هر دو سری، برای همه مقادیر x ، همگرا هستند. توجه کنید که اثبات این مطلب از طریق انجام عملیات روی خود این سریها تا چه حد مشکل است.

۴- معادله $y'' + (p + 1/2 - x^2/4)y = 0$ ، که در آن p عدد ثابتی است، به طور قطع دارای جوابی به شکل سری $y = \sum a_n x^n$ می‌باشد.

الف) نشان دهید که ضرایب a_n توسط فرمول بازگشتی سه جمله‌ای زیر به یکدیگر مربوط اند:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \left(p + \frac{1}{4}\right)a_n - \frac{1}{4}a_{n-2} = 0$$

ب) نشان دهید که هرگاه متغیر وابسته توسط رابطه $y = we^{-x^2/4}$ از y به w تبدیل شود، معادله دیفرانسیل به $w'' - xw' + pw = 0$ تبدیل خواهد شد.

ج) نشان دهید که معادله دیفرانسیل در (ب) دارای فرمول بازگشتی دو جمله‌ای است و جواب عمومی آنرا بیابید.

۵- جوابهای معادله ایری $y'' + xy = 0$ ، توابع ایری نامیده می‌شوند، و دارای کاربردهایی

در نظریهٔ پراش می‌باشند.^۱

الف) با استفاده از قضایای بخش ۲۲ تحقیق کنید که هر تابع غیر صفرایری دارای تعدادی نامتناهی صفر مثبت و حداکثر یک صفر منفی است.

ب) توابع ایری را به شکل سری توانی به دست آورید و مستقیماً تحقیق کنید که این سریها برای همهٔ مقادیر x همگرا هستند.

ج) با استفاده از نتایج (ب) جواب عمومی معادلهٔ $y'' - xy = 0$ را بدون محاسبه بنویسید.

۶- معادلهٔ چیشف به صورت

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$$

می‌باشد، که در آن p عدد ثابتی است.

الف) دو جواب مستقل خطی به صورت سری از این معادله را که برای $|x| < 1$ معتبر باشند به دست آورید.

ب) نشان دهید که هرگاه $p = n$ ، که در آن n عددی صحیح و غیر منفی است، در آن صورت جوابی برای معادله به صورت چند جمله‌ای از درجهٔ n موجود خواهد بود. هنگامی که این چند جمله‌ای‌ها در ثابتهای مناسبی ضرب شوند، چند جمله‌ای‌های چیشف نامیده می‌شوند. در تمرینهای بخش ۳۰ و در پیوست د به این موضوع باز خواهیم گشت.

۷- معادلهٔ هرمیت عبارت است از

$$y'' - 2xy' + 2py = 0$$

که در آن p عددی ثابت است.

الف) نشان دهید که جواب عمومی این معادله تابع $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$ است، که در آن

$$y_0(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \dots$$

۱. سر جرج بیدل ایری (Sir George Biddell Airy)، (۱۸۰۱-۱۸۹۲) که سالهای متمادی منجم سلطنتی انگلیس بود فردی پرکار و زحمتمکشی منظم بود که آداب دانش جان کوچ آدامز (John Couch Adams) را تقریباً از افتخار کشف سیارهٔ نپتون محروم کرد. وی در خردسالی به خاطر مهارتش در طراحی «فوتک پرتاب نخود» انگشت نما بود، ولی با وجود این شروع امیدوارکننده و کارهای اولیه‌اش در نظریهٔ نور - در این زمینه او اولین کسی بود که به نقص بینایی موسوم به آستیگما تیسیم توجه کرد - به صورت آن گونه دانشمندان کاملاً تجربی پرورش یافت که ذهنشان درگیر محاسبات عددی پیچیده است و کمتر به ایده‌های کلی علم می‌پردازند.

$$y_1(x) = x - \frac{2(p-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!} x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!} x^7 + \dots$$

بر اساس قضیه الف، هردو سری به ازای کلیه مقادیر x همگرا هستند. این مطلب را مستقیماً تحقیق کنید.

(ب) هرگاه p یک عدد صحیح غیر منفی باشد، یکی از دو سری متناهی، و بنابراین یک چند جمله‌ای است - $y_1(x)$ برای p زوج و $y_2(x)$ برای p فرد - حال آنکه، سری دیگر همچنان نامتناهی باقی می‌ماند. تحقیق کنید که برای $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ این چند جمله‌ای‌ها عبارتند از

$$1, x, 1 - 2x^2, x - \frac{2}{3}x^3, 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4, x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$$

(ج) روشن است که تنها جوابهای چند جمله‌ای معادله هرمیت مضارب ثابتی از چند جمله‌ای‌های بیان شده در (ب) هستند. آن جوابهای چند جمله‌ای معادله هرمیت، که جمله حاوی بالاترین درجه x شان، به صورت $2^n x^n$ باشد چند جمله‌ای‌های هرمیت نامیده می‌شوند و با $H_n(x)$ نمایش داده می‌شوند. تحقیق کنید که $H_1(x) = 2x$ ، $H_0(x) = 1$ ، $H_2(x) = 4x^2 - 2$ ، $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ ، $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ ، $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$.

(د) نشان دهید که چند جمله‌ای‌های در قسمت (ج) با فرمول کلی

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

بیان می‌گردند. در پیوست ب نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان فرمول مذکور در قسمت (د) را از سری مذکور در قسمت (الف) به دست آورد، چندین خاصیت از مهمترین خواص چند جمله‌ای‌های هرمیت را ثابت می‌کنیم، و مختصراً نشان می‌دهیم که چگونه این توابع در یکی از مسائل بنیادی مکانیک کوانتومی ظاهر می‌گردند.

۲۸. نقاط غیرعادی منظم

یادآوری می‌کنیم که نقطه‌ای مانند x_0 را یک نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

می‌گویند، هرگاه $P(x)$ یا $Q(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی نباشند. در این حالت قضیه و روشهای بخش قبل را نمی‌توان به کاربرد، و برای بررسی جوابهای معادله

(۱) در نزدیکی x_0 ، مفاهیم جدیدی مورد نیاز هستند. در عمل، این امر از اهمیت قابل توجهی برخوردار است؛ چرا که بسیاری از معادلات دیفرانسیلی که در مسائل فیزیکی ظاهر می‌شوند دارای نقاط غیرعادی هستند، و غالباً انتخاب جوابهای فیزیکی مناسب ماکول به تعیین رفتار آنها در نزدیکی این نقاط است. به این ترتیب، نمی‌توان از نقاط غیرعادی معادلات دیفرانسیل اجتناب ورزید، زیرا معمولاً همین نقاط مستلزم توجه خاصی هستند. به عنوان يك مثال ساده، مبدأ بوضوح يك نقطه غیرعادی معادله زیر است

$$y'' + \frac{y}{x}y' - \frac{y}{x^2}y = 0$$

بسادگی می‌توان نشان داد که برای $x > 0$ ، توابع $y_1 = x$ و $y_2 = x^{-2}$ دو جواب مستقل خطی معادله هستند، بنا بر این $y = c_1x + c_2x^{-2}$ جواب عمومی معادله در این فاصله است. اگر تنها به جوابهای کراندار معادله در نزدیکی مبدأ علاقمند باشیم، از این جواب عمومی روشن است که این توابع از قراردادن $c_2 = 0$ حاصل می‌شوند.

در حالت کلی، در مورد جوابهای (۱) در نزدیکی نقطه غیرعادی x_0 مطالب کمی می‌توان بیان کرد. ولی، خوشبختانه، در اغلب کاربردها نقاط غیرعادی نسبتاً «ضعیف» هستند، به این مفهوم که توابع ضریبی تنها کمی غیرتحلیلی اند، و با مختصر ترمیمی در روش قبلی به جوابهای قابل قبول می‌رسیم. این نقاط، نقاط غیرعادی منظم هستند، که به طریق زیر تعریف می‌شوند. نقطه غیرعادی x_0 از معادله (۱) را منظم گوییم، هرگاه توابع $(x - x_0)P(x)$ و $(x - x_0)^2Q(x)$ تحلیلی باشند، در غیر این صورت آن را نامنظم می‌نامیم. به زبان ساده، این امر بدین معناست که غیرعادی بودن در $P(x)$ از غیرعادی بودن در $(x - x_0)/1$ و غیرعادی بودن در $Q(x)$ از غیرعادی بودن در $(x - x_0)^2/1$ بدتر نیست. هرگاه معادله لژاندر ۲۷-۲۸ را به صورت

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{P(P+1)}{1-x^2}y = 0$$

در نظر بگیریم، روشن می‌گردد که $x = 1$ و $x = -1$ نقاط غیرعادی آن هستند. نقطه اول منظم است، زیرا

$$(x-1)P(x) = \frac{2x}{x+1} \quad \text{و} \quad (x-1)^2Q(x) = -\frac{(x-1)p(p+1)}{x+1}$$

در نقطه $x = 1$ تحلیلی‌اند، و دومی نیز به دلایل مشابه منظم است. به عنوان دومین مثال، معادله بسل از مرتبه p را، که در آن p ثابتی غیرمنفی است، در نظر می‌گیریم:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (2)$$

۱. این اصطلاح از سنتی دیرینه در ریاضیات ناشی می‌شود که براساس آن وضعیتهایی که بسادگی تحلیل پذیر نیستند با توسل به عباراتی از قبیل «ناسره»، «ناپذیرفتنی»، «تبهگون»، «نامنظم» و غیره کنارگذاشته می‌شوند.

هر گاه معادله را به صورت

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0$$

بنویسیم، روشن می شود که مبدأ، يك نقطه غیرعادی منظم است، زیرا

$$xP(x) = 1 \quad \text{و} \quad x^2Q(x) = x^2 - p^2$$

در $x = 0$ تحلیل می کنند. در بقیه این فصل غالباً از معادلهٔ بسل به عنوان مثالی تشریحی استفاده می کنیم، و در فصل ۶ جوابها و کاربردهای آن را با تفصیل قابل توجهی بررسی خواهیم کرد.

اکنون کوشش می کنیم وجه تسمیه نقطه غیرعادی منظم را بیابیم. برای سادگی، فرض می کنیم که نقطه غیرعادی x_0 در مبدأ واقع باشد؛ چرا که در غیر این صورت، با تغییر متغیر مستقل از x به $x - x_0$ این نقطه را همواره می توان به مبدأ منتقل کرد. مطلب را با این حقیقت که شکل عمومی هر تابع تحلیلی در مبدأ، به صورت $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ است آغاز می کنیم. در نتیجه، مبدأ یقیناً نقطه غیرعادی معادله (۱) است هر گاه

$$P(x) = \dots + \frac{b_{-2}}{x^2} + \frac{b_{-1}}{x} + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

و

$$Q(x) = \dots + \frac{c_{-2}}{x^2} + \frac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

و حداقل یکی از ضرایب با اندیس منفی مخالف صفر باشد. بنا به دلائلی که در زیر خواهند آمد نوع جوابی از معادله (۱) که مورد نظر است يك، «سری شبه توانی» به صورت

$$y = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \\ = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \dots \quad (3)$$

است، که در آن توان m می تواند يك عدد منفی صحیح، کسری، یا حتی يك عدد حقیقی گنگ باشد. در تمرینهای ۶ و ۷ خواهیم دید که دوجواب مستقل از این نوع، تنها در صورتی وجود دارند، که عبارات فوق برای $P(x)$ و $Q(x)$ بترتیب بیش از يك جمله یا بیش از دوجمله در طرف چپ جمله ثابت b_0 و c_0 نداشته باشند. به بیان دیگر، $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ باید در مبدأ تحلیلی باشند؛ و براساس تعریف، این دقیقاً به همان معناست که بگوییم $x = 0$ نقطه غیرعادی منظم معادله است.

سؤال بعدی که کوشش می کنیم به آن پاسخ دهیم چنین است: از کجا این فکر مطرح می شود که سری به صورت (۳) می تواند جواب مناسبی برای معادله (۱) در نزدیکی نقطه غیرعادی منظم $x = 0$ باشد؟ در این مرحله، تنها معادله خطی مرتبه دومی که آن را در

نزدیکی يك نقطه غیر عادی منظم می توانیم حل کنیم، معادلهٔ اوایلر است که در تمرین ۱۷-۴ مورد بحث قرار گرفت:

$$x^2 y'' + p x y' + q y = 0 \quad (۴)$$

اگر این معادله را به صورت

$$y'' + \frac{p}{x} y' + \frac{q}{x^2} y = 0 \quad (۵)$$

بنویسیم، به طوری که در آن $P(x) = p/x$ و $Q(x) = q/x^2$ ، آنگاه روشن خواهد بود که هرگاه ثابتهای p و q هر دو با هم صفر نباشند، مبدأ نقطه غیر عادی منظمی از معادله خواهد بود. جوابهای این معادله پل هدایت کننده ای برای حالت کلی ارائه می کنند، بنابراین جزئیات آنرا اجمالاً یادآوری می کنیم. کلید یافتن این جوابها این است که با تغییر متغیر مستقل x به $z = \log x$ ، معادله (۴) به معادله ای با ضرایب ثابت تبدیل می شود. برای انجام این کار، فرض می کنیم که $x > 0$ (و بنابراین z متغیری حقیقی است) و می نویسیم

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{1}{x}$$

و

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dz} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x} \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz} \right) \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} \end{aligned}$$

هرگاه این عبارات را در (۴) قرار دهیم، واضح است که معادله تبدیل یافته به صورت

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (p-1) \frac{dy}{dz} + q y = 0 \quad (۶)$$

درمی آید، که معادله کمکی آن

$$m^2 + (p-1)m + q = 0 \quad (۷)$$

است. اگر m_1 و m_2 ریشه های (۷) باشند، آنگاه می دانیم که معادله (۶) دارای جوابهای مستقل زیر است:

$$e^{m_1 z} \text{ و } e^{m_2 z} \quad \text{هرگاه } m_1 \neq m_2$$

$$z e^{m_1 z} \text{ و } e^{m_1 z} \quad \text{هرگاه } m_1 = m_2$$

از آنجا که $x = e^z$ ، دو جفت جواب متناظر (۴) چنین است

$$x^{m_1} \text{ و } x^{m_2} \quad \text{هرگاه } m_1 \neq m_2$$

$$(۸) \quad x^{m_1} \log x \text{ و } x^{m_2} \quad \text{هر گاه } m_1 = m_2$$

هر گاه درصدد یافتن جوابهایی معتبر در فاصله $0 < x$ باشیم، تنها باید متغیر مستقل را به $x = -t$ تغییر دهیم و معادله حاصل را برای $t > 0$ حل کنیم.

در اینجا بحث معادلهٔ اولی و جوابهای آنرا به دو دلیل ارائه کردیم. اولاً، خاطر نشان می‌کنیم که عمومی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیلی که مبدأ نقطه غیرعادی منظم آن باشد به همان صورت معادلهٔ ساده (۵) است که به جای صورتهای ثابت p و q ، سری‌های توانی نوشته شده باشد:

$$(9) \quad y'' + \left(\frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots}{x} \right) y' + \left(\frac{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots}{x^2} \right) y = 0$$

ثانیاً، چون با گذاشتن سری توانی به جای مقادیر ثابت، از معادله (۵) به معادله (۹) می‌رسیم، طبیعی است حدس بزنیم که اگر در (۸) به جای x^m یک سری به شکل (۳) بگذاریم به جوابهای معادله (۹) خواهیم رسید. بنا بر این انتظار داریم که معادله (۹) دارای دو جواب مستقل به صورت (۳) و یا شاید یک جواب از این نوع و جواب دیگری به صورت

$$(10) \quad y = x^m \log x (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

باشد که در آن فرض می‌شود $x > 0$. بخش بعد نشان خواهد داد که این حدسها بسیار بجای هستند.

قبل از اتمام کلیات یک تذکره‌ای لازم است. توجه کنید که هر گاه در عباراتی مانند (۳) و (۱۰)، $a_0 = 0$ ، آنگاه می‌توان از یک توان صحیح و مثبت x در سری توانی فاکتور گرفت و آن را در x^m ادغام کرد. بنا بر این همواره فرض می‌کنیم که در چنین عباراتی $a_0 \neq 0$ ؛ و این فرض تنها بدان مفهوم است که قبل از انجام هر محاسبه‌ای باید از بالاترین توان ممکن x فاکتور گرفت. سری‌هایی به شکل (۳) را سری فروبنیوسی، و دستورالعمل زیر را برای یافتن جوابهایی از این نوع دوش فروبنیوس می‌نامیم.^۱ بدیهی است که سریهای فروبنیوس سریهای توانی را به‌ازای $m = 0$ یا عددی صحیح و مثبت، بعنوان حالات خاص در بر می‌گیرند.

برای روشن کردن مطالب فوق، معادله

$$(11) \quad 2x^2 y'' + x(2x + 1)y' - y = 0$$

۱. فردیناند گئورگ فروبنیوس (Ferdinand Georg Frobenius)، (۱۸۴۹-۱۹۱۷) در برلین و زوریخ تدریس می‌کرد. وی کارهای ارزندهٔ متعددی در نظریهٔ توابع بیضوی و معادلات دیفرانسیل ارائه کرده است. ولی مؤثرترین کار او در مبحث جبر بود. وی در جبر مفهوم مهم مشخصه‌های گروه را ابداع کرد و به کاربرد قضیهٔ مشهوری را راجع به توسیهای ممکن دستگاه اعداد مختلط به اثبات رساند.

را در نظر می گیریم. هر گاه این معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$y'' + \frac{1/2 + x}{x} y' + \frac{-1/2}{x^2} y = 0 \quad (12)$$

بلافاصله روشن می شود که $xP(x) = 1/2 + x$ و $x^2Q(x) = -1/2$ ، لذا $x = 0$ يك نقطه غیر عادی منظم است. اکنون جواب سری فروبنیوس مفروض،

$$y = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \\ = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \dots \quad (13)$$

و مشتقات آن

$$y' = a_0mx^{m-1} + a_1(m+1)x^m + a_2(m+2)x^{m+1} + \dots$$

و

$$y'' = a_0m(m-1)x^{m-2} + a_1(m+1)mx^{m-1} + a_2(m+2)(m+1)x^m + \dots$$

را می نویسیم. برای یافتن ضرایب سری (۱۳)، اساساً مثل حالت نقطه عادی عمل می کنیم، با این تفاوت مهم که اکنون باید مقدار (یا مقادیر) مناسب توان m را نیز بیابیم. این سه سری را در معادله (۱۲) می گذاریم، و عامل مشترک x^{m-2} را حذف می کنیم، به دست می آید:

$$a_0m(m-1) + a_1(m+1)mx + a_2(m+2)(m+1)x^2 + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{x} + x\right)[a_0m + a_1(m+1)x + a_2(m+2)x^2 + \dots]$$

$$- \frac{1}{x^2}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = 0$$

با تحقیق و بررسی، توانهای متناظر x را ترکیب می کنیم و ضریب هریک از توانهای x را برابر صفر قرار می دهیم. با این کار به دستگاه معادلات زیر می رسیم:

$$a_0 \left[m(m-1) + \frac{1}{x}m - \frac{1}{x^2} \right] = 0$$

$$a_1 \left[(m+1)m + \frac{1}{x}(m+1) - \frac{1}{x^2} \right] + a_0m = 0 \quad (14)$$

$$a_2 \left[(m+2)(m+1) + \frac{1}{x}(m+2) - \frac{1}{x^2} \right] + a_1(m+1) = 0$$

همان طور که در بالا توضیح دادیم، فرض بر آن است که $a_0 \neq 0$ ، بنابراین از اولین معادله این دستگاه نتیجه می شود که

$$m(m-1) + \frac{1}{\gamma}m - \frac{1}{\gamma} = 0 \quad (15)$$

این معادله، معادله شاخص معادله دیفرانسیل (۱۱) نامیده می‌شود. ریشه‌های آن عبارت‌اند از

$$m_1 = 1 \quad \text{و} \quad m_2 = -\frac{1}{\gamma}$$

و اینها تنها مقادیر ممکن برای توان m در (۱۳) هستند. حال برای هر یک از این مقادیر m ، با استفاده از بقیه معادلات (۱۴) ضرایب a_1, a_2, \dots را بر حسب a_0 به دست می‌آوریم. برای $m_1 = 1$ خواهیم داشت

$$a_1 = -\frac{a_0}{2 \times 1 + \frac{1}{\gamma} \times 2 - \frac{1}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{5} a_0$$

$$a_2 = -\frac{\gamma a_1}{3 \times 2 + \frac{1}{\gamma} \times 3 - \frac{1}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{\gamma} a_1 = \frac{\gamma}{35} a_0, \dots$$

و برای $m_2 = -1/\gamma$ چنین داریم

$$a_1 = \frac{\frac{1}{\gamma} a_0}{\frac{1}{\gamma} \left(-\frac{1}{\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}} = -a_0$$

$$a_2 = -\frac{\frac{1}{\gamma} a_1}{\frac{3}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \times \frac{3}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}} = -\frac{1}{\gamma} a_1 = \frac{1}{\gamma} a_0, \dots$$

بنابراین دو جواب سری فروبنیوس زیر را خواهیم داشت، که در هر یک از آنها a_0 را برابر با یک قرارداده‌ایم:

$$y_1 = x \left(1 - \frac{\gamma}{5}x + \frac{\gamma}{35}x^2 + \dots \right) \quad (16)$$

$$y_2 = x^{-1/\gamma} \left(1 - x + \frac{1}{\gamma}x^2 + \dots \right) \quad (17)$$

روشن است که این جوابها برای $x > 0$ مستقل خطی هستند، بنابراین جواب عمومی (۱۱) در این فاصله به صورت زیر است:

$$y = c_1 x \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 + \dots \right) + c_2 x^{-1/2} \left(1 - x + \frac{1}{4}x^2 + \dots \right)$$

مسئله یافتن فاصله همگرایی دو سری توانی داخل پراکنش، در بخش بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت.

اگر به روشی که برای بدست آوردن (۱۵) از (۱۲) به کار رفته است دقیقتر نگاه کنیم،

روشن می شود که معادله شاخص معادله دیفرانسیل عمومی تر (۹) عبارت است از

$$m(m-1) + mp_0 + q_0 = 0 \quad (18)$$

در مثال بالا، معادله شاخص دوریشه حقیقی متمایز داشت و به دو جواب مستقل (۱۶) و (۱۷) به صورت سری رسیدیم. هرگاه معادله شاخص (۱۸) دارای ریشه های حقیقی متمایز m_1 و m_2 باشد، انتظار چنین نتیجه ای طبیعی است. این امر درحالی که تفاضل m_1 و m_2 غیر صحیح باشد درست است. ولی، هرگاه این تفاضل عددی صحیح باشد، غالباً (ولی نه همواره) یکی از دو جواب سری مورد انتظار، وجود ندارد. در این حالت (درست مانند حالت $m_1 = m_2$) لازم است که جواب مستقل دوم را به روشهای دیگری بیابیم. در بخش بعد این اشکالات را با تفصیل بیشتری بررسی خواهیم کرد.

تمرین

۱- در هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر، محل نقاط غیر عادی واقع بر محور x ها را مشخص و آنها را دسته بندی کنید:

$$x^2(x-1)y'' - 2(x-1)y' + 3xy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2(x^2-1)^2y'' - x(1-x)y' + 2y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2y'' + (2-x)y' = 0 \quad (\text{ج})$$

$$(3x+1)xy'' - (x+1)y' + 2y = 0 \quad (\text{د})$$

۲- نوع نقطه $x=0$ را برای هر يك از معادلات زیر تعیین کنید:

$$x^2y'' + (\sin x)y = 0 \quad (\text{الف}) \quad y'' + (\sin x)y = 0 \quad (\text{د})$$

$$x^4y'' + (\sin x)y = 0 \quad (\text{ب}) \quad xy'' + (\sin x)y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$x^2y'' + (\sin x)y = 0 \quad (\text{ج})$$

۳- معادله شاخص هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید و ریشه های آن را حساب کنید:

$$x^2y'' + (\cos 2x - 1)y' + 2xy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$4x^2y'' + (2x^4 - 5x)y' + (3x^2 + 2)y = 0 \quad (\text{ب})$$

۴- تحقیق کنید که مبدأ نقطه غیر عادی منظم هر يك از معادلات زیر است و دو جواب مستقل

سری فروبنیوس هر يك را تعیین کنید:

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$2xy'' + (3-x)y' - y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$2x^2y'' + xy' - (x+1)y = 0 \quad (\text{د})$$

۵- وقتی $p = 0$ ، معادله بسل (۲) به صورت

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

درمی آید. نشان دهید که معادله شاخص آن تنها دارای يك ریشه است، و با استفاده از روش این بخش نتیجه بگیرید که

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

جواب سری فروبنیوس مربوطه است (تمرین ۲۵-۷ ب را نگاه کنید).

۶- معادله دیفرانسیل

$$y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x^3}y = 0$$

را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $x = 0$ يك نقطه غیر عادی نامنظم از این معادله است.

ب) با استفاده از روش بخش ۱۶ و اینکه $x = y_1$ يك جواب معادله است، جواب مستقل دوم y_2 آنرا بیابید.

ج) نشان دهید که جواب حاصل از (ب) یعنی y_2 ، را نمی توان به صورت سری فروبنیوس بیان کرد.

۷- معادله دیفرانسیل

$$y'' + \frac{p}{x^b}y' + \frac{q}{x^c}y = 0$$

را در نظر می گیریم، که در آن p و q اعدادی حقیقی و غیر صفرند و b و c اعدادی صحیح و مثبت هستند. روشن است که چنانچه $b > 1$ یا $c > 2$ ، $x = 0$ يك نقطه غیر عادی نامنظم معادله است.

الف) اگر $b = 2$ و $c = 3$ ، نشان دهید که تنها برای يك مقدار m ممکن است يك جواب سری فروبنیوس وجود داشته باشد.

(ب) به طور مشابه نشان دهید که m وقتی و تنها وقتی که $b = 1$ و $c \leq 2$ ، در يك معادله درجه دوم صدق می‌کند و بنابراین می‌توان امید داشت که مطابق با ریشه‌های این معادله، دو جواب سری فروبنیوس داشته باشیم. توجه کنید که اینها دقیقاً شرایطی هستند که $x = 0$ را به عنوان نقطه غیرعادی «ضعیف» یا منظم در مقابل نقطه غیرعادی «قوی» یا نامنظم مشخص می‌کنند.

۸- نقطه $x = 0$ ، يك نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

است. با گذاشتن (۳) در این معادله، نشان دهید که $m = 0$ و «جواب» سری فروبنیوس عبارات از سری توانی

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} n_1 x^n$$

است، که تنها در $x = 0$ همگراست. این نشان می‌دهد که سری فروبنیوس حتی اگر در چنین معادله‌ای صدق کند، لزوماً جوابی معتبر نخواهد بود.

۲۹. نقاط غیرعادی منظم (ادامه مطلب)

کارما در بخش قبلی عمدتاً متوجه روشن کردن انگیزه و روشهای حل معادلات بود. اکنون به جنبه نظری مسئله حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم در حالت کلی

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

در نزدیکی نقطه غیرعادی منظم $x = 0$ می‌پردازیم. مفاهیمی که در بالا بررسی شد ما را به محاسبه صوری جوابهایی از معادله (۱) که به صورت فروبنیوسی زیر باشند هدایت می‌کند:

$$y = x^m (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad (2)$$

که در آن $a_0 \neq 0$ و m عددی است که باید تعیین شود. امید آن است که بتوان معتبر بودن هر جواب صوری حاصل از این روش را با برهان نشان داد و بدان اعتبار بخشید. کلیت این روش برای روشن کردن شرایطی که تحت آن معادله (۱) تنها دارای يك جواب به صورت (۲) است نیز به کار می‌آید. بنا به دلایلی که قبلاً شرح داده شد، توجه خود را به فاصله $x > 0$ محدود می‌سازیم. رفتار جوابها در فاصله $x < 0$ را می‌توان با تغییر متغیر $t = -x$ و حل معادله حاصل برای $t > 0$ مطالعه کرد.

فرض بر آن است که $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ در $x = 0$ تحلیلی‌اند، و بنابراین دارای بسطهای سری توانی به صورت

۱. وقتی می‌گوییم که (۱) «فقط يك» جواب به صورت (۲) دارد، منظور آن است که جواب مستقل دیگری بدین شکل وجود ندارد.

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{و} \quad x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (۳)$$

می‌باشند، که در فاصله $|x| < R$ برای مقدار مثبتی از R معتبرند. درست مانند مثال بخش قبل، باید مقادیر ممکن m را در (۲) بیابیم، و آنگاه برای هر مقدار قابل قبول m ، ضرایب a_0, a_1, a_2, \dots مربوطه را محاسبه کنیم. هر گاه (۲) را به صورت

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}$$

بنویسیم و از آن مشتق بگیریم، داریم

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1}$$

و

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^{m+n-2}$$

$$= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^n$$

حال عبارات $y'P(x)$ و $yQ(x)$ در (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} P(x)y' &= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1} \right] \\ &= x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^n \right] \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n p_{n-k} a_k (m+k) \right] x^n \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k} a_k (m+k) + p_0 a_n (m+n) \right] x^n \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} Q(x)y &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \right) \\ &= x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k} a_k \right) x^n \end{aligned}$$

$$= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} a_k + q_0 a_n \right) x^n$$

اگر این عبارات به جای y'' ، $y' P(x)$ و $Q(x) y$ در (۱) گذاشته شوند و عامل مشترك x^{m-2} حذف شود، معادلهٔ دیفرانسیل به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^k = 0$$

درمی آید، و از مساوی صفر قرار دادن ضریب x^n ، فرمول بازگشتی زیر برای a_n ها حاصل می شود:

$$a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0 \quad (۴)$$

با نوشتن این رابطه برای مقادیر پیاپی n ، روابط زیر حاصل می شود:

$$a_0 [m(m-1) + mp_0 + q_0] = 0$$

$$a_1 [(m+1)m + (m+1)p_0 + q_0] + a_0 (mp_1 + q_1) = 0$$

$$a_2 [(m+2)(m+1) + (m+2)p_0 + q_0]$$

$$+ a_0 (mp_2 + q_2) + a_1 [(m+1)p_1 + q_1] = 0$$

...

$$a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0]$$

$$+ a_0 (mp_n + q_n) + \dots + a_{n-1} [(m+n-1)p_1 + q_1] = 0$$

....

اگر بنویسیم $f(m) = m(m-1) + mp_0 + q_0$ ، این معادلات به صورت زیر درمی آیند:

$$a_0 f(m) = 0$$

$$a_1 f(m+1) + a_0 (mp_1 + q_1) = 0$$

$$a_2 f(m+2) + a_0 (mp_2 + q_2) + a_1 [(m+1)p_1 + q_1] = 0$$

...

$$a_n f(m+n) + a_0 (mp_n + q_n) + \dots + a_{n-1} [(m+n-1)p_1 + q_1] = 0$$

....

از آنجا که $a_0 \neq 0$ ، از معادله اول این معادلات نتیجه می گیریم که $f(m) = 0$ و یا، معادل با آن،

$$m(m-1) + mp + q = 0 \quad (5)$$

این همان معادله شاخص است، وریشه های m_1 و m_2 آن را - که مقادیر ممکن m در جواب مفروض (۲) هستند - توانهای معادله دیفرانسیل (۱) در نقطه غیر عادی منظم $x = 0$ می نامند. معادلاتی که به دنبال معادله اول آمده اند، a_1 را بر حسب a_0 ، a_2 را بر حسب a_1 و a_0 و الی آخر به دست می دهند. بنا بر این، برای هر انتخاب m ، a_n ها بر حسب a_0 مشخص می شوند مگر آنکه برای يك عدد صحیح و مثبت n داشته باشیم $f(m+n) = 0$ ، که در آن صورت، روند محاسبه قطع می شود. بنا بر این، اگر برای يك عدد صحیح $n \geq 1$ ، داشته باشیم $m = m_1 = m_2 + n$ ، گزینش $m = m_1$ جوابی صوری به دست می دهد، ولی معمولاً انتخاب $m = m_2$ چنین نمی کند چرا که $f(m_2 + n) = f(m_1) = 0$. هرگاه $m_1 = m_2$ ، باز هم تنها يك جواب صوری به دست می آوریم. در همه حالات دیگر که در آنها m_1 و m_2 حقیقی باشند، این روش دو جواب صوری مستقل به دست خواهد داد. البته، این امکان وجود دارد که m_1 و m_2 دو عدد مختلط مزدوج باشند، ولی این حالت را بررسی نمی کنیم، زیرا برای بررسی کافی آن بیش از حد به آنالیز مختلط کشانده می شویم. اشکال مشخص در اینجا این است که اگر m ها بتوانند مختلط باشند، در آن صورت a_n ها نیز مختلط خواهند بود، و فرض ما بر آن است که خواننده با سری های توانی با ضرایب مختلط آشنایی ندارد. در قضیه زیر، این مطالب به طور دقیقتر بیان شده اند.

قضیه الف. فرض کنید که $x = 0$ يك نقطه غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل (۱) باشد و بسطهای سری توانی به صورت (۳) برای توابع $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ در فاصله $|x| < R$ با $R > 0$ معتبر باشند. فرض کنید که معادله شاخص (۵) دارای دو جواب حقیقی m_1 و m_2 ، با فرض $m_1 \leq m_2$ ، باشد. آنگاه معادله (۱) در فاصله $0 < x < R$ حداقل دارای يك جواب به صورت

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0) \quad (6)$$

است، که در آن a_n ها توسط فرمول بازگشتی (۴) با قراردادن m_1 به جای m بر حسب a_0 به دست می آیند، و سری $\sum a_n x^n$ برای $|x| < R$ همگراست. بعلاوه، هرگاه $m_1 - m_2$ صفر یا يك عدد صحیح مثبت نباشد، در آن صورت معادله (۱) در همان فاصله دارای جواب مستقل دیگری به صورت

$$y_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0) \quad (7)$$

است، که در این حالت ضرایب a_n به وسیله رابطه (۴) بر حسب a_0 به دست می آیند، مشروط

به اینکه m_1 را به جای m قراردهیم، و باز هم سری $\sum a_n x^n$ در فاصله $|x| < R$ همگراست. با توجه به آنچه قبلاً عمل کرده ایم، اثبات این قضیه با نشان دادن اینکه در هر مورد سری $\sum a_n x^n$ در فاصله $|x| < R$ همگراست کامل می شود. خواننده علاقمند به جزئیات این مبحث، می تواند این اثباتها را در پیوست الف بیابد. تأکید می کنیم که برای محاسبه ضرایب در یک مسئله مشخص، مستقیماً قراردادن صورت کلی سری فروبنیوس (۲) در معادله دیفرانسیل بسیار ساده تر از کاربرد فرمول بازگشتی (۴) است. کاربرد اصلی این فرمول بازگشتی در اثبات ظریف همگرایی است که در پیوست الف آمده است.

متأسفانه قضیه الف قادر به پاسخ گویی این سؤال نیست که چگونه می توان در حالتی که $m_1 - m_2$ مساوی صفر یا یک عدد صحیح و مثبت باشد، جواب دوم را یافت. برای اینکه تصویری در مورد حالات ممکن داشته باشیم، سه حالت زیر را مشخص می کنیم.

حالت الف. هر گاه $m_1 = m_2$ ، جواب سری فروبنیوس دومی نمی تواند موجود باشد.

دو حالت دیگر، که در هر دوی آنها $m_1 - m_2$ یک عدد صحیح و مثبت است، را می توان با قراردادن $m = m_2$ در فرمول بازگشتی (۴) و نوشتن آن به صورت

$$a_n f(m_2 + n) = -a_0(m_2 p_n + q_n) - \dots - a_{n-1}[(m_2 + n - 1)p_1 + q_1] \quad (\lambda)$$

بآسانی درک کرد. همچنانکه می دانیم، اشکال محاسبه a_n ها در این است که برای مقدار صحیح و مثبتی از n ، $f(m_2 + n)$ صفر می شود. دو حالت بعد به این مسئله مربوط اند. حالت ب. اگر وقتی $f(m_2 + n) = 0$ ، سمت راست رابطه (۸) مخالف صفر باشد، هیچ راهی برای ادامه محاسبه ضرایب وجود ندارد و جواب سری فروبنیوس دومی نمی تواند وجود داشته باشد.

حالت ج. اگر وقتی $f(m_2 + n) = 0$ ، سمت راست (۸) صفر شود، آنگاه a_n محدودیتی ندارد و هر مقدار دلخواهی را می تواند اختیار کند. بخصوص، می توانیم a_n را برابر صفر بگیریم و بدون هیچ اشکال دیگری به محاسبه بقیه ضرایب ادامه دهیم. بنابراین، در این حالت یک جواب سری فروبنیوس دیگر موجود است.

مسائل زیر نشان می دهند که هر یک از این سه حالت واقعاً اتفاق می افتند. با محاسبات زیر می توانیم شکل جواب دوم را وقتی $m_1 - m_2$ صفر یا یک عدد صحیح و مثبت باشد، تشخیص دهیم. مطلب را با تعریف یک عدد صحیح مثبت k به صورت $k = m_1 - m_2 + 1$ شروع می کنیم. معادله شاخص (۵) را می توان به صورت زیر نوشت

$$(m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1 m_2 = 0$$

لذا از مساوی قراردادن ضرایب m خواهیم داشت، $p_0 - 1 = -(m_1 + m_2)$ یا $m_1 - m_2 = 1 - p_0$ ، و داریم $k = 2m_1 + p_0$. با استفاده از روش بخش ۱۶، می توانیم جواب دوم y_2 معادله را از جواب معلوم $y_1 = x^{m_1}(a_0 + a_1 x + \dots)$ با نوشتن $y_2 = v y_1$ به دست آوریم، که در آن

$$\begin{aligned}
 v' &= \frac{1}{y_1^r} e^{-\int P(x) dx} \\
 &= \frac{1}{x^{rm_1}(a_0 + a_1 x + \dots)^r} e^{-\int \left(\frac{p_0}{x} + p_1 + \dots\right) dx} \\
 &= \frac{1}{x^{rm_1}(a_0 + a_1 x + \dots)^r} e^{(-p_0 \log x - p_1 x - \dots)} \\
 &= \frac{1}{x^k(a_0 + a_1 x + \dots)^r} e^{(-p_1 x - \dots)} = \frac{1}{x^k} g(x)
 \end{aligned}$$

روشن است که تابع $g(x)$ که توسط رابطه اخیر تعریف می شود در $x=0$ تحلیلی است و در آن $g(0) = 1/a_0^r$ ، بنابراین در فاصله ای حول مبدأ خواهیم داشت

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots, \quad b_0 \neq 0 \quad (9)$$

از اینجا نتیجه می شود که

$$v' = b_0 x^{-k} + b_1 x^{-k+1} + \dots + b_{k-1} x^{-1} + b_k + \dots$$

بنابراین

$$v = \frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{b_1 x^{-k+2}}{-k+2} + \dots + b_{k-1} \log x + b_k x + \dots$$

و

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 v = y_1 \left(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \dots + b_{k-1} \log x + b_k x + \dots \right) \\
 &= b_{k-1} y_1 \log x + x^{m_1}(a_0 + a_1 x + \dots) \left(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

اگر از عامل x^{-k+1} در سری آخر این رابطه فاکتور بگیریم، و $m_2 = m_1 - k + 1$ را به کار ببریم و دو سری باقی مانده را در هم ضرب کنیم، آنگاه جواب دوم به صورت زیر به دست می آید

$$y_2 = b_{k-1} y_1 \log x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (10)$$

فرمول (۱۰) به عنوان يك ابزار عملی ارزش چندانی ندارد، ولی چند چیز را روشن می کند. اولاً، اگر توانهای m_1 و m_2 برابر باشند، آنگاه $k=1$ و $b_{k-1} = b_0 \neq 0$ ؛ بنابراین در این حالت (که حالت الف در بالاست) جمله حاوی $\log x$ مشخصاً در دومین جواب (۱۰) ظاهر می شود. ولی، چنانچه $m_1 - m_2 = k - 1$ ، يك عدد صحیح مثبت باشد، در آن صورت بعضی مواقع $b_{k-1} \neq 0$ و جمله لگاریتمی وجود دارد (حالت ب)، و گاهی نیز

$b_{k-1} = 0$ و جمله لگاریتمی وجود ندارد (حالت ج). اشکال عملی این است که نمی‌توانیم b_{k-1} را با آسانی محاسبه کنیم، چرا که هیچ وسیله مستقیمی برای محاسبه ضرایب (۹) موجود نیست. در هر حال، حداقل می‌دانیم که در حالات الف و ب، وقتی $b_{k-1} \neq 0$ و روش فروبنیوس تنها تاحدی نتیجه بخش است، شکل عمومی جواب دوم چنین است

$$y_2 = y_1 \log x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (11)$$

که در آن c_n ها مقادیر ثابت مجهولی هستند که آنها را می‌توان با قراردادن مستقیم (۱۱) در معادله دیفرانسیل محاسبه کرد. دقت کنید که این عبارت با فرمول ۲۸- (۱۰) مشابه ولی قدری پیچیده‌تر از آن است.

تمرین

۱- معادله

$$x^2 y'' - 3x y' + (4x + 4)y = 0$$

فقط دارای یک جواب سری فروبنیوس است. آنرا بیابید.

۲- معادله

$$4x^2 y'' - 8x^2 y' + (4x^2 + 1)y = 0$$

تنها یک جواب سری فروبنیوس دارد. جواب عمومی معادله را بیابید.

۳- در هر یک از معادلات زیر، دو جواب سری فروبنیوس مستقل به دست آورید:

$$x y'' + 2 y' + x y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' - x^2 y' + (x^2 - 2)y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x y'' - y' + 4x^2 y = 0 \quad (\text{ج})$$

۴- معادله دیفرانسیل بسل از مرتبه $p = 1$ چنین است:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0$$

نشان دهید که $m_1 - m_2 = 2$ و معادله تنها دارای یک جواب سری فروبنیوس است. سپس این جواب را بیابید.

۵- معادله دیفرانسیل بسل از مرتبه $p = 1/2$ به شکل

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

است. نشان دهید که $m_1 - m_2 = 1$ ، ولی با این وجود این معادله دارای دو جواب سری فروبنیوس مستقل است، و آنها را بیابید.

۶- تنها جواب سری فروبنیوس معادلهٔ بسل از مرتبهٔ $p=0$ در تمرین ۲۸-۵ داده شده است. با انتخاب این جواب به عنوان y_1 و جایگزینی فرمول (۱۱) در معادلهٔ دیفرانسیل، جواب مستقل دوم معادلهٔ دیفرانسیل را به صورت زیر به دست آورید:

$$y_2 = y_1 \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^{2n}$$

۳۰. معادلهٔ فوق هندسی گاوس

این معادلهٔ دیفرانسیل مشهور چنین است

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (1)$$

در اینجا a ، b ، و c ثابت اند. ممکن است ضرایب معادلهٔ (۱) نسبتاً عجیب به نظر آیند، ولی درخواهیم یافت که ضرایب فوق با موارد گوناگون کاربرد جوابهای آن کاملاً سازگاری دارند. بهترین روش درک این مطلب آن است که معادله را حل کنیم و ببینیم چه پیش می آید.

داریم

$$P(x) = \frac{c - (a+b+1)x}{x(1-x)} \quad \text{و} \quad Q(x) = \frac{-ab}{x(1-x)}$$

بنابراین $x=0$ و $x=1$ تنها نقاط غیرعادی واقع بر محور x ها هستند. بعلاوه

$$xP(x) = \frac{c - (a+b+1)x}{1-x} = [c - (a+b+1)x](1+x+x^2+\dots)$$

$$= c + [c - (a+b+1)]x + \dots$$

و

$$x^2Q(x) = \frac{-abx}{1-x} = -abx(1+x+x^2+\dots)$$

$$= -abx - abx^2 - \dots$$

بنابراین $x=0$ (و همین طور $x=1$) یک نقطهٔ غیرعادی منظم است. این بسطها نشان می دهند که $p_0=c$ و $q_0=0$. بدین ترتیب، معادلهٔ شاخص عبارت است از:

$$m[m - (1-c)] = 0 \quad \text{یا} \quad m(m-1) + mc = 0$$

و توانها $m_1=0$ و $m_2=1-c$ هستند. اگر $1-c$ یک عدد صحیح مثبت نباشد، یعنی، اگر c صفر یا یک عدد صحیح منفی نباشد، آنگاه قضیهٔ ۲۹-الف وجود یک جواب (۱) را به صورت

$$y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (2)$$

تضمین می‌کند، که در آن a ثابتی غیر صفر است. با جایگذاری این سری در (۱) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب x^n ، فرمول بازگشتی زیر برای a_n ها به دست می‌آید:

$$a_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} a_n \quad (۳)$$

اکنون a را برابر یک می‌گیریم و a_n ها را پایی محاسبه می‌کنیم

$$a_1 = \frac{ab}{1 \times c}, \quad a_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \times 2c(c+1)}$$

$$a_3 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \times 2 \times 3c(c+1)(c+2)}, \dots$$

با این ضرایب، (۲) به صورت

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{ab}{1 \times c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \times 2c(c+1)}x^2 \\ &\quad + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \times 2 \times 3c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)b(b+1) \dots (b+n-1)}{n!c(c+1) \dots (c+n-1)} x^n \end{aligned} \quad (۴)$$

درمی‌آید که به سری فوق هندسی مشهور است، و با علامت $F(a, b, c, x)$ نمایش داده می‌شود. این سری بدان دلیل چنین خوانده می‌شود که تعمیمی از سری هندسی معمولی است، به این صورت که اگر $a=1$ و $c=b$ ، خواهیم داشت

$$F(1, b, b, x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

اگر a یا b صفر یا یک عدد صحیح منفی باشد، سری (۴) درجایی قطع و به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود؛ در غیر این صورت، آزمون نسبت نشان می‌دهد که برای $|x| < 1$ سری همگراست، زیرا از (۳) داریم

$$n \rightarrow \infty \quad \text{وقتی} \quad \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} \right| |x| \rightarrow |x|$$

این رفتار همگرایی با توجه به این که نزدیکترین نقطه غیر عادی به مبدأ $x=1$ است، از قبل نیز قابل پیش‌بینی بود. به همین ترتیب هنگامی که c صفر یا یک عدد صحیح منفی نباشد، $F(a, b, c, x)$ در فاصله $|x| < 1$ تابعی تحلیلی است، و تابع فوق هندسی نامیده می‌شود. این ساده‌ترین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل فوق هندسی است، تابع فوق هندسی دارای خواص بسیار زیادی است، که واضح‌ترین آنها این است که تبدیل a به b تغییری در تابع

به وجود نمی آورد: $F(a, b, c, x) = F(b, a, c, x)$.

هرگاه $c - 1$ صفر یا يك عدد صحیح منفی نباشد (یعنی c عددی صحیح و مثبت نباشد) آنگاه قضیه ۲۹-الف همچنین بیان می دارد که جواب مستقل دیگری از (۱) با توان $m = 1 - c$ در نزدیکی $x = 0$ موجود است. این جواب را می توان با جایگزینی سری

$$y = x^{1-c}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

در (۱) و محاسبه ضرایب، مستقیماً به دست آورد. ولی تغییر متغیر وابسته y به z در (۱) به وسیله رابطه

$$y = x^{1-c}z$$

کار آمدتر است. هنگامی که محاسبات مربوطه انجام گیرد - خواننده باید خود این کار را انجام دهد - معادله (۱) به صورت معادله فوق هندسی زیر:

$$x(1-x)z'' + [(2-c) - (a-c+1) + (b-c+1) + 1]xz' - (a-c+1)(b-c+1)z = 0 \quad (5)$$

درمی آید که به جای ضرایب a, b, c و بترتیب $a-c+1, b-c+1, 2-c$ آمده اند. از قبل می دانیم که (۵) در نزدیکی مبدأ دارای جواب سری توانی

$$z = F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

است، بنابراین، جواب مطلوب دوم

$$y = x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

است. از این رو، وقتی c عددی صحیح نباشد،

$$y = c_1F(a, b, c, x) + c_2x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \quad (6)$$

را به عنوان جواب عمومی معادله فوق هندسی در نزدیکی نقطه غیرعادی $x = 0$ به دست می آوریم.

عموماً این جواب فقط در نزدیکی مبدأ معتبر است. اکنون معادله (۱) را در نزدیکی نقطه غیرعادی $x = 1$ حل می کنیم. ساده ترین روش آن است که این جواب را به کمک جوابی که قبلاً یافته ایم، با وارد کردن متغیر مستقل جدید $t = 1 - x$ ، به دست آوریم. در این تبدیل، نقطه $x = 1$ با $t = 0$ تطبیق می یابد و معادله (۱) به

$$t(1-t)y'' + [(a+b-c+1) - (a+b+1)t]y' - aby = 0$$

تبدیل می شود، که در آن علامت پریم به معنی مشتق نسبت به t است. چون این يك معادله

۱. خلاصه ای از برخی خواص دیگر آن را می توان در کتاب زیر یافت:

A. Erdélyi (ed.), "Higher Transcendental Functions," vol. I, pp. 56-119. McGraw-Hill, New York, 1953.

فوق هندسی است، جواب عمومی آن را در نزدیکی $t = 0$ می توان با گذاشتن t به جای x و $1 + a + b - c + 1$ به جای c مستقیماً از فرمول (۶) نوشت؛ و وقتی به جای t ، $1 - x$ قرار داده شود؛ مشاهده می کنیم که جواب عمومی (۱) در نزدیکی $x = 1$ به صورت زیر است

$$y = c_1 F(a, b, a+b-c+1, 1-x) + c_2 (1-x)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c-a-b+1, 1-x) \quad (7)$$

در این حالت لازم است فرض کنیم که $c - a - b$ عدد صحیح نیست.

فرمولهای (۶) و (۷) نشان می دهند که سازگاری مقادیر ثابت در معادله (۱) این امکان را ایجاد می کند که جواب عمومی این معادله را در نزدیکی هر یک از نقاط منفردش تنها بر حسب تابع F بیان کنیم. خیلی بیش از اینها نیز می توان گفت، چرا که این مفاهیم در گروه وسیعی از معادلات دیفرانسیل کاربرد دارند. نکته کلیدی، توجه به این جنبه های کلی معادله فوق هندسی است که: ضرایب y'' ، y' ، و y چند جمله ایهای از درجه ۲، ۱، و ۰ هستند، و همچنین اولین چند جمله ای از این چند جمله ایها دارای صفرهای حقیقی متمایز است. هر معادله دیفرانسیل با این مشخصات را می توان بایک تغییر خطی متغیر مستقل، به معادله فوق هندسی تبدیل کرد، و بنابراین می توان آن را در نزدیکی نقاط غیر عادی بر حسب تابع فوق هندسی حل کرد.

برای مشخص تر کردن این نکات، معادله عمومی از این نوع را باختصار مورد بررسی

قرار می دهیم

$$(x-A)(x-B)y'' + (C+Dx)y' + Ey = 0 \quad (8)$$

که در آن $A \neq B$. اگر متغیر مستقل را به وسیله

$$t = \frac{x-A}{B-A}$$

از x به t تغییر دهیم، آنگاه $x = A$ با $t = 0$ و $x = B$ با $t = 1$ مطابقت دارند. با محاسبه ای مختصر، معادله (۸) به شکل

$$t(1-t)y'' + (F+Gt)y' + Hy = 0$$

درمی آید که در آن F ، G ، و H ترکیبایی از مقادیر ثابت در (۸) هستند و علامت پریم به معنی مشتق نسبت به t است. این یک معادله فوق هندسی است که در آن a ، b ، و c توسط روابط

$$F = c, \quad G = -(a+b+1), \quad H = -ab$$

تعریف می شوند، و بنابراین می توان آن را در نزدیکی نقاط $t = 0$ و $t = 1$ بر حسب تابع فوق هندسی حل کرد. این به معنای این است که معادله (۸) را می توان بر حسب همان تابع در نزدیکی نقاط $x = B$ و $x = A$ حل کرد.

مطالب بالا جامعیت متنوع تابع فوق هندسی $F(a, b, c, x)$ را در زمینه معادلات دیفرانسیل نشان می دهند. همچنین (در تمرین ۱) خواهیم دید که انعطاف پذیری سه ثابت

a ، b ، و c ، این امکان را فراهم می‌آورد که تابع فوق هندسی اغلب توابع آشنای آنالیز مقدماتی را به عنوان حالات خاص در برگیرد. این تابع برای اوایلر که تعدادی از خواص آن را کشف کرد شناخته شده بود؛ ولی برای اولین بار گاوس آن را در زمینه معادله فوق هندسی به نحوی منظم بررسی کرد، و هم او بود که در این ارتباط، اولین بررسی قانع کننده از همگرایی یک سری نامتناهی را ارائه کرد. کار گاوس از اهمیت تاریخی شایانی برخوردار بود، زیرا راهگشای تحولات دوربرد در بسیاری از رشته های آنالیز - نه تنها در سری های نامتناهی بلکه همچنین در نظریات عمومی معادلات دیفرانسیل خطی و توابع مختلط - بوده است. تابع فوق هندسی، به علت اثر وحدت بخش نیرومندش، اهمیت خود را در ریاضیات جدید همچنان حفظ کرده است، زیرا بسیاری از توابع خاص مهم در آنالیز پیشرفته نیز به آن مربوط اند^۱.

تمرین

۱- درستی روابط زیر را با بررسی بسطهای سری توابع طرف چپ تحقیق کنید:

$$(1+x)^p = F(-p, b, b, -x) \quad (\text{الف})$$

$$\log(1+x) = xF(1, 1, 2, -x) \quad (\text{ب})$$

$$\sin^{-1}x = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) \quad (\text{ج})$$

$$\tan^{-1}x = xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right) \quad (\text{د})$$

روابط زیر نیز صحیح اند:

$$e^x = \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(a, b, a, \frac{x}{b}\right) \quad (\text{ه})$$

$$\sin x = x \left[\lim_{a \rightarrow \infty} F\left(a, a, \frac{3}{2}, \frac{-x^2}{4a^2}\right) \right] \quad (\text{و})$$

$$\cos x = \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(a, a, \frac{1}{2}, \frac{-x^2}{4a^2}\right) \quad (\text{ز})$$

بدون توجه فرایندهای حدی به کار رفته، از صحت تساویهای فوق، اطمینان حاصل کنید.

۴- جواب عمومی هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را در نزدیکی نقطه غیر عادی ذکر شده به دست آورید:

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{3}{2} - 2x\right)y' + 2y = 0, \quad x=0 \quad (\text{الف})$$

۱. شرح مختصری راجع به گاوس و کار علمی او در پیوست ج ارائه شده است.

$$(2x^2 + 2x)y'' + (1 + 5x)y' + y = 0, x = 0 \quad (\text{ب})$$

$$(x^2 - 1)y'' + (5x + 4)y' + 4y = 0, x = -1 \quad (\text{ج})$$

$$(x^2 - x - 6)y'' + (5 + 3x)y' + y = 0, x = 3 \quad (\text{د})$$

۳- در تمرین ۲۷-۶ معادلهٔ چیشف به صورت

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$$

را، که در آن p ثابتی غیر منفی است، بررسی کردیم. به جای x ، عبارت $t = (1 - x)/2$ را بگذارید و آن را به یک معادلهٔ فوق هندسی تبدیل کنید، و نشان دهید که جواب عمومی آن در نزدیکی $x = 1$ عبارت است از

$$y = c_1 F\left(p, -p, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} F\left(p + \frac{1}{2}, -p + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$$

۴- معادلهٔ دیفرانسیل

$$x(1-x)y'' + [p - (p+2)x]y' - py = 0$$

را که در آن p عدد ثابتی است، در نظر بگیرید.

الف) در حالتی که p یک عدد صحیح نباشد، جواب عمومی را در نزدیکی $x = 0$ بر حسب توابع فوق هندسی بیابید.

ب) جواب عمومی را که در قسمت (الف) یافته‌اید بر حسب توابع مقدماتی بنویسید.

ج) وقتی $p = 1$ ، معادلهٔ دیفرانسیل به صورت

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

درمی‌آید، و جواب (ب)، دیگر جواب عمومی معادله نخواهد بود. با روش بخش ۱۶ جواب عمومی را در این حالت بیابید.

۵- برخی از معادلات دیفرانسیل، با وجودی که ظاهرشان نشان نمی‌دهد، از نوع معادلات فوق هندسی هستند. به کمک تغییر متغیر مستقل $t = e^x$ ، جواب عمومی معادلهٔ

$$(1 - e^x)y'' + \frac{1}{2}y' + e^xy = 0$$

را در نزدیکی نقطهٔ غیر عادی $x = 0$ بیابید.

$$\text{۶- الف) نشان دهید } F'(a, b, c, x) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, x)$$

ب) در تمرین ۳، فرمول مشتق‌گیری در (الف) را به کار برید و نشان دهید که تنها جوابهایی از معادلهٔ چیشف که مشتقهای آنها در نزدیکی $x = 1$ کراندارند به صورت

جمله‌ای معادلهٔ چیبیشف، مضارب ثابت $F(n, -n, 1/2, (1-x)/2)$ هستند، که در آن n يك عدد صحیح غیر منفی است.

چند جمله‌ای چیبیشف از درجهٔ n با $T_n(x)$ نمایش داده می‌شود و به وسیلهٔ رابطهٔ $T_n(x) = F(n, -n, 1/2, (1-x)/2)$ تعریف می‌شود. در پیوست د کاربرد جالبی از این چند جمله‌ایها در نظریهٔ تقریب مورد بحث واقع خواهد شد.

۳۱. نقطه در بینهایت

در فیزیک و ریاضیات محض، اغلب بررسی جوابهای معادلهٔ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (۱)$$

برای مقادیر بزرگی از متغیر مستقل، مطلوب است. برای نمونه، هرگاه متغیر زمان باشد، ممکن است بخواهیم بدانیم که رفتار دستگاه فیزیکی که توسط (۱) توصیف می‌شود در آیندهٔ دور، یعنی هنگامی که اغتشاشات گذرا تحلیل رفته‌اند، چگونه است.

برای این مقصود گسترده‌تر می‌توانیم آنچه را که قبلاً گفته‌ایم برای مطالعهٔ جوابها در نزدیکی نقطهٔ بینهایت تنظیم کنیم. دستورالعمل این کار کاملاً ساده است، زیرا اگر متغیر مستقل را از x به

$$t = \frac{1}{x} \quad (۲)$$

تغییر دهیم، آنگاه مقادیر بزرگ x با مقادیر کوچک t متناظر خواهند بود. در نتیجه، هرگاه (۲) را در (۱) اعمال کنیم، و معادلهٔ تبدیل یافته را در نزدیکی $t = 0$ حل کنیم، و آنگاه در این جوابها به جای t ، $1/x$ بگذاریم، جوابهایی از (۱) را خواهیم یافت که برای مقادیر بزرگ x معتبرند. برای انجام این کار، به فرمولهای زیر نیازمندیم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -t^2 \frac{dy}{dt} \quad (۳)$$

و

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \left(-t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} \right) (-t^2) \quad (۴)$$

اگر این عبارات در (۱) قرار داده شوند، و علامت پریم را برای مشتق نسبت به t به کار بریم، آنگاه (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

۱. از علامت $T_n(x)$ به این دلیل استفاده می‌شود که نام چیبیشف (Chebyshev) قبلاً به صورت Tchebycheff، Tchebycheff، یا Tschebycheff نوشته می‌شد.

$$y'' + \left[\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2} \right] y' + \frac{Q(1/t)}{t^4} y = 0 \quad (5)$$

نقطه $x = \infty$ را نقطه عادی، نقطه غیر عادی منظم با توانهای m_1 و m_2 ، و یا نقطه غیر عادی نامنظم معادله گویم، هرگاه نقطه $t = 0$ دارای مشخصه متناظر برای معادله تبدیل یافته (5) باشد.

به عنوان يك نمونه ساده، معادله دیفرانسیل اولر را در نظر می گیریم

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0 \quad (6)$$

مقایسه (6) و (5) نشان می دهد که معادله تبدیل یافته به صورت

$$y'' - \frac{2}{t} y' + \frac{2}{t^2} y = 0 \quad (7)$$

است. روشن است که $t = 0$ يك نقطه غیر عادی منظم معادله (7) است، و معادله شاخص آن

$$m(m-1) - 2m + 2 = 0$$

و توانها $m_1 = 2$ و $m_2 = 1$ هستند. این بدان معناست که $x = \infty$ يك نقطه غیر عادی منظم معادله (6) با توانهای 2 و 1 است.

مثال عمده ما معادله دیفرانسیل فوق هندسی زیر است:

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (8)$$

می دانیم که (8) دارای دو نقطه غیر عادی منظم متناهی است: نقطه $x = 0$ با توانهای 0 و $1-c$ ؛ و نقطه $x = 1$ با توانهای 0 و $c-a-b$. برای تعیین ماهیت نقطه $x = \infty$ ، (3) و (4) را مستقیماً در (8) می گذاریم. پس از مختصر تغییر در ترتیب جملات، معادله تبدیل یافته را چنین می یابیم

$$y'' + \left[\frac{(1-a-b) - (2-c)t}{t(1-t)} \right] y' + \frac{ab}{t^2(1-t)} y = 0 \quad (9)$$

در این معادله $t = 0$ يك نقطه غیر عادی منظم با معادله شاخص

$$m(m-1) + (1-a-b)m + ab = 0$$

یا

$$(m-a)(m-b) = 0$$

است. این نشان می دهد که توانهای معادله (9) در $t = 0$ برابر با a و b هستند، پس $x = \infty$ يك نقطه غیر عادی منظم معادله (8) با توانهای a و b است. نتیجه می گیریم که معادله فوق هندسی (8) دقیقاً دارای سه نقطه غیر عادی منظم، در نقاط 0، 1، و ∞ است که توانهای مربوطه عبارت اند از 0 و $1-c$ ، 0 و $c-a-b$ ، و a و b . در پیوسته

نشان می‌دهیم که با مشخص کردن این سه نقطه غیرعادی منظم همراه با این شرط که حداقل یکی از این توانها در هر يك از نقاط $x=0$ و $x=1$ صفر باشد، شکل معادله فوق هندسی به‌طور کامل تعیین می‌شود.

معادله دیفرانسیل کلاسیک دیگری که از اهمیت قابل توجهی برخوردار است معادله فوق هندسی متلافی است

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0 \quad (10)$$

برای درك اینکه این معادله از کجا می‌آید و چرا این نام را بر خود دارد، معادله فوق هندسی معمولی (۸) را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$s(1-s)\frac{d^2y}{ds^2} + [c - (a+b+1)s]\frac{dy}{ds} - aby = 0 \quad (11)$$

اگر متغیر مستقل را از s به $x=bs$ تغییر دهیم، آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = b \frac{dy}{dx} \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{ds^2} = b^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

و (۱۱) به صورت

$$x\left(1-\frac{x}{b}\right)y'' + \left[(c-x) - \frac{(a+1)x}{b}\right]y' - ay = 0 \quad (12)$$

تبدیل می‌شود، که علامتهای پریم نشان‌دهنده مشتق نسبت به x هستند. نقاط $x=b$ ، $x=0$ و $x=\infty$ نقاط غیرعادی منظم معادله (۱۲) هستند؛ معادله جدید از این نظر با معادله (۱۱) متفاوت است که در اینجا نقطه $x=b$ متحرك است. هرگاه b را به ∞ میل دهیم، آنگاه معادله (۱۲) به (۱۰) تبدیل می‌شود. نقطه غیرعادی در b آشکارا بر نقطه غیرعادی در ∞ منطبق می‌شود، و بسادگی دیده می‌شود که این تلاقی دو نقطه غیرعادی منظم در ∞ يك نقطه غیرعادی نامنظم در آنجا ایجاد می‌کند (تمرین ۳).

تمرین

۱- با استفاده از (۳) و (۴) نوع نقطه $x=\infty$ را برای معادلات زیر تعیین کنید:

الف) معادله لژاندر $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$

ب) معادله بسل $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$

۲- نشان دهید که تغییر متغیر وابسته‌ای که به وسیله $y = t^aw$ تعریف می‌شود، معادله (۹) را به معادله فوق هندسی

$$t(1-t)w'' + \{(1+a-b) - [a + (1+a-c) + 1]t\}w' - a(1+a-c)w = 0$$

تبدیل می‌کند. اگر a و b برابر نباشند و تفاضل آنها هم يك عدد صحیح نباشد، نتیجه بگیریم که برای مقادیر بزرگ x ، معادله فوق هندسی (۸) دارای جوابهای مستقل زیر است:

$$y_1 = \frac{1}{x^a} F\left(a, 1+a-c, 1+a-b, \frac{1}{x}\right)$$

و

$$y_2 = \frac{1}{x^b} F\left(b, 1+b-c, 1+b-a, \frac{1}{x}\right)$$

۳- تحقیق کنید که $x = \infty$ يك نقطه غیر عادی نامنظم معادله فوق هندسی متلاقی (۱۰) است.

۴- تحقیق کنید که $x = 0$ برای معادله فوق هندسی متلاقی (۱۰) يك نقطه غیر عادی منظم باتوانهای ۰ و $c-1$ است. درحالتی که c صفر یا يك عدد صحیح منفی نباشد، نشان دهید که جواب سری فروبنیوس مربوط به توان صفر عبارت است از

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{n! c(c+1) \dots (c+n-1)} x^n$$

تابمی که به وسیله سری بالا تعریف می‌شود تابع فوق هندسی متلاقی نامیده می‌شود، و معمولاً با علامت $F(a, c, x)$ نمایش داده می‌شود.

۵- معادله لاگر به صورت

$$xy'' + (1-x)y' + py = 0$$

است که در آن p يك مقدار ثابت است. ۱ از تمرین ۴ استفاده کنید و نشان دهید که تنها جوابهایی از معادله که در نزدیکی مبدأ کراندارند، مضارب ثابت $F(-p, 1, x)$ هستند، و نیز اینکه هرگاه p يك عدد صحیح غیر منفی باشد، این جوابها به صورت چند جمله‌ای اند. توابع $L_n(x) = F(-n, 1, x)$ را، که در آنها $n = 0, 1, 2, \dots$ چند جمله‌ایهای لاگرمی نامند؛ این توابع دارای موارد استعمال مهمی در مکانیک کوانتومی اتم هیدروژن هستند.

۱. ادمون لاگر (Edmond Laguerre) (۱۸۳۴-۱۸۸۶) استاد «کولژ دوفرانس» در پاریس بود، و عمدتاً در هندسه و نظریه معادلات کار کرد. وی اولین کسی بود که تذکر داد می‌توان به بیش از يك طریق يك تابع متریک «معقول» بر روی صفحه مختصات هندسه تحلیلی وضع کرد.

پیوست الف. دو اثبات همگرایی

تکمیل اثبات قضیه ۲۷-الف. فرض بر آن است که سری های

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{و} \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (۱)$$

برای $|x| < R$ همگرا هستند و $R > 0$. باید نشان دهیم چنانچه a_0 و a_1 دلخواه باشند و برای $n \geq 0$ ، a_{n+2} به وسیله رابطه بازگشتی

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = - \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k] \quad (۲)$$

تعریف شود، آنگاه سری

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (۳)$$

حداقل در همان فاصله همگراست. فرض کنید r عددی مثبت و کوچکتر از R است. از آنجا که سری (۱) در $x=r$ همگراست، و جملات سری همگرا به صفر میل می کنند و در نتیجه کراندارند، عدد مثبتی مانند M وجود دارد به قسمی که برای همه مقادیر n داریم

$$|p_n| r^n \leq M \quad \text{و} \quad |q_n| r^n \leq M$$

با اعمال این نامساویها در (۲)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leq \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|] r^k \\ &\leq \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|] r^k + M|a_{n+1}| r \end{aligned}$$

که در آن، جمله $M|a_{n+1}|r$ را به این دلیل درج کرده ایم که در زیر بدان نیاز خواهیم داشت. اکنون b_0 و b_1 را با $b_0 = |a_0|$ ، $b_1 = |a_1|$ ، و b_{n+2} (برای $n \geq 0$) را به وسیله

$$(n+1)(n+2)b_{n+2} = \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)b_{k+1} + b_k] r^k + M b_{n+1} r \quad (۴)$$

تعریف می کنیم. روشن است که برای کلیه مقادیر n داریم $0 \leq |a_n| \leq b_n$. اکنون سعی می کنیم درباره مقادیری از x که برای آنها سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (۵)$$

همگراست، اطلاعاتی به دست آوریم، و برای این منظور به اطلاعاتی در مورد رفتار نسبت b_{n+1}/b_n وقتی که $n \rightarrow \infty$ نیاز داریم. این اطلاعات را به شیوه زیر به دست می آوریم. در رابطه (۴) به جای n ابتدا $n-1$ و سپس $n-2$ می گذاریم، خواهیم داشت

$$n(n+1)b_{n+1} = \frac{M}{r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)b_{k+1} + b_k]r^k + Mb_n r$$

و

$$(n-1)nb_n = \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} [(k+1)b_{k+1} + b_k]r^k + Mb_{n-1}r$$

با ضرب اولین معادله از دومعادله بالا در r و استفاده از دومین معادله خواهیم داشت

$$\begin{aligned} rn(n+1)b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} [(k+1)b_{k+1} + b_k]r^k \\ &\quad + rM(nb_n + b_{n-1}) + Mb_n r^2 \\ &= (n-1)nb_n - Mb_{n-1}r + rM(nb_n + b_{n-1}) + Mb_n r^2 \\ &= [(n-1)n + rMn + Mr^2]b_n \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-1)n + rMn + Mr^2}{rn(n+1)}$$

و این نشان می‌دهد که

$$\left| \frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n} \right| = \frac{b_{n+1}}{b_n} |x| \rightarrow \frac{|x|}{r}$$

بنابراین سری (۵) برای $|x| < r$ همگراست، پس بر اساس نامساوی $|a_n| \leq b_n$ و آزمون مقایسه، سری (۳) نیز برای $|x| < r$ همگراست. چون r يك عدد مثبت دلخواه کوچکتر از R بود، نتیجه می‌گیریم که سری (۳) برای $|x| < R$ همگراست، و اثبات کامل است.

تکمیل اثبات قضیه ۲۹-الف. این استدلال شبیه به استدلالی است که در بالا برای قضیه ۲۷-الف ارائه کردیم، و لسی در جزئیات به اندازه کافی اختلاف وجود دارد که بررسی جداگانه‌ای را طلب کند. فرض می‌کنیم که سریهای

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{و} \quad x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (۶)$$

برای $|x| < R$ ، $R > 0$ همگرا باشند. معادله شاخص عبارت است از

$$f(m) = m(m-1) + mp_0 + q_0 = 0 \quad (۷)$$

و فقط حالتی را که در آن معادله (۷) دارای دو ریشه حقیقی m_1 و m_2 ، با $m_2 \leq m_1$ ، است در نظر می‌گیریم. باید همگرایی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (۸)$$

را بررسی کنیم. در این سری a_0 ثابت غیر صفر دلخواهی است و a_n های دیگر به طور بازگشتی بر حسب a_0 به طریق زیر تعریف می شوند:

$$f(m+n)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \quad (۹)$$

و منظور اثبات این مطلب است که هر گاه $m = m_1$ ، و نیز هر گاه $m = m_2$ و $m_1 - m_2$ يك عدد صحیح مثبت نباشد، سری (۸) در فاصله $|x| < R$ همگراست. مطلب را با مشاهده اینکه $f(m)$ را می توان به صورت

$$f(m) = (m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1 m_2$$

نوشت، آغاز می کنیم، این به ما امکان می دهد که با محاسباتی جزئی روابط

$$f(m_1 + n) = n(n + m_1 - m_2)$$

و

$$f(m_2 + n) = n(n + m_2 - m_1)$$

و در نتیجه روابط

$$|f(m_1 + n)| \geq n(n - |m_1 - m_2|) \quad (۱۰)$$

و

$$|f(m_2 + n)| \geq n(n - |m_2 - m_1|) \quad (۱۱)$$

را به دست آوریم. فرض کنید که r عددی مثبت و کوچکتر از R است. چون سری (۶) در $x = r$ همگراست، عدد ثابت $M > 0$ وجود دارد به قسمی که برای همه مقادیر n

$$|p_n| r^n \leq M \quad \text{و} \quad |q_n| r^n \leq M \quad (۱۲)$$

هر گاه در رابطه (۹)، m را برابر m_1 قرار دهیم و از روابط (۱۰) و (۱۲) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$n(n - |m_1 - m_2|) |a_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1)$$

اکنون دنباله $\{b_n\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$b_n = |a_n| \quad \text{برای} \quad 0 \leq n \leq |m_1 - m_2|$$

و

$$n(n - |m_1 - m_2|) b_n = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1) \quad (۱۳)$$

برای $|m_1 - m_2| > n$. روشن است که برای کلیه مقادیر n ، $0 \leq |a_n| \leq b_n$. ثابت خواهیم کرد که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (14)$$

برای $|x| < r$ همگراست، و برای دستیابی به این مطلب به جستجوی عبارت مناسبی برای نسبت b_{n+1}/b_n می پردازیم. در (۱۳) به جای n ، $n+1$ می گذاریم، آن را در r ضرب می کنیم و به کمک (۱۳) نتیجه را ساده می کنیم، به دست می آید

$$\begin{aligned} r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)b_{n+1} \\ = n(n - |m_1 - m_2|)b_n + Mb_n(|m_1| + n + 1) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n - |m_1 - m_2|) + M(|m_1| + n + 1)}{r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)}$$

این نشان می دهد که

$$\left| \frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_nx^n} \right| = \frac{b_{n+1}}{b_n}|x| \rightarrow \frac{|x|}{r}$$

و در نتیجه سری (۱۴) برای $|x| < r$ همگراست. اکنون از نامساویهای $0 \leq |a_n| \leq b_n$ نتیجه می گیریم که سری (۸) نیز برای $|x| < r$ همگراست؛ و از آنجا که r عدد مثبت دلخواهی کوچکتر از R فرض شده بود، نتیجه می گیریم که سری (۸) برای $|x| < R$ همگراست. اگر همه جا به جای m_1 ، m_2 بگذاریم و به جای (۱۰) از (۱۱) استفاده کنیم، آنگاه همان محاسبات ثابت می کنند که در این حالت سری (۸) برای $|x| < R$ نیز همگراست، البته مشروط به آنکه $m_1 - m_2$ يك عدد صحیح مثبت نباشد تا سری (۸) خوش-تعریف باشد.

پیوست ب. چند جمله ایهای هرمیت و مکانیک کوانتومی

مهم ترین کاربرد چند جمله ایهای هرمیت در نظریه نوسانگر همساز خطی در مکانیک کوانتومی است. معادله دیفرانسیلی که در این نظریه ظاهر می شود و ارتباط نزدیکی با معادله هرمیت دارد (تمرین ۲۷-۷)، معادله

$$\frac{d^2w}{dx^2} + (2p+1-x^2)w = 0 \quad (1)$$

است، که در آن p عدد ثابتی است. بنا به دلایلی که در انتهای این پیوست ذکر خواهند شد، فیزیکدانها تنها به جوابهایی از (۱) علاقه مندند، که وقتی $|x| \rightarrow \infty$ به صفر میل کنند.

هرگاه بخواهیم معادله (۱) را مستقیماً به وسیله سری توانی حل کنیم، به يك فرمول بازگشتی سه جمله‌ای برای ضرایب دست خواهیم یافت، و این پیچیده‌تر از آن است که فعلاً آن را مورد بررسی قرار دهیم. برای ساده کردن مسئله، متغیر وابسته جدیدی مانند y را به وسیله

$$w = ye^{-x^{2/2}} \quad (2)$$

تعریف می‌کنیم. این کار معادله (۱) را به معادله هرमित

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2py = 0 \quad (3)$$

تبدیل می‌کند. بنا بر این جوابهای مطلوب (۱) متناظر با جوابهایی از معادله (۳) هستند که قدرمطلقشان با سرعتی کمتر از $e^{x^{2/2}}$ رشد می‌کنند (وقتی $|x| \rightarrow \infty$)، و خواهیم دید که این جوابها اساساً همان چندجمله‌ایهای هرमित هستند.

فیزیکدانها با استدلال هوشمندانه زیر تبدیل (۲) را توجه می‌کنند. هنگامی که x بزرگ باشد، ثابت $2p+1$ در معادله (۱) در مقایسه با x^2 قابل اغماض است، بنابراین معادله (۱) به‌طور تقریبی به‌صورت

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = x^2 w$$

درمی‌آید. چندان دور از منطق نیست که توابع $w = e^{\pm x^{2/2}}$ را به‌عنوان جوابهای احتمالی این معادله حدس بزنیم. اکنون مشاهده می‌کنیم که

$$w' = \pm x e^{\pm x^{2/2}} \quad \text{و} \quad w'' = x^2 e^{\pm x^{2/2}} \pm e^{\pm x^{2/2}}$$

و چون برای مقادیر بزرگ x ، دومین جمله w'' در مقایسه با اولین جمله قابل صرف نظر کردن است، به نظر می‌رسد که در واقع $w = e^{x^{2/2}}$ و $w = e^{-x^{2/2}}$ «جوابهای تقریبی» (۱) باشند. اولی را کنار می‌گذاریم، زیرا وقتی $|x| \rightarrow \infty$ ، این تابع به‌صفر نزدیک نمی‌شود. بنا بر این منطقی است فرض کنیم که جواب دقیق (۱) به شکل (۲) است، به این امید که ساختمان تابع $y(x)$ ساده‌تر از $w(x)$ باشد.

فارغ از تصویری که نسبت به این استدلال می‌توان داشت، این شیوه کارآمد است. زیرا در تمرین ۲۷-۷ مشاهده کرده‌ایم که معادله هرमित (۳) دارای يك فرمول بازگشتی دوجمله‌ای

$$a_{n+2} = -\frac{2(p-n)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (4)$$

است و نیز اینکه فرمول فوق به دوجواب سری مستقل زیر منتهی می‌شود:

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \dots \quad (5)$$

و

$$y_2(x) = x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \dots \quad (6)$$

که برای کلیه مقادیر x همگرا هستند.

اکنون آهنگ رشد توابع $y_1(x)$ و $e^{x^{2/2}}$ را باهم مقایسه می کنیم. هدف این است که نشان دهیم

$$|x| \rightarrow \infty \text{ وقتی } \frac{y_1(x)}{e^{x^{2/2}}} \rightarrow 0$$

اگر و تنها اگر سری $y_1(x)$ درجایی قطع شود و یک چندجمله ای باشد، یعنی اگر و تنها اگر پارامتر p مساوی بایکی از مقادیر $0, 2, 4, \dots$ باشد. قسمت «اگر» مطلب به کمک قضیه هویتال روشن است. برای اثبات قسمت «تنها اگر»، فرض می کنیم که $p \neq 0, 2, 4, \dots$ و نشان می دهیم که در این صورت نسبت بالا به صفر میل نمی کند. برای این کار، از این مطلب که تابع $y_1(x) = \sum a_{2n} x^{2n}$ به شکل $y_1(x) = \sum a_{2n} x^{2n}$ است که ضرایب آن به وسیله رابطه (۴) و شرط $a_0 = 1$ تعیین می شوند، و نیز از اینکه $e^{x^{2/2}} = \sum b_{2n} x^{2n}$ دارای بسط سری است که در آن $b_{2n} = 1/(2^n n!)$ استفاده می کنیم، بنابراین داریم

$$\frac{y_1(x)}{e^{x^{2/2}}} = \frac{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n} x^{2n} + \dots}{b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \dots + b_{2n} x^{2n} + \dots}$$

با توجه به فرمول (۴)، تمام ضرایب صورت کسر برای اندیسهای به اندازه کافی بزرگ، همعلامت هستند، پس بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود این ضرایب را می توان مثبت انگاشت. بنابراین، برای اثبات اینکه حد کسر مورد نظر، وقتی $|x| \rightarrow \infty$ ، به صفر میل نمی کند، کافی است نشان دهیم که برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ n داریم $a_{2n} > b_{2n}$. برای اثبات این مدعا، ابتدا مشاهده می کنیم که

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -\frac{2(p-2n)}{(2n+1)(2n+2)} \quad \text{و} \quad \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{1}{2(n+1)}$$

بنابراین

$$\frac{a_{2n+2}/a_{2n}}{b_{2n+2}/b_{2n}} = -\frac{2(p-2n)2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow -2$$

از اینجا نتیجه می گیریم که برای کلیه مقادیر به اندازه کافی بزرگ n ، نامساوی

$$\frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} > \frac{3}{2} \times \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$$

برقرار است. اگر N یکی از این مقادیر n باشد، آنگاه کاربرد مکرر این نامساوی نشان می دهد که برای تمام مقادیر به اندازه کافی بزرگ k داریم،

$$\frac{a_{2N+2k}}{b_{2N+2k}} > \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{a_{2N}}{b_{2N}} > 1$$

بنابراین اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد $a_{2n}/b_{2n} > 1$ و یا $a_{2n} > b_{2n}$. استدلال فوق نشان می دهد که وقتی $x \rightarrow \infty$ ، خواهیم داشت $y_1(x)e^{-x^{1/2}} \rightarrow 0$ اگر و تنها اگر p مساوی با یکی از مقادیر $0, 2, 4, \dots$ باشد. با استدلال مشابهی همین نتیجه را برای $y_p(x)e^{-x^{1/2}}$ (به ازای $p = 1, 3, 5, \dots$) به دست می آوریم، بنابراین جوابهای مطلوب معادله هرमित، مضارب ثابت چند جمله ایهای هرमित $H_0(x), H_1(x), H_2(x), \dots$ هستند که در تمرین ۲۷-۷ تعریف شده اند.

تابع مولد و فرمول رودریگس. قبلا دیدیم که چندجمله ایهای هرमित چگونه پدید می آیند، و اکنون توجه خود را به مفیدترین خواص آنها معطوف می کنیم. اهمیت این خواص در انتهای این پیوست روشن می شود.

این چندجمله ایها غالباً به وسیله بسط سری توانی زیر تعریف می شوند:

$$e^{xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{H_2(x)}{2!}t^2 + \dots \quad (7)$$

تابع $e^{xz - z^2}$ را تابع مولد چندجمله ایهای هرमित می نامند. این تعریف دارای مزیت کارآیی برای استخراج خواص $H_n(x)$ است، و این نقطه ضعف بدیهی را دارد که کاملاً بدون انگیزه قبلی وارد بحث شده است. بنابراین، رابطه (۷) را از جوابهای سری (۵) و (۶) به دست می آوریم.

همه جوابهای چندجمله ای معادله (۳) با قرار دادن يك عدد صحيح $n \geq 0$ به جای p در این سریها و ضرب آنها در يك مقدار ثابت دلخواه به دست می آیند. اینها همگی به شکل

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \dots + a_{n-6}x^{n-6} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-2}x^{n-2} + a_n x^n \\ &= a_n x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-6}x^{n-6} + \dots \end{aligned}$$

هستند که در آن مجموع اخیر به جمله $a_0 x$ یا $a_1 x$ ختم می شود، بسته به اینکه n زوج یا فرد باشد و ضرایب آن با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند:

$$a_{k+2} = -\frac{2(n-k)}{(k+1)(k+2)} a_k \quad (8)$$

ضرایب a_{n-2}, a_{n-4}, \dots را بر حسب a_n به دست خواهیم آورد، و برای این منظور، در رابطه (۸)، به جای k ، $k-2$ می گذاریم و به دست می آوریم:

$$a_k = -\frac{2(n-k+2)}{(k-1)k} a_{k-2}$$

یا

$$a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{2(n-k+2)} a_k$$

با قرار دادن مقادیر $n-2, n-4, \dots$ و غیره به جای k ، خواهیم داشت

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2 \times 2} a_n$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{2 \times 4} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \times 2 \times 4} a_n$$

$$a_{n-6} = -\frac{(n-4)(n-5)}{2 \times 6} a_{n-4}$$

$$= -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3 \times 2 \times 4 \times 6} a_n$$

و به همین ترتیب الی آخر، و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} h_n(x) = a_n & \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2 \times 2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \times 2 \times 4} x^{n-4} \right. \\ & - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3 \times 2 \times 4 \times 6} x^{n-6} + \dots \\ & \left. + (-1)^k \frac{n(n-1) \dots (n-2k+1)}{2^k \times 2 \times 4 \dots (2k)} x^{n-2k} + \dots \right] \end{aligned}$$

این عبارت را می توان به شکل

$$h_n(x) = a_n \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

نوشت، که در آن $[n/2]$ علامت متعارف برای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $n/2$ یا مساوی با $n/2$ است. برای به دست آوردن n امین چند جمله ای هرمیت، یعنی $H_n(x)$ ، a_n را برابر با 2^n قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (9)$$

این گزینش برای مقدار a_n صرفاً به‌خاطر راحتی کار است؛ و این اثر را دارد که فرمولهای بیان‌کننده خواص گوناگون چندجمله‌ایهای هرمیت را ساده می‌سازد.

برای انتقال از (۹) به (۷) کمی از مطلب دور می‌شویم. استفاده از فرمول تعریف ضرب دوسری توانی

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) t^n$$

در مواردی که سری اول تنها شامل توانهای زوج t باشد، مطلوب نخواهد بود:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = ?$$

آنچه در اینجا می‌خواهیم انجام دهیم این است که تمام توانهای n را از هم جدا کنیم. ضربهای $a_k t^{2k} b_j t^j$ گرد هم آوریم، پس $2k + j = n$ و جملاتی که در نظر می‌گیریم به‌صورت $a_k t^{2k} b_{n-2k} t^{n-2k}$ خواهند بود. محدودیتها عبارت‌اند از $k \geq 0$ و $n - 2k \geq 0$ ، و بنابراین $0 \leq k \leq n/2$ ؛ و برای هر عدد $n \geq 0$ مشاهده می‌کنیم که k از صفر تا بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $n/2$ یا مساوی با $n/2$ تغییر می‌کند. بدین ترتیب دستورالعمل حاصل ضرب

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_k b_{n-2k} \right) t^n \quad (10)$$

را به‌دست می‌آوریم. حال اگر رابطه (۹) را درست راست رابطه (۷) اعمال و از (۱۰) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \right] t^n \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} t^n \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xt)^n}{n!} \right] \\ &= e^{-t^2} e^{2xt} = e^{2xt - t^2} \end{aligned}$$

که اثبات رابطه (۷) است.

به‌عنوان کاربردی از رابطه (۷)، فرمول دودریک را برای چندجمله‌ایهای هرمیت

ثابت می‌کنیم:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (11)$$

با توجه به رابطه ۲۵- (۹) برای ضرایب سری توانی، از رابطه (۷) خواهیم داشت

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2 t - t^2} \right)_{t=0} = e^{x^2} \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right)_{t=0}.$$

اگر متغیر جدید $z = x - t$ را معرفی و از واقعیت $\partial / \partial t = -(\partial / \partial z)$ استفاده کنیم، چون $t = 0$ متناظر با $z = x$ است، عبارت اخیر به صورت زیر درمی آید:

$$(-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \right)_{z=x} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

و اثبات کامل می شود.

تعامل. می دانیم که، برای هر عدد صحیح غیر منفی n ، تابع

$$w_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (12)$$

که تابع هرمیت از مرتبه n نامیده می شود، وقتی که $|x| \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می کند و جوابی از معادله دیفرانسیل

$$w''_n + (2n+1-x^2)w_n = 0 \quad (13)$$

است. يك خاصیت مهم این توابع این است که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_m w_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad m \neq n \quad \text{هر گاه} \quad (14)$$

این رابطه غالباً به این شکل بیان می شود که توابع هرمیت در فاصله $(-\infty, +\infty)$ متعامدند.

برای اثبات (۱۴)، مطلب را با نوشتن معادله ای آغاز می کنیم که تابع $w_m(x)$ در آن صدق می کند،

$$w''_m + (2m+1-x^2)w_m = 0 \quad (15)$$

اکنون با ضرب (۱۳) در w_m و (۱۵) در w_n و تفریق آنها، داریم

$$\frac{d}{dx} (w'_n w_m - w'_m w_n) + 2(n-m)w_m w_n = 0$$

هر گاه از این معادله از $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال بگیریم و از این واقعیت که $w'_n w_m - w'_m w_n$ در هر دو حد صفر می شود، استفاده کنیم، خواهیم دید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_m w_n dx = 0 \quad (n \neq m)$$

که رابطه (۱۴) را نتیجه می دهد.

همچنین نیاز داریم بدانیم که وقتی $m = n$ ، مقدار انتگرال (۱۴) برابر با

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (16)$$

می شود. برای اثبات این موضوع، از فرمول رودریگس (۱۱) استفاده می کنیم، واز

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx$$

به صورت زیر انتگرال جزء به جزء می گیریم:

$$u = H_n(x) \quad , \quad du = H'_n(x) dx$$

$$dv = \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \quad , \quad v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}$$

چون uv حاصل ضرب e^{-x^2} در یک چند جمله ای است، در هر دو حد صفر می شود و داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H'_n(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} H''_n(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} dx \\ &= \dots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

اکنون جمله حاوی بزرگترین توان x در $H_n(x)$ عبارت از $2^n x^n$ است، پس $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$ و آخرین انتگرال عبارت خواهد بود از

$$2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = (2^n n!)^2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

که نتیجه مورد نظر است.^۱

از این خواص تعامد می توان برای بسط تابع «دلخواه» $f(x)$ به سری هرمیت استفاده کرد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \quad (17)$$

۱. این حقیقت که انتگرال e^{-x^2} از ۰ تا ∞ برابر $\sqrt{\pi}/2$ است اغلب در ریاضیات عمومی ثابت می شود. تمرین ۳۴-۳ را ببینید.

اگر به طور صوری عمل کنیم، ضرایب a_n را می توان با ضرب (۱۷) در $e^{-x^2} H_m(x)$ و انتگرال گیری جمله به جمله از $-\infty$ تا $+\infty$ به دست آورد. با توجه به (۱۴) و (۱۶) داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = a_m 2^m m! \sqrt{\pi}$$

بنابراین (با قرار دادن n به جای m) خواهیم داشت

$$a_n = \frac{1}{2^m m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) f(x) dx \quad (18)$$

این روش صوری، مسئله ریاضی یافتن شرایطی برای تابع $f(x)$ را مطرح می کند که تحت آن شرایط، وقتی a_n ها به وسیله (۱۸) تعریف می شوند، اعتبار (۱۷) تضمین گردد. مسائلی از این نوع، بخشی از نظریه عمومی توابع متعامد هستند. برخی از کاربردهای مستقیم فیزیکی بسطهای متعامد مانند (۱۷) در پیوستهای الف و ب از فصل ششم مورد بحث قرار می گیرند.

نوسانگر همساز. همچنانکه در ابتدا متذکر شدیم، کاربرد اصلی مفاهیم ریاضی، که در بالا مورد بررسی واقع شدند، در مکانیک کوانتومی است. بحث کافی در مورد مفاهیم فیزیکی بنیادی در این زمینه، بیشک خارج از حیطه کار این پیوست است. با وجود این، درک نقش چند جمله ایهای هرمیت $H_n(x)$ و توابع هرمیت مربوطه، یعنی $e^{-x^2/2} H_n(x)$ ، بسیار ساده است.

در بخش ۲۰ نوسانگر همساز کلاسیک را بررسی کردیم، که می توان آنرا به منزله ذره ای به جرم m پنداشت که مقید به حرکت در امتداد محور x است و توسط نیروی بازگرداننده $-kx$ به نقطه تعادل $x=0$ مقید می شود. معادله حرکت آن عبارت است از

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

و دیدیم که تحت شرایط اولیه مناسب، جواب آن، نوسانگر همساز

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

است، که در آن x_0 دامنه است. همچنین یادآوری می کنیم که دوره تناوب T به وسیله $T = 2\pi \sqrt{m/k}$ تعیین می شود؛ و چون بسامد ارتعاشی ν عکس دوره تناوب است، $k = 4\pi^2 m \nu^2$. علاوه، چون انرژی جنبشی برابر با $\frac{1}{2} m (dx/dt)^2$ و انرژی پتانسیل آن برابر با $\frac{1}{2} kx^2$ است، محاسبه ساده ای نشان می دهد که انرژی کل دستگاه برابر مقدار ثابت $E = \frac{1}{2} kx_0^2$ است. روشن است که این انرژی کل می تواند هر مقدار مثبتی را اختیار کند.

در مکانیک کوانتومی، معادله موج شرودینگر برای يك نوسانگر همساز که در بالا شرح داده شد، به صورت

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\lambda\pi^2 m}{h^2} \left(E - \frac{1}{2} kx^2 \right) \psi = 0 \quad (19)$$

است، که در آن E بازهم انرژی کل، h ثابت پلانک، و جوابهای قابل قبول $\psi(x)$ به توابع موج شرودینگر موسوم اند. هرگاه برای حذف ثابت نیرو، یعنی k ، از معادله $k = 4\pi^2 m \nu^2$ استفاده کنیم، در آن صورت معادله (۱۹) را می توان به شکل

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\lambda\pi^2 m}{h^2} (E - 2\pi^2 m \nu^2 x^2) \psi = 0 \quad (20)$$

نوشت. جوابهایی از این معادله از نظر فیزیکی قابل قبول اند (یا «معقول» اند) که در شرایط زیر صدق کنند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad \text{و} \quad |x| \rightarrow \infty \quad \psi \rightarrow 0 \quad (21)$$

این جوابها (توابع موج شرودینگر) توابع ویژه این مسئله نیز نامیده می شوند، و خواهیم دید که این توابع ویژه فقط هنگامی موجودند که E دارای مقادیر خاصی به نام مقادیر ویژه باشد.

هرگاه متغیر مستقل را به

$$u = 2\pi \sqrt{\frac{\nu m}{h}} x \quad (22)$$

تغییر دهیم، معادله (۲۰) به

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \left(\frac{2E}{h\nu} - u^2 \right) \psi = 0 \quad (23)$$

تبدیل می شود و شرایط (۲۱) به صورت زیر درمی آیند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 du = 2\pi \sqrt{\frac{\nu m}{h}} \quad \text{و} \quad |u| \rightarrow \infty \quad \psi \rightarrow 0 \quad (24)$$

۱. اروین شرودینگر Erwin-Schrödinger (۱۸۸۷-۱۹۶۱) دانشمند فیزیک نظری اتریشی بود که جایزه نوبل ۱۹۳۳ را مشترکاً با دیراک (Dirac) برنده شد. تنها خبرگان می توانند ارزش علمی وی را درک کنند، مردی با علائق فرهنگی وسیع، و نویسنده ای برجسته و روشن نویس به سبک پوانکاره بود. به نوشتن کتابهای کوچک پر محتوی درباره موضوعات بزرگ تمایل داشت؛ زندگی چیست؟، علوم و انسانگرایی، طبیعت و یونانیها، که بترتیب در سالهای ۱۹۴۴، ۱۹۵۲، ۱۹۵۴ توسط انتشارات دانشگاه کمبریج در نیویورک منتشر گردیده اند.

گذشته از علایم، معادله (۲۳) دقیقاً همان شکل معادله (۱) را داراست. بنابراین می‌دانیم که این معادله دارای جوابهایی است که در شرط اول (۲۴) صدق می‌کنند، اگر و تنها اگر $2E/hv = 2n + 1$ و یا برای يك عدد صحیح غیر منفی n رابطه

$$E = hv \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (25)$$

برقرار باشد. همچنین می‌دانیم که در این حالت این جوابهای معادله (۲۳) به صورت

$$\psi = ce^{-u^{1/2}} H_n(u)$$

هستند که در آن c عدد ثابتی است. حال اگر دومین شرط (۲۴) را اعمال و از رابطه (۱۶) استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$c = \left[\frac{4\pi\nu m}{2^{2n}(n!)^2 h} \right]^{1/4}$$

بنابراین تابع ویژه مربوط به مقدار ویژه (۲۵)، به شکل

$$\psi = \left[\frac{4\pi\nu m}{2^{2n}(n!)^2 h} \right]^{1/4} e^{-u^{1/2}} H_n(u) \quad (26)$$

است، که رابطه (۲۲)، u را بر حسب x به دست می‌دهد.

فیزیکدانها علاقه تخصصی عمیقی به جزئیات خواص این توابع ویژه دارند. ولسی، برای ما این مسئله تنها برای روشن کردن علت مطرح شدن چندجمله‌ایهای هرمیت به کار می‌آید، بنابراین تنها به ذکر این نکته که فرمول (۲۵) باصطلاح ترازهای انرژی کوانتیده نوسانگر همساز را به دست می‌دهد، بسنده می‌کنیم و مطلب را بیش از این دنبال نخواهیم کرد. این بدان معناست که انرژی E تنها می‌تواند این مقادیر گسسته را اختیار کند، که البته با وضعیت کلاسیک مربوطه که در بالا توضیح داده شد تفاوت زیادی دارد. ساده‌ترین کاربرد مشخص این مفاهیم در حرکت ارتعاشی اتم‌های موجود در یک مولکول دواتمی است. هرگاه این پدیده به طور تجربی مورد بررسی قرار گیرد، دیده می‌شود که انرژی‌های مورد نظر، دقیقاً با (۲۵) مطابقت دارند.

یادداشت دربارهٔ هرمیت. شارل هرمیت (۱۸۲۲-۱۹۰۱) یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان قرن نوزدهم فرانسه است که بویژه به خاطر ظرافت و مهارت موجود در آثارش از دیگران متمایز بود. در دوران دانشجویی، مطالعهٔ متون کلاسیک ریاضیات وضعیت تحصیلی او را برهم زد و با آنکه بزم حمت از عهدهٔ امتحانات برآمد، در سن بیست و چند سالگی در ردیف ریاضیدانان خلاق طراز اول درآمد. در سال ۱۸۷۰ به مقام استادی

درسورین گمارده شد، و در آنجا نسل کاملی از ریاضیدانان مشهور فرانسوی، از جمله پیکار، بورل و پوانکاره را پرورش داد.

سرشت غیرعادی ذهن وی توسط پوانکاره چنین توصیف شده است. «وقتی با آقای هرمیت گفتگو کنید، وی هرگز از تصاویر عینی سخن نمی گوید، با این وجود بزودی معلوم می شود که انتزاعی ترین مفاهیم نزد وی مانند موجودات جاندار هستند». او به هندسه علاقه نداشت، ولی کاملاً مجذوب نظریه اعداد و آنالیز شده بود، و موضوع مورد علاقه وی توابع بیضوی بود، مبحثی که به طرق متعددی این دو زمینه را به همدیگر ربط می دهد. ممکن است خواننده بداند که سالها قبل آبل ثابت کرد که معادله درجه پنجم کلی را نمی توان با تسوابعی که در آنها تنها عملیات گویا و ریشه گیری به کار می آید، حل کرد. یکی از شگفت انگیزترین دستاوردهای هرمیت (در سال ۱۸۵۸) اثبات مقدور بودن حل این معادله به وسیله توابع بیضوی بود. اثبات سال ۱۸۷۳ او در مورد متعالی بودن e یکی دیگر از نکات برجسته حیات علمی وی بود. چندین کشف وی در ریاضیات محض، سالها بعد کاربردهای غیرمنتظره ای در فیزیک ریاضی یافت. مثلاً، فرمها و ماتریسهای هرمیتی که وی آنها را در ارتباط با مسائل معینی از نظریه اعداد ابداع کرد در تبیین مکانیک کوانتومی به وسیله هایزنبرگ در سال ۱۹۲۵ نقش حیاتی یافت، و مشاهده کردیم که چند جمله ایها و توابع هرمیت در حل معادله موج شرودینگر مفید هستند. علت روشن نیست، ولی این نکته درست به نظر می رسد که ریاضیدانان برخی از ارزشمندترین کارهای عملی خود را هنگام اندیشیدن به مسائلی انجام می دهند که بظاهر هیچ ارتباطی با واقعیت فیزیکی ندارند.

پیوست ج. گاوس

کارل فریدریش گاوس^۱ (۱۷۷۷-۱۸۵۵) بزرگترین ریاضیدان تاریخ و شاید پراستعدادترین نابغه ای بود که نامش تاکنون برجای مانده است. این چهره برجسته، که از آغاز قرن ۱۹ سرآمد اقران شد، دوران ریاضیات نوین را از همه ریاضیات ماقبل خود جدا می کند. بینش درونی و اصالت، وسعت و عمق فوق العاده دستاوردها، نمایشهای مکرر قدرت و پیگیری تقریباً فوق انسانی وی، همه و همه در یک انسان واحد چنان جمع شده بودند که برای ما نیز همچون معاصرانش چون معمایی درنیافتنی جلوه می کند.

گاوس در شهر برونسویک در شمال آلمان متولد شد. مهارت استثنایی وی در اعداد از همان اوان طفولیت وی آشکار بود، و او بعدها بشوخی می گفت که قبل از به حرف آمدن، شمارش رامی دانسته است. گفته می شود که گوته درشش سالگی نمایشنامه های کوتاهی برای یک تأثر عروسکی نوشت و کارگردانی کرد، و موسسات اولین آهنگهای رقص کودکان خود را در سن ۵ سالگی تصنیف کرد، ولی گاوس در سه سالگی اشتباهی از لیست حقوق پدرش را

تصحیح کرد^۱. پدر وی باغبان و بنا بود و نه امکانات کمک به شکوفایی استعداد فرزندش را داشت و نه به فکر چنین کاری بود. ولی، خوشبختانه قابلیت‌های قابل ملاحظه‌ی وی در محاسبات ذهنی علاقه چندین فرد با نفوذ محیط را به خود جلب کرد و سرانجام وی را مسرود توجه دوک برونسویک قرار داد. دوک تحت تأثیر این پسر بچه قرار گرفت و مخارج تحصیلات بعدی وی را ابتدا در کالج کارولین واقع در برونسویک (۱۷۹۲-۱۷۹۵)، سپس در دانشگاه گوتینگن (۱۷۹۵-۱۷۹۸)، تقبل کرد.

در کالج کارولین، گاوس به زبان‌های کلاسیک تسلط پیدا کرد، و به کوشش در آثار نیوتن، اویلر، و لاگرانژ پرداخت. در اوایل این دوره (شاید در سن چهارده یا پانزده سالگی) قضیه اعداد اول را کشف کرد، که سرانجام در سال ۱۸۹۶ بعد از کوشش‌های زیاد توسط ریاضیدانان متعدد به اثبات رسید (به یادداشت‌های مربوط به چیشف و ریمن نگاه کنید). وی همچنین روش کوچکترین مربعات را برای می‌نیم کردن خطاهای ذاتی در داده‌های تجربی کشف کرد، و قانون توزیع گاوسی (یا نرمال) در نظریه احتمالات را مطرح ساخت.

گاوس در دانشگاه، مجذوب زبان‌شناسی شد از دروس ریاضی بیزار گشت، و برای مدتی مسیر زندگی آینده‌ی وی نامعلوم بود. اما، در سن ۱۸ سالگی به یک کشف جالب هندسی توفیق یافت. این کشف باعث شد که به ریاضیات روی آورد و تا آخر عمر لذت زیادی به وی بخشید. یونانی‌های باستان روش ترسیم چندضلعی‌های منتظم با ۳، ۴، ۵، ۱۵ ضلع و همه چندضلعی‌های منتظمی را که توسط این اشکال با نصف کردن زوایا به دست می‌آیند به کمک خط‌کش و پرگار، می‌دانستند. ولی بیش از این چیزی در این باره نمی‌دانستند. مدت ۲۰۰۰ سال موضوع را کد مانده بود، تا هنگامی که گاوس این مسئله را بطور کامل حل کرد. وی ثابت کرد که هر n ضلعی منتظم وقتی و تنها وقتی قابل ترسیم است که n حاصل ضرب توانی از ۲ و اعداد اول متمایز به شکل $2^{2^k} + 1$ باشد. بویژه، هرگاه $3, 5, 17, 257, 65537$ باشد، بویژه، هرگاه $k=0, 1, 2, 3$ باشد. مشاهده می‌کنیم که هر یک از اعداد مربوطه $2^{2^k} + 1$ ، $3, 5, 17, 257, 65537$ اولین و بنابرین چندضلعی‌های منتظم با این تعداد ضلع قابل ترسیم اند^۲.

در خلال این دوران گاوس تقریباً غرق در افکاری بود که در ذهن او جریان داشتند. او شروع به نوشتن یادداشت‌های کوتاه در دفترچه خاطرات علمیش کرد بلکه بتواند کشف‌های خود را ثبت کند، زیرا تعداد این اکتشافات بیش از آن بود که بتواند بتفصیل به همه آنها پردازد.

۱. به

W. Sartorius von Waltershausen, «Gauss zum Gedächtniss.»

مراجعه کنید. این خاطرات شخصی در سال ۱۸۵۶ انتشار یافت. ترجمه‌ای از آن توسط هلن و. گاوس (که گاوس ریاضیدان پدر جدا بود) در سال ۱۹۶۶ به هزینه شخصی در شهر کلرادو اسپرینگز به چاپ رسید.

۲. جزئیات برخی از این ترسیمها در مرجع زیر آمده است:

H. Tietze, «Famous Problems of Mathematics,» chap. IX, Graylock, Baltimore, 1965.

اولین مطلب، به تاریخ ۳۰ مارس ۱۷۹۶ حاکی از قابل ترسیم بودن ۱۷ ضلعی منتظم بود، ولی حتی قبل از این، وی عمیقاً به قلمروهای دست نخورده‌ای از نظریه اعداد راه یافته بود. در سال ۱۷۹۵ قانون تقابل مربعی را کشف کرد، و خود بعداً نوشت «یکسال تمام، این قضیه فکر مرا مشغول کرد و بیشترین تلاش مرا به خود اختصاص داد تا سرانجام اثباتی برای آن یافتم»^۱. در آن هنگام نمی‌دانست که قبلاً اوپلر این قضیه را بدون اثبات و به‌طور ناقص بیان کرده است، و لواندر صورت صحیح این قضیه را با اثبات غلطی ارائه کرده است. این هسته قسمت اصلی رساله مشهور وی موسوم به تحقیقات حسابی^۲ بود که هرچند در ۱۷۹۸ کامل گردید ولی در ۱۸۰۱ به چاپ رسید^۳. صرف نظر از نتایج جزئی مربوط به ریاضیدانان پیشین، این اثر عظیم تماماً بدیع بود. معمولاً این اثر را نقطه آغاز حقیقی برای نظریه نوین اعداد می‌دانند، که رابطه آن با نظریه اعداد مانند رابطه کتاب اصول نیوتن با فیزیک و نجوم است. در صفحات مقدمه گاوس روش همنهشتی خود را برای مطالعه مسائل بخش‌پذیری مطرح می‌کند و اولین اثبات قضیه اساسی حساب را (که قضیه منحصر به فرد بودن تجزیه نیز نامیده می‌شود) به دست می‌دهد. بر اساس این قضیه، هر عدد صحیح $n > 1$ را می‌توان به‌طور منحصر به فردی به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت. قسمت اصلی کتاب عمدتاً به همنهشتی‌های درجه دوم، صورتها و باقیمانده‌ها مربوط می‌شود. آخرین بخش، نظریه کامل وی را در مورد معادله دایره بر (تقسیم دایره)، و موارد استعمال آن در بررسی ترسیم‌پذیری چندضلعیهای منتظم عرضه می‌کند. کل اثر یک شاهکار عظیم در ریاضیات محض بود، که ریاضیدانان بعد از وی بکنند و با اشکال قادر به درک آن بودند.

گاوس در این رساله خود برخورد دقیق نوین با ریاضیات را نیز پدید آورد. وی کاملاً از نوشته‌های غیر دقیق و استدلالهای آشفته پیشینیان ناراحت شده بود، و بر آن بود که آثارش از این لحاظ غیر قابل انتقاد باشند. گاوس در این مورد به یکی از دوستان خود نوشت، «مقصودم از کلمه اثبات نه به مفهومی است که قانوندانان به کار می‌برند، که برای آنها دواثبات نصفه برابر یک اثبات کامل است، بلکه اثبات به مفهوم ریاضی آن است، که نیمی از اثبات مساوی صفر است، و لازم است که هیچ تردیدی در اثبات مقدور نباشد». رساله تحقیقات با چنین روحی و با شیوه کمال یافته گاوس تدوین گردید، که موجز، دقیق،

۱. مراجعه شود به

D. E. Smith, «A Source Book in Mathematics», pp. 112-118, McGraw-Hill, New York, 1929.

این مجموعه صورتی از این قضیه و پنجمین اثبات از هشت اثباتی را که گاوس طی چند سال یافته بود دربر می‌گیرد. امروزه احتمالاً بیش از پنجاه اثبات موجود است.

2. Disquisitiones Arithmeticae

۳. از این اثر ترجمه‌ای توسط Arthur A. Clarke وجود دارد که توسط ناشر زیر انتشار یافته است،

Yale University Press, New Haven, Conn., 1966.

عاری از شاخ و برگ، و در بسیاری از موارد چنان بدقت پرداخت شده بود که تقریباً غیر قابل فهم بود. او درنامه دیگری گفت، «می دانید که بکندی می نویسم. این بیشتر به دلیل آن است که هرگز احساس رضایت نمی کنم، مگر اینکه در چند کلمه تا آنجا که ممکن است، حداکثر مطلب را بگنجانم، و نوشتن باختصار بمراتب زمان بیشتری از نوشتن به تفصیل می گیرد». یکی از پیامدهای این عادت آن است که آثارش تقریباً به همان میزان که مطالب را روشن می کنند باعث ابهام نیز می گردند، زیرا وی تلاش زیادی در حذف رد پای تسلسل فکری، که به کشفیاتش منجر می گردید، داشت. آبل اظهار داشت «وی شبیه روباهی است، که رد پایش را در شنزار با دمش از بین می برد». گاوس به چنین انتقاداتی این گونه پاسخ می داد که، هیچ معماری که برای خود احترام قایل است بعد از اتمام بنا خوب بست را باقی نمی گذارد. با این وجود، مشکل بودن مطالعه آثارش تا حد زیادی مانع نشر افکار او گردید.

رساله دکترای گاوس (در سال ۱۷۹۹) یکی دیگر از وقایع مهم تاریخ ریاضیات بود. پس از کوششهای بی نتیجه ریاضیدانان قبلی (دالامبر، اویلر، لاگرانژ، لاپلاس)، در مورد قضیه اساسی جبر، اولین اثبات قانع کننده آن در این رساله داده شد. این قضیه وجود يك ریشه حقیقی یا مختلط را برای هر معادله چند جمله ای با ضرایب حقیقی یا مختلط تضمین می کند. موفقیت گاوس دوران اثباتهای وجودی را آغاز کرد، که از آن هنگام تا کنون نقش مهمی در ریاضیات محض ایفا کرده اند. بعلاوه، در این اولین اثبات (روی هم رفته وی چهار اثبات ارائه کرد) ظاهراً گاوس اولین ریاضیدانی است که از اعداد مختلط و هندسه صفحه مختلط با اطمینان کامل استفاده کرده است.^۱

گاوس در دوره بعدی زندگی خود بیشتر به ریاضیات کار بسته متمایل شد، و گذشته از چند استثنا گنجینه عظیم اندیشه های وی در دفترچه خاطرات و یادداشت های به حال خود رها شد.

در دهه های آخر قرن هیجدهم، بسیاری از منجمین در جستجوی يك سیاره جدید بین مریخ و مشتری بودند، که بر اساس قانون «بود»^۲ باید وجود می داشت. اولین و بزرگترین سیاره در بین سیارات کوچک متعدد موسوم به سیارکها در سال ۱۸۰۱ در این حوزه کشف، و «سرس»^۳ نامیده شد. از بازی روزگار، این کشف مقارن با اثری تحسین آور از هگل فیلسوف گردید، که در آن وی منجمین را به خاطر در نظر نگرفتن فلسفه استهزا کرد: به گفته هگل، این علم می تواند، با اثبات امکان ناپذیری وجود سیارات جدید، آنها را از هدر دادن زحمات

۱. اصول این اثبات به طور خیلی روشن در کتاب زیر بیان شده است،

F. Klein, «Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint,» pp. 101-104, Dover, New York, 1945.

2. Bode's Law (1772)

3. Ceres

خود برهاند.^۱ هگل در بقیه زندگیش راه خود را ادامه داد، و بعداً به افکار تیره‌تری دچار شد. متأسفانه حتی در بهترین شرایط سیاره کوچک جدید به دشواری دیده می‌شد، و بسزوی در نور آسمان در نزدیکی خورشید ناپدید می‌گشت. داده‌های رصدی پراکنده، مسئله محاسبه نسبتاً دقیق مدار سرس را در دستور کار قرارداد تا بتوان پس از دور شدن سرس از خورشید مکان دقیق آن را دوباره یافت. منجمین اروپا برای انجام این کار ماهها بدون هیچ گونه توفیقی کوشیدند. سرانجام، گاوس به این مبارزه کشیده شد و با کمک روش کمترین مربعات خود و مهارت بی نظیرش در محاسبات عددی، این مدار را تعیین کرد، و به منجمین گفت که با تلسکوپهای خود کجا را رصد کنند، و سیاره درست در همانجا بود. پس از شکست همه خبرگان، وی موفق به کشف مجدد سرس شده بود.

این دستاورد برای او شهرت به بار آورد و موجب شد دوک حقوق وی را افزایش دهد. و در سال ۱۸۰۷ به سمت استادی نجوم منصوب شد و عنوان اولین مدیر رصدخانه جدید گوتینگن را به دست آورد. وی وظایفش را طبق عادت در حد کمال انجام می‌داد، ولی روشن شد که، وی از مشاغل اداری، شرکت در جلسات، و همه مقررات اداری خسته کننده که مستلزم شغل استادی است، بیزار است. وی همچنین علاقه چندانی به تدریس نداشت و آنرا اتلاف وقت خود و اساساً (به دلایل مختلف) آنرا برای محصلین مستعد و غیر مستعد هردو، بی فایده می‌دانست. اما هنگامی که ناگزیر از تدریس می‌شد آنرا با شایستگی تمام انجام می‌داد. یکی از شاگردان وی، ریچارد دکیند^۲ متخصص مشهور جبر بود که پس از گذشت ۵۰ سال، کلاسهای درس گاوس همچنان برایش «به عنوان جالبترین خاطره فراموش نشدنی»^۳ باقی ماند! گاوس فرصتهای زیادی برای ترک گوتینگن داشت، ولی همه پیشنهادات را رد کرد، و تا آخر عمر در آنجا باقی ماند. زندگی راحت و ساده‌ای داشت، بندرت مسافرت می‌کرد، و با انرژی فوق العاده روی مسائل متعدد ریاضی و کاربرد آنها کار می‌کرد. بغیر از علوم و خانواده اش (وی دو زن و شش فرزند داشت که دو تایشان به امریکا مهاجرت کردند) علائق عمده گاوس تاریخ و ادبیات جهان، سیاست بین المللی، و مالیه عمومی بود. وی یک کتابخانه بزرگ شامل حدود شش هزار کتاب به زبانهای متعددی، از جمله یونانی، لاتین، انگلیسی،

۱. صفحات آخر کتاب زیر را ببینید:

«De Orbitis Planetarum», vol. I of Georg Wilhelm Hegel's «Sämtliche Werke.» Frommann Verlag Stuttgart, 1965.

2. Richard Dedekind

۳. خاطرات مفصل دکیند در این درس، در کتاب زیر ارائه گردیده است:

G. Waldo Dunnington, «Carl Friedrich Gauss: Titan of Science,» pp. 259-261, Hafner, New York, 1955.

این کتاب عمده‌تاً به خاطر نقل قولهای متعددی از گاوس، به خاطر کتابشناسی آثار گاوس، و فهرست دروسی که وی بین سالهای ۱۸۰۸ تا ۱۸۵۴ پیشنهاد کرد (ولی اغلب آنها را تدریس نکرد) مفید است.

فرانسه، روسی، دانمارکی، والبنه آلمانی، داشت. ذکات وی در تنظیم مسائل مالیش از این واقعیت روشن می گردد که گرچه او اساساً باهیج آغاز کرد، املاکی از خود به جای گذارد که از صد برابر متوسط درآمد سالانه او در نیمه آخر عمرش بیشتر بود.

در دو دهه اول قرن نوزدهم، گاوس مرتباً روی مسائل نجومی کار می کرد، که مهمترین اثرش در این زمینه، مقاله نظریه حرکت اجرام فلکی^۱ در سال ۱۸۰۹ بود. این اثر بیش از يك قرن کتاب مقدس اخترشناسان در مطالعه سیارات بود. روش وی در برخورد با اختلالات، بعدها به کشف نپتون منجر گردید. گاوس نجوم را به عنوان حرفه خود و ریاضی محض را به عنوان سرگرمی تلقی می کرد و گاه و بیگاه بعضی نتایج تحقیق خصوصی خود را منتشر می کرد. اثر برجسته وی درباره سری فوق هندسی (۱۸۱۲) متعلق به همین دوران است. این نمونه ای از تلاشهای گاوس بود، سرشار از ایده های جدیدی در آنالیز که از آن هنگام تاکنون ریاضیدانان را به خود مشغول کرده است.

حدود سال ۱۸۲۵ از جانب حاکم هانوفر^۲ از وی درخواست شد که بريك مساحی از قلمرو پادشاهی نظارت کند، وجبه های گوناگون این کارش - از قبیل کار گسترده روی زمین و مثلث بندی های خسته کننده متعدد - سالها وقت وی را اشغال کرد. تصوراتی که مغزی چون مغز او با چنین تکلیفی به هدر می رود طبیعی است، ولی اندیشه های بزرگ علوم از بسیاری راههای عجیب پدید می آیند. این زحمات که ظاهراً بدون پاداش بود، به یکی از عمیق ترین و فراگیرترین خدمات وی در ریاضیات محض منجر شد، که بدون آن، تدوین نسبت عام اینشتین کاملاً غیر ممکن بود.

کار مساحی گاوس به اندازه گیری دقیق مثلثهای بزرگ واقع بر سطح زمین مربوط می شد. این محرکی بود که وی را به افکار مندرج در مقاله هندسه دیفرانسیل ذاتی رویه های کلی راجع به سطوح خمیده^۳ هدایت کند. وی در این مقاله هندسه دیفرانسیل ذاتی رویه های خمیده عمومی را بنیان نهاد^۴. در این اثر وی مختصات منحنی الخط u و v را روی يك سطح معرفی کرد و شکل دیفرانسیل درجه دوم بنیادی برای عنصر طول قوس ds را به صورت $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ به دست آورد، که امکان تعیین منحنی های ژئودزیک را فراهم می آورد؛ وی مفاهیم انحنا ی گاوسی و انحنا ی انتگرال را نیز بیان کرد^۵. نتایج

1. Theoria Motus Corporum Coelestium

2. Hanover

3. Disquisitiones generales circa superficies curvas

۴. ترجمه انگلیسی این اثر توسط A. Hiltebeitel و J. Morehead تحت عنوان زیر انتشار یافت،

«General Investigations of Curved Surfaces,» by the Raven Press, Hewlett, New York, 1965.

۵. این مفاهیم به زبان غیر فنی در کتاب زیر تشریح شده اند؛

C. Lanczos, «Albert Einstein and the Cosmic World Order,» chap. 4, Interscience-Wiley, New York, 1965.

اساسی مشخص وی عبارت بودند از قضیه مشهور به قضیه همتازا^۱، که برطبق آن انحناى گاوسى تنها وابسته به مقادیر E ، F ، و G است، و بنابراین در اثر خمش تغییرناپذیر است؛ و قضیه گاوس-بونه^۲ درباره انحناى انتگرالى درحالت مثلث ژئودزیک، که در شکل عمومى خود واقعیت اصلی هندسه دیفرانسیل نوین است. گذشته از کشفهای مفصل وی، نکته اساسی بیش گاوس در کلمه ذاتی نهفته است، زیرا وی نشان داد که چگونه می توان هندسه يك رویه را تنها روی خود رویه وبدون هیچگونه توجهی به فضایی که در آن قرار می گیرد مطالعه کرد. برای روشنتر کردن این مطلب، فرض می کنیم که موجود دوبعدی با شعوری، ساکن رویه است و از بعد سوم ویا هر چیز دیگر خارج از رویه هیچ اطلاعی ندارد. هر گاه این موجود قادر به حرکت در اطراف خود، اندازه گیری فواصل واقع بر رویه، و به تعیین کوتاهترین مسیر (ژئودزیک) بین دو نقطه باشد، قادر به اندازه گیری انحناى گاوسى در هر نقطه نیز هست و می تواند هندسه ای غنی از رویه را ایجاد کند و این هندسه اقلیدسی (مسطح) خواهد بود، اگر و تنها اگر انحناى گاوسى در همه جا صفر باشد. تعمیم این مفاهیم به بیش از دوبعد راه را برای هندسه ریمانی، آنالیز تانسوری، و اندیشه های اینشتین باز می کند.

اثر عظیم دیگر او در این دوران، مقاله سال ۱۸۳۱ وی در مورد مانده های دو مجذوری است. در اینجا وی برخی از کشفهای پیشین خود در نظریه اعداد را با کمک روش جدیدی، که همان سرخورد کاملاً جبری وی با اعداد مختلط است، تعمیم داد. وی این اعداد را به عنوان زوجهای مرتب از اعداد حقیقی تعریف کرد که عملیات جبری برای آنها به گونه ای مناسب تعریف شده اند، و با این کار به ابهاماتی که هنوز در این موضوع وجود داشت خاتمه داد، و راه را برای جبر و هندسه فضاهای n بعدی باز کرد. ولی این در مقابل هدف اصلی وی، که تعمیم مفاهیم مربوط به نظریه اعداد به قلمرو مختلط بود، جنبه فرعی داشت. وی اعداد صحیح مختلط را به صورت $a+ib$ تعریف کرد، که در آن a ، b اعداد صحیح معمولی هستند (این اعداد در حال حاضر اعداد صحیح گاوسى نامیده می شوند)؛ مفهوم جدیدی برای اعداد اول تعریف کرد که در آن ۳ همچنان عددی اول است، ولی $5 = (1-2i)(1+2i)$ اول نیست، و قضیه تجزیه منحصر به فرد به عوامل اول را برای این اعداد صحیح و اول اثبات کرد. ایده های این مقاله راهگشای نظریه اعداد جبری است، که از آن زمان تاکنون دائماً در حال پیشرفت بوده است.^۳

از دهه ۱۸۳۰ به بعد، گاوس به شکلی فزاینده به فیزیک مشغول شد، و به هر شاخه ای از فیزیک که دست می زد، آن را غنی می کرد. در نظریه کشش سطحی، مفهوم بنیادی بقای انرژی را مطرح ساخت و اولین مسئله حساب تغییرات را که شامل انتگرالی دو گانه با حدود

1. Theorema egregium

2. Bonnet

۳. مراجعه شود به

متغیر بود حل کرد. در علم نورشناسی مفهوم فاصله کانونی دستگاهی از عدسیها را تعریف کرد و عدسیهای با زاویه باز گاوسی را (که نسبتاً عاری از خطای رنگی است) برای عدسیهای شیئی تلسکوپ و دوربین اختراع کرد. او در حقیقت علم ژئومغناطیس^۱ را پدید آورد، و با همکاری دوست و همکارش ویلهلم وبر^۲ يك رصدخانه مغناطیسی عاری از آهن ساخت و با آن کار کرد، انجمن مغناطیس را برای گردآوری و چاپ مشاهداتی که در بسیاری از نقاط جهان به عمل می آید بنیان نهاد و تلگراف الکتر و مغناطیسی و مغناطیس سنج دورشته سیمی را ابداع کرد. در کتاب معروف جیمز کلارک ماکسول در مورد الکتریسیته و مغناطیس (۱۸۷۳) بارها به کار گاوس ارجاع داده شده است. در مقدمه این کتاب، ماکسول می گوید که گاوس «قدرت فکری عظیم خود را برای تدوین نظریه مغناطیس و روشهای مشاهده آن به کار گرفت، وی نه تنها به دانش ما در مورد نظریه جاذبه به مقیاسی عظیم افزود، بلکه تمامی علم مغناطیس را از نظر ابزارهای به کار رفته، روشهای مشاهده، و محاسبه نتایج، بازسازی کرد، به طوری که یادداشتهای وی در مورد مغناطیس زمینی، برای همه آنهايي که به اندازه گیری هریک از نیروهای موجود در طبیعت مشغول اند، می تواند به منزله مدلهایی از پژوهش فیزیکی قلمداد شود». در ۱۸۳۹ گاوس مقاله بنیادی خود را در خصوص نظریه عمومی نیروهای عکس مجذور منتشر کرد، که نظریه پتانسیل را به عنوان رشته ای منسجم از ریاضیات تثبیت کرد^۳. طبق معمول، وی سالهای زیاد در خصوص این مطالب اندیشیده بود، و در بین کشفهای او، می توان از قضیه دیورژانس در آنالیز برداری نوین (که قضیه گاوس نیز نامیده می شود)، قضیه اساسی مقدار متوسط برای توابع همساز و حکم بسیار نیرومندی که بعدها به «اصل دیریکله» شهرت یافت و سرانجام در ۱۸۹۹ توسط هیلبرت ثابت شد، نام برد.

تا اینجا بخش منتشر شده از کل دستاوردهای گاوس را بررسی کرده ایم، ولی قسمت چاپ نشده و خصوصی آنها نیز تقریباً به همان اندازه جالب اند. بسیاری از این آثار بعد از مرگش، پس از اینکه بخش عظیمی از مطالب یادداشتهای او، مکاتبات علمی دقیقاً تجزیه و تحلیل گردیدند و در مجموعه آثارش جای گرفتند، شناخته شدند. کتابچه یادداشتهای علمی وی را قبلاً ذکر کردیم. این کتابچه کوچک ۱۹ صفحه ای، که یکی از گرانقدرترین مدارک در تاریخ ریاضی است، تا سال ۱۸۹۸ ناشناخته ماند، تا سرانجام بین کاغذهای خانوادگی وی نزدیکی از نوه های گاوس یافت شد. این کتابچه مربوط به دوره سالهای ۱۷۹۶ تا ۱۸۱۴ و شامل ۱۴۶ حکم بسیار کوتاه از نتایج تفحصاتی است، که اغلب هفته ها یا ماهها

۱. علم خواص مغناطیسی زمین

2. Wilhelm Weber

۳. مقاله زیر از جرج گرین، گمنام مانده بود و تقریباً به طور کامل تا سال ۱۸۴۶ که مجدداً به چاپ رسید ناشناخته ماند.

«Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism», (1828).

او را مشغول کرده بود^۱. همه این مطالب کاملاً روشن می‌کند که چنانچه گاوس مطالبی را که به‌دست آورده بود و روی آنها بتفصیل کار کرده بود (ولی نزد خود نگهداشته بود) منتشر می‌کرد و هیچ‌کار دیگری انجام نمی‌داد بزرگترین ریاضی‌دان عصر خود می‌شد.

برای مثال، نظریهٔ توابع مختلط یکی از دستاوردهای اصلی ریاضیات قرن نوزدهم بود، و مطالب اصلی این رشته، قضیهٔ انتگرال کوشی (۱۸۲۸) و بسط تیلور و لورن یک تابع تحلیلی (۱۸۳۱، ۱۸۴۱) می‌باشند. درنامه‌ای که گاوس در سال ۱۸۱۱ به دوستش بسل نوشت، صریحاً صورت قضیهٔ کوشی را بیان می‌کند، و سپس تذکر می‌دهد «این قضیه بسیار زیبایی است که اثبات نسبتاً سادهٔ آنرا در فرصتی مناسب ارائه خواهم کرد. این قضیه در ارتباط با حقایق زیبایی دیگری است که مربوط به بسطهای سری هستند^۲». به این ترتیب، گاوس سالها قبل از آنهایی که رسماً به‌خاطر این یافته‌های مهم مشهور شدند، از قضیهٔ کوشی آگاه بود و احتمالاً از هر دو بسط سری نیز اطلاع داشت. ولی به‌دلایلی «فرصت مناسب» برای نشر آنها هیچگاه پیدا نشد. یک توضیح ممکن در این مورد را می‌توان در اظهار نظرهای وی درنامه‌ای یافت، که به فور کوش بویوئی^۳ نوشت. فور کوش بویوئی، دوست نزدیک سالهای دانشگاهیش بود که تا آخر عمر مکاتبات خود را با وی حفظ کرد. در این نامه می‌نویسد: «این نه‌دانش بلکه عمل یادگیری، و نه درچنگ خود داشتن بلکه عمل به‌دست آوردن است که موجب بیشترین لذت می‌گردد. وقتی مطلبی را روشن کردم و به‌پایان رساندم، آنگاه آنرا رها می‌کنم تا مجدداً وارد تاریکیها شوم». وی طبیعت سیاحی را داشت، که وقتی می‌تواند سفر دیگری را شروع کند، از صرف وقت در نوشتن خاطرات آخرین سیاحتش اکراه دارد. واقعیت این بود که، گاوس بسیار نوشت، ولی برای نشر تمامی کشفهای بنیادی خود، به‌گونه‌ای که رضایت او را جلب کند، به‌چندین عمر طولانی نیاز داشت.

مثال عمدهٔ دیگر، هندسهٔ غیر اقلیدسی است، که از لحاظ تأثیرش بر اذهان بشر متمدن با انقلاب کوپرنیک در نجوم مقایسه شده است. از زمان اقلیدس تا هنگام کودکی گاوس، اصول هندسهٔ اقلیدسی عموماً به‌عنوان ضروریات تفکر تلقی می‌شدند. ولی گریهی در ساختمان هندسهٔ اقلیدسی وجود داشت که مدت‌های مدید کانون توجه گردیده بود: اصل مشهور به اصل توازی، که بر اساس آن از هر نقطهٔ خارج از یک خط مفروض، تنها یک خط می‌توان به موازات آن خط رسم کرد. به نظر می‌رسید که این اصل از سایر اصول مستقل نباشد، و بسیاری بدون توفیق سعی کرده بودند تا آنرا به‌عنوان یک قضیه ثابت کنند. اکنون می‌دانیم که گاوس در سن ۱۵ سالگی به این تلاشها پیوست، و وی نیز با شکست مواجه گردید. ولی عدم توفیق او با دیگران تفاوت داشت، زیرا بزودی به این استنتاج تکان دهنده که از چشم همهٔ پیشینیان او

۱. مراجعه شود به:

Gauss's «Werke», vol. X., pp. 483-574, 1917.

2. «Werke», vol. VIII, p. 91, 1900.

۳. Wolfgang Bolyai. نام این دانشمند مجارستانی در کشورهای اروپایی «ولفگانگ بولیه» تلفظ می‌شود.

پوشیده مانده بود دست یافت که هندسه اقلیدسی تنها هندسه ممکن نیست. او طی سالهای متمادی به طور متناوب به این افکار مشغول بود و در حدود سال ۱۸۲۰ قضایای اصلی هندسه غیر اقلیدسی را تدوین کرد (نام هندسه غیر اقلیدسی نیز مرهون اوست)^۱. ولی وی نتایجی را که یافته بود آشکار نکرد، و در سالهای ۱۸۲۹ و ۱۸۳۲ لو باچفسکی و یانوش بویوئی^۲ (پسر فورکوش بویوئی) کارهای مستقل خود را درباره این موضوع منتشر کردند. یک دلیل کاملاً ساده برای سکوت گاوس در این خصوص وجود دارد. جو فکری آن زمان آلمان کاملاً تحت سیطره فلسفه کانت بود، و یکی از اصول پایه‌ای نظام فلسفی مذکور این بود که هندسه اقلیدسی تنها شیوه تفکر درباره فضا است. گاوس می‌دانست که این عقیده کاملاً نادرست است و اساس نظام کانتی ساختمانی سست است. ولی، وی برای زندگی خصوصی و آرام خود ارزش قایل بود، و به خاطر اجتناب از اتلاف وقتش در مشاجره با فلاسفه، آرامش خود را حفظ کرد. در سال ۱۸۲۹ به بسل چنین نوشت: «من احتمالاً برای مدتی طولانی، و شاید در تمام طول عمرم پژوهشهای گسترده خود را روی این موضوع (مبانی هندسه) به شکل قابل انتشار، در نخواهم آورد، زیرا، می‌ترسم اگر نظراتم را در این باره به طور کامل اظهار کنم، دچار فریادهای بوئوشایی‌ها شوم»^۳.

شبه همین واقعه در نظریه توابع بیضوی، که زمینه‌ای بسیار غنی در آنالیز است و ابتدا در سال ۱۸۲۷ به وسیله آبل و سپس در سالهای ۱۸۲۸-۱۸۲۹ به وسیله یاکوبی^۴ مطرح شد، نیز به وقوع پیوست. گاوس در این زمینه هیچ چیزی منتشر نکرده بود، و هیچ ادعایی نکرد، بنابراین هنگامی که تدریجاً معلوم شد که وی به بسیاری از نتایج آبل و یاکوبی حتی قبل از تولد آنان دست یافته بود عالم ریاضی مملو از تحیر شد. مرگ زودرس آبل در سال ۱۸۲۹، در سن بیست و شش سالگی موجب شد که او از این خبر کوبنده بی اطلاع بماند، ولی یاکوبی ناگزیر بود این نو میدی را تحمل کند و به کارش ادامه دهد. حقایق تاحدی توسط خود یاکوبی روشن شد. در کتاب تحقیقات (مقاله ۳۳۵)، عبارت مرموزی که درک مفهوم آن تنها با داشتن دانشی از توابع بیضوی میسر است، توجه یاکوبی را جلب کرد. یاکوبی برای اینکه تردیدهای خود را به یقین بدل سازد و در مورد آخرین کشفهای خود با گاوس گفتگو کند، چندین بار به دیدن او رفت، و گاوس هر بار دست‌نویسهای مربوط به سی سال قبل را از میز خود بیرون می کشید، و آنچه را که یاکوبی تازه به وی نشان داده بود به او نشان می‌داد. عمق آزرده‌گی خاطر یاکوبی به سهولت قابل تصور است. گاوس در این مقطع از

۱. همه آنچه را که می‌دانیم او در مورد مبانی هندسه نوشته است در کتاب زیر از وی به چاپ رسیده است:

«Werke», vol. VIII, pp. 159-268, 1900

۲. Johann Bolyai. نام این ریاضیدان در کشورهای اروپایی «یوهان بولی» تلفظ می‌شود. بوئوشا قبیله‌ای در یونان باستان بود که اهالیش به کودنی شهرت داشتند.

3. «Werke». vol. VIII, p, 200.

4. Jacobi

زندگی خود به شهرت بی اعتنا بود و در واقع مایل بود که از فشار تهیه رساله درمورد مطالبی که مدتها قبل طرح کرده بود، خلاصی یابد. یا کوبی بعد از ملاقات يك هفته‌ای خود با گاوس در سال ۱۸۴۰، به برادرش نوشت «اگر نجوم عملی این نایفه عظیم را از مسیر علمی درخشانش منحرف نکرده بود، ریاضیات اکنون در وضعیت کاملاً متفاوتی می بود».

گاوس ریاضی‌دان بزرگ، چنین کسی بود. اومرزه‌های دستاوردهای ممکن برای مردان نایفه معمولی را در موارد آنچنان متعددی درنورید که گاهی این توهم به انسان دست می‌دهد که گاوس از گونه‌ای متعالی تر بود.

پیوست د. چند جمله‌ایهای چبیشف

و خاصیت مینی‌ماکس

در تمرین ۳-۶ چند جمله‌ایهای چبیشف $T_n(x)$ را بر حسب تابع فوق هندسی به وسیله رابطه $T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$ تعریف کردیم، که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$ لازم به تذکر نیست، که این تعریف به خودی خود عملاً مبین هیچ چیز نیست، زیرا سؤال مهم این است که: این چند جمله‌ایها به چه کار می‌آیند؟ اکنون سعی خواهیم کرد به این سؤال پاسخ گوئیم.

بهرتر است مطلب را با به کار گرفتن تعریف دیگری از $T_n(x)$ آغاز کنیم. بعداً خواهیم دید که این دو تعریف با یکدیگر سازگارند. نقطه آغاز، این حقیقت است که اگر n يك عدد صحیح غیر منفی باشد، آنگاه بر اساس فرمول دوموور^۱ در نظریه اعداد مختلط داریم

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \cos^n \theta + n \cos^{n-1} \theta (i \sin \theta) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} \theta (i \sin \theta)^2 + \dots + (i \sin \theta)^n \end{aligned} \quad (۱)$$

ومی‌بینیم که $\cos n\theta$ قسمت حقیقی مجموع طرف راست است. حال جملات حقیقی در این مجموع دقیقاً آنهایی که شامل جملات توان زوج $i \sin \theta$ هستند، می‌باشند؛ و از آنجا که $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ ، روشن است که $\cos n\theta$ يك تابع چند جمله‌ای از $\cos \theta$ است. از این موضوع به عنوان تعریف چند جمله‌ای n ام چبیشف استفاده می‌کنیم: چند جمله‌ای $T_n(x)$ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\cos n\theta = T_n(\cos \theta) \quad (۲)$$

چون $T_n(x)$ يك چند جمله‌ای است، بنابراین برای کلیه مقادیر x تعریف شده است. اما، هرگاه x را به فاصله $-1 \leq x \leq 1$ مقید کنیم و بنویسیم $x = \cos \theta$ ، که در آن $0 \leq \theta \leq \pi$ ، آنگاه از رابطه (۲)، رابطه

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (۳)$$

به دست می آید. با همین محدودیتها می توان $T_n(x)$ را به شکل غریب دیگری به دست آورد، زیرا با جمع دو فرمول

$$\cos n\theta \pm i \sin n\theta = (\cos \theta \pm i \sin \theta)^n$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \frac{1}{2}[(\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta - i \sin \theta)^n] \\ &= \frac{1}{2}[(\cos \theta + i\sqrt{1 - \cos^2 \theta})^n + (\cos \theta - i\sqrt{1 - \cos^2 \theta})^n] \\ &= \frac{1}{2}[(\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - 1})^n + (\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - 1})^n], \end{aligned}$$

بنابراین

$$T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] \quad (۴)$$

نمایش صریح دیگری از $T_n(x)$ را می توان با استفاده از فرمول بسط دوجمله ای به دست آورد، که بر طبق آن رابطه (۱) به شکل

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cos^{n-m} \theta (i \sin \theta)^m$$

درمی آید. قبلا ملاحظه کرده ایم که جملات حقیقی در این مجموع با مقادیر زوج m ، یعنی با $m = 2k$ ، متناظرند، که در آن $[n/2]$ ، $0, 1, 2, \dots, k$ ، چون

$$(i \sin \theta)^m = (i \sin \theta)^{2k} = (-1)^k (1 - \cos^2 \theta)^k = (\cos^2 \theta - 1)^k$$

خواهیم داشت

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \theta (\cos^2 \theta - 1)^k,$$

و بنا بر این

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k \quad (۵)$$

از رابطه (۴) روشن می شود که $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$ ؛ ولی برای مقادیر دیگر n ، $T_n(x)$ را با سانی می توان با استفاده از یک فرمول بازگشتی محاسبه کرد. اگر بنویسیم

۱. نماد $[n/2]$ علامت متداول برای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $n/2$ است.

$$\cos n\theta = \cos[\theta + (n-1)\theta] = \cos \theta \cos (n-1)\theta - \sin \theta \sin (n-1)\theta$$

و

$$\begin{aligned}\cos (n-2)\theta &= \cos [-\theta + (n-1)\theta] \\ &= \cos \theta \cos (n-1)\theta + \sin \theta \sin (n-1)\theta\end{aligned}$$

آنگاه نتیجه خواهد شد

$$\cos n\theta + \cos (n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos (n-1)\theta$$

اگر از رابطه (۲) استفاده کنیم و به جای $\cos \theta$ ، x بگذاریم آنگاه این اتحاد مثلثاتی، فرمول بازگشتی مطلوب را به دست خواهد داد:

$$T_n(x) + T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x) \quad (۶)$$

از $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$ شروع می کنیم و از (۶) روابط $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ، $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ ، $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ، و غیره را به دست می آوریم.

شکل فوق هندسی. برای برقراری ارتباطی بین معادله دیفرانسیل چیشف و چندجمله‌ای‌های چیشف که هم اکنون آنها را تعریف کردیم، از این واقعیت استفاده می کنیم که هرگاه متغیر x را به وسیله $x = \cos \theta$ به θ تغییر دهیم، چندجمله‌ای $y = T_n(x)$ به تابع $y = \cos n\theta$ تبدیل می شود. حال تابع $y = \cos n\theta$ بوضوح جوابی از معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + n^2 y = 0 \quad (۷)$$

است، و محاسبه ساده‌ای نشان می دهد که اگر متغیر θ را مجدداً به x تغییر دهیم، معادله (۷) به معادله چیشف تبدیل می شود

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 \quad (۸)$$

به این ترتیب می دانیم که $y = T_n(x)$ يك جواب چندجمله‌ای برای (۸) است. ولی براساس تمرین ۳۰-۶ تنها جوابهای چندجمله‌ای (۸) به صورت $\left(\frac{1-x}{2}, \frac{1}{2}, -n, n\right)$ هستند؛

و چون براساس (۴)، برای هر مقدار n داریم $1 = T_n(1) = cF\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$ نتیجه می گیریم که

$$T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \quad (۹)$$

تعامد. یکی از مهم ترین خواص توابع $y_n(\theta) = \cos n\theta$ برای مقادیر مختلف n تعامد آنها در فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$ ، یعنی برقراری رابطه زیر است:

$$\int_0^\pi y_m y_n d\theta = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0, \quad \text{اگر } m \neq n \quad (10)$$

برای اثبات این مطلب، معادلات دیفرانسیلی را، که توابع $y_n = \cos n\theta$ و $y_m = \cos m\theta$ در آنها صدق می کنند، می نویسیم:

$$y''_m + m^2 y_m = 0 \quad \text{و} \quad y''_n + n^2 y_n = 0$$

با ضرب اولین معادله در y_n و دومین معادله در y_m و کم کردن آنها از هم خواهیم داشت

$$\frac{d}{d\theta}(y'_m y_n - y'_n y_m) + (m^2 - n^2) y_m y_n = 0$$

و رابطه (۱۰) را می توان با انتگرال گیری هر دو جمله این معادله از ۰ تا π بلافاصله به دست آورد، زیرا y'_m و y'_n هر دو در این نقاط انتهایی صفر می شوند و $m^2 - n^2 \neq 0$. هنگامی که در رابطه (۱۰) متغیر از θ به $x = \cos \theta$ تغییر کند، آنگاه (۱۰) به صورت

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad \text{اگر } m \neq n \quad (11)$$

درخواهد آمد. این واقعیت را معمولاً به این صورت بیان می کنند که چندجمله ایهای چیشف درفاصله $-1 \leq x \leq 1$ نسبت به تابع وزن $(1-x^2)^{-1/2}$ متعامدند. در حالت $m = n$ خواهیم داشت

$$\int_{-1}^1 \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{اگر } n \neq 0 \\ \pi, & \text{اگر } n = 0 \end{cases} \quad (12)$$

این احکام اخیر از

$$\int_0^\pi \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{اگر } n \neq 0 \\ \pi, & \text{اگر } n = 0 \end{cases}$$

با انتگرال گیری مستقیم بسادگی به دست می آیند.

درست همان گونه که در پیوست ب درمورد چندجمله ایهای هریت گفته شد، از خواص تعامد (۱۱) و (۱۲) می توان برای بسط تابع «دلخواه» $f(x)$ به صورت سری چیشف استفاده کرد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \quad (13)$$

همان دستورا عمل صوری قبلی مقادیر این ضرایب را به دست می دهد

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (14)$$

و برای $n > 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (15)$$

و بازهم مسئله حقیقی ریاضی، یافتن شرایطی است که تحت آن سری (۱۳) که a_n ها در آن توسط روابط (۱۴) و (۱۵) تعریف شده‌اند در واقع به $f(x)$ میل می‌کند.

خاصیت مینی‌ماکس. مسئله چیشف که اکنون مورد نظر است این است که ببینیم با چه دقتی می‌توان تابع x^n را در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ با چند جمله‌ایهایی از درجه $n-1$ به صورت $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ تقریب زد؛ یعنی ببینیم با انتخاب مقادیر مناسب ضرایب، مقدار

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0|$$

را تا چه حد می‌توان کوچک کرد. این به نوبه خود معادل مسئله زیر است: مینیم کردن عدد

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

در بین همه چند جمله‌ایهای $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ از درجه n که ضریب بزرگترین توان آن یک است، و در صورت امکان تعیین یک چند جمله‌ای که این مقدار مینیم را به دست می‌دهد.

از $T_1(x) = x$ و فرمول بازگشتی (۶) روشن است که وقتی $n > 0$ ، ضریب x^n در $T_n(x)$ برابر با 2^{n-1} است، و بنا بر این ضریب x^n در چند جمله‌ایهای $2^{1-n}T_n(x)$ برابر یک است. این چند جمله‌ایها مسئله چیشف را به طور کامل حل می‌کنند، به این معنی که دارای خاصیت قابل توجه زیر هستند.

خاصیت مینی‌ماکس. در بین تمام چند جمله‌ایهای $P(x)$ از درجه $n > 0$ که ضریب x^n آنها برابر یک باشد، تابع $2^{1-n}T_n(x)$ در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ دارای کمترین انحراف از صفر است:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} |2^{1-n}T_n(x)| = 2^{1-n} \quad (16)$$

اثبات. اولاً، رابطه (۱۶) بلافاصله از

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |\cos n\theta| = 1$$

نتیجه می‌گردد. برای تکمیل استدلال فرض می‌کنیم که $P(x)$ یک چند جمله‌ای از نوع مذکور باشد که برای آن

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| < 2^{1-n} \quad (17)$$

و از این فرض به تناقضی می‌رسیم. مطلب را با ذکر این نکته آغاز می‌کنیم که چندجمله‌ای $T_n(x) = 2^{1-n} \cos n\theta$ متناوباً با مقادیر مثبت و منفی $2^{1-n}, 2^{1-n}, \dots, 2^{1-n}, \dots, 2^{1-n}, \dots, 2^{1-n}$ را در $n+1$ نقطه‌ای از x که متناظر با مقادیر $0, \pi/n, 2\pi/n, \dots, n\pi/n$ برای θ هستند، اختیار می‌کند. مطابق با فرض (۱۷)، تابع $Q(x) = 2^{1-n}T_n(x) - P(x)$ در این نقاط دارای همان علامت $2^{1-n}T_n(x)$ است که بنابراین باید حداقل دارای n صفر در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ باشد. ولی این غیر ممکن است چرا که تابع $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر $n-1$ است که متحد با صفر نیست.

در این بررسی خیلی مختصر متأسفانه معلوم نیست که خاصیت مینی‌ماکس از کجا آمده است، و هیچ‌انگیزه و رهنمودی وجود ندارد که متوجه شویم چرا چندجمله‌ایهای چیشف به این طریق غیرعادی رفتار می‌کنند. امیدواریم که خواننده این تضمین ما را قبول کند که در زمینه وسیع‌تر ایده‌های بدیع چیشف این خاصیت شکفت‌انگیز کاملاً طبیعی است.^۱ برای افرادی که علاقمندند برای ریاضیاتی که فرامی‌گیرند کاربردهای مشخص بیابند، باید اضافه کنیم که خاصیت مینی‌ماکس در رابطه نزدیکی است با موقعیت مهمی که چندجمله‌ایهای چیشف در آنالیز عددی معاصر دارند.

یادداشت درباره چیشف. پافنوتی لووچ چیشف^۲ (۱۸۹۴-۱۸۲۱)

برجسته‌ترین ریاضیدان قرن نوزدهم روسیه بود. وی با هندسه‌دان مشهور روسی لوباچفسکی (۱۷۹۳-۱۸۵۶) معاصر بود، ولی آثارش تأثیر عمیق‌تری در سراسر اروپای غربی داشت و به عنوان پایه‌گذار مکتب عظیم ریاضی که در قرن گذشته در روسیه شکوفا گشته است، بشمار می‌آید.

وی در خردسالی مجذوب اسباب بازیهای مکانیکی گردید، و ظاهراً در ابتدا به علت پی بردن به اهمیت هندسه در درک طرز کار ماشین‌ها به ریاضیات جلب شد. بعد از سالهای دانشجوییش در مسکو، استاد ریاضی دانشگاه سن پترزبورگ شد، و این سمت را تا هنگام بازنشستگی حفظ کرد. پدر وی جزو اشراف روسیه بود، ولی بعد از قحطی ۱۸۴۰ دارایی خانوادگی آنچنان کم شد که چیشف مجبور شد تا آخر عمر

۱. از دانشجویانی که شکاکیت‌شان بسادگی برطرف نمی‌شود و بحق از پذیرش چنین تضمین‌هایی بدون بررسی شخصی، امتناع می‌ورزند دعوت می‌شود که به مراجع زیر مراجعه کنند:

N. I. Achieser, «Theory of Approximation», Ungar, New York, 1956;
E. W. Cheney, «Introduction to Approximation Theory», McGraw-Hill, New York, 1966;

G. G. Lorentz, «Approximation of Functions», Holt, New York, 1966.
2. Pafnuty Lvovich Chebyshev

به قناعت روی آورد و هرگز ازدواج نکرد. وی بخش عمده‌ای از درآمد اندک خود را صرف مدل‌های مکانیکی و مسافرت‌های گاه و بیگاه به اروپای غربی می‌کرد، که در آنجا بویژه از دیدن آسیابهای بادی و ماشینهای بخار و نظایر آنها لذت می‌برد.

چیشف ریاضیدانی جامع بود که استعداد نادری در حل مسائل مشکل ریاضی به کمک روشهای مقدماتی داشت. اکثر تلاش وی صرف ریاضیات محض گردید، ولی آنچنان که از گفته زیرین وی مشهود است به کاربردهای عملی آثارش نیز توجه داشت: «جدا کردن ریاضیات از خواسته‌های عملی علوم اصرار در عقیم کردن گاو ماده با جدا کردن از گاو نر است» وی در زمینه‌های بسیاری کار کرد، ولی مهمترین دستاوردهایش در زمینه احتمالات، نظریه اعداد، و تقریب توابع بود (که به علت علاقه‌اش به دستگاههای ماشینی به آن رهنمون گردید).

وی در احتمالات، مفاهیم امید ریاضی و واریانس را برای مجموعه‌ها و واسطه‌های حسابی متغیرهای تصادفی مطرح ساخت، و اثبات زیبا و ساده‌ای برای قانون اعداد بزرگ مبتنی بر آنچه اکنون به نامساوی چیشف مشهور است ارائه کرد، و در خصوص قضیه حد مرکزی بررسیهای گسترده‌ای انجام داد. او به عنوان پدر معنوی سلسله‌ای طولانی از دانشمندان مشهور روسی از قبیل آ. آ. مارکوف، س. ن. برنشتاین، آ. ن. کولموگوروف، آ. ی. خینچین، و دیگران که در پیشبرد نظریه ریاضی احتمالات سهم داشتند تلقی می‌گردد.

چیشف در اواخر دهه ۱۸۴۵ درآمد کردن برخی آثار اوایلر برای انتشار همکاری کرد. به نظر می‌رسد که این کار سبب بذل توجه وی به نظریه اعداد، و بویژه به مسئله بسیار مشکل توزیع اعداد اول، شده باشد. همان‌طور که خواننده احتمالا می‌داند هر عدد اول عدد صحیحی مانند $p > 1$ است که بر هیچ عددی جز یک و خودش بخش پذیر نیست. با آسانی دیده می‌شود که چندتای اول این اعداد عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ... روشن است که توزیع اعداد اول در بین اعداد صحیح مثبت تقریباً نامنظم است؛ زیرا هر چه جلوتر برویم، به نظر می‌آید که این اعداد با فراوانی کمتر و کمتری ظاهر می‌شوند، ولی باز هم اعداد اول متوالی بسیاری وجود دارند که بین آنها تنها یک عدد زوج وجود دارد. مسئله یافتن قانون حاکم بر چگونگی وقوع این اعداد - دانستن دلیل آن - یکی از مسائلی است که صدها سال کنجکاوی دانشمندان را برانگیخته است. در سال ۱۷۵۱ اوایلر عدم موفقیت خود در این خصوص را چنین بیان کرد: «ریاضیدانان تا به امروز به بحث کوشیده‌اند نظم و ترتیبی در دنباله اعداد اول یابند، و دلایلی برای باور داریم که ذهن بشری هیچگاه این راز را کشف نخواهد کرد.» کوششهای بسیاری برای یافتن فرمول ساده‌ای برای n امین عدد اول و تعداد دقیق اعداد اول واقع در بین اولین n عدد صحیح و مثبت صورت گرفته است. همه این

گونه تلاشها با شکست مواجه شده‌اند، و پیشرفت واقعی تنها هنگامی حاصل گردید که ریاضیدانان به‌جای روش قبلی، به جستجوی اطلاعاتی در مورد توزیع متوسط اعداد اول در بین اعداد صحیح و مثبت پرداختند. متداول است که تعداد اعداد اول کوچکتر از عدد مثبت x یا مساوی با آن را با $\pi(x)$ نمایش دهیم. به این ترتیب $\pi(1) = 0$ ، $\pi(2) = 1$ ، $\pi(3) = 2$ ، $\pi(4) = 2$ ، $\pi(5) = 3$ ، $\pi(6) = 3$ ، $\pi(7) = 4$ ، $\pi(8) = 4$ ، $\pi(9) = 4$ ، $\pi(10) = 4$ ، $\pi(11) = 5$ ، $\pi(12) = 5$ ، $\pi(13) = 6$ ، $\pi(14) = 6$ ، $\pi(15) = 6$ ، $\pi(16) = 6$ ، $\pi(17) = 7$ ، $\pi(18) = 7$ ، $\pi(19) = 8$ ، $\pi(20) = 8$ ، $\pi(21) = 8$ ، $\pi(22) = 8$ ، $\pi(23) = 9$ ، $\pi(24) = 9$ ، $\pi(25) = 9$ ، $\pi(26) = 9$ ، $\pi(27) = 9$ ، $\pi(28) = 9$ ، $\pi(29) = 10$ ، $\pi(30) = 10$ ، $\pi(31) = 11$ ، $\pi(32) = 11$ ، $\pi(33) = 11$ ، $\pi(34) = 11$ ، $\pi(35) = 11$ ، $\pi(36) = 11$ ، $\pi(37) = 12$ ، $\pi(38) = 12$ ، $\pi(39) = 12$ ، $\pi(40) = 12$ ، $\pi(41) = 13$ ، $\pi(42) = 13$ ، $\pi(43) = 14$ ، $\pi(44) = 14$ ، $\pi(45) = 14$ ، $\pi(46) = 14$ ، $\pi(47) = 15$ ، $\pi(48) = 15$ ، $\pi(49) = 15$ ، $\pi(50) = 15$ ، $\pi(51) = 16$ ، $\pi(52) = 16$ ، $\pi(53) = 17$ ، $\pi(54) = 17$ ، $\pi(55) = 17$ ، $\pi(56) = 17$ ، $\pi(57) = 17$ ، $\pi(58) = 18$ ، $\pi(59) = 19$ ، $\pi(60) = 19$ ، $\pi(61) = 20$ ، $\pi(62) = 20$ ، $\pi(63) = 20$ ، $\pi(64) = 20$ ، $\pi(65) = 20$ ، $\pi(66) = 20$ ، $\pi(67) = 21$ ، $\pi(68) = 21$ ، $\pi(69) = 21$ ، $\pi(70) = 21$ ، $\pi(71) = 22$ ، $\pi(72) = 22$ ، $\pi(73) = 23$ ، $\pi(74) = 23$ ، $\pi(75) = 23$ ، $\pi(76) = 23$ ، $\pi(77) = 23$ ، $\pi(78) = 23$ ، $\pi(79) = 24$ ، $\pi(80) = 24$ ، $\pi(81) = 24$ ، $\pi(82) = 24$ ، $\pi(83) = 25$ ، $\pi(84) = 25$ ، $\pi(85) = 25$ ، $\pi(86) = 25$ ، $\pi(87) = 25$ ، $\pi(88) = 25$ ، $\pi(89) = 26$ ، $\pi(90) = 26$ ، $\pi(91) = 26$ ، $\pi(92) = 26$ ، $\pi(93) = 26$ ، $\pi(94) = 27$ ، $\pi(95) = 27$ ، $\pi(96) = 27$ ، $\pi(97) = 28$ ، $\pi(98) = 28$ ، $\pi(99) = 28$ ، $\pi(100) = 29$ ، $\pi(101) = 30$ ، $\pi(102) = 30$ ، $\pi(103) = 31$ ، $\pi(104) = 31$ ، $\pi(105) = 31$ ، $\pi(106) = 31$ ، $\pi(107) = 32$ ، $\pi(108) = 32$ ، $\pi(109) = 33$ ، $\pi(110) = 33$ ، $\pi(111) = 33$ ، $\pi(112) = 33$ ، $\pi(113) = 34$ ، $\pi(114) = 34$ ، $\pi(115) = 34$ ، $\pi(116) = 34$ ، $\pi(117) = 34$ ، $\pi(118) = 35$ ، $\pi(119) = 35$ ، $\pi(120) = 35$ ، $\pi(121) = 35$ ، $\pi(122) = 35$ ، $\pi(123) = 36$ ، $\pi(124) = 36$ ، $\pi(125) = 36$ ، $\pi(126) = 36$ ، $\pi(127) = 37$ ، $\pi(128) = 37$ ، $\pi(129) = 37$ ، $\pi(130) = 37$ ، $\pi(131) = 38$ ، $\pi(132) = 38$ ، $\pi(133) = 38$ ، $\pi(134) = 38$ ، $\pi(135) = 38$ ، $\pi(136) = 38$ ، $\pi(137) = 39$ ، $\pi(138) = 39$ ، $\pi(139) = 40$ ، $\pi(140) = 40$ ، $\pi(141) = 40$ ، $\pi(142) = 40$ ، $\pi(143) = 40$ ، $\pi(144) = 40$ ، $\pi(145) = 40$ ، $\pi(146) = 40$ ، $\pi(147) = 40$ ، $\pi(148) = 40$ ، $\pi(149) = 41$ ، $\pi(150) = 41$ ، $\pi(151) = 42$ ، $\pi(152) = 42$ ، $\pi(153) = 42$ ، $\pi(154) = 42$ ، $\pi(155) = 42$ ، $\pi(156) = 42$ ، $\pi(157) = 43$ ، $\pi(158) = 43$ ، $\pi(159) = 43$ ، $\pi(160) = 43$ ، $\pi(161) = 43$ ، $\pi(162) = 43$ ، $\pi(163) = 44$ ، $\pi(164) = 44$ ، $\pi(165) = 44$ ، $\pi(166) = 44$ ، $\pi(167) = 45$ ، $\pi(168) = 45$ ، $\pi(169) = 45$ ، $\pi(170) = 45$ ، $\pi(171) = 45$ ، $\pi(172) = 45$ ، $\pi(173) = 46$ ، $\pi(174) = 46$ ، $\pi(175) = 46$ ، $\pi(176) = 46$ ، $\pi(177) = 46$ ، $\pi(178) = 46$ ، $\pi(179) = 47$ ، $\pi(180) = 47$ ، $\pi(181) = 48$ ، $\pi(182) = 48$ ، $\pi(183) = 48$ ، $\pi(184) = 48$ ، $\pi(185) = 48$ ، $\pi(186) = 48$ ، $\pi(187) = 48$ ، $\pi(188) = 48$ ، $\pi(189) = 48$ ، $\pi(190) = 48$ ، $\pi(191) = 49$ ، $\pi(192) = 49$ ، $\pi(193) = 50$ ، $\pi(194) = 50$ ، $\pi(195) = 50$ ، $\pi(196) = 50$ ، $\pi(197) = 51$ ، $\pi(198) = 51$ ، $\pi(199) = 52$ ، $\pi(200) = 52$ ، $\pi(201) = 52$ ، $\pi(202) = 52$ ، $\pi(203) = 52$ ، $\pi(204) = 52$ ، $\pi(205) = 52$ ، $\pi(206) = 52$ ، $\pi(207) = 52$ ، $\pi(208) = 52$ ، $\pi(209) = 52$ ، $\pi(210) = 52$ ، $\pi(211) = 53$ ، $\pi(212) = 53$ ، $\pi(213) = 53$ ، $\pi(214) = 53$ ، $\pi(215) = 53$ ، $\pi(216) = 53$ ، $\pi(217) = 53$ ، $\pi(218) = 53$ ، $\pi(219) = 53$ ، $\pi(220) = 53$ ، $\pi(221) = 53$ ، $\pi(222) = 53$ ، $\pi(223) = 54$ ، $\pi(224) = 54$ ، $\pi(225) = 54$ ، $\pi(226) = 54$ ، $\pi(227) = 54$ ، $\pi(228) = 54$ ، $\pi(229) = 55$ ، $\pi(230) = 55$ ، $\pi(231) = 55$ ، $\pi(232) = 55$ ، $\pi(233) = 56$ ، $\pi(234) = 56$ ، $\pi(235) = 56$ ، $\pi(236) = 56$ ، $\pi(237) = 56$ ، $\pi(238) = 56$ ، $\pi(239) = 57$ ، $\pi(240) = 57$ ، $\pi(241) = 57$ ، $\pi(242) = 57$ ، $\pi(243) = 57$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \quad (1A)$$

این حکم همان قضیه اعداد اول مشهور است، و تا آنجا که معلوم است، گاوس هیچگاه نتوانست حتی قسمتی از اثبات آن را عرضه کند.

چیشف بی اطلاع از حدس گاوس، اولین ریاضیدانی بود که به یک نتیجه گیری محکم در مورد این مسئله دست یافت. وی در ۱۸۴۸ و ۱۸۵۰ ثابت کرد که برای همه مقادیر به اندازه کافی بزرگ x

$$0.9213 \dots < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < 1.055 \dots \quad (19)$$

و نیز ثابت کرد که در صورت وجود حد (۱۸) این حد باید برابر یک باشد^۱. به عنوان نتیجهٔ جنبی این کار، وی اصل برتران را نیز ثابت کرد: برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ یک عدد اول p موجود است به طوری که $2n \leq p < n$. تلاشهای چیشف وی را به اثبات نهایی قضیهٔ اعداد اول رهنمون نکرد (این امر در سال ۱۸۹۶ به وقوع پیوست)، ولی باعث تشویق بسیاری از ریاضیدانان دیگر شد تا کار روی این مسئله را دنبال کنند. در پیوست ه، در یادداشت مربوط به ریمان به این موضوع بازخواهیم گشت.

بیوست ه . معادلہ ریمان

هدف ما در این پیوست درك ساختمان معادله فوق هندسی گاوس است

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0. \quad (1)$$

در بخشهای ۳۰ و ۳۱ دیدیم که این معادله دقیقاً سه نقطه غیر عادی منظم در $x=0$ ، $x=1$ ، و $x=\infty$ دارد، و نیز حداقل یکی از توانها در هر یک از نقاط $x=0$ و $x=1$ صفر است.

۱. عدد واقع در طرف چپ (۱۹)، $A = \log 2^{1/2} \times 3^{1/3} \times 5^{1/5} \times 30^{-1/30}$ و عدد واقع در طرف راست $A/5$ است.

ثابت خواهیم کرد که با این خواص معادله (۱) به طور کامل تعیین می شود، به این معنا که هرگاه این فرضها را در معادله عمومی

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

به کار گیریم، آنگاه (۲) لزوماً به شکل (۱) خواهد بود.

مطلب را با یادآوری این نکته از بخش ۳۱ آغاز می کنیم که هرگاه متغیر مستقل در (۲) از x به $1/x$ تغییر داده شود، آنگاه (۲) به

$$y'' + \left[\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2} \right] y' + \frac{Q(1/t)}{t^2} y = 0 \quad (3)$$

تبدیل می گردد، که پریم ها نمایش دهنده مشتق نسبت به t هستند. از معادله (۳) روشن می شود که $x = \infty$ يك نقطه غیر عادی منظم (۲) خواهد بود هرگاه این نقطه، نقطه عادی معادله نباشد، و توابع

$$\frac{1}{t^2} Q\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{و} \quad \frac{1}{t} P\left(\frac{1}{t}\right)$$

هر دو در $t = 0$ تحلیلی باشند.

اکنون به طور صریح فرض می کنیم که (۲) دارای نقاط غیر عادی منظم $x = 0$ ، $x = 1$ ، و $x = \infty$ است و همه نقاط دیگر عادی هستند. در نتیجه $xP(x)$ در $x = 0$ و $(x-1)P(x)$ در $x = 1$ تحلیلی است، و نیز تابع $x(1-x)P(x)$ برای کلیه مقادیر متناهی x تحلیلی است:

$$x(x-1)P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4)$$

اگر جایگزینی $x = 1/t$ را انجام دهیم، آنگاه (۴) به

$$\frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) P\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{t}\right)^n$$

تبدیل می شود، بنا بر این

$$\frac{1}{t} P\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{t}\right)^n = \frac{1}{1-t} \left(a_0 t + a_1 + \frac{a_2}{t} + \dots \right)$$

چون $x = \infty$ يك نقطه غیر عادی منظم (۲) است، این تابع باید در $t = 0$ تحلیلی باشد. نتیجه می گیریم که $a_1 = a_2 = \dots = 0$ ، و بنا بر این (۴) چنین به دست می دهد

$$P(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \quad (5)$$

که در آن A و B اعدادی ثابت هستند. همین طور، تابع $(x-1)^2 Q(x)$ برای تمامی مقادیر متناهی x تحلیلی است، بنا بر این

$$x^r(x-1)^r Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\frac{1}{t^r} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^r Q \left(\frac{1}{t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{t} \right)^n$$

$$\frac{1}{t^r} Q \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{t^r}{(1-t)^r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{t} \right)^n$$

$$= \frac{1}{(1-t)^r} (b_0 t^r + b_1 t + b_2 + \frac{b_r}{t} + \dots) \quad (۶)$$

مانند گذشته، فرض اینکه $x = \infty$ يك نقطه غیر عادی منظم (۲) است، به این نتیجه منتهی می شود که (۶) باید در $t = 0$ تحلیلی باشد، و بنا بر این $b_r = b_{r+1} = \dots = 0$

$$Q(x) = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}{x^r(x-1)^r} = \frac{C}{x} + \frac{D}{x^r} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{(x-1)^r} \quad (۷)$$

اکنون کراندار بودن (۶) در نزدیکی $t = 0$ به این مفهوم است که برای مقادیر بزرگ x ، $x^r Q(x)$ کراندار است، بنا بر این

$$x^r \left(\frac{C}{x} + \frac{E}{x-1} \right) = x^r \left[\frac{(C+E)x - C}{x(x-1)} \right]$$

نیز کراندار است و $C+E=0$. این امر به ما امکان می دهد که (۷) را به صورت

$$Q(x) = \frac{D}{x^r} + \frac{F}{(x-1)^r} - \frac{C}{x(x-1)} \quad (۸)$$

بنویسیم، و بر اساس روابط (۵) و (۸)، معادله (۲) به شکل

$$y'' + \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \right) y' + \left[\frac{D}{x^r} + \frac{F}{(x-1)^r} - \frac{C}{x(x-1)} \right] y = 0 \quad (۹)$$

درمی آید. اکنون نماهای مربوط به نقاط غیر عادی منظم ۰، ۱، و ∞ را بترتیب با α_1 و α_2 ، β_1 و β_2 ، γ_1 و γ_2 نشان می دهیم. این اعداد ریشه های معادلات شاخص در این سه نقطه اند:

$$m(m-1) + Am + D = 0$$

$$m(m-1) + Bm + F = 0$$

$$m(m-1) + (2-A-B)m + (D+F-C) = 0$$

دو معادله اول این معادلات را می توان مستقیماً با بررسی (۹) نوشت، ولی، به دست آوردن

سومین معادله به مقدار کمی محاسبه مبتنی بر (۳) نیاز دارد. هر گاه این معادلات را به شکل

$$m^2 + (A-1)m + D = 0$$

$$m^2 + (B-1)m + F = 0$$

$$m^2 + (1-A-B)m + (D+F-C) = 0$$

بنویسیم، آنگاه به کمک روابط شناخته شده‌ای که ریشه‌های معادله درجه دوم را با ضرایب آن ربط می‌دهند، خواهیم داشت

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - A \quad , \quad \alpha_1 \alpha_2 = D$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 - B \quad , \quad \beta_1 \beta_2 = F \quad (10)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = A + B - 1 \quad , \quad \gamma_1 \gamma_2 = D + F - C$$

از ستون اول روشن می‌شود که

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad (11)$$

و با به کار بردن (۱۰)، معادله (۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y'' + \left(\frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{x} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{x-1} \right) y' + \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2}{x^2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{(x-1)^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2 - \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}{x(x-1)} \right] y = 0 \quad (12)$$

این معادله را معادلهٔ ریمان نامند، و (۱۱) به اتحاد ریمان مشهور است.

مضمون کیفی این استنتاج قابل توجه را می‌توان به شرح زیر بیان کرد: شکل دقیق (۲) به طور کامل توسط این شرط که این معادله صرفاً دارای سه نقطهٔ منفرد منظم در $x=0$ ، $x=1$ و $x=\infty$ باشد و با مشخص کردن مقادیر نماهای آن در هر یک از این نقاط تعیین می‌گردد.

اکنون اگر این شرط اضافی را که حداقل یک نما در هر یک از نقاط $x=0$ و $x=1$ صفر باشد، مثلاً $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ، اعمال کنیم، آنگاه با مختصری ساده کردن و با کمک (۱۱)، معادلهٔ ریمان به

$$x(1-x)y'' + [(1-\alpha_2) - (\gamma_1 + \gamma_2 + 1)x]y' - \gamma_1 \gamma_2 y = 0$$

تبدیل می‌شود، که با استفاده از علامتهای متداول $a = \gamma_1$ ، $b = \gamma_2$ ، $c = 1 - \alpha_2$ بوضوح به معادله گاوس (۱) بدل می‌گردد. به همین دلیل گاهی معادله (۱۲)، معادلهٔ فوق هندسی تعمیم یافته نامیده می‌شود.

این نتایج صرفاً گامهای اولیهٔ نظریهٔ گسترده معادلات دیفرانسیل است که توسط ریمان بنیان نهاده شد. یکی از اهداف ایسن نظریه آن است که به طریقی تا حد ممکن ساده، همهٔ معادلات دیفرانسیلی را مشخص کنیم که جوابهای آنان بر حسب تابع فوق هندسی گاوس

قابل بیان است. هدف دیگر دست یافتن به يك دسته بندی منظم از كلیه معادلات دیفرانسیل با ضرایب گویا، بر حسب تعداد و ماهیت نقاط غیر عادی این معادلات است. واقعیت شگفت انگیزی که از این دسته بندی پدیدار می شود، آن است که در واقع تمامی چنین معادلاتی را که در ریاضی-فیزیک ظاهر می شوند می توان از طریق تلاقی، از يك معادله واحد با پنج نقطه غیر عادی منظم که در آنها تفاوت بین نماها در هر يك از نقاط $1/2$ است، به دست آورد^۱.

یادداشت دربارهٔ ریمان. هیچکدام از متفکران گذشته، در ریاضیات قرن بیستم تأثیری ژرفتر از برنهارد ریمان^۲ (۱۸۲۶-۱۸۶۶) نداشته اند. وی فرزند يك کشیش فقیر روستایی در شمال آلمان بود. آثار او یلر و لژاندر را هنگامی مطالعه کرد که هنوز در دبیرستان به سر می برد، و گفته می شود که رساله لژاندر را دربارهٔ نظریهٔ اعداد در کمترین یک هفته کاملاً درک کرد. وی خجول و فروتن بود، و از استعداد فوق العادهٔ خود اطلاع چندانی نداشت، بنا بر این درس ۱۹ سالگی وارد دانشگاه گوتینگن شد تا برای رضای خاطر پدرش الهیات بخواند و همانند پدرش کشیش شود. خوشبختانه این لقمهٔ لذت از گله یش پایین نرفت، و با نظر موافق پدرش، به ریاضی تغییر رشته داد.

حضور گاوس افسانه ای خود به خود گوتینگن را به مرکز جهان ریاضی تبدیل کرده بود. ولی گاوس - به خصوص برای دانشجویان تازه وارد - دور از دسترس بود، و تنها بعد از گذشت يك سال ریمان این محیط ناخوشایند را ترك گفت و به دانشگاه برلین رفت. در آنجا دیریکله ویا کوبی به او دوستانه توجه کردند و او مطالب زیادی از هر دوی آنان فرا گرفت. دو سال بعد به گوتینگن بازگشت و در آنجا درجهٔ دکترایش را در سال ۱۸۵۱ اخذ کرد. در خلال هشت سال بعد از آن به فقر جانکاهی دچار بود و معظم ترین آثارش را خلق کرد. در سال ۱۸۵۴ به سمت «مدرس بدون حقوق»، که در آن زمان اولین سمت دانشگاهی محسوب می شد، منصوب گردید. گاوس در سال ۱۸۵۵ در گذشت، و از دیریکله به عنوان جانشین وی به گوتینگن دعوت شد. دیریکله به هر طریقی که می توانست ریمان را یاری داد، ابتدا با اختصاص مستمری اندکی

۱. درك كاملی از این بحثهای پیشرفته تر نیازمند اطلاعاتی در مورد اصول عمدهٔ آنالیز مختلط است. باین وجود، خواننده ای که این اطلاعات را در دست نداشته باشد می تواند از مراجع زیر برداشتهای مفیدی داشته باشد:

E. T. Whittaker and G. N. Watson, «Modern Analysis,» pp. 203-208, Cambridge, London, 1935;

یا
E. D. Rainville, «Intermediate Differential Equations,» chap. 6, Macmillan, New York. 1964.

2. Bernhard Riemann

(در حدود يك دهم حقوق يك استاد)، و سپس با ارتقاء وی به سمت استادیاری. در سال ۱۸۵۹ وی نیز درگذشت، و ریمان به عنوان استاد به جای دیریکله منصوب گردید. سالهای فقر و تنگدستی ریمان به پایان رسید، اما دیگر سلامت وی از دست رفته بود. او برای فرار از سرما و رطوبت شمال آلمان چند بار به ایتالیا سفر کرد و در آخرین سفر، در سن ۳۹ سالگی، به مرض سل درگذشت. ریمان کوتاه زیست، و آثار نسبتاً کمی منتشر کرد، اما آثار وی برای همیشه مسیر ریاضیات را در آنالیز، هندسه، و نظریه اعداد تغییر داد^۱.

اولین مقاله چاپ شده وی رساله دکترای مشهور سال ۱۸۵۱ او درباره نظریه عمومی توابع مختلط است^۲. هدف اصلی ریمان در این تز رهانیدن مفهوم تابع تحلیلی از هر وابستگی به عبارات صریح، از قبیل سری های توانی، و در عوض تکیه روی اصول کلی و مفاهیم هندسی بود. وی نظریه اش را بر اساس آنچه امروزه معادلات کوشی-ریمان نامیده می شوند، بنا کرد، ابزار مبتکرانه رویه های ریمان را برای روشن کردن ماهیت توابع چند مقداری به وجود آورد، و به قضیه گسترش ریمان دست یافت. گاوس بندرت به دستاوردهای ریاضی معاصرانش علاقه نشان می داد، ولی در گزارش رسمیش به دانشگاه، کار ریمان را با این عبارات بگرمی ستود: «رساله عرضه شده توسط آقای ریمان شواهد متقاعدکننده ای از بررسیهای جامع و نافذ ایشان، در بخشهایی از موضوع که آنها را در رساله خود مورد بررسی قرار داده است، به دست می دهد، و حاکی از ذهنی خلاق، فعال، واقعاً ریاضی و نیروی ابداعی پر بار و درخشان می باشد». ریمان بعدها این مفاهیم را در مطالعه توابع فوق هندسی و توابع آبلی به کار گرفت. در کارش روی توابع آبلی بر ترکیب قابل ملاحظه ای از استدلال هندسی و بینش فیزیکی اتکا کرد که عامل اخیر به صورت اصل دیریکله در نظریه پتانسیل ظاهر گشت. او رویه های ریمانی را به عنوان پلی بین آنالیز و هندسه به کار گرفت که بیان هندسی عمیق ترین خصائص تحلیلی توابع را امکان پذیر ساخت. قدرت شهودی نیرومندش وی را غالباً قادر می ساخت تا با تجسم ساده اشکال ممکن رویه های بسته و انجام آزمایشهای فرضی فیزیکی روی این سطوح به کشف چنین خواصی نایل آید (مثلاً بیان وی از قضیه ریمان-رخ^۳). روشهای هندسی ریمان در آنالیز مختلط آغاز واقعی توپولوژی را تشکیل داد، که مبحثی غنی از هندسه در رابطه با

۱. مجموعه آثار ریاضی وی به نام «Gesammelte Mathematische Werke» (که در سال ۱۹۵۳ به وسیله انتشارات Dover مجدداً به چاپ رسید) تنها يك جلد است، که دوسوم آن متشکل از مطالبی است که پس از مرگ وی انتشار یافته است. از نه مقاله ای که ریمان خود به چاپ رساند تنها پنج مقاله در مورد ریاضیات محض بود.

2. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, in «Werke,» pp. 3-43.

3. Roch

خواصی از اشکال است که تحت تغییر شکلهای پیوسته تغییر نمی کنند.

درسال ۱۸۵۴ از وی يك رساله آزمایشی به منظور آزمایش پذیرش برای تدریس (بدون حقوق) در دانشگاه خواسته شد، و پاسخ وی اثر غنی دیگری بود که تأثیر نازدودنی آن در ریاضیات دوران مابین مشهود است.^۱ مسئله ای که وی برای خود انتخاب کرد این بود که شرایط دیریکله (۱۸۲۹) را برای قابلیت نمایش توابع توسط سری فوریه تجزیه و تحلیل کند. یکی از این شرایط این بود که تابع باید انتگرال پذیر باشد. ولی این به چه معنی بود؟ دیریکله از تعریف انتگرال پذیری کوشی استفاده کرده بود، که تنها در مورد توابعی که پیوسته یا حداقل دارای تعدادی متناهی نقاط ناپیوسته باشند، به کار می رفت. برخی از توابعی که در نظریه اعداد ظاهر می گردند ریمان را به فکر تعمیم این تعریف انداختند. وی مفهوم انتگرال ریمان را آنچنان که هم اکنون در اکثر کتابهای درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می آید بنانهاد، شرایط لازم و کافی برای وجود چنین انتگرالی را به دست آورد، و شرایط دیریکله برای اعتبار بسط فوریه را تعمیم داد. کانتور^۲ در نظریه مشهور خود درباره مجموعه ها مستقیماً از مسئله ای که در این مقاله مطرح شد الهام گرفته است، و این ایده ها به نوبه خود به مفهوم انتگرال لِبِگ و حتی انواع عمومی تر انتگرال منجر گردید. به این ترتیب پژوهشهای راهگشای ریمان گامهای نخستین در شاخه جدید دیگری از ریاضیات، یعنی نظریه توابع حقیقی بودند.

قضیه بازآرایش ریمان در نظریه سری های نامتناهی يك نتیجه ضمنی مقاله ای بود که هم اکنون شرح آن گذشت. وی با مثال دیریکله، که نشان می داد مجموع يك سری همگرای مشروط را می توان با تعویض ترتیب جملاتش تغییر داد، آشنا بود:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \log 2 \quad (13)$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \log 2. \quad (14)$$

روشن است که مجموعه های این دوسری مختلف ولی جملات آنها یکی هستند؛ زیرا در (۱۴) به دنبال دوجمله مثبت اول (۱۳)، اولین جمله منفی آن و سپس به دنبال دوجمله مثبت بعدی، دومین جمله منفی می آید، و به همین ترتیب تا آخر ادامه می یابد. ریمان ثابت کرد که می توان ترتیب جملات هر سری همگرای مشروط را آنچنان تغییر داد که سری حاصل به هر مجموع از قبل تعیین شده اختیاری همگرا شود و یا به $+\infty$ یا $-\infty$ واگرا گردد.

برای انتصاب به مدرسی بدون حقوق، ریمان موظف بود علاوه بر رساله

1. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, in «Werke,» pp. 227-264.

2. Cantor

آزمایشی، سخنرانی دفاعیه‌ای در مقابل اعضای دانشکده، عرضه کند. معمول بود که داوطلب سه موضوع را پیشنهاد می‌کرد و رئیس گروه معمولاً اولی را می‌پذیرفت. ریمان نسنجیده مبانی هندسه را به عنوان سومین موضوع ذکر کرد، و این موضوع عمیقی بود که وی برایش آمادگی نداشت ولی ذهن گاوس را به مدت ۶۰ سال مشغول کرده بود. طبیعتاً، گاوس کنجکاو بود که ببیند چگونه این داوطلب بخصوص «بانیروی ابتکار پر بار و درخشان» با چنین مسئله‌ای دست و پنجه نرم می‌کند، و علیرغم میل ریمان این مطلب موضوع سخنرانی شد. ریمان بلافاصله سایر مسائل مورد علاقه‌اش در آن هنگام — به گفته خود او «پژوهشهای درمورد ارتباط بین الکتریسیته، مغناطیس، نور، و نیروی ثقل» — را کنار گذاشت و در دو ماه سخنرانیش را نوشت. نتیجه این سخنرانی یکی از درخشانترین شاهکارهای کلاسیک ریاضیات و احتمالاً مهم‌ترین سخنرانی علمی است که تاکنون برگزار شده است.^۱ گفته شده است که گاوس نیز به شگفت آمده و هیجان زده شده بود.

سخنرانی ریمان که به گونه‌ای غیر فنی ارائه شد تعمیم گسترده‌ای از همه هندسه‌های شناخته شده، اعم از اقلیدسی و غیر اقلیدسی بود. این مبحث اکنون هندسه ریمانی خوانده می‌شود؛ و صرف نظر از اهمیت شایان آن در ریاضیات محض، پس از ۶۰ سال چهارچوب کاملاً مناسبی برای نظریه نسبیت عام اینشتین گردید. مانند اغلب اندیشه‌های مهم علمی، اگر جزئیات فنی هندسه ریمانی را کنار بگذاریم و روی جنبه‌های اصلیش تکیه کنیم، درک آن بسیار ساده می‌شود. اکنون ذکر می‌کنیم که دیفرانسیل ذاتی رویه‌های خمیده، که گاوس ۲۵ سال پیشتر آن را کشف کرده بود به میان می‌آوریم. هر گاه رویه‌ای واقع در فضای سه بعدی به صورت پارامتری توسط سه تابع $x = x(u, v)$ ، $y = y(u, v)$ ، و $z = z(u, v)$ تعریف شود، آنگاه u و v را می‌توان به عنوان مختصات نقاط واقع بر رویه تعبیر کرد. روی رویه، فاصله ds بین دو نقطه نزدیک به هم (u, v) و $(u + du, v + dv)$ به وسیله صورت دیفرانسیلی درجه دوم گاوس به دست می‌آید

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

که در آن E ، F ، و G توابعی از u و v هستند. این صورت دیفرانسیلی محاسبه طول منحنیهای واقع بر رویه و یافتن منحنیهای ژئودزیک (یا منحنیهای کوتاهترین فاصله)، و محاسبه انحناهای گاوسی سطح را در هر نقطه — بدون توجه به فضای پیرامون — ممکن می‌سازد. ریمان با کنار گذاشتن فرض اقلیدسی بودن فضای پیرامون و با مطرح

1. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, in «Werke», pp. 272-286.

یک ترجمه آن در کتاب زیر یافت می‌شود:

D. E. Smith, «A Source Book in Mathematics,» McGraw-Hill, New York, 1929.

کردن مفهوم بسلائی n بعدی پیوسته از نقاط (x_1, x_2, \dots, x_n) این مطلب را تعمیم داد. وی سپس يك فاصله مفروض دلخواه (یا متریک) ds بین نقاط نزدیک

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ و } (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n)$$

را به وسیله صورت دیفرانسیلی درجه دوم، وضع کرد:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j \quad (15)$$

که در آن g_{ij} ها توابع مناسبی از x_1, x_2, \dots, x_n هستند و دستگاههای متفاوت g_{ij} ها، روی بسلاهای مورد بحث، هندسههای ریمانی متفاوتی را تعریف می کنند. گامهای بعدی وی بررسی مفهوم انحنا برای این بسلاهای ریمانی و پژوهش در حالت خاص انحنای ثابت، بود. همه آنها متکی به يك سلسله محاسبات حجم بود، که ریمان در سخنرانی خود از روی ملاحظه آنها را حذف کرد، ولی این محاسبات در مقاله ای در مورد هدایت گرما که پس از مرگش انتشار یافت آورده شده اند. وی در این مقاله به طور صریح تانسور انحنای ریمان را معرفی کرد، که در حالت $n=2$ به انحنای گاوسی تبدیل می شود، و نشان داد که صفر شدن آن تانسور شرط لازم و کافی برای معادل بودن متریک درجه دوم مفروض با متریک اقلیدسی است. از این نقطه نظر، تانسور انحنا، میزان انحراف هندسه ریمانی تعریف شده به وسیله فرمول (15) را از هندسه اقلیدسی نشان می دهد. اینشتین این مفاهیم را در يك جمله خلاصه کرده است: «رابطه هندسه ریمانی فضای n بعدی با هندسه اقلیدسی فضای n بعدی نظیر رابطه هندسه عمومی رویه های خمیده با هندسه صفحه است».

معنای فیزیکی منحنی های ژئودزیک به ساده ترین صورت خود در نتیجه زیر از اصل همیلتون^۱ در حساب تغییرات ظاهر می شود: هر گاه ذره ای مقید به حرکت روی يك رویه خمیده باشد هیچ نیرویی به آن وارد نشود، آنگاه این ذره در امتداد يك منحنی ژئودزیک حرکت خواهد کرد^۲. تعمیم صریحی از این مفهوم، هسته نظریه نسبیت عام را تشکیل می دهد، که اساساً يك نظریه گرانشی است. اینشتین هندسه فضا را به عنوان يك هندسه ریمانی در نظر گرفت که در آن انحنا و منحنی های ژئودزیک به وسیله توزیع ماده تعیین می شود؛ در این فضای خمیده، سیارات روی منحنی های ژئودزیک در مدارهای خود حول خورشید می گردند، بجای اینکه بوسیله نیروی گرانشی مرموزی که هرگز کسی واقعاً ماهیت آن را درک نکرده است روی مسیرهای خمیده کشیده شوند.

در سال ۱۸۵۹ ریمان تنها اثر خود در نظریه اعداد را به چاپ رساند، مقاله ای کوتاه ولی فوق العاده عمیق که در کمتر از ۱۵ صفحه نوشته شده است و به قضیه اعداد

1. Hamilton

۲. این مطلب در پیوست ب از فصل ۹ ثابت شده است.

اول اختصاص دارد^۱. این تلاش عظیم آغازگر امواج نیرومندی درچندین شاخه از ریاضیات محض شد، و شاید تأثیر آن پس از گذشت هزار سال دیگر هنوز حس شود. نقطه آغاز وی اتحاد قابل توجهی بود که یک قرن قبل از آن توسط اوپلر کشف شده بود: اگر s یک عدد حقیقی بزرگتر از یک باشد، آنگاه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - (1/p^s)} \quad (16)$$

که عبارت طرف راست نمایش دهنده حاصل ضرب اعداد $(1 - p^{-s})^{-1}$ برای کلیه اعداد اول p است. برای فهم چگونگی پیدایش این اتحاد، توجه می کنیم که برای $|x| < 1$ داریم $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ ، بنابراین برای هر p داریم

$$1 - (1/p^s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots$$

با ضرب این سریها به ازای کلیه اعداد اول p ، و با یادآوری اینکه هر عدد صحیح $n > 1$ به طور منحصر به فرد قابل بیان به صورت حاصل ضرب توانهایی از اعداد اول مختلف است، مشاهده می کنیم که

$$\begin{aligned} \prod_p \left(\frac{1}{1 - (1/p^s)} \right) &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \end{aligned}$$

که همان اتحاد (۱۶) است. مجموع سری طرف چپ (۱۶) آشکارا تابعی از متغیر حقیقی $s > 1$ است، و این اتحاد رابطه ای بین رفتار این تابع و خواص اعداد اول برقرار می کند. خود اوپلر از این ارتباط به طریق گوناگون بهره برداری کرد، ولی ریمان فکرمی کرد که دستوری به خصصتهای عمیق تر توزیع اعداد اول تنها با پذیرفتن s به عنوان متغیر مختلط می تواند حاصل شود. وی تابع حاصل را با $\zeta(s)$ نمایش داد، که از آن هنگام به تابع زتای ریمان مشهور شده است.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^s} + \dots, \quad s = \sigma + it$$

وی در مقاله اش چندین خاصیت مهم این تابع را به اثبات رساند، و به نحو چشمگیری

1. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, in «Werke», pp. 145-153.

صورت قضیه اعداد اول در یادداشت مربوط به چبیشف در پیوست د را ملاحظه کنید.

تعدادی دیگر از خواص آن را بسادگی و بدون اثبات بیان کرد. در طول يك قرن که از مرگ وی می گذرد، بسیاری از بهترین ریاضیدانان جهان در تلاش برای اثبات این مطالب از حداکثر توان خود بهره گرفته و شاخه های جدید پرباری از آنالیز را به وجود آوردند. اولین موفقیت در سال ۱۸۹۳ توسط ژ. آدامار^۱ حاصل شد، و گذشته از يك استثنا تمامی مطالب همان گونه که ریمان انتظار داشت، به اثبات رسید.^۲ این استثنا فرض مشهور ریمان است که: تمامی صفرهای $\zeta(s)$ واقع در نوار $0 \leq \sigma \leq 1$ روی خط مرکزی $\sigma = 1/2$ قرار می گیرند. امروزه این مسئله به عنوان مهم ترین مسئله حل نشده ریاضی باقی مانده است، و شاید مشکل ترین مسئله ای باشد که تا کنون به ذهن بشر خطور کرده است. در یادداشت پراکنده ای که پس از مرگ وی در مقالاتش به دست آمده است، وی اظهار می کند که این قضایا «از فرمولی برای تابع $\zeta(s)$ نتیجه می شوند که هنوز به قدر کافی آن را ساده نکرده ام که قابل انتشار باشند».^۳ در سال ۱۹۴۴ آدامار در نوشته ای پیرامون این یادداشت پراکنده با ناراحتی قابل درکی چنین متذکر می شود که «هنوز کمترین تصویری درخصوص اینکه این فرمول چه می توانست باشد نداریم».^۴ وی می افزاید: «به طور کلی، بصیرت ریمان عمیقاً هندسی بود، ولی این امر در مورد یادداشت وی درخصوص اعداد اول صحت ندارد، یادداشتی که در آن این بصیرت به نیرومندترین و مرموزترین شکل پدیدار شده است».

1. J. Hadamard

۲. تحقیقات آدامار او را به اثبات قضیه اعداد اول در سال ۱۸۹۶ هدایت کرد. مراجعه شود به E. C. Titchmarsh, «The Theory of the Riemann Zeta Function,» chap. 3, Oxford University Press, London, 1951.

این کتاب دارای يك فهرست مراجع با ۳۲۶ عنوان است.

3. «Werke» p. 154.

4. «The Psychology of Invention in the Mathematical Field,» p. 118, Dover, New York, 1954.

برخی توابع خاص فیزیک ریاضی دائلود از سایت (ریاضی سرا) www.riazisara.ir

۳۲. چند جمله‌ای‌های لژاندر

این بخش و بخش بعد تماماً به موضوع تکنیکی تعریف چند جمله‌ای‌های لژاندر و اثبات تعدادی از خواص ویژه آنها اختصاص یافته است. طبیعی است که منظور از این دستگاه تفصیلی، و به‌طور کلیتر علت توجه ما به این چند جمله‌ای‌ها مورد سؤال قرار گیرد. ساده‌ترین پاسخ آن است که چند جمله‌ای‌های لژاندر در فیزیک ریاضی کاربردهای فراوانی دارند، و این کاربردها به این دستگاه وابسته‌اند. به‌خاطر روشن شدن دانشجوی علاقمند، زمینه فیزیکی و چندین کاربرد نمونه از آنها در پیوست الف مورد بحث قرار گرفته‌اند. ولی، جواب دیگری وجود دارد، که از جنبه کاربردی کمتری برخوردار است و برای بررسی بعدی ما در مورد توابع بسل نیز همین قدر صادق است؛ و آن عبارت از این است که مطالعه توابع خاص و ویژگیهای تک‌تک آنها عاملی است در جهت ایجاد تعادل در مقابل وفور ایده‌های مجردی که گاهی اوقات به نظر می‌رسد بر ریاضیات مستولی شده‌اند. علاوه بر این، چندین موضوع را که بطور طبیعی در متن این فصل پیش می‌آیند خاطر نشان ساخته ایم و امیدواریم که برای همه دانشجویان ریاضی مورد توجه قرار گیرد: تابع گاما و فرمول $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$ ؛ کسر مسلسل لامبرت برای تانژانت،

$$\tan x = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \dots}}}$$

و سری‌های مشهور

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

که مجموعه‌شان توسط اویلر در اوایل قرن هجدهم کشف شد و دوباره به‌طور تعجب‌آوری در رابطه با صفرهای توابع بسل ظاهر می‌شوند.

اکنون خودچندجمله‌ای‌های لژاندر را از طریق معادله فوق‌هندسی، بررسی می‌کنیم. در بخش ۲۷، از معادله لژاندر برای تشریح روش یافتن جوابهای سری توانی معادلات دیفرانسیل در نقاط عادی استفاده کردیم. به‌دلایلی که در پیوست الف شرح داده خواهد شد، این معادله را به‌صورت

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (1)$$

می‌نویسیم، که در آن n نمایشگر عددی صحیح و غیر منفی است. خواننده به‌خاطر دارد که کلیه جوابهای معادله (۱) که در بخش ۲۷ به‌دست آمد، در فاصله $-1 < x < 1$ تحلیلی هستند. ولی در موارد کاربردی، مفیدترین جوابها آنهايي هستند که در نزدیکی $x = 1$ کراندارند، و برای راحت‌تر تشخیص دادن اینگونه جوابها، تغییر متغیر مستقل x به $z = (1-x)/2$ را در نظر می‌گیریم. این امر $x = 1$ را با $z = 0$ متناظر می‌کند و (۱) تبدیل به

$$z(1-z)y'' + (1-2z)y' + n(n+1)y = 0 \quad (2)$$

می‌شود، که در آن نمادهای پریم نمایش دهنده مشتق نسبت به z می‌باشند. این يك معادله فوق‌هندسی با $a = -n$ ، $b = n+1$ ، و $c = 1$ است، و بنا بر این در نزدیکی $z = 0$ دارای جواب چندجمله‌ای

$$y_1 = F(-n, n+1, 1, z) \quad (3)$$

است. از آنجا که هر دو توان معادله (۲) در مبدأ صفرند ($m_1 = 0$ و $m_2 = 1 - c = 0$)، باروش بخش ۱۶ جواب دومی را جستجو می‌کنیم. این جواب دوم $y_2 = v y_1$ است، و با انتگرالگیری‌های ساده مشاهده می‌کنیم که

۱. آدرین ماری لژاندر Adrien Marie Legendre (۱۷۵۲-۱۸۳۳) طی پژوهش خود راجع به جاذبه گرانشی بیضی‌وارها با چندجمله‌ای‌هایش مواجه شد. او يك ریاضیدان خیلی خوب فرانسوی بود که متأسفانه فرصت آن را نیافت که ببیند چگونه اکثر بهترین کارهایش، در انتگرال بیضوی، نظریه اعداد و روش کمترین مربعات به‌وسیله دستاوردهای افراد جوانتر و توانا ترکنار گذاشته می‌شود. به‌عنوان نمونه، او ۴۰ سال از عمر خود را وقف پژوهش روی انتگرالهای بیضوی نمود، و رساله دوجلدیش در این زمینه تازه به‌چاپ رسیده بود که کشفیات آبل و زاکوبی این مبحث را به‌طور کلی دگرگون نمود. یکی از صفات برجسته وی بلندی نظرش بود، که براساس آن بکرات از کارهای بهتر و نوتری که کار خود او را منسوخ می‌کرد، استقبال می‌نمود.

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dt} = \frac{1}{y_1^2} e^{\int \frac{y_2 - 1}{y_1(1-t)} dt}$$

$$= \frac{1}{y_1^2 t(1-t)} = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{y_1^2(1-t)} \right]$$

چون y_1 يك چند جمله‌ای، با جمله ثابت يك است، عبارت داخل كروشه درطرف راست تحلیلی و به صورت $1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ می باشد و داریم

$$v' = \frac{1}{t} + a_1 + a_2 t + \dots$$

نتیجتاً $v = \log t + a_1 t + \dots$ ، بنابراین

$$y_2 = y_1(\log t + a_1 t + \dots)$$

و جواب عمومی (۲) در حوالی مبدأ برابر است با

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2. \quad (۴)$$

به خاطر وجود جمله $\log t$ در y_2 ، روشن است که (۴) در حوالی صفر کراندار است اگر و تنها اگر $c_2 = 0$. هر گاه در (۳)، به جای t ، $(1-x)/2$ بگذاریم، نتیجه می شود که جوابهایی از (۱) که در حوالی $x=1$ کراندارند دقیقاً همان مضارب ثابت چندجمله‌ای $F[-n, n+1, 1, (1-x)/2]$ هستند.

این مطلب ما را به سوی تعریف اساسی رهنمون می سازد. n امین چندجمله‌ای لژاندر که آنرا با $P_n(x)$ نشان می دهند به صورت زیر تعریف می گردد

$$P_n(x) = F\left[-n, n+1, 1, \frac{1}{2}(1-x)\right] = 1 + \frac{(-n)(n+1)}{(1!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right) + \dots$$

$$+ \frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \dots$$

$$+ \frac{(-n)(-n+1) \dots [-n+(n-1)](n+1)(n+2) \dots (2n)}{(n!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)}{(1!)^2 2} (x-1) + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2 2^2} (x-1)^2$$

$$+ \dots + \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} (x-1)^n. \quad (۵)$$

از نتایج بخش ۲۷ می دانیم که $P_n(x)$ يك چندجمله‌ای از درجه n است که بسته به آنکه n زوج یا فرد باشد، تنها شامل توانهای زوج یا فرد است. بنابراین آنرا می توان به صورت

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots \quad (۶)$$

نوشت، و این مجموع اگر n زوج باشد به a_0 و اگر n فرد باشد به $a_1 x$ ختم می شود. از رابطه (۵) روشن است که برای هر n داریم $P_n(1) = 1$ ، و با توجه به رابطه (۶) برای $P_n(-1) = (-1)^n$ نیز محرز است.

فرمول (۵) به صورت فعلی، برای مطالعه $P_n(x)$ بسیار نامناسب است، لذا به جستجوی چیز ساده تری می پردازیم. می توانیم هر جمله در (۵) را بسط دهیم، و توانهای همانند x را جمع کنیم و نتیجه را به صورت (۶) مرتب سازیم، ولی این کاری بیش از حد پر زحمت و غیر ضروری است. کاری که خواهیم کرد، توجه به این مطلب است که از رابطه (۵) نتیجه می شود که $a_n = (2n)! / (n!)^2$ و a_{n-2} و a_{n-4} ، ...، را به طور بازگشتی بر حسب a_n محاسبه می کنیم. آنچه در اینجا مورد نیاز است، فرمول $2n-2$ - (۹) می باشد که در آن n جانشین p و $2-k$ جانشین n شده است:

$$a_k = - \frac{(n-k+2)(n+k-1)}{(k-1)k} a_{k-2}$$

یا

$$a_{k-2} = - \frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n+k-1)} a_k$$

k را برابر با n ، $n-2$ ، ... می گیریم، نتیجه می شود

$$a_{n-2} = - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n$$

$$a_{n-4} = - \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} a_n$$

والی آخر، بنابراین (۶) به صورت زیر درمی آید:

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} \right. \\ \left. + \dots + (-1)^k \frac{n(n-1) \dots (n-2k+1)}{2^k k! (2n-1)(2n-3) \dots (2n-2k+1)} x^{n-2k} + \dots \right]. \quad (۷)$$

از آنجا که

$$n(n-1) \dots (n-2k+1) = \frac{n!}{(n-2k)!}$$

$$\begin{aligned}
 & (2n-2k+1)(2n-2k+3) \dots (2n-3)(2n-1) \\
 &= \frac{(2n-2k+1)(2n-2k+2)(2n-2k+3) \dots (2n-2)(2n-1)2n}{(2n-2k+2) \dots (2n-2)2n} \\
 &= \frac{(2n)!}{(2n-2k)!} \frac{1}{2^k(n-k+1) \dots (n-1)n} = \frac{(2n)!(n-k)!}{(2n-2k)!2^k n!}
 \end{aligned}$$

ضریب x^{n-2k} در رابطه (۷) برابر می‌شود با

$$(-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} \frac{(2n-2k)! 2^k n!}{(2n)!(n-k)!} = (-1)^k \frac{(n!)^2 (2n-2k)!}{k! (2n)!(n-k)!(n-2k)!}$$

به کمک این رابطه، (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (۸)$$

که در آن $[n/2]$ نماد متداول برای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $n/2$ یا مساوی با $n/2$ است. برای دستیابی به فرمولی از این هم فشرده‌تر، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{2^n k! (n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \\
 &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{2^n k! (n-k)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^2)^{n-k} (-1)^k
 \end{aligned}$$

هرگاه در مجموع اخیر k را از ۰ تا n تغییر دهیم و توجه کنیم که این امر حاصلجمع را تغییر نخواهد داد (زیرا درجه جملات اضافه شده کمتر از n و در نتیجه مشتق n ام آنها صفر است)، آنگاه خواهیم دید که

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{n-k} (-1)^k$$

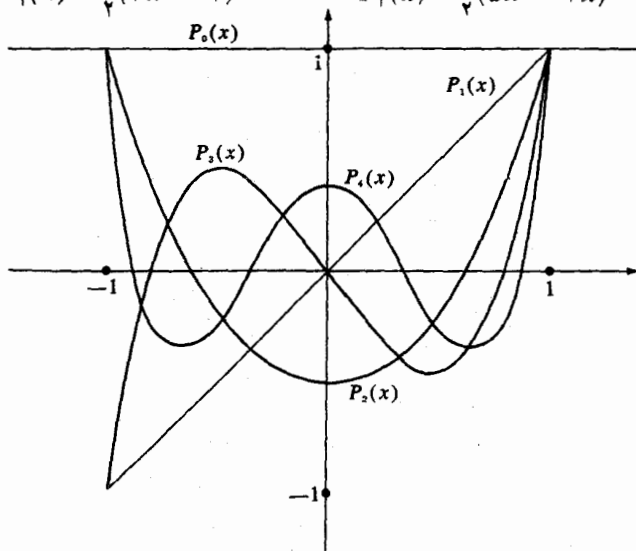
که با توجه به دستور دوجمله‌ای به دست می‌آوریم:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (۹)$$

این عبارت برای $P_n(x)$ به فرمول رودریگ مشهور است^۱، و وسیله ساده‌ای برای محاسبه چند جمله‌ای‌های پایایی لژاندر به دست می‌دهد، که چندتای اول آنها عبارت‌اند از (شکل ۳۲)

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3 - 3x) \quad (10)$$



شکل ۳۲

روش بازهم ساده‌تری در مسئله ۲ پیشنهاد شده است، و یک کاربرد مهمتر (۹) در بخش بعد مطرح خواهد شد.

تمرین

۱- تابع طرف چپ رابطه

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots + P_n(x)t^n + \dots$$

۱. اولیند رودریگ Olinde Rodrigues (۱۷۹۴-۱۸۵۱) یک بانکدار فرانسوی بود که در سالهای تهیدستی پیری کلوده‌ناری سن‌سیمون Claude Henri Saint-Simon (پایه‌گذار سوسیالیسم) به کمک وی شتافت و از او در سالهای آخر عمرش پشتیبانی کرد، و یکی از اولین مریدان او شد. وی فرمول فوق‌الذکر را در سال ۱۸۱۶ کشف کرد، ولی اندکی بعد، به سازماندهی علمی جامعه علاقمند شد و دیگر هرگز به سوی ریاضیات برنگشت. عبارت «فرمول رودریگ» اغلب به عبارات مشابهی برای چند جمله‌ای‌های کلاسیک دیگری که خود رودریگ هیچ اطلاعی از آنها نداشت، نیز اطلاق می‌شود.

را تابع مولد چند جمله‌ای لژاندر می‌نامند. فرض کنید این رابطه درست است و به کمک آن

(الف) تحقیق کنید که $P_n(-1) = (-1)^n$ و $P_n(1) = 1$.

(ب) نشان دهید که $P_{2n+1}(0) = 0$ و $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!}$.

۲- با توجه به رابطه مولد

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

(الف) با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به t ، نشان دهید که

$$(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x)t^{n-1}$$

(ب) با مساوی قرار دادن ضرایب t^n در (الف)، فرمول بازگشتی زیر را به دست آورید:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

(ج) به فرض آنکه $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$ را بدانیم، به کمک فرمول بازگشتی قسمت (ب) عبارات $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ ، $P_4(x)$ ، و $P_5(x)$ را محاسبه کنید.

۳- رابطه مولد تمرینهای ۱ و ۲ را طی مراحل زیر به دست آورید:

(الف) از سری دوجمله‌ای استفاده کنید و بنویسید

$$\begin{aligned} [1-t(2x-t)]^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2}t(2x-t) + \frac{1}{2!} \frac{3}{2} t^2(2x-t)^2 + \dots \\ &+ \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!} t^{n-1}(2x-t)^{n-1} \\ &+ \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} t^n(2x-t)^n + \dots \end{aligned}$$

(ب) واضح است که در بسط قسمت (الف)، t^n ، تنها در جمله آخر ذکر شده و جملات بعد از آن ظاهر می‌شود. با بسط توانهای مختلف $2x-t$ ، نشان دهید که کل ضریب t^n برابر است با

$$\begin{aligned} &\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} (2x)^n - \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{n-1}{1!} (2x)^{n-1} \\ &+ \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-5)}{2^{n-2}(n-2)!} \frac{(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-2} - \dots \end{aligned}$$

ج) نشان دهید که مجموع قسمت (ب) همان $P_n(x)$ داده شده در رابطه (۸) است.

۴- این تمرین عبارت است از روشی مستقیم برای تحقیق اینکه هر گاه $P_n(x)$ توسط (۹) تعریف شود آنگاه در معادله ژاندر (۱) صدق می کند و دارای این خاصیت است که $P_n(1) = 1$. چند جمله ای های درجه n تعریف شده به صورت

$$y(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

را در نظر بگیرید.

الف) اگر $w = (x^2 - 1)^n$ ، آنگاه $w' - 2nxw = 0$. از این معادله $k+1$ بار مشتق بگیرید و نشان دهید که

$$(x^2 - 1)w^{(k+2)} + 2(k+1)xw^{(k+1)} + (k+1)kw^{(k)} - 2nxw^{(k+1)} - 2(k+1)nw^{(k)} = 0$$

و سپس نتیجه بگیرید که $y = w^{(n)}$ جوابی از معادله (۱) است.

ب) فرض کنید $u = (x-1)^n$ و $v = (x+1)^n$ و به کمک فرمول

$$y = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \dots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

نشان دهید که $y(1) = n! 2^n$.

۳۳. خواص چندجمله ای های ژاندر

در بخش قبل، دنباله چندجمله ای های ژاندر

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (1)$$

را تعریف کردیم. خواننده متوجه است که این چندجمله ای ها دارای کاربردهایی هستند که دامنه آنها از فیزیک ریاضی تا نظریه تقویب را در بر می گیرد. حال می پردازیم به بحث ایده های اساسی مربوط به بعضی از این کاربردها.

تمام مهم ترین ویژگی چندجمله ای های ژاندر این است که

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{اگر } m = n \end{cases} \quad (2)$$

ویژگی فوق اغلب بدین ترتیب بیان می شود که (۱) دنباله ای از تساوابع متعامد در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ است. بعد از اثبات این رابطه، به توضیح اهمیت آن خواهیم پرداخت.

فرض کنیم که تابع $f(x)$ در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ دارای لا اقل n مشتق پیوسته باشد، و انتگرال

$$I = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

را در نظر می گیریم. بر اساس فرمول رودریگت می توانیم بنویسیم

$$I = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx$$

و با انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می شود که

$$I = \frac{1}{2^n n!} \left[f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx$$

عبارت داخل کروشه در هر دو حد صفر می شود، بنابراین

$$I = - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx$$

اگر به انتگرالگیری جزء به جزء ادامه دهیم، خواهیم داشت

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx$$

هرگاه $f(x) = P_m(x)$ ، و $m < n$ ، آنگاه $f^{(n)}(x) = 0$ و قسمت اول (۲) یعنی $I = 0$ نتیجه می شود. برای اثبات قسمت دوم می نویسیم $f(x) = P_n(x)$. از آنجا که $P_n^{(n)}(x) = (2n)! / 2^n n!$ ، نتیجه می شود که

$$I = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \quad (3)$$

با تغییر متغیر $x = \sin \theta$ و یادآوری فرمول زیر (که از طریق انتگرال جزء به جزء ثابت می شود)

$$\int \cos^{2n+1} \theta d\theta = \frac{1}{2n+1} \cos^{2n} \theta \sin \theta + \frac{2n}{2n+1} \int \cos^{2n-1} \theta d\theta \quad (4)$$

انتگرال (۳) به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta &= \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} \theta d\theta \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2^n n!}{1 \times 3 \cdots (2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! (2n+1)} \end{aligned}$$

نتیجه می گیریم که، در این حالت $I = 2/(2n+1)$ ، واثبات (۲) کامل می شود.
سری لژاندر. همان طور که در پیوست الف نشان خواهیم داد، بسیاری از مسائل نظریهٔ پتانسیل به امکان بسط تابع مفروض به صورت یک سری از چندجمله‌ای‌های لژاندر بستگی دارند. بسادگی می توان دید که وقتی تابع مفروض خود یک چندجمله‌ای باشد این کار همواره ساده است. به عنوان نمونه، فرمولهای ۳۲- (۱۰) می گویند که

$$1 = P_0(x), \quad x = P_1(x), \quad x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x) = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x),$$

$$x^2 = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}P_2(x) = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_2(x)$$

و از اینجا نتیجه می شود که هر چندجمله‌ای درجهٔ سه به صورت

$$p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} p(x) &= b_0P_0(x) + b_1P_1(x) + b_2\left[\frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)\right] \\ &\quad + b_3\left[\frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_2(x)\right] \\ &= \left(b_0 + \frac{b_2}{3}\right)P_0(x) + \left(b_1 + \frac{3b_3}{5}\right)P_1(x) + \frac{2b_2}{3}P_2(x) + \frac{2b_3}{5}P_2(x) \\ &= \sum_{n=0}^3 a_nP_n(x) \end{aligned}$$

به طور کلی تر، چون به ازای هر n صحیح و مثبت، $P_n(x)$ چندجمله‌ای از درجهٔ n است، تعمیم ساده‌ای از روش فوق نشان می دهد که x^n را همواره می توان به صورت ترکیبی خطی از $P_0(x)$ ، $P_1(x)$ ، ...، $P_n(x)$ نوشت، بنابراین، هر چندجمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ k دارای بسطی به صورت زیر می باشد.

$$p(x) = \sum_{n=0}^k a_nP_n(x)$$

از این نکات و باتوجه به احتیاجات کاربردی، سؤال آشکار بسط تابع «دلخواه» $f(x)$ به صورت سری لژاندر مطرح می گردد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nP_n(x) \quad (5)$$

واضح است که برای محاسبهٔ ضرایب a_n در رابطه (۵) روش جدیدی لازم است، و نکتهٔ اساسی در فرمول (۲) نهفته است.

اگر احتیاطهای ریاضی را دور بریزیم و دوطرف (۵) را در $P_m(x)$ ضرب کنیم و از نتیجه جمله به جمله از -1 تا $+1$ انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx$$

که این با توجه به (۲) به صورت زیر ساده می شود:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \frac{2a_m}{2m+1}$$

بنابراین فرمول زیر برای a_n های رابطه (۵) به دست می آید

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (6)$$

هرگاه از ابتدا بدانیم که $f(x)$ دارای بسط سری به صورت (۵) است و از این سری می توان جمله به جمله در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ انتگرال گرفت، آنگاه عملیات فوق را می توان بسادگی توجیه نمود. وقتی که $f(x)$ چند جمله ای باشد، برقراری هر دو شرط بالا واضح است؛ ولی در مورد سایر انواع توابع راهی برای اطلاع از برقراری این شرایط در دست نداریم و درستی این حکم که ضرایب a_n در (۵) از رابطه (۶) به دست می آیند مورد تردید است. باین حال، این دستورالعمل صوری راهگشاست و طرح سؤال زیر، می تواند ما را به ریاضیات معقولی هدایت کند. هرگاه a_n ها توسط فرمول (۶) تعریف شوند و برای تشکیل سری (۵) به کار روند، برای چه نوع از توابع $f(x)$ این a_n ها موجود و بسط (۵) معتبر خواهد بود؟ خواننده به خاطر می آورد که در بخش ۲۴ نیز سؤال مشابهی در رابطه با سری فوریه مطرح شده بود. در اینجا نیز جواب مشابهی موجود است، ولی اکنون موقع پرداختن به جزئیات نیست.

۱. جواب مورد نظر که اغلب به قضیه بسط لژاندر مشهور می باشد، به سادگی قابل درک است، ولی اثبات آن به بسیاری از خواص چند جمله ای های لژاندر بستگی دارد، که هنوز ذکر نشده اند. صورت این قضیه چنین است. هرگاه حداکثر، $f(x)$ و $f'(x)$ دارای تعداد متناهی ناپیوستگی جهشی در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ باشند، و $f(x-)$ و $f(x+)$ حد چپ و راست $f(x)$ در نقطه x را نشان دهند، آنگاه a_n ها موجودند و سری لژاندر در $-1 < x < 1$ به

$$\frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)]$$

و برای $x = -1$ به $f(-1+)$ ، و برای $x = +1$ به $f(1-)$ میل می کند، و بخصوص در هر نقطه پیوستگی، حد آن همان $f(x)$ است. مراجعه شود به

امکان وجود بسطهایی به صورت (۵) به وضوح بستگی قاطع به خاصیت تعامد (۲) چندجمله‌ای‌های لژاندر دارد. این يك حالت خاص از پدیده کلی زیر است، که اغلب در نظریه توابع خاص مطرح می‌گردد. هرگاه دنباله‌ای از توابع $\phi_1(x)$ ، $\phi_2(x)$ ، $\phi_3(x)$ ، ...، $\phi_n(x)$ ، ... که در فاصله $a \leq x \leq b$ تعریف شده‌اند، دارای خاصیت زیر باشند:

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \alpha_n \neq 0 & , \quad m = n \end{cases} \quad (۷)$$

آنگاه ϕ_n ها را در این فاصله توابعی متعامد گویند. مانند مورد فوق، مسئله کلی مطرح شده در رابطه با چنین دنباله‌ای عبارت است از نمایش توابع «دلخواه» $f(x)$ توسط بسطهایی به صورت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

و استفاده‌ی صوری از رابطه (۷) مقدار a_n ها را به صورت

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx$$

پیشنهاد می‌کند.

مثالهای تکمیلی دیگری در پیوستهای ب و د از فصل ۵ آمده است، که در آنجا به تعامد (نسبت به توابع وزنی مناسب) چندجمله‌ای‌های هرमित و چندجمله‌ای‌های چیشف مختصراً اشاره شده است. جواب رضایتبخش به این گروه از مسائل یکی از دستاوردهای عمده ریاضیات محض در قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بود، و آنرا در یکی از جلدهای بعدی این سری بررسی خواهیم کرد.

تقریب کمترین مربعات. فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی باشد که در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ تعریف شده است. مسئله تقریب $f(x)$ به بهترین وجه ممکن، بر حسب کمترین مربعات، توسط چندجمله‌ای‌های $p(x)$ از درجه کمتر از n یا مساوی با n را در نظر می‌گیریم. هرگاه انتگرال

$$I = \int_{-1}^1 [f(x) - p(x)]^2 dx \quad (۸)$$

را نمایشگر مجموع مربعات انحرافات $p(x)$ از $f(x)$ بدانیم، آنگاه مسئله عبارت است از می‌نیم کردن مقدار این انتگرال به وسیله انتخابی مناسب برای $p(x)$. خواهیم دید که چندجمله‌ای می‌نیم کننده دقیقاً مجموع $n+1$ جمله اول سری لژاندر (۵) می‌باشد،

$$p(x) = a_0 P_0(x) + \dots + a_n P_n(x)$$

که در آن ضرایب از رابطه (۶) به دست می آیند.

برای اثبات مطلب بالا، از این موضوع استفاده می کنیم که هر چند جمله ای از درجه کمتر از n یا مساوی با n را می توان به صورت $b_0 P_0(x) + \dots + b_n P_n(x)$ نوشت. بنابراین انتگرال (۸) را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left[f(x) - \sum_{k=0}^n b_k P_k(x) \right]^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} b_k^2 - 2 \sum_{k=0}^n b_k \left[\int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx \right] \\ &= \int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} b_k^2 - 2 \sum_{k=0}^n b_k \frac{2a_k}{2k+1} \\ &= \int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} (b_k - a_k)^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2 \end{aligned}$$

چون a_k ها ثابت و b_k ها به اختیار ما هستند، روشن است که مقدار I وقتی می نیمم می شود که برای هر $n, \dots, k=0$ داشته باشیم $a_k = b_k$. تنها فرض لازم برای این بحث، انتگرال پذیری $f(x)$ و $f(x)^2$ می باشد. هرگاه تابع $f(x)$ چنان خوش رفتار باشد که دارای بسطی به صورت سری توان در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ باشد، آنگاه اکثر دانشجویان تصور می کنند که «بهترین» تقریب چندجمله ای برای تابع $f(x)$ همانا مجموعه ای جزئی این سری توانی است. نتیجه ای که در اینجا به دست آوردیم نشان می دهد که هرگاه معیار تقریب برحسب کمترین مربعات باشد، این مطلب درست نیست.

تمرین

۱- صحت فرمول (۴) را تحقیق کنید.

۲- معادله لژاندر را می توان به صورت

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)y'] + n(n+1)y = 0$$

نیز نوشت که در نتیجه

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_m] + m(m+1)P_m = 0$$

و

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_n] + n(n+1)P_n = 0$$

به کمک این دو معادله اثباتی برای قسمت اول فرمول (۲) ارائه کنید که به شکل خاص

چند جمله‌ای‌های لژاندر بستگی نداشته باشد.

راهنمایی: معادله اول را در P_n و دومی را در P_m ضرب و معادلات حاصل را از هم کم کنید و از نتیجه بین -1 و $+1$ انتگرال بگیرید.

۳- هرگاه رابطه مولد تمرینهای ۱ و ۲ بخش ۳۲ را مجذور کنیم و از $x = -1$ تا $x = 1$ انتگرال بگیریم، آنگاه قسمت اول (۲) نتیجه می‌دهد که

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx \right) t^{2n}$$

با نشان دادن اینکه انتگرال طرف چپ برابر است با

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}$$

قسمت دوم رابطه (۲) را اثبات کنید.

۴- سه جمله اول سری لژاندر را برای توابع زیر بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{اگر } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = e^x \quad (\text{ب})$$

۵- هرگاه $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \leq 1$ باشد، به‌طوری که

$$\int_{-1}^1 x^k p(x) dx = 0 \quad \text{برای } k = 0, 1, \dots, n-1$$

نشان دهید که برای یک مقدار ثابت c داریم $p(x) = cP_n(x)$.

۶- هرگاه $P_n(x)$ را در r ، که معکوس ضریب x^n است، ضرب کنیم، آنگاه ضریب بزرگترین درجه چندجمله‌ای حاصل، یعنی $rP_n(x)$ ، برابر با یک خواهد شد. نشان دهید که این چندجمله‌ای دارای خاصیت می‌نیمی زیر است: درین کلیه چندجمله‌ای‌های از درجه n که ضریب بزرگترین درجه آنها یک می‌باشد، $rP_n(x)$ درفاصله $-1 \leq x \leq 1$ ، به مفهوم کمترین مربعات، دارای حداقل انحراف از صفر است.

۳۴. توابع بسل. تابع گاما

معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0 \quad (۱)$$

را که در آن p یک عدد ثابت غیر منفی است، معادله بسل نامند، وجوابهای آن به توابع بسل مشهورند. این توابع برای اولین بار در بررسیهای دانیل برنولی درخصوص نوسانهای زنجیر آویخته (تمرین ۲۴-۴) و سپس مجدداً در نظریهٔ اوپلر برای ارتعاشات غشای مدور

و مطالعات بسل روی حرکت سیارات پدیدار شده اخیراً توابع بسل در فیزیک و مهندسی در رابطه با انتشار امواج، کشسانی، حرکت سیالات، و بخصوص در بسیاری از مسائل مربوط به نظریهٔ پتانسیل و پخش که دارای تقارن استوانه‌ای هستند کاربردهای زیادی دارند. این توابع حتی در بعضی مسائل جالب ریاضیات محض ظاهر می‌شوند. تعدادی از کاربردها را در پیوست ب عرضه می‌کنیم، ولی نخست لازم است که آن دسته از توابع بسل را که مهم‌ترند تعریف کنیم و بعضی از خواص سادهٔ آنها را به دست آوریم.^۲

تعریف تابع $J_p(x)$. بررسی جوابهای معادلهٔ (۱) را با توجه به این مطلب شروع می‌کنیم که بعد از تقسیم معادلهٔ (۱) بر x^2 ، ضرایب y' و y به ترتیب $1/x$ و $P(x)$ و $Q(x) = (x^2 - p^2)/x^2$ می‌شوند، بنابراین $xP(x) = 1$ و $x^2Q(x) = -p^2 + x^2$. بدین ترتیب مبدأ یک نقطهٔ غیرعادی منظم است، و معادلهٔ مبین ۲۹- (۵) به صورت $p^2 - m^2 = 0$ و توانهای مربوط $m_1 = p$ و $m_2 = -p$ می‌باشند. از قضیهٔ ۲۹- الف چنین برمی‌آید که معادلهٔ (۱) دارای جوابی به صورت

$$y = x^p \sum a_n x^n = \sum a_n x^{n+p} \quad (2)$$

است، که در آن $a_0 \neq 0$ و سری توانی $\sum a_n x^n$ برای کلیهٔ x ها همگرا است. برای تعیین این جواب می‌نویسیم

$$y' = \sum (n+p) a_n x^{n+p-1}$$

و

$$y'' = \sum (n+p-1)(n+p) a_n x^{n+p-2}$$

۱. فردریش ویلهلم بسل Friedrich Wilhelm Bessel (۱۷۸۴-۱۸۴۶) منجم مشهور آلمانی و یکی از دوستان صمیمی گاوس بود که سالهای زیادی با او مکاتبه داشت. او اولین کسی بود که فاصلهٔ یک ستاره ثابت را تعیین کرد؛ اندازه‌گیری وی بر اساس اختلاف منظر در سال ۱۸۳۸، فاصلهٔ ستارهٔ «۶۱ دجاجة» را برابر با ۱۱ سال نوری یا حدود ۳۶۰,۰۰۰ برابر قطر مدار زمین تعیین کرد. در سال ۱۸۴۴ او دریافت که ستارهٔ شعرای یمانی، یعنی پر نورترین ستارهٔ آسمان، دارای ستارهٔ همراهی است، و به همین دلیل اکنون به ستارهٔ دوتایی مشهور است. این ستاره همراه شعرای یمانی، که ابعدادی به اندازهٔ یک سیاره ولی جرمی به اندازهٔ یک ستاره دارد، و بنا بر این چگالی آن هزار برابر چگالی آب است، یکی از جالبترین اجسام عالم است. این اولین ستارهٔ هردی بود که کشف شد، و جای خاصی را در نظریه‌های نوین سیر تکامل ستارگان اشغال کرده است.

۲. تمامی مطلب درس سطحی وسیع در کتاب زیر مورد بررسی قرار گرفته است؛

G. N. Watson, "A Treatise on the Theory of Bessel Function," 2d ed., Cambridge University Press, London, 1944.

این کتاب اثری است عظیم مشتمل بر ۷۵۲ صفحه بایک فهرست ۳۶ صفحه‌ای مشتمل بر ۷۹۱ مرجع. آنچه ما مورد بحث قرار خواهیم داد، در مقایسه با اقیانوس پر تلاطم تلاش علمی که در سه قرن اخیر صورت گرفته است، حبابی بیش نیست.

به کمک این فرمولها می توان جملات طرف چپ معادله (۱) را به صورت زیر درآورد

$$x^2 y'' = \sum (n+p-1)(n+p) a_n x^{n+p}$$

$$x y' = \sum (n+p) a_n x^{n+p}$$

$$x^2 y = \sum a_{n-2} x^{n+p}$$

$$-p^2 y = \sum -p^2 a_n x^{n+p}$$

هر گاه این سری ها را با هم جمع کنیم و ضریب x^{n+p} را برابر با صفر قرار دهیم، و قدری ساده کنیم، به رابطه بازگشتی زیر برای a_n ها دست خواهیم یافت

$$n(2p+n)a_n + a_{n-2} = 0 \quad (3)$$

یا

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2p+n)} \quad (4)$$

می دانیم که a_0 مخالف صفر و دلخواه است. چون $a_{-1} = 0$ ، از رابطه (۴) داریم $a_1 = 0$ ؛ و کاربرد مکرر (۴) نتیجه می دهد، که برای هر اندیس فرد n ، $a_n = 0$. بنابراین، ضرایب مخالف صفر جواب (۲) چنین اند

$$a_0, a_2 = -\frac{a_0}{2(2p+2)}, a_4 = -\frac{a_2}{2(2p+4)} = \frac{a_0}{2 \times 2(2p+2)(2p+4)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2p+6)} = -\frac{a_0}{2 \times 2 \times 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}, \dots$$

و خود جواب عبارت می شود از

$$\begin{aligned} y &= a_0 x^p \left[1 - \frac{x^2}{2^2(p+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(p+1)(p+2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^6}{2^6 3!(p+1)(p+2)(p+3)} + \dots \right] \\ &= a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n! (p+1) \dots (p+n)} \quad (5) \end{aligned}$$

تابع بسل از نوع اول و از مرتبه p ، که آنرا با $J_p(x)$ نشان می دهند، با قرار دادن $a_0 = 1/2^p p!$ در (۵) تعریف می گردد، بنابراین

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p p!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n! (p+1) \dots (p+n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!} \quad (۶)$$

مفیدترین توابع بسل آنهایی هستند که از مرتبه ۰ و یک باشند، که عبارت اند از

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \end{aligned} \quad (۷)$$

و

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots \end{aligned} \quad (۸)$$

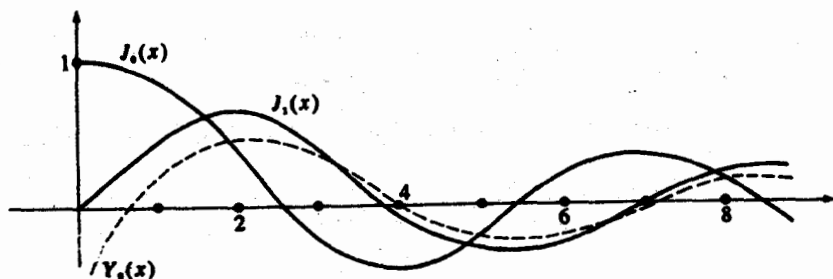
نمودار این دو تابع در شکل ۳۳ رسم شده است. این نمودارها خواص جالب متعددی از توابع $J_0(x)$ و $J_1(x)$ را نشان می‌دهند؛ هر یک از آنها دارای یک رفتار نوسانی میراست که در نتیجه بینهایت صفر مثبت دارد؛ و صفرهای این دو تابع به تناوب قرار می‌گیرند، به نحوی که صفرهای توابع $\sin x$ و $\cos x$ را تداعی می‌کنند. این تشابه ضعیف به وسیله رابطه $J_0'(x) = -J_1(x)$ ، که اثبات آن در تمرینهای ۱ و ۲ به عهده خواننده گذاشته شده است، تقویت می‌شود.

امیلواریم خواننده در بحث فوق به این نکته توجه کرده باشد که تعریف $J_p(x)$ توسط رابطه (۶) تنها وقتی معنی دارد که عدد غیر منفی و حقیقی p صحیح باشد، زیرا تنها در این حالت عوامل $(n+p)!$ ، واقع در مخرجها، معنی دارند. اینک توجه خود را به رفع این مشکل معطوف می‌کنیم.

تابع گاما. مقصود از طرح این تابع آن است که معنای معقول و مفیدی برای $p!$ [و به طور کلی تر برای $(p+n)!$ به ازای $n=0, 1, 2, \dots$] وقتی عدد حقیقی غیر منفی p صحیح نیست، ارائه کنیم. برای این منظور تابع گاما $\Gamma(p)$ را، به وسیله

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0 \quad (۹)$$

تعریف می‌کنیم.



شکل ۳۳

وقتی $t \rightarrow +\infty$ ، عبارت e^{-t} چنان سریع به سمت صفر می گراید که این انتگرال ناسره، بدون توجه به مقدار p ، درحد بالای خود همگرا می شود ولی، درحد پایین می دانیم که هر وقت $p < 1$ ، آنگاه e^{-t} به سمت t^{-1} و عامل t^{p-1} به ∞ میل خواهد کرد. محدودیت $p > 0$ برای تضمین همگرایی درحد پایین، ضروری است. بسادگی دیده می شود که

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (10)$$

زیرا انتگرال گیری جزء به جزء نشان می دهد که

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^p e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-t^p e^{-t} \Big|_0^b + p \int_0^b t^{p-1} e^{-t} dt \right) \\ &= p \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^{p-1} e^{-t} dt \right) = p\Gamma(p) \end{aligned}$$

زیرا وقتی $b \rightarrow \infty$ ، $b^p/e^b \rightarrow 0$ ، رابطه (۱۰) با توجه به

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (11)$$

نتیجه می دهد که $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3! \Gamma(2) = 2\Gamma(2) = 2 \times 1 \Gamma(1) = 1\Gamma(1) = 1$ و به طور کلی برای هر عدد صحیح غیر منفی n

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (12)$$

بحث راجع به تابع گاما را با فرض غیر منفی بودن p شروع کردیم و در آغاز تذکر دادیم که انتگرال (۹) به ازای $p = 0$ وجود ندارد. ولی، اگر رابطه (۱۰) را به صورت

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \quad (13)$$

بنویسیم قادر خواهیم بود $\Gamma(p)$ را بدون نیاز به این انتگرال، برای بسیاری از p های منفی

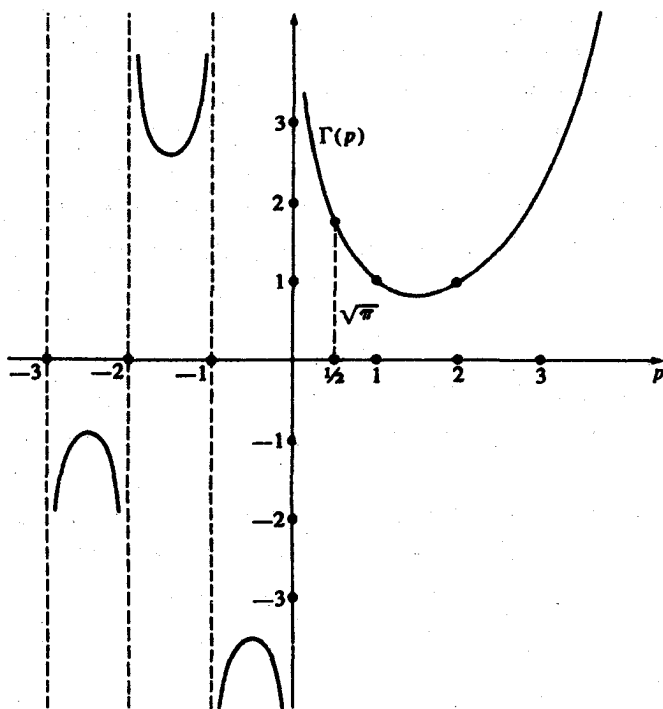
تعریف کنیم. این تعمیم تعریف برای کاربردها ضروری است، و چنین آغاز می‌گردد: هرگاه $-1 < p < 0$ ، آنگاه $0 < p+1 < 1$ ، و بنابراین طرف راست معادله (۱۳) مشخص است و طرف چپ (۱۳) را برای مقدار طرف راست تعریف می‌کنیم. در قدم بعدی توجه می‌کنیم که اگر $-2 < p < -1$ ، آنگاه $0 < p+1 < -1$ ، بنابراین با استفاده مجدد از (۱۳) می‌توانیم $\Gamma(p)$ را در فاصله $-2 < p < -1$ بر حسب مقادیر $\Gamma(p+1)$ که در مرحله قبل تعریف شدند، تعریف کنیم. واضح است که این روند را می‌توان تا حد دلخواه ادامه داد. علاوه بر این، از رابطه (۱۱) روشن است که

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \pm \infty$$

بسته به اینکه p از راست یا از چپ به سمت صفر میل می‌کند. تابع $\Gamma(p)$ در حوالی همه اعداد صحیح منفی رفتار مشابهی دارد، و بنابراین نمودار آن دارای صورت کلی نشان داده شده در شکل ۳۴ است. ما به دانستن رابطه مهم

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (۱۴)$$

نیز احتیاج خواهیم داشت. این نکته در شکل مشخص شده و اثبات آن (در تمرین ۳) به عهده خواننده گذاشته شده است. از آنجا که $\Gamma(p)$ همواره مخالف صفر است، تابع $1/\Gamma(p)$



شکل ۳۴

برای کلیه مقادیر p ، تعریف شده و خوش رفتار است هرگاه بپذیریم که مقدار $1/\Gamma(p)$ برای $\dots -2, -1, 0, p=0$ ، برابر با صفر است. این ایده‌ها به ما امکان می‌دهند تا برای کلیه مقادیر p بجز اعداد صحیح منفی p ، عبارت $p!$ را به صورت

$$p! = \Gamma(p+1)$$

تعریف کنیم. و رابطه (۱۲) نشان می‌دهد که وقتی p عدد صحیح غیر منفی باشد $p!$ دارای همان معنای معمولی خود خواهد بود. عکس آن، یعنی $1/\Gamma(p+1) = 1/p!$ ، برای همه p ها تعریف شده، و صفر است هرگاه p عددی صحیح و منفی باشد. تابع گاما به خودی خود نیز تابع بسیار جالبی است، و بررسی کاملتری از خواص و کاربردهای آن را در کتاب دیگری از این سری ارائه خواهیم کرد. مقصود از معرفی آن در اینجا تضمین معنی دار بودن $J_p(x)$ به صورت تعریف شده توسط رابطه (۶) برای کلیه مقادیر $p \geq 0$ است. تذکر می‌دهیم که حتی به پیش از این حد دست یافته‌ایم، زیرا $1/(p+n)!$ اکنون برای هر مقدار $p+n$ معنا دارد، رابطه (۶) تابعی کاملاً قابل قبول از x را برای کلیه مقادیر p ، بدون استثنا تعریف می‌کند.

جواب عمومی معادله بسل. موقعیت فعلی ما چنین است: يك جواب خصوصی از (۱) مربوط به توان $m_1 = p$ ، یعنی $J_p(x)$ را یافته‌ایم. حال برای یافتن جواب عمومی، باید به ساختن جواب مستقل دوم پردازیم، یعنی جوابی که مضرب ثابتی از $J_p(x)$ نباشد. هر جوابی از این گونه را تابع بسل از نوع دوم می‌نامند. روش طبیعی آن است که بتوان $m_2 = -p$ را امتحان کنیم. ولی طی این کار هنگامی که اختلاف $m_1 - m_2 = 2p$ صفر یا يك عدد صحیح مثبت باشد، یعنی هرگاه عدد ثابت غیر منفی p يك عدد صحیح و یا نصف يك عدد صحیح فرد باشد، انتظار برخورد با مشکلات وجود دارد. خواهیم دید که مشکلات مورد نظر تنها در حالت اول جدی هستند.

پس ابتدا فرض می‌کنیم که p عدد صحیح نباشد. در این حالت در عملیات قبلی p را به $-p$ تبدیل می‌کنیم، و بسادگی می‌بینیم که بحث قبلی تقریباً بدون تغییر پیش می‌رود. تنها استثنا آن است که رابطه (۳) به صورت

$$n(-2p+n)a_n + a_{n-2} = 0$$

درمی‌آید، و اگر احیاناً $p = 1/2$ ، در آن صورت با انتخاب $n = 1$ متوجه می‌شویم که هیچ اجباری برای انتخاب $a_1 = 0$ وجود ندارد. ولی، چون تنها می‌خواهیم به يك جواب خصوصی برسیم، مسلماً مجازیم که a_1 را برابر با صفر انتخاب کنیم. همین اشکال با $p = 3/2$ و $n = 3$ والی آخر وجود دارد؛ و در همه حالات آن را با انتخاب $a_1 = a_3 = \dots = 0$ حل می‌کنیم. بقیه چیزها طبق روال قبلی پیش می‌رود، و جواب دومی به صورت

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-p}}{n!(-p+n)!} \quad (15)$$

به دست می آید. جمله اول این سری برابر است با

$$\frac{1}{(-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p}$$

بنابر این $J_{-p}(x)$ در حوالی $x=0$ بی کران است. چون $J_p(x)$ نزدیک $x=0$ کراندار است، این دو جواب مستقل اند و جواب عمومی (۱) عبارت است از

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x), \quad (p \text{ غیر صحیح}) \quad (۱۶)$$

در حالتی که p عدد صحیح و مثبت m باشد، وضعیت کاملاً متفاوت است. در این حالت، فرمول (۱۵) به صورت

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!} \end{aligned}$$

درمی آید، زیرا عبارات $1/(-m+n)!$ ، وقتی $n=0, 1, \dots, m-1$ ، صفرند. هرگاه متغیر ظاهری n را به $m+n$ تبدیل و در عوض، مجموع را از $n=0$ شروع کنیم، می بینیم که

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(x/2)^{2(n+m)-m}}{(n+m)!n!} \\ &= (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+m}}{n!(m+n)!} = (-1)^m J_m(x) \end{aligned}$$

این امر نشان می دهد که $J_{-m}(x)$ مستقل از $J_m(x)$ نیست، بنابراین در این حالت

$$y = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x)$$

جواب عمومی معادله (۱) نیست، و بررسی ادامه می یابد.

در این مرحله، کار نسبتاً پیچیده می شود و ما به طور بسیار خلاصه طرحی از آن ارائه می کنیم. یکی از راههای ممکن، استفاده از روش بخش ۱۶ است، و بسادگی دیده می شود که جواب دوم مستقل از $J_m(x)$ برابر است با

$$J_m(x) \int \frac{dx}{x J_m(x)^2}$$

ولی متداول آن است که راه نسبتاً متفاوت زیر را پیش گیریم. وقتی p ، عددی صحیح نباشد، هر تابعی به صورت (۱۶) با $c_2 \neq 0$ ، و منجمله خود $J_{-p}(x)$ ، یک تابع بسل از نوع دوم است. صورت متعارف تابع بسل از نوع دوم با

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \quad (17)$$

تعریف می‌شود، این انتخاب بظاهر غیرعادی به دلایل مناسبی صورت گرفته است که هم اکنون به تشریح آنها می‌پردازیم. ولی، خواننده باید قبل از هر چیز توجه کند که (۱۶) را مسلماً می‌توان به صورت معادل زیر نوشت

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x) \quad (p \text{ غیر صحیح}) \quad (18)$$

هنوز نمی‌دانیم که وقتی p عدد صحیح m است، چه باید کرد، زیرا (۱۷) در این حالت بی‌معناست. پس از یک تحلیل مفصل می‌توان دید که تابعی که توسط

$$Y_m(x) = \lim_{p \rightarrow m} Y_p(x) \quad (19)$$

تعریف می‌شود، موجود و یک تابع بسل از نوع دوم است؛ و در نتیجه

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x) \quad (20)$$

در همه حالات جواب عمومی معادله بسل است، خواه p عدد صحیح باشد یا نباشد. نمودار $Y_0(x)$ توسط منحنی خط چین شکل ۳۳ نشان داده شده است. این نمودار نشان دهنده این نکته مهم است که برای هر $p \geq 0$ ، تابع $Y_p(x)$ در نزدیکی مبدأ بیکران است. نتیجتاً اگر تنها علاقه‌مند به جوابهایی از معادله بسل باشیم که در نزدیک $x=0$ کراندارند، که در اغلب موارد کاربرد نیز چنین است، باید در (۲۰) مقدار c_2 را برابر صفر انتخاب کنیم.

اکنون همانطور که قول داده بودیم به تشریح دلیل انتخاب فرم غیرعادی (۱۷) می‌پردازیم. گفتیم که راههای زیادی برای تعریف توابع بسل از نوع دوم وجود دارد. تعریفهای (۱۷) و (۱۹)، به دو دلیل بسیار مناسب‌اند. اولاً، شکل (۱۷) به ما امکان می‌دهد تا به طریقی نسبتاً ساده ثابت کنیم که حد (۱۹) موجود است (به تمرین ۹ مراجعه کنید). و ثانیاً، این تعاریف نشان می‌دهند که رفتار $Y_p(x)$ ، برای مقادیر بزرگ، به طور طبیعی با رفتار $J_p(x)$ مطابقت دارد. برای آنکه ببینیم مقصود از این عبارت چیست، از تمرین ۲۲-۳ می‌دانیم که معادله بسل (۱) با تعریف تابع جدید $u(x) = \sqrt{x} y(x)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u = 0 \quad (21)$$

وقتی x بسیار بزرگ باشد، معادله (۲۱) را می‌توان با معادله دیفرانسیل آشنای $u'' + u = 0$ که جوابهای مستقل آن $u_1(x) = \cos x$ و $u_2(x) = \sin x$ هستند، بخوبی تقریب زد. بنابراین، انتظار می‌رود که، برای مقادیر بزرگ x ، رفتار هر تابع بسل $y(x)$ شبیه رفتار یک ترکیب خطی از توابع

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cos x \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x$$

باشد. این انتظار توسط روابط زیر تقویت می‌شود:

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_1(x)}{x^{3/4}}$$

و

$$Y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_2(x)}{x^{3/4}}$$

که در آنها توابع $r_1(x)$ و $r_2(x)$ وقتی $x \rightarrow \infty$ ، کراندارند.

تمرین

۱- با استفاده از (۷) و (۸) نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x) \quad \text{ب} \quad \frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x) \quad \text{الف}$$

۲- با استفاده از تمرین ۱ و قضیهٔ رول نشان دهید که

الف) بین هر دو صفر مثبت $J_0(x)$ یک صفر از $J_1(x)$ واقع است؛
ب) بین هر دو صفر مثبت $J_1(x)$ یک صفر از $J_0(x)$ واقع است.

۳- با توجه به تعریف (۹)،

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt$$

الف) نشان دهید که تغییر متغیر $t = s^2$ به رابطهٔ زیر منجر می‌شود

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds$$

ب) از آنجا که متغیر s در (الف) متغیری ظاهری است، داریم

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right)$$

۱. مراجعه شود به

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

با تبدیل این انتگرال به انتگرال دوگانه در مختصات قطبی نشان دهید که

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{و بنا بر این}$$

۴- چون برای p هایی که عدد صحیح منفی نیستند، داریم $p! = \Gamma(p+1)$ ، بیان می کند که $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$. مطلوب است محاسبه $(1/2)!$ و $(3/2)!$. به طور کلی نشان دهید که برای هر عدد صحیح و غیر منفی n داریم

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi}$$

و

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

۵- وقتی $p = 1/2$ ، معادله (۲۱) نشان می دهد که جواب عمومی معادله بسل را می توان به یکی از دو صورت معادل زیر نوشت:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

و

$$y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$$

بنا بر این روابط

$$\sqrt{x} J_{1/2}(x) = a \cos x + b \sin x$$

و

$$\sqrt{x} J_{-1/2}(x) = c \cos x + d \sin x$$

باید برای برخی مقادیر ثابت a ، b ، c ، و d برقرار باشند. با محاسبه این مقادیر ثابت، نشان دهید که

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{و} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

۶- فرمولهای تمرین ۵ را با عملیات مستقیم روی سریهای بسط توابع $J_{1/2}(x)$ و

$J_{-1/2}(x)$ به دست آورید.

۷- بسیاری از معادلات دیفرانسیل در واقع معادلهٔ بسل هستند، با صورتی متفاوت، و از این رو آنها را می‌توان به وسیلهٔ توابع بسل حل کرد. به عنوان نمونه، هرگاه معادلهٔ بسل را به صورت

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0$$

بنویسیم، می‌بینیم که تغییر متغیرهای $w = yx^c$ و $z = ax^b$ (که در آن a ، b و c ثابت هستند) معادلهٔ فوق را به صورت زیر تبدیل می‌کنند

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2c+1)x \frac{dy}{dx} + [a^2 b^2 x^{2b} + (c^2 - p^2 b^2)]y = 0$$

جواب عمومی معادلهٔ اخیر را بر حسب توابع بسل بنویسید.

۸- با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۷ نشان دهید که جواب عمومی معادلهٔ ایری $y'' + xy = 0$ (به تمرین ۲۷-۵ مراجعه شود) عبارت است از

$$y = x^{1/2} \left[c_1 J_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + c_2 J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right]$$

۹- با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال در مورد حد (۱۹)، نشان دهید که

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial p} J_p(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial p} J_{-p}(x) \right]_{p=n}$$

۳۵. خواص توابع بسل

تابع بسل $J_p(x)$ برای هر عدد حقیقی p به صورت

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{n+p}}{n!(p+n)!} \quad (1)$$

تعریف شده است، در این بخش تعدادی از خواص این توابع را که در موارد کاربردی مفیدند، بررسی می‌کنیم.

اتحادها و توابع $J_{m+1/2}(x)$. بررسی را با توجه به فرمولهای

$$\frac{d}{dx} \left[x^p J_p(x) \right] = x^p J_{p-1}(x) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-p} J_p(x) \right] = -x^{-p} J_{p+1}(x) \quad (۳)$$

شروع می‌کنیم. برای اثبات (۲)، کافی است سری (۱) را در x^p ضرب کنیم و از آن مشتق بگیریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^p J_p(x) \right] &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{p+n+1/2}}{2^{p+n} n! (p+n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{p+n+1/2}}{2^{p+n-1} n! (p+n-1)!} \\ &= x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{p+n-1}}{n! (p-1+n)!} = x^p J_{p-1}(x) \end{aligned}$$

رابطه (۳) نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود و جزئیات آن را در تمرین ۱ این بخش به‌عهده خواننده می‌گذاریم. هرگاه مشتق‌گیری‌های فرمول‌های (۲) و (۳) را انجام دهیم و نتیجه را بر $x^{\pm p}$ تقسیم کنیم، این فرمول‌ها به‌صورت

$$J_p'(x) + \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) \quad (۴)$$

و

$$J_p'(x) - \frac{p}{x} J_p(x) = -J_{p+1}(x) \quad (۵)$$

درمی‌آیند. هرگاه (۴) و (۵) را ابتدا باهم جمع و سپس ازهم کم کنیم، خواهیم داشت

$$2J_p'(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) \quad (۶)$$

و

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) \quad (۷)$$

این فرمول‌ها ما را قادر می‌سازند تا توابع بسل و مشتقات آنها را بر حسب دیگر توابع بسل بیان کنیم.

یکی از کاربردهای جالب (۷) با فرمول‌های

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{و} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

که در تمرین ۳۴-۵ اثبات شد، آغاز می‌گردد. حال از فرمول (۷) نتیجه می‌شود که

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

و

$$J_{5/2}(x) = \frac{3}{x} J_{3/2}(x) - J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \sin x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \sin x \right)$$

همچنین

$$J_{-3/2}(x) = -\frac{1}{x} J_{-1/2}(x) - J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\frac{\cos x}{x} - \sin x \right)$$

و

$$J_{-5/2}(x) = -\frac{3}{x} J_{-3/2}(x) - J_{-1/2}(x) =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \cos x}{x^2} + \frac{3 \sin x}{x} - \cos x \right)$$

واضح است که این گونه محاسبات را می‌توان تا بینهایت ادامه داد، و بنابراین هر تابع بسل $J_{m+1/2}(x)$ (که در آن m عددی صحیح است) تابعی مقدماتی است. لیوویل^۱ ثابت کرده است که اینها تنها حالاتی است که در آنها $J_p(x)$ تابعی مقدماتی است.^۲

کاربرد دیگری از فرمول (۷) در آخر پیوست ج داده شده است و در آنجا نحوه به‌دست آمدن کسر مسلسل لامبرت برای $\tan x$ ، نشان داده شده است. این کسر مسلسل دارای ارزش تاریخی عظیمی است، زیرا توسط این کسر بود که اولین اثبات غیر گویا بودن عدد π به‌دست آمد.

هرگاه فرمولهای مشتق‌گیری (۲) و (۳) را به‌صورت‌های

$$\int x^p J_{p-1}(x) dx = x^p J_p(x) + c \quad (۸)$$

و

1. Liouville

۲. جزئیات این دستاورد قابل توجه را می‌توان در فصل چهارم کتاب Watson^۳ و همچنین مرجع زیر یافت،

J. F. Ritt, "Integration in Finite Terms," Columbia University Press, New York, 1948.

توابع $J_{m+1/2}(x)$ را اغلب توابع بسل‌کروی می‌نامند زیرا توابع مزبور در حل معادله موج در مختصات کروی ظاهر می‌شوند.

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x) dx = -x^{-p} J_p(x) + c \quad (9)$$

بنویسیم، آنگاه از آنها می‌توان برای انتگرالگیری از بسیاری عبارات ساده‌ی مشتمل بر توابع بسل استفاده کرد. به عنوان مثال، وقتی که $p=1$ ، (۸) به صورت

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) + c \quad (10)$$

درمی‌آید. در مورد انتگرالهای پیچیده‌تری که نما و مرتبه تابع بسل، آن گونه که در (۸) و (۹) آمده است با یکدیگر تطبیق نکنند، معمولاً استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء نیز به عنوان ابزار تکمیلی ضرورت پیدا می‌کند.

صفرها و سری بسل. از تمرین ۲۲-۳ چنین برمی‌آید که برای هر مقدار p ، تابع $J_p(x)$ بینهایت صفر مثبت دارد. این موضوع بخصوص برای $J_0(x)$ درست است. صفرهای این تابع با دقت بسیار زیادی شناخته شده‌اند و مقادیرشان در بسیاری از جداول ریاضی داده شده است. مقدار تقریبی پنج صفر اول عبارت‌اند از ۲۴۰۴۸، ۵۸۲۰۱، ۸۶۵۳۷، ۱۱۷۹۱۵، ۱۴۹۳۰۹؛ و تفاضلهای پیاپی آنان برابرند با ۳۱۱۵۳، ۳۱۳۳۶، ۳۱۳۷۸، و ۳۱۳۹۴. صفرهای مثبت و تفاضلهای متناظر مربوط به $J_1(x)$ عبارت‌اند از ۳۸۳۱۷، ۷۵۱۵۶، ۱۰۵۱۷۳۵، ۱۳۳۲۳۷، و ۱۶۴۷۵۶؛ و ۳۱۸۳۹، ۳۱۵۷۹، ۳۱۵۰۲، ۳۱۴۶۹. توجه کنید که چطور این تفاضلهای تضمین‌های داده شده در تمرین ۲۳-۱ را تأیید می‌کنند.

هدف از این توجه به صفرهای $J_p(x)$ چیست؟ در فیزیک ریاضی اغلب ضرورت پیدا می‌کند که تابع مفروضی را بر حسب توابع بسل بسط دهیم، که نوع خاص این بسط به مسئله مورد نظر بستگی دارد. ساده‌ترین و مفیدترین بسطهای از این نوع، سری‌های به صورت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\lambda_n x) = a_1 J_p(\lambda_1 x) + a_2 J_p(\lambda_2 x) + \dots \quad (11)$$

است. در اینجا تابع $f(x)$ روی فاصله $0 \leq x \leq 1$ تعریف شده است و λ_n ها صفرهای مثبت تابع بسل مشخص $J_p(x)$ با $p \geq 0$ هستند. فاصله $0 \leq x \leq 1$ را تنها به دلیل سادگی انتخاب کرده‌ایم، و تمام فرمولهای ذیل را می‌توان با تغییر متغیر ساده‌ای به حالت تابع تعریف شده روی $0 \leq x \leq a$ نیز تعمیم داد. نقش چنین بسطهایی در مسائل فیزیکی شبیه نقشی است که سریهای فوریه و لژاندر ایفا می‌کنند. نقش سریهای فوریه و لژاندر در رابطه با تار مرتعش و دماهای درون یک کره در بخش ۲۴ و پیوست الف روشن گردیده است. در پیوست ب کاربرد (۱۱) در حل معادله موج دوبعدی را برای غشای مدور مرتعش نشان می‌دهیم.

با توجه به تجربه قبلی خود در مورد سریهای فوریه و لژاندر، انتظار داریم که تعیین ضرایب موجود در رابطه (۱۱) به بعضی از خواص انتگرالی توابع $J_p(\lambda_n x)$ بستگی داشته باشد. چیزی که در اینجا بدان نیاز داریم این است که

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n \\ \frac{1}{2} J_{p+1}(\lambda_n)^2 & \text{اگر } m = n \end{cases} \quad (12)$$

با توجه به ایده‌هایی که در بخش ۳۳ مطرح کردیم، این فرمولها حاکی از آن‌اند که توابع $\sqrt{x} J_p(\lambda_n x)$ روی فاصله $0 \leq x \leq 1$ متعامدند. این مطالب را در انتهای این بخش اثبات خواهیم کرد، ولی ابتدا به بیان کاربردهای آنها می‌پردازیم.

با فرض آنکه بسطی به صورت (۱۱) ممکن باشد، طرفین آن را در $x J_p(\lambda_m x)$ ضرب می‌کنیم، از آن به‌طور صوری، جمله به جمله از صفر تا یک انتگرال می‌گیریم، و بسا استفاده از (۱۲) خواهیم داشت

$$\int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_m x) dx = \frac{a_m}{2} J_{p+1}(\lambda_m)^2$$

که از تبدیل m به n فرمول زیر برای a_n به‌دست می‌آید:

$$a_n = \frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx \quad (13)$$

سری (۱۱) را، که ضرایب آن به‌وسیله (۱۳) محاسبه می‌شوند، سری بسل (یا بعضی اوقات سری فوردیه - بسل) تابع $f(x)$ می‌نامند. طبق معمول، بدون اثبات قضیه نسبتاً عمیقی را بیان می‌کنیم. این قضیه شرایطی را ارائه می‌کند که تحت آنها سری (۱۱) واقعاً همگراست و دارای مجموع $f(x)$ است.

قضیه الف. (قضیه بسط بسل). فرض کنید که $f(x)$ و $f'(x)$ حداکثر دارای تعدادی متناهی ناپیوستگی جهشی در فاصله $0 \leq x \leq 1$ باشند. اگر $0 < x < 1$ ، آنگاه سری بسل (۱۱) وقتی که f در x پیوسته باشد به $f(x)$ و وقتی که f در x ناپیوسته باشد به $[f(x-) + f(x+)]/2$ همگرا می‌شود.

طبیعی است سؤال کنیم که در نقاط انتهایی فاصله چه اتفاقی می‌افتد. در $x=1$ ، صرف‌نظر از ماهیت تابع، سری به صفر می‌گراید زیرا همه $J_p(\lambda_m)$ ها صفرند. این سری در $x=0$ نیز وقتی $p > 0$ به صفر و وقتی $p=0$ به $f(0+)$ همگرا خواهد بود. به عنوان نمونه، سری بسل تابع $f(x)=1$ را برای فاصله $0 \leq x \leq 1$ برحسب توابع $J_0(\lambda_n x)$ محاسبه می‌کنیم؛ در اینجا λ_n ها صفرهای مثبت $J_0(x)$ هستند. در این حالت، (۱۳) به‌صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_0^1 x J_0(\lambda_n x) dx$$

با توجه به (۱۰)، می‌بینیم که

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_n x) dx = \left[\frac{1}{\lambda_n} x J_1(\lambda_n x) \right]_0^1 = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n}$$

بنابراین

$$a_n = \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

در نتیجه سری بسل مطلوب عبارت است از

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n x) \quad (0 \leq x < 1)$$

اثبات خواص تعامد. برای اثبات (۱۲)، مطلب را با این امر که $y = J_p(x)$

جوابی از معادله

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

است، آغاز می‌کنیم. اگر a و b اعداد مثبت متمایزی باشند، نتیجه می‌شود که توابع $u(x) = J_p(ax)$ و $v(x) = J_p(bx)$ در معادلات

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u = 0 \quad (14)$$

و

$$v'' + \frac{1}{x}v' + \left(b^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)v = 0 \quad (15)$$

صدق می‌کنند. حال این معادلات را در v و u ضرب و نتایج را از هم کم می‌کنیم تا رابطه

$$\frac{d}{dx}(u'v - v'u) + \frac{1}{x}(u'v - v'u) = (b^2 - a^2)uv$$

را به دست آوریم که پس از ضرب در x به صورت

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - v'u)] = (b^2 - a^2)xuv \quad (16)$$

درمی‌آید. اگر از طرفین (۱۶) از $x=0$ تا $x=1$ انتگرال بگیریم مشاهده می‌کنیم که

$$(b^2 - a^2) \int_0^1 xuv dx = [x(u'v - v'u)]_0^1$$

واضح است که عبارت داخل کروشه در $x=0$ برابر صفر است، و در انتهای دیگر فاصله

داریم $u(1) = J_p(a)$ و $v(1) = J_p(b)$. بنا بر این نتیجه می شود که، هر گاه a و b صفرهای مثبت متمایز λ_n و λ_m از $J_p(x)$ باشند، انتگرال طرف چپ صفر است؛ یعنی داریم

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) dx = 0 \quad (17)$$

که قسمت اول رابطه (۱۲) است.

مرحله نهایی، عبارت از محاسبه انتگرال (۱۷) در حالت $m = n$ است. هر گاه (۱۴) را در $2x^2 u'$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$2x^2 u' u'' + 2x u'^2 + 2a^2 x^2 u u' - 2p^2 u u' = 0$$

یا

$$\frac{d}{dx}(x^2 u'^2) + \frac{d}{dx}(a^2 x^2 u^2) - 2a^2 x u^2 - \frac{d}{dx}(p^2 u^2) = 0$$

اگر از آن از $x = 0$ تا $x = 1$ انتگرال بگیریم، چنین به دست می آوریم

$$2a^2 \int_0^1 x u^2 dx = [x^2 u'^2 + (a^2 x^2 - p^2) u^2]_0^1 \quad (18)$$

وقتی $x = 0$ ، عبارت داخل کروشه صفر می شود؛ و چون $u'(1) = a J_p'(a)$ ، (۱۸) نتیجه می دهد که

$$\int_0^1 x J_p(ax)^2 dx = \frac{1}{4} J_p'(a)^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{p^2}{a^2}\right) J_p(a)^2$$

حال a را برابر با λ_n قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_n x)^2 dx = \frac{1}{4} J_p'(\lambda_n)^2 = \frac{1}{4} J_{p+1}(\lambda_n)^2$$

در آخرین مرحله محاسبه از (۵) استفاده شده است، و این اثبات (۱۲) را کامل می کند.

تمرین

۱- صحت فرمول (۳) را تحقیق کنید.

۲- ثابت کنید که صفرهای مثبت $J_p(x)$ و $J_{p+1}(x)$ متناوباً ظاهر می شوند، یعنی بین هر دو صفر مثبت متوالی از یکی، دقیقاً يك صفر از دیگری واقع می شود.

۳- توابع $J_2(x)$ ، $J_3(x)$ و $J_4(x)$ را بر حسب $J_0(x)$ و $J_1(x)$ بنویسید.

۴- تابع $f(x)$ را که به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

تعریف شده است در نظر بگیرید و ثابت کنید که

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n/2)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)^2} J_0(\lambda_n x)$$

در اینجا λ_n ها صفرهای مثبت $J_0(x)$ هستند.

۵- اگر در فاصله $0 \leq x < 1$ داشته باشیم $f(x) = x^p$ ، نشان دهید که سری بسل آن بر حسب توابع $J_p(\lambda_n x)$ ، که در آن λ_n ها صفرهای مثبت $J_p(x)$ اند، عبارت است از

$$x^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)} J_p(\lambda_n x)$$

۶- با استفاده از نمادهای تمرین ۵ به طور صوری نشان دهید که اگر تابع $g(x)$ در فاصله $0 \leq x \leq 1$ خوش رفتار باشد، آنگاه

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^{p+1} g(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)} \int_0^1 x g(x) J_p(\lambda_n x) dx$$

حال با انتخاب $g(x)$ برابر با x^p و x^{p+2} ، نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{2(p+1)} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} = \frac{1}{16(p+1)^2(p+2)}$$

۷- صفرهای مثبت $\sin x$ عبارت اند از π ، 2π ، 3π ، ... با استفاده از نتیجه تمرین ۶ (و تمرین ۳۴-۵) نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

۸- نشان دهید که تغییر متغیر وابسته به صورت

$$By = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

معادله ریکاتی خاص

$$\frac{dy}{dx} + By^2 = Cx^m$$

را به

$$\frac{d^2u}{dx^2} - BCx^m u = 0$$

تبدیل می‌کند. اگر $m \neq -2$ ، با استفاده از تمرین ۳۴-۷ نشان دهید که این معادله بر حسب توابع مقدماتی قابل حل است اگر و تنها اگر $m = -2k/(2k+1)$ ، که در آن k عددی صحیح است. (وقتی $m = -2$ ، جایگزینی $y = v/x$ معادله ریکاتی را به یک معادله با متغیرهای جدا شدنی تبدیل می‌کند که دارای یک جواب مقدماتی است.)

۹- نشان دهید که جواب عمومی

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = x \frac{J_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + cJ_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - J_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$$

پیوست الف. چند جمله‌ای‌های لژاندر و نظریه پتانسیل

اگر تعدادی ذره به جرمهای m_1, m_2, \dots, m_n ، که مطابق قانون عکس مجذور گرانش یکدیگر را جذب می‌کنند، در نقاط P_1, P_2, \dots, P_n قرار گرفته باشند، آنگاه پتانسیل ناشی از این ذرات در هر نقطه P (یعنی کار انجام شده در قبال نیروهای جاذبه آنها طی تغییر مکان واحد جرم از P به نقطه‌ای بینهایت دور) عبارت است از

$$U = \frac{Gm_1}{PP_1} + \frac{Gm_2}{PP_2} + \dots + \frac{Gm_n}{PP_n} \quad (1)$$

که در آن G ثابت گرانش است.^۱ اگر نقاط P, P_1, P_2, \dots, P_n دارای مختصات دکارتی $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ باشند، به طوری که

$$PP_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

و روابطی نظیر این برای دیگر فواصل برقرار باشند، آنگاه با مشتق‌گیری جزئی بسادگی می‌توان دید که پتانسیل U در معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

صدق می‌کند. این معادله دیفرانسیل جزئی نه شامل جرمهای بخصوص است و نه شامل مختصات نقاطی که جرمها در آن واقع‌اند، بنابراین معادله (۲) برای پتانسیل حاصل از يك توزیع پیوسته و یا گسسته دلخواه از ذرات در يك فضای خالی نیز برقرار است. این معادله را اغلب به صورت

$$\nabla^2 U = 0 \quad (3)$$

می‌نویسند، که در آن ∇^2 (مجذور دل) علامت اختصاری عملگر دیفرانسیلی

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

است. تابع U را پتانسیل گرانشی، می‌نامند. هرگاه به جای حالت فوق، ذرات باردار با بارهای q_1, q_2, \dots, q_n را به کار ببریم، آنگاه پتانسیل الکتروستاتیکی آنها نیز به همان شکل (۱) خواهد بود با این تفاوت که باید m ها را با q ها و G را با ثابت کولن عوض کنیم، پس این پتانسیل نیز در معادله لاپلاس صدق می‌کند. کاربردهای این معادله چنان فراوان و متنوع‌اند که مطالعه آن به نوبه خود شاخه‌ای از آنالیز مشهور به نظریه پتانسیل را تشکیل می‌دهد. معادله مربوطه

$$a^2 \nabla^2 U = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4)$$

که به معادله حرارت مشهور است، در مسائل مربوط به هدایت حرارت ظاهر می‌شود، در اینجا U علاوه بر مختصات، تابع زمان نیز هست. معادله موج

$$a^2 \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (5)$$

با پدیده‌های ارتعاشی مرتبط است.

چند نکته کوتاه در مورد معنای فیزیکی این معادلات می‌افزاییم. معادله (۵) همان صورت سه بعدی معادله يك بعدی موج ۲۴- (۸) است، که قبلاً به طور مفصل مورد بحث قرار گرفت. با مراجعه به معادله لاپلاس (۳)، می‌بینیم که این معادله همان حکمی را در مورد U می‌کند که معادله يك بعدی $d^2 y / dx^2 = 0$ در مورد تابع يك متغیری $y(x)$ به عمل می‌آورد. اما از معادله اخیر نتیجه می‌شود که $y(x)$ به صورت خطی $y = mx + b$

است؛ و هر تابعی به این صورت، دارای این خاصیت است که مقدارش در مرکز هر فاصله، با میانگین مقادیر آن در نقاط انتهایی برابر است. از (۱) روشن است که جوابهای معادله لاپلاس لزوماً توابعی خطی از x ، y ، و z نیستند؛ در واقع، این جوابها می توانند خیلی پیچیده باشند، با این حال، می توان ثابت کرد که هر جواب (۳) دارای این خاصیت شایان توجه است که مقدار آن در مرکز یک کره با میانگین مقادیرش بر روی آن کره برابر است (این مطلب توسط گاوس کشف شد). به طور کلی تر، تابع $\nabla^2 U$ را می توان به عنوان اندازه تقریبی تفاوت بین مقدار متوسط U بر روی یک کره کوچک و مقدار دقیق آن در مرکز کره دانست. بنابراین، به عنوان مثال، اگر U نمایشگر دما در یک نقطه دلخواه P در یک جسم صلب باشد و $\nabla^2 U$ در نقطه ای چون P مثبت باشد، آنگاه مقدار U در P معمولاً کمتر از مقادیر آن در نقاط نزدیک به آن است. بنابراین انتظار می رود که حرارت به طرف P سیلان کند، و باعث افزایش دما در آنجا شود؛ و چون دمای U در حال افزایش است، $\partial U / \partial t$ در P مثبت است. این اساساً همان چیزی است که معادله حرارت (۴) بیان می کند: $\partial U / \partial t$ متناسب و همعلامت با $\nabla^2 U$ است. اگر دمای U در سراسر جسم به حالت پایداری برسد، به طوری که در همه نقاط $\partial U / \partial t = 0$ آنگاه $\nabla^2 U = 0$ و به حالت معادله لاپلاس برخواهیم گشت.

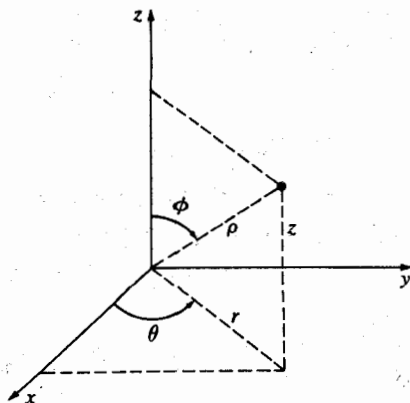
مواردی پیش خواهد آمد که از فرمول $\nabla^2 U$ در مختصات استوانه ای (r, θ, z) و مختصات کروی (ρ, θ, ϕ) که در شکل ۳۵ نشان داده شده اند، استفاده کنیم.

این مختصات بوسیله روابط زیر به مختصات دکارتی مربوط می شوند

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

و

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$



شکل ۳۵

به وسیله محاسباتی طولانی ولی ساده می توان نشان داد که، در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (۶)$$

و در مختصات کروی

$$\begin{aligned} \nabla^2 U = & \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) \\ & + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (۷)$$

هر دانشجوی ریاضی باید حداقل يك بار در عمرش این محاسبات را انجام دهد، ولی شاید همان يك بار کافی باشد!

دماهای حالت پابرجا در کره. در این مثال می خواهیم تشریح حتی المقدور ساده‌ای از نقش چند جمله‌ایهای لژاندر در حل برخی مسائل مقدار مرزی در فیزیک ریاضی عرضه کنیم.^{۱۰}

فرض کنید يك کره صلب به شعاع ۱ را در يك دستگاه مختصات کروی چنان قرار داده‌ایم که مرکزش بر مبدأ منطبق باشد. حال فرض کنید که رویه آن را در دمای بخصوص $f(\phi)$ ، که برای سادگی مستقل از θ فرض می‌شود، نگه‌داریم تا وقتی که سیلان حرارت، حالتی پابرجا برای دمای $T(\rho, \phi)$ در داخل کره برقرار کند. مسئله عبارت از یافتن نمایش صریحی برای تابع دمای $T(\rho, \phi)$ است.

دمای حالت پابرجای T در معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کروی صدق می‌کند. و چون T به θ بستگی ندارد، (۷) به ما امکان می‌دهد که این معادله را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (۸)$$

برای حل معادله (۸) با شرط مرزی

$$T(1, \phi) = f(\phi) \quad (۹)$$

از روش جدا کردن متغیرها که در بخش ۲۴ گفته شد استفاده می‌کنیم، یعنی، دنبال جوابی از (۸) می‌رویم که به صورت $T(\rho, \phi) = u(\rho)v(\phi)$ باشد. اگر این عبارت را در (۸) بگذاریم و متغیرها را جدا کنیم، می‌بینیم که

$$\frac{1}{u} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{du}{d\rho} \right) = - \frac{1}{v \sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dv}{d\phi} \right) \quad (۱۰)$$

قدم اساسی در این روش توجه به نکته زیر است: چون طرف چپ معادله (۱۰) صرفاً تابعی از ρ و طرف راست آن صرفاً تابعی از ϕ است، هر یک از این دو طرف باید برابر با مقدار ثابتی مانند λ باشند که آن را ثابت جداسازی می نامند. در نتیجه (۱۰) به دو معادله دیفرانسیل معمولی تجزیه می شود

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + 2\rho \frac{du}{d\rho} - \lambda u = 0 \quad (11)$$

و

$$\frac{1}{\sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dv}{d\phi} \right) + \lambda v = 0 \quad (12)$$

معادله (۱۱) يك معادلهٔ اوپلر با $p=2$ و $q=-\lambda$ است. پس معادلهٔ مبین آن به صورت

$$m^2 + m - \lambda = 0 \quad \text{یا} \quad m(m-1) + 2m - \lambda = 0$$

است. بنابراین نماها برابرند با $(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda})/2$ ، و جواب عمومی (۱۱) به صورت

$$u = c_1 \rho^{-1/2 + \sqrt{\lambda+1/4}} + c_2 \rho^{-1/2 - \sqrt{\lambda+1/4}} \quad (13)$$

یا

$$u = c_3 \rho^{-1/2} + c_4 \rho^{-1/2} \log \rho$$

است. برای حصول اطمینان از اینکه u در نزدیکی $\rho=0$ کراندار و تک مقداری است امکان دوم را بکلی کنار می گذاریم، و در (۱۳) قرار می دهیم $c_2=0$ و می نویسیم

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda+1/4} = n$$

که در آن n عددی صحیح و غیر منفی است. بنابراین، $\lambda = n(n+1)$ و (۱۳) به صورت

$$u = c_1 \rho^n \quad (14)$$

ساده می شود، و (۱۲) به صورت

$$\frac{d^2 v}{d\phi^2} + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \frac{dv}{d\phi} + n(n+1)v = 0$$

درمی آید. اگر متغیر مستقل را از ϕ به $x = \cos \phi$ تغییر دهیم، آنگاه این معادله به صورت

$$(1-x^2) \frac{d^2 v}{dx^2} - 2x \frac{dv}{dx} + n(n+1)v = 0 \quad (15)$$

تبدیل می شود که همان معادلهٔ لژاندر است. با توجه به جنبهٔ فیزیکی مسئله، تابع v

باید در فاصله $\pi \leq \phi \leq 0$ و یا در فاصله معادل آن، یعنی $1 \leq x \leq -1$ - کراندار باشد؛ و از بخش ۳۲ می‌دانیم که تنها جوابهای معادله (۱۵) با این ویژگی، مضارب ثابت چند جمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ هستند. اگر این نتیجه را با (۱۴) ترکیب کنیم، می‌بینیم که برای هر $n = 0, 1, 2, \dots$ جوابهای خصوصی معادله (۸) به صورت زیر هستند

$$a_n \rho^n P_n(\cos \phi) \quad (16)$$

که در آن a_n ها ثابتهای دلخواه هستند. نمی‌توان امیدوار بود که با استفادهٔ $T(\rho, \phi)$ از این جوابها بتوان شرط مرزی (۹) را ارضا نمود. با این حال، معادلهٔ لاپلاس خطی است و هر مجموعی از جوابها نیز خود جوابی از معادله است، لذا طبیعی است که از جمع جوابهای خصوصی (۱۶) یک سری نامتناهی بسازیم و امیدوار باشیم که $T(\rho, \phi)$ را بتوان به صورت زیر نوشت،

$$T(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n P_n(\cos \phi) \quad (17)$$

حال شرط مرزی (۹) ایجاب می‌کند که

$$f(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \phi)$$

و یا معادل آن

$$f(\cos^{-1} x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad (18)$$

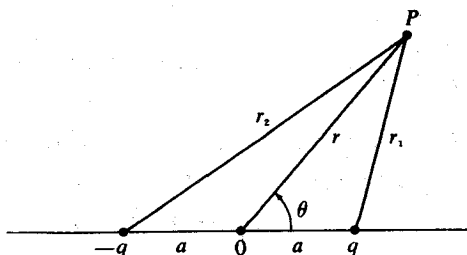
از بخش ۳۳ می‌دانیم که اگر تابع $f(\cos^{-1} x)$ به حد کافی خوش رفتار باشد، آنگاه آن را می‌توان به صورت سری لژاندری به شکل (۱۸) بسط داد که در آن ضرایب a_n به وسیلهٔ رابطهٔ زیر مشخص می‌شوند

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(\cos^{-1} x) P_n(x) dx \quad (19)$$

با این ضرایب، (۱۷) همان جواب مطلوب مسئله است.

جواب (۱۷) را با روندهای نسبتاً صوری به دست آوردیم، و باید متذکر شویم که در اینجا سؤالاتی مشکل از ریاضیات محض مطرح هستند که ما به آنها هیچ اشاره‌ای نکرده‌ایم. ممکن است از نظر یک فیزیکدان این مطلب واضح به نظر آید که هر جسم صلب که دمای رویهٔ آن مشخص شده است واقعاً به دمای حالت پایبرجا معلوم و منحصر به فردی در هر نقطهٔ درونی‌اش می‌رسد. ولی متأسفانه ریاضیدانها آگاه‌اند که امور بدیهی اغلب نادرست از کار درمی‌آیند^۱. در مسئله‌ای از نظریه پتانسیل که به مسئله دیریکله مشهور است، وجود

۱. در صفحه ۲۸۵ کتاب زیرمناهای نسبتاً ساده‌ای حاکی از نادرست بودن این مطلب آمده است. O.D. Kellogg, "Foundations of Potential Theory," Springer, New York, 1929.



شکل ۳۶

و یگانگی تابع پتانسیلی در سراسر يك ناحیه که شرایط مرزی معینی را بپذیرد، نیاز به اثباتی دقیق دارد. این مسئله را ریاضیدان بزرگ آلمانی، هیلبرت، در اوایل قرن بیستم برای انواع بسیارکلی ولی کاملاً مشخص ازمرزها وتوابع مرزی حل کرد.

پتانسیل دو قطبی الکتروستاتیکی. رابطهٔ مولد

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (20)$$

برای چند جمله‌ایهای لژاندر در تمرینهای ۳۲-۱، ۳۲-۲، و ۳۲-۳ مورد بحث قرار گرفته است. به عنوان تشریح فیزیکی مستقیمی از ارزش این رابطه، می‌خواهیم پتانسیل ناشی از دوبار نقطه‌ای مساوی q ولی مختلف‌العلامه را به کمک آن محاسبه کنیم. هرگاه این بارها را در يك دستگاه مختصات قطبی قراردهیم (شکل ۳۶)، آنگاه با واحدهای اندازه - گیری مناسب، پتانسیل در P برابر است با

$$U = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \quad (21)$$

که در آن با توجه به قانون کسینوسها خواهیم داشت:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} \quad \text{و} \quad r_2 = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta}$$

هرگاه $r > a$ ، به کمک (۲۰) داریم

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos \theta (a/r) + (a/r)^2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n$$

و همین‌طور

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cos \theta (a/r) + (a/r)^2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n$$

→
اینشتین، یکی ازقصارگویان بزرگ، گفته است: «کمپاب‌ترین و با ارزش‌ترین خصلت متفکران همان‌ظرفیت آنها در شك‌کردن در مورد چیزهای واضح است.»

حال فرمول (۲۱) را می‌توان چنین نوشت

$$U = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(\cos \theta) - P_n(-\cos \theta)] \left(\frac{a}{r}\right)^n \quad (22)$$

می‌دانیم که چند جمله‌ای n ام $P_n(x)$ برای n های زوج و فرد بترتیب زوج و فرد است. بنابراین، عبارت داخل کروشه بسته به اینکه n زوج یا فرد باشد برابر ۰ و یا $2P_n(\cos \theta)$ خواهد بود، و (۲۲) به صورت

$$\begin{aligned} U &= \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{2q}{r} \left[P_1(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right) + P_3(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \dots \right] \quad (23) \end{aligned}$$

درخواهد آمد. حال اگر فرض کنیم وقتی r در مقایسه با a بزرگ باشد از همه جملات بجز اولی می‌توان صرف نظر کرد، و به خاطر بیاوریم که $P_1(x) = x$ ، آنگاه از (۲۳) نتیجه می‌گیریم که

$$U = 2aq \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)$$

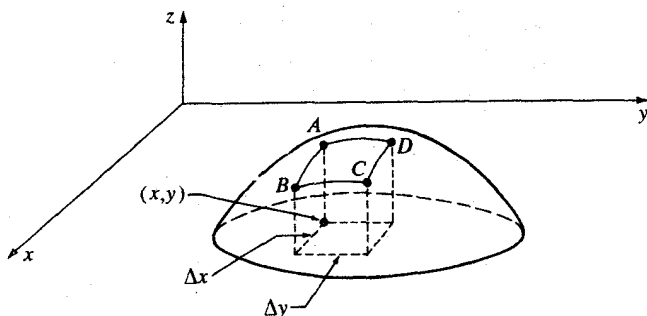
این تقریبی است که فیزیکدانها برای پتانسیل دوقطبی به کار می‌برند.

پیوست ب. توابع بسل و غشای مرتعش

یکی از ساده‌ترین کاربردهای فیزیکی توابع بسل، در نظریهٔ اویلر راجع به ارتعاشات غشای مدور ظاهر می‌گردد. در این متن مقصود از غشا ورقه‌ای نازک و یکنواخت از مادهٔ انعطاف‌پذیر است که محکم کشیده شده و به حالت کشش یکنواخت درآمده باشد و در طول منحنی بسته مفروضی در صفحهٔ xy محکم شده باشد. هرگاه این غشا را از وضع تعادلش کمی دور و سپس رها کنیم، نیروهای بازگردانندهٔ ناشی از این تغییر شکل، موجب ارتعاش آن خواهند شد. مسئلهٔ مورد نظر، عبارت از تحلیل این حرکت ارتعاشی است.

معادله حرکت. در اینجا بحثی شبیه به آنچه که در بخش ۲۴ راجع به تار مرتعش گفته شد داریم؛ یعنی برای سادگی چند فرض خواهیم کرد تا به ما امکان دهند مسئله را به صورت یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی بیان کنیم، و امیدواریم که این معادله، حرکت مورد نظر را با دقت مناسبی تشریح کند. این شرایط را می‌توان در یک جمله خلاصه کرد: تنها نوسانهای کوچک از غشای دارای ارتعاشات آزاد را در نظر خواهیم گرفت. راههای متعدد استفاده از این مطلب در ضمن عمل بتدریج روشن خواهند شد.

ابتدا، فرض می‌کنیم که ارتعاشات چنان کوچک باشند که هر نقطه از غشا تنها در جهت



شکل ۳۷

محور z ها حرکت کند، و تغییر مکان آن در لحظه t از تابعی مانند $z = z(x, y, t)$ به دست آید. قطعه کوچکی (شکل ۳۷) از غشا را که به صفحات قائم، ماربر نقاط زیر از صفحه xy محدود شده است در نظر می گیریم: (x, y) ، $(x + \Delta x, y)$ ، $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ و $(x, y + \Delta y)$. هرگاه m مقدار ثابت جرم واحد سطح باشد، آنگاه جرم این قطعه برابر با $m \Delta x \Delta y$ است، و بنا بر قانون دوم حرکت نیوتن می بینیم که نیروی وارد بر آن در جهت محور z ها برابر است با

$$F = m \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (۱)$$

وقتی غشا در حالت تعادل خود باشد، کشش ثابت T دارای معنای فیزیکی زیر است: در طول هر قطعه خط به طول Δs ، ماده واقع در یک طرف، نیرویی عمود بر آن قطعه خط، و به بزرگی $T \Delta s$ ، بر ماده واقع در طرف دیگر اعمال می کند. در این حالت نیروهای وارد بر کناره های مقابل این قطعه کوچک، موازی صفحه xy هستند و همدیگر را خنثی می کنند. وقتی غشا خمیده باشد، همچون حالت نشان داده شده در شکل ۳۷، فرض می کنیم، تغییر شکل آنقدر ناچیز باشد که کشش هنوز همان T باشد، منتها این بار به موازات صفحه مماس عمل می کند، و در نتیجه مؤلفه قائم قابل توجهی دارد. انحنای این قطعه است که اندازه های متفاوتی برای مؤلفه های قائم وارد بر لبه های متقابل پدید می آورد، و این به نوبه خود منشأ نیروهای بازگرداننده ای است که باعث حرکت می شوند.

حال این نیروها را با فرض آنکه قطعه $ABCD$ از غشا تنها اندکی از وضعیت تعادل خارج شده باشد تحلیل می کنیم. این فرض به ما امکان خواهد داد که به شرح زیر، سینوس بعضی زوایای کوچک را با تانژانت آنها عوض کنیم. در طول لبه های AB و DC ، نیروها عمود بر محور x ها و تقریباً موازی محور y ها هستند، و مؤلفه های کوچک z آنها تقریباً برابر است با

$$-T \Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \quad \text{و} \quad T \Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y}$$

در نتیجه، مجموعشان تقریباً برابر است با

$$T\Delta x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right]$$

حروف زیر این مشتقات جزئی نشان دهنده مقدار آنها در نقاط (x, y) و $(x, y+\Delta y)$ هستند. هرگاه روی لبه‌های BC و AD نیز به همین طریق عمل کنیم، درمی‌یابیم که نیروی کل وارده در جهت محور z ها (صرفنظر از همه نیروهای خارجی) تقریباً برابر است با

$$F = T\Delta y \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \right] + T\Delta x \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right]$$

بنابراین (۱) را می‌توان چنین نوشت

$$T \frac{(\partial z / \partial x)_{x+\Delta x} - (\partial z / \partial x)_x}{\Delta x} + T \frac{(\partial z / \partial y)_{y+\Delta y} - (\partial z / \partial y)_y}{\Delta y} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

حال اگر بنویسیم $a^2 = T/m$ و Δx و Δy را به سمت صفر میل دهیم، این معادله به صورت

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2)$$

نوشته می‌شود که معادله موج دو بعدی است.

ممکن است خواننده در مورد استدلالی که به معادله (۲) منجر گردید تردیدهایی داشته باشد. اگر چنین باشد، او همراهان فراوانی دارد؛ زیرا مسئله یافتن معادله دیفرانسیلی که دستگاه فیزیکی مفروضی را به صورت مطلوب توصیف کند، به هیچ روی ساده نیست و این امر بخصوص در مورد معادله موج جدی است. بررسی دقیقتر حدهای مربوطه راه به جایی نخواهد برد، زیرا غشا نهایتاً اتمی است و مطلقاً پیوسته نیست. شاید منطقی‌ترین برداشت آن باشد که بحث خود را به منزله دلیل توجیهی انتخاب معادله موج فوق‌الذکر به عنوان یک مدل ریاضی بپذیریم. آنگاه می‌توان این معادله را به عنوان اصلی از مکانیک استدلالی پذیرفت که «غشای ایده‌آل» را تشریح می‌کند و رفتار ریاضی آن ممکن است با رفتار واقعی غشاهای حقیقی تطبیق داشته و یا نداشته باشد.

غشای مدور. حال توجه خود را متوجه حالت خاص مربوط به غشای مدور می‌کنیم. در این حالت طبیعی است که از دستگاه مختصات قطبی که مبدأ آن منطبق بر مرکز غشا باشد استفاده کنیم. فرمول (۶) از پیوست الف نشان می‌دهد که معادله موج (۲) در این حالت به صورت زیر درمی‌آید:

۱. راجع به این سؤال که «مکانیک استدلالی چیست؟» مطالب روشنگر مرجع زیر توصیه می‌شود.
C. Truesdell, "Essays in the History of Mechanics," pp. 334-340, Springer, New York, 1968.

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (3)$$

که در آن $z = z(r, \theta, t)$ تابعی از مختصات قطبی و زمان است. برای راحتی فرض می‌کنیم که شعاع غشا ۱ باشد، و بنابراین در طول دایره‌ای به شعاع $r = 1$ به صفحه تعادل خود محکم شده باشد. نتیجتاً، شرط مرزی چنین است

$$z(1, \theta, t) = 0 \quad (4)$$

مسئله آن است که جوابی از (۳) را بیابیم که در این شرط مرزی و شرایط اولیه مشخصی که بعداً تعیین خواهند شد صدق کند.

برای به کارگیری روش متعارف جدا کردن متغیرها، بحث را با جستجوی جوابهای خصوصی به صورت

$$z(r, \theta, t) = u(r)v(\theta)w(t) \quad (5)$$

آغاز می‌کنیم. اگر (۵) را در (۳) جایگزین و نتیجه را مرتب کنیم، می‌بینیم که

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = \frac{1}{a^2} \frac{w''(t)}{w(t)} \quad (6)$$

چون طرف چپ معادله (۶) صرفاً تابع r و θ ، و طرف راست آن صرفاً تابع t است هر دو طرف باید ثابت باشند. برای آنکه غشا ارتعاش کند، $w(t)$ باید دوره‌ای باشد و طرف راست (۶) نشان می‌دهد که برای تضمین این امر ثابت جداسازی باید منفی باشد. لذا دو طرف (۶) را برابر $-\lambda^2$ با $\lambda > 0$ قرار می‌دهیم و دو معادله زیر را به دست می‌آوریم

$$w''(t) + \lambda^2 a^2 w(t) = 0 \quad (7)$$

و

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = -\lambda^2 \quad (8)$$

واضح است که جواب عمومی (۷) عبارت است از

$$w(t) = c_1 \cos \lambda a t + c_2 \sin \lambda a t \quad (9)$$

و (۸) را می‌توان به صورت

$$r^2 \frac{u''(r)}{u(r)} + r \frac{u'(r)}{u(r)} + \lambda^2 r^2 = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)} \quad (10)$$

نوشت. در (۱۰) تابعی از r در طرف چپ و تابعی از θ در طرف راست داریم، و در نتیجه این بار هم هر دو طرف باید ثابت باشند. حال خاطر نشان می‌کنیم که θ ، زاویه قطبی هر نقطه صفحه تنها با اختلاف مضرب صحیحی از 2π تعیین می‌شود؛ و با توجه به ماهیت مسئله

مقدار v در هر نقطه باید مستقل از مقدار θ مربوط به آن نقطه باشد. این امر مستلزم آن است که v ثابت و یا در غیر این صورت دوره‌ای با دوره تناوب 2π باشد. بررسی طرف راست معادله (۱۰) نشان می‌دهد که این حالات با نوشتن ثابت جداسازی به صورت n^2 ، به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ ، زیر پوشش قرار می‌گیرند. و در این صورت (۱۰) به

$$v''(\theta) + n^2 v(\theta) = 0 \quad (11)$$

و

$$r^2 u''(r) + ru'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2)u(r) = 0 \quad (12)$$

تجزیه خواهد شد. با توجه به اینکه v یا ثابت و یا دوره‌ای، با دوره تناوب 2π است. از رابطه (۱۱) نتیجه می‌گیریم که برای هر n

$$v(\theta) = d_1 \cos n\theta + d_2 \sin n\theta \quad (13)$$

صرف نظر از این که برای $n = 0$ ، عبارت (۱۳) جواب عمومی (۱۱) نیست. حال از تمرین ۳۴-۷ روشن می‌شود که (۱۲) صورت اندکی تغییر یافته از معادله بسل مرتبه n است که یک جواب کراندار آن $J_n(\lambda r)$ و یک جواب مستقل و یک-کران آن $Y_n(\lambda r)$ می‌باشد. از آنجا که $u(r)$ در نزدیکی $r = 0$ لزوماً کراندار است، جواب دوم را کنار می‌گذاریم و می‌نویسیم

$$u(r) = k J_n(\lambda r) \quad (14)$$

حال شرط مرزی (۴) را می‌توان با شرط $u(1) = 0$ یا

$$J_n(\lambda) = 0 \quad (15)$$

ارضا نمود. لذا مقادیر مجاز λ همان صفرهای مثبت تابع $J_n(x)$ هستند، و از بخش ۳۵ می‌دانیم که $J_n(x)$ بینهایت از این گونه صفرها دارد. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که جوابهای خصوصی (۵) حاصل از این تحلیل مضارب ثابتی از آرایه دو بینهایتی توابع

$$J_n(\lambda r)(d_1 \cos n\theta + d_2 \sin n\theta)(c_1 \cos \lambda a t + c_2 \sin \lambda a t) \quad (16)$$

هستند که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$ و برای هر n ، λ های مربوطه ریشه‌های مثبت $J_n(\lambda)$ اند.

شرایط اولیه خاص. منظور از بحث فوق آن بود که نشان دهیم توابع بسل از مرتبه صحیح چگونه در مسائل فیزیکی ظاهر می‌شوند. این بحث اهمیت صفرهای مثبت این توابع را نیز روشن می‌کند. به خاطر سادگی، بررسی بعدی خود را به حالت خاص زیر محدود می‌کنیم: غشا به صورت $z = f(r)$ که مستقل از θ است تغییر مکان یافته، و در لحظه $t = 0$ از حالت سکون رها شده است. این بدان معناست که شرایط اولیه

$$z(r, \theta, 0) = f(r) \quad (17)$$

و

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (18)$$

را اعمال می‌کنیم. مسئله عبارت از تعیین شکل $z(r, \theta, t)$ در هر زمان بعدی، $t > 0$ است. استراتژی ما تطبیق جوابهای خصوصی یافته شده با شرایط اولیه مفروض است. اولاً، قسمتی از (۱۷) که بیانگر استقلال شکل اولیه از θ است نتیجه می‌دهد که $v(\theta)$ ثابت است، لذا (۱۳) به‌ما می‌گوید که $n=0$. هرگاه صفرهای مثبت $J_0(x)$ را با $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ نشان دهیم، آنگاه این نکته آرایه توابع (۱۶) را به

$$J_0(\lambda_n r)(c_1 \cos \lambda_n at + c_2 \sin \lambda_n at), \quad n=1, 2, \dots$$

تبدیل می‌کند. ضمناً (۱۸) نتیجه می‌دهد که $c_2 = 0$ ، و در نتیجه جوابهای مورد قبول، مضارب ثابت توابع

$$J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n at, \quad n=1, 2, \dots$$

هستند. تا این مرحله، از این موضوع که مجموعه‌های جوابهای (۳) نیز جواب‌اند استفاده نکرده‌ایم. نتیجتاً، کلی‌ترین جوابهای صوری که اینک در دسترس هستند سری‌های نامتناهی

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n at \quad (19)$$

می‌باشند. آخرین عبارت از آن است که در (۱۹)، t را مساوی با صفر و نتیجه را با $f(r)$ برابر بگیریم تا شرط (۱۷) ارضا شود:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r)$$

قضیه بسط بسل از بخش ۳۵ تضمین می‌کند که هرگاه $f(r)$ به اندازه کافی خوش رفتار باشد و a_n ها به وسیله رابطه زیر تعریف شوند، نمایش بالا معتبر خواهد بود

$$a_n = \frac{2}{J_1(\lambda_n)^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr$$

با این ضرایب، (۱۹) جواب صوری برای (۳) است که در شرط مرزی و شرایط اولیه داده شده صدق می‌کند، و بدین ترتیب این بحث کامل می‌شود.

پیوست ج. چند خاصیت دیگر از توابع بسل

در بخشهای ۳۴ و ۳۵ مجالی برای ذکر تعدادی از خواص قابل ملاحظه توابع بسل، که

۱. کاربردهای فراوان دیگری از توابع بسل را می‌توان در فصل ۶ کتاب لیدف یافت. همچنین رجوع کنید به

A. Gray and G. B. Mathews, "A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics," Macmillan, New York, 1952.

نباید ناگفته بماند، فراهم نبود، لذا آنها را در اینجا عرضه خواهیم کرد. متأسفانه بررسی کامل این روشها نیازمند چندین قضیه از قسمتهای پیشرفته‌تر آنالیز است، ولی این امر از اعتبار خود نتایج نمی‌کاهد.

تابع مولد. توابع از مرتبه صحیح بسل $J_n(x)$ به وسیله رابطه

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) [t^n + (-1)^n t^{-n}] \quad (1)$$

به هم مربوط می‌شوند. از آنجا که $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ، این رابطه را معمولاً به صورت

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (2)$$

می‌نویسند. برای اثبات (۱) دو سری زیر را به‌طور صوری درهم ضرب می‌کنیم

$$e^{-xt-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{2^k} t^{-k} \quad \text{و} \quad e^{x/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{x^j}{2^j} t^j \quad (3)$$

نتیجه يك سری دوگانه است که جملاتش عبارت از همه حاصلضربهای ممکن يك جمله از سری اول در يك جمله از سری دوم می‌باشند. از آنجا که هر يك از سری‌های (۳) همگرای مطلق است، این سری دوگانه، صرف‌نظر از ترتیب جملاتش، به‌مقدار مجموع خودهمگرا خواهد بود. برای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، دقیقاً وقتی يك جمله از سری دوگانه شامل t^n به دست می‌آوریم که $j = n + k$ ؛ و هرگاه تمام مقادیر ممکن k در نظر گرفته شود، ضریب کلی t^n عبارت می‌شود از

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \frac{x^{n+k}}{2^{n+k}} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{n+k}}{k!(n+k)!} = J_n(x)$$

به همین ترتیب، جملات شامل t^{-n} ($n \geq 1$) دقیقاً وقتی به وجود می‌آیند که $k = n + j$ ، لذا ضریب کلی t^{-n} عبارت می‌شود از

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{x^j}{2^j} \frac{(-1)^{n+j}}{(n+j)!} \frac{x^{n+j}}{2^{n+j}} &= (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(x/2)^{n+j}}{j!(n+j)!} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

وبدین ترتیب اثبات (۱) کامل می‌شود.

يك نتیجه ساده از رابطه (۲)، فرمول جمع

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y) \quad (4)$$

است. برای اثبات این فرمول، ابتدا توجه می‌کنیم که

$$e^{(x/2)(t-1/t)} e^{(y/2)(t-1/t)} = e^{(x+y)/2(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) t^n$$

ولی، حاصلضرب دو تابع نمایی طرف چپ نیز برابر است با

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(x) t^j \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y) t^k \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y) \right] t^n$$

و از برابر قراردادن ضرایب t^n در این دو عبارت، رابطه (۲) بلافاصله به دست می آید. اگر در (۲) مقدار n را صفر اختیار کنیم داریم

$$\begin{aligned} J_0(x+y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{-k}(x) J_k(y) \\ &= J_0(x) J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{-k}(x) J_k(y) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x) J_{-k}(y) \\ &= J_0(x) J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [J_k(x) J_k(y) + J_k(x) J_k(y)] \\ &= J_0(x) J_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2 J_k(x) J_k(y) \end{aligned}$$

یا

$$J_0(x+y) = J_0(x) J_0(y) - 2 J_1(x) J_1(y) + 2 J_2(x) J_2(y) - \dots \quad (5)$$

هرگاه y را به x تبدیل و از این موضوع استفاده کنیم که $J_n(x)$ بسته به زوج یا فرد بودن n زوج یا فرد خواهد بود، آنگاه (۵) به صورت اتحاد قابل توجه زیر درمی آید

$$1 = J_0(x)^2 + 2 J_1(x)^2 + 2 J_2(x)^2 + \dots \quad (6)$$

که نتیجه می دهد $|J_0(x)| \leq 1$ و برای $n = 1, 2, \dots$ $|J_n(x)| \leq 1/\sqrt{2}$

فرمول انتگرالی بسل. وقتی که $t = e^{i\theta}$ ، نمای چپ (۲) تبدیل به

$$x \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = ix \sin \theta$$

می شود و (۲) به صورت

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} \quad (7)$$

درمی آید.

چون $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$ و $e^{ix \sin \theta} = \cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta)$

از مساوی گرفتن قسمتهای حقیقی و موهومی (۷) می بینیم که

$$\cos(x \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos n\theta \quad (۸)$$

و

$$\sin(x \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \sin n\theta \quad (۹)$$

حالت با استفاده از روابط $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ، $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$ ، و $\sin(-n\theta) = -\sin n\theta$ روابط (۸) و (۹) بدین صورت درمی آیند:

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\theta \quad (۱۰)$$

و

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin(2n-1)\theta \quad (۱۱)$$

به عنوان حالت خاصی از (۱۰)، توجه می کنیم که $\theta = 0$ ، سری جالب

$$1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \dots$$

را به دست می دهد. همچنین، با اختیار $\theta = \pi/2$ در (۱۰) و (۱۱) فرمولهای زیر به دست می آیند

$$\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \dots$$

و

$$\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \dots$$

که باردیگر پیوندهای نزدیک بین توابع بسل و توابع مثلثاتی را روشن می سازند. مهمترین کاربرد (۸) و (۹) در اثبات فرمول انتگرالی بسل است:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (۱۲)$$

برای اثبات این رابطه، طرفین (۸) را در $\cos m\theta$ و طرفین رابطه (۹) را در $\sin m\theta$ ضرب و نتایج را جمع می کنیم:

$$\cos(m\theta - x \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos(m-n)\theta$$

اگر از دو طرف این رابطه از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ انتگرال بگیریم، طرف راست برابر $\pi J_m(x)$ می شود، و از تبدیل m به n فرمول (۱۲) به دست می آید. بسل، ضمن کارهای نجومی خود به توابع $J_n(x)$ به صورت این انتگرالها برخورد کرد، و براین اساس بسیاری از خواص آنها را یافت^۱.

۱. برای توصیفی از مسئله اصلی بسل مراجعه کنید به ۴-۷ Gray and Mathews, pp.

چند کسر مسلسل . هرگاه اتحاد ۳۵- (۷) را به صورت

$$J_{p-1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$$

بنویسیم و آن را بر $J_p(x)$ تقسیم کنیم ، می بینیم که

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)} = \frac{2p}{x} - \frac{1}{J_p(x)/J_{p+1}(x)}$$

اگر از خود این فرمول برای مخرج دوم طرف راست ، با تغییر p به $p+1$ ، استفاده کنیم ، و این روند را بینهایت بار ادامه دهیم ، خواهیم داشت

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)} = \frac{2p}{x} - \frac{1}{\frac{2p+2}{x} - \frac{1}{\frac{2p+4}{x} - \dots}}$$

که بسط ، به صورت کسر مسلسل نامتناهی نسبت $J_{p-1}(x)/J_p(x)$ است . در اینجا قادر به بررسی نظریه چنین بسطهایی نیستیم ، ولی ممکن است جالب توجه باشد تذکر دهیم که وقتی $p = 1/2$ ، از تمرین ۳۴-۵ نتیجه می شود $J_{-1/2}(x)/J_{1/2}(x) = \cot x$ ، و بنا بر این

$$\tan x = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \dots}}}$$

این کسر مسلسل در سال ۱۷۶۱ به وسیله لامبرت کشف شد . وی از آن برای اثبات گویا نبودن π استفاده کرد . او چنین استدلال کرد: هرگاه x عدد گویای غیر صفری باشد ، آنگاه شکل این کسر مسلسل نتیجه می دهد که $\tan x$ نمی تواند گویا باشد و لسی $\tan \pi/4 = 1$ ، پس اعداد $\pi/4$ و π گویا نیستند . تعدادی از اشکالات جزئی استدلال لامبرت حدود ۳۰ سال بعد توسط لژاندر اصلاح گردید .



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دستگاههای معادلات مرتبه اول

۳۶. ملاحظات کلی درباره دستگاهها

یکی از مفاهیم بنیادی آنالیز، دستگاه n معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. اگر $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، \dots ، $y_n(x)$ توابعی مجهول از یک متغیر مستقل x باشند، آنگاه عمومیترین دستگاه مورد نظر ما آن است که مشتقات y_1' ، y_2' ، \dots ، y_n' در آن به صورت توابعی صریح از x و y_1 ، y_2 ، \dots ، y_n داده شده باشند:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (1)$$

...

$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

دستگاههای معادلات دیفرانسیل به طور کاملاً طبیعی در بسیاری از مسائل علمی مطرح می‌شوند. در مثال زیر خواهیم دید که چطور این گونه مسائل در رابطه با دستگاههای دینامیکی دارای چندین درجه آزادی مطرح می‌شوند، و در بخش ۳۹ آنها را برای تجزیه و تحلیل یک جامعه زیستی ساده متشکل از انواع گوناگون حیواناتی که برهمدیگر تأثیر متقابل دارند به کار خواهیم برد.

یک دلیل ریاضی مهم برای مطالعه دستگاهها آن است که هر معادله مرتبه n م

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

را می‌توان حالت خاصی از (۱) تلقی کرد. برای مشاهده این مطلب می‌نویسیم

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)} \quad (۳)$$

و دقت می‌کنیم که (۲) معادل دستگاه

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\dots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (۴)$$

می‌باشد که آشکارا حالت خاصی از (۱) است. بیان هم‌ارزی (۲) و (۴) به مفهوم زیر است: اگر $y(x)$ يك جواب معادله (۲) باشد، در آن صورت، توابع $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ که به کمک (۳) تعریف می‌شوند، دستگاه معادلات (۴) را ارضا می‌کنند و برعکس، اگر $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ در (۴) صدق کنند، آنگاه $y(x) = y_1(x)$ جوابی از (۲) است.

این تبدیل معادله مرتبه n به دستگاهی متشکل از n معادله مرتبه اول دارای چندین مزیت است. ذیلاً رابطه بین قضایای اساسی وجود ویگانگی را برای دستگاه (۱) و معادله (۲) شرح می‌دهیم.

اگر يك نقطه ثابت $x = x_0$ را برگزیده و مقادیر توابع مجهول

$$y_1(x_0) = a_1, y_2(x_0) = a_2, \dots, y_n(x_0) = a_n \quad (۵)$$

به طور دلخواه چنان تعیین گردند که f_1, f_2, \dots, f_n معین باشند، آنگاه (۱) مقادیر مشتقات $y_1'(x_0), y_2'(x_0), \dots, y_n'(x_0)$ را به دست می‌دهد. تشابه بین این وضعیت و آنچه در بخش ۲ مورد بحث قرار گرفت، مشابه قضیه پیکار را به صورت زیر مطرح می‌سازد.

قضیه الف. فرض می‌کنیم که توابع f_1, f_2, \dots, f_n و مشتقات جزئی $\partial f_1 / \partial y_1, \dots, \partial f_n / \partial y_1, \dots, \partial f_n / \partial y_n$ در ناحیه R از فضای (y_1, \dots, y_n, x) پیوسته باشند. هرگاه $(x_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ يك نقطه درونی R باشد، دستگاه (۱) دارای جواب منحصر به فردی، چون $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ است که در شرایط اولیه (۵) صدق می‌کند.

ما این قضیه را اثبات نخواهیم کرد، لیکن در عوض متذکر می‌شویم که وقتی زمینه اثبات به نحو مناسبی فراهم آید، اثبات آن با اثبات قضیه پیکار به شکلی که در فصل ۱۱ عرضه شده است یکسان است. بعلاوه، با توجه به تبدیل فوق‌الذکر، قضیه الف، قضیه متناظر زیر راجع به معادله (۲) را به عنوان يك حالت خاص شامل می‌شود.

قضیه ب. فرض می‌کنیم که تابع f و مشتقات جزئی $\partial f / \partial y, \partial f / \partial y', \dots,$

$\partial f / \partial y^{(n-1)}$ در ناحیه R از فضای $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ پیوسته باشند. هرگاه $(x_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ یک نقطه درونی R باشد، آنگاه معادله (۲) دارای یک جواب منحصر به فرد $y(x)$ می‌باشد که شرایط اولیه $y(x_0) = a_1, y'(x_0) = a_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n$ را ارضا می‌کند.

برای تشریح بیشتر ارزش تبدیل معادلات مرتبه بالا به دستگاه‌های معادلات مرتبه اول، مسئله مشهور n جسمی را در مکانیک کلاسیک در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم که n ذره با جرم‌های m_i در نقاط (x_i, y_i, z_i) قرار گرفته باشند و فرض می‌کنیم که این ذرات مطابق با قانون گرانش نیوتن همدیگر را جذب کنند. اگر r_{ij} فاصله بین ذرات m_i و m_j و θ زاویه بین جهت مثبت محور x با خط واصل بین آنها باشد (شکل ۳۸)، در آن صورت مؤلفه x نیروی وارد بر m_i از طرف m_j برابر است با

$$\frac{Gm_i m_j \cos \theta}{r_{ij}^2} = \frac{Gm_i m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3}$$

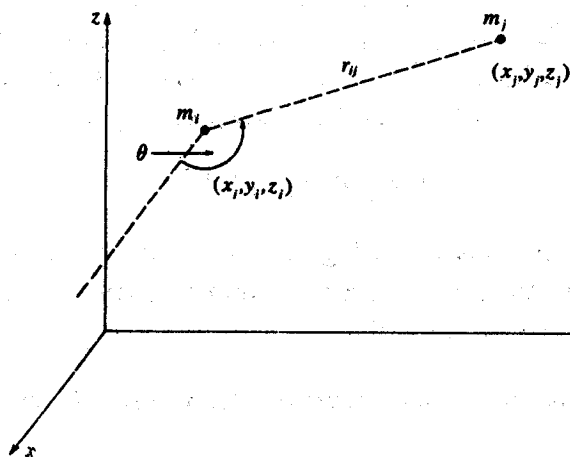
که در آن G ثابت گرانشی است. از آنجا که مجموع این مؤلفه‌ها برای تمامی مقادیر $j \neq i$ برابر با $m_i (d^2 x_i / dt^2)$ می‌باشد، n معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت زیر داریم

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3}$$

و همین‌طور می‌توان نوشت

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (y_j - y_i)}{r_{ij}^3}$$

و



شکل ۳۸

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (z_i - z_j)}{r_{ij}^3}$$

اگر بنویسیم $v_{x_i} = dx_i/dt$ ، $v_{y_i} = dy_i/dt$ و $v_{z_i} = dz_i/dt$ و از تبدیل مذکور استفاده کنیم، در آن صورت دستگاهی متشکل از $6n$ معادله به صورت (۱) که در آنها توابع $x_1, v_{x_1}, \dots, x_n, v_{x_n}, y_1, v_{y_1}, \dots, y_n, v_{y_n}, z_1, v_{z_1}, \dots, z_n, v_{z_n}$ مجهولند به دست خواهیم آورد. حال با استفاده از این که

$$r_{ij}^2 = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{1/2}$$

نتیجه زیر از قضیه الف به دست می آید: اگر وضعیتها و سرعتهای اولیه ذرات یعنی مقادیر توابع مجهول در لحظه معین $t = t_0$ در دست باشد، و اگر ذرات تصادم نکنند، یعنی r_{ij} ها صفر نگردند، آنگاه وضعیتها و سرعتهای بعدی به طور منحصر به فرد تعیین می گردند. این نتیجه، مبنای فلسفه جبرگرایی مکانیکی است که زمانی رواج داشت و براساس آن، جهان صرفاً ماشین عظیم الجثه ای بود که آینده آن به وسیله حالتش در هر لحظه مفروضی تثبیت می گردید^۱.

تمرین

۱- هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر را به يك دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کنید:

$$y'' - x^2 y' - xy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y''' = y'' - x^2 (y')^2 \quad (\text{ب})$$

۲- چنانچه ذره ای به جرم m در صفحه xy حرکت کند، معادلات حرکتش به صورت

۱. همین فکر، سرجمز جینز را بر آن داشت تا جهان را به عنوان دستگاهی متشکل از $6N$ معادله دیفرانسیل که خود به خود حل می شود و در آن N عدد ادینکتون است تعریف کند. سرآرتور ادینکتون ادعا کرده است که تعداد کل ذرات مادی جهان برابر با

$$N = \frac{3}{4} \times 10^{80}$$

که البته این رقم بیشتر از آنکه به واقعیت ربطی داشته باشد جنبه تخیلی دارد. به کتاب Jeans, "The Astronomical Horizon", Oxford University Press, London, 1945;

یا

Eddington, "The Expanding Universe", Cambridge University Press, London, 1952

مراجعه کنید.

زیرند:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x, y) \quad \text{و} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = g(t, x, y)$$

که در آن f و g ، به ترتیب، مؤلفه‌های x و y نیروی اعمال شده بر ذره هستند. این دستگاه دو معادله مرتبه دوم را بر یک دستگاه معادل متشکل از چهار معادله مرتبه اول به شکل (۱) تبدیل کنید.

۳۷. دستگاههای خطی

به خاطر سهولت و راحتی، در بقیه این فصل، توجه خود را به دستگاههای متشکل از دو معادله مرتبه اول بر حسب دو تابع مجهول معطوف می‌کنیم. شکل این معادلات به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(t, x, y) \end{cases} \quad (1)$$

علامت ابرو به منظور تأکید بر این امر است که معادلات مرتبط به یکدیگرند، و در این حالت انتخاب حرف t به عنوان متغیر مستقل و x و y به عنوان متغیرهای وابسته، به دلیلی که بعداً روشن خواهد شد، متداول است.

در این بخش و بخش بعد، حالت حتی خاصتر دستگاههای خطی، یعنی دستگاههایی

به صورت

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بحث فعلی و در قضایای زیر فرض خواهیم کرد که توابع $a_i(t)$ ، $b_i(t)$ ، $f_i(t)$ ، $i = 1, 2$ در یک فاصله بسته معین $[a, b]$ از محور t پیوسته‌اند. اگر $f_1(t)$ و $f_2(t)$ متحد با صفر باشند، دستگاه (۲) را همگن می‌نامند و در غیر این صورت آن را ناهمگن می‌گویند. هر جواب دستگاه (۲) در فاصله $[a, b]$ طبعاً یک جفت تابع $x(t)$ و $y(t)$ است که هر دو معادله (۲) را در این فاصله ارضا کند. چنین جوابی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

بدین ترتیب، سهولت می توان تحقیق کرد که دستگاه خطی همگن (با ضرایب ثابت)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad (۳)$$

هر دو جفت تابع

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2e^{2t} \end{cases} \quad (۴)$$

را به عنوان جواب در هر فاصله بسته می پذیرد.

حال طرح خلاصه ای از نظریه عمومی دستگاه خطی (۲) ارائه خواهیم کرد. مشاهده خواهد شد که این نظریه خیلی شبیه نظریه معادلات خطی مرتبه دوم است که در بخشهای ۱۴ و ۱۵ مورد بحث قرار گرفت. مطلب را با بیان قضیه وجود و یگانگی بنیادی زیر، که اثبات آن در فصل ۱۱ آمده است، آغاز می کنیم.

قضیه الف. اگر t_0 نقطه ای دلخواه از فاصله $[a, b]$ و x_0 و y_0 دو عدد دلخواه باشند، آنگاه معادله (۲) دارای يك و تنها يك جواب به صورت

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

است که در فاصله $[a, b]$ معتبر است و در شرایط $x(t_0) = x_0$ و $y(t_0) = y_0$ صدق می کند. گام بعدی آن است که ساخت جوابهای دستگاه همگن حاصل از (۲)، با حذف جملات $f_1(t)$ و $f_2(t)$ ، را مورد مطالعه قرار دهیم

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y \end{cases} \quad (۵)$$

واضح است که جواب صفر، که در آن $x(t)$ و $y(t)$ هر دو متحد با صفرند، در (۵) صدق می کند. ابزار اصلی ما در ساختن جوابهای مفیدتر، قضیه زیر است.

قضیه ب. اگر دستگاه همگن (۵) در فاصله $[a, b]$ دارای دو جواب

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \quad (۶)$$

باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases} \quad (۷)$$

که در آن c_1 و c_2 دو عدد ثابت هستند، نیز در فاصله $[a, b]$ جواب است.

اثبات. اثبات این قضیه امر ساده‌ای است و به خواننده واگذار می‌شود.

جواب (۷) از دو جفت جواب (۶) و با ضرب اولین جواب در c_1 و دومین جواب در c_2 و جمع آنها به دست می‌آید؛ بنابراین (۷) را يك ترکیب خطی از جوابهای (۶) می‌نامند. با این اصطلاح، قضیه ب را می‌توان به قرار زیر نیز بیان کرد: هر ترکیب خطی دو جواب دستگاه همگن (۵) خود يك جواب آن است. بنابراین

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} \\ y = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (۸)$$

به ازای هر مقدار دلخواه c_1 و c_2 ، يك جواب (۳) است.

سؤال بعدی که باید به آن پاسخ بگوئیم این است که آیا (۷) تمامی جوابهای (۵) را در فاصله $[a, b]$ در بر می‌گیرد، یعنی، آیا (۷) جواب عمومی دستگاه (۵) در فاصله $[a, b]$ است. بر طبق قضیه الف، (۷) جواب عمومی خواهد بود، اگر بتوان c_1 و c_2 را چنان برگزید که شرایط دلخواه $x(t_0) = x_0$ و $y(t_0) = y_0$ در نقطه دلخواه t_0 از $[a, b]$ ارضا شوند و یا به بیان دیگر، اگر بتوان دستگاه معادلات خطی جبری

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = x_0$$

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$

را بر حسب مجهولهای c_1 و c_2 به ازای هر مقدار t_0 در $[a, b]$ و برای هر جفت عدد x_0 و y_0 حل کرد. بر اساس نظریه مقدماتی دترمینانها، این عمل هنگامی امکان پذیر است که دترمینان ضرایب

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$$

در فاصله $[a, b]$ صفر نشود. این دترمینان دونسکی دو جواب (۶) نام دارد (تمرین ۴ را ببینید)، و نکات بالا قضیه بعد را به اثبات می‌رسانند.

قضیه ج. اگر دو جواب (۶) از دستگاه همگن (۵) دارای دونسکی $W(t)$ باشند که در فاصله

$[a, b]$ صفر نشود، آنگاه (۷) جواب عمومی (۵) در این فاصله است. این قضیه نتیجه می‌دهد که (۸) جواب عمومی (۳) در هر فاصله بسته است، زیرا رونسکی دو جواب (۴)

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^{5t}$$

است که هرگز صفر نمی‌گردد. همچنانکه از این مثال برمی‌آید، مفید است بدانیم که صفر شدن و یا صفر نشدن رونسکی $W(t)$ دو جواب، به انتخاب t بستگی ندارد. بیان دقیق این مطلب چنین است:

قضیه ۵. اگر $W(t)$ رونسکی دو جواب (۶) از دستگاه همگن (۵) باشد، آنگاه $W(t)$ در فاصله $[a, b]$ یا متحد با صفر است و یا هرگز صفر نمی‌شود.

اثبات. يك محاسبه ساده نشان می‌دهد که $W(t)$ در معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$\frac{dW}{dt} = [a_1(t) + b_2(t)]W \quad (9)$$

صدق می‌کند. از این معادله چنین برمی‌آید که

$$W(t) = ce^{\int [a_1(t) + b_2(t)] dt} \quad (10)$$

که در آن c مقدار ثابتی است. اینک اثبات قضیه از این واقعیت مشهود است که عامل نمایی موجود در (۱۰) در فاصله $[a, b]$ هرگز صفر نمی‌شود.

قضیه ۶ وسیله مناسبی برای تحقیق اینکه (۷) جواب عمومی (۵) است، عرضه می‌کند، کافست نشان‌دهید که $W(t)$ ، رونسکی دو جواب (۶)، صفر نمی‌شود. حال آزمون معادلی را که اغلب مناسبتر و سرراست‌تر است شرح می‌دهیم.

دو جواب (۶) در فاصله $[a, b]$ وابسته خطی، نامیده می‌شوند، اگر یکی مضرب ثابتی از دیگری باشد، یعنی اگر عدد ثابت k چنان موجود باشد که روابط

$$x_1(t) = kx_2(t) \quad x_2(t) = kx_1(t)$$

یا

$$y_1(t) = ky_2(t) \quad y_2(t) = ky_1(t)$$

برای تمام مقادیر t از فاصله $[a, b]$ برقرار باشند. در این فاصله دو جواب (۶) را مستقل خطی می‌نامند، اگر هیچکدام از آنها مضرب ثابتی از دیگری نباشد. واضح است که وابستگی خطی معادل حالتی است که دو ثابت c_1 و c_2 که لااقل یکی از آنها مخالف صفر است، چنان موجود باشند که روابط

$$\begin{aligned} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) &= 0 \\ c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

به ازای تمام مقادیر t در $[a, b]$ برقرار باشند. بنابراین به قضیه بعد دست می یابیم.

قضیه ه. اگر دو جواب (۶) دستگاه همگن (۵) در فاصله $[a, b]$ مستقل خطی باشند، در آن صورت (۷) جواب عمومی (۵) در این فاصله است.

اثبات. با توجه به قضایای ج و د کافی است نشان دهیم که جوابهای (۶) وابسته خطی هستند، اگر فقط اگر رونسکی آنها، $W(t)$ ، متحد با صفر باشد. مطلب را با این فرض که جوابها وابسته خطی اند آغاز می کنیم، در این صورت، مثلاً، داریم

$$\begin{aligned} x_1(t) &= k x_2(t) \\ y_1(t) &= k y_2(t) \end{aligned} \quad (12)$$

لذا به ازای تمام مقادیر t در فاصله $[a, b]$ داریم:

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k x_2(t) & x_2(t) \\ k y_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \\ &= k x_2(t) y_2(t) - k x_2(t) y_2(t) = 0 \end{aligned}$$

چنانچه ثابت k را در طرف دیگر معادلات (۱۲) قرار دهیم باز همین استدلال به کار می آید. اینک فرض می کنیم که $W(t)$ متحد با صفر باشد و نشان خواهیم داد که جوابهای (۶)، به معنای مذکور در معادلات (۱۱)، وابسته خطی می باشند. فرض می کنیم که t_0 يك نقطه ثابت در $[a, b]$ باشد. از آنجا که $W(t_0) = 0$ ، دستگاه معادلات جبری خطی

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = 0$$

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0$$

يك جواب c_1 و c_2 دارد که لااقل یکی از آنها مخالف صفر است. بنابراین، جواب

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases} \quad (13)$$

و جواب صفر دستگاه (۵) در t_0 برابرند. حال از قسمت یگانگی قضیه الف استنباط می شود که (۱۳) باید در فاصله $[a, b]$ با جواب صفر برابر باشد، در آن صورت (۱۱) برقرار و برهان قضیه کامل است.

ارزش آزمون فوق در این است که در مسائل خاص معمولاً بررسی اینکه دو جواب (۵) مستقل خطی اند یا خیر، ساده است.

حال به دستگاه غیرهمگن (۲) بازمی‌گردیم و بحث خود را با قضیه زیر به پایان می‌رسانیم :

قضیه و. اگر دو جواب (۶) دستگاه همگن (۵) در فاصله $[a, b]$ مستقل خطی باشند و اگر

$$\begin{cases} x = x_p(t) \\ y = y_p(t) \end{cases}$$

یک جواب خصوصی (۲) در این فاصله باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) \end{cases} \quad (14)$$

جواب عمومی (۲) در فاصله $[a, b]$ خواهد بود.

اثبات. کافی است نشان دهیم که هرگاه

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

یک جواب دلخواه (۲) باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x = x(t) - x_p(t) \\ y = y(t) - y_p(t) \end{cases}$$

یک جواب (۵) است، و این کار را به خواننده واگذار می‌کنیم.

بررسی فوق‌الذکر در مورد دستگاه خطی (۲) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان جواب عمومی آن، (۱۴)، را به کمک قطعات ساده‌تر بنا نهاد. ولی چگونه این قطعات را می‌یابیم؟ متأسفانه - مانند معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم - هیچ‌گونه روش عمومی که همواره کارآمد باشد، موجود نیست. در بخش بعد، حالت خاص مهمی را که این مسئله در آن قابل حل است، مورد بحث قرار خواهیم داد: حالتی که ضرایب $a_i(t)$ و $b_i(t)$ ، $i = 1, 2$ ، ثابت باشند.

تمرین

۱- قضیه ب را ثابت کنید.

۲- اثبات قضیه و را به‌تمام برسانید.

۳- درستی معادله (۹) را تحقیق کنید.

۴- فرض کنید که معادله خطی مرتبه دوم

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)\frac{dx}{dt} + Q(t)x = 0 \quad (*)$$

به دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -Q(t)x - P(t)y \end{cases} \quad (**)$$

تبدیل شده است. اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ جوابهایی از معادله $(*)$ ، و اگر

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

جوابهای مربوطه $(**)$ باشند، نشان دهید که رونسکیی اولی براساس تعریف بخش ۱۵ دقیقاً برابر رونسکیی دومی براساس تعریف این بخش است.

۵- الف) نشان دهید که توابع

$$\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = e^{4t} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = -e^{-2t} \end{cases}$$

جوابهای دستگاه همگن

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

هستند.

ب) به دو طریق نشان دهید که جوابهای داده شده دستگاه قسمت الف در هر فاصله بسته ای مستقل خطی هستند، و جواب عمومی این دستگاه را بنویسید.

ج) جواب خصوصی

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

از این دستگاه را با شرایط $x(0) = 5$ و $y(0) = 1$ بیابید.

۶- الف) نشان دهید که

$$\begin{cases} x = 2e^{4t} \\ y = 3e^{4t} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = -e^{-t} \end{cases}$$

جوابهایی از دستگاه همگن

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

هستند.

ب) به دو طریق نشان دهید که جوابهای داده شده دستگاه قسمت الف در هر فاصله بسته مستقل خطی هستند، و جواب عمومی این دستگاه را بنویسید.

ج) نشان دهید که

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$$

یک جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y - 5t - 2 \end{cases}$$

است، و جواب عمومی این دستگاه را بنویسید.

۷- جوابهای داده شده دستگاه همگن تمرین ۶ را از دو راه زیر به دست آورید:

الف) به وسیله مشتق گیری از معادله اول نسبت به t و حذف y ؛

ب) با مشتق گیری از معادله دوم نسبت به t و حذف x .

۸- از روش پیشنهادی در تمرین ۷ استفاده کنید و جواب عمومی دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

را بیابید.

۹- الف) جواب عمومی دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

را بیابید.

ب) نشان دهید که هر معادله مرتبه دوم حاصل از دستگاه قسمت الف با آن دستگاه معادل نیست، بدین معنا که دارای جوابهایی است که جزو هیچ یک از جوابهای دستگاه نمی باشند. بنابراین گرچه معادلات مرتبه بالاتر معادل با این دستگاهها هستند، عکس این موضوع صادق نیست، و دستگاهها عمومیترند.

۳۸. دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت

حال در وضعیتی هستیم که می توانیم جواب صریح کاملی برای دستگاه ساده

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \quad (۱)$$

ارائه کنیم. در این دستگاه a_1 ، b_1 ، a_2 ، و b_2 ثابتهای داده شده می باشند. بعضی تمرینهای آخر بخش قبل شیوه ای را ارائه می کنند که اغلب می توان از آنها در این حالت استفاده نمود: از یکی از معادلات مشتق بگیرید، یکی از متغیرهای وابسته را حذف کنید و معادله خطی مرتبه دوم حاصل را حل کنید. اما روشی را که اکنون شرح می دهیم مبتنی بر یافتن یک جفت جواب مستقل خطی است که مستقیماً از خود دستگاه به دست آید.

چنانچه به یاد آوریم که مشتق تابع نمایی برابر با مضرب ثابتی از خود آن تابع است، در آن صورت (درست همانند بخش ۱۷) طبیعی است که به دنبال جوابهایی از (۱) به شکل

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases} \quad (۲)$$

بگردیم. اگر (۲) را در (۱) جایگزین کنیم، حاصل چنین می شود

$$Ame^{mt} = a_1 Ae^{mt} + b_1 Be^{mt}$$

$$Bme^{mt} = a_2 Ae^{mt} + b_2 Be^{mt}$$

حال طرفین این روابط را بر e^{mt} بخش می کنیم تا دستگاه جبری خطی زیر حاصل آید:

$$(a_1 - m)A + b_1 B = 0 \quad (۳)$$

$$a_2 A + (b_2 - m)B = 0$$

که در آن A و B مجهول هستند. واضح است که (۳) دارای جواب صفر $A = B = 0$ است که (۲) را به صورت جواب صفر (۱) درمی آورد. از آنجا که به دنبال جوابهای غیر صفر (۱) هستیم، این جواب صفر هیچ کمکی نمی کند. از سوی دیگر، می دانیم که وقتی (۳) جوابهای غیر صفر دارد که دترمینان ضرایب صفر گردد، یعنی هنگامی که

$$\begin{vmatrix} a_1 - m & b_1 \\ a_2 & b_2 - m \end{vmatrix} = 0$$

وقتی این دترمینان بسط داده شود، معادله درجه دوم زیر به دست می آید:

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \quad (۴)$$

که در آن m مجهول است. از لحاظ تشابه با کار قبلی، این معادله را معادله کمکی دستگاه (۱) می نامیم. فرض می کنیم که m_1 و m_2 ریشه های (۴) باشند. اگر در (۳) به جای m ، m_1 بگذاریم، در آن صورت می دانیم که معادلات حاصل یک جواب غیر صفر A_1 و B_1 خواهند داشت، لذا

$$\begin{cases} x = A_1 e^{m_1 t} \\ y = B_1 e^{m_1 t} \end{cases} \quad (۵)$$

یک جواب غیر صفر دستگاه (۱) است. اگر همین کار را با m_2 انجام دهیم، جواب غیر صفر دیگری می یابیم:

$$\begin{cases} x = A_2 e^{m_2 t} \\ y = B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \quad (۶)$$

به خاطر آنکه مطمئن شویم که در نتیجه این کار دو جواب مستقل خطی (و نتیجتاً جواب عمومی)

به دست می آید، لازم است هر کدام از سه حالت ممکن برای m_1 و m_2 را بتفصیل بررسی کنیم.

ریشه های حقیقی متمایز. هنگامی که m_1 و m_2 اعداد حقیقی و متمایز باشند، به سہولت مشاهده می شود که (۵) و (۶) مستقل خطی اند (چرا؟) و

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \quad (7)$$

جواب عمومی (۱) است.

مثال ۱. در مورد دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases} \quad (8)$$

(۳) به صورت

$$(1-m)A + B = 0$$

(۹)

$$4A + (-2-m)B = 0$$

درمی آید. در اینجا معادله کمکی چنین است:

$$m^2 + m - 6 = 0 \quad \text{یا} \quad (m+3)(m-2) = 0$$

بنابراین m_1 و m_2 برابر با ۳- و ۲+ هستند. با $m = -3$ ، معادلات (۹) چنین می شود

$$4A + B = 0$$

$$4A + B = 0$$

یک جواب غیر صفر ساده این دستگاه $A = 1$ ، $B = -4$ است. بنابراین

$$\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = -4e^{-3t} \end{cases} \quad (10)$$

یک جواب غیر صفر (۸) است. با $m = 2$ ، (۹) به صورت

$$-A + B = 0$$

$$4A - 4B = 0$$

درمی آید و يك جواب غيرصفر ساده آن $A=1$ ، $B=1$ است و اين حاكي از آن است كه

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \quad (11)$$

جواب ديگري براي (۸) مي باشد و چون روشن است كه (۱۰) و (۱۱) مستقل خطي هستند،

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ y = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (12)$$

جواب عمومي (۸) است.

ریشه های مختلط متمایز. چنانچه m_1 و m_2 اعدادی مختلط و متمایز باشند، می توان آنها را به صورت $a \pm ib$ نوشت كه a و b اعداد حقيقي هستند و $b \neq 0$. در اين حالت انتظار داریم كه A ها و B های حاصل از (۳) اعداد مختلط باشند و دو جواب مستقل خطي به صورت

$$\begin{cases} x = A_1^* e^{(a+ib)t} \\ y = B_1^* e^{(a+ib)t} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = A_2^* e^{(a-ib)t} \\ y = B_2^* e^{(a-ib)t} \end{cases} \quad (13)$$

داشته باشیم. به هر حال اينها جوابهایی با مقادير مختلط هستند، و برای استخراج جوابهای با مقادير حقيقي به طریق زیر عمل می کنیم: اگر A_1^* و B_1^* را به صورت متعارف $A_1^* = A_1 + iA_2$ و $B_1^* = B_1 + iB_2$ بنویسیم و از فرمول اولر ۱۷- (۷) استفاده کنیم، آنگاه می توان اولین جواب (۱۳) را به شکل

$$\begin{cases} x = (A_1 + iA_2)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \\ y = (B_1 + iB_2)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x = e^{at}[(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + i(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + i(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \quad (14)$$

نوشت. سهولت مشاهده می شود كه اگر يك جفت تابع با مقادير مختلط جوابی برای (۱) باشند و ضرایبشان ثابتهای حقيقي باشند، در آن صورت قسمت حقيقي و قسمت موهومي آنها، خود جوابهای با مقادير حقيقي دستگاه خواهند بود. از اين امر نتیجه می شود كه (۱۴) دارای جوابهای حقيقي زیر است

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) \end{cases} \quad (15)$$

و

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt) \\ y = e^{at}(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt) \end{cases} \quad (۱۶)$$

می توان نشان داد که این جوابها مستقل خطی اند (اثبات این موضوع در تمرین ۳ به خواننده واگذار شده است)، پس در این حالت جواب عمومی چنین می شود

$$\begin{cases} x = e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \quad (۱۷)$$

حال چون جواب عمومی را یافته ایم، در نظر گرفتن دومین جواب (۱۳) غیر ضروری است. ریشه های حقیقی برابر. هنگامی که مقادیر m_1 و m_2 مساوی و برابر با m باشند، (۵) و (۶) مستقل خطی نیستند و اساساً تنها يك جواب زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases} \quad (۱۸)$$

بنابه تجربه بخش ۱۷ انتظار داریم که

$$\begin{cases} x = Ate^{mt} \\ y = Bte^{mt} \end{cases}$$

جواب مستقل خطی دومی باشد. متأسفانه موضوع به این سادگی هم نیست و در واقع باید به دنبال جواب دومی به شکل

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = (B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases} \quad (۱۹)$$

بگردیم، که در آن صورت جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x = c_1 Ae^{mt} + c_2(A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y = c_1 Be^{mt} + c_2(B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases} \quad (۲۰)$$

*. تنها استثنای این مطلب وقتی اتفاق می افتد که $a_1 = b_1 = 0$ و $a_2 = b_2 = a$ که به طوری که معادله کمکی به صورت $m^2 - 2am + a^2 = 0$ یعنی $m = a$ در آید و ثابتهای A و B در (۱۸) کاملاً اختیاری شوند. در این حالت جواب عمومی (۱) به صورت زیر است:

ثابت‌های A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2 با قرار دادن (۱۹) در دستگاه (۱) به دست می‌آیند. به جای آنکه این عملیات را در حالت کلی انجام دهیم، چگونگی استفاده از این روش را طی مثال ساده‌ای نشان می‌دهیم.

مثال ۲. در مورد دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases} \quad (21)$$

(۳) به صورت

$$(3-m)A - 2B = 0 \quad (22)$$

$$A + (-1-m)B = 0$$

درمی‌آید. معادله کمکی

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad (m-1)^2 = 0$$

می‌باشد، که دارای ریشه‌های حقیقی و برابر ۱ و ۱ است. با $m=1$ ، دستگاه (۲۲) چنین می‌شود

$$2A - 2B = 0$$

$$A - 2B = 0$$

يك جواب غیر صفر ساده این دستگاه $A=2$ و $B=1$ است. پس

$$\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^t \end{cases} \quad (23)$$

يك جواب غیر صفر (۲۱) خواهد بود. حال در صدد یافتن جواب مستقل خطی دیگری به شکل

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2 t)e^t \\ y = (B_1 + B_2 t)e^t \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{mt} \\ y = c_2 e^{mt} \end{cases} \rightarrow$$

و دستگاه غیر زوج (غیر جفت) خوانده می‌شود (چرا که هر کدام از این معادلات را می‌توان مستقل از دیگری حل کرد).

برمی‌آییم. پس از گذاشتن این جواب در (۲۱) خواهیم داشت

$$(A_1 + A_2 t + A_3) e^t = 3(A_1 + A_2 t) e^t - 2(B_1 + B_2 t) e^t$$

$$(B_1 + B_2 t + B_3) e^t = (A_1 + A_2 t) e^t - (B_1 + B_2 t) e^t$$

این روابط بلافاصله به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$(2A_2 - 4B_2)t + (2A_1 - A_2 - 4B_1) = 0$$

$$(A_2 - 2B_2)t + (A_1 - 2B_1 - B_2) = 0$$

چون این روابط باید نسبت به متغیر t اتحاد باشند، باید داشته باشیم

$$2A_2 - 4B_2 = 0 \quad 2A_1 - A_2 - 4B_1 = 0$$

$$A_2 - 2B_2 = 0 \quad A_1 - 2B_1 - B_2 = 0$$

یک جواب غیرصفر ساده و دو معادله سمت چپ عبارت از $A_2 = 2$ و $B_2 = 1$ می‌باشد. بادر نظر گرفتن این نتایج، دو معادله سمت راست به صورت زیر درخواهند آمد:

$$2A_1 - 4B_1 = 2$$

$$A_1 - 2B_1 = 1$$

پس می‌توان جواب $A_1 = 1$ ، $B_1 = 0$ را اختیار کرد. حال این اعداد را در (۲۴) درج می‌کنیم و جواب دومی به شکل

$$\begin{cases} x = (1 + 2t)e^t \\ y = te^t \end{cases} \quad (25)$$

به دست می‌آید. روشن است که (۲۳) و (۲۵) مستقل خطی هستند، پس جواب عمومی دستگاه (۲۱) عبارت است از

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^t + c_2 (1 + 2t)e^t \\ y = c_1 e^t + c_2 te^t \end{cases} \quad (26)$$

تمرین

۱- با استفاده از روشهایی که در این بخش شرح داده شد جواب عمومی هر یک از دستگاههای زیر را بیابید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = 3y \end{cases}$$

(ه)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$$

(الف)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{array} \right. \quad (و) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{array} \right. \quad (ب)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 7x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 6y \end{array} \right. \quad (ز) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{array} \right. \quad (ج)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{array} \right. \quad (ح) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 8x - 6y \end{array} \right. \quad (د)$$

۲- نشان دهید برای آنکه دستگاه (۱) دارای دو جواب مستقل خطی با مقادیر حقیقی به شکل (۲) باشد، شرط $a_2 b_1 > 0$ کافی است ولی لازم نیست.

۳- نشان دهید که رونسکی دو جواب (۱۵) و (۱۶) عبارت است از

$$W(t) = (A_1 B_2 - A_2 B_1) e^{\lambda t}$$

و ثابت کنید که $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$.

۴- نشان دهید که ثابتهای A_2 و B_2 در فرمول (۲۰) و ثابتهای A و B هر دو در یک دستگاه جبری خطی صدق می کنند، لذا بدون آنکه از عمومیت مسئله کاسته شود می توان نوشت

$$B_2 = B \text{ و } A_2 = A$$

۵- دستگاه خطی غیر همگن

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{array} \right. \quad (*)$$

و دستگاه همگن

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y \end{array} \right. \quad (**)$$

را که متناظر با (*) است در نظر بگیرید.
الف) اگر

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

دو جواب مستقل خطی (***) باشند، به طوری که جواب عمومی آن

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases}$$

باشد، نشان دهید که چنانچه توابع $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در دستگاه

$$\begin{cases} v'_1 x_1 + v'_2 x_2 = f_1 \\ v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = f_2 \end{cases}$$

صدق کنند، آنگاه

$$\begin{cases} x = v_1(t) x_1(t) + v_2(t) x_2(t) \\ y = v_1(t) y_1(t) + v_2(t) y_2(t) \end{cases}$$

يك جواب خصوصی (*) خواهد بود. این روش برای یافتن جوابهای خصوصی دستگاه خطی غیر همگن، به روش تغییر پارامترها مشهور است.
ب) با استفاده از روش قسمت الف) يك جواب خصوصی دستگاه غیر همگن

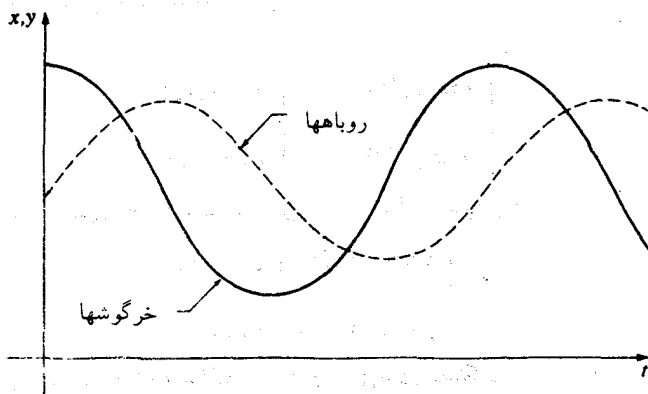
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - 5t + 2 \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y - 8t - 8 \end{cases}$$

را که دستگاه همگن متناظرش در مثال ۱ حل شده است، بیابید.

۳۹. دستگاههای غیر خطی - معادلات شکار و شکارچی ولترا

هر کس می داند که در بین گونه های مختلف حیواناتی که در يك محیط زندگی می کنند، تنازع بقای مداومی وجود دارد. يك نوع از این حیوانات با خوردن نوع دیگر به حیات خود ادامه می دهد؛ نوعی دیگر، با استفاده از روشهای گریز، از خورده شدن اجتناب می کند؛ الی آخر.

به عنوان مثالی ساده از این کشمکش عمومی بین شکار و شکارچی، جزیره ای را تصور کنید که در آن تعدادی روباه و خرگوش زندگی می کنند. روباهها خرگوشها را می خورند



شکل ۳۹

و خرگوشها از شیدر تغذیه می کنند. فرض می کنیم که آنقدر شیدر وجود داشته باشد که خرگوشها همواره ذخیره غذایی کافی داشته باشند. وقتی خرگوشها فراوان باشند، روباهها نیز رشد و نمو می کنند و جمعیت آنها فزونی می یابد. هنگامی که تعداد روباهها زیاد گردد و تعداد زیادی خرگوش بخورند، وارد یک دوره کم غذایی می شوند و نفوسشان کاهش می یابد. همچنانکه تعداد روباهها روبه کاهش می گذارد، خرگوشها نسبتاً در امان می مانند و جمعیت آنها مجدداً روبه افزایش می گذارد. این افزایش خرگوشها، افزایش جدیدی در جمعیت روباهها را سبب می گردد و با گذشت زمان یک دوره تکراری بی انتها از افزایش و کاهش مرتبط باهم، در جمعیت این دو نوع حیوان مشاهده می کنیم. نمودار این نوسانها در شکل ۳۹ ترسیم شده است که اندازه جمعیتها را نسبت به زمان نشان می دهد.

مسائلی از این نوع، هم به وسیله ریاضیدانان و هم به وسیله زیست شناسان مورد مطالعه قرار گرفته، و بسیار جالب است که ببینیم چگونه می توان نظرات شهودی مطرح شده در بالا را به کمک نتایج ریاضی تأیید کرد و تعمیم داد. در بحث خود راجع به اندرکنش بین روباهها و خرگوشها، روش ولترا را دنبال خواهیم کرد. او پایه گذار بررسی کمی چنین مسائلی است.^۱

اگر x تعداد خرگوشها در زمان t باشد، در آن صورت، به سبب وجود نامحدود شیدر، در صورتی که تعداد روباهها، یعنی y ، صفر باشد، خواهیم داشت

۱. ویتو ولترا Vito Volterra (۱۸۶۰-۱۹۴۰) ریاضیدان برجسته ایتالیایی بود. کار اولیه او درباره معادلات انتگرالی (همراه با کارهای فردهولم و هیلبرت) توسعه تمام عیار آنالیز خطی را شروع کرد که در طول نیمه اول قرن بیستم حاکم بر ریاضیات بود. مطالعات جدی او آخر زندگی اش، در زمینه زیست شناسی ریاضی، هم ریاضیات و هم زیست شناسی را غنی ساخت. برای توضیحات بیشتر، کتاب

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad a > 0$$

طبیعی است که تعداد برخوردهای بین خرگوشها و روباهها در واحد زمان را متناسب با x و با y فرض کنیم. چنانچه بعلاوه فرض کنیم که نسبت معینی از این برخوردها بهخوردن شدن خرگوش منجر می گردد، داریم:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad a, b > 0$$

به همین طریق

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \quad c, d > 0$$

زیرا بدون وجود خرگوشها، روباهها از بین می روند و افزایش آنها به تعداد برخوردهایشان با خرگوشها بستگی دارد. بنا براین، دستگاه غیرخطی زیر مبین اندرکنش بین این دو گونه حیوان خواهد بود:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = -y(c - dx) \end{cases} \quad (1)$$

معادلات (۱) به معادلات شکار و شکارچی ولترا موسوم اند. متأسفانه این دستگاه را نمی توان بر حسب توابع مقدماتی حل کرد. از طرف دیگر، چنانچه جواب مجهول

“Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie” (Gauthier-Villars, Paris, 1931)

او را ببینید یا به

A. J. Lotka, “Elements of Mathematical Biology,” pp. 88-94, Dover, New York, 1956.

مراجعه کنید. یک بحث نوین همراه با دادههای Hudson's Bay Company مربوط به تعداد سیاه گوها و خرگوشهای صحرایی کانادا از سال ۱۸۴۷ تا ۱۹۰۳ را می توان در کتاب

E. R. Leigh, The Ecological Role of Volterra's Equations, in “Some Mathematical Problems in Biology,” American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968

یافت.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

را به عنوان معادلات پارامتری يك منحنی از صفحه xy در نظر بگیریم، معادلهٔ دکارتی این منحنی را می توانیم بیابیم. با حذف t به وسیلهٔ تقسیم روابط (۱) برهم جدا کردن متغیرها، خواهیم داشت

$$\frac{(a-by)dy}{y} = -\frac{(c-dx)dx}{x}$$

انتگرال گیری از طرفین این رابطه به

$$a \log y - by = -c \log x + dx + \log K$$

یا

$$y^a e^{-by} = K x^{-c} e^{dx} \quad (2)$$

منجر می شود که در آن مقدار ثابت K بر حسب مقادیر اولیهٔ x و y برابر است با

$$K = x_0^c y_0^a e^{-dx_0 - by_0}$$

گرچه نمی توان (۲) را بر حسب x یا y حل کرد، لیکن به وسیلهٔ يك روش استاندارد منسوب به ولترا می توان نقاطی از منحنی را معین کرد. برای این منظور، طرف چپ و طرف راست (۲) را، بترتیب، برابر متغیرهای جدید z و w می گیریم، و نمودارهای C_1 و C_2 مربوط به توابع

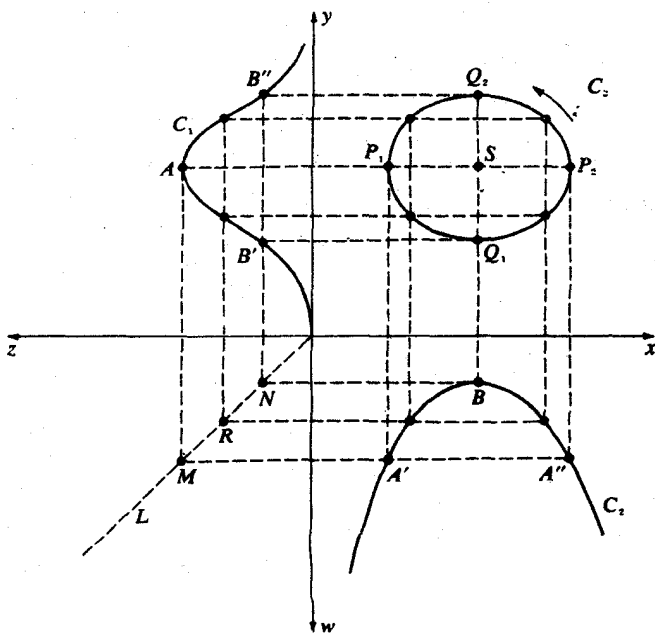
$$z = y^a e^{-by} \quad \text{و} \quad w = K x^{-c} e^{dx} \quad (3)$$

را که در شکل ۴۰ نشان داده شده است، رسم می کنیم. چون $z = w$ ، در ربع سوم به خط نقطه چین L مقیدیم. روی منحنی C_1 ، z در نقطهٔ A ماکزیمم می شود. به وسیلهٔ نقطهٔ A از منحنی C_1 ، يك y ، و — از طریق M واقع بر L و نقاط متناظر آن A' و A'' واقع بر C_2 — دو x متناظر می شوند، و این دو مقدار حدودی را که x می تواند بین آنها تغییر کند، مشخص می کنند. به طور مشابه، w روی منحنی C_2 در نقطهٔ B مینیمم است. به وسیلهٔ نقطهٔ B از منحنی C_2 به N واقع بر L و از آنجا به B' و B'' واقع بر C_1 می رسیم و ایمن نقاط حدودی را که y بین آنها تغییر می کند مشخص می کنند. به ایمن ترتیب به نقاط P_1 ، P_2 و Q_1 و Q_2 واقع بر منحنی مورد نظر C_3 دست می یابیم. به سهولت می توان نقاط دیگری از C_3 را به دست آورد. برای این منظور، از نقطه ای مثل R واقع بر L و بین M و N شروع می کنیم و مطابق شکل ۴۰، ابتدا آن را به طرف بالا روی C_1 و از آنجا روی C_3 تصویر می کنیم، و سپس آن را روی C_2 و از آنجا به طرف بالا روی C_3 تصویر می کنیم. روشن است که تغییر مقدار K نقطهٔ B را بالا یا پایین می برد و باعث انبساط یا انقباض منحنی C_3

می گردد. از این رو وقتی K مقادیر متفاوتی به خود می گیرد يك خانواده رویه مرغانه ای شکل حول نقطه S به دست می آوریم. هر گاه مقدار مینیمم w و مقدار ماکزیمم z برابر گردند، کل منحنی C_3 در این نقطه S خلاصه می شود.

حال نشان می دهیم که وقتی t افزایش می یابد، نقطه متناظرش (x, y) روی C_3 در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت منحنی را می پیماید. برای این منظور، توجه می کنیم که معادلات (۱) مؤلفه های افقی و قائم سرعت را در این نقطه به دست می دهند. يك محاسبه ساده متکی به فرمولهای (۳) نشان می دهد که مختصات نقطه S ، $x=c/d$ و $y=a/b$ هستند. هنگامی که $x < c/d$ ، از معادله دوم (۱) نتیجه می شود که dy/dt منفی است، لذا نقطه مذکور واقع بر C_3 کمان $Q_2 P_1 Q_1$ را به طرف پایین طی می کند. به طور مشابه، نقطه مذکور کمان $Q_1 P_2 Q_2$ را به طرف بالا طی می کند و بدین ترتیب ادعای ما ثابت می شود.

سرانجام، از مسئله روباه و خرگوش برای ارائه روش خطی کردن که حائز اهمیت خاصی است، استفاده می کنیم. ابتدا مشاهده می کنیم که اگر جمعیت خرگوشها و روباهها به ترتیب برابر با



$$x = \frac{c}{d} \text{ و } y = \frac{a}{b} \quad (۴)$$

باشند، دستگاه (۱) ارضا می شود و داریم $dx/dt = 0$ و $dy/dt = 0$ ، بنابراین افزایش یا کاهش در x یا y وجود ندارد. جمعیت‌های (۴) را جمعیت‌های تعادل می نامند، زیرا x و y می توانند خود را الی الابد در این سطوح ثابت ابقا کنند. واضح است که این حالتی است که مینیم w با ماکزیمم z برابر است، و مرغانه‌ای C به نقطه S تبدیل می شود. حال چنانچه به حالت عمومی بازگردیم و x و y را برابر با مقادیر

$$x = \frac{c}{d} + X \text{ و } y = \frac{a}{b} + Y$$

قرار دهیم، آنگاه می توان X و Y را به عنوان انحراف x و y از مقادیر تعادلشان تلقی کرد. يك محاسبه ساده نشان می دهد که اگر x و y در (۱) با X و Y جایگزین گردند [که در واقع انتقال نقطه $(c/d, a/b)$ به مبدأ مختصات است]، آنگاه (۱) چنین می شود

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\frac{bc}{d}Y - bXY \\ \frac{dY}{dt} = \frac{ad}{b}X + dXY \end{cases} \quad (۵)$$

حال با فرض اینکه اگر X و Y کوچک باشند جمله XY را بدون تولید خطای فاحشی می توان حذف کرد، دستگاه (۵) را، «خطی می کنیم». این فرض، چندان با واقعیت منطبق نیست و چیزی جز يك امید نیست، ولیکن (۵) را به يك دستگاه خطی، همچون

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\frac{bc}{d}Y \\ \frac{dY}{dt} = \frac{ad}{b}X \end{cases} \quad (۶)$$

ساده می کند. یافتن جواب عمومی (۶) ساده است، ولی حذف t به کمک تقسیم روابط بالا بر همدیگر و به دست آوردن رابطه

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{ad^2}{b^2c} \frac{X}{Y}$$

از آن هم ساده تر است. جواب معادله اخیر

$$ad^2X^2 + b^2cY^2 = C^2$$

است. رابطه فوق معادله يك دسته بیضی حول مبدأ مختصات در صفحه XY است. از آنجا که بیضی‌ها از لحاظ کیفی همانند مرغانه‌ای‌های شکل ۴۰ هستند، زمینه معقولی برای این امید وجود دارد که بتوانیم (۶) را به عنوان تقریبی برای (۵) بپذیریم. یقین داریم که خواننده می‌پذیرد که مسئله روباه و خرگوش با نفسه جالب است. ولی، بعلاوه به این نکته پی بردیم که دستگاههای غیرخطی، ما را با مسائلی متفاوت با آنچه قبلا دیده‌ایم آشنا می‌سازد. در مطالعه دستگاهی مانند (۱)، آموخته‌ایم که باید توجه خود را به رفتار جوابها در نزدیکی نقاطی از صفحه xy که در آنها طرف راست هر دو معادله صفر می‌شود معطوف کنیم؛ همچنین مشاهده کرده‌ایم که چرا جوابهای دوره‌ای (یعنی آنهایی که منحنی‌های بسته ساده‌ای مانند C_3 در شکل ۴۰ به دست می‌دهند) مهم و مطلوب‌اند؛ با روش مطالعه دستگاه غیرخطی به کمک يك دستگاه خطی که آن را تقریب می‌زند، آشنا شده‌ایم. در فصل بعد دستگاههای غیرخطی را به طور کاملتر مورد مطالعه قرار خواهیم داد و هر يك از این مطالب را با تفصیل و عمومیت بیشتری بررسی خواهیم کرد.

تمرین

- ۱- y را از دستگاه (۱) حذف کنید و معادله مرتبه دوم غیر خطی را که $x(t)$ در آن صدق می‌کند به دست آورید.
- ۲- نشان دهید که وقتی $dx/dt > 0$ ، خواهیم داشت $d^2y/dt^2 > 0$. مفهوم این نتیجه از روی شکل ۳۹ چیست؟



معادلات غیر خطی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۴۰. دستگاههای خودگردان

صفحه فاز و پدیده‌های مربوط به آن

در سیر تکامل تاریخی معادلات دیفرانسیل دو گرایش عمده موجود بوده است. اولین و قدیمی‌ترین گرایش با سعی دریافتن جوابهای صریح، به شکل بسته - که بندرت امکان پذیر است - یا برحسب سریهای توانی، مشخص می‌گردد. در دومین گرایش، از حل معادلات باهر روش سنتی بکلی قطع امید می‌شود و به جای آن توجه روی کسب اطلاعات کیفی راجع به رفتار عمومی جوابها متمرکز می‌شود. در فصل ۴ این نقطه نظر را در مورد معادلات خطی به کار گرفتیم. نظریه کیفی معادلات غیرخطی کاملاً متفاوت است. این نظریه در حدود سال ۱۸۸۰ میلادی توسط پوانکاره در رابطه با کارش در زمینه مکانیک سماوی، بنانهاده شد، و از آن زمان به بعد مورد توجه روزافزون و مستمر متخصصین ریاضیات محض و کاربرده بوده است.^۱

نظریه معادلات دیفرانسیل خطی به طور گسترده و عمیق در ۲۰۰ سال گذشته مورد مطالعه قرار گرفته است، و قسمت نسبتاً کامل و مرتبی از پیکر دانش را تشکیل می‌دهد. ولی، اطلاعات کلی اندکی در مورد معادلات غیرخطی در دست است. هدف ما در این فصل آن است که بعضی مفاهیم و روشهای اساسی این موضوع را بررسی کنیم، و همچنین نشان دهیم که این شاخه از ریاضیات انواع گوناگونی از پدیده‌های جدید جالب و متمایزی را که در نظریه

۱. برای شرح کلی کار پوانکاره در ریاضیات و علوم، پیوست الف را ملاحظه کنید.

معادلات خطی ظاهر نمی‌شوند، ارائه می‌کند. خواننده تعجب خواهد کرد که ببیند اکثر این پدیده‌ها را می‌توان خیلی ساده و بدون توسل به ابزار ریاضی خیلی پیچیده مورد بحث و بررسی قرار داد، و در واقع معلومات مورد نیاز چندان بیش از معادلات دیفرانسیل مقدماتی و جبر بردارهای دوبعدی نیست.

چرا باید به معادلات دیفرانسیل غیرخطی توجه کرد؟ دلیل اساسی آن است که بسیاری از دستگاه‌های فیزیکی، و معادلاتی که این دستگاه‌ها را توصیف می‌کنند، در اصل غیرخطی‌اند. خطی کردنهای عادی ابزارهایی تقریب زننده هستند که تا حدودی حاکی از ناتوانی در مواجهه با مسائل غیرخطی اصلی هستند و تا حدودی دید عملی را که نیمی از قرص نان به از هیچ است، بیان می‌کنند. بلافاصله باید اضافه کنیم که موارد فیزیکی بسیاری وجود دارند که در آنها تقریب خطی، برای اکثر مقاصد، ارزشمند و مناسب است. با این حال، این واقعیت همچنان پابرجاست، که در بسیاری از موارد دیگر، خطی کردن قابل توجه نیست^۱.

ارائه مثالهایی از مسائلی که اساساً غیرخطی هستند کار کاملاً ساده‌ای است. برای نمونه، اگر x زاویه انحراف یک آونگ نامبر را به طول a باشد که جرم گلوله آن m است، در آن صورت مطابق بخش ۵ معادله حرکت این آونگ چنین است

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a} \sin x = 0 \quad (1)$$

و چنانچه نیروی میرایی متناسب با سرعت گلوله موجود باشد، آنگاه معادله حرکت آونگ به صورت زیر در خواهد آمد

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{g}{a} \sin x = 0 \quad (2)$$

در خطی کردن متداول، به جای $\sin x$ ، x می‌گذاریم، که در مورد نوسانات کوچک معقول است، ولی برای x های بزرگ این امر به اعوجاج زیادی منجر می‌گردد. مثالی از نوع دیگر را می‌توان در نظریه لامپ خلا^۲ جستجو کرد، که به معادله مهم وان درپول^۳ منتهی می‌شود

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (3)$$

بعداً ملاحظه خواهد شد که هر یک از این معادلات غیرخطی خواص جالبی دارند که در دیگر معادلات موجود نیست.

۱. حتی اینشتین پیشنهاد کرده است که چون معادلات اساسی فیزیک غیرخطی‌اند، تمامی فیزیک ریاضی باید تجدیدنظر شود. اگر مطلب عنوان شده توسط اینشتین در آن زمان روشن می‌بود، ریاضیات آینده یقیناً با ریاضیات گذشته و حال خیلی تفاوت می‌داشت.

در سراسر این فصل معادلات غیر خطی مرتبه دوم به صورت

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (۴)$$

را مورد توجه قرار خواهیم داد، که معادلات (۱)، (۲)، و (۳) را به عنوان حالت‌های خاص شامل می‌شود. اگر يك دستگاه دینامیکی ساده مشکل از ذره‌ای به جرم واحد را در نظر بگیریم، که در امتداد محور x حرکت می‌کند، و چنانچه $f(x, dx/dt)$ نیروی وارد بر آن ذره باشد، در آن صورت (۴) معادله حرکت خواهد بود. مقادیر x (موقعیت) و dx/dt (سرعت)، که در هر لحظه حالت دستگاه را مشخص می‌کنند، فازهای دستگاه، و صفحه متغیرهای x و dx/dt صفحه فاز نامیده می‌شود. چنانچه متغیر $y = dx/dt$ را به کار ببریم، آنگاه می‌توان به جای (۴) دستگاه معادل زیر را نوشت

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y) \end{cases} \quad (۵)$$

خواهیم دید که به کمک مطالعه جوابهای (۵) می‌توان مطالب زیادی راجع به جوابهای (۴) فرا گرفت. وقتی t به عنوان يك پارامتر تلقی گردد، عموماً جواب (۵) يك جفت تابع $x(t)$ و $y(t)$ خواهد بود که در صفحه xy ، که همان صفحه فاز فوق‌الذکر است، يك منحنی تعریف می‌کنند. توجه ما معطوف به شکل کلی حاصل از این منحنیها در صفحه فاز خواهد بود.

به طور کلیتر، دستگاههایی به صورت

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (۶)$$

را مورد مطالعه قرار خواهیم داد که در آن F و G پیوسته‌اند و مشتقات جزئی اول آنها در سراسر صفحه فاز پیوسته هستند. دستگاهی از این نوع را، که در آن متغیر مستقل t در توابع F و G طرف راست ظاهر نمی‌شود، خودگردان می‌نامند. حال به بررسی دقیق‌تر جوابهای چنین دستگاهی می‌پردازیم.

از فرضهای فوق و از قضیه ۳۶-الف چنین برمی‌آید که اگر t عددی دلخواه و (x_0, y_0) نقطه دلخواهی از صفحه فاز باشد، آنگاه يك جواب منحصر به فرد (۶) به صورت

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (۷)$$

وجود دارد به طوری که $x(t_0) = x_0$ و $y(t_0) = y_0$ در صورتی که توابع $x(t)$ و $y(t)$ هر دو ثابت نباشند، (۷) يك منحني در صفحه فاز مشخص می کند که مسیر دستگاه نام دارد. روشن است که اگر (۷) يك جواب (۶) باشد، آنگاه

$$\begin{cases} x = x(t+c) \\ y = y(t+c) \end{cases} \quad (۸)$$

نیز به ازای هر عدد ثابت c ، جواب (۶) خواهد بود. بنابراین هر مسیر به وسیله جوابهای متعددی نمایش داده می شود، که تنها در انتقالی از پارامتر با هم اختلاف دارند. همچنین بسادگی می توان ثابت کرد (به تمرین ۲ مراجعه شود) که هر مسیر ماربر نقطه (x_0, y_0) باید با جوابی به شکل (۸) متناظر باشد. از این مطلب نتیجه می شود که از هر نقطه از صفحه فاز حداکثر يك مسیر می گذرد. بعلاوه، جهت افزایش t در امتداد هر مسیر مفروض، برای تمام جوابهایی که آن مسیر را مشخص می کنند، یکی است. بنابراین هر مسیر، يك منحني جهت دار است، و در شکلهای از علامت پیکان، برای نشان دادن جهتی که مسیر با افزایش t در آن جهت پیموده می شود، استفاده خواهیم کرد.

نکات بالا نشان می دهند که مسیرهای (۶) عموماً تمامی صفحه فاز را می پوشانند و با یکدیگر تلاقی نمی کنند. تنها استثنای این مورد در نقاطی همچون (x_0, y_0) است که در آن هر دو تابع F و G صفر می شوند

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad G(x_0, y_0) = 0$$

این نقاط به نقاط بحرانی موسوم اند، و در چنین نقطه ای جواب منحصر به فرد تضمین شده توسط قضیه ۳۶-الف جواب ثابت $x = x_0$ و $y = y_0$ است. يك جواب ثابت مسیری را تعریف نمی کند، و بنابراین هیچ مسیری از نقطه بحرانی نمی گذرد. ما در کار خود، همواره فرض می کنیم که هر نقطه بحرانی (x_0, y_0) منزوی است، بدین معنا که دایره ای به مرکز (x_0, y_0) وجود دارد که هیچ نقطه بحرانی دیگری را در بر نمی گیرد.

برای دستیابی به تعبیر فیزیکی نقاط بحرانی، دستگاه خودگردان خاص (۵) را که از معادله دینامیکی (۴) ناشی می شود در نظر می گیریم. در این حالت، نقطه بحرانی نقطه ای چون $(x_0, 0)$ است که در آن $y = 0$ و $f(x_0, 0) = 0$ ؛ یعنی، این نقطه با حالتی از حرکت ذره مطابقت دارد که در آن سرعت dx/dt و شتاب $d^2x/dt^2 = dy/dt$ هر دو صفر می شوند. این بدان معنی است که ذره در حال سکون است و هیچ نیرویی بدان وارد نمی شود، و بنابراین ذره در حالت تعادل می باشد. بدیهی است که حالات تعادل يك دستگاه فیزیکی از مهمترین کیفیات آن دستگاه به شمار می آیند، و این بخشی از علت علاقه ما به نقاط بحرانی را تشکیل می دهد.

۱. اصطلاحات خط سیر (Trajectory) و مشخصه (Characteristic) نیز توسط بعضی مؤلفین

به کار رفته است.

۲. به همین دلیل، بعضی از مؤلفین به جای نقطه بحرانی، عبارت نقطه تعادل را به کار می برند.

دستگاه خودگردان کلی (۶) الزاماً از معادله‌ای دینامیکی به شکل (۴) ناشی نمی‌شود. در این حالت، چه نوع مفهوم فیزیکی را می‌توان به مسیرها و نقاط بحرانی منسوب کرد؟ در اینجا مناسب است که شکل ۴۱ و میدان برداری دو بعدی تعریف شده به صورت

$$V(x, y) = F(x, y)i + G(x, y)j$$

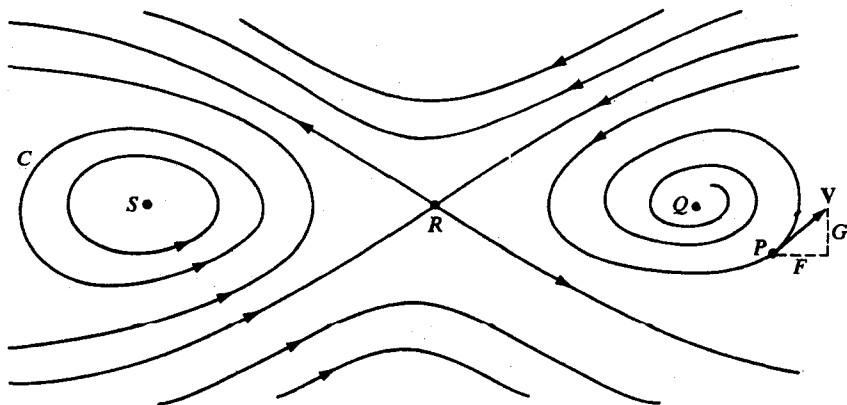
را که در نقطه‌ای مانند $P = (x, y)$ دارای مؤلفه افقی $F(x, y)$ و مؤلفه قائم $G(x, y)$ است در نظر بگیریم. از آنجا که $dx/dt = F$ و $dy/dt = G$ ، این بردار در نقطه P بر مسیر مماس است و متوجه جهت افزایش t می‌باشد. در صورتی که t زمان باشد، V را می‌توان بردار سرعت ذره‌ای توجیه کرده در امتداد مسیر در حال حرکت است. همین‌طور، می‌توان پنداشت که تمامی صفحه فاز به وسیله ذرات پر شده است و هر مسیر رد پای ذره متحرکی است که در جلو و عقب آن، ذرات بسیار دیگری در همان مسیر حرکت می‌کنند و ذراتی همراه آن در مسیرهای مجاور در حرکت هستند. این وضعیت را می‌توان به عنوان یک حرکت سیال دو بعدی توصیف کرد، و چون دستگاه (۶) خودگردان است، بدین معنا که بردار $V(x, y)$ در هر نقطه ثابت (x, y) بازمان تغییر نمی‌کند، حرکت سیال ایستا است. مسیرها، گذرگاههای ذرات در حال حرکت اند، و نقاط بحرانی Q ، R ، و S نقاطی با سرعت صفرند، که در آنها ذرات به حال سکون هستند (یعنی نقاط رکود حرکت سیال). بارزترین مشخصه‌های حرکت سیال که در شکل ۴۱ نمایش داده شده است بدین

قرارند:

الف) نقاط بحرانی؛

ب) آرایش مسیرها در نزدیکی نقاط بحرانی؛

ج) پایداری یا ناپایداری نقاط بحرانی، یعنی اینکه آیا ذره‌ای واقع در مجاورت چنین نقطه‌ای نزدیک آن باقی می‌ماند یا به قسمت دیگری از صفحه منتقل می‌شود؛



شکل ۴۱

(د) مسیرهای بسته (مانند C در شکل ۴۱)، که با جوابهای دوره‌ای مطابقت دارند.

این مشخصه‌ها قسمت عمده‌ای از رخساره فاز (یا تصویری کلی از مسیرهای) مربوط به دستگاه (۶) را تشکیل می‌دهند. چون معمولاً در دستگاه‌ها و معادلات غیرخطی را نمی‌توان به‌طور صریح حل کرد، هدف نظریه کیفی بحث شده در این فصل آن است که با بررسی مستقیم توابع F و G ، حداکثر مطالب ممکن را در مورد رخساره فاز کشف کنیم. برای اینکه برداشتی از نوع اطلاعات قابل دستیابی داشته باشیم، مشاهده می‌کنیم که اگر $x(t)$ يك جواب دوره‌ای معادله دینامیکی (۴) باشد، آنگاه مشتق آن $dx/dt = y(t)$ نیز دوره‌ای است و بنا بر این مسیر متناظرش در دستگاه (۵) بسته خواهد بود. برعکس، چنانچه مسیری از (۵) بسته باشد، (۴) يك جواب دوره‌ای خواهد داشت. به عنوان يك مثال مشخص از کاربرد این موضوع، خاطر نشان می‌کنیم که می‌توان ثابت کرد که معادله (حل نشدنی) وان در پل دارای يك جواب دوره‌ای منحصر به فرد است (اگر $\mu > 0$) و برای اثبات این امر باید نشان داد که دستگاه خودگردان معادل آن دارای مسیر بسته منحصر به فردی است.

تمرین

۱- با به‌کار بردن قانون دوم حرکت نیوتن در مورد گلوله آونگ، معادله (۲) را به دست آورید.

۲- چنانچه (x_0, y_0) نقطه‌ای در صفحه فاز باشد و اگر $x_1(t), y_1(t)$ و $x_2(t), y_2(t)$ جوابهای (۶) باشند به طوری که برای مقادیر مناسب t_1 و t_2 داشته باشیم $x_1(t_1) = x_0, y_1(t_1) = y_0$ و $x_2(t_2) = x_0, y_2(t_2) = y_0$ ، نشان دهید که عدد ثابت c وجود دارد به قسمی که

$$x_1(t+c) = x_2(t), \quad y_1(t+c) = y_2(t)$$

۳- رابطه بین رخساره‌های فاز دستگاههای زیر را توصیف کنید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -G(x, y) \end{cases}$$

۴- رخساره هر يك از دستگاههای زیر را توصیف کنید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{array} \right. \quad (د) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2 \end{array} \right. \quad (ج)$$

۵- بنا به تعریف، نقاط بحرانی و مسیرهای معادله (۴) همان نقاط بحرانی و مسیرهای دستگاه معادل آن یعنی (۵) هستند. نقاط بحرانی معادلات (۱)، (۲)، و (۳) را بیابید.

۶- نقاط بحرانی معادلات زیر را بیابید:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - (x^2 + x^2 - 2x) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y^2 - 5x + 6 \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{array} \right. \quad (\text{ب})$$

۷- تمام جوابهای دستگاه غیر خودگردان

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t \end{array} \right.$$

را بیابید و بعضی از منحنیهایی را که توسط این جوابها تعیین می شوند در صفحه xy ترسیم کنید.

۴۱. انواع نقاط بحرانی. پایداری

يك دستگاه خودگردان به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{array} \right. \quad (۱)$$

را در نظر می گیریم. به طور معمول، فرض می کنیم که توابع F و G در سرتاسر صفحه xy پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته اند. نقاط بحرانی (۱)، حداقل به طور نظری، از حل دستگاه معادلات $F(x, y) = 0$ و $G(x, y) = 0$ به دست می آیند. چهار

نوع ساده از نقاط بحرانی بسیار پیش می آیند، و قصد ما در این بخش تشریح این نقاط برحسب آرایش مسیرهای مجاور آنهاست. ولی، نخست به دو تعریف نیازمندیم.

فرض می کنیم که (x_0, y_0) يك نقطهٔ بحرانی منزوی (۱) باشد. چنانچه $C = [x(t), y(t)]$ مسیری از (۱) باشد، در آن صورت می گوئیم که، هرگاه $t \rightarrow \infty$ ، C به (x_0, y_0) میل می کند اگر روابط

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0 \text{ و } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0. \quad (2)$$

برقرار باشد. از لحاظ هندسی، این بدان معناست که چنانچه $P = (x, y)$ نقطه ای باشد که C را مطابق معادلات $x = x(t)$ و $y = y(t)$ پیمايد، در آن صورت وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $P \rightarrow (x_0, y_0)$ در صورتی که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \quad (3)$$

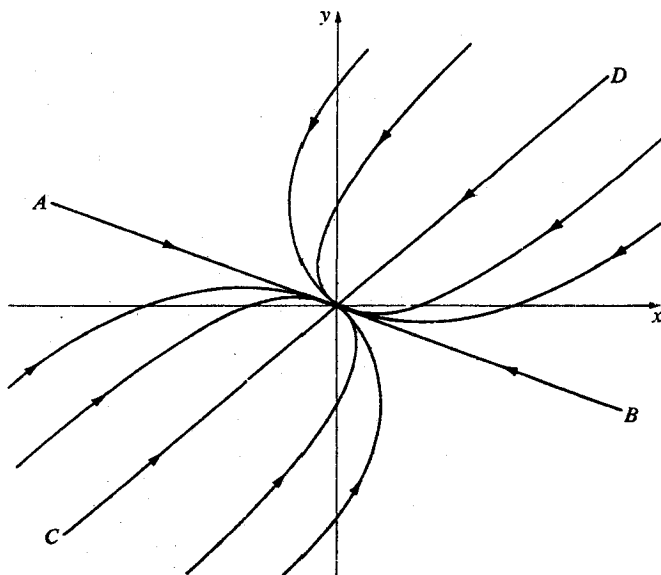
نیز وجود داشته باشد، یا اگر، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، خارج قسمت (۳) به بینهایت مثبت یا منفی میل کند، آنگاه می گوئیم که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، C وارد نقطهٔ بحرانی (x_0, y_0) می شود. خارج قسمت رابطهٔ (۳) شیب خطی است که (x_0, y_0) را به نقطهٔ P با مختصات $x(t)$ و $y(t)$ متصل می کند، لذا شرط اضافی بدین معناست که، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، این خط به جهت معینی میل کند. در تعریفهای بالا می توان حدود را وقتی $t \rightarrow -\infty$ نیز در نظر گرفت. روشن است که این خواص، ویژگیهای مسیر C هستند، و به جوابی که برای نمایش این مسیر به کار رفته است بستگی ندارند.

بعضی مواقع امکان اینکه جوابهای صریح دستگاه (۱) را بیابیم وجود دارد، و لذا از این جوابها می توان در تعیین مسیرها استفاده کرد. ولی، در اکثر حالات، برای یافتن مسیرها لازم است t را بین دو معادلهٔ دستگاه حذف کنیم، که منجر به رابطهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad (4)$$

می شود. این معادلهٔ مرتبه اول، شیب مماس بر مسیر (۱) را که از نقطهٔ (x, y) می گذرد به دست می دهد، مشروط به اینکه توابع F و G هردو با هم در این نقطه صفر نباشند. البته در این حالت، نقطه يك نقطهٔ بحرانی است و هیچ مسیری از آن نمی گذرد. بنابراین مسیرهای (۱) برخانوادهٔ يك پارامتری منحنیهای انتگرال (۴) منطبق می شوند، و این خانواده را اغلب می توان با روشی که در فصل ۲ ارائه کردیم به دست آورد. ولی، باید توجه داشت در حالیکه مسیرهای (۱) منحنیهای جهت دارند، منحنیهای انتگرال (۴) دارای هیچ جهتی

۱. می توان ثابت کرد که اگر (۲) برای جوابی همچون $x(t)$ ، $y(t)$ درست باشد، آنگاه (x_0, y_0) لزوماً يك نقطهٔ بحرانی خواهد بود. مراجعه شود به



شکل ۴۲

نیستند. در مثالهای زیر هر يك از این روشهای تعیین مسیرها، شرح داده خواهد شد. حال به تشریح هندسی چهار نوع اصلی نقاط بحرانی می پردازیم. در هر حالت فرض می کنیم که نقطه بحرانی مورد بحث، مبدأ مختصات $O = (0, 0)$ باشد.

گره ها. هر نقطه بحرانی مانند آنچه در شکل ۴۲ آمده است گره نام دارد. وقتی $t \rightarrow \infty$ (یا وقتی $t \rightarrow -\infty$)، مسیرها به چنین نقطه ای میل می کنند و به آن وارد می شوند. برای گرهی که در شکل ۴۲ نشان داده شده است، چهار مسیر نیمخطی وجود دارد، AO ، BO ، CO ، و DO که همراه با مبدأ مختصات خطوط AB و CD را تشکیل می دهند. تمام مسیرهای دیگر به قسمتهایی از سهمی شباهت دارند، و وقتی هر يك از این مسیرها به O میل کند شیبش به شیب خط AB میل می کند.

مثال ۰۱. دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases} \quad (5)$$

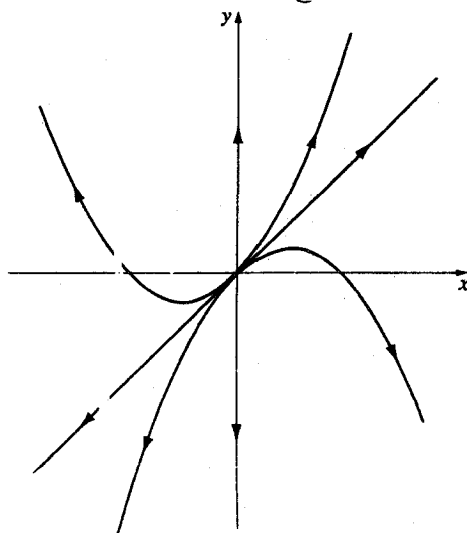
را در نظر می گیریم. روشن است که مبدأ تنها نقطه بحرانی آن است، و جواب عمومی را به سهولت می توان به کمک روشهای مذکور در بخش ۳۸ پیدا کرد:

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (۶)$$

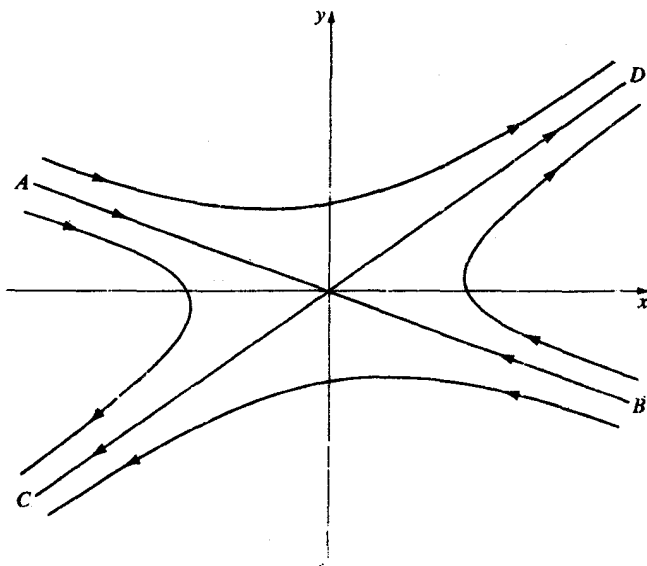
وقتی $c_1 = 0$ ، داریم $x = 0$ و $y = c_2 e^{2t}$. در این حالت مسیر (شکل ۴۳)، وقتی $c_2 > 0$ قسمت مثبت محور y ، و وقتی $c_2 < 0$ قسمت منفی محور y خواهد بود، و هریک از این مسیرها، وقتی $t \rightarrow -\infty$ به مبدأ میل می‌کند و وارد آن می‌شود. هنگامی که $c_2 = 0$ ، داریم $x = c_1 e^t$ و $y = c_1 e^t$. این مسیر، وقتی $c_1 > 0$ نیم‌خط $y = x$ با $x > 0$ ، و وقتی $c_1 < 0$ نیم‌خط $y = x$ با $x < 0$ خواهد بود، و مجدداً هردو مسیر، وقتی $t \rightarrow -\infty$ به مبدأ میل می‌کنند، و بدان وارد می‌شوند. وقتی c_1 و c_2 هردو مخالف صفر باشند، مسیرها بر سهمی‌های $x^2 = (c_2/c_1^2)x + c_2/c_1^2$ واقع می‌شوند، که با شیب ۱ از مبدأ می‌گذرند. باید دانست که هریک از این مسیرها تنها مشتمل بر قسمتی از یک سهمی هستند: قسمت $x > 0$ اگر $c_1 > 0$ ؛ و قسمت $x < 0$ چنانچه $c_1 < 0$. وقتی که $t \rightarrow -\infty$ ، هریک از این مسیرها نیز به مبدأ میل می‌کنند و بدان وارد می‌شوند، این را بلافاصله می‌توان از (۶) مشاهده کرد. در صورتی که از (۵) مستقیماً معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + 2y}{x} \quad (۷)$$

را تشکیل دهیم که شیب مماس بر مسیر ماربر (x, y) [با شرط $(x, y) \neq (0, 0)$] را به دست می‌دهد، از حل معادله همگن (۷)، درمی‌یابیم که $y = x + cx^2$. این روش منحنیهایی را که مسیرها (بجز مسیرهای واقع بر محور y ها) بر آنها واقع اند به دست می‌دهد، لیکن هیچ گونه اطلاعی راجع به چگونگی پیموه شدن مسیرها عرضه نمی‌کند. از



شکل ۴۳



شکل ۴۴

این بحث روشن است که نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ دستگاه (۵) یک گره است.

نقاط زینی. هر نقطهٔ بحرانی مانند نقطهٔ بحرانی شکل ۴۴ را یک نقطهٔ زینی می‌نامند. وقتی $t \rightarrow \infty$ دو مسیر نیمخطی AO و BO به این نقطه میل می‌کنند و وارد آن می‌شوند، و این دو مسیر بر خط AB قرار می‌گیرند. وقتی $t \rightarrow -\infty$ ، به این نقطه باز هم دو مسیر نیمخطی CO و DO میل می‌کنند و وارد آن می‌شوند، و این دو مسیر بر خط دیگر CD قرار می‌گیرند. بین این چهار مسیر نیمخطی چهار ناحیه وجود دارد، و هر کدام از این نواحی یک خانواده از مسیرهایی مشابه با هذلولی را شامل می‌شوند. این مسیرها، وقتی $t \rightarrow \infty$ یا $t \rightarrow -\infty$ به O میل نمی‌کنند، لیکن در عوض هنگامی که $t \rightarrow \infty$ و هنگامی که $t \rightarrow -\infty$ ، این مسیرها بر یکی از مسیرهای نیمخطی مجانب خواهند بود.

مرکزها. هر مرکز (که بعضی اوقات گرداب نامیده می‌شود) نقطه‌ای بحرانی است که به وسیلهٔ یک دسته از مسیرهای بسته احاطه شده باشد. وقتی $t \rightarrow \infty$ یا وقتی $t \rightarrow -\infty$ هیچ مسیری به مرکز میل نمی‌کند.

مثال ۲. تنها نقطهٔ بحرانی دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (۸)$$

مبدأ ، و جواب عمومی دستگاه

$$\begin{cases} x = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ y = c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{cases} \quad (9)$$

است، جوابی که در شرایط $x(0) = 1$ و $y(0) = 0$ صدق می کند آشکارا عبارت است از

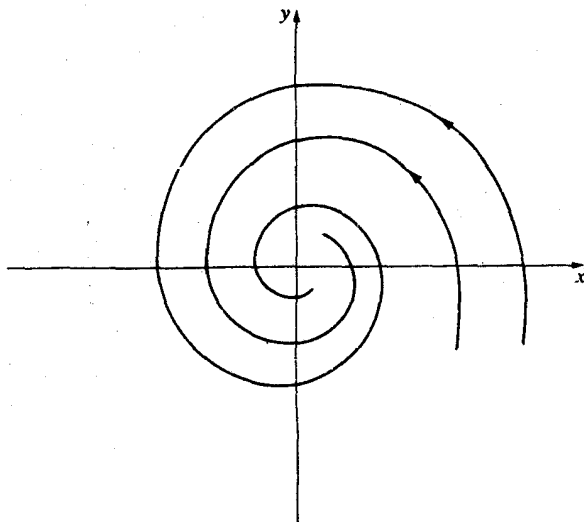
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (10)$$

و جوابی که به وسیله شرایط $x(0) = 0$ و $y(0) = -1$ تعیین می گردد به صورت

$$\begin{cases} x = \sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ y = -\cos t = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (11)$$

است. این دو جواب مختلف يك مسیر C را تعریف می کنند (شکل ۴۵) ، که بوضوح دایره $x^2 + y^2 = 1$ است. هر دو جواب (۱۰) و (۱۱) نشان می دهند که این مسیر در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت پیموده می شود. چنانچه t را بین معادلات دستگاه حذف کنیم ، خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



شکل ۴۶

که جواب عمومی آن، یعنی $x^2 + y^2 = c^2$ تمام مسیرها را (اما بدون جهت‌هایشان) به دست می‌دهد. بدیهی است که نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ دستگاه (۸) يك مرکز است حلزونی‌ها. هر نقطهٔ بحرانی مانند نقطهٔ بحرانی شکل ۴۶ را حلزونی (یا بعضی مواقع کانون) می‌نامند. وقتی $t \rightarrow \infty$ (یا وقتی $t \rightarrow -\infty$)، يك دسته مسیر بینهایت بار دور چنین نقطه‌ای به طور حلزونی می‌پیچند و به این نقطه میل می‌کنند. خصوصاً توجه داریم که گرچه مسیرها به O میل می‌کنند، لیکن وارد آن نمی‌شوند. یعنی، نقطه‌ای مانند P که در طول چنین مسیری حرکت می‌کند، وقتی $t \rightarrow \infty$ (یا وقتی $t \rightarrow -\infty$) به O میل می‌کند، لیکن خط OP به جهت معینی میل نمی‌کند.

مثال ۳. چنانچه a عدد ثابت دلخواهی باشد، تنها نقطهٔ بحرانی دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - y \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \end{cases} \quad (12)$$

مبدأ است (چرا؟). معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y} \quad (13)$$

را خیلی ساده با استفاده از مختصات قطبی r و θ و روابط $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$

می توان حل کرد. چون

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

ملاحظه می کنیم که

$$r^2 \frac{d\theta}{dx} = x \frac{dy}{dx} - y \quad \text{و} \quad r \frac{dr}{dx} = x + y \frac{dy}{dx}$$

به کمک این معادلات، سهولت می توان (۱۳) را به شکل خیلی ساده

$$\frac{dr}{d\theta} = ar$$

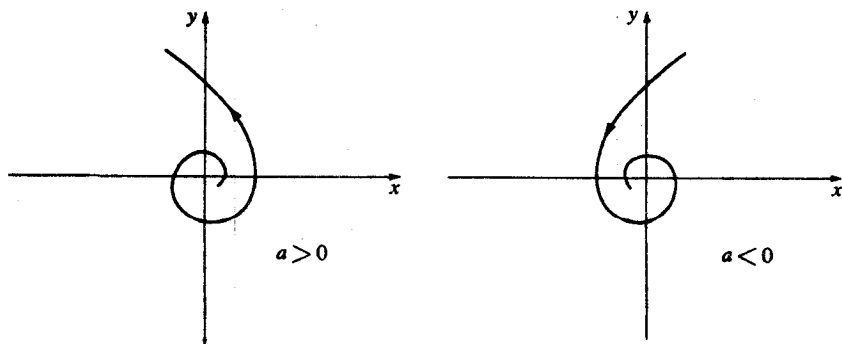
نوشت. بنابراین

$$r = ce^{a\theta} \quad (14)$$

معادله قطبی مسیره است. دو آرایش حلزونی ممکن در شکل ۴۷ نشان داده شده اند، جهت پیموده شدن این مسیرها را می توان از این حقیقت که وقتی $x = 0$ ، داریم $dx/dt = -y$ مشاهده کرد. اگر $a = 0$ ، آنگاه (۱۲) به شکل (۸) درمی آید و (۱۴) به $r = c$ تبدیل می شود که معادله قطبی خانواده تمام دایره $x^2 + y^2 = c^2$ است که مراکز آنها مبدأ است. پس این مثال تعمیم مثال (۲) است، و چون مرکز نشان داده شده در شکل ۴۵ بر خط مرزی بین حلزونیهای شکل ۴۷ قرار می گیرد، هر نقطه بحرانی را که مرکز باشد، اغلب حالت خط مرزی می نامند. در بخش آینده با نمونه های دیگری از حالات خط مرزی مواجه خواهیم شد.

حال مفهوم پایداری را به گونه ای که در مورد نقاط بحرانی دستگاه (۱) به کار می رود مطرح می کنیم.

در بخش گذشته اشاره شد که مهمترین سؤال در مورد مطالعه هر دستگاه فیزیکی



شکل ۴۷

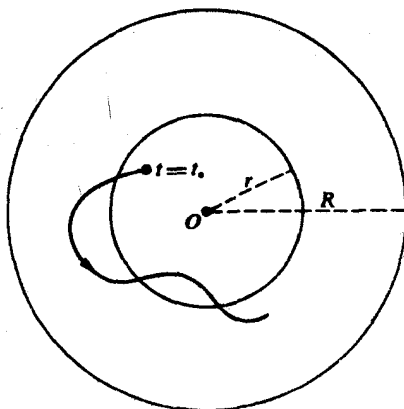
موضوع حالات ماندگار آن است. اما حالت ماندگار اگر از میزان تداوم قابل توجهی برخوردار نباشد یعنی اگر پایدار نباشد، اهمیت فیزیکی کمی دارد. به عنوان مثالی ساده، آونگ شکل ۴۸ را در نظر می گیریم. در اینجا دو حالت ماندگار ممکن وجود دارد: هنگامی که گلوله آونگ در بالاترین نقطه در حال سکون است، و هنگامی که این گلوله در پایین ترین نقطه در حال سکون است. اولین حالت بوضوح ناپایدار، و دومین حالت پایدار است. حال به یاد می آوریم که حالت پایدار هر دستگاه فیزیکی ساده با يك نقطه تعادل (یا نقطه بحرانی) در صفحه فاز مطابقت دارد. این ملاحظات به طور کلی اظهار می دارند که هر اختلال کوچک در نقطه تعادل ناپایدار موجب دورتر و دورتر شدن از این نقطه می شود، ولی در مورد نقطه تعادل پایدار خلاف این مطالب صحت دارد.

اکنون این مطالب حسی را به صورتی دقیقتر بیان می کنیم. يك نقطه بحرانی منزوی دستگاه (۱) را در نظر می گیریم، و برای سهولت فرض می کنیم که این نقطه بر مبدأ مختصات $O = (0, 0)$ صفحه فاز منطبق باشد. این نقطه بحرانی را پایدار می گویند، هرگاه به ازای هر عدد مثبت R ، عدد مثبت $r \leq R$ وجود داشته باشد، به قسمی که هر مسیری که در $t = t_0$ درون دایره $x^2 + y^2 = r^2$ واقع است، برای تمام مقادیر $t > t_0$ ، درون دایره $x^2 + y^2 = R^2$ باقی بماند (شکل ۴۹). اگر چندان دقیق صحبت نکنیم، هر نقطه بحرانی در صورتی پایدار است که تمام مسیرهایی که به قدر کافی به این نقطه نزدیک می شوند در مجاورت آن باقی بمانند. بعلاوه، يك نقطه بحرانی را به طور مجانبی پایدار می گویند، چنانچه پایدار باشد و دایره $x^2 + y^2 = r^2$ وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که برای مقداری از $t = t_0$ درون دایره واقع است، وقتی $t \rightarrow \infty$ به مبدأ مختصات میل کند. سرانجام، اگر نقطه بحرانی پایدار نباشد، آن را ناپایدار می نامند.

به عنوان مثالهایی در مورد این مفاهیم، اشاره می کنیم که گره شکل ۴۳، نقطه زینی شکل ۴۴، و نقطه حلزونی طرف چپ شکل ۴۷ ناپایدارند، حال آنکه مرکز واقع در شکل ۴۵ پایدار است ولی به طور مجانبی پایدار نیست. گره شکل ۴۲، حلزونی شکل ۴۶، و حلزونی طرف راست شکل ۴۷ به طور مجانبی پایدار هستند.



شکل ۴۸



شکل ۴۹

تمرین

۱- برای هر يك از دستگاههای غیرخطی زیر: (۱) نقاط بحرانی را بیابید؛ (۲) معادله دیفرانسیل مسیرها را به دست آورید؛ (۳) این معادله را برای یافتن مسیرها حل کنید؛ و (۴) نمودار چند مسیر را رسم کنید و جهت افزایش t را نشان دهید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x^2 + 1) \\ \frac{dy}{dt} = -x(x^2 + 1) \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x^2 + 1) \\ \frac{dy}{dt} = 2xy^2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 2x^2y^2 \end{cases} \quad (\text{د})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^y \\ \frac{dy}{dt} = e^y \cos x \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۲- در هر يك از دستگاههای خطی زیر، مبدأ يك نقطه بحرانی منزوی است. (۱) جواب عمومی را بیابید. (۲) معادله دیفرانسیل مسیرها را پیدا کنید. (۳) معادله‌ای را که در حالت (۲) می‌یابید حل و نمودار چند مسیر را ترسیم کنید و جهت افزایش t را نشان دهید. (۴) در مورد پایداری نقطه بحرانی بحث کنید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad (ج)$$

۳- رخساره فاز معادله $d^2x/dt^2 = 2x^3$ را رسم کنید، نشان دهید که این رخساره دارای يك نقطه بحرانی منزوی ناپایدار در مبدأ مختصات است.

۴۲. نقاط بحرانی، و پایداری در دستگاههای خطی

هدف ما در این فصل آن است که با مطالعه رخساره‌های فاز دستگاههای خودگردان غیرخطی به شکل

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$$

حتی المقدور مطالبی راجع به معادلات دیفرانسیل غیرخطی فراگیریم. يك جنبه این کار مسئله دسته بندی نقاط بحرانی چنین دستگاههایی بر حسب ماهیت و پایداری آنهاست. در بخش ۴۴ خواهیم دید که در شرایط مناسب می توان این مسئله را برای دستگاه غیرخطی مفروض، با مطالعه دستگاه خطی مربوطه حل کرد. بنابراین همه این بخش را صرف تحلیل کاملی از نقاط بحرانی دستگاههای خودگردان خطی خواهیم کرد.

دستگاه زیر را که مبدأ $(0, 0)$ نقطه بحرانی آن است در نظر می گیریم

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \quad (۱)$$

در سراسر این بخش فرض می کنیم که

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (۲)$$

به طوری که $(0, 0)$ تنها نقطه بحرانی است. در بخش ۳۸ ثابت شد که (۱) دارای يك جواب غیرصفر به شکل

$$\begin{cases} x = Ae^{m_1 t} \\ y = Be^{m_1 t} \end{cases}$$

است، که در آن m یک ریشه معادله درجه دوم

$$m^2 - (a_1 + b_1)m + (a_1 b_1 - a_2 b_1) = 0 \quad (3)$$

است. (۳) را معادله کمکی دستگاه می نامند. دقت کنید که با توجه به شرط (۲)، صفر نمی تواند ریشه (۳) باشد.

فرض می کنیم m_1 و m_2 ریشه های (۳) باشند. ثابت خواهیم کرد که ماهیت نقطه بحرانی (۰، ۰) دستگاه (۱) به وسیله ماهیت اعداد m_1 و m_2 تعیین می گردد. منطقی است که انتظار وقوع سه حالت را داشته باشیم، بسته به آنکه m_1 و m_2 حقیقی و متمایز، حقیقی و برابر، یا مختلط مزدوج باشند. متأسفانه وضعیت کمی پیچیده تر از این است، و لازم است پنج حالت زیر را در نظر بگیریم.

حالات اصلی

حالت الف. ریشه های m_1 و m_2 حقیقی، متمایز، و هم علامت هستند (گره)؛

حالت ب. ریشه های m_1 و m_2 حقیقی، متمایز، و مختلف علامه هستند (نقطه زینی)؛

حالت ج. ریشه های m_1 و m_2 مختلط مزدوج اند ولی موهومی خالص نیستند (حلزونی)

حالات خط مرزی

حالت د. ریشه های m_1 و m_2 حقیقی و برابرند (گره)؛

حالت ه. ریشه های m_1 و m_2 موهومی خالص اند (مرکز).

دلیل متمایز کردن حالات اصلی از حالت های خط مرزی در بخش ۴۴ روشن خواهد شد. در حال حاضر کافی است متذکر شویم که گرچه حالات خط مرزی از نظر ریاضی مورد توجه اند، ولی از اهمیت کاربردی کمی برخوردارند، زیرا شرایط معرف آنها در مسائل فیزیکی کمتر ظاهر می شوند. اکنون به اثبات احکام ذکر شده در پرانتزها می پردازیم.

حالت الف. چنانچه ریشه های m_1 و m_2 حقیقی، متمایز، و هم علامت باشند، نقطه بحرانی (۰، ۰) یک گره است.

اثبات. مطلب را با این فرض که m_1 و m_2 هر دو منفی اند آغاز می کنیم، و علایم را طوری در نظر می گیریم که $0 < m_1 < m_2$. با توجه به بخش ۳۸، جواب عمومی (۱) در این حالت عبارت است از

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \quad (4)$$

که در آن A ها و B ها اعداد ثابت معینی هستند به طوری که $B_1/A_1 \neq B_2/A_2$ ، و c ها اعداد ثابت دلخواهی هستند. وقتی $c_2 = 0$ ، جوابهای

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} \end{cases} \quad (5)$$

و وقتی $c_1 = 0$ ، جوابهای

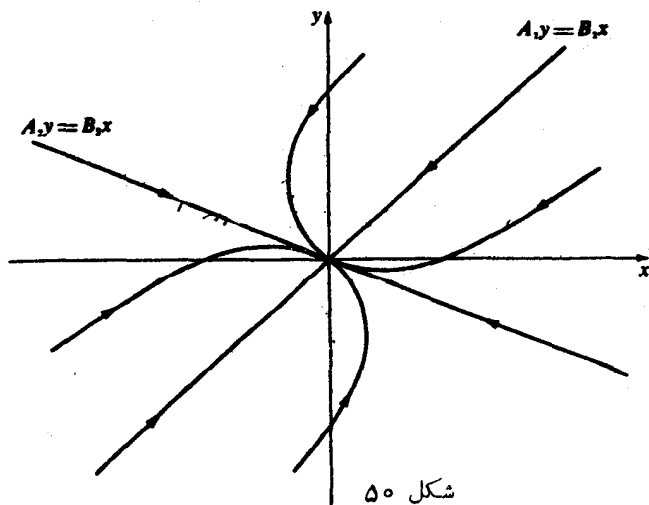
$$\begin{cases} x = c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \quad (6)$$

را به دست می آوریم. برای هر $c_1 > 0$ ، جواب (۵) نمایشگر مسیری است که نیمی از خط $A_1 y = B_1 x$ را با شیب B_1/A_1 در بر می گیرد؛ و برای هر $c_1 < 0$ ، جواب (۵) نمایشگر مسیری است که نیمه دیگر این خط (نیمه واقع در طرف دیگر مبدأ مختصات) را شامل می شود. چون $m_1 < 0$ ، وقتی $t \rightarrow \infty$ هر دوی این مسیرهای نیمخطی به $(0, 0)$ میل می کنند؛ و چون $y/x = B_1/A_1$ هر دو با شیب B_1/A_1 به $(0, 0)$ وارد می شوند (شکل ۵۰). دقیقاً به همین طریق، جوابهای (۶) نمایشگر دو مسیر نیمخطی واقع بر خط $A_2 y = B_2 x$ با شیب B_2/A_2 هستند. این مسیرها نیز وقتی $t \rightarrow \infty$ ، به $(0, 0)$ میل می کنند و با شیب B_2/A_2 بدان وارد می شوند.

اگر $c_1 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$ ، جواب عمومی (۴) میان مسیرهای منحنی الخط است. چون $m_1 < 0$ و $m_2 < 0$ ، این مسیرها نیز وقتی $t \rightarrow \infty$ ، به $(0, 0)$ میل می کنند. بعلاوه ، چون $m_1 - m_2 < 0$

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t}}{c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t}} = \frac{(c_1 B_1 / c_2) e^{(m_1 - m_2)t} + B_2}{(c_1 A_1 / c_2) e^{(m_1 - m_2)t} + A_2}$$

روشن است که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، y/x به سمت B_2/A_2 میل می کند، لذا تمام این مسیرها



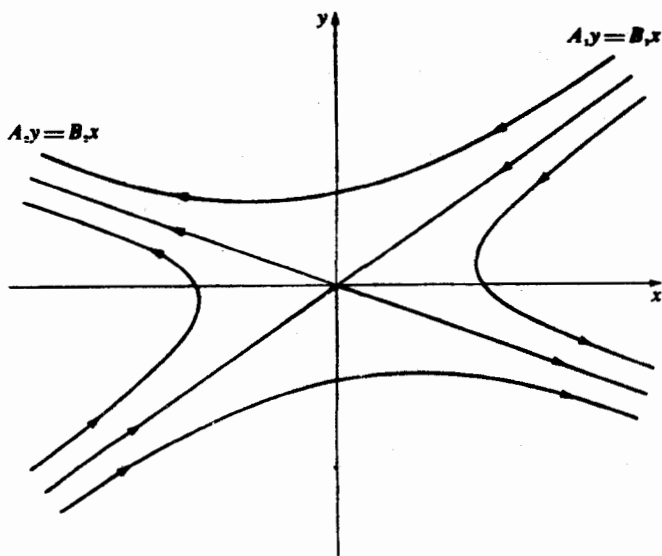
شکل ۵۰

با شیب B_2/A_2 به $(0, 0)$ وارد می‌شوند. شکل ۵۰ تصویری کیفی از این وضعیت را نشان می‌دهد. بدیهی است که نقطه بحرانی مزبور يك گره است، که به طور مجانبی پایدار می‌باشد.

چنانچه m_1 و m_2 هر دو مثبت باشند، و علایم چنان اختیار شوند که $m_1 > m_2 > 0$ ، در آن صورت وضعیت دقیقاً مانند قبل است به استثنای اینکه اکنون تمام مسیرها وقتی به $(0, 0)$ میل می‌کنند و بدان وارد می‌شوند که $t \rightarrow -\infty$. تصویر مسیرهایی که در شکل ۵۰ نشان داده شده‌اند تغییر نمی‌کند بجز اینکه یکنهایی که جهت‌های این مسیرها را نشان می‌دهند همگی برعکس می‌شوند. در اینجا نیز يك گره داریم، که این بار ناپایدار است.

حالت ب. اگر ریشه‌های m_1 و m_2 حقیقی، متمایز، و مختلف‌العلامه باشند، آنگاه نقطه بحرانی $(0, 0)$ يك نقطه زینی است.

اثبات. علایم را طوری اختیار می‌کنیم که $m_1 < 0 < m_2$. جواب عمومی (۱) را بازهم می‌توان به شکل (۴) نوشت، و این بار نیز جوابهای خصوصی به شکلهای (۵) و (۶) خواهند بود. دو مسیر نیمخطی که به وسیله (۵) نمایش داده شده‌اند در اینجا نیز وقتی $t \rightarrow \infty$ ، به $(0, 0)$ میل می‌کنند و بدان وارد می‌شوند، لیکن در اینجا دو مسیر نیمخطی که توسط (۶) نمایش داده شده‌اند وقتی $t \rightarrow -\infty$ ، به $(0, 0)$ میل می‌کنند و بدان وارد می‌شوند. اگر $c_1 \neq 0$ و $c_2 \neq 0$ ، جواب عمومی (۴) همچنان نمایشگر مسیرهای منحنی الخط است، اما چون $m_1 < 0 < m_2$ ، هیچکدام از این مسیرها وقتی $t \rightarrow \infty$ یا $t \rightarrow -\infty$ ، به $(0, 0)$ میل نمی‌کنند. در عوض وقتی $t \rightarrow \infty$ ، هر يك از این مسیرها



بر یکی از مسیرهای نیمخطی داده شده توسط (۶) مجانب است؛ و وقتی $t \rightarrow -\infty$ ، هر يك از این مسیرها مجانب بر یکی از مسیرهای نیمخطی است که به وسیله (۵) نمایش داده شده‌اند. شکل ۵۱ تصویری کیفی از این رفتار را به دست می‌دهد. در این حالت نقطه بحرانی يك نقطه زینی است، که بوضوح ناپایدار است.

حالت ج. اگر ریشه‌های m_1 و m_2 مختلط مزدوج باشند ولی موهومی خالص نباشند، آنگاه نقطه بحرانی (۰، ۰) يك حلزونی است.

اثبات. در این حالت می‌توان m_1 و m_2 را به صورت $a \pm ib$ نوشت که در آن a و b اعداد حقیقی غیر صفرند. همچنین، جهت استفاده بعدی، مشاهده می‌کنیم که معادله (۳) منفی است:

$$\begin{aligned} D &= (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

با توجه به بخش ۳۸، در این حالت جواب عمومی (۱) عبارت است از

$$\begin{cases} x = e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \quad (8)$$

که در آن A ها و B ها اعداد ثابت معین و c ها اعداد ثابت اختیاری هستند.

ابتدا فرض می‌کنیم که $a < 0$. آنگاه از رابطه (۸) روشن است که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، x و y به سمت صفر میل می‌کنند، لذا وقتی $t \rightarrow \infty$ ، تمام مسیرها به (۰، ۰) میل می‌کنند. حال ثابت می‌کنیم که، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، این مسیرها به نقطه (۰، ۰) وارد نمی‌شوند، ولی در عوض به طور حلزونی دور این نقطه می‌پیچند. برای این منظور مختص قطبی θ را به کار می‌بریم و نشان می‌دهیم که، در امتداد هر مسیر، $d\theta/dt$ یا برای تمام مقادیر t مثبت و یا به ازای تمام مقادیر t منفی است. مطلب را با این نکته که $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ آغاز می‌کنیم، پس

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x dy/dt - y dx/dt}{x^2 + y^2}$$

و با استفاده از معادلات (۱) به دست می‌آوریم که

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2}{x^2 + y^2} \quad (9)$$

چون تنها به جوابهایی که نمایشگر مسیرها هستند توجه داریم، فرض می‌کنیم که $x^2 + y^2 \neq 0$. حال (۷) بر این دلالت دارد که a_2 و b_1 مختلف علامه‌اند. حالتی را که

در آن $a_4 > 0$ و $b_1 < 0$ در نظر می‌گیریم. وقتی $y = 0$ ، (۹) نتیجه می‌دهد که $d\theta/dt = a_4 > 0$. اگر $y \neq 0$ ، $d\theta/dt$ نمی‌تواند صفر باشد؛ زیرا اگر چنین باشد، در آن صورت (۹) نتیجه می‌دهد که

$$a_4 x^2 + (b_4 - a_1)xy - b_1 y^2 = 0$$

یعنی برای يك مقدار حقیقی x/y داریم

$$a_4 \left(\frac{x}{y}\right)^2 + (b_4 - a_1) \frac{x}{y} - b_1 = 0 \quad (10)$$

و این نمی‌تواند صحیح باشد زیرا مبین معادله درجه دوم (۱۰) همان D است، که با توجه به (۷) منفی است. این نشان می‌دهد که وقتی $a_4 > 0$ همواره $d\theta/dt$ مثبت است، و به همین طریق ملاحظه می‌کنیم که وقتی $a_4 < 0$ ، همواره $d\theta/dt$ منفی است. چون با توجه به (۸)، وقتی $t \rightarrow \infty$ و x و y بینهایت بسار تغییر علامت می‌دهند، تمام مسیرها باید مارپیچ‌وار به سمت مبدأ متوجه شوند (در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت یا در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بسته به اینکه $a_4 > 0$ یا $a_4 < 0$). بنابراین در این حالت نقطه بحرانی يك نقطه حلزونی است، که به طور مجانبی پایدار است.

چنانچه $a > 0$ ، وضعیت همانند سابق خواهد بود بجز آنکه وقتی $t \rightarrow -\infty$ ، مسیرها به $(0, 0)$ میل می‌کنند و نقطه بحرانی ناپایدار است. شکل ۴۷ آرایش مسیرها را وقتی $a_4 > 0$ نشان می‌دهد.

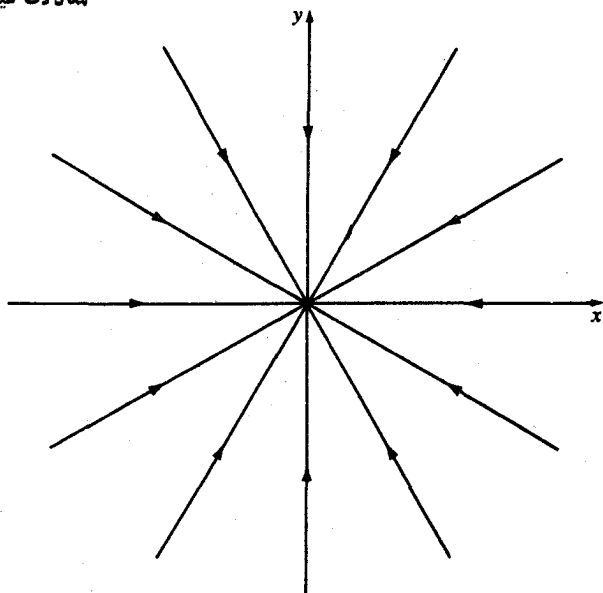
حالت ۵. در صورتی که m_1 و m_4 حقیقی و برابر باشند، نقطه بحرانی $(0, 0)$ يك گره است.

اثبات. فرض می‌کنیم که $m_1 = m_4 = m < 0$. این حالت به دو حالت فرعی تقسیم می‌شود که باید به طور جداگانه بحث شوند: (۱) $a_1 = b_4 \neq 0$ و $a_4 = b_1 = 0$ ؛ (۲) تمام حالات دیگری که به ریشه مضاعف معادله (۳) منجر می‌گردند.

نخست حالت فرعی (۱) را در نظر می‌گیریم، این وضعیتی است که در پانویس صفحه ۳۰۹ تشریح شده است. چنانچه مقدار مشترك a_1 و b_4 را با a نشان دهیم، آنگاه معادله (۳) به صورت $m^2 - 2am + a^2 = 0$ درمی‌آید، پس $m = a$. بنابراین دستگاه (۱) چنین می‌شود

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = ay \end{cases}$$

که دارای جواب عمومی



شکل ۵۲

$$\begin{cases} x = c_1 e^{mt} \\ y = c_2 e^{mt} \end{cases} \quad (11)$$

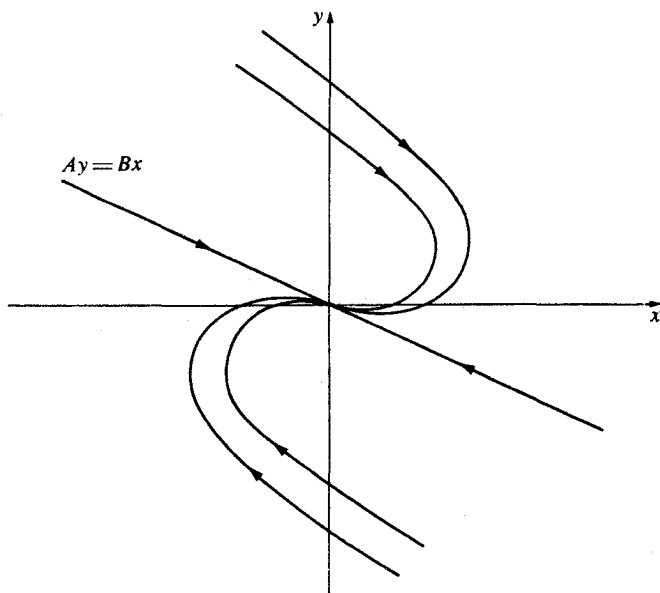
است، که در آن c_1 و c_2 اعداد ثابت اختیاری هستند. مسیرهایی که توسط (۱۱) تعریف می‌شوند نیم‌خطهایی با تمام شیبهای ممکنه‌اند (شکل ۵۲)، و چون $m < 0$ ملاحظه می‌کنیم که وقتی $t \rightarrow \infty$ هر مسیر به $(0, 0)$ میل می‌کند و بدان وارد می‌شود. بنا بر این، نقطه بحرانی یک گره است، و به طور مجانبی پایدار است. چنانچه $m > 0$ ، با همان وضعیت روبرو هستیم با این تفاوت که مسیرها وقتی به $(0, 0)$ وارد می‌شوند که $t \rightarrow -\infty$ ، پیکانهای شکل ۵۲ برعکس می‌شوند، و نقطه $(0, 0)$ ناپایدار است.

اکنون حالت فرعی (۲) را مورد بحث قرار می‌دهیم. با توجه به روابط (۲۰) و تمرین ۴ از بخش ۳۸، جواب عمومی (۱) را می‌توان به صورت

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} + c_2 (A_1 + A t) e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} + c_2 (B_1 + B t) e^{mt} \end{cases} \quad (12)$$

نوشت که در آن A ها و B ها اعداد ثابت معین و c ها اعداد ثابت اختیاری‌اند. وقتی $c_2 = 0$ جوابهای

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} \end{cases} \quad (13)$$



شکل ۵۳

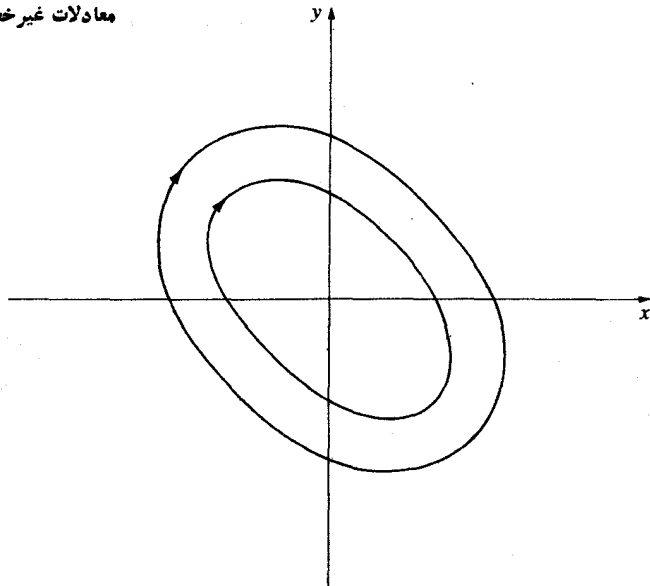
را می‌یابیم. می‌دانیم که این جوابها نمایشگر دو مسیر نیمخطی واقع بر خط $Ay = Bx$ با شیب B/A هستند، و چون $m < 0$ ، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، هر دو مسیر به $(0, 0)$ میل می‌کنند (شکل ۵۳). همچنین، چون $y/x = B/A$ ، هر دو مسیر با شیب B/A به $(0, 0)$ وارد می‌شوند. اگر $c_2 \neq 0$ ، جوابهای (۱۲) نمایشگر مسیرهای منحنی الخط‌اند، و چون $m < 0$ از (۱۲) روشن است که این مسیرها، وقتی $t \rightarrow \infty$ به $(0, 0)$ میل می‌کنند. بعلاوه، از

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B e^{mt} + c_2 (B_1 + Bt) e^{mt}}{c_1 A e^{mt} + c_2 (A_1 + At) e^{mt}} = \frac{c_1 B / c_2 + B_1 + Bt}{c_1 A / c_2 + A_1 + At}$$

نتیجه می‌شود که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، y/x به سمت B/A میل می‌کند، پس تمامی این مسیرهای منحنی الخط با شیب B/A به $(0, 0)$ وارد می‌شوند. همچنین مشاهده می‌کنیم که وقتی $t \rightarrow -\infty$ ، y/x به سمت B/A میل می‌کند. شکل ۵۳ تصویری کیفی از چگونگی آرایش مسیرها به دست می‌دهد. روشن است که $(0, 0)$ گرهی است که به طور مجانبی پایدار است. چنانچه $m > 0$ ، وضعیت تغییری نمی‌کند بجز آنکه جهت‌های مسیرها معکوس می‌شوند و نقطه بحرانی ناپایدار می‌شود.

حالت ۵. در صورتی که m_1 و m_2 موهومی محض باشند، نقطه بحرانی $(0, 0)$ یک مرکز است.

اثبات. در اینجا کافی است به بحث مربوط به حالت ج مراجعه کنیم، زیرا اکنون m_1 و m_2 به شکل $a + ib$ با $a = 0$ و $b \neq 0$ هستند. بنابراین جواب عمومی (۱) به وسیله



شکل ۵۴

(۸) ولی بدون عامل نمایی بیان می‌شود، پس $x(t)$ و $y(t)$ دوره‌ای هستند و هر مسیر، منحنی بسته‌ای حول مبدأ مختصات است. همانطوری که شکل ۵۴ نشان می‌دهد، در واقع این منحنیها بیضی‌اند؛ این مطلب را به کمک حل معادله دیفرانسیل مسیرها

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y}{a_1x + b_1y} \quad (۱۴)$$

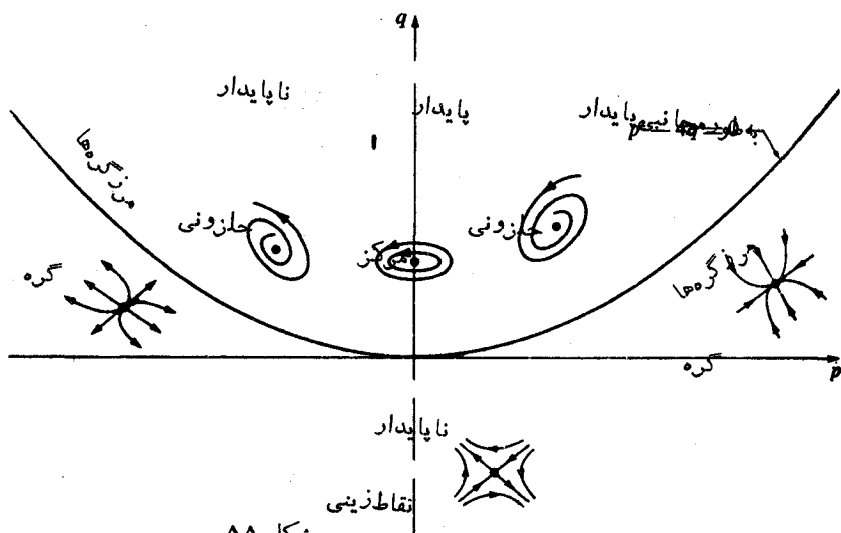
می‌توان به اثبات رساند (مسئله ۵ را ببینید). نقطه بحرانی $(0, 0)$ آشکارا مرکزی پایدار است که به طور مجانبی پایدار نمی‌باشد. در بخشهای بالا مطالبی راجع به ناپایداری بیان کرده‌ایم. مناسب خواهد بود که این اطلاعات را به صورت زیر خلاصه کنیم.

قضیه الف. نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه خطی (۱) پایدار است، اگر و تنها اگر هر دو ریشه معادله کمکی (۳) دارای قسمتهای حقیقی غیر مثبت باشند، و به طور مجانبی پایدار است، اگر و تنها اگر هر دو ریشه معادله (۳) دارای قسمتهای حقیقی منفی باشند.

حال چنانچه معادله (۳) را به صورت

$$(m - m_1)(m - m_2) = m^2 + pm + q = 0 \quad (۱۵)$$

بنویسیم، به طوری که $q = m_1m_2$ و $p = -(m_1 + m_2)$ ، بیان شد می‌توان بر حسب p و q نیز بیان کرد. در واقع، چنانچه این حالات را در صفحه pq تفسیر کنیم، آنگاه به نمودار قابل توجه (شکل ۵۵) دست خواهیم یافت که در یک نظر ماهیت و خواص پایداری نقطه بحرانی $(0, 0)$ را روشن می‌سازد.



شکل ۵۵

اولین مطلبی که باید بدان توجه کرد آن است که محور p ها یعنی $q = 0$ ، مستثنی می‌شود، زیرا با توجه به شرط (۲) می‌دانیم که $m_1 m_2 \neq 0$. با توجه به آنچه راجع به پنج حالت مذکور فرا گرفته‌ایم، تمام اطلاعات موجود در نمودار نتیجه مستقیم رابطه زیر است:

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

بنابراین، در بالای سهمی $p^2 - 4q = 0$ ، داریم $p^2 - 4q < 0$ ، لذا m_1 و m_2 اعداد مختلط مزدوجی هستند که، اگر و تنها اگر $p = 0$ ، موهومی محض‌اند؛ اینها مبین حالت‌های ج و ه هستند که شامل حزنیه‌ها و مراکزی شوند. در زیر محور p داریم $q < 0$ و این بدان مفهوم است که m_1 و m_2 اعدادی حقیقی، متمایز، و مختلف‌العلامه‌اند؛ این ناحیه نقاط زینی حالت ب را به دست می‌دهد. و سرانجام، منطقه بین این دو ناحیه (به انضمام سهمی و به استثنای محور p ها) به وسیله روابط $p^2 - 4q \geq 0$ و $q > 0$ مشخص می‌گردد، بنابراین m_1 و m_2 حقیقی و هم‌علامت‌اند؛ در اینجا با گره‌های حالات الف و د روبرو هستیم. به‌لاوه روشن است که دقیقاً یک ناحیه پایداری مجانبی وجود دارد و آن ربع اول است. این مطلب را ذیلاً به طور دقیق بیان می‌کنیم.

قضیه ب. نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه خطی (۱) به طور مجانبی پایدار است، اگر و فقط اگر ضرایب $p = -(a_1 + b_1)$ و $q = a_1 b_1 - a_2 b_2$ معادله کمکی (۳) هر دو مثبت باشند.

سرانجام، باید تأکید شود که به کمک تحلیل جوابهای صریح دستگاه خطی، مسیرهای آن را در حوالی یک نقطه بحرانی مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در دو بخش بعد، با بررسی

مسائل مشابهی در مورد دستگاههای غیر خطی، که عموماً به طور صریح قابل حل نیستند، به طور کاملتر وارد اصل مطلب خواهیم شد.

تمرین

۱- برای هر يك از دستگاههای خود گردان خطی زیر، ماهیت و خواص پایداری نقطه بحرانی (۰، ۰) را تعیین کنید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases} \quad (\text{ا})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 8x - 6y \end{cases} \quad (\text{و})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 5y \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases} \quad (\text{ز})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -17x - 5y \end{cases} \quad (\text{د})$$

۲- در صورتی که $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ، نشان دهید که دستگاه (۱) دارای بینهایت نقطه بحرانی است، که هیچ کدام منزوی نیستند.

۳- الف) چنانچه $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ، نشان دهید که دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1 \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

تنها دارای يك نقطه بحرانی منزوی (x_0, y_0) است.

(ب) نشان دهید که با تغییر متغیرهای $\bar{x} = x - x_0$ و $\bar{y} = y - y_0$ دستگاه حالت (الف) را می‌توان به صورت دستگاه (۱) درآورد.

(ج) نقطه بحرانی دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y + 10 \\ \frac{dy}{dt} = 11x - 8y + 49 \end{cases}$$

را بیابید. به وسیله تغییر متغیرها، این دستگاه را به شکل (۱) درآورید، و ماهیت و خواص پایداری نقطه بحرانی را تعیین کنید.

۴- در بخش ۲۰ با حل معادله

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0$$

ارتعاشات آزاد جرمی متصل به یک فنر را مطالعه کردیم، که مقادیر ثابت $b \geq 0$ و $a > 0$ بترتیب، بیانگر چسبندگی محیط و سختی فنر هستند. دستگاه خودگردان معادل آن، یعنی،

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -a^2x - 2by \end{cases} \quad (*)$$

را که $(0, 0)$ تنها نقطه بحرانش است، در نظر بگیرید.

(الف) معادله کمکی مربوط به $(*)$ را بیابید. p و q چه هستند؟

(ب) برای هر یک از چهار حالت زیر، ماهیت و خواص پایداری نقطه بحرانی را تشریح کنید، و به طور خلاصه تفسیری فیزیکی از حرکت مربوط به این جرم را ارائه کنید:

$$b = a \quad (3) \quad b = 0 \quad (1)$$

$$b > a \quad (4) \quad 0 < b < a \quad (2)$$

۵- با فرض مربوط به حالت ۵، معادله (۱۴) را حل کنید، و نشان دهید که حاصل یک دسته تک پارامتری از بیضی‌هایی است که مبدأ مختصات را احاطه کرده است. راهنمایی: به خاطر آورید که اگر $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D$ معادله یک منحنی حقیقی باشد، آنگاه، منحنی مزبور بیضی خواهد بود، اگر و تنها اگر ممین آن، $B^2 - 4AC$ ، منفی باشد.

۴۳. بررسی پایداری با روش مستقیم لیاپونوف

روشن است که چنانچه انرژی کل یک دستگاه فیزیکی در نقطه تعادل معینی دارای مینیم موضعی باشد، آن نقطه پایدار است. برای مطالعه مسایل پایداری در چارچوبی وسیعتر، این مطلب به وسیله لیاپونوف^۱ به صورت روشی ساده ولی مؤثر تعمیم داده شد. در این بخش و بخش بعد روش لیاپونوف و بعضی کاربردهای آن را مورد بحث قرار خواهیم داد. دستگاه خودگردان

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که این دستگاه دارای یک نقطه بحرانی منزوی باشد، که بر حسب معمول آن را در مبدأ $(0, 0)$ اختیار می کنیم^۲. فرض می کنیم که $C = [x(t), y(t)]$ مسیری از (۱) باشد و تابعی مانند $E(x, y)$ را در نظر می گیریم که در ناحیه ای مشتمل بر این مسیر پیوسته باشد و مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشد. در صورتی که نقطه (x, y) طبق معادلات $x = x(t)$ و $y = y(t)$ ، در امتداد این مسیر حرکت کند، $E(x, y)$ را می توان به عنوان تابعی از t در امتداد C تلقی کرد [این تابع را با $E(t)$ نشان می دهیم] و آهنگ تغییرات آن چنین است:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \end{aligned} \quad (2)$$

این رابطه هسته مرکزی نظرات لیاپونوف است، و برای بهره گیری از آن به چندین تعریف نیاز داریم که نوع توابع مورد نظر را مشخص می کنند.

۱. الکساندر میخایلوویچ لیاپونوف Alexander Mikhailovich Liapunov (۱۸۵۷-۱۹۱۸) یک ریاضیدان و مهندس مکانیک روس بود. رساله دکترای او ارزش جاودانه دارد که حاکی از استعداد کم نظیر اوست. این کار کلاسیک ابتدا در سال ۱۸۹۲ به زبان روسی به چاپ رسید، لیکن در حال حاضر ترجمه انگلیسی آن:

«Stability of Motion» Academic, New York, 1966

در دسترس است. لیاپونوف طی درگیریهایی در اودسا درگذشت، و این برای روشنفکری از طبقه متوسط در ناسامانیهای بعد از انقلاب روسیه امر عجیبی نبود.

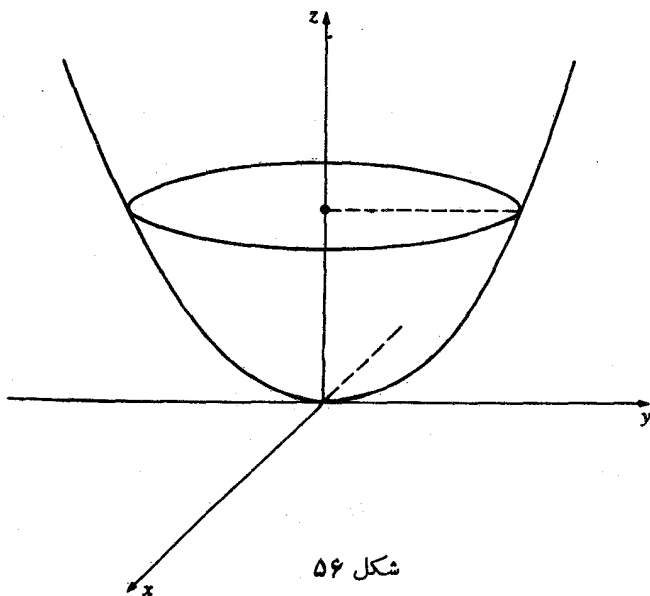
۲. همواره می توان هر نقطه بحرانی (x_0, y_0) را با یک انتقال ساده مختصات $\bar{x} = x - x_0$ و $\bar{y} = y - y_0$ به مبدأ انتقال داد، لذا چنانچه در آغاز فرض کنیم که نقطه بحرانی در مبدأ واقع شده است، از عمومیت مطلب کاسته نمی شود.

فرض می‌کنیم که $E(x, y)$ و مشتقات جزئی اول آن در ناحیه‌ای مشتمل بر مبدأ پیوسته باشند. اگر E در مبدأ صفر شود، یعنی $E(0, 0) = 0$ ، آنگاه می‌گویند که $E(x, y)$ مطلقاً مثبت است، اگر برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $E(x, y) > 0$ ، و به آن مطلقاً منفی گویند، اگر برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $E(x, y) < 0$. همین طور، E را نیم مطلق مثبت گویند، هرگاه $E(0, 0) = 0$ و برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ داشته باشیم $E(x, y) \geq 0$ ، و اگر $E(0, 0) = 0$ و برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ داشته باشیم $E(x, y) \leq 0$ ، E را نیم مطلق منفی می‌نامند. روشن است که توابعی به صورت $ax^{2m} + by^{2n}$ ، که در آنها a و b مقادیر ثابت و مثبت هستند و m و n اعداد صحیح و مثبت اند، مطلقاً مثبت هستند. چون $E(x, y)$ مطلقاً منفی است، اگر و تنها اگر $E(x, y) -$ مطلقاً مثبت باشد، توابعی به شکل $ax^{2m} + by^{2n}$ با $a < 0$ و $b < 0$ مطلقاً منفی اند. توابع x^{2m} ، y^{2n} و $(x - y)^{2m}$ مطلقاً مثبت نیستند، ولی با این وجود نیم مطلق مثبت اند. چنانچه $E(x, y)$ مطلقاً مثبت باشد، آنگاه $z = E(x, y)$ را می‌توان به عنوان معادله سطحی تعبیر کرد که به یک سهمی وار شباهت دارد (شکل ۵۶)، که در مبدأ بر صفحه xy مماس است و به طرف بالا باز می‌شود.

تابع مطلقاً مثبتی مانند $E(x, y)$ را که در آن عبارت

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \quad (3)$$

نیم مطلق منفی باشد، یک تابع لیاپونوف برای دستگاه (۱) می‌نامند. با توجه به رابطه (۲)،



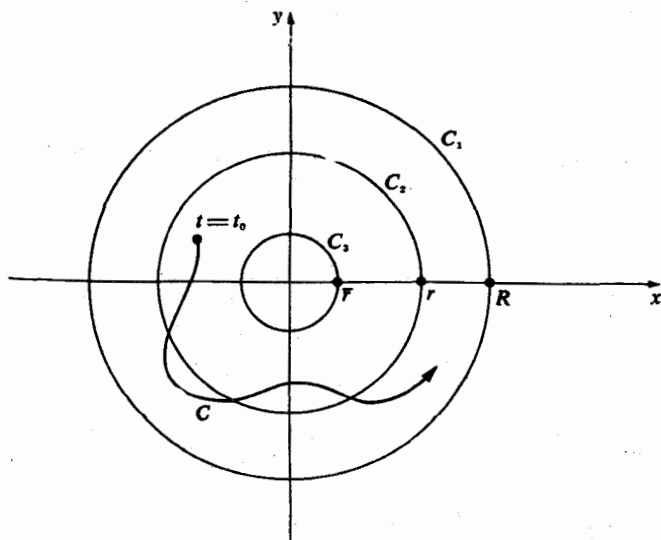
شکل ۵۶

شرط نیم مطلق منفی بودن (۳) به معنای آن است که در امتداد مسیر (۱) در حوالی مبدأ، $dE/dt \leq 0$ ، و بنا بر این E غیر صعودی باشد. این توابع به مفهوم انرژی کل یک دستگاه فیزیکی عمومیت می بخشند. رابطه این توابع با مسائل پایداری در قضیه زیر، که کشف اصلی لیاپونوف است روشن می گردد.

قضیه الف. چنانکه یک تابع لیاپونوف مانند $E(x, y)$ برای دستگاه (۱) وجود داشته باشد، آنگاه نقطه بحرانی $(0, 0)$ پایدار است. بعلاوه، اگر این تابع دارای این خاصیت هم باشد که تابع (۳) مربوطه مطلقاً منفی باشد، در آن صورت نقطه بحرانی $(0, 0)$ به طور مجانبی پایدار است.

اثبات. فرض می کنیم که C_1 دایره ای به شعاع $R > 0$ و به مرکز مبدأ مختصات باشد (شکل ۵۷)، و همچنین فرض می کنیم که C_1 آن قدر کوچک باشد که کاملاً در قلمرو تعریف تابع E واقع شود. چون $E(x, y)$ مطلقاً مثبت و پیوسته است، در C_1 دارای مینیمم مثبت m است. بعلاوه، $E(x, y)$ در مبدأ پیوسته است و در این نقطه صفر می شود، لذا عددی مثبت مانند $r < R$ می توان یافت به قسمی که وقتی (x, y) درون دایره C_r به شعاع r واقع است، $E(x, y) < m$. حال فرض می کنیم که $C = [x(t), y(t)]$ مسیری باشد که برای $t = t_0$ ، درون دایره C_r واقع است. پس $E(t_0) < m$ ، و چون (۳) نیم مطلق منفی است، داریم $dE/dt \leq 0$ و این نتیجه می دهد که برای تمام مقادیر $t > t_0$ می توان نوشت $E(t) \leq E(t_0) < m$. در نتیجه، برای هیچ $t > t_0$ ، مسیر C هرگز نمی تواند به C_1 برسد، پس پایداری موجود است.

برای اثبات قسمت دوم قضیه، کافی است نشان دهیم که تحت این فرض اضافی همچنین



شکل ۵۷

$E(t) \rightarrow 0$ ، زیرا چون $E(x, y)$ مطلقاً مثبت است، نتیجه می‌شود که مسیر C به نقطه بحرانی $(0, 0)$ میل می‌کند. مطلب را با مشاهده اینکه چون $dE/dt < 0$ در نتیجه $E(t)$ یک تابع نزولی است، آغاز می‌کنیم؛ و چون بنا به فرض $E(t)$ نمی‌تواند کمتر از صفر شود، نتیجه می‌گیریم که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $E(t)$ تابع $E(t)$ به حدی مانند $L \geq 0$ میل می‌کند. برای اثبات اینکه $E(t) \rightarrow 0$ کافی است نشان دهیم که $L = 0$. پس فرض می‌کنیم $L > 0$ و از آن به یک تناقض می‌رسیم. عدد مثبتی مانند $r < L$ را چنان اختیار می‌کنیم که هر گاه (x, y) درون دایره C_r به شعاع r واقع باشد، $E(x, y)$ کوچکتر از L شود. چون تابع (3) مطلقاً منفی و پیوسته است، در حلقه متشکل از دوایر C_1 و C_r و ناحیه بین آنها دارای یک ماکزیمم منفی $-k$ است. این حلقه، تمامی مسیر C را برای $t \geq t_0$ دربرمی‌گیرد، لذا معادله

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dE}{dt} dt$$

نامساوی

$$E(t) \leq E(t_0) - k(t - t_0) \quad (4)$$

را برای تمام مقادیر $t \geq t_0$ به دست می‌دهد. ولی وقتی $t \rightarrow \infty$ طرف راست (4) منهای بینهایت خواهد شد، بنابراین وقتی $t \rightarrow \infty$ داریم $E(t) \rightarrow -\infty$. این مطلب با این حقیقت که $E(x, y) \geq 0$ تناقض دارد، پس نتیجه می‌گیریم که $L = 0$ و اثبات کامل می‌گردد.

مثال ۱. معادله حرکت جسمی به جرم m و متصل به یک فنر را در نظر می‌گیریم:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (5)$$

در اینجا عدد ثابت $c \geq 0$ نمایشگر چسبندگی محیطی است که جسم در آن حرکت می‌کند، و $k > 0$ ثابت فنر است. دستگاه خود گردان معادل (5) چنین است

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y \end{cases} \quad (6)$$

که تنها نقطه بحرانی آن $(0, 0)$ است. انرژی جنبشی جسم $my^2/2$ است و انرژی پتانسیل آن (یا انرژی ذخیره شده در فنر) چنین است

$$\int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

بنابراین انرژی کل دستگاه برابر است با

$$E(x, y) = \frac{1}{\gamma} m y^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} k x^{\gamma} \quad (۷)$$

بسادگی می توان دریافت که (۷) مطلقاً مثبت است؛ و چون

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G &= kxy + my \left(-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y \right) \\ &= -cy^2 \leq 0 \end{aligned}$$

(۷) يك تابع لیاپونوف برای (۶) است و نقطه بحرانی (۰، ۰) پایدار است. از تمرین ۴۲-۴ می دانیم که وقتی $c > 0$ ، این نقطه بحرانی به طور مجانبی پایدار است، لیکن تابع لیاپونوف خاصی که در اینجا مورد بحث واقع شد، قادر به آشکارسازی ایسن حقیقت نیست.^۱

مثال ۰۲. دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y^2 \end{cases} \quad (۸)$$

دارای نقطه بحرانی منزوی (۰، ۰) است. حال سعی می کنیم با تشکیل يك تابع لیاپونوف به صورت $E(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ پایداری این دستگاه را به اثبات برسانیم. روشن است که

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G &= 2max^{2m-1}(-2xy) + 2nby^{2n-1}(x^2 - y^2) \\ &= (-2max^{2m}y + 2nbx^2y^{2n-1}) - 2nby^{2n+2} \end{aligned}$$

می خواهیم عبارت داخل پرانتز را صفر کنیم، و بررسی و تحقیق نشان می دهد که این کار با انتخاب $m=1$ ، $n=1$ ، $a=1$ ، و $b=2$ عملی است. با این انتخابها داریم $E(x, y) = x^2 + 2y^2$ (که يك تابع مطلقاً مثبت است) و

۱. معلوم شده است که همواره می توان هر دو خاصیت پایداری و پایداری مجانبی را توسط توابع لیاپونوف مناسب آشکار کرد، ولی اطلاع اصولی از وجود چنین توابعی با دستیابی به یکی از آنها تفاوت زیاد دارد. در مورد این نکته می توان به مراجع زیر نگاه کرد

L. Cesari, «Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations,» p. 111, Academic, New York, 1963;

یا
G. Sansone and R. Conti, «Non-Linear Differential Equations,» p.481, Macmillan, New York, 1964.

$$(\partial E / \partial x)F + (\partial E / \partial y)G = -4y^4$$

(که نیم مطلق منفی است). بنابراین نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه (۸) پایدار است. از این مثال روشن می شود که در وضعیت های پیچیده ممکن است یافتن توابع لیاپونوف مناسب واقعاً مشکل باشد. در رابطه با این موضوع، بعضی مواقع قضیه زیر مفید است.

قضیه ب. تابع $E(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ مطلقاً مثبت است، اگر و تنها اگر $a > 0$ و $b^2 - 4ac < 0$ و این تابع مطلقاً منفی خواهد بود، اگر و تنها اگر $a < 0$ و $b^2 - 4ac < 0$.

اثبات. اگر $y = 0$ ، داریم $E(x, 0) = ax^2$ ، پس برای $x \neq 0$ ، $E(x, 0) > 0$ ، اگر و تنها اگر $a > 0$. چنانچه $y \neq 0$ ، داریم

$$E(x, y) = y^2 \left[a \left(\frac{x}{y} \right)^2 + b \left(\frac{x}{y} \right) + c \right]$$

و وقتی $a > 0$ ، چند جمله ای بر حسب x/y داخل کروشه (که برای مقادیر بزرگ x/y مثبت است)، برای تمام مقادیر x/y مثبت است، اگر و فقط اگر $b^2 - 4ac < 0$. به این ترتیب قسمت اول قضیه به اثبات می رسد، و قسمت دوم قضیه بلافاصله از بررسی تابع $E(x, y) -$ نتیجه می شود.

تئوریم

۱- معین کنید که کدام يك از توابع زیر مطلقاً مثبت و کدام يك مطلقاً منفی اند و کدام نه مطلقاً مثبت و نه مطلقاً منفی اند:

$$\text{الف) } x^4 - xy - y^2 \quad \text{ج) } -2x^2 + 3xy - y^2$$

$$\text{ب) } 2x^2 - 3xy + 3y^2 \quad \text{د) } -x^2 - 4xy - 5y^2$$

۲- نشان دهید که تابعی به شکل $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ نمی تواند مطلقاً مثبت یا مطلقاً منفی باشد.

۳- نشان دهید که $(0, 0)$ نقطه بحرانی به طور مجانبی پایدار هر يك از دستگاه های زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = -x^2y^2 - y^3 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x^2 - y \\ \frac{dy}{dt} = x^5 - 2y^3 \end{cases} \quad \text{الف)$$

۴- اگر تابعی مانند $E(x, y)$ با خواص زیر وجود داشته باشد، ثابت کنید که نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه (۱) ناپایدار است.

الف) در ناحیه‌ای مشتمل بر مبدأ، تابع $E(x, y)$ پیوسته است و مشتقات جزئی اول پیوسته دارد؛

$$(ب) \quad E(0, 0) = 0;$$

ج) هر دایره به مرکز $(0, 0)$ حداقل حاوی یک نقطه است که در آن $E(x, y)$ مثبت است؛

د) تابع $(\partial E / \partial x)F + (\partial E / \partial y)G$ مطلقاً مثبت است.

۵- نشان دهید که $(0, 0)$ یک نقطه بحرانی ناپایدار برای دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy + x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -x^2 + y^5 \end{cases}$$

۶- فرض کنید که $f(x)$ تابعی است که $f(0) = 0$ ، و برای $x \neq 0$ ، $xf(x) > 0$ [یعنی، وقتی $x > 0$ ، $f(x) > 0$ و وقتی $x < 0$ ، $f(x) < 0$].

الف) نشان دهید که تابع زیر مطلقاً مثبت است:

$$E(x, y) = \frac{1}{4}y^4 + \int_0^x f(x)dx$$

ب) نشان دهید که نقطه $x = 0$ ، $y = dx/dt = 0$ یک نقطه بحرانی پایدار معادله زیر است:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$$

ج) چنانچه در یک همسایگی مبدأ $g(x) \geq 0$ ، نشان دهید که برای معادله

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) \frac{dx}{dt} + f(x) = 0$$

نقطه $x = 0$ ، $y = dx/dt = 0$ یک نقطه بحرانی پایدار است.

۴۴. نقاط بحرانی ساده دستگاههای غیر خطی
دستگاه خودگردان زیر و نقطه بحرانی متزوی $(0, 0)$ آنرا در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} dx/dt = F(x, y) \\ dy/dt = G(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

اگر بتوان $F(x, y)$ و $G(x, y)$ را برحسب سریهای توانی از x و y بسط داد، (۱) به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1x^2 + d_1xy + e_1y^2 + \dots \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2x^2 + d_2xy + e_2y^2 + \dots \end{cases} \quad (2)$$

هنگامی که $|x|$ و $|y|$ کوچک باشند - یعنی، وقتی (x, y) نزدیک مبدأ مختصات باشد - جملات درجه دوم و بالاتر خیلی کوچک اند. بنابراین، طبیعی است که این جملات غیرخطی را حذف کنیم و بپنداریم که رفتار کیفی مسیرهای (۲)، در نزدیکی نقطه بحرانی $(0, 0)$ ، با رفتار کیفی مسیرهای دستگاه خطی مربوطه، یعنی،

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \quad (3)$$

شبهت دارد. ملاحظه خواهیم کرد که عموماً واقعیت همین است. معمولاً روند قرار دادن دستگاه خطی (۳) به جای دستگاه (۲) را خطی کردن می نامند. به طور عمومی تر، دستگاههایی به شکل زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + g(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

و فرض می کنیم که

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5)$$

بنابراین، دستگاه خطی (۳) دارای نقطه بحرانی منزوی $(0, 0)$ است. فرض می کنیم که $f(x, y)$ و $g(x, y)$ برای تمام نقاط (x, y) پیوسته باشند و مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشند؛ همچنین فرض می کنیم که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، داریم

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (6)$$

مشاهده می کنیم که شرایط (۶) نتایج $f(0, 0) = 0$ و $g(0, 0) = 0$ را به دست می دهند،

پس (۰, ۰) يك نقطهٔ بحرانی (۴) است؛ همچنین اثبات اینکه این نقطهٔ بحرانی منزوی است مشکل نیست (تمرین ۱ را ملاحظه کنید). با شرایط فوق الذکر نقطهٔ (۰, ۰) را يك نقطهٔ بحرانی سادهٔ دستگاه (۴) می‌نامند.

مثال ۰۱. در مورد دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 3y + xy \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - 2xy^2 \end{cases} \quad (۷)$$

داریم،

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

پس (۵) برقرار است. بعلاوه، با استفاده از مختصات قطبی درمی‌یابیم که

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|r^2 \sin \theta \cos \theta|}{r} \leq r$$

و

$$\frac{|g(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|2r^3 \sin^2 \theta \cos \theta|}{r} \leq 2r^2$$

پس وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (یا وقتی $r \rightarrow 0$)، داریم $f(x, y)/r \rightarrow 0$ و $g(x, y)/r \rightarrow 0$. این نشان می‌دهد که شرایط (۶) نیز ارضا می‌شوند، پس (۰, ۰) يك نقطهٔ بحرانی سادهٔ دستگاه (۷) است.

حقایق اصلی راجع به ماهیت نقاط بحرانی ساده در قضیهٔ زیر (قضیهٔ پوانکاره) که ما آنرا بدون اثبات بیان می‌کنیم، ارائه شده است.^۱

۱. بحث و بررسی مفصل مربوط به این مطلب را می‌توان در کتابهای زیر یافت:

W. Hurewicz, «Lectures on Ordinary Differential Equations,» pp. 86-98, MIT, Cambridge, Mass., 1958; L. Cesari, «Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations,» pp. 157-163, Academic, New York, 1963;

یا

F. G. Tricomi, «Differential Equations,» pp. 53-72, Blackie, Glasgow, 1961.

قضیه الف. فرض می‌کنیم که $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی ساده دستگاه غیرخطی (۴) باشد، و دستگاه خطی مربوط به آن یعنی (۳) را در نظر می‌گیریم. چنانچه نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه (۳) در یکی از سه حالت اصلی مشروحه در بخش ۴۲ قرار گیرد، در آن صورت نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه (۴) از همان نوع خواهد بود.

برای روشن شدن موضوع، دستگاه غیرخطی (۷) مربوط به مثال ۱ را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دستگاه خطی مربوط به آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases} \quad (۸)$$

معادله کمکی (۸) عبارت است از $m^2 + m + 1 = 0$ ، که ریشه‌های آن

$$m_1, m_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

هستند. چون این ریشه‌ها مختلط مزدوج‌اند ولی موهومی محض نیستند، با حالت ج روبرو هستیم و نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه خطی (۸) يك نقطه حلزونی است. با توجه به قضیه الف، نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه غیرخطی (۷) نیز يك نقطه حلزونی است.

باید توجه داشت که درحالی که نوع نقطه بحرانی $(0, 0)$ برای دو دستگاه (۴) و (۳)، در مورد حالاتی که زیر پوشش قضیه فوق قرار دارند، یکسان است، ممکن است که شکل مسیرها کمی متفاوت باشند. مثلاً، شکل ۵۱ يك نقطه زینی نمونه را برای يك دستگاه خطی نشان می‌دهد، درحالی که شکل ۵۸ حاکی از شکل ظاهری احتمالی يك نقطه زینی غیرخطی است. واضح است که مقداری انحراف در شکل ۵۸ وجود دارد، لیکن با این وجود، جنبه‌های کیفی هردو آرایش یکسان‌اند.

طبیعی است که راجع به دو حالت خط مرزی که در قضیه الف ذکر نشد کنج‌آو شویم. حقایق بس‌دین قرارند: در صورتی که دستگاه خطی مربوطه (۳) در مبدأ يك گره خط مرزی داشته باشد (حالت د)، در آن صورت دستگاه غیرخطی (۴) می‌تواند دارای يك گره یا يك حلزونی باشد؛ و اگر (۳) در مبدأ يك مرکز داشته باشد (حالت ه)، آنگاه (۴) می‌تواند دارای يك مرکز یا يك حلزونی باشد. به عنوان مثال، $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی هریک از دستگاه‌های غیرخطی زیر است:

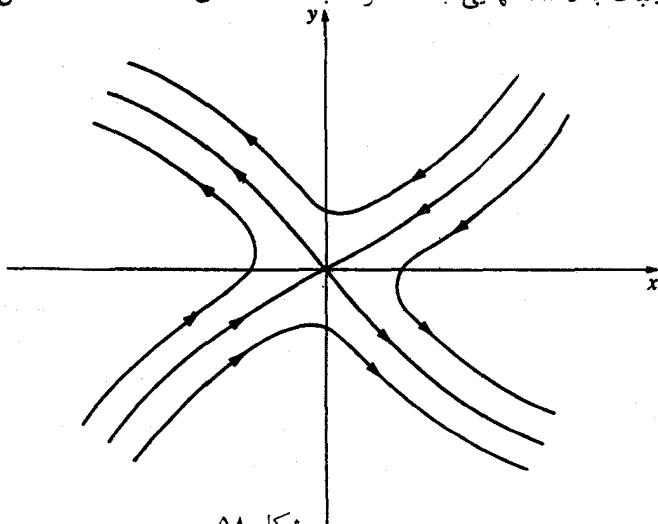
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (۹)$$

در هر يك از این حالتها ، دستگاه خطی مربوطه چنین است

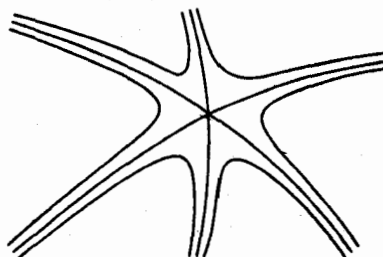
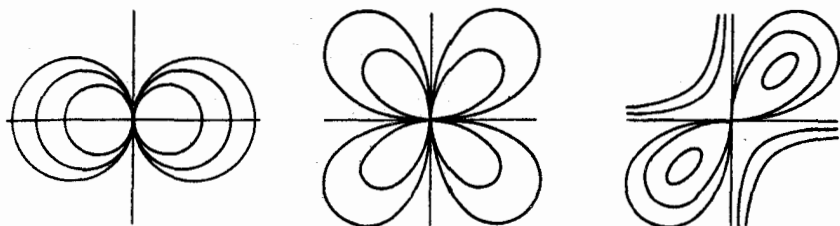
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (۱۰)$$

بسادگی درمی یابیم که $(0, 0)$ يك مركز برای (۱۰) است، ولسی می توان نشان داد ، درحالی که $(0, 0)$ برای اولین دستگاه (۹) يك مركز است، برای دومین دستگاه يك حلزونی است.^۱

قبلا با آرایشهای گوناگون قابل ملاحظه ای در نقاط بحرانی دستگاههای غیر خطی مواجه شده ایم ، و نکات بالا نشان می دهند که در نقاط بحرانی ساده دستگاههای غیر خطی هیچ پدیده جدیدی ظاهر نمی شود. راجع به نقاط بحرانی غیر ساده چه می توان گفت؟ بسا بررسی يك دستگاه غیر خطی به شکل (۲) می توان حالات ممکن در این مورد را به بهترین وجه ارزیابی کرد. اگر جملات خطی واقع در (۲) الگوی مسیرها را در نزد يك مبدأ مشخص نکنند، آنگاه باید جملات درجه دوم را در نظر گرفت؛ اگر این کار در تعیین الگوی مسیرها نتیجه ندهد، در آن صورت باید جملات درجه سوم را به حساب آورد، الی آخر. این بدان معناست که علاوه بر آرایشهای مربوط به حالت خطی حالت های متعدد دیگری با تنوع بی پایان و پیچیدگی ابهام انگیز می توانند ظاهر شوند. چند مورد از این حالات در شکل ۵۹ نشان داده شده اند. شاید تعجب کنید اگر پی ببرید که این گونه الگوهای مورد بحث می توانند در ارتباط با دستگاههایی با ظاهر نسبتاً ساده اتفاق افتند. مثلاً، سه شکل واقع در ردیف



شکل ۵۸



شکل ۵۹

بالای شکل ۵۹ نشان‌دهندهٔ آرایش مسیرهای دستگاه‌های زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 2xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2x^2y - y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y\sqrt{|xy|} \\ \frac{dy}{dt} = -y + 4x\sqrt{|xy|} \end{cases}$$

در حالت اول، این مطلب را می‌توان با مراجعهٔ مستقیم به شکل ۳ و معادلهٔ ۳-(۸) مشاهده کرد.

اکنون موضوع پایداری يك نقطهٔ بحرانی ساده را مورد بحث قرار می‌دهیم. در اینجا نتیجهٔ اصلی مرهون لیاپونوف است: در صورتی که (۳) در مبدأ به‌طور مجانبی پایدار باشد، در آن صورت (۴) نیز به‌طور مجانبی پایدار خواهد بود. این مطلب را به‌صورت دقیق زیر بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ب. فرض می‌کنیم که $(0, 0)$ يك نقطهٔ بحرانی سادهٔ دستگاه غیرخطی (۴) باشد، و

دستگاه خطی مربوطه (۳) را در نظر می گیریم. در صورتی که نقطه بحرانی (۰, ۰) دستگاه (۳) به طور مجانبی پایدار باشد، نقطه بحرانی (۰, ۰) دستگاه (۴) نیز به طور مجانبی پایدار است.

اثبات. با توجه به قضیه ۴۳-الف کافی است تابع لیاپونوف مناسب برای دستگاه (۴) را بسازیم، و همین کار را هم انجام می دهیم.

قضیه ۴۲-ب می گوید که ضرایب دستگاه خطی (۳) در شرایط زیر صدق می کنند:

$$p = -(a_1 + b_1) > 0 \quad \text{و} \quad q = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0 \quad (11)$$

حال تابع $E(x, y)$ را بدین صورت تعریف می کنیم

$$E(x, y) = \frac{1}{4}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

که ضرایب a و b و c چنین اند

$$a = \frac{a_1^2 + b_1^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{D}, \quad b = -\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{D}$$

و

$$c = \frac{a_1^2 + b_1^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{D}$$

که در آنها

$$D = pq = -(a_1 + b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

به کمک (۱۱)، درمی یابیم که $D > 0$ و $a > 0$. همچنین محاسبه ساده ای نشان می دهد که

$$\begin{aligned} D^2(ac - b^2) &= (a_1^2 + b_1^2)(a_1^2 + b_1^2) + (a_1^2 + b_1^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &\quad + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) + 2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 > 0 \end{aligned}$$

پس $ac - b^2 < 0$. بنابراین، با توجه به قضیه ۴۳-ب می دانیم که تابع $E(x, y)$ مطلقاً مثبت است. بعلاوه، محاسبه دیگری (که جزئیات آن به خواننده واگذار می شود) نتیجه می دهد که

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1 x + b_1 y) + \frac{\partial E}{\partial y}(a_2 x + b_2 y) = -(x^2 + y^2) \quad (12)$$

این تابع آشکاراً مطلقاً منفی است. پس $E(x, y)$ يك تابع لیاپونوف برای دستگاه خطی

(۳) است.

سپس، ثابت می‌کنیم که $E(x, y)$ يك تابع لیاپونوف برای دستگاه غیرخطی (۲) نیز هست. چنانچه F و G به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$F(x, y) = a_1 x + b_1 y + f(x, y)$$

و

$$G(x, y) = a_2 x + b_2 y + g(x, y)$$

در آن صورت چون می‌دانیم E مطلقاً مثبت است، کافی است نشان دهیم که

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \quad (۱۳)$$

مطلقاً منفی است. اگر (۱۲) را مورد استفاده قرار دهیم، آنگاه (۱۳) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$-(x^2 + y^2) + (ax + by)f(x, y) + (bx + cy)g(x, y)$$

و با به‌کار بردن مختصات قطبی، این عبارت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$-r^2 + r[(a \cos \theta + b \sin \theta)f(x, y) + (b \cos \theta + c \sin \theta)g(x, y)]$$

حال بزرگترین مقدار بین اعداد $|a|$ ، $|b|$ ، و $|c|$ را با K نشان می‌دهیم. برای تمام مقادیر به‌قدر کافی کوچک $r > 0$ ، فرض (۶) نتیجه می‌دهد که

$$|f(x, y)| < \frac{r}{\epsilon K}, \quad |g(x, y)| < \frac{r}{\epsilon K}$$

پس برای این r ها می‌توان نوشت

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G < -r^2 + \frac{4Kr^2}{\epsilon K} = -\frac{r^2}{3} < 0$$

بنابراین، $E(x, y)$ تابعی مطلقاً مثبت است با این خاصیت که (۱۳) مطلقاً منفی است. حال قضیه ۴۳-الف نتیجه می‌دهد که $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی به‌طور مجانبی پایدار دستگاه (۲) است، و اثبات کامل است.

برای روشن کردن این قضیه، مجدداً دستگاه غیرخطی (۷) در مثال ۱ را در نظر می‌گیریم که (۸) دستگاه خطی مربوط به آن است. در (۸) داریم $p = 1 > 0$ و $q = 1 > 0$ ، پس نقطه بحرانی $(0, 0)$ ، برای دستگاه خطی (۸) و دستگاه غیرخطی (۷)، هر دو، به‌طور مجانبی پایدار است.

۱. اکنون می‌توان به‌دلیل تعریف a ، b ، و c به‌صورت فوق پی‌برده می‌خواهیم (۱۲) برقرار باشد.

مثال ۳. از بخش ۴۰ می‌دانیم که معادله حرکت ارتعاشات میرای یک آونگ چنین

است

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{g}{a} \sin x = 0$$

که در آن c يك عدد ثابت مثبت است. دستگاه غیرخطی معادل با آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a} \sin x - \frac{c}{m} y \end{cases} \quad (14)$$

اکنون (۱۴) را بدین صورت می‌نویسیم

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a} x - \frac{c}{m} y + \frac{g}{a} (x - \sin x) \end{cases} \quad (15)$$

بسادگی می‌توان دید که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ،

$$\frac{x - \sin x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$$

زیرا هرگاه $x \neq 0$ ، می‌توان نوشت

$$\frac{|x - \sin x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x - \sin x|}{|x|} = \left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| \rightarrow 0$$

و چون $(0, 0)$ آشکارا يك نقطه بحرانی منزوی دستگاه خطی مربوطه یعنی

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a} x - \frac{c}{m} y \end{cases} \quad (16)$$

است، نتیجه می‌شود که $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی ساده دستگاه (۱۵) است. بررسی و تحقیق نشان می‌دهد $(p = c/m > 0 و q = g/a > 0)$ که $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی به‌طور مجانبی پایدار دستگاه (۱۶) است، پس با توجه به قضیه ب ، برای دستگاه (۱۵) نیز این نقطه‌ای بحرانی و به‌طور مجانبی پایدار خواهد بود. نتیجه فوق بازتاب این حقیقت

مسلم فیزیکی است که اگر آونگ کمی منحرف شود، حرکت حاصله با گذشت زمان از بین خواهد رفت.

تمرین

۱- ثابت کنید که اگر $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی ساده (φ) باشد، آنگاه این نقطه الزاماً منزوی است. راهنمایی: شرایط (ϵ) را به صورت $r = \epsilon \rightarrow 0$ و $f(x, y)/r = \epsilon_1$ و $g(x, y)/r = \epsilon_2 \rightarrow 0$ بنویسید، و با توجه به (δ) و به کمک مختصات قطبی به یافتن تناقضی با این فرض که هر دو طرف راست (φ) در نقاطی به دلخواه نزدیک به مبدأ ولی متفاوت با آن صفر می شوند، پردازید.

۲- دسته منحنیهایی را که معادله قطبی آنها $r = a \sin 2\theta$ است ترسیم کنید (شکل ۵۹ را ببینید)، و معادله دیفرانسیل این دسته منحنی را به شکل $dy/dx = G(x, y)/F(x, y)$ بیان کنید.

۳- اگر $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی ساده (φ) باشد و $q = a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$ در آن صورت از قضیه الف چنین برمی آید که $(0, 0)$ يك نقطه زینی دستگاه (φ) و بنابراین ناپایدار است. ثابت کنید که اگر $p = -(a_1 + b_1) < 0$ و $q = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$ ، آنگاه $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی ناپایدار برای (φ) است. راهنمایی: با تغییراتی در اثبات قضیه ب نشان دهید که يك تابع مطلقاً مثبت مانند $E(x, y)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1 x + b_1 y) + \frac{\partial E}{\partial y}(a_2 x + b_2 y) = x^2 + y^2$$

و آنرا در مورد تمرین ۳-۴ اعمال کنید. (توجه کنید که این حقایق همراه با قضیه ب نشان می دهند که اگر دستگاههای غیر خطی با نقاط بحرانی ساده و دستگاههای خطی مربوطه را در نظر بگیریم، تمام اطلاعات شکل (۵۵) راجع به پایداری مجانبی و ناپایداری این دستگاههای خطی مستقیماً به دستگاههای غیر خطی منتقل می شوند.)

۴- نشان دهید که $(0, 0)$ يك نقطه بحرانی به طور مجانبی پایدار دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^r \\ \frac{dy}{dt} = x - y^r \end{cases}$$

است، ولی برای دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^r \\ \frac{dy}{dt} = x + y^r \end{cases}$$

يك نقطهٔ بحرانی ناپایدار است.

چگونه این حقایق به نکتهٔ مذکور در داخل پرانتز تمرین (۳) مربوط می‌شوند؟

۵- تحقیق کنید که $(0, 0)$ نقطهٔ بحرانی ساده‌ای برای هر يك از دستگاه‌های زیر است، وماهیت و خواص پایداری آنرا تعیین کنید:

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x - y - 3x^2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y + y \sin x \end{array} \right. & \text{(ب)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y - 2xy \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y + 3y^2 \end{array} \right. & \text{(الف)} \end{array}$$

۶- معادلهٔ وان درپل

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

معادل دستگاه زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - \mu(x^2 - 1)y \end{array} \right.$$

خواص پایداری نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ را برای حالات $\mu > 0$ و $\mu < 0$ بررسی کنید.

۴۵. مکانیک غیر خطی. دستگاه‌های پایستار

امری است شناخته شده که وقتی دستگاه‌های دینامیکی حقیقی کار می‌کنند، انرژی معمولاً از طریق نوعی اصطکاک به‌دور می‌رود. ولی، در موارد خاص، این اتلاف انرژی آنقدر آهسته انجام می‌گیرد که می‌توان آنرا در فواصل زمانی نسبتاً کوتاه نادیده گرفت. در چنین حالاتی قانون بقای انرژی، یعنی، ثابت بودن مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل، رامی‌پذیریم. به دستگاه‌هایی از این نوع پایستار گفته می‌شود. بنا بر این زمین در حال دوران را در فواصل زمانی کوتاه، در حدود چند قرن، می‌توان پایستار در نظر گرفت، ولی اگر مایل باشیم رفتار زمین را در طول میلیون‌ها سال مورد مطالعه قرار دهیم، باید اتلاف انرژی در اثر اصطکاک جزر و مدی را به حساب آوریم.

ساده‌ترین دستگاه پایستار عبارت است از جسمی به جرم m که به يك فنر متصل باشد و در خلا در امتداد خط مستقیمی حرکت کند. اگر تغییر مکان m از موقعیت تعادلش را با x و نیروی بازگرداننده را که به وسیلهٔ فنر بر m اعمال می‌شود با $-kx$ — (که در آن $k > 0$) نشان دهیم، معادلهٔ حرکت بدین صورت خواهد بود

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

این نوع فنر را، که نیروی بازگرداننده اش تابعی خطی از x است، فنر خطی می نامند. چنانچه m در یک محیط مقاوم حرکت کند و نیروی مقاوم (یا نیروی میرایی) وارد بر m برابر با $-c(dx/dt)$ باشد که در آن $c > 0$ ، آنگاه معادله حرکت این دستگاه ناپایستار چنین است

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

در اینجا میرایی خطی است، زیرا نیروی میرایی تابعی خطی از dx/dt است. به طریق مشابه، اگر f و g توابعی اختیاری با خواص $f(0) = 0$ و $g(0) = 0$ باشند، آنگاه معادله کلیتر

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + g\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0 \quad (1)$$

را می توان به عنوان معادله حرکت جرم m ، که تحت تأثیر نیروی بازگرداننده $f(x)$ و نیروی میرایی $g(dx/dt)$ است، تفسیر کرد. عموماً، این نیروها غیرخطی اند، و معادله (۱) را می توان به عنوان معادله اساسی مکانیک غیرخطی تلقی کرد. در این بخش به بررسی اجمالی حالت خاصی از دستگاه پایستار غیرخطی به معادله

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0 \quad (2)$$

می پردازیم. در این حالت نیروی میرایی صفر است و در نتیجه اتلاف انرژی وجود ندارد. معادله (۲) با دستگاه خودگردان زیر معادل است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m} \end{cases} \quad (3)$$

۱. بحثهای گسترده درباره (۱)، همراه با کاربردهای آن در مسائل فیزیکی گوناگون را در کتابهای زیر می توان یافت:

J. J. Stoker, «Nonlinear Vibrations,» Interscience - Wiley, New York, 1950;

A. A. Andronow and C. E. Chaikin, «Theory of Oscillations,» Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

اگر dt را بین روابط بالا حذف کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای (۳) را در صفحهٔ فاز به دست می آوریم،

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{my} \quad (۴)$$

که می توان آن را بدین صورت نوشت

$$my dy = -f(x) dx \quad (۵)$$

اگر وقتی $t = t_0$ داشته باشیم $x = x_0$ و $y = y_0$ ، آنگاه انتگرال گیری (۵) از t_0 تا t نتیجه می دهد که

$$\frac{1}{2}my^2 - \frac{1}{2}my_0^2 = -\int_{x_0}^x f(x) dx$$

یا

$$\frac{1}{2}my^2 + \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2}my_0^2 + \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (۶)$$

برای تفسیر این نتیجه، مشاهده می کنیم که $\frac{1}{2}my^2 = \frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ انرژی جنبشی دستگاه دینامیکی و

$$V(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (۷)$$

انرژی پتانسیل آن است. بنابراین، معادلهٔ (۶) بیانگر قانون بقای پایستگی انرژی است،

$$\frac{1}{2}my^2 + V(x) = E \quad (۸)$$

که در آن $E = \frac{1}{2}my_0^2 + V(x_0)$ انرژی کل ثابت دستگاه است. واضح است که (۸) معادلهٔ مسیرهای (۳) است، زیرا آن را از حل (۴) به دست آوردیم. مسیر خاصی که به ازای مقدار مشخصی از E تعیین می شود، در فضای فاز، یک منحنی با انرژی ثابت خواهد بود. نقاط بحرانی دستگاه (۳) نقاط $(x_0, 0)$ هستند که در آن x_0 ها ریشه های معادلهٔ $f(x) = 0$ هستند. همان طور که در بخش ۴ یادآور شدیم، اینها نقاط تعادل دستگاه دینامیکی بیان شده توسط (۲) هستند. از دستگاه (۴) روشن است که مسیر، محور x ها را با زاویهٔ قائمه قطع می کنند و در محل تلاقی با خطوط $x = x_0$ افقی اند. معادلهٔ (۸) همچنین نشان می دهد که مسیرها نسبت به محور x متقارن اند،

چنانچه (۸) را به شکل زیر بنویسیم

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \quad (۹)$$

آنگاه مسیرها را می توان طی مراحل آسان زیر رسم کرد. نخست یک صفحهٔ xz را طوری

مشخص کنید که امتداد محور z ها همان امتداد قائم محور y ها در صفحه z فاز باشد (شکل ۶۰). بعد، نمودار $z = V(x)$ و چندین خط $z = E$ را در صفحه xz ترسیم کنید، (یکی از این خطوط در شکل نشان داده شده است)، و به مفهوم هندسی اختلاف $E - V(x)$ توجه کنید. سرانجام، به ازای هر مقدار x ، مقدار $E - V(x)$ را که در مرحله قبل به دست آورده اید در $m/2$ ضرب کنید و برای یافتن مقادیر y مربوطه در صفحه z فاز که مستقیماً زیر آن است، از رابطه (۹) استفاده کنید. توجه داشته باشید که چون $dx/dt = y$ ، جهت مثبت هر مسیر در بالای محور x ها به طرف راست و در زیر محور x ها به طرف چپ است.

مثال ۱. در بخش ۴۰ دیدیم که معادله حرکت آونگ نامیرا

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \sin x = 0 \quad (10)$$

است که در آن k عدد ثابت مثبتی است. چون این معادله به شکل (۲) است، آن را می توان به عنوان مبین حرکت مستقیم الخط نامیرای جسمی به جرم واحد تعبیر کرد که تحت تأثیر یک فنر غیر خطی با نیروی بازگرداننده $-k \sin x$ واقع شده است. دستگاه خودگردان معادل با (۱۰) چنین است

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -k \sin x \end{cases} \quad (11)$$

و نقاط بحرانی آن عبارت اند از $(0, 0)$ ، $(\pm\pi, 0)$ ، $(\pm 2\pi, 0)$ ، معادله دیفرانسیل مسیره ها چنین است

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k \sin x}{y}$$

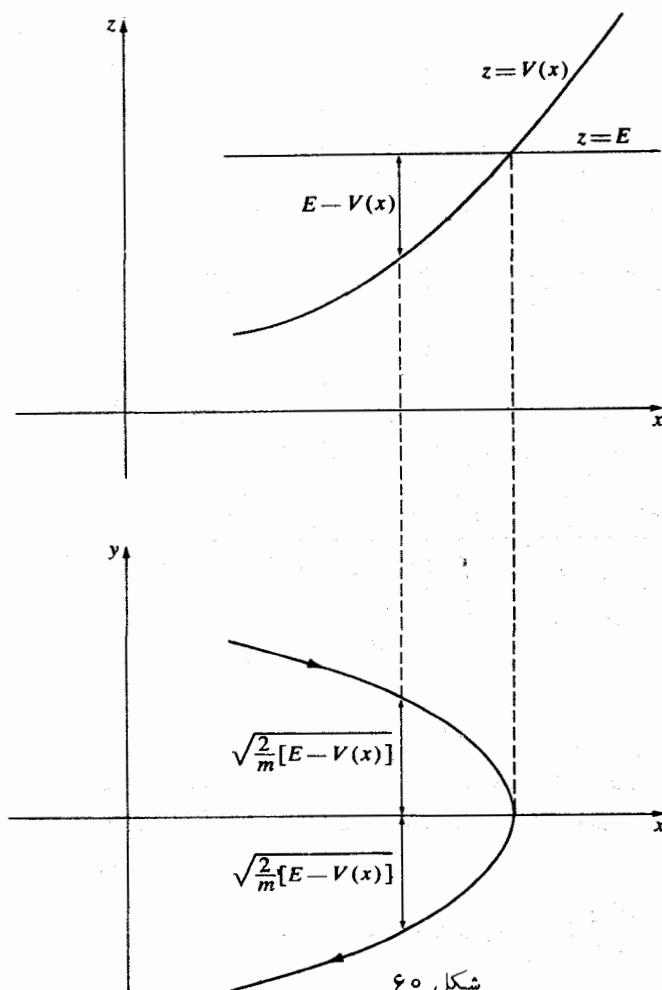
با جدا کردن متغیرها و انتگرال گیری از رابطه اخیر، مشاهده می کنیم که معادله دسته مسیره ها به صورت زیر است

$$\frac{1}{2}y^2 + (k - k \cos x) = E$$

واضح است که این رابطه به صورت (۸) است، در اینجا $m = 1$ و انرژی پتانسیل برابر است با

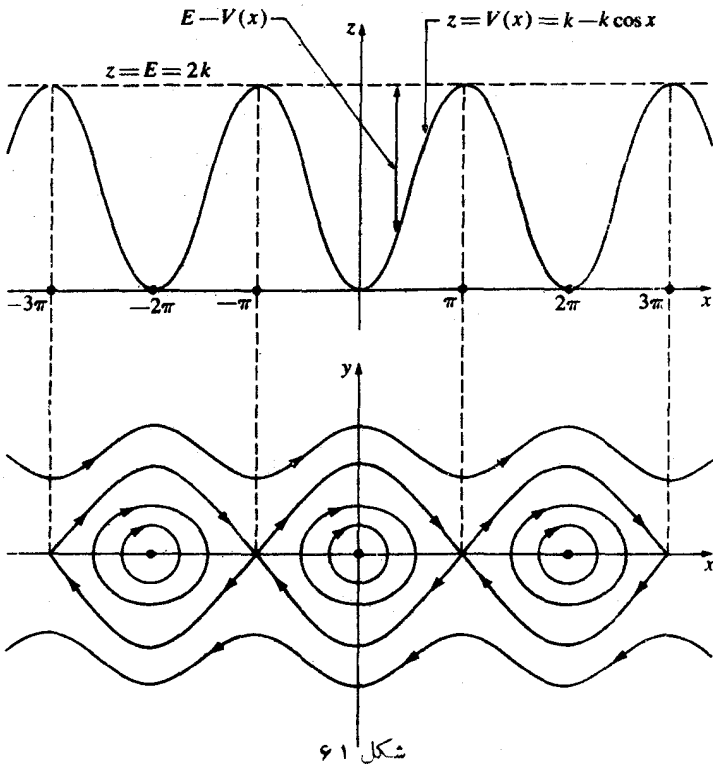
$$V(x) = \int_0^x f(x) dx = k - k \cos x$$

حال، ابتدا با ترسیم نمودار $z = V(x)$ و چندین خط $z = E$ در صفحه xz ، مسیره ها را رسم می کنیم (شکل ۶۱)، که در آن فقط خط $z = E = 2k$ نشان داده شده است. سپس مقادیر



شکل ۶۰

$E - V(x)$ را از اینجا می‌خوانیم و با استفاده از رابطه $y = \pm \sqrt{2[E - V(x)]}$ مسیرها را در صفحه فاز، که مستقیماً زیر صفحه xz واقع است، ترسیم می‌کنیم. از این رخساره فاز روشن است که اگر انرژی کل E بین 0 و $2k$ باشد، آنگاه مسیرهای مربوطه بسته هستند و معادله (۱۰) دارای جوابهای دوره‌ای است. از طرف دیگر، چنانچه $E > 2k$ ، در آن صورت مسیر بسته نیست و جواب متناظر (۱۰) هم‌دوره‌ای نیست. مقدار $E = 2k$ دونوع حرکت را جدا می‌کند، و به همین دلیل هر مسیر متناظر با $E = 2k$ را یک منحنی جداکننده می‌نامند. مسیرهای موجی خارج جداکننده‌ها با حرکت‌های چرخشی آونگ، و مسیرهای بسته درون آنها با حرکت‌های نوسانی آونگ مطابقت دارند. واضح است که نقاط بحرانی متناوباً نقاط زینی ناپایدار و مرکزهای پایدار ولی نه به‌طور مجانب پایدار، هستند. برای



شکل ۶۱

مقایسه، جالب است که با افزودن یک نیروی میرای خطی، اثر تبدیل این دستگاه دینامیکی پایدار را به یک دستگاه ناپایدار در نظر بگیریم. در این صورت معادله حرکت به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k \sin x = 0, \quad c > 0$$

و آرایش مسیرها در شکل ۶۲ ارائه شده است. درمی یابیم که مراکز شکل ۶۱ به حلزونیهایی به طور مجانبی پایدار تبدیل می شوند، و همچنین همه مسیرها به استثنای جدا کننده ها که وقتی $t \rightarrow \infty$ به نقاط زینی وارد می شوند در نهایت به درون یکی از این حلزونیه ها می پیچند.

تمرین

۱- در صورتی که $f(0) = 0$ ، و برای $x \neq 0$ ، داشته باشیم $x f(x) > 0$ ، نشان دهید که مسیرهای معادله

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0$$

منحنیهای بسته‌ای هستند که مبدأ مختصات در صفحه فاز را احاطه می‌کنند؛ یعنی، نشان‌دهید که نقطه بحرانی $y = dx/dt = 0$ ، $x = 0$ يك مرکز پایداری است ولی به‌طور مجانبی پایدار نیست. ماهیت و پایداری این نقطه بحرانی را، در صورتی که $f(0) = 0$ و برای $x \neq 0$ داشته باشیم $xf(x) < 0$ ، تشریح کنید.

۲- اکثر فنرهای واقعی خطی نیستند. يك فنر غیرخطی را سخت یا نرم گویند بسته به اینکه بزرگی نیروی بازگرداننده سریعتر یا کندتر از يك تابع خطی تغییر مکان افزایش یابد. معادله

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx + \alpha x^3 = 0, \quad k > 0$$

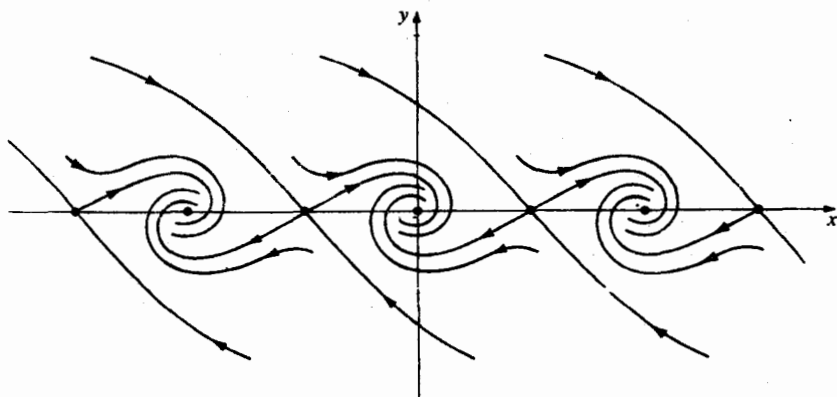
برای $\alpha > 0$ حرکت يك فنر سخت و برای $\alpha < 0$ حرکت يك فنر نرم را تشریح می‌کند. در هر حالت مسیرها را رسم کنید.

۳- معادله مسیرهای

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x + 2x^3 = 0$$

را بیابید و این مسیرها را در صفحه فاز ترسیم کنید. موقعیت نقاط بحرانی را مشخص و ماهیت هریک از این نقاط را تعیین کنید.

۴- چون با توجه به معادله (۷) داریم $dV/dx = f(x)$ ، نقاط بحرانی (۳) نقاطی هستند واقع بر محور x ها در صفحه فاز که در آنها $V'(x) = 0$. اگر منحنی $z = V(x)$ هموار و خوش رفتار باشد، برحسب این منحنی سه امکان وجود دارد: ماکزیمم‌ها، می‌نیمم‌ها و نقاط عطف. هر سه امکان را ترسیم کنید، و نوع نقطه بحرانی منسوب به هریک را تعیین کنید (نقطه بحرانی از نوع سوم نقطه بازگشت نامیده می‌شود).



۴۴. جوابهای دوره‌ای

قضیهٔ پوانکاره - بندیکسون^۱

دستگاه خود گردان غیر خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $F(x, y)$ و $G(x, y)$ در تمام صفحهٔ فاز پیوسته اند و مشتقات جزئی اول پیوسته دارند. در بحث ما تا بحال، بجز در همسایگی انواع خاصی از نقاط بحرانی، عملاً چیز دیگری راجع به مسیرهای (۱) بیان نشده است. ولی، در بسیاری مسائل، خواص سرتاسری مسیرها خیلی بیشتر از این خواص موضعی مورد توجه اند. خواص سرتاسری مسیرها خواصی هستند که رفتار مسیرها را در محدودهٔ وسیعی از صفحهٔ فاز بیان می کنند، و عموماً خیلی مشکل می توان به این خواص دست یافت.

مسئلهٔ اساسی نظریهٔ سرتاسری این است که تعیین کنیم آیا (۱) دارای مسیرهای بسته هست یا نه. همان طور که در بخش ۴۰ ملاحظه کردیم، اهمیت این مسئله، به خاطر ارتباط نزدیکش با مسئلهٔ وجود جوابهای دوره‌ای (۱) است. يك جواب $x(t)$ و $y(t)$ از (۱) را دوره‌ای گویند، اگر هیچ يك از این دو تابع ثابت نباشد، هر دو تابع برای تمام مقادیر t تعریف شده باشند، و عددی مانند $T > 0$ موجود باشد به طوری که برای تمام مقادیر t روابط $x(t+T) = x(t)$ و $y(t+T) = y(t)$ برقرار باشند. کوچکترین T با این خاصیت را دورهٔ تناوب این جواب می نامند.^۲ بدیهی است که هر جواب دوره‌ای (۱) مسیر بسته‌ای را تعریف می کند که، برای هر t_0 ، وقتی t از t_0 به $t_0 + T$ افزایش می یابد، این مسیر يك دور پیموده می شود. برعکس، بآسانی مشاهده می شود که اگر $C = [x(t), y(t)]$ يك مسیر بستهٔ (۱) باشد، آنگاه $x(t)$ ، $y(t)$ يك جواب دوره‌ای است. از این رو، جستجو برای جوابهای دوره‌ای (۱) به جستجوی مسیرهای بسته تبدیل می شود.

از بخش ۴۲ می دانیم که يك دستگاه خطی دارای مسیرهای بسته است، اگر فقط اگر ریشه‌های معادلهٔ کمکی موهومی محض باشند و در این حالت همهٔ مسیرها بسته اند. بنابراین، برای هر دستگاه خطی یا تمام مسیرها بسته اند و یا هیچ مسیری بسته نیست. از طرف دیگر، يك دستگاه غیر خطی بخوبی می تواند دارای يك مسیر بستهٔ منزوی باشد، بدین مفهوم که در نزدیک این مسیر بسته مسیرهای بستهٔ دیگری واقع نباشند. مثالی معروف از چنین دستگاهی، مثال زیر است:

1. Bendixson

۲. بدین معنی هر جواب دوره‌ای دارای يك دورهٔ تناوب است. چرا؟

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (۲)$$

برای حل این دستگاه از مختصات قطبی r و θ ، که در آن $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ استفاده می‌کنیم. اگر از طرفین روابط $x^2 + y^2 = r^2$ و $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ مشتق بگیریم، به فرمولهای مفید زیر دست می‌یابیم

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}, \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (۳)$$

با ضرب طرفین اولین معادله (۲) در x و طرفین دومین معادله (۲) در y ، و جمع نتایج حاصل، داریم

$$r \frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2) \quad (۴)$$

همین طور، اگر طرفین اولین معادله (۲) را در y و طرفین دومین معادله (۲) را در x ضرب و حاصلها را از هم کم کنیم، به دست می‌آوریم

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2 \quad (۵)$$

دستگاه (۲) دارای يك نقطه بحرانی در $r = 0$ است. چون تنها یافتن مسیرها مورد توجه ماست، می‌توان فرض کرد که $r > 0$. در این حالت، به کمک (۴) و (۵) دستگاه (۲) چنین می‌شود

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases} \quad (۶)$$

بآسانی می‌توان این معادلات را جداگانه حل کرد، و جواب عمومی دستگاه (۶) را به صورت زیر یافت

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}} \\ \theta = t + t_0 \end{cases} \quad (۷)$$

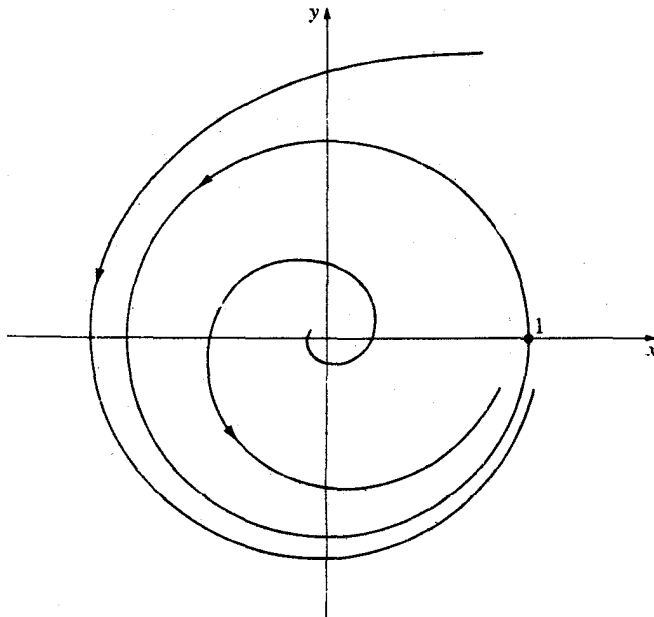
جواب عمومی متناظر دستگاه (۲) چنین است

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t+t_0)}{\sqrt{1+ce^{-t}}} \\ y = \frac{\sin(t+t_0)}{\sqrt{1+ce^{-t}}} \end{cases} \quad (۸)$$

حال (۷) را از لحاظ هندسی تحلیل می‌کنیم (شکل ۶۳). اگر $c=0$ ، جوابهای $r=1$ و $\theta=t+t_0$ را داریم که مسیر مستدیر بسته $x^2+y^2=1$ را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیمایند. اگر $c<0$ ، روشن است که $r>1$ و وقتی $t \rightarrow \infty$ داریم $r \rightarrow 1$. همچنین، اگر $c>0$ ، مشاهده می‌کنیم که $r<1$ ، و مجدداً وقتی $t \rightarrow \infty$ ، داریم $r \rightarrow 1$. این مشاهدات نشان می‌دهند که یک مسیر بسته واحد ($r=1$) وجود دارد که وقتی $t \rightarrow \infty$ تمام مسیرهای دیگر به طور حلزونی از خارج یا از داخل به آن میل می‌کنند.

در بحث بالا، با یافتن چنین مسیری نشان داده‌ایم که دستگاه (۲) دارای یک مسیر بسته است. البته، عموماً قادر به انجام چنین کاری نیستیم. چیزی که بدان نیاز داریم آزمونهایی است که به ما امکان این نتیجه‌گیری را بدهد که آیا نواحی معینی از صفحه فاز حاوی مسیرهای بسته هستند یا نیستند. نخستین آزمون در قضیه پوانکاره در زیر ارائه شده است. طرحی از اثبات این قضیه در تمرین (۱) آمده است.

قضیه الف. هر مسیر بسته دستگاه (۱) الزاماً حداقل یک نقطه بحرانی از این دستگاه را در بر می‌گیرد.



شکل ۶۳

این نتیجه یک محک منفی، با ارزشی نسبتاً محدود، به دست می‌دهد: دستگاهی که در ناحیه مفروضی فاقد نقاط بحرانی باشد، در آن ناحیه نمی‌تواند دارای مسیرهای بسته باشد. قضیه بعد که از بندیکسون^۱ است، محک منفی دیگری ارائه می‌کند.

قضیه ب. اگر در ناحیه معینی از صفحه فاز، $\partial F/\partial x + \partial G/\partial y$ همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آنگاه دستگاه (۱) در آن ناحیه نمی‌تواند دارای مسیرهای بسته باشد. اثبات. فرض می‌کنیم که این ناحیه شامل یک مسیر بسته R و $C = [x(t), y(t)]$ درون آن باشد. آنگاه از قضیه گرین و فرضهای ما چنین نتیجه می‌شود

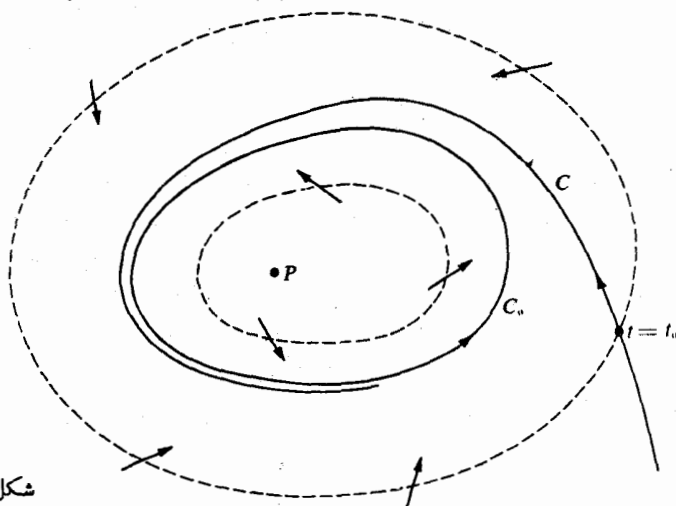
$$\int_C (F dy - G dx) = \iint_R \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy \neq 0$$

ولی در امتداد مسیر C داریم $dx = F dt$ و $dy = G dt$ ، پس

$$\int_C (F dy - G dx) = \int_0^T (FG - GF) dt = 0$$

این تناقض نشان می‌دهد که فرض اولیه ما غلط است، لذا ناحیه مورد بحث نمی‌تواند شامل مسیر بسته‌ای باشد.

بعضی مواقع این قضایا مفید واقع می‌شوند، ولی در واقع ما به محکهای مثبتی نیاز داریم که شرایطی کافی برای وجود مسیرهای بسته (۱) را ارائه کنند. یکی از چند قضیه کلی



۱. ایوار اوتو بندیکسون Ivar Otto Bendixson (۱۸۶۱-۱۹۳۵) یک ریاضیدان سوئدی بود که مقاله مهمی در سال ۱۹۰۱ منتشر کرد، که مکمل قسمتی از کار پیشین پوانکاره بود. او به عنوان استاد (و بعداً به عنوان رئیس) در دانشگاه استکهلم خدمت کرد، و مدتها عضو فعال شورای شهر استکهلم بود.

از این نوع، قضیه کلاسیک پوانکاره - بندیکسون است، که آن را بدون اثبات بیان می کنیم^۱.

قضیه ج. فرض می کنیم که در صفحه فاز، R عبارت از ناحیه ای کراندار و مرز آن باشد و R شامل هیچ نقطه بحرانی دستگاه (۱) نباشد. اگر $C = [x(t), y(t)]$ مسیری از (۱) باشد که برای يك مقدار t در R باشد و برای تمام مقادیر $t \geq t_0$ در R باقی بماند، آنگاه منحنی C یا خود مسیر بسته است و یا وقتی $t \rightarrow \infty$ ، به طرف مسیر بسته ای می پیچد. بنابراین در هریک از این حالات دستگاه (۱) دارای مسیری بسته در R است.

برای درک این مطلب، وضعیت مربوط به شکل ۶۴ را در نظر می گیریم. در اینجا R عبارت است از دو منحنی نقطه چین و ناحیه ای حلقه ای شکل واقع در بین آنها. فرض می کنیم که بردار

$$V(x, y) = F(x, y)i + G(x, y)j$$

در هر نقطه مرزی متوجه درون R باشد. آنگاه هر مسیری مانند C ماربر يك نقطه مرزی ($t = t_0$) باید به R وارد شود و هرگز نمی تواند آن را ترك کند، و تحت این شرایط قضیه فوق می گوید که C باید به طرف مسیر بسته ای همچون C_0 پیچد. برای تشریح قضیه، ناحیه حلقه ای شکل R را برگزیده ایم، چرا که مسیر بسته ای مانند C_0 باید يك نقطه بحرانی (نقطه P در شکل) را احاطه کند و در R نباید نقاط بحرانی وجود داشته باشند.

دستگاه (۲) کاربرد ساده ای از این مطالب را عرضه می کند. روشن است که (۲) دارای يك نقطه بحرانی در $(0, 0)$ است، و ناحیه R واقع بین دایره $r = 1/2$ و $r = 2$ شامل هیچ نقطه بحرانی نیست. در تحلیل پیشین دریافته ایم که

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad r > 0 \text{ برای}$$

این نشان می دهد که روی دایره درونی $dr/dt > 0$ و روی دایره بیرونی $dr/dt < 0$ ، لذا بردار V در تمام نقاط مرزی متوجه درون R است. بنابراین هر مسیر ماربر يك نقطه مرزی به R وارد خواهد شد و وقتی $t \rightarrow \infty$ ، در R باقی می ماند، و بنابر قضیه پوانکاره - بندیکسون می دانیم که R شامل مسیر بسته ای مانند C_0 است. قبلاً ملاحظه کرده ایم که دایره $r = 1$ مسیری بسته است که وجودش بدین طریق تضمین می شود.

از لحاظ نظری قضیه پوانکاره - بندیکسون کاملاً پذیرفتنی است، ولی عموماً کاربرد آن نسبتاً مشکل است. محک عملی تری ارائه شده است که وجود مسیرهای بسته را برای معادلاتی به شکل

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (9)$$

۱. برای جزئیات این قضیه به صفحات ۱۰۲ تا ۱۱۱ کتاب Hurewicz، یا به صفحات ۱۶۳ تا ۱۶۷ کتاب Cesari مراجعه کنید.

که به معادلهٔ لیناردا موسوم است، تضمین می‌کند. هنگامی که از مسیر بسته‌ای برای چنین معادله‌ای صحبت می‌کنیم، البته منظورمان مسیر بسته‌ای از دستگاه معادلاتش

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y \end{cases} \quad (10)$$

است و همان طور که می‌دانیم، هر مسیر بسته (۱۰) با یک جواب دوره‌ای (۹) مطابقت دارد. مطلب اساسی راجع به مسیرهای بسته (۹) قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۵. (قضیهٔ لینار.) فرض می‌کنیم که توابع $f(x)$ و $g(x)$ شرایط زیر را ارضاکنند: (۱) برای تمام مقادیر x ، هر دو تابع پیوسته و دارای مشتقات پیوسته هستند؛ (۲) $g(x)$ تابع فردی است که برای $x > 0$ داریم $g(x) > 0$ ، و $f(x)$ یک تابع زوج است؛ و (۳) تابع فرد $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ تنها یک صفر مثبت در $x = a$ دارد، و برای $x < a$ منفی، و برای $x > a$ مثبت و غیر نزولی است، و وقتی $x \rightarrow \infty$ داریم $F(x) \rightarrow \infty$. آنگاه معادلهٔ (۹) دارای مسیر بسته منحصر به فردی است که در صفحهٔ فاز مبدأ مختصات را احاطه می‌کند، و وقتی $t \rightarrow \infty$ ، هر مسیر دیگر به طور حلزونی به این مسیر میل می‌کند.

به خاطر خوانندهٔ شگاک و سخت‌گیری که بحق مطالب بی‌پشتوانه را با اکراه می‌پذیرد، اثباتی از این قضیه را در پیوست ب آورده‌ایم. در کی شهودی از نقش فرضهای فوق‌الذکر را می‌توان با در نظر گرفتن (۹) از دیدگاه مفاهیم بخش قبل به دست آورد. از این دیدگاه، معادلهٔ (۹) معادلهٔ حرکت جسمی است به جرم واحد و متصل به یک فنر که تحت تأثیر دو گانۀ نیروی بازگردانندهٔ $-g(x)$ و نیروی میرایی $-f(x)dx/dt$ قرار دارد. فرض راجع به $g(x)$ معادل با آن است که بگوییم فنر آنچنانکه انتظار داریم عمل می‌کند، و گرایش به کم کردن اندازهٔ تغییر مکان دارد. از طرف دیگر، فرضهای راجع به $f(x)$ (که اجمالامی گوید $f(x)$ برای مقادیر کوچک $|x|$ منفی و برای مقادیر بزرگ $|x|$ مثبت است) بدان معناست که برای مقادیر کوچک $|x|$ حرکت شدیدتر می‌شود و برای مقادیر بزرگ $|x|$ ، حرکت کندتر می‌گردد، و بنا بر این تمایل به برقراری نوسانی ماندگار دارد. این رفتار نسبتاً عجیب $f(x)$

۱. آلفرد لینار Alfred Liénard (۱۸۶۹-۱۹۵۸) دانشمند فرانسوی بود که بیشترین اوقات کار خود را وقف تدریس فیزیک کاربرده در مدرسهٔ معدن پاریس کرد و در سال ۱۹۲۹ مدیر این مدرسه شد. پژوهشهای فیزیکی او عمدتاً در زمینهٔ الکتریسیته و مغناطیس، کشسانی و هیدرودینامیک بود. گهگاهی روی مسائل ریاضی که در سایر بررسیهای علمی او ظاهر می‌شدند کار می‌کرد، و در سال ۱۹۳۳ به ریاست انجمن ریاضی فرانسه برگزیده شد. او فردی مجرد و بی‌ادعا بود که تمام عمر خود را وقف کار و دانشجویانش کرد.

این طور نیز می توان توصیف کرد که این دستگاه فیزیکی، وقتی $|x|$ کوچک باشد، انرژی جذب می کند و وقتی $|x|$ بزرگ باشد، انرژی از دست می دهد. کاربرد عمده قضیه لینار در معادله وان در پل^۱ است

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (11)$$

که در آن، به دلایل فیزیکی، μ عددی ثابت و مثبت فرض می شود. در اینجا $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ و $g(x) = x$ ، پس شرط (۱) آشکارا ارضا می گردد. شرط (۲) نیز به همان روشی برقرار است. چون

$$F(x) = \mu \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) = \frac{1}{3} \mu x (x^2 - 3)$$

مشاهده می کنیم که تابع $F(x)$ تنها يك صفر مثبت در $x = \sqrt{3}$ دارد و این تابع برای $0 < x < \sqrt{3}$ منفی، و برای $x > \sqrt{3}$ مثبت است، و وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $F(x) \rightarrow \infty$. سرانجام، $F'(x) = \mu(x^2 - 1)$ برای $x > 1$ مثبت است، لذا تابع $F(x)$ ، برای $x > \sqrt{3}$ یقیناً غیر نزولی (و در واقع صعودی) است. از این رو، کلیه شرایط قضیه ارضا می شود، و نتیجه می گیریم که معادله (۱۱) دارای يك مسیر بسته منحصر به فرد (جواب دوره ای) است که هر مسیر دیگری (هر جواب غیر صفر) حلزون وار (به طور مجانبی) به آن میل می کند.

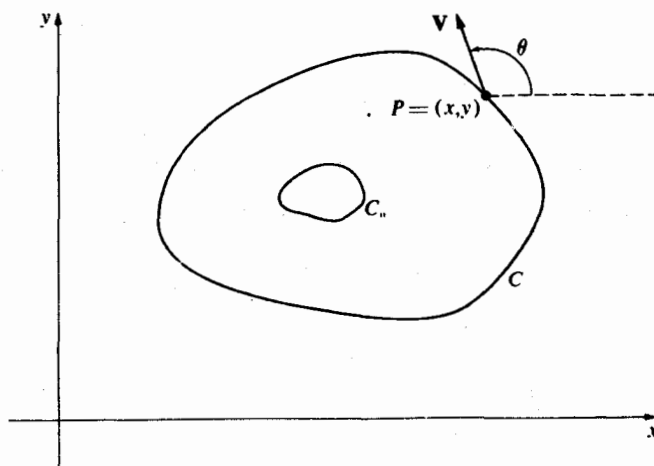
تمرین

۱- اثباتی برای قضیه الف را می توان بر اساس ایده های هندسی زیر بنا نهاد (شکل ۶۵) فرض کنید که C يك منحنی بسته ساده (نه الزاماً يك مسیر) در صفحه فاز باشد، و فرض کنید که C از هیچ نقطه بحرانی دستگاه (۱) نگذرد. در صورتی که $P = (x, y)$ نقطه ای واقع بر C باشد،

$$V(x, y) = F(x, y)i + G(x, y)j$$

يك بردار غیر صفر است، و بنابراین دارای جهت معینی است که به وسیله زاویه θ مشخص می گردد. اگر P ، در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت، حول C يك دور بزنند، زاویه θ به میزان $\Delta\theta = 2\pi n$ تغییر می کند، در اینجا n يك عدد صحیح مثبت، صفر، یا يك عدد صحیح منفی است. این عدد صحیح n را اندیس C می نامند. چنانچه C به طور پیوسته، بدون عبور از يك نقطه بحرانی، به يك منحنی بسته ساده کوچکتر C_0 منقبض گردد، آنگاه، اندیس آن به طور پیوسته تغییر می کند؛ و چون اندیس عددی صحیح

۱. بالتازار وان در پل (Balthasar van der Pol ۱۸۸۹ -)، دانشمند دانمارکی، متخصص در جنبه های نظری مهندسی رادیو، و اولین کسی بود که در دهه ۱۹۲۰ میلادی معادله (۱۱) را مورد مطالعه قرارداد، و از طریق آن لینار و دیگران را به پژوهش در نظریه ریاضی نوسانات خود نگهدار در مکانیک غیر خطی برانگیخت.



شکل ۶۵

است، نمی تواند تغییر کند.

الف) اگر C مسیر بسته ای از (۱) باشد، نشان دهید که اندیس آن ۱ است.

ب) چنانچه C مسیر بسته ای از (۱) باشد که شامل هیچ نقطه بحرانی نیست، نشان دهید که يك منحنی کوچک C دارای اندیس ۰ است، و از این مطلب قضیه الف را نتیجه بگیرید.

۲- دستگاه خودگردان غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 4y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

الف) دستگاه را به مختصات قطبی بپسید.

ب) قضیه پوانکاره - بندیکسون را به کار ببرید و نشان دهید که يك مسیر بسته بین دواير $r=1$ و $r=3$ وجود دارد.

ج) جواب غیر ثابت عمومی $x=x(t)$ و $y=y(t)$ از دستگاه اولیه را بیابید، و از آن برای به دست آوردن يك جواب دوره ای متناظر با مسیر بسته ای که وجودش در حالت (ب) ثابت شد استفاده کنید.

د) مسیر بسته وحدافل دو مسیر دیگر را در صفحه فاز ترسیم کنید.

۳- نشان دهید که دستگاه خودگردان غیرخطی زیر دارای يك جواب دوره ای است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y - xe^{x^2+y^2} \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - ye^{x^2+y^2} \end{cases}$$

۴- در هر يك از حالات زیر، قضیه‌ای از این بخش را مورد استفاده قرار دهید و مشخص کنید که آیا معادله دیفرانسیل مفروض دارای جواب دوره‌ای هست یا نیست:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\delta x^4 - 9x^2) \frac{dx}{dt} + x^5 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (x^2 + 1) \frac{dx}{dt} + x^5 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - (1 + x^2) = 0 \quad (\text{ج})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 - 3x^3 = 0 \quad (\text{د})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^6 \frac{dx}{dt} - x^2 \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (\text{ه})$$

۵- نشان دهید که هر معادله دیفرانسیل به شکل

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (a, b, c > 0)$$

را می‌توان با يك تغییر متغیر مستقل به معادله وان درپل تبدیل کرد.

پیوست الف . پوانکاره

ژول هانری پوانکاره^۱ (۱۸۵۴-۱۹۱۲) در آغاز قرن بیستم در سطح جهانی به عنوان بزرگترین ریاضیدان نسل خود شناخته شد. در سال ۱۸۷۹ دوران دانشگاهی خود را در کان آغاز کرد، و تنها دو سال بعد به استادی دانشگاه سوربن منصوب شد. بقیه عمر خود را در آنجا به سربرد، و هر سال موضوع متفاوتی را تدریس کرد. در سخنرانیهایش - که توسط دانشجویان او ویرایش شد و به چاپ رسید - با ابتکار و تسلط فنی فراوان، در واقع تمامی زمینه‌های معروف ریاضیات محض و کار بسته، و بسیاری از زمینه‌هایی را که قبل از کشف توسط وی ناشناخته بودند، مورد بحث قرار داد. روی هم رفته بیش از ۳۰ کتاب فنی درباره فیزیک ریاضی و مکانیک سماوی، شش کتاب در سطح عامه فهم، و تقریباً ۵۰۰ مقاله پژوهشی

در ریاضیات نوشت. وی متفکری سریع الانتقال، قوی، و خستگی ناپذیر بود که به جزئیات نمی پرداخت و به قول یکی از معاصرانش «يك فاتح بود، نه يك استعمارگر». از موهبت حافظه عجیبی نیز برخوردار بود، و بر حسب عادت، در حین قدم زدن در اطاق مطالعه خود در مغزش به ریاضیات می پرداخت و فقط پس از آنکه آن را در ذهنش تکمیل می کرد، بر روی کاغذ می آورد. بیش از ۳۲ سال نداشت که به عضویت فرهنگستان علوم برگزیده شد. عضوی از فرهنگستان که او را برای عضویت پیشنهاد کرد گفت که «کارش مافوق تمجید عادی است، و لاجرم آنچه را که یاکوبی درباره آبل نوشت به یادمان می آورد: او مسایلی را حل کرده که قبل از خودش به تصور درنیامده بودند».

نخستین دستاورد بزرگ ریاضی پوانکاره در آنالیز بود. او با ابداع نظریه توابع خودریخت، مفهوم دوره‌ای بودن يك تابع را تعمیم داد. توابع مثلثاتی و نمایی مقدماتی، دوره‌ای یگانه و توابع بیضوی دوره‌ای دوگانه هستند. توابع خود ریخت پوانکاره تعمیم گسترده‌ای از این توابع را تشکیل می‌دهند، زیرا این توابع تحت يك گروه شمارای نامتناهی از تبدیلات کسری خطی، پایا هستند و نظریه غنی توابع بیضوی را به عنوان جزء در برمی گیرند. او از آنها برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب جبری استفاده کرد و همچنین نشان داد که چگونه می‌توان از این توابع در یکنواخت کردن منحنیهای جبری، یعنی، بیان مختصات هر نقطه واقع بر يك چنین منحنی بر حسب توابع تك مقداری $x(t)$ و $y(t)$ از يك پارامتر واحد t ، استفاده کرد. در دهه‌های ۱۸۸۰ و ۱۸۹۰ میلادی توابع خود-ریخت به صورت شاخه گسترده‌ای از ریاضیات درآمد که (علاوه بر آنالیز) به قلمروهای نظریه گروه‌ها، نظریه اعداد، هندسه جبری، و هندسه غیر اقلیدسی راه یافته است.

نکته اساسی دیگری از فکر پوانکاره را می‌توان در پژوهشهایش درباره مکانیک سماوی یافت (دو شهای نوین مکانیک سماوی - در سه جلد ۱۸۹۲-۱۸۹۹).^۱ در خلال این کار نظریه بسطهای مجانبی خود را ارائه کرد (که باعث توجه به سریهای واگرا شد)، پایداری مدارها را مطالعه کرد، و نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل غیر خطی را پایه گذاری کرد. بررسیهای مشهورش در بررسی تکامل اجسام سماوی او را به مطالعه اشکال تعادل جرم سیال در حال دورانی که ذراتش به وسیله جاذبه ثقلی به هم پیوسته است، هدایت کرد، و شکلهای گلابی واری را کشف کرد که بعداً در کار سر ج. ه. داروین (فرزند چارلز داروین)^۲ نقش مهمی ایفا کردند. پوانکاره، در خلاصه این کشفیات، می‌نویسد: «يك جسم سیال در حال دوران را که در اثر سرد شدن منقبض می‌گردد در نظرمی گیریم، ولی فرض می‌کنیم که این انقباض آنقدر آهسته صورت می‌گیرد که جسم همگن باقی می‌ماند و دوران کلیه قسمت‌های جسم یکسان است. شکل جسم که در ابتدا با تقریب زیاد کروی است به يك بیضوی دوار تبدیل می‌گردد که پهن تر و پهن تر می‌شود، آنگاه، در لحظه خاصی، به يك بیضوی با سه محور نابرابر تبدیل می‌شود.

1. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste

۲. کتاب زیر را ملاحظه کنید،

G. H. Darwin, «The Tides,» chap. XVIII, Houghton Mifflin, Boston 1899.

سپس، جسم از صورت بیضی وار خارج و به گلابی وار تبدیل می شود تا سرانجام جرم جسم، که در ناحیه کمر، بیشتر و بیشتر باریک می شود، به دو جسم مجزا و نابرابر تجزیه می شود. این ایده ها در عصر خود ما بیشتر مورد توجه قرار گرفته است، زیرا اخیراً متخصصین ژئوفیزیک به کمک اعمار مصنوعی دریافته اند که زمین خود اندکی گلابی شکل است.

بسیاری از مسائلی که پوانکاره در این دوره با آنها مواجه گردید بذره های شیوه های جدید تفکر بودند، که در ریاضیات قرن بیستم رشد کردند و شکوفا شدند. سریهای واگرا و معادلات دیفرانسیل غیرخطی را قبلاً متذکر شده ایم. علاوه بر آنها، کوشش او برای درک ماهیت منحنیها و سطوح در فضاهایی با ابعاد بالاتر منجر به مقاله مشهورش تحت عنوان تحلیل موضعی^۱ (توپولوژی) (۱۸۹۵) گردید، که همه افراد اهل فن متفقاً آن را آغاز تاریخ نوین در توپولوژی جبری می دانند. همچنین، در مطالعه خود در زمینه مدارهای دوره ای، رشته دینامیک توپولوژیکی (یا کیفی) را بنانهاد. در اینجا نوعی مسئله ریاضی مطرح می شود که نمایانگر آن، قضیه ای است که پوانکاره در سال ۱۹۱۲ میلادی مطرح کرد، ولی عمرش کفاف نداد تا آن را ثابت کند: چنانچه تبدیلی یک به یک و پیوسته، حلقه محصور بین دو دایره متحدالمرکز را چنان در خود تصویر کند که مساحتها حفظ شود و نقاط دایره درونی را در جهت حرکت عقربه های ساعت و نقاط دایره بیرونی را در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت به حرکت درآورد، آنگاه، در این تبدیل حداقل دو نقطه باید ثابت بمانند. این قضیه کاربردهای مهمی در مسئله کلاسیک سه جسم (و نیز در حرکت یک توپ بیلیارد بر روی میز بیلیارد محدب) دارد. در سال ۱۹۱۳ اثباتی برای این قضیه توسط یک ریاضیدان جوان آمریکایی به نام پیر کهوف^۲ یافته شد^۳. کشف قابل ملاحظه دیگر پوانکاره در این زمینه، که امروزه به قضیه بازگشت پوانکاره معروف است، به رفتار دراز مدت دستگاههای دینامیکی پایستار مربوط می شود. به نظر می رسد که این نتیجه، بیهودگی کوششهای اخیر در به دست آوردن قانون دوم ترمودینامیک از مکانیک کلاسیک را نشان می دهد، و مباحثه ناشی از آن مأخذ تاریخی نظریه ارگودیک^۴ نوین بوده است.

یکی از برجسته ترین خدمات فراوان پوانکاره به فیزیک ریاضی، مقاله مشهورش در سال ۱۹۰۶ درباره دینامیک الکترن بود. او سالهای زیادی راجع به شالوده های فیزیک فکر کرده بود، و مستقل از اینشتین بسیاری از نتایج مربوط به نظریه نسبیت خاص را به دست آورده بود^۵. فرق اساسی در این بود که بررسی اینشتین متکی بر ایده های

1. Analysis situs

2. Birkhoff

۳. کتاب زیر را ملاحظه کنید،

G. D. Birkhoff, «Dynamical Systems,» chap. VI, American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. IX Providence, R.I., 1927.

4. Ergodic theory

۵. بحثی در مورد زمینه های تاریخی این مطلب در مقاله زیر آمده است:

Charles Scribner, Jr., Henri Poincaré and the Principle of Relativity, *Am. J. Phys*, vol. 32, p. 672, 1964.

مقدماتی مربوط به علامتهای نوری بود، حال آنکه بررسی پوانکاره بر پایه نظریه الکترو-مغناطیس بنا شده بود و بنابراین از نظر کاربردی به پدیدههای مربوط به این نظریه محدود بود. پوانکاره احترام زیادی برای استعداد اینشتین قایل بود، و در سال ۱۹۱۱ انتصاب اینشتین را به اولین سمت دانشگاهی اش توصیه کرد.^۱

در سال ۱۹۰۲ به عنوان يك سرگرمی جنبی، و ضمن کوششی برای سهم کردن افراد غیر متخصص در اشتیاق خود به معنا و اهمیت انسانی ریاضیات و علوم، به نویسندگی و سخنرانی برای اقشار وسیعتری از مردم روی آورد. این کارهای سبکتر او در چهار کتاب تحت عناوین علم و فرضیه^۲ (۱۹۰۳)، ارزش علم^۳ (۱۹۰۴)، علم و روش^۴ (۱۹۰۸) و آخرین اندیشه‌ها^۵ (۱۹۱۳) گردآوری شده‌اند.^۶ این کتابها واضح، لطیف، عمیق، و رویهمرفته لذت بخش هستند، و نشان می‌دهند که پوانکاره یکی از بهترین نثر نویسان فرانسه است. در مشهورترین این مقالات، یعنی مقاله مربوط به کشف ریاضی، او به خویشتن نگریست و فرایندهای مغزی خود را تحلیل کرد، و با انجام این کار تصاویر نادری از مغز يك نابغه در هنگام کار را، عرضه کرد. همانطور که ژوردن^۷ درسو گنامه پوانکاره نوشت، «یکی از دلایل فراوان جاودانگی پوانکاره این است که به ما امکان داد تا در عین اینکه او را می‌ستاییم، وی را بشناسیم.»

گفته می‌شود که در حال حاضر دانش ریاضی هر ده سال یا در این حدود، دو برابر می‌شود، هر چند که عده‌ای راجع به تداوم این مقدار انباشتگی تردید دارند. عموماً اعتقاد بر این است که اکنون برای هراسانی امکان درك کامل بیش از يك یا دو شاخه از چهار شاخه اصلی ریاضیات، یعنی آنالیز، جبر، هندسه و نظریه اعداد، (بدون احتساب فیزیک ریاضی) وجود ندارد. پوانکاره تسلط خلاقیتی بر تمام ریاضیات زمان خود داشت، و احتمالاً پس از او هرگز کسی به این مقام نخواهد رسید.

پیوست ب. اثبات قضیه لینار

معادله لینار را در نظر می‌گیریم

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (1)$$

و فرض می‌کنیم که $f(x)$ و $g(x)$ شرایط زیر را ارضا می‌کنند: (آ) توابع $f(x)$ و $g(x)$

۱. کتاب زیر را ملاحظه کنید،

M. Lincoln Schuster (ed.), «A Treasury of the World's Great Letters», p. 453, Simon and Schuster, New York, 1940.

2. La Science et l'Hypothèse 3. La Valeur de la Science

4. Science et Méthode 5. Dernières Pensées

۶. کلیه این کتابها، به وسیله Dover Publications, New York به زبان انگلیسی ترجمه و چاپ گردیده‌اند.

7. Jourdain

پیوسته‌اند و مشتقات پیوسته دارند؛ (۲) $g(x)$ تابعی است فرد به طوری که برای $x > 0$ داریم $g(x) > 0$ ، و $f(x)$ تابعی زوج است؛ و (۳) تابع فرد $F(x) = \int_0^x f(x) dx$ تنها یک صفر مثبت در $x = a$ دارد، و برای $0 < x < a$ منفی و برای $x > a$ مثبت و غیر-نزولی است و وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $F(x) \rightarrow \infty$. ثابت خواهیم کرد که معادله (۱) دارای مسیر بسته منحصر به فردی است که مبدأ مختصات را در صفحه فاز احاطه می‌کند، و وقتی $x \rightarrow \infty$ هر مسیر دیگری به طور حلزونی به آن میل می‌کند.

در صفحه فاز دستگاه معادل (۱) چنین است

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y \end{cases} \quad (2)$$

با توجه به شرایط (آ)، قضیه اساسی در مورد وجود و یگانگی جوابها برقرار است. از شرط (۲) نتیجه می‌شود که $g(0) = 0$ و برای $x \neq 0$ داریم $g(x) \neq 0$ ، لذا مبدأ تنها نقطه بحرانی است. همچنین می‌دانیم که هر مسیر بسته باید مبدأ را احاطه کند. با توجه به

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{dx}{dt} + \int_0^x f(x) dx \right] \\ &= \frac{d}{dt} [y + F(x)] \end{aligned}$$

متغیر جدید $z = y + F(x)$ را به کار می‌گیریم به این ترتیب، معادله (۱) معادل دستگاه زیر از صفحه xz است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - F(x) \\ \frac{dz}{dt} = -g(x) \end{cases} \quad (3)$$

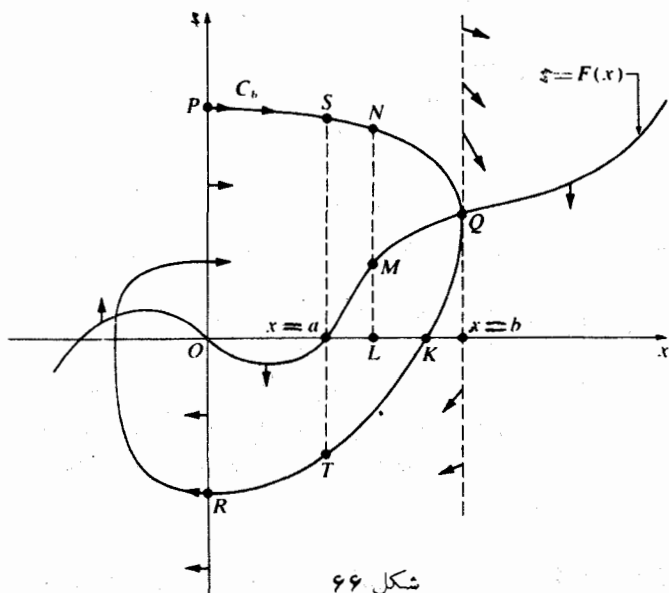
مجدداً، مشاهده می‌کنیم که قضیه وجود و یگانگی برقرار است، مبدأ تنها نقطه بحرانی است، و هر مسیر بسته‌ای باید مبدأ را احاطه کند. تناظر یک به یک $(x, y) \rightarrow (x, z)$ بین نقاط دو صفحه از هر دو سو پیوسته است، لذا مسیرهای بسته متناظر با مسیرهای بسته‌اند و از نظر کیفی، مسیرها در این دو صفحه اشکال مشابه پدید می‌آورند. معادله دیفرانسیل مسیر مربوط به (۳) چنین است

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-g(x)}{z - F(x)} \quad (4)$$

بنا به دلایل زیر، این مسیرها را آسانتر از مسیرهای متناظرشان در صفحه فاز می توان تحلیل کرد.

اولاً، چون توابع $g(x)$ و $F(x)$ هر دو فرد هستند، وقتی x و z را به $-x$ و $-z$ تبدیل کنیم، در معادلات (۳) و (۴) تغییری به وجود نمی آید. این بدان معناست که هر منحنی که قرینه یک مسیر نسبت به مبدأ باشد، نیز یک مسیر است. بنابراین چنانچه مسیرهای واقع در نیمصفحه راست ($x > 0$) درست باشند، بیدرنگ می توان مسیرهای واقع در نیمصفحه چپ ($x < 0$) را نیز به وسیله تقارن نسبت به مبدأ به دست آورد.

ثانیاً، معادله (۴) نشان می دهد که مسیرها تنها در نقاط تلاقیشان با محور z ها افقی می شوند، و تنها در نقاط تلاقیشان با منحنی $z = F(x)$ قائم می شوند، همچنین، بررسی علایم طرف راست معادلات (۳) نشان می دهد که تمام مسیرها، در بالای منحنی $z = F(x)$ ، به طرف راست، و در پایین این منحنی، به طرف چپ متوجه اند، و بسته به اینکه $x > 0$ یا $x < 0$ به طرف پایین یا بالا می روند. این نکات بدین مفهوم اند که منحنی $z = F(x)$ محور z ها، و خط قائمی که از هر نقطه ای مانند Q واقع در نیمه راست منحنی $z = F(x)$ عبور می کند تنها می توانند در جهتهایی که به وسیله پیکانها در شکل ۶۶ نشان داده شده اند قطع شوند. فرض کنید که جوابی از (۳) که مسیر C مارپیچ را مشخص می کند طوری برگزیده شده باشد که نقطه Q با مقدار صفر پارامتر t مطابقت داشته باشد. پس همچنانکه t به مقادیر مثبت افزایش می یابد، نقطه ای با مختصات $x(t)$ و $y(t)$ واقع بر C رو به پایین و به طرف چپ حرکت می کند تا اینکه محور z را در نقطه ای مانند R قطع کند؛ و همچنانکه t به مقادیر منفی کاهش می یابد، نقطه ای واقع بر C رو به بالا و به طرف چپ؛ حرکت می کند



شکل ۶۶

تا با محور z ها در نقطه‌ای مانند P تلاقی کند. برای راحتی طول نقطه Q را با b و مسیر C را با C_b نمایش می‌دهیم.

به کمک خاصیت تقارن پسادگی می‌توان مشاهده کرد که وقتی مسیر C_b را درمآورای نقاط P و R به طرف نیمهٔ چپ صفحه ادامه دهیم، نتیجه مسیر بسته‌ای خواهد بود، اگر و تنها اگر فواصل OP و OR با هم برابر باشند. بنابراین برای اینکه نشان دهیم یک مسیر بسته منحصر به فرد وجود دارد، کافی است نشان دهیم که یک مقدار منحصر به فرد b وجود دارد به قسمی که $OP = OR$.

برای اثبات این مطلب، تابع $G(x)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$G(x) = \int_0^x g(x) dx$$

و تابع

$$E(x, z) = \frac{1}{4}z^2 + G(x)$$

را که مقدار آن در هنگام تلاقی با محور z ها برابر با $z^2/2$ است، در نظر می‌گیریم. در طول هر مسیر داریم

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= g(x) \frac{dx}{dt} + z \frac{dz}{dt} \\ &= -[z - F(x)] \frac{dz}{dt} + z \frac{dz}{dt} \\ &= F(x) \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

پس

$$dE = F dz$$

اگر انتگرال خطی $F dz$ را از P تا R در امتداد مسیر C_b محاسبه کنیم، خواهیم داشت

$$I(b) = \int_{PR} F dz = \int_{PR} dE = E_R - E_P = \frac{1}{4}(OR^2 - OP^2)$$

پس کافی است نشان دهیم که یک مقدار منحصر به فرد b وجود دارد به قسمی که $I(b) = 0$. چنانچه $b \leq a$ ، آنگاه F و dz منفی اند، پس $I(b) > 0$ و C_b نمی‌تواند مسیر بسته باشد. حال، مطابق شکل ۶۶، فرض می‌کنیم که $b > a$. عبارت $I(b)$ را به دو قسمت تجزیه می‌کنیم

$$I_1(b) = \int_{ST} F dz \quad \text{و} \quad I_2(b) = \int_{PS} F dz + \int_{TR} F dz$$

به طوری که

$$I(b) = I_1(b) + I_2(b)$$

چون وقتی C_b از P تا S و از T تا R پیموده می شود، F و dz منفی اند. روشن است که $I_1(b) > 0$ از طرف دیگر، اگر در امتداد C_b از S به T برویم داریم $\langle F \rangle < 0$ و $dz < 0$ پس $I_2(b) < 0$. هدف مستقیم ما آن است که با بررسی جداگانه توابع $I_1(b)$ و $I_2(b)$ نشان دهیم که $I(b)$ تابعی نزولی از b است. نخست، توجه می کنیم که معادله (۴) به ما امکان می دهد که بنویسیم

$$Fdz = F \frac{dz}{dx} dx = \frac{-g(x)F(x)}{z - F(x)} dx$$

تأثیر افزایش b بالابردن کمان PS و پایین آوردن کمان TR است، که برای x مفروضی بین 0 و a اندازه $[-g(x)F(x)] / [z - F(x)]$ را کاهش می دهد. چون حدود انتگرال گیری برای $I_1(b)$ ثابت است، نتیجه این امر کاهش در $I_1(b)$ خواهد بود. بعلاوه چون $F(x)$ مثبت و در طرف راست a غیر نزولی است، مشاهده می کنیم که افزایش در b منجر به افزایش در عدد مثبت $-I_2(b)$ ، و بنابراین منجر به کاهش در $I_2(b)$ خواهد شد. بنابراین، تابع $I(b) = I_1(b) + I_2(b)$ ، برای $b \geq a$ ، نزولی است. اکنون نشان می دهیم که وقتی $b \rightarrow \infty$ داریم $I_2(b) \rightarrow -\infty$. اگر در شکل ۶، L ثابت و K در طرف راست L باشد، آنگاه می توان نوشت

$$I_2(b) = \int_{ST} Fdz < \int_{NK} Fdz \leq -(LM) \cdot (LN)$$

و چون وقتی $b \rightarrow \infty$ داریم $LN \rightarrow \infty$ ، پس داریم $I_2(b) \rightarrow -\infty$. از این رو، برای $b \geq a$ ، $I(b)$ تابعی پیوسته و نزولی از b است، $I(a) > 0$ ، و وقتی $b \rightarrow \infty$ داریم $I(b) \rightarrow -\infty$. از اینجا نتیجه می شود که برای یک و فقط یک مقدار $b = b_0$ داریم $I(b) = 0$ ، پس یک و تنها یک مسیر بسته C_{b_0} وجود دارد.

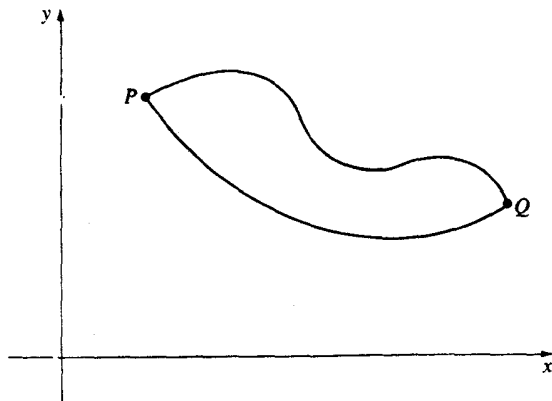
سرانجام، مشاهده می کنیم که برای مقادیر $b < b_0$ داریم $OR > OP$ ؛ و به کمک این مطلب و با توجه به تقارن نتیجه می گیریم که مسیرهای درون C_{b_0} به طرف بیرون و به صورت حلزونی به C_{b_0} میل می کنند. به طور مشابه، از این حقیقت که برای $b > b_0$ داریم $OR < OP$ نتیجه می شود که مسیرهای بیرون C_{b_0} به طرف درون و به صورت حلزونی به C_{b_0} میل می کنند.

۴۷. مقدمه. برخی از مسائل نمونه مطلب مورد بحث

در طول بیش از دو قرن گذشته، حساب تغییرات یکی از شاخه‌های اصلی آنالیز بوده است. این شاخه وسیله بسیار نیرومندی است که می‌تواند در طیف گسترده‌ای از مسائل ریاضی محض به کار رود. همچنین می‌تواند برای بیان اصول اساسی فیزیک ریاضی به اشکالی بسیار ساده و دقیق مورد استفاده قرار گیرد.

با بررسی و مطالعه چند مسئله نمونه از موضوع، بسادگی می‌توان برداشتی از کم و کیف آن داشت. فرض می‌کنیم که دو نقطه P و Q در صفحه‌ای داده شده‌اند (شکل ۶۷) بینهایت منحنی موجودند که این دو نقطه را به هم وصل می‌کنند، و می‌توان پرسید کدام يك از این منحنیها از همه کوتاهتر است. پاسخ حسی، البته خط مستقیم است. همچنین می‌توانیم پرسیم کدام منحنی، در اثر دوران حول محور yx ها، رویه‌ای با مساحت می‌نیم ایجاد خواهد کرد. در این حالت پاسخ به هیچ وجه روشن نیست. هرگاه يك منحنی نوعی، به عنوان سیمی بدون اصطکاک فرض شود که در صفحه قائم قرار گرفته است، آنگاه مسئله قابل توجه دیگر یافتن يك منحنی است که P را به Q وصل کند و زمان لغزش مهره‌ای روی آن به طرف پایین کمترین باشد. این همان مسئله مشهور کوتاهترین زمان یوهان برنولی است، که آن را در بخش ۶ بررسی کردیم. بندرت می‌توان به چنین سؤالیهای پاسخهای حسی داد، و حساب تغییرات روش تحلیلی یکنواختی را در برخورد با این گونه مسائل تأمین می‌کند.

هر دانشجوی حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با مسئله یافتن نقاط ماکزیمم یا می‌نیم تابع يك متغیره، آشناست. مسائل بالا نشان می‌دهند که در حساب تغییرات، کمیتی



شکل ۶۷

(مثلاً طول قوس، مساحت رویه، زمان سقوط) را در نظر می گیریم که به تمامی منحنی بستگی داشته باشد، و به دنبال یافتن آن منحنی هستیم که کمیت مورد سؤال را می نیم کند. حساب تغییرات با مسایل می نیم مربوط به رویه ها نیز سروکار دارد. برای مثال، هرگاه يك سیم سیمی به شکل دلخواهی خم شود، و درمحلول صابون فروبرده شود، آنگاه لایه صابونی که سطح حلقه را می پوشاند به صورت رویه ای خواهد بود با کمترین مساحت که توسط حلقه محدود می گردد. مسئله ریاضی، یافتن این رویه با استفاده از این خاصیت می نیم و شکل داده شده سیم است.

بعلاوه، حساب تغییرات به عنوان عامل وحدت بخش درمکانیک و به عنوان راهنمایی درتعبیرریاضی بسیاری ازپدیده های فیزیکی، نقش مهمی را ایفا کرده است. مثلاً، معلوم شده که هرگاه آرایش دستگاهی از ذرات متحرك از جاذبه متقابل بین آنان پیروی کند، آنگاه مسیر واقعی آنها منحنیهای می نیم کننده انتگرال تفاضل انرژیهای جنبشی و پتانسیل دستگاه نسبت به زمان خواهد بود. این قضیه پر کاربرد از مکانیک کلاسیک به افتخار یابنده اش به اصل همیلتن شهرت دارد. درفيزيك نوین نیز، اینشتین دوائر خود راجع به نسبیت عام از حساب تغییرات استفاده گسترده ای کرد، و شروودینگر آن را برای یافتن معادله موج مشهورش، که یکی از پایه های مکانیک کوانتومی است، به کارگرفت.

تعدادی از مسائل حساب تغییرات بسیار قدیمی اند، و توسط یونانیان باستان مورد بررسی قرار گرفته و درمواردی حل شده اند. پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی توسط نیوتن و لایب نیتس انگیزه مطالعه تعدادی از مسایل تغییراتی شد و برخی از این مسایل با روشهای ویژه هوشمندانه ای حل شدند. ولی، این مبحث با کشف معادله دیفرانسیل اساسی اوایلر برای منحنی می نیم کننده، درسال ۱۷۴۴، به عنوان شاخه ای منسجم از آنالیز، وارد صحنه گردید.

دربخش آینده معادله اوایلر را بررسی خواهیم کرد، اما نخست مشاهده می کنیم که هریک از مسائلی که در دومین پاراگراف این بخش آمده اند، حالتی خاص از مسئله کلیتر

زیر هستند. فرض می‌کنیم P و Q دارای مختصات (x_1, y_1) و (x_2, y_2) باشند و دسته توابع

$$y = y(x) \quad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم، که در شرایط مرزی $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ صدق می‌کنند. یعنی، منحنی نمایش (۱) باید نقاط P و Q را به هم ببیوندد. آنگاه منظور یافتن تابعی از این دسته است که انتگرالی به صورت زیر را می‌نیمد

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (۲)$$

برای مشاهده اینکه این مسئله برایستی دربرگیرنده سایر مسایل است، توجه می‌کنیم که طول منحنی (۱) برابر است با

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (۳)$$

و مساحت رویه حاصل از دوران آن، حول محور x ها عبارت است از:

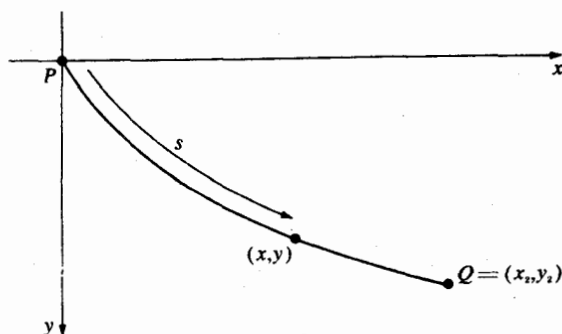
$$\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (۴)$$

در مورد منحنی با سریعترین سقوط، بهتر است مطابق شکل ۶۸ دستگاه مختصات را تغییر دهیم و P را به عنوان مبدأ اختیار کنیم. چون سرعت $v = ds/dt$ از رابطه $v = \sqrt{2gy}$ به دست می‌آید، زمان کل سقوط انتگرال ds/v است و انتگرال زیر باید می‌نیمد شود

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (۵)$$

از این رو، تابع $f(x, y, y')$ که در (۲) ظاهر شده است درسه مسئله فوق‌ترتیب شکلهای $\sqrt{1 + (y')^2}$ ، $2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}$ ، و $\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ را دارد.

در بیان مسئله اساسی می‌نیمد کردن انتگرال (۲) باید تا حدودی دقیقتر باشیم. اولاً، همواره فرض می‌کنیم که تابع $f(x, y, y')$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته نسبت به x ، y ، و y' است. سؤال بعدی این است که، چه نوع از توابع (۱) می‌توانند مجاز باشند؟ انتگرال (۲) یک عدد حقیقی خوش تعریف است، هرگاه تابع زیر انتگرال تابعی پیوسته از x باشد، و برای این امر فرض پیوستگی $y'(x)$ کفایت می‌کند. اما برای تضمین اعتبار عملیاتی که می‌خواهیم انجام دهیم، بهتر است یک بار و برای همیشه خود را تنها به توابع مجهول $y(x)$ که دارای مشتقات دوم پیوسته هستند و شرایط مرزی $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ را ارضا می‌کنند، محدود کنیم. این نوع توابع را پذیرفتنی خواهیم نامید. می‌توانیم رقابتی را در نظر آوریم که صرفاً توابع پذیرفتنی می‌توانند در آن شرکت کنند، و مسئله، انتخاب تابع یا توابعی از این دسته است که کوچکترین مقدار I را به دست



شکل ۴۸

می‌دهند.

با وجود این تذکرات، بطور جدی وارد نکات دقیق ریاضی نخواهیم شد. دیدگاه ما تماماً ساده است، و تنها قصد ما رسیدن هرچه سریع‌تر و ساده‌تر به موارد استعمال جالب موضوع است. خواننده‌ای که مایل به تفحص در نظریه بسیار گسترده این مبحث باشد می‌تواند به آثار مدون در این باره رجوع کند.^۱

۴۸. معادله دیفرانسیل اولر برای تابع اکسترمال
فرض کنید که تابع پذیرفتنی $y(x)$ چنان باشد که انتگرال

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (1)$$

را می‌نیمیم، چگونه می‌توان این تابع را یافت؟ با مقایسه مقادیر I که با توابع پذیرفتنی در همسایگی $y(x)$ متناظر هستند، معادله دیفرانسیلی برای $y(x)$ به دست خواهیم آورد. ایده اصلی این است که چون $y(x)$ مقدار می‌نیمیم I را به دست می‌دهد، هرگاه در $y(x)$ اندکی «اختلال» ایجاد کنیم، مقدار I افزایش خواهد یافت. این توابع تغییر یافته، به طریق زیر ساخته می‌شوند:

فرض می‌کنیم که $\eta(x)$ تابعی با این خواص باشد: $\eta''(x)$ پیوسته است و

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (2)$$

۱. برای مثال می‌توان به منابع زیر مراجعه کرد،

I. M. Gelfand and S. V. Fomin, "Calculus of Variations," Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J., 1963; G. M. Ewing. "Calculus of Variations with Applications," Norton, New York, 1969; or C. Carathéodory, "Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part II: Calculus of Variations, Holden-Day, San Francisco, 1967.

هرگاه α پارامتر کوچکی باشد، آنگاه

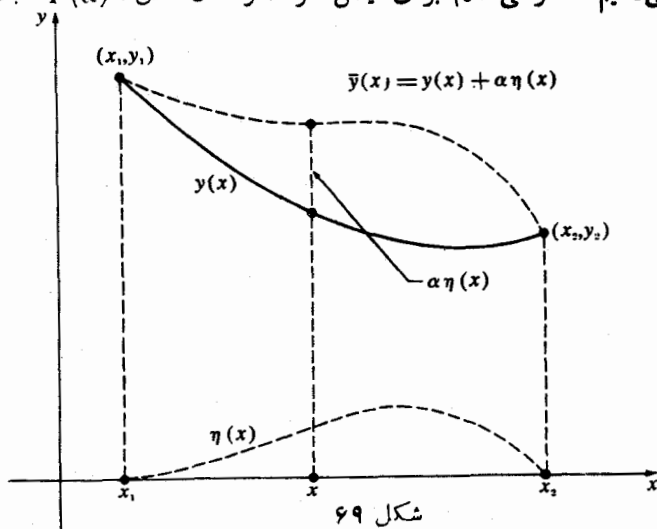
$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (۳)$$

نمایشگر يك خانواده يك پارامتری از توابع پذیرفتنی است. همچنانکه در شکل ۶۹ نشان داده شده است، انحراف قائم یکی از منحنیهای این خانواده از منحنی می نیمم کننده، $y(x)$ ، برابر با $\alpha \eta(x)$ است. اهمیت (۳) ناشی از این است که برای هر خانواده از این نوع، یعنی، با هر انتخاب تابع $\eta(x)$ ، تابع می نیمم کننده $y(x)$ به این خانواده متعلق است و با مقدار $\alpha = 0$ مطابقت دارد.

اکنون با انتخاب يك $\eta(x)$ ثابت، مقادیر $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha \eta(x)$ و $\bar{y}'(x) = y'(x) + \alpha \eta'(x)$ را در انتگرال (۱) قرار می دهیم، و تابعی از α به دست می آوریم

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x) + \alpha \eta(x), y'(x) + \alpha \eta'(x)] dx \end{aligned} \quad (۴)$$

هرگاه $\alpha = 0$ ، از رابطه (۳) داریم $\bar{y}(x) = y(x)$ و چون $y(x)$ می نیمم کننده انتگرال است، می دانیم که $I(\alpha)$ باید می نیممی در $\alpha = 0$ داشته باشد. از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می دانیم که شرطی لازم برای این امر صفر شدن مشتق، $I'(\alpha)$ ، برای $\alpha = 0$



شکل ۶۹

۱. اختلاف $\bar{y} - y = \alpha \eta$ را تغییر تابع y می نامند و آن را با δy نمایش می دهند. این نماد قابل تبدیل به يك تبیین صوری مفید (که درباره اش بحث نخواهیم کرد) و منشأ نام حساب تغییرات است.

است: $I'(0) = 0$. مشتق $I(\alpha)$ ، $I'(\alpha)$ ، را می توان بامشتق گیری از زیر علامت انتگرال در (۲) به دست آورد

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \quad (5)$$

بر اساس قاعده زنجیری برای مشتق گیری از توابع چند متغیره، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \end{aligned}$$

بنابراین (۵) را می توان به شکل

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] dx \quad (6)$$

نوشت. اما $I'(0) = 0$ ، بنابراین با قرار دادن $\alpha = 0$ در (۶) داریم

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (7)$$

در این معادله، تابع $\eta(x)$ و مشتق آن $\eta'(x)$ ظاهر می شوند. با انتگرال گیری جزء به جزء از دومین عبارت زیر انتگرال و استفاده از (۲) می توان $\eta'(x)$ را حذف کرد

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) dx &= \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) dx \end{aligned}$$

بنابراین می توان (۷) را به صورت

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) \right] dx = 0 \quad (8)$$

نوشت. استدلال ما تا این جا بر انتخاب مشخصی برای تابع $\eta(x)$ مبتنی بود. اما چون انتگرال (۸) باید برای همه این نوع توابع صفر گردد، بلافاصله به این نتیجه می رسیم که عبارت داخل کروشه نیز باید صفر شود. این منجر به رابطه

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) - \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (9)$$

می‌گردد، که معادلهٔ اولر است.^۱

مهم است که درك روشنی از ماهیت دقیق نتیجه‌گیری خود داشته باشیم: یعنی هرگاه $y(x)$ تابع پذیرفتنی باشد که انتگرال (۱) را می‌نیمد، آنگاه $y(x)$ در معادلهٔ اولر صدق خواهد کرد. فرض کنید تابعی پذیرفتنی مانند y وجود دارد که این معادله را ارضا می‌کند. آیا این به معنی این است که y ، I را می‌نیمد؟ لزوماً چنین نیست. این حالت شبیه به حالتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی است، که در آن تابعی مانند $g(x)$ که مشتقش در نقطه x صفر است، می‌تواند در این نقطه دارای ماکزیمم، می‌نیمد، و یا نقطهٔ عطف باشد. هنگامی که نخواهیم تمایزی بین این حالات قائل شویم، این حالات را معمولاً مقادیر ایستی $g(x)$ می‌نامیم، و نقاط x را که در آنها این حالات پیش می‌آیند نقاط ایستی می‌گوییم. به همین ترتیب، شرط $I'(0) = 0$ ممکن است به جای می‌نیمد، بیانگر يك ماکزیمم یا نقطهٔ عطف $I(\alpha)$ در $\alpha = 0$ باشد. متداول است که هر جواب پذیرفتنی معادلهٔ اولر را تابع ایستی یا منحنی ایستی، و مقدار متناظر انتگرال (۱) را مقدار ایستی این انتگرال نامند (بدون اینکه خود را به یکی از حالات ممکن، مقید کرده باشیم). بعلاوه، جوابهایی از معادلهٔ اولر را که مقید به شرایط مرزی نیستند، توابع اکسترمال می‌گوییم.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال برای ارائهٔ شرایط کافی جهت تشخیص يك نوع مقدار ایستی از دیگری، مشتق دوم را به کار می‌گیریم. شرایط کافی مشابه در حساب تغییرات نیز وجود دارد، ولی چون کاملاً پیچیده هستند، آنها را در اینجا مورد بررسی قرار نخواهیم داد. در کاربردهای واقعی، کیفیت هندسی یا فیزیکی مسئلهٔ مورد بحث غالباً ما را قادر می‌سازد تعیین کنیم که آیا تابع ایستی خاص انتگرال را ماکزیمم می‌کند یا می‌نیمد (یا هیچ کدام). خوانندهٔ علاقمند به شرایط کافی و دیگر مسایل نظری می‌تواند مباحث کافی در این زمینه‌ها را در کتابهایی که در بخش ۴۷ معرفی کرده‌ایم بیابد.

معادلهٔ اولر (۹)، به شکلی که ارائه گردید، چندان روشنگر نیست. برای تفسیر آن و تبدیلیش به يك وسیلهٔ مفید، مطلب را با تأکید بر این نکته آغاز می‌کنیم که مشتقات جزئی $\partial f / \partial y$ و $\partial f / \partial y'$ با احتساب x ، y و y' به عنوان متغیرهای مستقل محاسبه شده‌اند. اما، در حالت کلی $\partial f / \partial y'$ تابعی صریح از x است، و از طریق y و y' نیز تابعی ضمنی از x می‌باشد، بنابراین، اولین عبارت در (۹) را می‌توان به شکل بسط یافته زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx}$$

۱. مشروح استدلال غیرمستقیمی که به (۹) منجر می‌گردد به قرار زیر است. فرض می‌کنیم که تابع داخل‌گروشهٔ رابطهٔ (۸)، در نقطه‌ای مانند $x = a$ از فاصلهٔ مزبور صفر نباشد (مثلاً مثبت باشد). چون این تابع پیوسته است، در دست‌آورد يك زیرفاصله حول $x = a$ مثبت خواهد بود. يك تابع $\eta(x)$ چنان برگزینید که در داخل این زیرفاصله مثبت و در خارج آن صفر باشد. برای این $\eta(x)$ ، انتگرال (۸) مثبت خواهد بود، که این يك تناقض است. بیان دقیق این استدلال، قضیه‌ای است که به لم اساسی حساب تغییرات شهرت دارد.

به این ترتیب معادلهٔ اوایلر به صورت زیر درخواهد آمد:

$$f_{y'y'} \frac{d^2 y}{dx^2} + f_{y'y} \frac{dy}{dx} + (f_{y'x} - f_y) = 0 \quad (10)$$

به غیر از حالت $f_{y'y'} = 0$ ، معادلهٔ بالا از مرتبهٔ دوم است، پس عموماً توابع اکسترمال (جوابهای این معادله) یک خانوادهٔ دو پارامتری از منحنیها را تشکیل می‌دهند، و در بین اینها، توابع ایستی توابعی هستند که در آنها این دو پارامتر چنان انتخاب شده‌اند که در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کنند. حل معادلهٔ مرتبهٔ دوم غیر خطی مانند (۱۰) عموماً امکان پذیر نیست، ولی خوشبختانه بسیاری از کاربردها منجر به حالت‌های خاصی می‌شوند که قابل حل هستند:

حالت الف. هر گاه x و y در تابع f ظاهر نشوند، معادلهٔ اوایلر به

$$f_{y'y'} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

تبدیل می‌شود، و اگر $f_{y'y'} \neq 0$ ، آنگاه $d^2 y/dx^2 = 0$ و $y = c_1 x + c_2$ و بنابراین، توابع اکسترمال همگی خطوط مستقیم هستند.

حالت ب. هر گاه y در تابع f ظاهر نگردد، معادلهٔ اوایلر به

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

تبدیل می‌شود و از این رابطه می‌توان بلافاصله انتگرال گرفت و به معادلهٔ مرتبهٔ اول

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1$$

برای توابع اکسترمال دست یافت.

حالت ج. هر گاه x در f موجود نباشد، آنگاه انتگرال گیری از معادلهٔ اوایلر به

$$\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = c_1$$

منجر می‌شود. این مطلب از اتحاد

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f \right) = y' \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right] - \frac{\partial f}{\partial x}$$

نتیجه می‌شود، زیرا $\partial f / \partial x = 0$ و جملهٔ داخل کروشهٔ طرف راست، بنا بر معادلهٔ اوایلر، صفر است.

اکنون از این ابزار در مورد سه مسئله‌ای که در بخش ۴۷ بیان کردیم، استفاده می‌کنیم.
مثال ۰۱. برای پیدا کردن کوتاهترین منحنی واصل بین دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) که به‌طور حسی می‌دانیم یک خط مستقیم است باید انتگرال طول قوس را می‌نیمیم کنیم

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

متغیرهای x و y در $f(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ ظاهر نشده‌اند. بنابراین، این مسئله به‌حالت الف مربوط می‌شود. چون

$$f_{y, y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \neq 0$$

از حالت الف داریم که اکسترماها یک دسته دوپارامتری از خطوط مستقیم به‌صورت $y = c_1 x + c_2$ هستند. شرایط مرزی، خط

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (11)$$

را به‌عنوان منحنی ایستی به‌دست می‌دهد، و البته این همان خط مستقیمی است که دو نقطه مزبور را به‌هم وصل می‌کند. باید توجه کرد که این بررسی تنها نمایشگر این مطلب است که اگر I دارای یک مقدار ایستی باشد، آنگاه منحنی ایستی مربوطه باید خط مستقیم (۱۱) باشد. ولی، از هندسه می‌دانیم که I هیچ منحنی ماکزیمم‌کننده‌ای ندارد ولی یک منحنی می‌نیمم‌کننده دارد، پس به این طریق نتیجه می‌گیریم که (۱۱) عقلاً کوتاهترین منحنی متصل-کننده دو نقطه است.

در این مثال از طریق تحلیلی به نتیجه واضحی دست یافتیم. یک مسئله بمراتب مشکل‌تر و جالب‌تر یافتن کوتاهترین منحنی بین دو نقطه ثابت از یک رویه مفروض است به طوری که این منحنی به‌طور کامل بر رویه واقع باشد. این منحنیها ژئودزیک خوانده می‌شوند، و بررسی خواص آنان یکی از موضوعات اصلی شاخه‌ای از ریاضیات، موسوم به هندسه دیفرانسیل است.

مثال ۰۲. برای یافتن منحنی واصل بین نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) که سطح حاصل از دوران آن حول محور x ها دارای مساحت می‌نیمم باشد، باید انتگرال

$$I = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (12)$$

را می‌نیمیم کنیم. متغیر x در $f(y, y') = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}$ ظاهر نشده است. بنابراین از حالت ج می‌دانیم که، معادله اولر به‌صورت

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} - y \sqrt{1 + (y')^2} = c_1$$

درمی آید، که بعد از ساده شدن به

$$c_1 y' = \sqrt{y^2 - c_1^2}$$

تبدیل می شود. با جدا کردن متغیرها و انتگرال گیری، خواهیم داشت

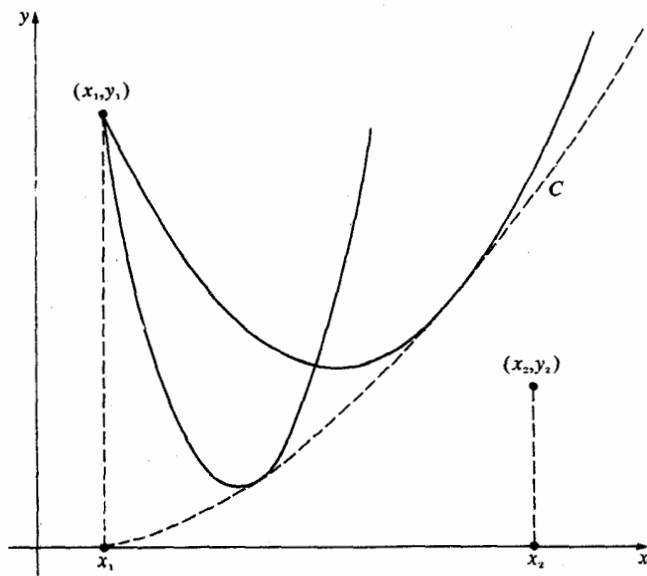
$$x = c_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = c_1 \log \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c_1^2}}{c_1} \right) + c_2$$

که با حل آن بر حسب y خواهیم داشت

$$y = c_1 \cosh \left(\frac{x - c_2}{c_1} \right) \quad (13)$$

بنابراین اکسترمال‌ها به صورت منحنیهای زنجیری خواهند بود، و رویه با سطح می نیمم - اگر موجود باشد از دوران منحنی زنجیری حاصل می گردد. مسئله بعدی این است که بینیم آیا پارامترهای c_1 و c_2 را در واقع می توان چنان یافت که منحنی (۱۳) نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را به هم متصل نماید یا نه.

انتخاب این پارامترها به گونه غیرمنتظره ای مشکل است. هرگاه منحنی (۱۳) از اولین نقطه، یعنی (x_1, y_1) ، عبور کند، آنگاه یک پارامتر آزاد باقی می ماند. دعوو از این خانواده یک پارامتری در شکل ۷۰ نشان داده شده اند. می توان ثابت کرد که این منحنیها همگی بر منحنی نقطه چین C مماس هستند و بنابراین هیچ یک از منحنیهای این خانواده نمی توانند C را قطع کند. به این ترتیب هنگامی که دومین نقطه (x_2, y_2) زیر C قرار داشته



شکل ۷۰

باشد، همان طوری که در شکل ۷۵ نشان داده شده است، هیچ منحنی زنجیری ماربره در نقطه موجود نیست و هیچ گونه تابع ایستی وجود ندارد. در این حالت می توان دریافت که سطوح کوچکتر و کوچکتری توسط منحنیهای ایجاد می گردند، که به خط نقطه چینی که نقطه (x_1, y_1) را به (x_2, y_2) و این نقطه را به $(x_1, 0)$ و بالاخره نقطه اخیر را به (x_2, y_2) وصل می کند، میل می کنند و بنا بر این هیچ منحنی پذیرفتنی که يك رویه می نیم تولید کند وجود ندارد. در حالتی که نقطه دوم بالای منحنی C قرار گیرد، دو منحنی زنجیری از این دو نقطه می گذرند، و بنا بر این دو تابع ایستی موجودند لیکن تنها منحنی زنجیری بالایی، رویه با سطح می نیم را ایجاد می کند. سرانجام، زمانی که نقطه دوم روی C قرار گیرد تنها يك تابع ایستی موجود است، ولی رویه ایجاد شده به وسیله آن دارای سطح می نیم نخواهد بود.^۱

مثال ۳. برای پیدا کردن منحنی با کوتاهترین زمان سقوط بر بوط به شکل ۶۸، باید انتگرال

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

را می نیم کنیم. این بار نیز متغیر x در $f(y, y') = \sqrt{1+(y')^2} / \sqrt{2gy}$ ظاهر نشده است، بنابراین با توجه به حالت ج، معادله اولر به

$$\frac{(y')^2}{V y \sqrt{1+(y')^2}} - \frac{V \sqrt{1+(y')^2}}{V y} = c_1$$

و این خود به

$$y[1+(y')^2] = c$$

ساده می شود، که دقیقاً همان معادله دیفرانسیل ۶- (۴) است که در بحث قبلی در مورد این مسئله مشهور حاصل شد. جواب این معادله در بخش ۶ داده شده است. منحنی ایستی حاصل، چرخزاد است:

$$y = a(1 - \cos \theta) \quad \text{و} \quad x = a(\theta - \sin \theta) \quad (14)$$

که از غلتیدن دایره ای به شعاع a در زیر محور x ها تولید می شود*، مقدار a چنان اختیار شده است که اولین قوس وارونه ایجاد شده از نقطه (x_2, y_2) شکل ۶۸ بگذرد. همچون

۱. بحث کاملی از این احکام را همراه با اثباتهای مربوطه، می توان در مرجع زیر یافت،

G. A. Bliss, "Calculus of Variations," chap. IV, Carus Monograph no. 1, Mathematical Association of America, 1925.

* بیان کاملتر مطلب چنین است، این چرخزاد به وسیله حرکت نقطه مشخص واقع بر دایره ای به شعاع a که در زیر محور y ها می غلتد حاصل می شود. (مترجمان)

گذشته، این استدلال تنها نشان می‌دهد که وقتی I دارای مینیموم باشد، در آن صورت منحنی ایستی مربوطه باید چرخزاد (۱۴) باشد. ولی، از ملاحظات فیزیکی بخوبی روشن است که I هیچ منحنی ماکزیمم کننده‌ای ندارد درحالی که منحنی می‌نیمم کننده دارد، پس چرخزاد زمان سقوط را واقعاً می‌نیمم می‌کند.

این بخش را با تعمیمی ساده ولی مهم از بررسی خود در مورد انتگرال (۱) به پایان می‌رسانیم. این انتگرال نمایش دهنده ساده‌ترین نوع مسایل حساب تغییرات است، زیرا فقط شامل یک تابع مجهول است. ولی، برخی از مسایلی که در زیر با آنها روبرو می‌شویم این قدر ساده نیستند، زیرا این مسایل به انتگرالهایی منجر می‌شوند که وابسته به دو یا چند تابع مجهول هستند.

برای مثال فرض کنید بخواهیم شرایط لازمی را بیابیم که توابع $y(x)$ و $z(x)$ باید در آنها صدق کنند تا انتگرال زیر مقدار ایستی داشته باشد:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z') dx \quad (15)$$

که در آن شرایط مرزی $y(x_1)$ ، $z(x_1)$ ، $y(x_2)$ ، و $z(x_2)$ از قبل تعیین شده‌اند. درست همچون گذشته، توابع $\eta_1(x)$ و $\eta_2(x)$ را که دارای مشتقات دوم پیوسته هستند و در نقاط انتهایی صفر می‌شوند معرفی می‌کنیم. از این‌جا توابع نزدیک به توابع y و z را به صورت $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta_1(x)$ و $\bar{z}(x) = z(x) + \alpha\eta_2(x)$ تشکیل می‌دهیم، و سپس تابعی از α را که توسط رابطه

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \alpha\eta_1, z + \alpha\eta_2, y' + \alpha\eta_1', z' + \alpha\eta_2') dx \quad (16)$$

تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. در اینجا نیز، در صورتی که $y(x)$ و $z(x)$ توابع ایستی باشند باید داشته باشیم $I'(0) = 0$ ، بنا بر این با محاسبه مشتق (۱۶) و قرار دادن $\alpha = 0$ خواهیم داشت

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \eta_2 + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta_1' + \frac{\partial f}{\partial z'} \eta_2' \right) dx = 0$$

یا، هرگاه در عباراتی که شامل η_1' و η_2' هستند جزء به جزء انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \eta_1(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] + \eta_2(x) \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \right] \right\} dx = 0 \quad (17)$$

سرانجام، چون رابطه (۱۷) باید برای هر انتخاب توابع $\eta_1(x)$ و $\eta_2(x)$ برقرار باشد، بلافاصله به معادلات اولیه

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

دست می‌یابیم. بنابراین، برای دستیابی به اکستریمال‌های این مسئله، باید دستگاه (۱۸) را حل کنیم. ناگفته پیداست که حل يك دستگاه معادلات مشکل، از حل تنها يك معادله مشکل، دشوارتر است؛ ولی اگر بتوان (۱۸) را حل کرد، آنگاه توابع ایستی را می‌توان با انتخاب جوابهایی که در شرایط مرزی مفروض صدق می‌کنند به دست آورد. همین ملاحظات را، بدون تغییر مهمی، می‌توان در مورد انتگرالهایی مانند (۱۵) که شامل بیش از دو تابع مجهول باشند به کار برد.

تمرین

۱- مطلوب است تعیین اکستریمالهای انتگرال (۱) وقتی که تابع زیر انتگرال عبارت باشد از

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} \quad (\text{الف})$$

$$y^2 - (y')^2 \quad (\text{ب})$$

۲- تابع ایستی انتگرال

$$\int_0^4 [xy' - (y')^2] dx$$

را که با شرایط مرزی $y(0) = 0$ و $y(4) = 3$ مشخص می‌شود، به دست آورید.

۳- هرگاه تابع زیر انتگرال (۱) به صورت

$$a(x)(y')^2 + 2b(x)yy' + c(x)y^2$$

باشد، نشان دهید که معادلهٔ اویلر مربوطه، يك معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم است.

۴- هرگاه P و Q دو نقطه از صفحه‌ای باشند، آنگاه طول قوس يك منحنی از P به Q بر حسب مختصات قطبی عبارت خواهد بود از

$$\int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

معادلهٔ قطبی خط مستقیم را با می‌نیم کردن این انتگرال به دست آورید،

(الف) در صورتی که θ متغیر مستقل فرض شود؛

(ب) در حالتی که r متغیر مستقل فرض شود.

۵- دو نقطهٔ P و Q را روی رویهٔ کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ در نظر بگیرید، و این رویه را به وسیلهٔ مختصات کروی θ و ϕ ، که در آنها $x = a \sin \phi \cos \theta$ و $y = a \sin \phi \sin \theta$ و $z = a \cos \phi$ نشان دهید. فرض کنید $\theta = F(\phi)$ يك منحنی واقع بر رویه باشد که نقاط P و Q را به هم وصل کند. نشان دهید که کوتاهترین این

منحنیها (منحنی ژئودزیک) قوسی از یک دایره عظیمه است، یعنی در صفحه‌ای که از مرکز می‌گذرد، قرار دارد. راهنمایی: طول قوس منحنی را به صورت

$$\int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$= a \int_P^Q \sqrt{1 + \left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2} \sin^2 \phi \, d\phi$$

نشان دهید، معادلهٔ اولر را بر حسب θ حل کنید، و نتیجه را مجدداً به مختصات قائم برگردانید.

ع- ثابت کنید هر ژئودزیک واقع بر مخروط دوار قائم $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ ، با $z \geq 0$ ، دارای خاصیت زیر است: هر گاه مخروط را در امتداد یک مولدش ببریم و به شکل صفحه‌ای مسطح درآوریم، آنگاه هر ژئودزیک به خط مستقیمی تبدیل می‌شود. راهنمایی: مخروط را توسط روابط زیر به شکل پارامتری نمایش دهید.

$$x = \frac{r \cos(\theta \sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y = \frac{r \sin(\theta \sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}}, \quad z = \frac{ar}{\sqrt{1+a^2}}$$

نشان دهید که پارامترهای r و θ مختصات قطبی معمولی روی صفحهٔ تسطیح مخروط هستند، و نشان دهید که هر ژئودزیک $r = r(\theta)$ یک خط مستقیم در این مختصات قطبی خواهد بود.

۷- هر گاه منحنی $y = g(z)$ را حول محور z ها دوران دهیم، آنگاه رویهٔ حاصل از دوران دارای معادله‌ای به صورت $x^2 + y^2 = g(z)^2$ خواهد بود. یک نمایش پارامتری مناسب این رویه به صورت

$$x = g(z) \cos \theta, \quad y = g(z) \sin \theta, \quad z = z$$

است که در آن، θ زاویهٔ قطبی در صفحهٔ xy است. نشان دهید که معادلهٔ هر ژئودزیک $\theta = \theta(z)$ در این رویه به صورت زیر است

$$\theta = c_1 \int \frac{\sqrt{1 + [g'(z)]^2}}{g(z) \sqrt{g(z)^2 - c_1^2}} dz + c_2$$

۸- هر گاه رویهٔ دوار در مسئلهٔ ۷ استوانهٔ مدور قائمی باشد، نشان دهید که هر ژئودزیک به صورت $\theta = \theta(z)$ یک مارپیچ یا یک مولد است.

۴۹. مسائل هم‌پیرامونی

یونانیان باستان مسئلهٔ یافتن منحنی مسطح بسته‌ای با طول مفروض را، که دارای بیشترین سطح محصور باشد، مطرح کردند. آنان این مسئله را مسئله هم‌پیرامونی نامیدند و توانستند

به گونه‌ای کم و بیش دقیق نشان دهند که جواب بدیهی، یعنی دایره، صحیح است.^۱ اگر منحنی به صورت پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ نمایش داده شود، و با ازدیاد t از t_1 به t_2 یک بار در جهت عکس عقربه‌های ساعت طی شود، آنگاه مساحت محصور عبارت خواهد بود از

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt \quad (1)$$

که انتگرالی وابسته به دو تابع مجهول است.^۲ چون طول قوس منحنی برابر است با

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \quad (2)$$

مسئله عبارت از ماکزیم کردن (۱) است با این شرط جانبی که انتگرال (۲) باید مقدار ثابتی باشد. عبارت مسئله همپیرامونی عموماً به حالت کلیتری اطلاق می‌شود که یافتن اکستریمالهای یک انتگرال، مشروط به این که انتگرالی دیگر مساوی با مقداری مفروض گردد، را دربرگیرد.

همچنین شرایط جنبی متناهی را، که شامل انتگرالها و یا مشتقها نمی‌شوند در نظر خواهیم گرفت. مثلاً، اگر

$$G(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

رویه مفروضی باشد، در این صورت هر منحنی واقع بر این رویه به طور پارامتری به وسیله سه تابع $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ که در معادله (۳) صدق می‌کنند، تعیین می‌شود، و مسئله پیدا کردن ژئودزیکها، به مسئله می‌نیم کردن انتگرال طول قوس

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt \quad (4)$$

مشروط به شرط جانبی (۳) منتهی می‌شود.

ضرایب لاگرانژ. لازم است مطلب را با بررسی برخی مسائل حساب دیفرانسیل مقدماتی که کاملاً شبیه مسائل همپیرامونی اند آغاز کنیم. به عنوان مثال، فرض کنید بخواهیم نقاط

۱. مراجعه شود به

B. L. Van der Waerden, "Science Awakening," pp. 268-269, Oxford University Press, London, 1961;

و نیز به

G. Polya, "Induction and Analogy in Mathematics," chap. 10, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

۲. فرمول (۱) حالت خاصی از قضیه گرین است. تمرین ۱ را نیز ببینید.

(x, y) را چنان بیابیم که مقادیر ایستی تابعی مانند $z = f(x, y)$ را به دست دهند، مشروط به اینکه x و y مستقل نباشند بلکه به وسیله رابطه

$$g(x, y) = 0 \quad (۵)$$

به هم مربوط شوند. روش معمول این است که یکی از متغیرهای x و y ، مثلاً x ، را بدلیخواه به عنوان متغیر مستقل در رابطه (۵) فرض کنیم، و متغیر دوم را به عنوان تابعی از آن در نظر بگیریم، به طوری که dy/dx را بتوان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

سپس از این حقیقت استفاده می کنیم که z اکنون تابعی صرفاً از x است. بنابراین $dz/dx = 0$ یک شرط لازم برای این است که z دارای مقدار ایستی باشد، پس

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

یا

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} = 0 \quad (۶)$$

باحل دستگاه دو معادله دو مجهولی (۵) و (۶)، نقاط (x, y) مورد نظر را خواهیم یافت. ۱. يك نقص این روش این است که متغیرهای x و y به شکل متقارنی ظاهر می شوند ولی با آنها به طور غیر متقارن رفتار می شود. همین مسئله را می توان با روش دیگری حل کرد که ظریفتر است و امتیازات کاربردی متعددی نیز دارد.

تابع

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

را تشکیل می دهیم و مقادیر ایستی نامعقد آن را توسط شرایط لازم

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (۷)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

۱. البته در حالت های خیلی ساده می توانیم (۵) را بر حسب y به صورت تابعی از x حل کنیم و آن را در $z = f(x, y)$ بگذاریم، که z را به صورت تابعی صریح از x به دست دهد؛ آنچه باقی می ماند محاسبه dz/dx است، سپس معادله $dz/dx = 0$ را حل می کنیم و y های مربوطه را می یابیم.

بررسی می‌کنیم. هرگاه λ از دو معادله اول حذف شود، دستگاه آشکارا به

$$g(x, y) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} = 0$$

یعنی همان دستگاهی که آنرا در پاراگراف بالا به دست آوردیم، تبدیل می‌شود. باید توجه داشت که این شیوه - حل دستگاه (۷) - بر حسب x و y - مسئله مورد نظر را به طریقی حل می‌کند که از دو نظر عمده برای کاربری مهم است: تقارن مسئله با انتخاب دلخواه يك متغیر مستقل به هم نمی‌خورد؛ و شرط جانبی را به بهای ناچیز معرفی λ به عنوان يك متغیر دیگر حذف می‌کند. پارامتر λ خریب لاگرائز خوانده می‌شود، و این روش به روش ضرایب لاگرائز معروف است.^۱ این مبحث، بروشنی، به مسائلی شامل توابعی با بیش از دو متغیر و با چندین شرط جانبی تعمیم می‌پذیرد.

شرایط جانبی انتگرالی. در اینجا می‌خواهیم معادله دیفرانسیلی پیدا کنیم که تابعی مانند $y(x)$ ، که مقداری ایستی به انتگرال زیر می‌دهد، در آن صدق کند

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (۸)$$

که در آن، y مقید به شرط جانبی

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx = c \quad (۹)$$

است و مقادیر مفروض $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ را در نقاط انتهایی می‌پذیرد. همچون گذشته، فرض می‌کنیم که $y(x)$ تابع ایستی مورد نظر باشد و آن را کمی تغییر می‌دهیم تا شرط تحلیلی مورد نظر به دست آید. اما، به این مسئله نمی‌توان باروش قبلی، که در آن توابع نزدیک به $y(x)$ را به صورت $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha \eta(x)$ در نظر می‌گرفتیم، برخورد کرد، زیرا باین توابع در حالت کلی انتگرال J ثابت نمی‌ماند. در عوض، يك خانواده دو پارامتری از توابع نزدیک y را در نظر خواهیم گرفت

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha_1 \eta_1(x) + \alpha_2 \eta_2(x) \quad (۱۰)$$

که در آن $\eta_1(x)$ و $\eta_2(x)$ دارای مشتقات پیوسته مرتبه دوم اند و در نقاط انتهایی صفر می‌شوند. پارامترهای α_1 و α_2 مستقل نیستند بلکه با شرط

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = c \quad (۱۱)$$

به هم مربوط می‌شوند. به این ترتیب مسئله به یافتن شرایط لازم برای آنکه تابع

۱. شرح مختصری درباره لاگرائز در پیوست الف آورده شده است.

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \quad (12)$$

دارای يك مقدار ایستی در $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ باشد منجر می گردد، که در آن α_1 و α_2 در شرط (۱۱) صدق می کنند. این وضعیت برای استفاده از روش ضرایب / گرانژ مهیا شده است، بنابراین، تابع زیر را معرفی می کنیم

$$\begin{aligned} K(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) &= I(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda J(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن

$$F = f + \lambda g$$

و با استفاده از شرایط لازم

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_2} = 0 \quad , \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{برای} \quad (14)$$

مقادیر ایستی غیرمقید آن را در $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ بررسی می کنیم. هرگاه از تابع زیر علامت انتگرال (۱۳) مشتق بگیریم و از رابطه (۱۰) استفاده کنیم، داریم

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta_i(x) + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta_i'(x) \right] dx \quad , i = 1 \text{ و } 2 \quad \text{برای}$$

و با قرار دادن $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ، براساس (۱۴) خواهیم داشت

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta_i(x) + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta_i'(x) \right] dx = 0$$

این رابطه، بعد از انتگرال گیری جزء به جزء دومین عبارت، به

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta_i(x) \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) \right] dx = 0 \quad (15)$$

تبدیل می شود. چون $\eta_1(x)$ و $\eta_2(x)$ هر دو دلخواه هستند، دوشروط نهفته در (۱۵) تنها به يك شرط منتهی می شوند، و طبق معمول نتیجه می گیریم که تابع ایستی $y(x)$ باید در معادله اولر

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (16)$$

صدق کند. جوابهای این معادله (اکستریمالهای مسئله) شامل سه پارامتر نامعین هستند:

دو ثابت انتگرال گیری، و ضریب لاگرانژ λ . سپس تابع ایستی ازین این اکسترمال ها چنان انتخاب می شود که در دو شرط مرزی صدق کند و مقدار انتگرال J را برابر با مقدار مفروض c گرداند.

درمورد انتگرال هایی که بستگی به دو یا چند تابع داشته باشند، به همان روش بخش گذشته می توان این نتیجه را تعمیم داد. مثلا هرگاه انتگرال

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z') dx$$

دارای مقدار ایستی، مشروط به شرط جانبی

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, z, y', z') dx = c$$

باشد، توابع ایستی $y(x)$ و $z(x)$ باید در دستگاه معادلات

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

صدق کنند، که در آن $F = f + \lambda g$. استدلال در این مورد به استدلالی که قبلا عرضه شده، شبیه است، و جزئیات آن را حذف می کنیم.

مثال ۱. منحنی باطول ثابت L را بیابید که دو نقطه $(0, 0)$ و $(1, 0)$ را به هم وصل می کند، بالای محور x ها واقع است و سطح محصور بین آن و محور x ها ماکزیمم است. این صورت خاصی از مسئله اولیه هم پیرامونی است که در آن بخشی از منحنی محصور کننده مساحت مورد نظر قطعه خط مستقیمی باطول یک است. مسئله عبارت است از ماکزیمم

کردن $\int_0^1 y dx$ با شرط جانبی

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = L$$

و شرایط مرزی $y(0) = 0$ و $y(1) = 0$. در اینجا داریم $F = y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2}$. بنابرین، معادله اولی عبارت خواهد بود از

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) - 1 = 0 \quad (18)$$

که، بعد از مشتق گیری به صورت

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{1}{\lambda} \quad (19)$$

درمی آید. در این حالت، انتگرال گیری لازم نیست، زیرا (۱۹) بلا درنگ بیان می کند که

انحنای ثابت و برابر $1/\lambda$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که منحنی ماکزیمم‌کننده مطلوب، قوسی از دایره‌ای به شعاع λ است (همان‌طور که انتظار می‌رفت). به عنوان روشی دیگر، می‌توانیم از رابطه (۱۸) انتگرال بگیریم تا رابطه

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{x-c_1}{\lambda}$$

حاصل شود. با حل این رابطه بر حسب y' و انتگرال‌گیری مجدد، خواهیم داشت

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2 \quad (20)$$

که البته این معادله دایره‌ای به شعاع λ است.

مثال ۴. در مثال ۱ ضرورت $L > 1$ روشن است. همچنین اگر $L > \pi/2$ ، قوس دایره تعیین شده به وسیله (۲۰) تابع $y > 0$ را به عنوان تابعی تک‌مقداری از x تعریف نمی‌کند. برای اجتناب از این مطالب مصنوعی، می‌توان منحنیها را به صورت پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ در نظر گرفت و به مسئله هم پیرامونی اولیه که ماکزیمم کردن

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

(که در آن $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ و $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$) با شرط جانبی

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = L$$

است، توجه کرد. در اینجا داریم

$$F = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

بنابراین معادلات اوایلر (۱۷) عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2}y + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) - \frac{1}{2}\dot{y} = 0$$

و

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) + \frac{1}{2}\dot{x} = 0$$

از این معادلات می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت و به دست آورد

$$x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2 \quad \text{و} \quad -y + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -c_1$$

اگر مقادیر $x - c_1$ و $y - c_1$ را بیایم، به توان دو برسانیم، و جمع کنیم، آنگاه نتیجه به صورت

$$(x - c_1)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2$$

خواهد بود، بنابراین، منحنی ما کمزیم کننده دایره است. این نتیجه را می توان به طریق زیر بیان کرد: هرگاه L طول منحنی بسته مسطح و A مساحت سطح محصور به آن باشد، آنگاه $A \leq L^2 / 4\pi$ ، و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که منحنی دایره باشد. رابطه ای از این نوع را نامساوی همپیرامونی گوئیم.^۱

شرایط جانبی متناهی. در آغاز این بخش مسئله یافتن ژئودزیک های رویه مفروض

$$G(x, y, z) = 0 \quad (21)$$

را بیان کردیم. حال مسئله کمی عمومی تر را در نظر می گیریم و آن عبارت است از یافتن یک منحنی فضایی $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $z = z(t)$ که مقدار ایستی به انتگرال

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt \quad (22)$$

می دهد. با این شرط که این منحنی باید روی رویه (21) قرار داشته باشد. روشی که به کار می گیریم، حذف شرط جانبی (21) است، و برای این کار به طریق زیر عمل می کنیم. فرض اینکه منحنی در بخشی از رویه واقع باشد، که در آن $G_z \neq 0$ ، به هیچ وجه از کلیت مسئله نمی کاهد. در این بخش از رویه، معادله (21) را می توان بر حسب z حل کرد، که $z = g(x, y)$ را به دست می دهد و

$$\dot{z} = \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} \quad (23)$$

هنگامی که (23) را در (22) قرار دهیم، مسئله به یافتن توابع ایستی غیر مقید برای انتگرال

$$\int_{t_1}^{t_2} f\left(\dot{x}, \dot{y}, \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}\right) dt$$

منجر می شود. از بخش گذشته می دانیم که معادلات اوایلر $(18) - (18)$ برای این مسئله عبارت اند از

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \frac{\partial g}{\partial x} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

۱. دانشجویان فیزیک می توانند از مطالب بحث شده در مرجع زیر بهره جویند

G. Polya and G. Szegő, "Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

و

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = 0.$$

از (۲۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) \quad \text{و} \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

بنابراین، معادلات اوپلر را می‌توان به شکل

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) = 0.$$

نوشت. حال اگر تابع $\lambda(t)$ را به صورت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) = \lambda(t) G_z \quad (24)$$

تعریف کنیم، و از روابط $\partial g / \partial x = -G_x / G_z$ و $\partial g / \partial y = -G_y / G_z$ استفاده کنیم، معادلات اوپلر به شکل

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \lambda(t) G_x \quad (25)$$

و

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \lambda(t) G_y \quad (26)$$

درخواهند آمد. بنابراین یک شرط لازم برای یک مقدار ایستی وجود تابعی همچون $\lambda(t)$ است که در روابط (۲۴)، (۲۵)، و (۲۶) صدق کند. با حذف $\lambda(t)$ ، معادلات متقارن زیر حاصل می‌شوند

$$\frac{(d/dt)(\partial f / \partial \dot{x})}{G_x} = \frac{(d/dt)(\partial f / \partial \dot{y})}{G_y} = \frac{(d/dt)(\partial f / \partial \dot{z})}{G_z} \quad (27)$$

که همراه با (۲۱) اکستریمال‌های مسئله را به دست خواهند داد. ذکر این نکته جالب است که معادلات (۲۴)، (۲۵)، و (۲۶) را می‌توان به عنوان معادلات اوپلر برای یافتن توابع ایستی غیر مقید انتگرال

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + \lambda(t) G(x, y, z)] dt$$

تلقی کرد. این بسیار شبیه به نتیجه‌ای است که در مورد شرایط جانبی انتگرالی به دست آوردیم با این تفاوت که در اینجا ضریب، به جای یک ثابت نامعین، تابعی نامعین از t است.

اگر در حالت مربوط به تعیین ژئودزیک‌های رویه (۲۱) از این نتایج استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

معادلات (۲۷) به صورت

$$\frac{(d/dt)(\dot{x}/f)}{G_x} = \frac{(d/dt)(\dot{y}/f)}{G_y} = \frac{(d/dt)(\dot{z}/f)}{G_z} \quad (28)$$

درمی‌آیند، مسئله عبارت از استخراج اطلاعات از این دستگاه است.

مثال ۳. اگر رویه (۲۱) را کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ انتخاب کنیم، آنگاه $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ و رابطه (۲۸) به صورت

$$\frac{f\ddot{x} - \dot{x}\dot{f}}{2xf^2} = \frac{f\ddot{y} - \dot{y}\dot{f}}{2yf^2} = \frac{f\ddot{z} - \dot{z}\dot{f}}{2zf^2}$$

درمی‌آید، که می‌توان آن را به شکل

$$\frac{xy - y\dot{x}}{x\dot{y} - y\dot{x}} = \frac{\dot{f}}{f} = \frac{yz - z\dot{y}}{y\dot{z} - z\dot{y}}$$

نوشت. اگر از جمله وسطی چشم‌پوشی کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{(d/dt)(x\dot{y} - y\dot{x})}{x\dot{y} - y\dot{x}} = \frac{(d/dt)(y\dot{z} - z\dot{y})}{y\dot{z} - z\dot{y}}$$

با يك بار انتگرال‌گیری داریم $(x\dot{y} - y\dot{x}) = c_1(y\dot{z} - z\dot{y})$ یا

$$\frac{\dot{x} + c_1\dot{z}}{x + c_1z} = \frac{\dot{y}}{y}$$

ويك انتگرال‌گیری دیگر، معادله $x + c_1z = c_2y$ را به دست می‌دهد. این معادله صفحه‌ای مارپیچ مبداء است، بنابراین ژئودزیک‌ها روی کره، کمانهائی از دوائر عظیمه‌اند. روش دیگری برای رسیدن به همین نتیجه، در تمرین ۴۸-۵ ارائه شده است.

در این مثال توانستیم معادلات (۲۸) را بسادگی حل کنیم، ولی در حالت کلی این کار فوق‌العاده مشکل است. اهمیت اصلی این معادلات در ارتباط آنها با این نتیجه بسیار مهم فیزیک ریاضی نهفته است که: هرگاه ذره‌ای، بدون اعمال هیچ گونه نیروی خارجی بدان، روی رویه‌ای بلغزد، مسیر آن ژئودزیک خواهد بود. این قضیه دینامیکی را در پیوست ب ثبت خواهیم کرد. برای این بحث بهتر است فرض کنیم پارامتر t طول قوس s از منحنی است، به طوری که $f = 1$ و معادلات (۲۸) به صورت

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x} = \frac{d^2y/ds^2}{G_y} = \frac{d^2z/ds^2}{G_z} \quad (29)$$

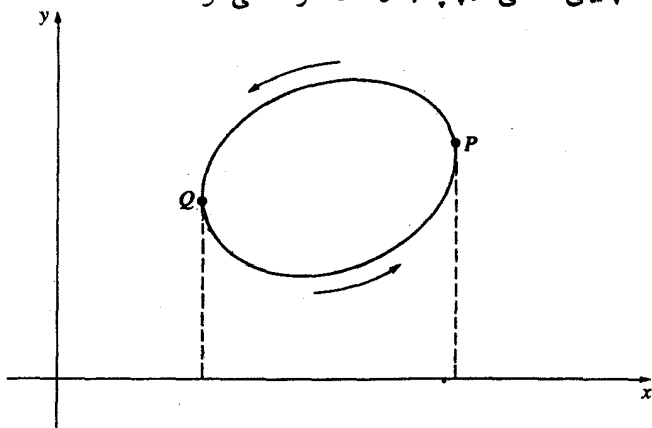
درمی آیند.

تمرین

۱- برای يك منحنی محدب بسته همانند آنچه در شکل ۷۱ نشان داده ایم، خود را در مورد اعتبار رابطه (۱) قانع کنید. راهنمایی: معنای هندسی حاصل جمع

$$\int_P^Q y dx + \int_Q^P y dx$$

چيست؟ در اینجا، اولین انتگرال در قسمت بالایی منحنی از راست به چپ و دومین انتگرال روی قسمت پایینی منحنی از چپ به راست گرفته می شود.



شکل ۷۱

۲- رابطه (۱) را برای دایره ای که معادله پارامتری آن به صورت $x = a \cos t$ ، $y = a \sin t$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ است، تحقیق کنید.

۳- مسائل زیر را به روش ضرایب لاگرانژ حل کنید:

الف) نزدیکترین نقطه از صفحه $ax + by + cz = d$ به مبدأ را پیدا کنید. راهنمایی: تابع $w = x^2 + y^2 + z^2$ را با شرط جانبی $ax + by + cz - d = 0$ می نیمم کنید. (ب) نشان دهید از میان مثلثهایی که دارای محیط ثابت مفروضی هستند مثلث متساوی الاضلاع بیشترین مساحت را دارد. راهنمایی: اگر x ، y و z طول اضلاع باشند در این صورت

$$s = (x + y + z)/2 \text{، که در آن } A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

(ج) هرگاه حاصل جمع اعداد مثبت x_1 ، x_2 ، \dots ، x_n مقدار ثابت s باشد، ثابت کنید مساکزیم حاصل ضرب آنان، $x_1 x_2 \dots x_n$ ، برابر با s^n/n^n است و از این نتیجه بگیرید که میانگین هندسی n عدد مثبت نمی تواند از میانگین حسابی آنها تجاوز کند:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

۴- سطح زیر يك منحنی واقع در ربع اول که نقاط $(0, 0)$ و $(1, 0)$ را به هم وصل می کند مقدار ثابت مفروضی است. نشان دهید کوتاهترین منحنی از این نوع، قوسی از دایره است.

۵- يك زنجر یکنواخت انعطاف پذیر با طول معین بین دو نقطه آویزان شده است. شکل آن را با فرض اینکه زنجر چنان آویزان شود که انرژی پتانسیل آن مینیمم شود، به دست آورید.

۶- مسئله اصلی هم پیرامونی (مثال ۲) را با به کار بردن مختصات قطبی حل کنید. راهنمایی: مبدأ مختصات را نقطه دلخواهی از منحنی، و محور قطبی را خط مماس بر منحنی در آن نقطه فرض کنید، آنگاه مقدار

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\theta$$

را با این شرط جانبی که انتگرال

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta$$

مقدار ثابتی باشد ماکزیمم کنید.

۷- نشان دهید که ژئودزیکهای استوانه‌ای به معادله $g(x, z) = 0$ زاویه ثابتی با محور y می سازند.

پیوست الف. لاگرانژ

ژوزف لویی لاگرانژ^۱ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) از هندسه بیزار بود و لسی کشفیات برجسته‌ای در حساب تغییرات و مکانیک تحلیلی دارد. وی همچنین در تدوین نظریه اعداد و جبر سهم داشت، و به آن جریان فکری که بعداً توسط گاوس و آبل تقویت گردید، کمک کرد. زندگی ریاضی وی را می توان گسترش طبیعی کارهای هم عصر مسن تر و مهم تر وی یعنی اوایل دانست، که در بسیاری جهات کارهای او را به پیش راند و آنها را پالایش کرد.

لاگرانژ در تورینو از تیاکان مختلط فرانسوی-ایتالیایی به دنیا آمد. در دوران کودکی به هنر و ادبیات پیش از علوم علاقه داشت. اما هنوز در مدرسه بود که علاقه وی به ریاضی، با خواندن مقاله‌ای از ادموند هالی در مورد کاربردهای جبر در نورشناسی، شعله ور گردید. وی آنگاه يك دوره مطالعات مستقل را آغاز کرد، و آنچنان بسرعت پیشرفت کرد که در سن ۱۹ سالگی در مدرسه سلطنتی نظام شهر تورینو به سمت استادی منصوب گردید.^۲

1. Joseph Louis Lagrange

۲. به مقاله پرارزش زیر مراجعه کنید،

George Sarton, Lagrange's Personality, *Proc. Am. Phil. Soc.*, vol. 88, pp. 457-496, 1944.

آثار لاگرانژ در حساب تغییرات از اولین و مهمترین کارهای اوست. در سال ۱۷۵۵ وی روش ضرایب خود را برای حل مسئله هم پیرامونی به اطلاع اوایلر رساند. این مسائل سالها ذهن اوایلر را بعبث مشغول کرده بود، چرا که از حد روشهای نیمه هندسی او فراتر بودند. اوایلر بلافاصله پاسخ بسیاری از سؤالاتی را که در اندیشه اش بود دریافت؛ ولی به لاگرانژ با مهربانی و گذشت قابل ستایش پاسخ گفت، و از انتشار کارهای خود صرف نظر کرد، چنانکه در نامه به لاگرانژ می نویسد «از انتشار آنها خودداری کردم تا شما را از هیچ بخشی از افتخاراتی که به شما تعلق دارد محروم نکرده باشم.» لاگرانژ چند سال دیگر به مطالعه تحلیلی خود در حساب تغییرات ادامه داد، و هم او و هم اوایلر آن را در مورد بسیاری از انواع جدید مسائل، بخصوص در مکانیک، به کار بردند.

در سال ۱۷۶۶ هنگامی که اوایلر برلین را به قصد سن پترزبورگ ترک می کرد، به فردریک کبیر پیشنهاد کرد که از لاگرانژ برای جانشینی وی دعوت به عمل آید. لاگرانژ این دعوت را پذیرفت و تا هنگام مرگ فردریک در سال ۱۷۸۶ به مدت ۲۰ سال در برلین به سر برد. در این مدت وی به طور گسترده در جبر و نظریه اعداد کار می کرد، و شاهکار خود، رساله مکانیک تحلیلی (۱۷۸۸) را، تحریر کرد، و در آن مکانیک عمومی را یکپارچه کرد، و همچنانکه هملتن بعدها گفت، از آن «نوعی شعر علمی» ساخت. از میراثهای جاویدان این اثر می توان از معادلات حرکت لاگرانژ، مختصات تعمیم یافته، و مفهوم انرژی پتانسیل نام برد (که همگی در پیوست ب، مورد بحث قرار می گیرند).^۱

بعد از مرگ فردریک، فضای دربار پروس برای دانشمندان نسبتاً نامطبوع شد، از این رو لاگرانژ دعوت لویی شانزدهم را برای عزیمت به پاریس پذیرفت، و در آنجا به وی آپارتمانی در لوور واگذار کردند. لاگرانژ با وجود آنهمه نبوغ عظیم، متواضع و بی تعصب بود. و گرچه همنشین اشراف و در واقع خود نیز یکی از آنها بود، در طول ناآرامیهای انقلاب فرانسه مورد احترام و توجه همه احزاب بود. مهم ترین کار وی در این دوران نقش هدایت کننده و پیشنهادش در ایجاد دستگاه متریک در مورد اوزان و مقادیر است. در ریاضیات، وی سعی کرد پایه ای قابل قبول برای فرایندهای اساسی آنالیز عرضه کند، ولی این تلاشها عمدتاً بی ثمر ماند. در اواخر عمر، حس کرد که ریاضیات به بن بست رسیده است و فیزیک، شیمی، زیست شناسی، و دیگر علوم تواناترین مغزهای آینده را به خود جلب خواهند کرد. این بدبینی ممکن بود که از بین رود، اگر وی می توانست ورود گاوس و آیندگان را به صحنه پیش بینی کند، کسانی که قرن نوزدهم را به غنی ترین مرحله تاریخ طولانی ریاضیات تبدیل کردند.

پیوست ب. اصل هملتن و نتایج آن

یکی از اهداف ریاضیدانان قرن ۱۸ کشف یک اصل عمومی بود که از آن بتوان مکانیک

۱. برای آشنایی با جنبه های جالبی از مکانیک لاگرانژی (و بسیاری مطالب دیگر) نگاه کنید به، S. Bochner, "The Role of Mathematics in the Rise of Science," pp. 199-207, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1966,

نیوتنی را استنتاج کرد. در جستجوی یافتن رشته کار، آنان به یک رشته از حقایق دقیق فیزیک مقدماتی توجه کردند: مثلاً، اینکه پرتو نور سریعترین مسیر را در یک محیط نوری می پیماید، اینکه شکل یک زنجیر آویخته در حالت تعادل انرژی پتانسیلش را می نیم می کند، و اینکه جابهای کف صابون، شکلی با کمترین مساحت را برای یک حجم ثابت به خود می گیرند. این حقایق و نظایر آنها این فکر را به اوایل القا کردند که طبیعت اهداف گوناگون خود را به پربازده ترین و اقتصادی ترین وجه انجام می دهد، اینکه در پشت پدیده های درهم و آشفته، ساده گیهای پنهانی وجود دارد. این ایده ماوراء الطبیعه بود که وی را به ایجاد حساب تغییرات به عنوان وسیله بررسی این چنین مسائلی رهنمون کرد. رویای اوایل تقریباً یک قرن بعد توسط همیلتن تحقق یافت.

اصل همیلتن. فرض می کنیم که ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

در فضا حرکت می کند، و فرض می کنیم که این نیرو پایستار باشد، به این معنی که کار انجام شده توسط این نیرو برای انتقال ذره از یک نقطه به نقطه دیگر، مستقل از مسیر باشد. بسادگی می توان نشان داد که تابع عددی $U(x, y, z)$ موجود است به قسمی که $\partial U / \partial x = F_x$ ، $\partial U / \partial y = F_y$ و $\partial U / \partial z = F_z$ باشند. تابع $V = -U$ انرژی پتانسیل ذره نامیده می شود، زیرا تغییر مقدار آن از نقطه ای به نقطه دیگر برابر با کاری است که باید در قبال \mathbf{F} انجام گیرد تا ذره از نقطه اول به نقطه دوم انتقال یابد. بعلاوه، اگر $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ بردار موقعیت ذره باشد به طوری که

$$\mathbf{v} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

بترتیب سرعت و تندی ذره باشند، آنگاه $T = mv^2/2$ انرژی جنبشی ذره خواهد بود. اگر این ذره در زمانهای t_1 و t_2 در نقاط P_1 و P_2 باشد، در آن صورت می خواهیم مسیری را که ذره از P_1 به P_2 می پیماید بیابیم. عمل (یا انتگرال همیلتن) به این ترتیب تعریف می شود

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$$

و در حالت کلی مقدار آن به مسیری که ذره هنگام عبور از P_1 به P_2 طی می کند بستگی دارد. نشان خواهیم داد که مسیر واقعی ذره، مسیری است که برای عمل A یک مقدار ایستی به دست می دهد.

تابع $L = T - V$ را لاگرانژی می نامند، و در حالت مورد بحث توسط رابطه

$$L = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] - V(x, y, z)$$

بیان می‌شود. به این ترتیب تابع زیر انتگرال عمل، به صورت

$$f(x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt)$$

است، و هرگاه عمل دارای مقدار ایستی باشد، معادلات اوایلر باید برقرار باشند. این معادلات عبارت‌است از:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

و می‌توانند به شکل زیر نوشته شوند

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{F}$$

این دقیقاً همان دومین قانون حرکت نیوتن است. به این ترتیب قانون دوم نیوتن شرطی لازم برای این است که عمل ذره دارای مقداری ایستی باشد. چون قانون نیوتن بر حرکت ذره حاکم است، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

اصل همیلتن. هرگاه ذره‌ای از نقطه P_1 به نقطه P_2 در فاصله زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ تغییر مکان دهد، آنگاه مسیر واقعی ذره مسیری است که برای آن عمل مقداری ایستی پذیرد. ارائه مثالهای ساده‌ای که در آنها مسیر واقعی ذره عمل را ماکزیمم کند، بسیار ساده است. ولی، هرگاه فاصله زمانی به اندازه کافی کوتاه باشد، می‌توان ثابت کرد که عمل لزوماً می‌نیم خواهد بود. این شکل، از اصل همیلتن گاهی اصل کمترین عمل نامیده می‌شود، و می‌تواند به طور غیردقیق چنین تعبیر گردد که طبیعت تمایل دارد که انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی را در طول حرکت برابر کند.

درمبحث بالا قانون نیوتن را پذیرفتیم و اصل همیلتن را به عنوان نتیجه‌ای به دست آوردیم. همان استدلال نشان می‌دهد که قانون نیوتن نیز از اصل همیلتن نتیجه می‌شود، بنابراین، این دوروش برخورد با حرکت ذره - برداری و حساب تغییرات - با یکدیگر معادل‌اند. این نتیجه بر مشخصه اساسی اصول تغییرات در فیزیک تأکید دارد: این اصول، قوانین فیزیکی را تنها برحسب انرژی، و بدون توسل به دستگاه مختصات خاصی بیان می‌کنند.

استدلال ارائه شده را می‌توان مستقیماً به دستگاه متشکل از n ذره با جرمهای m_i و بردارهای موقعیت $\mathbf{r}_i(t) = x_i(t)\mathbf{i} + y_i(t)\mathbf{j} + z_i(t)\mathbf{k}$ که تحت تأثیر نیروهای پایستار $\mathbf{F}_i = F_{i1}\mathbf{i} + F_{i2}\mathbf{j} + F_{i3}\mathbf{k}$ قراردارند تعمیم داد. در این حالت انرژی پتانسیل دستگاه تابعی مانند $V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ است، به طوری که

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -F_{i1}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = -F_{i2}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = -F_{i3}$$

و انرژی جنبشی آن برابر است با

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right]$$

و عمل آن در فاصله زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ عبارت است از

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$$

درست به همان روش بالا، مشاهده می‌شود که معادلات حرکت نیوتن

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i$$

شرط لازمی است برای دستگاه که عمل دارای مقدار ایستی باشد. بنا براین، اصل همیلتن برای هردستگاه متناهی از ذرات که نیروها در آن پایستار باشند، درست است. این اصل همچنین در مورد دستگاههای کلیتر دینامیکی شامل قیود و اجسام سخت و نیز برای محیطهای پیوسته، به کار می‌رود.

بعلاوه، اصل همیلتن می‌تواند برای استنتاج قوانین بنیادی الکتریسته و مغناطیس، نظریه کوانتومی و نسبیت به کار رود. نفوذ این اصل آنچنان عمیق و گسترده است که بسیاری از دانشمندان آن را به عنوان قویترین اصل فیزیک ریاضی قلمداد کرده و در رأس هرم علوم فیزیکی جای داده‌اند. ماکس پلانک، پایه‌گذار نظریه کوانتومی، در این باره چنین می‌گوید: «عالیترین و آرمانیترین هدف دانش فیزیکی این است که همه پدیدههای طبیعی را که تاکنون مشاهده شده‌اند یا مشاهده خواهند شد، در یک اصل ساده متمرکز کنند.... در بین قوانین کم و بیش عمومی که از دستاوردهای علوم فیزیکی طی قرون گذشته به شمار می‌روند، شاید بتوان گفت که اصل کمترین عمل، چه از نظر شکل و چه از نظر محتوا، به این ایده آل نهایی پژوهشهای نظری بیش از همه نزدیک شده باشد.»

مثال ۱. هرگاه ذره‌ای به جرم m مقید به حرکت روی رویه مفروض $G(x, y, z) = 0$ باشد، هیچ نیروی خارجی بر آن اثر نکند، در آن صورت این ذره در امتداد یک ژئودزیک آن خواهد لغزید. برای اثبات این حکم، نخست مشاهده می‌کنیم که چون هیچ نیرویی وجود ندارد $V = 0$ ، و بنا براین لاگرانژی، $L = T - V$ ، برابر با T می‌شود، که در آن

$$T = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]$$

اکنون از اصل همیلتن استفاده می‌کنیم و می‌خواهیم عمل

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} T dt$$

با شرط جانبی $G(x, y, z) = 0$ ایستی شود. طبق بخش ۴۹، این امر، معادل ایستی بودن انتگرال

$$\int_{t_1}^{t_2} [T + \lambda(t)G(x, y, z)] dt$$

بدون هیچ شرط جانبی است، که در آن $\lambda(t)$ تابع نامعینی از t است. معادلات اوپلر برای این مسئله تغییرات غیرمقید، عبارت‌اند از

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - \lambda G_x = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} - \lambda G_y = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} - \lambda G_z = 0$$

هر گاه m و λ حذف شوند، این معادلات به صورت

$$\frac{d^2 x / dt^2}{G_x} = \frac{d^2 y / dt^2}{G_y} = \frac{d^2 z / dt^2}{G_z}$$

درمی‌آیند. اکنون با توجه به اینکه انرژی کلی ذره، $T + V = T$ ، مقدار ثابتی است (این را در زیر ثابت می‌کنیم)، تندی ذره نیز ثابت است، و بنابراین برای ثابتی مانند k داریم $s = kt$ ، مشروط به اینکه s ، طول کمان، از نقطه مناسبی اندازه‌گیری شود. پس می‌توانیم معادلات بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d^2 x / ds^2}{G_x} = \frac{d^2 y / ds^2}{G_y} = \frac{d^2 z / ds^2}{G_z}$$

این معادلات دقیقاً معادلات ۴۹- (۲۹) هستند، بنا بر این چنانچه گفته شد مسیر ذره يك ژئودزیک رویه است.

معادلات لاگرانژ. در مکانیک کلاسیک، اصل همپلتن را می‌توان منشأ معادلات حرکت لاگرانژ دانست که در این مبحث مقام اول را دارد. برای اینکه این ارتباط را بیابیم، باید نخست بدانیم که مقصود از درجه آزادی و مختصات تعمیم یافته چیست.

ذره‌ای که به طور آزاد در فضای سه بعدی حرکت می‌کند دارای سه درجه آزادی خوانده می‌شود، زیرا موقعیت آن می‌تواند به وسیله سه عدد مستقل x, y, z مشخص شود. با مقید کردن ذره به حرکت روی رویه $G(x, y, z) = 0$ ، درجه آزادی آن به دو کاهش می‌یابد، چرا که یکی از مختصات آن می‌تواند بر حسب دوتای دیگر بیان گردد. به طریق مشابه، هر دستگاه غیرمقید متشکل از n ذره مادی، دارای $3n$ درجه آزادی است، و معرفی قیود اضافی موجب کاهش تعداد مختصات مستقل می‌شود که برای توصیف آرایش دستگاه لازم‌اند. هر گاه مختصات متعامد ذرات x_i, y_i, z_i باشند ($i = 1, 2, \dots, n$)، هر گاه قیود به وسیله k معادله مستقل و سازگار به صورت

$$G_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

توصیف شوند، در آن صورت تعداد درجات آزادی برابر با $m = 3n - k$ است. در اصل

از این معادلات می توان برای کاهش تعداد مختصات از $3n$ به m با بیان $3n$ عدد x_i, y_i و $z_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ بر حسب m تا از این اعداد استفاده کرد. ولی ساده تر آن است که مختصات تعمیم یافته q_1, q_2, \dots, q_m لاگرانژ را معرفی کنیم، که می توانند هر m مختص مستقلی باشند که نقادیرشان آرایش دستگاه را معین می سازد. این کار به ما آزادی کامل می دهد تا هر دستگاه مختصاتی را که مناسب با مسئله مورد نظر باشد - متعامد، استوانه ای، کروی، و غیره - انتخاب کنیم و تحلیل ما را از هر دستگاه مختصات بخصوصی مستقل می کند. اکنون مختصات متعامد ذرات را بر حسب این مختصات تعمیم یافته بیان می کنیم و توجه داریم که روابط حاصل خود به خود قیود را در بر دارند: $x_i = x_i(q_1, \dots, q_m)$ ، $y_i = y_i(q_1, \dots, q_m)$ و $z_i = z_i(q_1, \dots, q_m)$ که در آن $i = 1, 2, \dots, n$. اگر m_i جرم ذره i ام باشد، در این صورت انرژی جنبشی دستگاه، برابر است با

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right]$$

که می توان آن را بر حسب مختصات تعمیم یافته به صورت زیر نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \right] \quad (1)$$

که در آن $\dot{q}_j = dq_j/dt$ به منظور استفاده بعدی، تذکر می دهیم که T تابع همگن درجه دوم نسبت به \dot{q}_j هاست. فرض می شود که انرژی پتانسیل V صرفاً تابعی از q_j ها باشد، بنابراین، لاگرانژی $L = T - V$ تابعی به شکل زیر است

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m)$$

اصل همیلتن می گوید حرکت به طریقی انجام می گیرد که عمل $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ در هر فاصله زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ ایستی می شود، و بنابراین معادلات اوایلر باید برقرار باشند. در این حالت، معادلات مزبور عبارت اند از

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

که به معادلات لاگرانژ شهرت دارند. این معادلات، یک دستگاه m معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تشکیل می دهند که حل آن q_j ها را به صورت توابعی از t به دست می دهد.

ما در اینجا تنها یک نتیجه عمومی از معادلات لاگرانژ، یعنی اصل پایستگی انرژی، را به دست می آوریم.

اولین گام در این اثبات، توجه به اتحاد زیر است که برای هر تابع L از متغیرهای t و q_1, \dots, q_m و $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ صادق است:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right] = \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (۳)$$

چون L ، لاگرانژی دستگاه، در معادلات (۲) صدق می‌کند و به طور صریح به t بستگی ندارد، طرف راست معادله (۳) صفر می‌شود و در نتیجه رابطه

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = E \quad (۴)$$

برای یک مقدار ثابت E برقرار است. سپس مشاهده می‌کنیم که $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$ ، بنابراین داریم $\partial L / \partial \dot{q}_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$. همچنانکه قبلاً ذکر شد، رابطه (۱) نشان می‌دهد که T تابع همگن درجهٔ دومی از \dot{q}_j هاست، بنابراین، طبق قضیهٔ اوایلر در مورد توابع همگن داریم^۱.

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

با این نتیجه، معادله (۴) به صورت $2T - L = E$ یا $2T - (T - V) = E$ درمی‌آید. بنابراین،

$$T + V = E$$

که بیان می‌کند که در طول حرکت، مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل ثابت است. در مثال زیر نحوهٔ به‌کارگیری معادلات لاگرانژ را در حل مسائل دینامیکی مشخص نشان می‌دهیم.

مثال ۲. هرگاه ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر یک نیروی گرانشی به بزرگی km/r^2 و متوجه به‌طرف مبدأ، در یک صفحه حرکت کند، آنگاه انتخاب مختصات قطبی به عنوان مختصات تعمیم‌یافته، طبیعی است: $q_1 = r$ و $q_2 = \theta$. بسادگی مشاهده می‌کنیم که $T = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ و $V = -km/r$ پس لاگرانژی برابر است با

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{km}{r}$$

۱. به یاد آورید که تابعی مانند $f(x, y)$ را همگن از درجهٔ n نسبت به x و y گویند هرگاه $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$. چنانچه از هر دو طرف این رابطه نسبت به k مشتق بگیریم و سپس k را برابر با ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

که قضیهٔ اوایلر برای تابع مذکور است و همین نتیجه در مورد یک تابع همگن با بیش از دو متغیر نیز برقرار است.

ومعادلات لاگرانژ عبارت اند از

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (۵)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (۶)$$

چون L به طور صریح به θ بستگی ندارد، معادله (۶) نشان می‌دهد که $\partial L / \partial \dot{\theta} = mr^2 \dot{\theta}$ مقدار ثابتی است، بنابراین برای ثابتی مانند h که مثبت فرض می‌شود داریم

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (۷)$$

سپس مشاهده می‌کنیم که (۵) را بسادگی می‌توان به شکل

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{k}{r^2}$$

نوشت. این دقیقاً معادله ۲۱- (۱۲) است، که آن را در بخش ۲۱ حل کردیم و به دست آوردیم که مسیر حرکت ذره يك مقطع مخروطی است.

مسائل تغییراتی در مورد انتگرالهای دوگانه. روش عمومی یافتن شرایط لازم را برای آنکه يك انتگرال ایستی باشد، می‌توان برای انتگرال‌های چندگانه نیز به کار برد. مثلاً ناحیه‌ای مانند R از صفحه xy را در نظر می‌گیریم که به وسیله يك منحنی بسته C محدود شده باشد (شکل ۷۲). فرض می‌کنیم $z = z(x, y)$ تابعی باشد که در R تعریف شده باشد و روی C مقادیر مرزی مفروضی را بپذیرد ولی در سایر جاها مقدارش دلخواه باشد (ولی شرایط عادی مشتق‌پذیری را داشته باشد). این تابع را می‌توان معرف يك رویه متغیر تصور کرد که در طول مرز خود در فضا ثابت باشد. انتگرالی به صورت

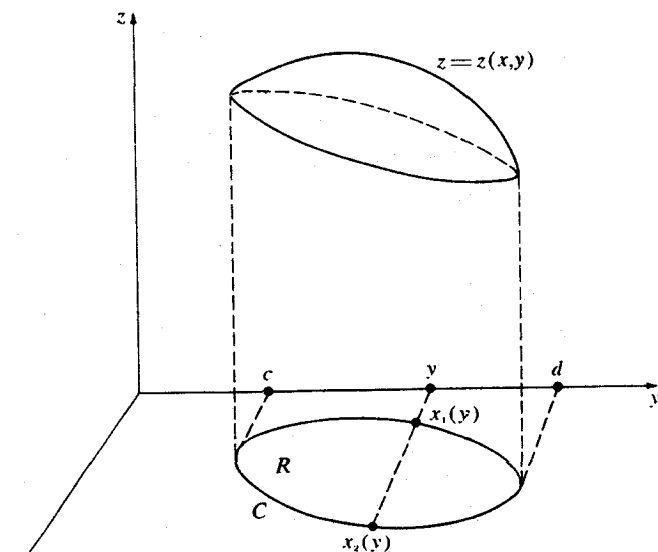
$$I(z) = \iint_R f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy \quad (۸)$$

دارای مقادیری است که به انتخاب تابع z بستگی دارد، و می‌توانیم مسئله یافتن تابع z (تابع ایستی) را که به این انتگرال مقدار ایستی بدهد، طرح کنیم.

ما با الگوی استدلال آشنا هستیم. فرض می‌کنیم که $z(x, y)$ تابع ایستی مطلوب باشد و تابع تغییر یافته $\bar{z}(x, y) = z(x, y) + \alpha \eta(x, y)$ را تشکیل می‌دهیم، که در آن، تابع $\eta(x, y)$ روی C صفر می‌شود. اگر تابع \bar{z} را در انتگرال (۸) بگذاریم، تابع $I(\alpha)$ از پارامتر α به دست می‌آید، و درست مثل گذشته، از شرط لازم $I'(0) = 0$ ، رابطه زیر به دست می‌آید

$$\iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial z} \eta + \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial z_y} \eta_y \right) dx dy = 0 \quad (۹)$$

حال، برای ساده کردن عمل حذف η_x و η_y ، فرض می‌کنیم که منحنی C دارای این خاصیت باشد که هر خط موازی با یکی از محورهای x و y ، حداکثر C را در دو نقطه قطع کند. پس با در نظر گرفتن انتگرال دوگانه دومین عبارت داخل پرانتز در (۹)، به عنوان یک انتگرال تکراری (شکل ۷۲ را ببینید)، خواهیم داشت



شکل ۷۲

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x dx dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x dx dy$$

و چون η روی C صفر می‌شود، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x dx &= \left[\eta \frac{\partial f}{\partial z_x} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) dx \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x dx dy = - \iint_R \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) dx dy$$

عبارت شامل η_y را نیز می‌توان به روشی مشابه تغییر شکل داد، و رابطه (۹) به صورت زیر

۱. این محدودیت غیر ضروری است، و در صورت تمایل به استفاده از قضیه گرین، می‌توان آن را حذف کرد.

درمی آید

$$\iint_R \eta \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z_y} \right) \right] dx dy = 0 \quad (10)$$

اکنون از دلخواه بودن η نتیجه می گیریم که عبارت داخل کروشه در رابطه (۱۰) باید صفر باشد، بنابراین،

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z_y} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

معادلهٔ اوایلر برای تابع اکستریمال در این حالت است. همچون گذشته، تابع ایستی (اگر موجود باشد) تابع اکستریمالی است که در شرایط مرزی داده شده صدق می کند.

مثال ۳. مسئلهٔ رویهٔ کمترین مساحت در ساده ترین شکلش، برای اولین بار توسط اوایلر به این ترتیب طرح شد: مطلوب است تعیین رویه ای که به منحنی بستهٔ مفروضی محدود و دارای کمترین مساحت باشد. هرگاه فرض کنیم که تصویر این منحنی در صفحهٔ xy يك منحنی بستهٔ C باشد که ناحیهٔ R از این صفحه را احاطه کند، و نیز اگر رویه به صورت $z = z(x, y)$ قابل نمایش باشد، آنگاه مسئله عبارت می شود از می نیم کردن انتگرال مساحت رویه

$$\iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

مشروط به این شرط جانبی که $z(x, y)$ روی منحنی C ، مقادیر داده شده را اختیار کند. معادلهٔ اوایلر (۱۱) برای این انتگرال عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0$$

که آن را می توان به صورت زیر نوشت

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0 \quad (12)$$

این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی توسط لاگرانژ کشف شد. اوایلر نشان داد که هر رویهٔ کمترین مساحت که بخشی از يك صفحه نباشد باید شکل زینی داشته باشد، و انحناى میانگین آن در هر نقطه صفر باشد. مسئلهٔ ریاضی اثبات وجود رویه های کمترین مساحت، و به عبارت دیگر اثبات اینکه (۱۲) دارای جوابهایی است که در شرایط مرزی مناسب صدق می کنند، فوق العاده مشکل است. حلی کامل از این مسئله تنها در ۱۹۳۰ و ۱۹۳۱ به طور جداگانه توسط

۱. انحناى میانگین رویه در يك نقطه به صورت زیر تعریف می شود: خط قائم بر رویه در آن نقطه، و صفحه ای شامل این خط قائم را در نظر می گیریم. همچنانکه این صفحه حول این خط می چرخد، انحناى منحنی حاصل از تقاطع آن با رویه، تغییر می کند، و انحناى میانگین نصف مجموع مقادیر ماکزیمم و می نیمم آن است.

ت. رادو^۱ (مجارستانی، ۱۸۹۵-۱۹۶۵) و ج. داگلاس^۲ (آمریکایی، ۱۸۹۷-۱۹۶۵) به دست آمد. روشی تجربی برای یافتن رویه‌های کمترین مساحت به وسیلهٔ فیزیکدان کور بلژیکی ج. پلاتو^۳ (۱۸۵۱-۱۸۸۳) ابداع شد، که آن را در رسالهٔ سال ۱۸۷۳ خود در خصوص نیروهای مولکولی موجود در مایعات، تشریح کرد. اصل مطلب این است که هرگاه قطعه سیمی را به شکل یک منحنی بسته خم کنیم و در محلول صابون فروبریم، آنگاه حباب صابونی که سیم را می‌پوشاند باید به شکل رویهٔ با کمترین سطح باشد، تا بتواند انرژی پتانسیل ناشی از کشش سطحی را می‌نیمد. پلاتو آزمایشهای جالب متعددی از این نوع انجام داد، و از زمان وی مسئلهٔ رویه‌های کمترین مساحت به مسئلهٔ پلاتو شهرت یافته است.^۴

مثال ۴. در بخش ۲۴، معادلهٔ یک بعدی موج را از قانون دوم نیوتن به دست آوردیم. در این بخش آن را از اصل همیلتن و به کمک معادلهٔ (۱۱) نتیجه خواهیم گرفت. مطالب زیر را فرض می‌کنیم: تار با چگالی جرمی خطی ثابت m ، با نیروی کشش T کشیده شده و در دو نقطهٔ $x=0$ و $x=\pi$ محکم شده است. آن را از حالت تعادل خارج می‌کنیم و به آن امکان می‌دهیم تا در صفحهٔ xy ارتعاش کند؛ تغییر مکانهای $y(x, t)$ آن نسبتاً کوچک‌اند، به طوری که کشش آن اساساً ثابت باقی می‌ماند و از توانایی از شیب که از دو بیش‌ترند صرف نظر می‌شود. هرگاه تار جا به جا شود، عنصری به طول dx در اثر کشش طولش ds می‌شود و

$$ds = \sqrt{1 + y_x^2} dx \cong \left(1 + \frac{1}{2} y_x^2\right) dx$$

این تقریب از بسط $\sqrt{1 + y_x^2} = (1 + y_x^2)^{1/2}$ به سری دو جمله‌ای $1 + y_x^2/2 + \dots$ و حذف y هایی که توانشان بیش از دو است، حاصل می‌شود. کار انجام شده روی عنصر مورد نظر برابر است با $(1/2)T y_x^2 dx$ ، بنابراین انرژی پتانسیل تمامی تار برابر است با

$$V = \frac{1}{2} T \int_0^\pi y_x^2 dx$$

این عنصر دارای جرم mdx و سرعت y_t است، بنابراین انرژی جنبشی آن برابر است با $(1/2)m y_t^2 dx$ و برای تمامی تار داریم

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^\pi y_t^2 dx$$

1. T. Rado 2. J. Douglas 3. J. Plateau

۴. اثر ریاضی مأخذ در خصوص این موضوع مرجع زیر است:

R. Courant, «Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces,» Interscience-Wiley, New York, 1950.

پس لاگرانژی عبارت می شود از

$$L = T - V = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (m y_t'^2 - T y_x'^2) dx$$

و عمل، که بنا بر اصل همیلتن باید ایستی باشد، به صورت

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\pi} (m y_t'^2 - T y_x'^2) dx dt$$

در می آید. در این حالت، معادله (۱۱) به صورت

$$\frac{T}{m} y_{xx} = y''$$

است که می دانیم همان معادله موج ۲۴- (۸) است.

یادداشت درباره همیلتن. ویلیام روان همیلتن^۱ (۱۸۰۵-۱۸۶۵)، دانشمند فیزیک ریاضی و ریاضیدان ایرلندی، یک بچه اعجوبه واقعی بود و توسط عمومی عجیبش که روحانی باسوادی بود آموزش دید. در سه سالگی قادر به خواندن انگلیسی بود؛ در چهار سالگی فراگیری زبانهای یونانی، لاتین و عبری را آغاز کرد؛ در هشت سالگی ایتالیایی و فرانسوی را بداند؛ در ده سالگی سانسکریت و عربی آموخت و گفته شده است که در سیزده سالگی به ازای هر سال از عمرش در یک زبان تبحر پیدا کرده بود. این شکوفایی اجباری در زبانها، در سن چهارده سالگی، هنگامی که به ریاضیات، نجوم، و نورشناسی روی آورد، قطع گردید. در هجده سالگی مقاله ای به چاپ رساند و در آن اشتباهی از مکانیک سماوی لاپلاس را تصحیح کرد، و در حالی که هنوز دانشجوی دوره لیسانس کالج ترینیتی شهر دابلین بود، به استادی نجوم آن مؤسسه منصوب شد و در نتیجه منجم سلطنتی ایرلند گردید.

اولین اثر مهم وی در نورشناسی هندسی بود. در بیست و هفت سالگی به خاطر پیش بینی ریاضی خود در خصوص شکست مخروطی نور مشهور شد. حتی مهمتر از این، وی اثبات کرد که همه مسائل نور را به روش واحدی که اصل حداقل زمان فرما را به عنوان حالتی خاص در برمی گیرد، می توان حل کرد. وی آنگاه این روش را به مسائل مکانیک تعمیم داد، و تا قبل از سن سی سالگی به اصل واحدی دست یافت (که امروزه به اصل همیلتن مشهور است) که نورشناسی و مکانیک را صرفاً به عنوان دو صورت از حساب تغییرات نمایان می سازد.

در سال ۱۸۳۵ به جبر روی آورد، و نظریه ای دقیق از اعداد مختلط را بر اساس این فکر که هر عدد مختلط زوجی مرتب از اعداد حقیقی است بنا نهاد. این کار را مستقل از گاوس انجام داد، گاوس همین مطالب را با تأکید بر تعبیر اعداد

مختلط به عنوان نقاط صفحه مختلط در سال ۱۸۳۱ به چاپ رسانده بود. همیلتن متعاقباً سعی در تعمیم ساختمان جبری اعداد مختلط داشت، و این را می توان به عنوان تعمیم بردارهای دو بعدی به سه بعدی تصور کرد. این طرح باشکست مواجه شد، ولی این تلاشها در ۱۸۴۳ وی را به کشف کوآترنیون ها نایل ساخت. کوآترنیون ها بردارهایی چهار بعدی هستند که اعداد مختلط را به منزله يك زیر دستگاه در بر می گیرند. به زبان امروزی، آنها ساده ترین جبر خطی غیر جا به جایی را تشکیل می دهند که در آن تقسیم امکان پذیر است.^۱ بقیه عمر همیلتن وقف بررسی جزئیات نظریه و کاربردهای کوآترنیون ها، و تهیه مقالات مفصل و پیچیده در این مورد گردید. این کار تأثیری جزئی بر فیزیک و هندسه داشت، و به وسیله آنالیز برداری عملیتر و یلارد گیز^۲ و جبر چندخطی گراسمان و ا. کارتان^۳ جایگزین شد. چیز مهمی که از زحمات همیلتن در مورد کوآترنیون ها باقی ماند اثبات وجود دستگاه اعداد سازگاری است که در آن قانون جا به جایی عمل ضرب برقرار نیست. این کار جبر را از برخی تصورات قبلی نابجا که آن را فلج کرده بود رهایی داد، و دیگر ریاضیدانان اواخر قرن نوزدهم و قرن بیستم را تشویق کرد تا بررسی جامعی از انواع جبرهای خطی به عمل آورند. همیلتن همچنین شاعری ضعیف، و دوست وردزورت^۴ و کالریج^۵ بود و با آنها مکاتبات گسترده ای در مورد علوم، ادبیات، و فلسفه داشت.

۱. خوشبختانه همیلتن هرگز مطلع نشد که گاوس کوآترنیون ها را در سال ۱۸۱۹ کشف کرده ولی آن را بروز نداده بود. مراجعه کنید به Gauss, «Werke» vol. VIII, pp. 357-362

2. Willard Gibbs 3. Grassmann & E. Cartan
4. Wordsworth 5. Coleridge

۵۰. مقدمه

در سالهای اخیر علاقه به استفاده از تبدیلات لاپلاس به عنوان روشی سودمند برای حل انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرالی رشد چشمگیری یافته است. علاوه بر این کاربردها، تبدیلات لاپلاس ارتباط نزدیکی با بعضی از بخشهای مهم ریاضیات محض نیز دارد. سعی خواهیم کرد خواننده را با بعضی از این مطالب به قدر کافی آشنا کنیم، بدون آنکه خود را زیاد با نکات تحلیلی دقیق و روشهای محاسباتی که برای بررسیهای مفصلتر مناسباند درگیر کنیم.

قبل از آنکه وارد جزئیات شویم، به منظور قرار دادن اصول مطالب این فصل در زمینه مناسب خود، به عرضۀ چند تذکرۀ عمومی می‌پردازیم. با ذکر این مطلب شروع می‌کنیم که عمل مشتق‌گیری، تابعی مانند $f(x)$ را به تابع دیگری تبدیل می‌کند، که همان $f'(x)$ ، یعنی مشتق آن است. اگر از حرف D برای نمایش مشتق‌گیری استفاده کنیم، این تبدیل را می‌توان به صورت

$$D[f(x)] = f'(x) \quad (۱)$$

نوشت. تبدیل مهم دیگری برای توابع، انتگرال‌گیری است:

$$I[f(x)] = \int_0^x f(t) dt \quad (۲)$$

یک تبدیل از این هم ساده‌تر، عبارت است از عمل ضرب همهٔ توابع در یک تابع، شخص،

مانند $g(x)$:

$$M_g[f(x)] = g(x)f(x) \quad (۳)$$

خاصیت اساسی مشترك در این مثالها آن است که هر تبدیل روی توابعی عمل می کند و توابع دیگری تولید می کند. روشن است که در اغلب موارد باید محدودیتهایی برای توابع $f(x)$ که تبدیل روی آنها عمل می کند منظور شود. مثلاً تابع $f(x)$ باید در (۱) مشتق پذیر و در (۲) انتگرال پذیر باشد. در هر یک از این مثالها، تابع طرف راست را تبدیل $f(x)$ تحت تأثیر تبدیل مربوطه گویند.

در حالت کلی تبدیل T از توابع را خطی گویند هرگاه رابطه

$$T[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha T[f(x)] + \beta T[g(x)] \quad (۴)$$

برای کلیه توابع قابل قبول $f(x)$ و $g(x)$ و کلیه اعداد ثابت α و β برقرار باشد. به عبارت دیگر، معادله (۴) می گوید که تبدیل هر ترکیب خطی دو تابع، برابر است با همان ترکیب خطی از تبدیلاتشان. خوب است توجه کنیم که (۴) با انتخاب $\alpha = \beta = ۱$ و $\beta = ۰$ و $\alpha = ۰$ به ترتیب، به

$$T[f(x) + g(x)] = T[f(x)] + T[g(x)]$$

و

$$T[\alpha f(x)] = \alpha T[f(x)]$$

ساده می شود. بسادگی می توان دید که تبدیلات تعریف شده توسط (۱)، (۲)، و (۳) همگی خطی اند.

دسته ای از تبدیلات خطی، تبدیلات انتگرالی هستند که از اهمیت خاصی برخوردارند. برای آنکه تصویری از این تبدیلات داشته باشیم، توابعی را که روی فاصله متناهی یا نامتناهی $a \leq x \leq b$ تعریف شده اند در نظر می گیریم، و تابع معینی مانند $K(p, x)$ از متغیر x و پارامتر p انتخاب می کنیم. آنگاه تبدیل انتگرالی کلی به صورت زیر است

$$T[f(x)] = \int_a^b K(p, x) f(x) dx = F(p) \quad (۵)$$

تابع $K(p, x)$ را هسته تبدیل T گویند، و روشن است که T ، صرف نظر از ماهیت K ، خطی است. مفهوم تبدیل خطی انتگرالی به صورت تعمیم یافته اش، منشأ برخی از مفیدترین ایده های آنالیز نوین بوده است. در آنالیز کلاسیک نیز، حالت های خاص گوناگونی از (۵) دقیقاً مورد مطالعه قرار گرفته اند، و به تبدیلات خاصی منجر شده اند که برای حل انواع خاصی از مسائل مفیدند.

وقتی $a = ۰$ ، $b = \infty$ ، و $K(p, x) = e^{-px}$ ، حالت خاصی از (۵) به دست می آید که مورد نظر ماست و تبدیل لاپلاس L نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx = F(p) \quad (۶)$$

بنابراین، تبدیل لاپلاس L بر هر تابعی که انتگرال مربوط به آن موجود باشد عمل می کند و

تبدیل لاپلاس آن یعنی $L[f(x)] = F(p)$ را که تابعی از پارامتر p است، تولید می‌کند. یادآور می‌شویم که انتگرال ناسره (۶) حدی است که در زیر تعریف می‌شود و تنها هنگامی وجود دارد که این حد وجود داشته باشد:

$$\int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-px} f(x) dx \quad (7)$$

وقتی حد طرف راست موجود باشد، انتگرال ناسره طرف چپ را همگرا گویند. تبدیلات لاپلاس زیر را می‌توان بسادگی محاسبه کرد:

$$f(x) = 1, \quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \frac{1}{p} \quad (8)$$

$$f(x) = x, \quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} x dx = \frac{1}{p^2} \quad (9)$$

$$f(x) = x^n, \quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} x^n dx = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (10)$$

$$f(x) = e^{ax}, \quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} e^{ax} dx = \frac{1}{p-a} \quad (11)$$

$$f(x) = \sin ax, \quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} \sin ax dx = \frac{a}{p^2 + a^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \cos ax, \quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} \cos ax dx = \frac{p}{p^2 + a^2} \quad (13)$$

انتگرال (۱۱) برای $p > a$ ، و همه انتگرالهای دیگر برای $p > 0$ همگرا هستند.

خواننده باید محاسبات لازم را خود انجام دهد، تا علت این محدودیتهای p کاملاً روشن گردد (به تمرین ۱ مراجعه شود). به عنوان نمونه، جزئیات محاسبات در مورد (۱۰) را که در آن n عددی است صحیح و مثبت، ارائه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L[x^n] &= \int_0^{\infty} e^{-px} x^n dx = -\left[\frac{x^n e^{-px}}{p} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} e^{-px} x^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{p} L[x^{n-1}] = \frac{n}{p} \left(\frac{n-1}{p} \right) L[x^{n-2}] \\ &= \dots = \frac{n!}{p^n} L[1] = \frac{n!}{p^{n+1}} \end{aligned}$$

۱. همان طور که در اینجا آمده است، همواره از حروف کوچک برای نمایش توابع با متغیر x و از حروف بزرگ نظیر آنها برای نمایش تبدیلات این توابع استفاده خواهیم کرد.

باید توجه داشت که در اینجا از این حقیقت که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{px}} = 0, \quad p > 0 \text{ برای}$$

استفادهٔ اساسی شده است. فرمول فوق در جدول ۱ بخش ۵۲ داده شده است. تبدیلات لاپلاس سادهٔ دیگری را می‌توان به‌سہولت با استفاده از خطی بودن L ، بدون انتگرال‌گیری به دست آورد، مانند

$$L[2x+3] = 2L[x] + 3L[1] = \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p}$$

در بخشهای بعد، روشهایی برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابع پیچیده‌تر ارائه خواهیم کرد. همان‌طور که در بالا تذکر دادیم با انتخاب $a=0$ ، $b=\infty$ و $K(p, x) = e^{-px}$ می‌بینیم که تبدیل لاپلاس حالت خاصی از تبدیل انتگرالی عمومی (۵) است. چرا این حدود و این هستهٔ خاص را انتخاب کرده‌ایم؟ برای مشاهدهٔ آنکه چرا این انتخاب می‌تواند با ارزش باشد، بهتر است که شباهت گویای آن با سری توانی را بررسی کنیم. اگر سری توانی را به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$$

بنویسیم، آنگاه مشابه طبیعی آن، انتگرال ناسره

$$\int_0^{\infty} a(t)x^t dt$$

است. حال با نوشتن $x = e^{-p}$ علایم را کمی تغییر می‌دهیم، و این انتگرال را به صورت:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} a(t) dt$$

درمی آوریم، که دقیقاً همان تبدیل لاپلاس تابع $a(t)$ است. لذا تبدیلات لاپلاس مشابه پیوستهٔ سری‌های توانی هستند، و چون مجموع سری توانی در آنالیز مهم است، انتظار اینکه تبدیل لاپلاس نیز دارای اهمیت باشد امری منطقی است. یادداشت مختصری راجع به لاپلاس در پیوست الف آمده است.

تمرین

۱- انتگرالهای (۸)، (۹)، (۱۱)، (۱۲)، و (۱۳) را محاسبه کنید.

۲- بدون انتگرال‌گیری نشان دهید که

$$L[\sinh ax] = \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad p > |a| \quad (\text{الف})$$

$$L[\cosh ax] = \frac{p}{p^2 - a^2}, \quad p > |a| \quad (\text{ب})$$

۳- بدون انتگرال گیری $L[\sin^2 ax]$ و $L[\cos^2 ax]$ را به دست آورید. این دو تبدیل چگونه به یکدیگر مربوط اند؟

۴- با استفاده از فرمولهای متن، تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید:

$$4 \sin x \cos x + 2e^{-x} \quad (\text{الف}) \quad 10$$

$$x^6 \sin^2 3x + x^6 \cos^2 3x \quad (\text{ب}) \quad x^5 + \cos 2x$$

$$2e^{3x} - \sin 5x \quad (\text{ج})$$

۵- مطلوب است تعیین تابع $f(x)$ به طوری که تبدیل لاپلاس آن برابر باشد با

$$\frac{1}{p^2 + p} \quad (\text{د}) \quad \frac{30}{p^4} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{p^4 + p^2} \quad (\text{ه}) \quad \frac{2}{p+3} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{4}{p^2} + \frac{6}{p^2 + 4} \quad (\text{ج})$$

۶- يك تعريف منطقی برای $(1/2)$ ارائه کنید.

۵۱. چند نکته در مورد نظریهٔ لاپلاس

قبل از آنکه به کاربردها پردازیم خوب است شرایطی را که تابع باید دارا باشد تا تبدیل لاپلاس داشته باشد دقیقتر مورد توجه قرار دهیم. يك بررسی دقیق ومفصل از این مسئله نیاز به آشنایی با نظریهٔ کلی انتگرالهای ناسره دارد، که مورد نظر ما نیست. از طرف دیگر، متداول است که مقدماتی از این مبحث در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی گفته شود، و درك مطالب سادهٔ ذیل برای منظور ما کافی است.

اولا، انتگرال

$$\int_0^\infty f(x) dx \quad (1)$$

را همگرا گویند هرگاه حد

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

وجود داشته باشد، و در این حالت مقدار (۱) بنا بر تعریف برابر مقدار این حد است:

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

ثانیاً، هرگاه انتگرال

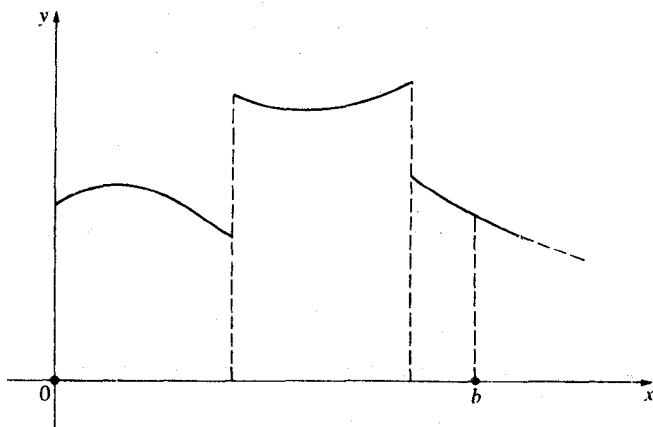
$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx$$

همگرا باشد، انتگرال (۱) نیز همگرا خواهد بود و در این حالت (۱) را همگرای مطلق نامند و نهایتاً اینکه، چنانچه تابعی مانند $g(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $|f(x)| \leq g(x)$ و انتگرال

$$\int_0^{\infty} g(x) dx$$

همگرا باشد، آنگاه انتگرال (۱) همگرای مطلق و نتیجتاً همگراست (این مطلب مشهور به آزمون مقایسه است).

از این رو، اگر تابع $f(x)$ برای $x \geq 0$ تعریف شده باشد، همگرایی (۱) قبل از هر چیز مستلزم آن است که انتگرال $\int_0^b f(x) dx$ ، برای هر b محدود و مثبتی وجود داشته باشد. برای تضمین این مطلب، کافی است فرض کنیم که $f(x)$ پیوسته، و یا لااقل قطعه به قطعه پیوسته است. مقصود از عبارت اخیر آن است که تابع $f(x)$ در هر فاصله متناهی $0 \leq x \leq b$ پیوسته است، مگر احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه که دارای ناپیوستگی جهشی است، یعنی تابع در آن نقاط حدهای چپ و راست متفاوتی دارد. شکل ۷۳ يك تابع قطعه به قطعه پیوسته را به عنوان نمونه نشان می‌دهد؛ انتگرال آن از ۰ تا b برابر است با مجموع انتگرالهای بخشهای پیوسته آن در زیر فاصله‌های متناظرشان. این دسته از توابع در واقع شامل تمام توابعی است که محتملاً در عمل ظاهر می‌شوند. بخصوص توابع پله‌ای ناپیوسته و توابع دندانه اره‌ای، که یانگرا اعمال یا حذف ناگهانی نیروها و ولتاژها در مسائل فیزیک و مهندسی است، از این جمله‌اند.



شکل ۷۳

اگر $f(x)$ برای $x \geq 0$ قطعه به قطعه پیوسته باشد، آنگاه تنهامسئله‌ای که برای وجود تبدیل لاپلاس

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

باقی می‌ماند رفتار تابع زیرعلامت انتگرال، یعنی $e^{-px} f(x)$ ، برای x های بزرگ است. برای آنکه مطمئن شویم تابع زیرعلامت انتگرال با سرعت کافی کوچک می‌شود (و یا $f(x)$ با سرعت بیش از حد رشد نمی‌کند) تا انتگرال موجود باشد، علاوه بر این، فرض می‌کنیم که $f(x)$ از مرتبه‌ی نمایی باشد. این بدان معناست که اعداد ثابت M و c وجود دارند چنانکه:

$$|f(x)| \leq M e^{cx} \quad (۲)$$

لذا، با آنکه، وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $f(x)$ می‌تواند بینهایت بزرگ شود، ولی سرعت رشد آن باید کمتر از مضربی از تابع e^{cx} باشد. روشن است که هر تابع کراندار، از مرتبه‌ی نمایی است با $c=0$. به عنوان مثالهایی دیگر، می‌توان e^{ax} (با $c=a$) و x^n (با هر عدد مثبتی برای c) را نام برد. از طرف دیگر، e^{x^2} از مرتبه‌ی نمایی نیست. هرگاه $f(x)$ در (۲) صدق کند، آنگاه داریم

$$|e^{-px} f(x)| \leq M e^{-(p-c)x}$$

و چون انتگرال تابع طرف راست برای $p > c$ همگراست. تبدیل لاپلاس $f(x)$ برای $p > c$ همگرای مطلق خواهد بود. علاوه بر این، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-px} f(x)| dx \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-(p-c)x} dx = \frac{M}{p-c}, \quad p > c \end{aligned}$$

بنابراین:

$$F(p) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty \quad \text{وقتی} \quad (۳)$$

در واقع، می‌توان نشان داد که هر وقت $F(p)$ موجود باشد (۳) صحیح است، خواه $f(x)$ قطعه به قطعه پیوسته و از مرتبه‌ی نمایی باشد خواه نباشد. لذا، اگر $\phi(p)$ چنان تابعی از p باشد که، وقتی $p \rightarrow \infty$ ، یا حد نداشته باشد و یا حدش برابر صفر نشود، آنگاه $\phi(p)$ نمی‌تواند تبدیل لاپلاس هیچ تابعی باشد. بخصوص، چند جمله‌ایهای $\sin p$ ، $\cos p$ ، e^p ، $\log p$ نمی‌توانند تبدیل لاپلاس باشند. از طرف دیگر، هر تابع گویایی که درجه‌ی صورتش کمتر از مخرج باشد یک تبدیل لاپلاس است.

مطالب فوق نشان می‌دهد که هر تابع قطعه به قطعه پیوسته و از مرتبه‌ی نمایی دارای تبدیل لاپلاس است، لذا این شرایط برای وجود $L[f(x)]$ کافی است. ولی، همان‌طور که

از مثال $f(x) = x^{-1/2}$ روشن می‌شود، این شرایط لازم نیستند. این تابع در $x=0$ دارای يك ناپیوستگی از نوع بینهایت است، و بنابراین قطعه به قطعه پیوسته نیست، ولی با این وجود انتگرالش از ۰ تا b وجود دارد و از آنجا که برای x های بزرگ کراندار نیز هست، تبدیل لاپلاس آن وجود دارد. در واقع، برای $p > 0$ ، داریم:

$$L[x^{-1/2}] = \int_0^{\infty} e^{-px} x^{-1/2} dx$$

و تغییر متغیر $px = t$ نتیجه می‌دهد

$$L[x^{-1/2}] = p^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt$$

يك تغییر متغیر دیگر، $t = s^2$ ، به دست می‌دهد

$$L[x^{-1/2}] = 2 p^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds \quad (4)$$

در اغلب درسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نشان می‌دهند که انتگرال اخیر برابر است با $\sqrt{\pi}/2$ (مراجعه شود به تمرین ۱)، لذا داریم:

$$L[x^{-1/2}] = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad (5)$$

از این نتیجه در یکی از بخشهای بعد استفاده خواهد شد.

در باقیمانده این فصل توجه خود را به موارد استعمال تبدیل لاپلاس متمرکز می‌کنیم، و به بررسی نظریه صرفاً ریاضی مربوط به این روشها نخواهیم پرداخت. طبعاً این روشها محتاج اثبات است، و خواننده‌ای که از مسائل غیر دقیق ناراضی است می‌تواند برای ارضای خود به بررسیهای جامعتری در این موضوع رجوع کند.

تمرین

۱- هرگاه I نمایشگر انتگرال (۴) باشد (که در آن s متغیری ظاهری است)، آنگاه می‌توان نوشت:

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

با تغییر این انتگرال دوگانه به مختصات قطبی آن را محاسبه کنید، و نشان دهید که

$$I = \sqrt{\pi}/2$$

۲- در هر يك از حالات زیر، شکل تابع را رسم کنید و تبدیل لاپلاس آن را بیابید.

الف) $f(x) = u(x-a)$ که در آن a عددی مثبت و $u(x)$ تابع پله‌ای واحد تعریف شده در زیر است

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

(ب) $f(x) = [x]$ ، که در آن $[x]$ نشانهٔ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x یا مساوی با آن است.

$$f(x) = x - [x] \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases} \quad \text{اگر} \quad (\text{د})$$

۳- به روش مستقیم نشان دهید که $L[e^{x^2}]$ وجود ندارد. راهنمایی:

$$x^2 - px = (x - p/2)^2 - p^2/4$$

۴- به روش مستقیم نشان دهید که $L[x^{-1}]$ وجود ندارد.

۵- فرض کنید ε عدد مثبتی باشد و تابع $f_\varepsilon(x)$ زیر را در نظر بگیرید.

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 0, & x > \varepsilon \end{cases} \quad \text{اگر}$$

نمودار این تابع در شکل ۷۴ نشان داده شده است. واضح است که برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$\int_0^\infty f_\varepsilon(x) dx = 1 \quad \text{نشان دهید که}$$

$$L[f_\varepsilon(x)] = \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$$

و

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L[f_\varepsilon(x)] = 1$$

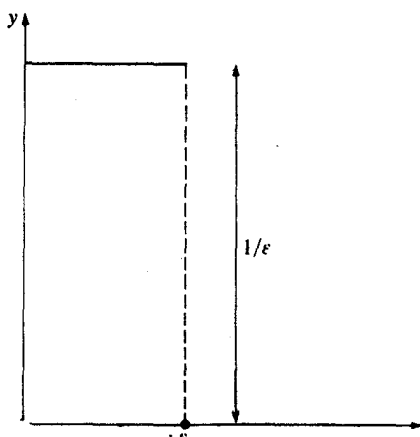
به بیان دقیقتر، $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x)$ به عنوان یک تابع وجود ندارد، و لذا $L[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x)]$

تعریف نشده است، ولی اگر احتیاط را کنار بگذاریم، آنگاه

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x)$$

نوعی شبه تابع است که برای $x = 0$ بینهایت و برای $x > 0$ صفر است، و خواص زیر را دارد

$$L[\delta(x)] = 1 \quad \text{و} \quad \int_0^\infty \delta(x) dx = 1$$



شکل ۷۴

این شبه تابع را تابع دلتای دیراک یا تابع ضربه‌ای واحد می‌نامند.

۵۲. موارد استعمال در معادلات دیفرانسیل
فرض کنید بخواهیم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (۱)$$

را که در شرایط اولیه $y(0) = y_0$ و $y'(0) = y'_0$ صدق می‌کند، بیابیم. روشن است که می‌توان به کمک روشهای فصل ۳ به جستجوی جواب عمومی معادله پرداخت و سپس ثابتهای دلخواه را با توجه به شرایط اولیه محاسبه کرد. ولی استفاده از تبدیل لاپلاس راه دیگری برای حل این مسئله است که مزایای متعددی دارد.

برای آنکه متوجه شویم این روش چگونه عمل می‌کند، از طرفین (۱) تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y'' + ay' + by] = L[f(x)]$$

با توجه به خطی بودن L ، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

۱. پ. آ. م. دیراک P. A. M. Dirac (۱۹۰۲ -) يك متخصص فيزيك نظري انگليسی است که در سي‌ویک سالگی جایزه نوبل را به‌خاطر کارش روی نظریه کوانتومی از آن خود ساخت. چندین راه جالب برای تعبير مناسب تابع دلتای دیراک از نظر ریاضی وجود دارد. به‌عنوان مثال مراجعه کنید به ۱،

I. Halperin, «Introduction to the Theory of Distributions,» University of Toronto Press, Toronto, 1952; or A. Erdélyi, «Operational Calculus and Generalized Functions,» Holt, New York, 1962.

$$L[y''] + aL[y'] + bL[y] = L[f(x)] \quad (۲)$$

گام بعدی عبارت خواهد بود از یافتن $L[y']$ و $L[y'']$ برحسب $L[y]$. اولاً، با يك انتگرالگیری جزء به جزء خواهیم دید که:

$$\begin{aligned} L[y'] &= \int_0^{\infty} e^{-px} y' dx \\ &= ye^{-px} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-px} y dx \\ &= -y(0) + pL[y] \end{aligned}$$

بنابراین

$$L[y'] = pL[y] - y(0) \quad (۳)$$

و

$$L[y''] = L[(y')'] = pL[y'] - y'(0)$$

پس

$$L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0) \quad (۴)$$

حال اگر شرایط اولیه داده شده را در (۳) و (۴) قرار دهیم، و این عبارات را در (۲) جایگزین کنیم، به يك معادله جبری برحسب $L[y]$ می‌رسیم

$$p^2 L[y] - py_0 - y_0' + apL[y] - ay_0 + bL[y] = L[f(x)]$$

که اگر آن را برحسب $L[y]$ حل کنیم داریم:

$$L[y] = \frac{L[f(x)] + (p+a)y_0 + y_0'}{p^2 + ap + b} \quad (۵)$$

تابع $f(x)$ معلوم است، لذا تبدیل لاپلاس آن $L[f(x)]$ تابع مشخصی از p است؛ و چون a, b, y_0, y_0' و $y(x)$ ثابتهای معلومی هستند، $L[y]$ تابع کاملاً معلومی از p است. حال اگر بتوانیم تابعی مانند $y(x)$ بیابیم که تبدیل لاپلاس آن همان طرف راست (۵) باشد، آنگاه این تابع جوابی از مسئله است که در شرایط اولیه ما نیز صدق می‌کند. این روشها بخصوص برای حل معادلاتی به صورت (۱) مناسب است که تابع $f(x)$ در آنها ناپیوسته است. زیرا در این حالت ممکن است به کاربردن روشهای فصل ۳، مشکل باشد.

در این بحث يك مشکل آشکار وجود دارد: برای آنکه (۲) معنایی داشته باشد، توابع $f(x), y, y', y''$ باید تبدیل لاپلاس داشته باشند. این مشکل را می‌توان با فرض آنکه تابع f قطعه به قطعه پیوسته و از رتبهٔ نمایی است بسادگی برطرف کرد. وقتی چنین فرض شود، آنگاه می‌توان نشان داد (ما از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم) که y, y', y'' نیز

لزوماً دارای همان خواص اند، لذا تبدیل لاپلاس آنها نیز موجود می باشد. مشکل دیگر اینکه در محاسبه (۳) و (۴) این مطلب مسلم فرض شده بود که:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y' e^{-px} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y e^{-px} = 0$$

در هر حال، چون y و y' خود به خود از مرتبه نامایی هستند، این احکام برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ p معتبرند.

مثال ۰۹. مطلوب است جوابی برای

$$y'' + 4y = 4x \quad (۶)$$

که در شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 5$ صدق کند.

وقتی از طرفین معادله (۶) تبدیل L بگیریم، خواهیم داشت

$$L[y''] + 4L[y] = 4L[x] \quad (۷)$$

اگر به خاطر آوریم که $L[x] = 1/p^2$ ، با استفاده از (۴) و شرایط اولیه، (۷) به صورت زیر درمی آید

$$p^2 L[y] - p - 5 + 4L[y] = \frac{4}{p^2}$$

یا

$$(p^2 + 4)L[y] = p + 5 + \frac{4}{p^2}$$

لذا

$$\begin{aligned} L[y] &= \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{4}{p^2(p^2 + 4)} \\ &= \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 4} \\ &= \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{4}{p^2 + 4} + \frac{1}{p^2} \end{aligned} \quad (۸)$$

بامراجعه به تبدیلاتی که در بخش ۵۰ به دست آوردیم، می بینیم که (۸) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} L[y] &= L[\cos 2x] + L[2\sin 2x] + L[x] \\ &= L[\cos 2x + 2\sin 2x + x] \end{aligned}$$

لذا جواب مطلوب عبارت است از:

$$y = \cos 2x + 2\sin 2x + x$$

این نتیجه را می توان بسادگی امتحان کرد، زیرا جواب عمومی (۶) را می توان با جستجو پیدا کرد:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x$$

و شرایط اولیه بلافاصله نتیجه می دهند که $c_1 = 1$ و $c_2 = 2$.

اعتبار این روش متکی بر این فرض است که تنها یک تابع $y(x)$ موجود است که تبدیل لاپلاسش برابر با طرف راست معادله (۸) باشد. این مطلب با فرض پیوستگی $y(x)$ صحیح است، و هر جواب یک معادله دیفرانسیل لزوماً پیوسته است. اگر $f(x)$ پیوسته باشد، معادله $L[f(x)] = F(p)$ را اغلب به صورت زیر می نویسند

$$L^{-1}[F(p)] = f(x)$$

مرسوم است که L^{-1} را تبدیل لاپلاس معکوس، و $f(x)$ را تبدیل لاپلاس معکوس $F(p)$ بنامیم. چون L خطی است، واضح است که L^{-1} نیز خطی است. در مثال ۱ از تبدیلهای معکوس زیر استفاده کردیم:

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right] = \cos 2x, \quad L^{-1}\left[\frac{2}{p^2+4}\right] = \sin 2x, \quad L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = x$$

این مثال همچنین ارزش تجزیه به کسرهای جزئی را به عنوان روشی برای محاسبه تبدیلهای معکوس روشن می کند.

برای راحتی خواننده، فهرست مختصری از جفتهای مفید از تبدیلات را در جدول ۱ نوشته ایم. جداول خیلی مفصلتری برای کسانی که استفاده فراوان از تبدیل لاپلاس را در کارشان مفید ببینند وجود دارد.

جدول ۱. جفتهای تبدیلی ساده

$f(x)$	$F(p) = L[f(x)]$
۱	$\frac{1}{p}$
x	$\frac{1}{p^2}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\sinh ax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

برخی خواص عمومی تبدیلات لاپلاس را که باعث افزایش استفاده از جدول ۱ خواهد شد بررسی می‌کنیم. نخستین خاصیت دستور انتقالی است:

$$L[e^{ax}f(x)] = F(p-a) \quad (۹)$$

برای اثبات، کافی است توجه کنیم که

$$\begin{aligned} L[e^{ax}f(x)] &= \int_0^{\infty} e^{-px} e^{ax} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(p-a)x} f(x) dx \\ &= F(p-a) \end{aligned}$$

از فرمول (۹) می‌توان برای یافتن تبدیل حاصلضربهایی به صورت $e^{ax}f(x)$ ، وقتی که $F(p)$ معلوم باشد و همچنین برای یافتن تبدیل معکوس توابعی به صورت $F(p-a)$ ، وقتی

$f(x)$ معلوم باشد، استفاده کرد.

مثال ۲.

$$L[\sin bx] = \frac{b}{p^2 + b^2}$$

لذا

$$L[e^{ax} \sin bx] = \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$$

مثال ۳.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = x$$

بنا بر این

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-a)^2}\right] = e^{ax}x$$

روشهای این بخش را می توان در مورد دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و همچنین در مورد بعضی انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار برد. برای مباحث مربوط به این کار بردها می توانید به کتابهایی که راجع به تبدیلات لاپلاس با تفصیل بیشتری بحث کرده است رجوع کنید.

تمرین

۱- مطلوب است تعیین تبدیل لاپلاس توابع زیر

الف) $x^5 e^{-2x}$ ب) $(1-x^2)e^{-x}$ ج) $e^{2x} \cos 2x$

۲- تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید:

الف) $\frac{6}{(p+2)^2 + 9}$ ب) $\frac{12}{(p+3)^4}$ ج) $\frac{p+3}{p^2 + 2p + 5}$

۳- هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر را با روش تبدیل لاپلاس حل کنید:

الف) $y(0) = 0$ ، $y' + y = 3e^{2x}$

ب) $y'(0) = 3$ و $y(0) = 0$ ، $y'' - 4y' + 4y = 0$

۱. برای مثال، مراجعه کنید به ،

$$y'(0)=1 \text{ و } y(0)=0, \quad y''+2y'+2y=2 \quad (\text{ج})$$

$$y'(0)=1 \text{ و } y(0)=0, \quad y''+y'=3x^2 \quad (\text{د})$$

$$y'(0)=3 \text{ و } y(0)=0, \quad y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x \quad (\text{ه})$$

۴- جوابی از معادله $y''-2ay'+a^2y=0$ را بیابید که در آن شرایط اولیه $y(0)=y_0$ و $y'(0)=y_0'$ مشخص نشده باشند. (این راهی دیگر برای یافتن جوابی است که در بخش ۱۷ به دست آمد، برای حالتی که در آن معادله کمکی دارای ریشه مضاعف است.)

۵- با استفاده از (۳) فرمول مربوط به تبدیل لاپلاس انتگرال، یعنی

$$L\left[\int_0^x f(x) dx\right] = \frac{F(p)}{p}$$

را ثابت کنید و صحت آن را با محاسبه

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right]$$

از دو راه تحقیق کنید.

۵۳. مشتق و انتگرال تبدیل لاپلاس

دستور کلی تبدیل لاپلاس

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

را در نظر می گیریم. مشتق گیری از این فرمول نسبت به p را می توان به داخل علامت انتگرال برد و نتیجه چنین می شود:

$$F'(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} (-x) f(x) dx \quad (۱)$$

یا

$$L[-xf(x)] = F'(p) \quad (۲)$$

با مشتق گیری از (۱) مشاهده می کنیم که

$$L[x^n f(x)] = F''(p) \quad (۳)$$

و به طور کلیتر رابطه

$$L[(-1)^n x^n f(x)] = F^{(n)}(p) \quad (۴)$$

برای هر عدد صحیح مثبت n برقرار است. از این فرمولها می توان برای یافتن تبدیل توابعی به

صورت $x^n f(x)$ بر حسب $F(p)$ استفاده کرد.

مثال ۰۱. چون $L[\sin ax] = a/(p^2 + a^2)$ ، داریم:

$$L[x \sin ax] = -\frac{d}{dp} \left(\frac{a}{p^2 + a^2} \right) = \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$$

مثال ۰۲. از بخش ۵۱ می‌دانیم که $L[x^{-1/2}] = \sqrt{\pi/p}$ ، لذا

$$L[x^{1/2}] = L[x(x^{-1/2})] = -\frac{d}{dp} \left(\sqrt{\frac{\pi}{p}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

هر گاه (۲) را در مورد $y(x)$ و مشتقاتش به کار ببریم، فرمولهای (۳) - (۵۲) و (۴) - (۵) را به خاطر آوریم، آنگاه خواهیم دید که

$$L[xy] = -\frac{d}{dp} L[y] = -\frac{dY}{dp} \quad (۵)$$

$$L[xy'] = -\frac{d}{dp} L[y'] = -\frac{d}{dp} [pY - y(0)] = -\frac{d}{dp} [pY] \quad (۶)$$

و

$$\begin{aligned} L[xy''] &= -\frac{d}{dp} L[y''] = -\frac{d}{dp} [p^2 Y - py(0) - y'(0)] \\ &= -\frac{d}{dp} [p^2 Y - py(0)] \end{aligned} \quad (۷)$$

بعضی اوقات می‌توان از این فرمولها برای حل آن دسته از معادلات دیفرانسیل خطی، که ضرایبشان چند جمله‌ایهای درجه اول از متغیر مستقل اند، استفاده کرد.

مثال ۰۳. معادله بسل از مرتبه صفر عبارت است از

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (۸)$$

می‌دانیم که این معادله تنها یک جواب $y(x)$ دارد که در شرط اولیه $y(0) = 1$ صدق می‌کند. برای یافتن این جواب، L را به طرفین (۸) اعمال می‌کنیم و بسا استفاده از (۵) و (۷) خواهیم داشت:

$$-\frac{d}{dp} [p^2 Y - p] + pY - 1 - \frac{dY}{dp} = 0$$

$$(p^2 + 1) \frac{dY}{dp} = -pY \quad (9)$$

هرگاه متغیرهای (۹) را جدا کنیم و از آن انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$Y = \frac{c}{\sqrt{p^2 + 1}} = c(p^2 + 1)^{-1/2}$$

$$= \frac{c}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2} \right)^{-1/2} \quad (10)$$

اگر فاکتور آخر را به کمک سری دو جمله‌ای

$$(1+z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} z^3 + \dots$$

$$+ \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

بسط دهیم، (۱۰) به صورت زیر درمی‌آید:

$$Y = \frac{c}{p} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p^4} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p^6} + \dots \right]$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{(-1)^n}{p^{2n}} + \dots$$

$$= c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}$$

هرگاه به‌طور صوری^۱ عمل کنیم و تبدیل معکوس این سری را جمله به جمله محاسبه کنیم، خواهیم دید که

$$y(x) = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n!)^2} x^{2n}$$

$$= c \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right)$$

چون $y(0) = 1$ ، می‌بینیم که $c = 1$ ، و جواب مطلوب عبارت است از:

۱. «به‌طور صوری» یعنی بدون تحقیق در وجود شرایط کافی که صحت نتیجه عملیات را تضمین می‌کنند. بنا بر این هرگاه به‌طور صوری عمل کنیم صحت نتیجه‌ای که به دست می‌آید، نیاز به تحقیق دارد. مترجمین

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

این سری، تابع مهم بسل $J_0(x)$ را تعریف می کند که دیدیم تبدیل لاپلاس آن $1/\sqrt{p^2+1}$ است. فصل ۶ شامل بحث مفصلی راجع به $J_0(x)$ از دیدگاهی کاملاً متفاوت است، و جالب است ببینیم به چه سادگی می توان آن را از روشهای تبدیل لاپلاس به دست آورد.

حال به مسئله انتگرال گیری از تبدیلات لاپلاس برمی گردیم، و نتیجه اصلی را بطة زیر است:

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_p^\infty F(p) dp \quad (11)$$

برای اثبات می نویسیم $L[f(x)/x] = G(p)$. استفاده از رابطه (۲) به:

$$\frac{dG}{dp} = L\left[(-x)\frac{f(x)}{x}\right] = -L[f(x)] = -F(p)$$

منجر می شود. لذا برای مقداری از a خواهیم داشت

$$G(p) = -\int_a^p F(p) dp$$

چون می خواهیم وقتی p به سمت بینهایت میل می کند، $G(p)$ به صفر میل کند، a را برابر ∞ قرار می دهیم و چنین به دست می آوریم

$$G(p) = \int_p^\infty F(p) dp$$

که همان (۱۱) است. از این فرمول برای یافتن تبدیل توابعی به صورت $f(x)/x$ بر حسب $F(p)$ استفاده می شود. علاوه بر این، اگر (۱۱) را به صورت

$$\int_0^\infty e^{-px} \frac{f(x)}{x} dx = \int_p^\infty F(p) dp$$

بنویسیم p را به سمت صفر میل دهیم، می بینیم که

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^\infty F(p) dp \quad (12)$$

این رابطه در شرایطی که انتگرال طرف چپ موجود باشد، معتبر است. بعضی اوقات از این فرمول می توان برای محاسبه انتگرالهایی، که حساب کردن آنها باروشهای دیگر دشوار است، استفاده کرد.

مثال ۴. چون $L[\sin x] = 1/(p^2+1)$ ، از (۱۲) درمی یابیم که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{dp}{p^2 + 1} = \tan^{-1} p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

برای سهولت مراجعه، خواص عمده و عمومی تبدیلات لاپلاس را در جدول زیر فهرست می‌کنیم. توجه کنید که آخرین فرمول جدول، جدید است. این فرمول و کاربردهایش را در بخش بعد مطالعه خواهیم کرد.

جدول ۲. خواص عمومی $L[f(x)] = F(p)$

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$$

$$L[e^{ax} f(x)] = F(p - a)$$

$$L[f'(x)] = pF(p) - f(0);$$

$$L[f''(x)] = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$L\left[\int_0^x f(x) dx\right] = \frac{F(p)}{p}$$

$$L[-xf(x)] = F'(p);$$

$$L[(-1)^n x^n f(x)] = F^{(n)}(p)$$

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_p^{\infty} F(p) dp$$

$$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(p)G(p).$$

تمرین

۱- نشان دهید که:

$$L[x \cos ax] = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

و با استفاده از این نتیجه، حاصل

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}\right]$$

را بیابید.

۲- تبدیلات لاپلاس زیر را بیابید:

$$L[x^2 \sin ax] \quad (\text{الف})$$

$$(ب) \quad L[x^{3/2}]$$

۳- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$(الف) \quad y(0) = 0, \quad xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0$$

$$(ب) \quad y(0) = 0, \quad xy'' + (2x+3)y' + (x+3)y = 3e^{-x}$$

۴- اگر $y(x)$ در معادله دیفرانسیل

$$y'' + x^2 y = 0$$

و شرایط اولیه $y(0) = y_0$ و $y'(0) = y'_0$ صدق کند، نشان دهید که تبدیل آن $Y(p)$ در معادله

$$Y'' + p^2 Y = p y_0 + y'_0$$

صدق خواهد کرد. توجه کنید که معادله دوم از همان نوع اولی است، لذا پیشرفتی انجام نگرفته است. روش مثال ۳ فقط درحالتی که ضرایب، چند جمله‌ایهای درجه یک باشند مفید است.

۵- مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر، به فرض آنکه a و b اعداد ثابت و مثبتی باشند:

$$(الف) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (ب) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx$$

۶- به طور صوری نشان دهید که

$$(الف) \quad \int_0^\infty J_0(x) dx = 1 \quad (ب) \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$$

۷- به فرض $x > 0$ ، به طور صوری ثابت کنید که

$$(الف) \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$(ب) \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

۸- (الف) اگر $f(x)$ متناوب، با دوره تناوب a باشد، یعنی $f(x+a) = f(x)$ ، نشان دهید که

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^a e^{-px} f(x) dx$$

(ب) مطلوب است تعیین $F(p)$ اگر $f(x)$ در فاصله‌های ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳، ۳ تا ۴، ۴ تا ۵، و غیره، برابر یک و در بقیه فاصله‌ها برابر با صفر باشد.

۵۴. کنولوسیون و مسئله مکانیکی آبل

اگر $L[f(x)] = F(p)$ و $L[g(x)] = G(p)$ ، تبدیل معکوس $F(p)G(p)$ چه خواهد بود؟

برای آنکه به این سؤال به طور صوری جواب دهیم درانتگرالهای معرف تبدیلهای، از متغیرهای ظاهری s و t استفاده می کنیم و می نویسیم

$$\begin{aligned} F(p)G(p) &= \left[\int_0^\infty e^{-ps} f(s) ds \right] \left[\int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt \right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(s+t)} f(s) g(t) ds dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-p(s+t)} f(s) ds \right] g(t) dt \end{aligned}$$

در اینجا انتگرالگیری روی ربع اول ($s \geq 0, t \geq 0$) صفحه st انجام می شود. حال در انتگرال درونی آخرین فرمول، متغیر جدید x را توسط رابطه $s = x - t$ وارد می کنیم، پس $s + t = x$. (در این انتگرالگیری t ثابت است) و $ds = dx$.

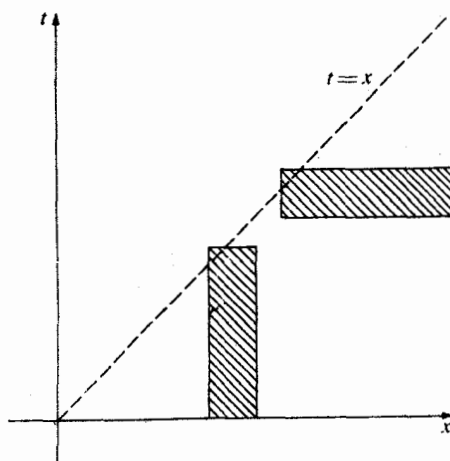
$$\begin{aligned} F(p)G(p) &= \int_0^\infty \left[\int_t^\infty e^{-px} f(x-t) dx \right] g(t) dt \\ &= \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-px} f(x-t) g(t) dx dt \end{aligned}$$

در این انتگرال، میدان انتگرالگیری نیمه اول ربع اول ($x - t \geq 0$) از صفحه xt است و هرگاه ترتیب انتگرالگیری را با توجه به شکل ۷۵ عوض کنیم، می بینیم که:

$$\begin{aligned} F(p)G(p) &= \int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-px} f(x-t) g(t) dt \right] dx \\ &= \int_0^\infty e^{-px} \left[\int_0^x f(x-t) g(t) dt \right] dx \\ &= L \left[\int_0^x f(x-t) g(t) dt \right] \end{aligned}$$

انتگرال آخرین عبارت تابعی از حد بالایی آن، یعنی x است و جواب سؤال ما را به دست می دهد. این انتگرال را کنولوسیون توابع $f(x)$ و $g(x)$ می نامند. آن را می توان به عنوان «حاصلضرب تعمیم یافته» این توابع تلقی کرد.

کنولوسیون را می توان برای یافتن تبدیل معکوس به کاربرد. به عنوان مثال، چون $L[x] = 1/p^2$ و $L[\sin x] = 1/(p^2 + 1)$ ، داریم



شکل ۷۵

$$\begin{aligned}
 L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+1)}\right] &= L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right] \\
 &= \int_0^x (x-t)\sin t \, dt \\
 &= x - \sin x
 \end{aligned}$$

که با روش کسرهای جزئی نیز با آسانی به دست می‌آید. دسته جالبتری از کاربردها به طریق زیر ظاهر می‌شود. اگر $f(x)$ و $k(x)$ توابع مفروضی باشند، آنگاه معادله

$$f(x) = y(x) + \int_0^x k(x-t)y(t)dt \quad (1)$$

را که در آن، تابع مجهول $y(x)$ در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود، معادله انتگرالی می‌نامند. به علت شکل خاص این معادله که انتگرال موجود در آن کنولوسیون توابع $k(x)$ و $y(x)$ است، حل آن متکی بر تبدیل لاپلاس است. در واقع، هرگاه از طرفین معادله (۱) تبدیل لاپلاس بگیریم، می‌بینیم که

$$L[f(x)] = L[y(x)] + L[k(x)]L[y(x)]$$

لذا

$$L[y(x)] = \frac{L[f(x)]}{1 + L[k(x)]} \quad (2)$$

طرف راست (۲) تابع معلومی از p است، و اگر این تابع، تبدیل قابل تشخیصی باشد، جواب $y(x)$ به دست آمده است.

مثال ۰۱. معادله انتگرالی

$$y(x) = x^r + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt; \quad (3)$$

از این نوع است، و با اعمال L بر طرفین آن خواهیم داشت

$$L[y(x)] = L[x^r] + L[\sin x] L[y(x)]$$

و پس از حل آن بر حسب $L[y(x)]$ داریم:

$$\begin{aligned} L[y(x)] &= \frac{L[x^r]}{1 - L[\sin x]} = \frac{r! / p^r}{1 - 1/(p^2 + 1)} \\ &= \frac{r! (p^2 + 1)}{p^r (p^2 + 1)} = \frac{r!}{p^r} + \frac{r!}{p^6} \end{aligned}$$

لذا

$$y(x) = x^r + \frac{1}{p_0} x^5$$

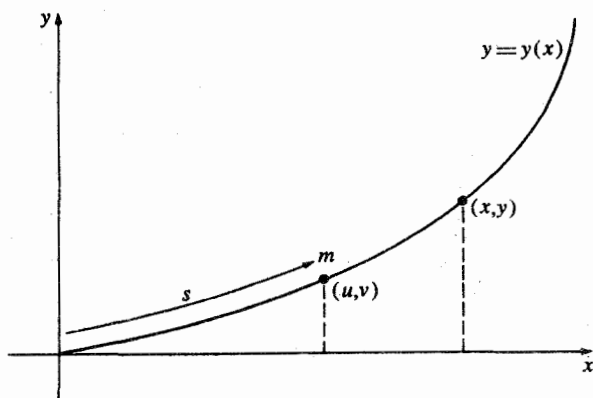
جواب معادله (۳) است.

برای تشریح بیشتر این روش، يك مسئله کلاسیک از مکانیک را، که به این گونه معادله انتگرالی منجر می شود، تجزیه و تحلیل می کنیم. فرض کنید سیمی به صورت منحنی همواری خم شده باشد (شکل ۷۶) و مهره ای به جرم m روی سیم از حالت سکون به سمت مبدأ شروع به لغزیدن کند. همچنین فرض کنید این حرکت بدون اصطکاک و تنها تحت تأثیر نیروی وزن مهره انجام پذیرد. فرض کنید (x, y) نقطه شروع حرکت و (u, v) هر نقطه واقع در بین راه باشد. هرگاه شکل سیم به وسیله منحنی $y = y(x)$ مشخص گردد، آنگاه مدت زمان فرود این مهره تابع معینی چون $T(y)$ از ارتفاع اولیه y خواهد بود. مسئله مکانیکی آبل عکس این مطلب است: تابع $T(y)$ از قبل داده شده است، و منظور تعیین شکل سیم است به طوری که $T(y)$ مدت زمان فرود آن باشد.

برای آنکه این مسئله را به زبان ریاضی بیان کنیم، از اصل پایستگی (بقای انرژی

$$-\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y-v)} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = mg(y-v)$$

شروع می کنیم، این رابطه را می توان به صورت زیر بیان کرد:



شکل ۷۶

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}$$

با انتگرالگیری از این رابطه از $v = 0$ تا $v = y$ ، می‌بینیم که

$$T(y) = \int_{v=y}^{v=0} dt = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{s'(v) dv}{\sqrt{y-v}} \quad (۴)$$

حال وقتی منحنی $y = y(x)$ معلوم باشد، عبارت زیر نیز معلوم خواهد بود

$$s = s(y) = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

لذا مشتق آن نیز معلوم است:

$$f(y) = s'(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad (۵)$$

هرگاه (۵) را در (۴) بگذاریم، خواهیم دید که

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{f(v) dv}{\sqrt{y-v}} \quad (۶)$$

به وسیله این رابطه می‌توان $T(y)$ را از روی منحنی داده شده به دست آورد. در مسئله آبل می‌خواهیم منحنی را به کمک $T(y)$ داده شده به دست آوریم. از این دیدگاه، در معادله (۶) تابع $f(y)$ مجهول است و خود معادله (۶) معادله انتگرالی آبل نامیده

می‌شود. دقت کنید که انتگرال معادله (۶) کنولوسیون توابع $y^{-1/2}$ و $f(y)$ است، لذا هرگاه از طرفین (۶) تبدیل لاپلاس بگیریم، می‌بینیم که

$$L[T(y)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} L[y^{-1/2}] L[f(y)]$$

حال اگر به خاطر آوریم که $L[y^{-1/2}] = \sqrt{\pi/p}$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} L[f(y)] &= \sqrt{2g} \frac{L[T(y)]}{\sqrt{\pi/p}} \\ &= \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{1/2} L[T(y)] \end{aligned} \quad (۷)$$

وقتی $T(y)$ معلوم باشد، طرف راست معادله (۷) تابع معلومی از p خواهد بود، لذا امید است که با یافتن تبدیل معکوس بتوان $f(y)$ را به دست آورد. وقتی $f(y)$ معلوم شد، خود منحنی را می‌توان از حل معادله دیفرانسیل (۵) به دست آورد.

به عنوان مثالی مشخص، بحث خود را روی حالتی متمرکز می‌کنیم که $T(y)$ برابر با مقدار ثابت T_0 باشد. این فرض بدان معناست که زمان نزول باید مستقل از نقطه شروع باشد. منحنی تعریف شده با این خاصیت، منحنی همزمان نامیده می‌شود. لذا مسئله ماتعین منحنی همزمان است. در این حالت، (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$L[f(y)] = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{1/2} L[T_0] = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} p^{1/2} \frac{T_0}{p} = b^{1/2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

که در آن $b = 2gT_0^2/\pi^2$. تبدیل معکوس $\sqrt{\pi/p}$ برابر $y^{-1/2}$ است، پس

$$f(y) = \sqrt{\frac{b}{y}} \quad (۸)$$

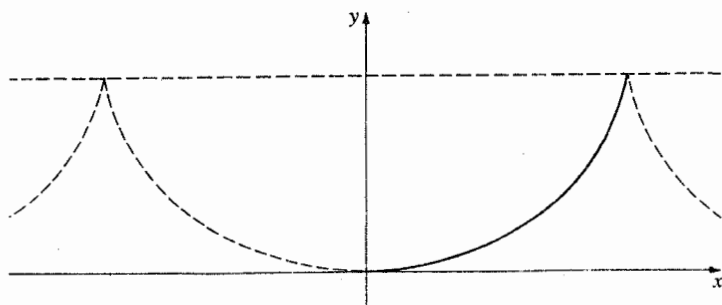
با این $f(y)$ ، معادله (۵)، یعنی معادله دیفرانسیل منحنی مورد نظر، به صورت

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{b}{y}$$

نوشته می‌شود، لذا داریم

$$x = \int \sqrt{\frac{b-y}{y}} dy$$

که با تغییر متغیر $y = b \sin^2 \phi$ به صورت زیر درمی‌آید:



شکل ۷۷

$$x = 2b \int \cos^2 \phi \, d\phi = b \int (1 + \cos 2\phi) \, d\phi$$

$$= \frac{b}{2} (2\phi + \sin 2\phi) + c$$

بنابراین

$$y = \frac{b}{2} (1 - \cos 2\phi) \quad \text{و} \quad x = \frac{b}{2} (2\phi + \sin 2\phi) + c \quad (9)$$

منحنی باید از مبدأ $(0, 0)$ عبور کند لذا $c = 0$ ؛ و اگر $a = b/2$ و $\theta = 2\phi$ انتخاب شوند، (۹) به صورت ساده تر زیر درخواهد آمد:

$$y = a(1 - \cos \theta) \quad \text{و} \quad x = a(\theta + \sin \theta)$$

اینها معادلات پارامتری چرخزاد (شکل ۷۷) هستند، که توسط نقطه ثابتی از دایره ای به شعاع a که زیر خط چین افقی $y = 2a$ می چرخد تولید شده است. چون $2a = b = 2gT_0^2/\pi^2$ ، قطر دایره مولد به وسیله مقدار ثابت مدت زمان سقوط تعیین می شود.

نتیجتاً، منحنی همزمان یک چرخزاد است. در تمرینهای ۶-۲ و ۱۱-۴ این خاصیت چرخزاد را به روشهای دیگری تحقیق کردیم. بحث فعلی دارای این مزیت است که به ما امکان می دهد تا بدون اطلاع قبلی از جواب، منحنی همزمان را پیدا کنیم.

تمرین

۱- مطلوب است تعیین $L^{-1}[(1/(p^2 + a^2))^2]$ به کمک کنولوسیون (مراجعه شود به تمرین ۱-۵۳)

۲- معادلات انتگرالی زیر را حل کنید:

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt \quad (\text{الف})$$

$$y(x) = e^x \left[1 + \int_0^x e^{-t} y(t) dt \right] \quad (\text{ب})$$

$$e^{-x} = y(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt \quad (\text{ج})$$

$$2 \sin 2x = y(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt \quad (\text{د})$$

۳- رابطه

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{T(t)dt}{\sqrt{y-t}}$$

را از معادله (۷) به دست آورید، و به کمک آن، درستی (۸) را وقتی که $T(y)$ مقدار ثابت T باشد تحقیق کنید.

۴- مطلوب است تعیین معادله منحنی فرود، هرگاه $T(y) = k\sqrt{y}$ باشد، در اینجا k مقدار ثابتی است.

۵- نشان دهید که معادله دیفرانسیل

$$y'' + a^2 y = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

دارای جواب زیر است:

$$y(x) = \frac{1}{a} \int_0^x f(t) \sin a(x-t) dt$$

پیوست الف . لاپلاس

پیرسیمون دو لاپلاس (۱۷۴۹-۱۸۲۷) ریاضیدان و منجم نظری فرانسوی و در زمان خود آنچنان مشهور بود که نیوتن فرانسه خوانده می شد. علاقه اصلی او در طول زندگیش مکانیک سماوی، نظریه احتمال، و ارتقاء مقام بود.

در سن بیست و چهار سالگی عمیقاً درگیر جزئیات کاربرد قانون گرانش نیوتن در کل منظومه شمسی بود که در آن، سیارات و اقمار آنها تنها تحت تأثیر خورشید نیستند، بلکه به اشکال درهم و پیچیده‌ای در یکدیگر تأثیر دارند. حتی نیوتن معتقد بود که گاهی مداخله الهی لازم است تا از پیدایش بی‌نظمی در این سازوکار پیچیده جلوگیری شود. لاپلاس تصمیم گرفت که دلایل علمی این موضوع را جستجو کند، و موفق شد ثابت کند که یک

منظومه شمسی ایده آل در ریاضیات عبارت است از دستگاه دینامیکی پایداری که همواره بدون تغییر بماند. این دستاورد تنها یکی از پیروزیهای فراوان اوست که در اثر بزرگ و تاریخیش تحت عنوان مکانیک سماوی^۱ (که در پنج مجلد از سال ۱۷۹۹ تا ۱۸۲۵ انتشار یافت)، آمده است. در این اثر کارهای چندین نسل از ریاضیدانان برجسته راجع به گرانش گردآوری شده است. متأسفانه به خاطر شهرت آینده اش، همه مراجع مربوط به اکتشافات پیشینان و معاصران خود را حذف کرد، و امکان این توهم را به وجود آورد که همه این مطالب و نظرات متعلق به خود اوست. حکایات زیادی در رابطه با این کارش ذکر شده است. یکی از مشهورترین آنها حاکی از زمانی است که ناپلئون برای نشان دادن نقطه ضعفی از لاپلاس، به او اعتراض کرد که چرا کتاب قطوری راجع به دستگاه جهان نوشته است بدون اینکه حتی یکبار هم در آن به خدا به عنوان خالق جهان اشاره ای کرده باشد. میراث اصلی لاپلاس که در کتاب مکانیک سماوی او برای نسلهای بعدی به جا ماند توسعه همه جانبه نظریه پتانسیل است، که در رشته های متعددی از علوم فیزیکی، از گرانش و مکانیک سیالات گرفته تا الکترومغناطیس و فیزیک اتمی، وسیعاً مطرح می باشد. با وجود اینکه لاپلاس اندیشه پتانسیل را از لاگرانژ گرفت بدون اینکه ذکر ی از این امر به میان آورد، ولی این نظریه را مورد استفاده آنچنان گسترده ای قرارداد که از آن زمان، معادله دیفرانسیل نظریه پتانسیل همواره به معادله اساسی لاپلاس مشهور بوده است.

شاهکار دیگر او رساله نظریه تحلیلی احتمالات^۲ (۱۸۱۲) بود، که در آن کشفیات چهل ساله خود را در مورد احتمال تنظیم کرد. وی باز هم فراموش کرد از نظرات فراوان دیگران که با نظرات خود در آمیخته بود، ذکر ی به میان آورد، ولی با این وجود عموماً متفق القول اند که کتابش در این زمینه بزرگترین اثری است که در این قسمت از ریاضی نوشته شده است. وی در مقدمه این کتاب می گوید: «نظریه احتمال اساساً چیزی نیست مگر برداشت معمولی که به صورت محاسبه درآمده است.» ممکن است چنین باشد، ولی ۷۰۰ صفحه آنالیز بفرنج بعدی، که در آن آزادانه از تبدیلات لاپلاس، توابع مولد، و بسیاری ابزار غیر ابتدایی دیگر استفاده کرده است، به گفته بعضی، از نظر پیچیدگی حتی از کتاب مکانیک سماوی نیز فراتر می رود.

بعد از انقلاب فرانسه، استعداد سیاسی و حرص لاپلاس برای کسب مقام به اوج خود رسید. هم میهنانش از بی ثباتی و اطاعت وی در امر سیاست به تمسخر یاد می کنند. این بدان معناست که هر وقت تغییری در حکومت پیش می آمد (که در آن زمان زیاد رخ می داد) لاپلاس با تغییر اصول معتقدات خود با آرامی با محیط سازگار می شد. او بین جمهورخواهی شدید و مداحی از سلطنت در نوسان بود. و هر بار به شغلی بهتر و عنوانی مهم تر دست می یافت. مناسب است که او را با نماینده قلابی پاپ در بری^۳ که در ادبیات انگلیسی آمده است مقایسه

1. Mécanique Céleste

2. Théorie Analytique des Probabilités

۳. شهرکی ساحلی در ایرلند

کنیم، که دوبار کاتولیک و دوبار پروتستان شد. می گویند نماینده پاپ در جواب اتهام رنگ-عوض کردن گفته است که: «نه، این طور هم نیست، زیرا گرچه مذهب خود را تغییر می دادم ولی یقیناً به اصل خود پای بند بوده ام، اصلی که حکم می کند من باید تا پایان عمر اسقف در بری باقی بمانم.»

لاپلاس برای جبران خطاهایش، همواره در کمک و تشویق دانشمندان جوانتر دست و دل باز بود. اوگاه و بیگاه به مردانی مانند گیلوسالک^۱ شیمیدان، هامبولد^۲ جهانگرد و طبیعی دان، پواسون فیزیک دان، و خصوصاً، کوشی جوان، که یکی از بزرگترین سازندگان ریاضیات قرن نوزدهم شد، در پیشبرد کارشان کمک می کرد.

پیوست ب. آبل

نیلس هنریک آبل^۳ (۱۸۰۴-۱۸۲۹) یکی از پیشروترین ریاضیدانان قرن نوزدهم و احتمالاً بزرگترین نابغه برخاسته از کشورهای اسکاندیناوی است. آبل همراه با معاصرانش، گاوس و کوشی، یکی از پیشگامان ابداع ریاضیات نوین بوده است، که مشخصه آن تأکید بر اثبات دقیق است. زندگی آمیزه تندی بود از خوشبینی شوخ طبعانه در هنگامی که تحت فشار فقر و گمنامی قرار داشت، و در قبال دستاوردهای درخشان بر جسته فراوانش در عنوان جوانی، متواضع بود و در درو یارویی با مرگی زودرس به آرامی تسلیم بود.

آبل یکی از شش فرزند خانواده کشیش فقیری در یکی از روستاهای نروژ بود. بیش از شانزده سال نداشت که استعداد عظیمش آشکار شد و مورد تشویق یکی از معلمین قرار گرفت، و چیزی نگذشت که به خواندن و فهمیدن کارهای نیوتن، اویلر، و لاگرانژ پرداخت. وی به عنوان تفسیری در مورد این تجربه، نکته زیر را بعدها در یکی از یادداشتهای ریاضی خود نوشت: «به نظر من اگر کسی بخواهد در ریاضی پیشرفت کند، باید به مطالعه آثار اساتید و نه شاگردان بپردازد.» هجده سال پیش نداشت که پدرش مرد و خانواده را در تنگدستی به جا گذاشت. آنها با کمک دوستان و همسایگان امرار معاش می کردند و با کمک مالی چندتن از استادان، این پسر توانست در سال ۱۸۲۱ به طریقی وارد دانشگاه اسلو شود. نخستین پژوهشهای او، که شامل حل مسئله کلاسیک منحنی همزمان به وسیله معادله انتگرالی (مورد بحث در بخش ۵۴) بود، در سال ۱۸۲۳ منتشر شد. این اولین جواب معادله ای از این نوع بود، و راه گشایی برای پیشرفت وسیع معادلات انتگرالی در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم شد. او همچنین ثابت کرد که معادله درجه پنجم $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ را در حالت کلی نمی توان مانند معادلات درجه پایتتر، بر حسب رادیکال حل کرد، و بدین ترتیب مسئله ای را حل کرد که ریاضیدانان را ۳۰۰ سال گرفتار کرده بود. او اثباتش را به خرج خود در جزوه کوچکی منتشر کرد.

1. Gay-Lussac
2. Humboldt
3. Niels Henrik Abel

در این رشد علمی، آبل بزودی از نروژ فراتر رفته و تصمیم به دیدار از فرانسه و آلمان گرفت. با حمایت دوستان و استادانش تقاضایی به دولت داد، که پس از تشریفات و تأخیرهای متعارف، بورسی برای يك مسافرت طولانی علمی در قاره اروپا دریافت کرد. سال اول مسافرت خود به خارج را بیشتر در برلین گذراند. در آنجا این خوش شانس بزرگ را داشت که با ریاضیدان آما تور جوان و پرشوری به نام آگوست لثوپولد کرل، که بعدها دوست نزدیک، مشاور، و حامی او شد، آشنا گردد. در مقابل، آبل کرل را به انتشار مجله مشهورش به نام مجله ریاضیات محض و کاربردی^۲ برانگیخت. این اولین مجله ادواری جهان بود که کلاً به پژوهشهای ریاضی اختصاص داشت. سه جلد اول آن شامل ۲۲ مقاله از آبل بود.

مطالعات اولیه آبل در ریاضیات منحصر به سنت قدیم قرن هجدهم بود که نمونه اش اوپلر است. در برلین تحت تأثیر مکتب فکری جدیدی قرار گرفت که توسط گاوس و کوشی رهبری می شد، و بیشتر تأکیدش بر استنتاج دقیق بود تا بر محاسبات مشروح. در آن زمان به جز کار عظیم گاوس روی سریهای فوق هندسی، کمترین اثباتی در آنالیز بود که امروزه نیز معتبر به- شمار آید. همان طور که آبل در نامه ای به یکی از دوستانش تشریح می کند: «اگر ساده ترین حالات را کنار بگذاریم، در تمام ریاضیات حتی يك سری ینهایت هم نمی توان یافت که مجموع آن دقیقاً تعیین شده باشد. به عبارت دیگر، مهمترین بخشهای ریاضیات فاقد مبنا هستند.» در این دوران وی نتیجه مطالعات کلاسیک خود را در مورد سریهای دو جمله ای نوشت و در آن نظریه عمومی همگرایی را بنانهاد و اولین اثبات قانع کننده از صحت بسط این سری را ارائه کرد.

آبل جزوه مربوط به معادلات درجه پنجم خود را، به امید آنکه به مثابه يك جواز عبور علمی به کار رود، برای گاوس به گوتینگن فرستاده بود. ولی، گاوس به دلیلی که روشن نیست بدون آنکه به آن حتی نظری بیاندازد آن را کنار گذاشت، زیرا ۳۰ سال بعد، پس از مرگش آن را سر بسته در بین اوراقش یافتند. با تأسف برای هردو نفر، آبل احساس کرد که در مورد او کارشکنی شده است، و تصمیم گرفت بدون ملاقات با گاوس به پاریس برود.

در پاریس با کوشی، لژاندر، دیریکله، و دیگران ملاقات کرد، ولی این ملاقاتها سرسری بود و او آن طور که می بایست شناخته نشد. وی در آن زمان چندین مقاله مهم در مجله کرل منتشر کرده بود ولی فرانسویان کمتر از وجود این مجله ادواری مطلع بودند و آبل خجالتیتر از آن بود که با افراد تازه آشنا راجع به کارهای خود صحبت کند. انس دکی پس از ورودش، اثر برجسته خود را تحت عنوان یادداشتی درباره يك خاصیت کلی دسته وسیعی از توابع متعالی^۳ که آن را شاهکار خود دانست، به پایان رساند. این اثر شامل کشفی

1. August Leopold Crelle

2. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik

3. Mémoire sur une Propriété Générale d'une Classe Très Etendue des Fonctions Transcendentes

در مورد انتگرال توابع جبری است که امروزه به نام قضیه آبل مشهور است، و پایه‌ای برای نظریهٔ بعدیش راجع به انتگرال آبل، توابع آبل، و قسمت زیادی از هندسهٔ جبری به شمار می‌رود. گفته می‌شود که دهها سال بعد، هرمیت ضمن اشاره به این یادداشت، گفته است: «از آبل آنقدر کار به جامانده است که ریاضیدانان را تا ۵۰۰ سال مشغول کند.»^۱ ژاکوبی قضیهٔ آبل را بزرگترین کشف حساب انتگرال در قرن نوزدهم توصیف کرد. آبل دستنوشتهٔ خود را به فرهنگستان فرانسه ارائه کرد. وی امیدوار بود که این اثر بتواند توجه ریاضیدانان فرانسه را به او جلب کند، ولی او بیهوده صبر کرد تا کیسه‌اش خالی شد و مجبور شد به برلین برگردد. جریانی که اتفاق افتاد از این قرار بود: دستنوشتهٔ مزبور برای بررسی به کوشی و لژاندر داده شد؛ کوشی آن را به‌خانه برد و در جای نامربوطی گذاشت و آن را بکلی فراموش کرد؛ و تا سال ۱۸۴۱ اقدام به انتشار این اثر نکرد، و در آن زمان نیز قبل از آن که نمونه‌های چاپی آن خوانده شود گم شد. بالاخره نسخهٔ اصلی مقاله در سال ۱۹۵۲ از فلورانس سردرآورد.^۲ آبل در برلین اولین مقالهٔ انقلابی خود را در مورد توابع بیضوی، موضوعی که سالها روی آن کار کرده بود، به پایان رساند، و درحالی که سخت مقروض شده بود به نروژ برگشت.

او انتظار داشت در بازگشت، به استادی دانشگاه منصوب شود، ولی بازهم آرزو- هایش نقش بر آب شد. با تدریس خصوصی به امرار معاش پرداخت، و مدت کوتاهی نیز به‌عنوان معلم کمکی در یک مؤسسه گمارده شد. در این دوران یکسره مشغول کار بود و اغلب اوقات روی نظریهٔ توابع بیضوی که آن را به عنوان عکس انتگرالهای بیضوی کشف کرده بود، کار می‌کرد. این نظریه بسرعت جای خود را به عنوان یکی از رشته‌های اصلی آنالیز قرن نوزدهم، با کاربردهای فراوانی در نظریهٔ اعداد، فیزیک ریاضی، اروپا رسید و در ردیف بزرگان ریاضی جهان قرار گرفت، ولی وی به‌خاطر گوشه‌گیری از این ماجرا بی‌خبر ماند. در اوایل سال ۱۸۲۹ مرض سلی که طی مسافرت به آن مبتلا شده بود چنان پیشروی کرد که او را از کار کردن بازداشت، و در بهار همان سال، آبل در سن بیست و شش سالگی درگذشت. کمی پس از مرگش، کرل در یادنامه‌ای به طعنه نوشت که تلاشهای آبل موفقیت‌آمیز بوده است، و آبل باید به کرسی ریاضی دانشگاه برلین منصوب شود.

کرل در مجلهٔ خود آبل را چنین می‌ستاید: «تمام آثارش حاوی نشانه‌هایی از نبوغ و قدرت فکری حیرت‌انگیز است. می‌توان گفت که او می‌توانست با قدرتی مقاومت‌ناپذیر از همهٔ موانع بگذرد و به‌عمق مسئله نفوذ کند... وجه تمایز او خلوص و نجابت ذاتی وی و نیز تواضع کم‌نظیری بود که ارزش او را به میزان نبوغ غیرعادیش بالا می‌برد.» ولی، ریاضیدانان،

۱. مشروح این داستان حیرت‌انگیز در کتاب زیر آمده است.

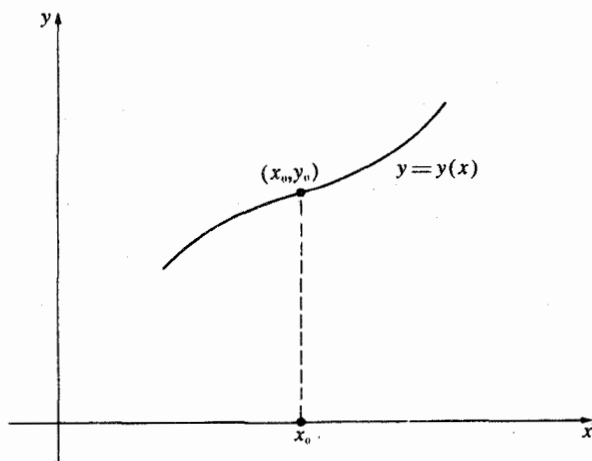
برای یادآوری مردان بزرگ ریاضی روشهای مختص به خود دارند، و با گفتن معادله انتگرالی آبل، انتگرالها و توابع آبل، گروههای آبل، سری آبل، فرمول مجموع جزئی آبل، قضیه حد آبل در نظریه سریهای توانی، و جمع پذیری آبل از او یاد می کنند. کمتر کسی است که اسمش به این همه موضوع و قضیه در ریاضیات نوین پیوند خورده باشد و آنچه وی در دوران يك زندگی عادی می توانست انجام دهد مافوق تصور است.

۵۵. روش تقریبات متوالی

یکی از موضوعهای عمده‌ای که در این کتاب کراراً به آن اشاره شده این است که تنها تعداد خیلی از انواع ساده معادلات دیفرانسیل را می‌توان صریحاً بر حسب توابع مقدماتی شناخته شده حل کرد. بعضی از این معادلات را در سه فصل اول بررسی کردیم، و فصل ۵ شامل شرح مبسوط معادلات مرتبه دومی است که جوابهایشان را می‌توان بر حسب سریهای توانی بیان کرد. لیکن، معادلات دیفرانسیل فراوانی خارج از این دسته‌ها قرار می‌گیرند، و هیچ یک از کارهایی که تاکنون انجام داده‌ایم، روشی برای حل این گونه معادلات ارائه نمی‌کند. کار خود را با بررسی مسئله مقدار اولیه زیر که در بخش ۲ مطرح شده است شروع می‌کنیم:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

که در آن $f(x, y)$ تابع دلخواهی است که در یک همسایگی از نقطه (x_0, y_0) تعریف شده و پیوسته است. به زبان هندسی، منظور ما طرح روشی برای رسم تابعی مانند $y = y(x)$ است که نمودار آن از نقطه (x_0, y_0) بگذرد و در یک همسایگی x در معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ صدق کند (شکل ۷۸). با توجه به مطالب فصول گذشته، روشن است که روشهای مقدماتی در اینجا به کار نمی‌آید و در حالت کلی مستلزم نوعی روند نامتناهی است. روشی که تشریح می‌کنیم متضمن راهی برای حل معادلات دیفرانسیل است که با راههایی که قبلاً دیده‌ایم، کاملاً تفاوت دارد. نکته کلیدی این روش، در تبدیل مسئله مقدار



شکل ۷۸

اولیه (۱) به معادله انتگرال معادل آن، یعنی

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \quad (2)$$

نهفته است. این معادله را بدین دلیل معادله انتگرال می‌نامند که تابع مجهول، زیر علامت انتگرال واقع شده است. برای آنکه دریا بیم که (۱) و (۲) واقعاً معادل یکدیگرند، فرض می‌کنیم که $y(x)$ جوابی برای (۱) باشد. آنگاه $y(x)$ خود به خود پیوسته است و طرف راست رابطه

$$y'(x) = f[x, y(x)]$$

تابع پیوسته‌ای از x خواهد بود؛ و وقتی از این رابطه از x_0 تا x انتگرال بگیریم و از $y(x_0) = y_0$ استفاده کنیم، رابطه (۲) به دست خواهد آمد. در رابطه (۲) طبق معمول به جای x از متغیر ظاهری t استفاده شده است، تا از اشتباه با x که حد بالایی انتگرال است جلوگیری شود. پس هر جواب (۱) جواب پیوسته‌ای برای (۲) خواهد بود. برعکس، اگر $y(x)$ جواب پیوسته‌ای برای (۲) باشد، آنگاه $y(x_0) = y_0$ است، زیرا انتگرال، به ازای $x = x_0$ ، صفر می‌شود، و با مشتق‌گیری از (۲) معادله دیفرانسیل $y'(x) = f[x, y(x)]$ به دست می‌آید. این استدلال ساده نشان می‌دهد که (۱) و (۲) معادلتند، به این معنا که جوابهای (۱) - اگر جوابی وجود داشته باشد - دقیقاً جوابهای پیوسته (۲) می‌باشند. بویژه، اگر بتوانیم جواب پیوسته‌ای برای (۲) بیابیم، خود به خود جوابی برای (۱) به دست آورده‌ایم.

حال توجه خود را به چگونگی حل معادله (۲)، با روشی مبتنی بر تکرار، معطوف می‌کنیم. لذا، کار را با تقریبی اولیه از جواب شروع می‌کنیم و آنرا گام به گام با استفاده

از عملی تکرارپذیر بهبود می بخشیم بدین قصد که بتوانیم تا حد مورد نظر به جواب دقیق نزدیک شویم. همانطور که ذیلا خواهیم دید، نخستین مزیت (۲) نسبت به (۱) آن است که معادله انتگرال دستورالعمل مناسبی برای انجام این روند، ارائه می کند.

یک تقریب مقدماتی برای جواب مورد نظر، تابع ثابت $y_0(x) = y_0$ است، که همان خط افقی ماربر نقطه (x_0, y_0) می باشد. برای دستیابی به تقریب جدید و احیاناً بهتری مانند $y_1(x)$ ، این تقریب را به صورت زیر، در طرف راست معادله (۲) وارد می کنیم:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$$

قدم بعدی، استفاده از $y_1(x)$ به منظور دست یافتن به تقریب جدید و شاید بهتری مانند $y_2(x)$ ، توسط همان روش می باشد:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt$$

در مرحله n ام این روند، خواهیم داشت

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt \quad (3)$$

این روش را روش تقریبات متوالی پیکار^۱ می نامند. طرز به کار بستن این روش را به کمک چند مثال نشان می دهیم.
مسئله مقدار اولیه ساده

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

دارای جواب بدیهی $y(x) = e^x$ می باشد. معادله انتگرال معادل آن، به صورت

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt$$

است و (۳) به صورت

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t) dt$$

۱. امیل پیکار (۱۸۵۶-۱۹۴۱)، یکی از برجسته ترین ریاضیدانان قرن گذشته فرانسه بود و دو کار مهم در آنالیز انجام داد: روش تقریبات متوالی وی، که او را قادر به تکمیل نظریه معادلات دیفرانسیلی نمود که کوشی در سالهای ۱۸۲۰ پایه گذاری کرده بود؛ و قضیه مشهورش (که قضیه مهم پیکار خوانده می شود) راجع به مقادیری که تابع تحلیلی مختلط در حوالی یک نقطه غیر عادی اساسی اش اختیار می کند، که تا امروز پژوهشهای زیادی را موجب شده است. او، همچون یک فرانسوی واقعی، خبره در غذاهای عالی و بخصوص شیفته نوعی ماهی آب پز بود.

درمی آید. با $y_0(x) = 1$ ، بسادگی می توان دید که

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3}$$

و به طور کلی

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

در این حالت خیلی روشن است که تقریبات متوالی واقعاً به سمت جواب دقیق میل می کنند، زیرا این تقریبات همان مجموعه های جزئی سری توانی مربوط به e^x هستند. اکنون مسئله

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1 \quad (4)$$

را در نظر می گیریم. این يك معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است، و با آسانی معلوم می شود که جوابی که در شرایط اولیه داده شده صدق می کند، $y(x) = 2e^x - x - 1$ است. معادله انتگرال معادل آن به صورت

$$y(x) = 1 + \int_0^x [t + y(t)] dt$$

و (۳) برای آن به صورت

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x [t + y_{n-1}(t)] dt$$

است. با توجه به $y_0(x) = 1$ و استفاده از روش پیکار خواهیم داشت

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1+2t+\frac{t^2}{2!}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1+2t+t^2+\frac{t^3}{3!}\right) dt$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4!} \right) dt$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \times 4} + \frac{x^5}{5!}$$

و به طور کلی

$$y_n(x) = 1 + x + 2 \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

این عبارت بوضوح به سمت عبارت

$$1 + x + 2(e^x - x - 1) + 0 = 2e^x - x - 1$$

میل می کند که باز هم همان جواب دقیق معادله است.

با وجود ارائه این مثالها، ممکن است خواننده در مورد ارزش عملی روش پیکار کاملاً متقاعد نشده باشد. برای مثال، اگر انتگرال گیرهای متوالی بسیار پیچیده و یا - جز به صورت نظری - امکان ناپذیر باشند، چکار باید کرد؟ این تردید بجاست، زیرا قدرت واقعی روش پیکار عمدتاً در نظریه معادلات دیفرانسیل برای اثبات وجود و یگانگی جواب مسئله مقدار اولیه تحت شرایط بسیار کلی نهفته است (ونه واقعاً دریافتن جوابها). قضایای حاوی احکام دقیقی از این نوع را قضایای وجود و یگانگی می نامند. در دوبخش بعد به بیان و اثبات تعدادی از این قضایا می پردازیم.

تمرین

۱- جواب دقیق مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

با $y_0(x) = 1$ شروع کنید و با استفاده از روش پیکار $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، و $y_3(x)$ را محاسبه کنید، و این نتایج را با جواب دقیق مقایسه نمایید.

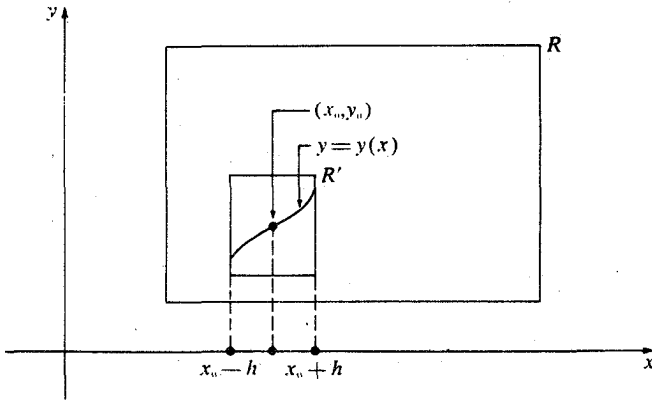
۲- جواب دقیق مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$y' = 2x(1+y), \quad y(0) = 0$$

با $y_0(x) = 0$ شروع کنید و $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، $y_3(x)$ ، و $y_4(x)$ را محاسبه و این نتایج را با جواب دقیق مقایسه کنید.

۳- برای آنکه به کار آبی روش پیکار پی ببریم، آموزنده خواهد بود اگر کار را با تقریب اولیه ای غیر از تابع ثابت $y_0(x) = y$ شروع کنیم. با انتخاب تقریب اولیه زیر، روش پیکار را برای مسئله مقدار اولیه (۴) به کار بگیرید

الف) $y_0(x) = e^x$ ، ب) $y_0(x) = 1 + x$ ، ج) $y_0(x) = \cos x$



شکل ۷۹

۵۶. قضیهٔ پیکار

همان‌طور که در آخر بخش قبل اشاره کردیم، ارزش واقعی روش تقریبات متوالی پیکار در نقشی است که این روش در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل ایفا می‌کند. این نقش در اثبات قضیهٔ بنیادی زیر بخوبی روشن می‌گردد.

قضیهٔ الف. (قضیهٔ پیکار.) فرض می‌کنیم که $f(x, y)$ و $\partial f / \partial y$ در مستطیل بسته‌ای مانند R ، که اضلاعش موازی محورها هستند، (شکل ۷۹) توابعی پیوسته از x و y باشند. چنانچه (x_0, y_0) یک نقطهٔ درونی R باشد، آنگاه عدد مثبت h وجود دارد، به‌طوری‌که مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (۱)$$

در فاصلهٔ $|x - x_0| \leq h$ یک وقتها یک جواب به‌صورت $y = y(x)$ دارد.

اثبات. برهان قضیه نسبتاً طولانی و پیچیده است و بهترین راه فهم آن، شکستن اثبات به مراحل ساده می‌باشد.

نخست، می‌دانیم که هر جواب (۱)، جواب پیوستهٔ معادلهٔ انتگرال

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \quad (۲)$$

نیز هست، و برعکس. این به ما امکان می‌دهد تا به این نتیجه برسیم که معادلهٔ (۱) در فاصلهٔ $|x - x_0| \leq h$ دارای جوابی منحصر به فرد است، اگر و تنها اگر معادلهٔ (۲) در همان فاصله دارای جوابی پیوسته و منحصر به فرد باشد. در بخش ۵۵ شواهدی ارائه نمودیم مبنی بر این که دنبالهٔ توابع $y_n(x)$ که به صورت زیر تعریف شود، به‌جوابی از (۲) میل می‌کند:

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_0(t)] dt$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt \quad (3)$$

...

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt$$

حال توجه می کنیم که $y_n(x)$ همان n امین مجموع جزئی سری تابعی زیر است:

$$y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] = y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \dots \quad (4)$$

لذا همگرایی دنباله (۳) معادل با همگرایی این سری می باشد. برای تکمیل اثبات، عدد مثبتی مانند h می یابیم تا فاصله $|x - x_0| \leq h$ را معین کند، و آنگاه نشان می دهیم که روی این فاصله احکام زیر صادق اند: (الف) سری (۴) به تابعی مانند $y(x)$ میل می کند؛ (ب) $y(x)$ جواب پیوسته ای از (۲) است؛ (پ) $y(x)$ تنها جواب پیوسته (۲) می باشد. از فرضهای مسئله برای یافتن h ، به طریق زیر استفاده می شود. فرض کرده ایم که $f(x, y)$ و $\partial f / \partial y$ در مستطیل R توابعی پیوسته اند. ولی R بسته (یعنی مرز خود را نیز شامل است) و کراندار است، لذا هر یک از این توابع لزوماً در R کراندار می باشند. این بدان معناست که اعداد M و K وجود دارند به قسمی که نامساویهای

$$|f(x, y)| \leq M \quad (5)$$

و

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K \quad (6)$$

برای کلیه نقاط (x, y) در R برقرار اند. حال توجه می کنیم که اگر (x, y_1) و (x, y_2) نقاط متمایزی از R باشند که مختص x شان مشترک است، آنگاه بنا بر قضیه مقدار میانگین، عددی مانند y^* بین y_1 و y_2 وجود دارد بطوریکه

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*) \right| |y_1 - y_2| \quad (7)$$

از (۶) و (۷) نتیجه می گیریم که برای هر دو نقطه (x, y_1) و (x, y_2) در R ، واقع بر یک خط قائم، نامساوی

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2| \quad (8)$$

(چه این دو نقطه متمایز باشند و چه نباشند) برقرار است. حال h را عدد مثبتی انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$Kh < 1 \quad (9)$$

و مستطیل R' که توسط $|x - x_0| \leq h$ و $|y - y_0| \leq Mh$ مشخص می‌شود، درون R واقع شود. از آنجا که (x_0, y_0) یک نقطه داخلی R است، وجود چنین h ای به آسانی دیده می‌شود. البته دلایل انتخاب این شرایط ظاهراً نامأنوس، ضمن ادامه اثبات روشن خواهد شد.

از این به بعد، توجه خود را به فاصله $|x - x_0| \leq h$ محدود می‌کنیم. برای اثبات (الف)، کافی است نشان دهیم که سری

$$|y_0(x)| + |y_1(x) - y_0(x)| + |y_2(x) - y_1(x)| + \dots + |y_n(x) - y_{n-1}(x)| + \dots \quad (10)$$

همگراست؛ و برای نیل به این هدف، جملات $|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$ را تخمین می‌زنیم. نخست، لازم است توجه کنیم که نمودار هر یک از توابع $y_n(x)$ در R' و نتیجتاً در R واقع است. این مطلب در مورد $y_0(x) = y$ واضح است، لذا نقاط $[t, y_0(t)]$ در R' واقع‌اند اما با توجه به (۵) داریم $|f[t, y_0(t)]| \leq M$ ، و در نتیجه

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y_0(t)] dt \right| \leq Mh$$

که حکم را در مورد $y_1(x)$ ثابت می‌کند. از این نامساوی به نوبه خود نتیجه می‌شود که نقاط $[t, y_1(t)]$ در R' واقع‌اند، لذا $|f[t, y_1(t)]| \leq M$ و داریم

$$|y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt \right| \leq Mh$$

به طریق مشابه، نامساوی

$$|y_3(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y_2(t)] dt \right| \leq Mh$$

نتیجه می‌شود، الی آخر. حال برای دستیابی به تخمین‌های فوق‌الذکر چنین عمل می‌کنیم: چون هر تابع پیوسته در فاصله بسته دارای ماکزیمم است، و $y_1(x)$ پیوسته است، عدد ثابت a را می‌توان به صورت $a = \max |y_1(x) - y_0|$ تعریف کرد و نوشت

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq a$$

حال، چون نقاط $[t, y_1(t)]$ و $[t, y_0(t)]$ در R' واقع‌اند، از (۸) نتیجه می‌شود که

$$|f[t, y_1(t)] - f[t, y_0(t)]| \leq K |y_1(t) - y_0(t)| \leq Ka$$

و داریم

$$|y_r(x) - y_l(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f[t, y_l(t)] - f[t, y_r(t)]) dt \right|$$

$$\leq K a h = a(Kh)$$

همینطور،

$$|f[t, y_r(t)] - f[t, y_l(t)]| \leq K |y_r(t) - y_l(t)| \leq K^2 a h$$

لذا

$$|y_r(x) - y_l(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f[t, y_r(t)] - f[t, y_l(t)]) dt \right|$$

$$\leq (K^2 a h) h = a(Kh)^2$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، می بینیم که نامساوی

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq a(Kh)^{n-1}$$

برای هر عدد صحیح و مثبت n برقرار است. بنابراین هر یک از جملات سری (۱۰) کمتر از (یا مساوی با) جمله متناظرش در سری عددی زیر است:

$$|y_0| + a + a(Kh) + a(Kh)^2 + \dots + a(Kh)^{n-1} + \dots$$

ولی نامساوی (۹) همگرایی این سری را تضمین می کند. پس، با توجه به آزمون مقایسه، سری (۱۰) نیز همگراست، بنابراین سری (۴) به تابعی میل می کند که آن را $y(x)$ می نامیم، و $y_n(x) \rightarrow y(x)$. چون نمودار همه $y_n(x)$ ها در R' واقع اند، بدیهی است که نمودار $y(x)$ نیز دارای چنین خاصیتی است.

حال به اثبات (ب) می پردازیم. اثبات بالا نه تنها همگرایی $y_n(x)$ به $y(x)$ در فاصله مورد بحث را نشان می دهد، بلکه ثابت می کند که این همگرایی یکنواخت است. این بدان معناست که می توان مقدار n را به قدر کافی بزرگ اختیار نمود به طوری که برای همه x های این فاصله، $y_n(x)$ به اندازه دلخواه به $y(x)$ نزدیک باشد؛ یا دقیقتر آنکه، برای $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح و مثبتی چون n_0 وجود دارد به طوری که برای $n \geq n_0$ نامساوی $|y(x) - y_n(x)| < \varepsilon$ برای همه x های این فاصله برقرار می باشد. از آنجا که هر یک از $y_n(x)$ ها آشکارا پیوسته است، از یکنواختی این همگرایی نتیجه می شود که تابع حدهی $y(x)$ نیز پیوسته است.^۱ برای آنکه ثابت کنیم که $y(x)$ واقعاً جواب معادله (۲) است، باید نشان دهیم که

۱. به بحث درج ذیل این مطلب نمی پردازیم، ولی دلیل آن خیلی ساده و مبتنی بر نامساوی زیر است:

$$|y(x) - y(\bar{x})| = |[y(x) - y_n(x)] + [y_n(x) - y_n(\bar{x})] + [y_n(\bar{x}) - y(\bar{x})]|$$

$$\leq |y(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_n(\bar{x})| + |y_n(\bar{x}) - y(\bar{x})|$$

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt = 0 \quad (11)$$

ولی می‌دانیم که

$$y_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt = 0 \quad (12)$$

پس اگر طرف چپ (۱۲) را از طرف چپ (۱۱) کم کنیم، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} y(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \\ = y(x) - y_n(x) + \int_{x_0}^x (f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y(t)]) dt \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \left| y(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \right| \\ \leq |y(x) - y_n(x)| + \left| \int_{x_0}^x (f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y(t)]) dt \right| \end{aligned}$$

چون نمودار $y(x)$ در R' و در نتیجه در R واقع است، از (۸) نتیجه می‌شود که

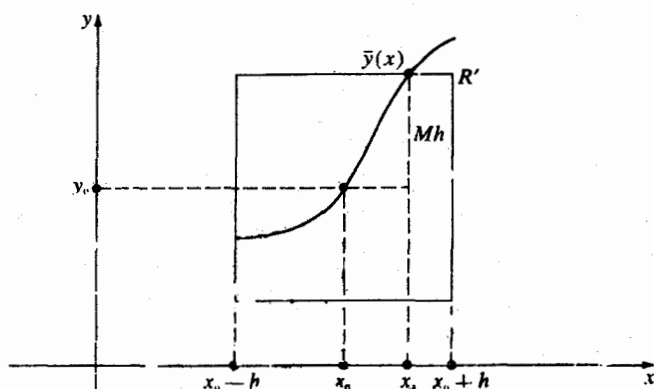
$$\begin{aligned} \left| y(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \right| \\ \leq |y(x) - y_n(x)| + Kh \max |y_{n-1}(x) - y(x)| \quad (13) \end{aligned}$$

حال همگرایی یکنواخت $y_n(x)$ به $y(x)$ به ما امکان می‌دهد تا با بزرگ کردن n به اندازه کافی، طرف راست (۱۳) را به اندازه دلخواه کوچک کنیم. بنابراین طرف راست (۱۳) باید صفر باشد، و اثبات (۱۱) کامل است.

برای اثبات (پ)، فرض می‌کنیم که $\bar{y}(x)$ نیز جواب پیوسته‌ای از (۲) در فاصله $|x - x_0| \leq h$ باشد، و نشان می‌دهیم که برای همه x های این فاصله $\bar{y}(x) = y(x)$. برای اثباتی که ارائه می‌کنیم، لازم است بدانیم که نمودار $\bar{y}(x)$ در R' و نتیجتاً در R واقع است، لذا اولین قدم ما اثبات همین امر است. فرض می‌کنیم که نمودار $\bar{y}(x)$ از R' خارج شود (شکل ۸۵). آنگاه خواص این تابع [پیوستگی و رابطه $\bar{y}(x_0) = y_0$] نتیجه می‌دهد که عددی مانند x_1 وجود دارد به طوری که $|x_1 - x_0| < h$ ، $|\bar{y}(x_1) - y_0| = Mh$ ، و به علاوه اگر $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ ، $|\bar{y}(x) - y_0| < Mh$ ، از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{|\bar{y}(x_1) - y_0|}{|x_1 - x_0|} = \frac{Mh}{|x_1 - x_0|} > \frac{Mh}{h} = M$$

ولی، بنابر قضیه مقدار میانگین، عددی مانند x^* بین x_0 و x_1 وجود دارد به طوری که



شکل ۸۰

$$\frac{|\bar{y}(x_1) - y_0|}{|x_1 - x_0|} = |\bar{y}'(x^*)| = |f[x^*, \bar{y}(x^*)]| \leq M$$

زیرا نقطه $[x^*, \bar{y}(x^*)]$ در R' واقع است. این تناقض نشان می‌دهد که هیچ نقطه‌ای با مشخصات x_1 نمی‌تواند وجود داشته باشد. پس نمودار $\bar{y}(x)$ در R' واقع است. برای تکمیل اثبات (پ)، از اینکه توابع $y(x)$ و $\bar{y}(x)$ هر دو جواب (۲) هستند، استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$|\bar{y}(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^x \{f[t, \bar{y}(t)] - f[t, y(t)]\} dt \right|$$

چون نمودار $\bar{y}(x)$ و $y(x)$ هر دو داخل R' واقع‌اند، (۸) نتیجه می‌دهد که

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leq Kh \max |\bar{y}(x) - y(x)|$$

لذا

$$\max |\bar{y}(x) - y(x)| \leq Kh \max |\bar{y}(x) - y(x)|$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\max |\bar{y}(x) - y(x)| = 0$ ، زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم $Kh \geq 1$ که این با (۹) متناقض است. بنابراین برای هر x در فاصله $|x - x_0| \leq h$ داریم $\bar{y}(x) = y(x)$ ، قضیه پیکار به‌طور کامل ثابت شده است.

تفسیر ۹ این قضیه را می‌توان با تضعیف فرضهایش، در جهات مختلف تقویت نمود. مثلاً، فرض پیوستگی $\partial f / \partial y$ در R قوی‌تر از چیزی است که در اثبات به آن نیاز داریم، و از آن تنها برای دستیابی به نامساوی (۸) استفاده شده است. لذا می‌توان این نامساوی را به جای فرض مربوط به $\partial f / \partial y$ وارد فرضهای مسئله نمود. بدین ترتیب به شکل قوی‌تری از قضیه می‌رسیم، زیرا توابع زیادی موجودند که مشتق جزئی پیوسته ندارند ولی در عین حال

به ازای K ی مناسبی در نامساوی (۸) صدق می کنند. این نامساوی را، که برطبق آن کسر

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

در R کراندار است، شرط لیبشیتس^۱ نسبت به متغیر y می نامند.

تفسیر ۲. اگر شرط لیبشیتس را حذف کنیم، فقط پیوستگی $f(x, y)$ در R را بپذیریم، هنوز وجود جواب برای مسئله مقدار اولیه را می توان ثابت کرد. این نتیجه به قضیه پتانو^۲ مشهور است. اثباتهای شناخته شده این قضیه به بحثهایی پیچیده تر از آنچه در بالا آوردیم، متکی اند.^۳ به علاوه، جوابی که وجودش توسط این قضیه تضمین می شود، لزوماً منحصر به فرد نیست. به عنوان مثال، مسئله

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0 \quad (14)$$

که R مستطیل $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ است را در نظر می گیریم. در این مثال $f(x, y) = 3y^{2/3}$ در R بوضوح پیوسته است. همچنین، $y_1(x) = x^3$ و $y_2(x) = 0$ دو جواب متفاوت اند که برای همه x ها معتبر هستند، پس جواب (۱۴) مسلماً منحصر به فرد نیست. توضیح این

۱. رودولف لیبشیتس Rudolf Lipschitz (۱۸۳۲-۱۹۰۳) اکثر عمرش را استاد دانشگاه بن بود. از او عمدتاً به خاطر نقش وی در ساده کردن و توضیح نظریه اولیه کوشی در مورد وجود و یگانگی جواب معادلات دیفرانسیل یاد می شود ولی او همچنین قضیه دیریکله راجع به نمایش پذیری تابع به وسیله سری فوریه اش را گسترش داد، و به عنوان یکی از نتایج نظریه خود در مورد تجزیه کوترینونهای صحیح، فرمول مربوط به تعداد راههای ممکن برای نوشتن یک عدد صحیح مثبت به شکل مجموع چهار مجذور را به دست آورد، و کارهای مفیدی در مکانیک نظری، حساب تغییرات، توابع بسط فرمهای دیفرانسیلی درجه دوم، و نظریه سیالات ناروان (viscous) ارائه کرد.

۲. جوزپه پتانو Guiseppe Peano (۱۸۵۸-۱۹۳۲)، منطق دان و ریاضیدان ایتالیایی که تأثیر بسزائی در بررسی اصل موضوعی هندسه مسطحه توسط هیلبرت و کار وایتهد و راسل راجع به منطق ریاضی، داشته است. اصول موضوعه وی راجع به اعداد صحیح مثبت نسلهایی از دانشجویان را به این توهم واداشته است که نکند تمامی جبر مددن نوعی توطئه برای مبهم ساختن مطالب بدیهی باشد (که البته چنین نیست!). در سال ۱۸۹۰ وی با کشف منحنی پیوسته جالبی در صفحه که تمام مربع $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ را پر می کند، جهان را به شگفتی واداشت. با تأسف برای مرد ارزشمندی چون پتانو، اثباتی را که برای قضیه فوق الذکر، راجع به وجود جواب برای معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ در سال ۱۸۸۶ عرضه کرد نارسا بود، و تا سالها بعد نیز اثبات قانع کننده ای برای آن پیدا نشد.

۳. مثلاً به کتاب زیر مراجعه کنید:

A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, "Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis," vol. 1, p. 56, Graylock, Baltimore, 1957.

عدم یگانگی جواب، در این امر نهفته است که تابع $f(x, y)$ روی مستطیل R در شرط لپشیتس صادق نمی‌کند، زیرا کسر

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{3y^{1/3}}{y} = \frac{3}{y^{2/3}}$$

در هر همسایگی مبدأ بیکران است.

تبصره ۳. قضیه الف را يك قضیه وجود و یگانگی موضعی می‌نامند، زیرا این قضیه وجود و یگانگی جواب منحصر به فرد را تنها در فاصله‌ای مانند $|x - x_0| \leq h$ (که در آن h ممکن است بسیار کوچک باشد)، تضمین می‌کند. حالات مهم فراوانی یافت می‌شوند که در آنها این محدودیت قابل رفع است. به عنوان مثال، معادله خطی مرتبه اول

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

را که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ معین و پیوسته می‌باشند، در نظر می‌گیریم. در این مثال

$$f(x, y) = -P(x)y + Q(x)$$

و اگر K ماکزیم $|P(x)|$ در فاصله $a \leq x \leq b$ باشد، واضح است که

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |-P(x)(y_1 - y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

بنابراین تابع $f(x, y)$ در نوار قائم نامتناهی تعریف شده به صورت $a \leq x \leq b$ و $-\infty < y < \infty$ پیوسته است و در شرط لپشیتس صادق می‌گردد. تحت این شرایط، مسئله مقدار اولیه

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

در سرتاسر فاصله $a \leq x \leq b$ جواب منحصر به فرد دارد. بعلاوه، نقطه (x_0, y_0) می‌تواند هر نقطه داخلی یا غیرداخلی این نوار باشد. این مطلب حالت خاصی از قضیه بعد است.

قضیه ب. فرض کنید $f(x, y)$ تابع پیوسته‌ای باشد که در نوار تعریف شده به صورت $a \leq x \leq b$ و $-\infty < y < \infty$ ، در شرط لپشیتس

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

صدق کند. هرگاه (x_0, y_0) نقطه‌ای از این نوار باشد، آنگاه مسئله مقدار اولیه

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (15)$$

در فاصله $a \leq x \leq b$ دارای يك و تنها يك جواب $y = y(x)$ است.

اثبات. اثبات این قضیه شبیه اثبات ارائه شده برای قضیه الف است، با این تفاوت که چون

ناحیه مورد بحث از طرف بالا و پایین نامحدود است، بعضی قسمتهای پرهان را می توان ساده کرد. بویژه، اثبات را به همان صورت شروع می کنیم و نشان می دهیم که سری (۴) - و در نتیجه، دنباله (۳) - در تمام فاصله $a \leq x \leq b$ همگرای یکنواخت است. در انجام این کار روشی را که برای برآورد جملات سری (۱۵) به کار خواهیم برد، کمی متفاوت خواهد بود.

نخست M_0 ، M_1 ، و M را صورتهای زیر تعریف می کنیم:

$$M_0 = |y_0|, \quad M_1 = \max |y_1(x)|, \quad M = M_0 + M_1$$

و توجه می کنیم که $|y_0(x)| \leq M$ و $|y_1(x) - y_0(x)| \leq M$ حال، اگر $x_0 \leq x \leq b$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, y_1(t)] - f[t, y_0(t)]\} dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f[t, y_1(t)] - f[t, y_0(t)]| dt \\ &\leq K \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt \\ &\leq KM(x - x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, y_2(t)] - f[t, y_1(t)]\} dt \right| \\ &\leq K \int_{x_0}^x |y_2(t) - y_1(t)| dt \\ &\leq K^2 M \int_{x_0}^x (t - x_0) dt = K^2 M \frac{(x - x_0)^2}{2} \end{aligned}$$

و در حالت کلی

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq K^{n-1} M \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

همین استدلال برای فاصله $a \leq x \leq x_0$ نیز تنها به شرط تبدیل $x - x_0$ به $|x - x_0|$ معتبر است، پس نامساویهای

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq K^{n-1} M \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq K^{n-1} M \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

برای هر x این فاصله و $n = 1, 2, \dots$ برقرار هستند. نتیجتاً هر جمله سری (۱۰) کمتر از (یا مساوی با) جمله متناظرش از سری عددی همگرای زیر است

$$M + M + KM(b-a) + K^2 M \frac{(b-a)^2}{2!} + K^3 M \frac{(b-a)^3}{3!} + \dots$$

لذا سری (۳) در فاصله $a \leq x \leq b$ همگرای یکنواخت است و حد آن تابعی مانند $y(x)$ می باشد.

درست مانند مورد قبل، از همگرایی یکنواخت نتیجه می شود که $y(x)$ جوابی از معادله (۱۵) در تمام فاصله است، و تنها مطلبی که باقی می ماند، اثبات یگانگی این جواب است. فرض می کنیم که $\bar{y}(x)$ نیز جوابی برای (۱۵)، در آن فاصله، باشد. می خواهیم ثابت کنیم که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، برای هر مقدار x ، $y_n(x)$ به سمت $\bar{y}(x)$ میل خواهد کرد؛ و از آنجا که $y_n(x)$ نیز به سمت $y(x)$ میل می کند، نتیجه خواهد شد که $\bar{y}(x) = y(x)$. مطلب را با توجه به اینکه $\bar{y}(x)$ پیوسته است و در معادله

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \bar{y}(t)] dt$$

صدق می کند، آغاز می کنیم. اگر $A = \max |\bar{y}(x) - y_0|$ ، آنگاه برای $x_0 \leq x \leq b$ داریم

$$\begin{aligned} |\bar{y}(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, \bar{y}(t)] - f[t, y_0(t)]\} dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f[t, \bar{y}(t)] - f[t, y_0(t)]| dt \\ &\leq K \int_{x_0}^x |\bar{y}(t) - y_0| dt \\ &\leq KA(x - x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{y}(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f[t, \bar{y}(t)] - f[t, y_1(t)]\} dt \right| \\ &\leq K \int_{x_0}^x |\bar{y}(t) - y_1(t)| dt \\ &\leq K^2 A \int_{x_0}^x (t - x_0) dt = K^2 A \frac{(x - x_0)^2}{2} \end{aligned}$$

و در حالت کلی

$$|\bar{y}(x) - y_n(x)| \leq K^n A \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

نتیجه مشابهی نیز برای $a \leq x \leq x_0$ حاصل می‌شود، لذا برای کلیه x های این فاصله داریم

$$|\bar{y}(x) - y_n(x)| \leq K^n A \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq K^n A \frac{(b-a)^n}{n!}$$

چون وقتی $n \rightarrow \infty$ طرف راست این نامساوی به صفر میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که برابری $\bar{y}(x) = y(x)$ برای هر x از آن فاصله درست است، و اثبات کامل است.

تمرین

۱- فرض کنید (x_0, y_0) نقطه دلخواهی از صفحه باشد و مسئله مقدار اولیه

$$y' = y^2, \quad y(x_0) = y_0$$

را در نظر بگیرید. توضیح دهید که قضیه الف چگونه وجود جواب یگانه این مسئله را در فاصله‌ای مانند $|x - x_0| \leq h$ تضمین می‌کند. چون $f(x, y) = y^2$ و $\partial f / \partial y = 2y$ در تمام صفحه پیوسته‌اند، ممکن است چنین به نظر برسد که این جواب برای کلیه x ها معتبر است. با ملاحظه جوابهای ماربر نقاط $(0, 0)$ و $(0, 1)$ ، نشان دهید که این نتیجه‌گیری گاهی درست و گاهی نادرست است، و بنا بر این استنباط بالا درست نیست.

۲- نشان دهید که معادله $f(x, y) = y^{1/2}$

الف) در مستطیل $|x| \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ در شرط لپشیتس صدق نمی‌کند؛

ب) در مستطیل $|x| \leq 1$ و $c \leq y \leq d$ که $0 < c < d$ ، در شرط لپشیتس صدق می‌کند.

۳- نشان دهید که تابع $f(x, y) = x^2 |y|$ در مستطیل $|x| \leq 1$ و $|y| \leq 1$ شرط لپشیتس را ارضا می‌کند، ولی $\partial f / \partial y$ در بسیاری از نقاط این مستطیل وجود ندارد.

۴- نشان دهید که تابع $f(x, y) = xy^2$

الف) در هر مستطیل $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ شرط لپشیتس را ارضا می‌کند.

ب) در هیچ نوار $a \leq x \leq b$ و $-\infty < y < \infty$ در شرط لپشیتس صدق نمی‌کند.

۵- نشان دهید که $f(x, y) = xy$

الف) در هر مستطیل $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ در شرط لپشیتس صدق می‌کند.

ب) در هر نوار $a \leq x \leq b$ و $-\infty < y < \infty$ در شرط لپشیتس صادق است.

ج) در هر تاسر صفحه، در شرط لپشیتس صدق نمی‌کند.

۶- مسئله مقدار اولیه

$$y' = |y|, \quad y(x_0) = \bar{y}_0$$

را در نظر بگیرید.

الف) برای کدام نقاط (x_0, y_0) ، قضیه الف وجود جواب منحصر به فرد این مسئله را در فاصله‌ای به صورت $|x - x_0| \leq h$ تضمین می‌کند؟

ب) برای کدام نقاط (x_0, y_0) ، این مسئله در فاصله‌ای به صورت $|x - x_0| \leq h$ دارای جواب منحصر به فرد است؟

۷- برای کدام نقاط (x_0, y_0) ، قضیه الف وجود جوابی یگانه از مسئله مقدار اولیه

$$y' = y|y|, \quad y(x_0) = y_0.$$

را در فاصله‌ای به صورت $|x - x_0| \leq h$ تضمین می‌کند؟

۵۷. دستگاهها. معادله خطی مرتبه دوم

از روش تقریبات متوالی پیکار، برای دستگاههای معادلات مرتبه اول نیز می‌توان استفاده کرد. به عنوان مثال، مسئله مقدار اولیه مشتمل بر دو معادله مرتبه اول و شرایط اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) & , \quad y(x_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) & , \quad z(x_0) = z_0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، توابع طرف راست، در ناحیه‌ای از فضای xyz شامل (x_0, y_0, z_0) پیوسته‌اند. علامت مشتق به کار رفته در اینجا تأکیدی بر این نکته است که x متغیر مستقل می‌باشد. البته، جواب چنین دستگاهی یک جفت تابع مانند $y = y(x)$ و $z = z(x)$ است که توأماً، در فاصله‌ای شامل نقطه x_0 ، در شرایط مذکور در (۱) صدق کنند. مانند حالت تک معادله مرتبه اول، واضح است که دستگاه (۱) معادل دستگاه معادلات انتگرالی زیر می‌باشد،

$$\begin{cases} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t), z(t)] dt \\ z(x) = z_0 + \int_{x_0}^x g[t, y(t), z(t)] dt \end{cases} \quad (2)$$

بدین مفهوم که جوابهای (۱) - اگر جوابی وجود داشته باشد - دقیقاً همان جوابهای پیوسته (۲) هستند. هرگاه با انتخاب توابع ثابت

$$y_0(x) = y_0, \quad z_0(x) = z_0.$$

حل دستگاه (۲) را به کمک روش تقریبات متوالی آغاز کنیم، روش پیکار را دقیقاً مانند موارد قبل می‌توان دنبال کرد. در مرحله اول داریم

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_0(t), z_0(t)] dt \\ z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^x g[t, y_0(t), z_0(t)] dt \end{cases}$$

و در مرحله دوم داریم

$$\begin{cases} y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t), z_1(t)] dt \\ z_2(x) = z_0 + \int_{x_0}^x g[t, y_1(t), z_1(t)] dt \end{cases}$$

و الی آخر. این روش دو دنباله $y_n(x)$ و $z_n(x)$ از توابع را تولید می کند، و با فرضهای مناسب، می توان اثبات قضیه ۵۶-الف را با موقعیت این مسئله تطبیق داد و ثابت کرد که این دنباله ها به جوابی از (۱) می گرایند که در فاصله ای به صورت $|x - x_0| \leq h$ موجود و یگانه است.

حال توجه خود را به دستگاههای خطی، که در آن توابع $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ موجود در (۱) نسبت به y و z خطی هستند، معطوف می کنیم. یعنی، مسئله مقدار اولیه ای به صورت

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = p_1(x)y + q_1(x)z + r_1(x), & y(x_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dx} = p_2(x)y + q_2(x)z + r_2(x), & z(x_0) = z_0 \end{cases} \quad (3)$$

را در نظر می گیریم. در اینجا شش تابع $p_i(x)$ ، $q_i(x)$ و $r_i(x)$ در فاصله ای به صورت $a \leq x \leq b$ پیوسته اند و x_0 نقطه ای از این فاصله است. چون همه این توابع در $a \leq x \leq b$ کراندارند، عدد ثابتی چون K وجود دارد به طوری که برای $i = 1, 2$ ، نامساویهای $|p_i(x)| \leq K$ و $|q_i(x)| \leq K$ برقرار باشند.

حال بسادگی می توان دید که توابع طرف راست معادلات دستگاه (۳) در شرایط لیشیتس به صورت

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$$

و

$$|g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$$

صدق می کنند. درست مانند آنچه در اثبات قضیه ۵۶-ب دیدیم، از این شرایط می توان در اثبات وجود و یگانگی جوابی برای (۳) روی تمامی فاصله $a \leq x \leq b$ استفاده کرد.

باز هم از ذکر جزئیات خودداری می‌کنیم.

نکاتی که راجع به دستگاهها گفته شد، ارائه برهان ساده‌ای برای قضیه اساسی زیر را مقدور می‌سازد. این قضیه که صورت آن را در آغاز فصل ۳ بیان کردیم، نقشی غیر مزاحم و قاطع در تمامی کار ما با معادلات خطی مرتبه دوم ایفا کرده است.

قضیه الف. فرض کنید توابع $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ پیوسته باشند. هرگاه x_0 نقطه‌ای از این فاصله باشد، و y_0 و y'_0 دو عدد دلخواه باشند، آنگاه مسئله مقدار اولیه

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (2)$$

در فاصله $a \leq x \leq b$ دارای یک و تنها یک جواب $y = y(x)$ است.

اثبات. با انتخاب متغیر کمکی $z = dy/dx$ روشن می‌شود که هر جواب (۲) جوابی برای دستگاه خطی

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = -P(x)z - Q(x)y + R(x) \end{cases} \quad \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (5)$$

به دست می‌دهد و برعکس. دیده‌ایم که در فاصله $a \leq x \leq b$ دستگاه (۵) دارای یک جواب منحصر به فرد است، پس همین مطلب برای (۲) نیز صادق است.

تمرین

۱- دستگاه مقدار اولیه زیر را باروش پیکار حل کنید و نتیجه را با جواب دقیق آن مقایسه کنید.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z & , & y(0) = 1 \\ \frac{dz}{dx} = -y & , & z(0) = 0 \end{cases}$$

بخش ۲

(ب) $y = \log x + c$

(۲ الف) $y = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + c$

(د) $y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$

(ج) $y = \frac{1}{4}e^{2x} + c$

(ب) $y = \sin^2 x + 1$

(۳ الف) $y = xe^x - e^x + 2$

(ج) $y = x \log x - x$

بخش ۳

(ب) $x^2 + 2y^2 = c^2$

(۱ الف) $x^2 - y^2 = c$

(د) $y^2 = -2x + c$

(ج) $r = c(1 - \cos \theta)$

(۲) $y^2 = 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$

این خانواده خود-متعامد است به این معنا که وقتی در این خانواده يك منحنی منحنی دیگری را قطع کند، بر آن عمود است.

(ب) $y^2 = \pm 2x + c$

(۳ الف) $xy = c$

(د) $r = c \sin \theta$ یا $\theta = 0$

(ج) $y = ce^{\pm x}$

(۵) $r = ce^{k\theta}$ یا $\theta = \theta_0$

$$y = cx^2 \quad .۴$$

بخش ۴

$$x = \frac{kA^2 abt}{kAabt + 1} \quad \text{اگر } B = A, \text{ آنگاه} \quad .۱$$

$$x = \frac{AB(1 - e^{-k(A-B)abt})}{A - Be^{-k(A-B)abt}} \quad \text{و اگر } B < A, \text{ آنگاه}$$

$$x = x_0 e^{kt} \quad .۲$$

$$x = \frac{x_0 x_1}{x_0 + (x_1 - x_0)e^{-kx_1 t}} \quad .۳$$

$$p = p_0 e^{-ch} \quad .۴$$

$$\left(\frac{\log 5}{\log 2} - 1 \right) \text{ ساعت} \quad .۵$$

$$۱۲ \text{ متر} \quad .۶$$

بخش ۵

$$v = \sqrt{\frac{g}{c} \frac{1 - e^{(-2\sqrt{gc})t}}{1 + e^{(-2\sqrt{gc})t}}} \quad \text{سرعت نهایی برابر است با } \sqrt{\frac{g}{c}} \quad .۱$$

$$۳ \text{ کیلومتر} \quad .۲$$

$$\sqrt{gR}, \text{ که تقریباً } ۸ \text{ کیلومتر بر ثانیه است} \quad .۴$$

تمرینهای گوناگون فصل ۱

$$(1 - \sqrt{5}) \text{ ساعت قبل از ظهر} \quad .۱$$

$$r = (2 - t)/8; \text{ يك ماه دیگر} \quad .۲$$

$$\text{پس از } (3 \log 2 - \log 3) ۴۰۰ \text{ دقیقه} \quad .۳$$

$$(1 - \sqrt{2}) ۱۰۰ \text{ دقیقه} \quad .۴$$

$$۴x^2 + y^2 + ۴z^2 = ۲۲۵ \text{ با } x = cy^4 \text{ استوانه‌های} \quad .۵$$

$$\frac{۱۴R^{5/2}}{۱۵r^2\sqrt{2g}} \text{ ثانیه} \quad .۷$$

۸. شکل رویه حاصل از دوران $y = cx^2$ حول محور y ها .

۹. $25h$

۱۲. $\sqrt{\frac{2}{g} \log(2 + \sqrt{15})}$ ثانیه

۱۳. $T = T_0 e^{\mu \theta}$ ؛ $\frac{dT}{d\theta} = \mu T$

۱۴. $r = r_0 e^{\pi r_0^2 a x / 2L}$

۱۵. رئیس جمهور

۱۶. ناوشکن نخست به اندازه 3 km به طرف مبدأ می رود و سپس در امتداد یکی

از حلزونیهای $r = (\frac{5}{3})e^{\pm \theta/\sqrt{3}}$ به طرف خارج حرکت می کند.

۱۷. $a =$ فاصله کل ؛ $r = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-\theta}$

بخش ۷

۱. الف) $y^2 = x^2 + cx^4$ ب) $y = cx^2(x+y)$

ج) $y = x \tan cx^2$ د) $\cos \frac{y}{x} + \log cx = 0$

۵. $e^{y/x} = \log cx^2$

۲. $x^2 + y^2 = cy$

۳. الف) $x + y = \tan(x+c)$

ب) $\tan(x-y+1) = x+c$

۴. ب) $z = dx + ey$

۵. الف) $\tan^{-1} \frac{y+5}{x-1} = \log \sqrt{(x-1)^2 + (y+5)^2} + c$

ب) $y-x = 5 \log(x+y-1) + c$

بخش ۸

۱. $xy + \log y^2 = c$

۲. کامل نیست.

$$4xy - x^4 + y^4 = c \quad .3$$

$$.4 \quad \text{کامل نیست.}$$

$$xy + \sin xy = c \quad .5$$

$$.6 \quad \text{کامل نیست.}$$

$$xe^x + \sin x \cos y = c \quad .7$$

$$.8 \quad \frac{x}{y} = c \quad \text{یا} \quad \cos \frac{x}{y} = c$$

$$.9 \quad \text{کامل نیست.}$$

$$x^r y^r + y \sin r = c \quad .10$$

$$.11 \quad \log \frac{1+xy}{1-xy} - 2x = c$$

بخش ۹

$$.2 \quad \text{الف)} \quad \frac{x^r}{y^r} - \frac{1}{y} = c, \mu = \frac{1}{y^r}$$

$$\text{ب)} \quad xy - \log x - \frac{1}{r} y^r = c, \mu = \frac{1}{x}$$

$$\text{ج)} \quad -\frac{1}{2x^r y^r} + \frac{r}{r} y^r = c, \mu = \frac{1}{x^r y^r}$$

$$.3 \quad \text{وقتی که } \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / (N - M) \text{ تابعی مانند } g(z) \text{ از } z = x + y \text{ باشد.}$$

$$.4 \quad \text{الف)} \quad -\frac{x}{y} = -\frac{1}{y} + y + c \quad \text{ب)} \quad \log \frac{x}{y} = \frac{1}{r} y^r + c$$

$$\text{ج)} \quad \tan^{-1} \frac{x}{y} = -\frac{1}{r} x^r + c \quad \text{د)} \quad \log \sqrt{x^r + y^r} = \tan^{-1} \frac{x}{y} + c$$

$$\text{ه)} \quad \tan^{-1} \frac{r y}{x} = r x + c$$

بخش ۱۰

$$.2 \quad \text{الف)} \quad y = x^r + c x^r$$

$$\text{ب)} \quad y = e^{-x} \tan^{-1} e^x + c e^{-x}$$

$$y = (1+x^2)^{-1} \log(\sin x) + c(1+x^2)^{-1} \quad (\text{ج})$$

$$y = x^2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + ce^{-x} \quad (\text{د})$$

$$y = x^2 \csc x + c \csc x \quad (\text{هـ})$$

$$y = -x^2 + cx^2 \quad (\text{و})$$

$$\frac{1}{y^2} = -x^2 + cx^2 \quad (\text{الف ۳})$$

$$y^3 = 3 \sin x + 9x^{-1} \cos x - 18x^{-2} \sin x - 18x^{-3} \cos x + cx^{-3} \quad (\text{ب})$$

$$x = ye^y + cy \quad (\text{ب}) \quad xy^2 = e^y + c \quad (\text{الف ۴})$$

$$x = y - 2 + ce^{-y} \quad (\text{۵})$$

بخش ۱۱

$$y^2 = c_1 x + c_2 \quad (\text{الف ۱})$$

$$x^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2 \quad (\text{ب})$$

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \quad (\text{ج})$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - c_1 x - c_1^2 \log(x - c_1) + c_2 \quad (\text{د})$$

$$3y + x^2 = 3 \quad \text{یا} \quad y = 1 \quad (\text{الف ۲})$$

$$2y - 2 = 8ye^{2x/2} \quad (\text{ب})$$

$$y = -\log[\cos(x + c_1)] + c_2 \quad (\text{۳})$$

$$4\pi\sqrt{a/g} = \text{دوره تناوب} \quad s = s_0 \cos\sqrt{g/4a}t \quad (\text{۴})$$

بخش ۱۲

$$T_0 y'' = w(s)\sqrt{1+(y')^2} + L(x) \quad (\text{۲})$$

$$\text{سهی} \quad (\text{۳})$$

$$y = c(e^{ax} + e^{-ax}) \quad (\text{۵})$$

پرده بر محور y ها واقع است.

$$\text{خط مستقیم افقی یا زنجیری} \quad (\text{۶})$$

$$y = \frac{c}{2} \left[\frac{1}{1+k} \left(\frac{x}{c} \right)^{1+k} - \frac{1}{1-k} \left(\frac{x}{c} \right)^{1-k} \right] + \frac{ck}{1-k^2} \quad (\text{الف ۸})$$

بنابراین فاصله‌ای که خرگوش طی می‌کند برابر است با $ck/(1-k^2)$.

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2 - c^2}{2c} - c \log \frac{c}{x} \right] \quad (\text{ب})$$

و سنگ می‌تواند برای هر $\epsilon > 0$ ، از $(c/2) + \epsilon$ نزدیکتر شود ولی به نزدیکی $c/2$ نمی‌رسد.

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{k+1}}{c^k} - \frac{c^k}{x^{k-1}} \right) \quad ۹.$$

اگر $a > b$ ($k > 1$)، آنگاه، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $y \rightarrow -\infty$ و قایق هرگز به ساحل نخواهد رسید. اگر $a = b$ ($k = 1$)، آنگاه، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $y \rightarrow -c/2$ و قایق در نقطه $(0, -c/2)$ به ساحل خواهد رسید. اگر $a < b$ ($k < 1$)، آنگاه، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $y \rightarrow 0$ و قایق به مبدأ خواهد رسید.

بخش ۱۳

$$I = \frac{E_0}{R - kL} e^{-kt} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R - kL} \right) e^{-Rt/L} \quad (\text{الف})$$

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \alpha) + \left(I_0 + \frac{E_0 L \omega}{R^2 + L^2 \omega^2} \right) e^{-Rt/L} \quad (\text{ب})$$

که در آن $\tan \alpha = L\omega/R$

تمرینهای گوناگون فصل ۲

$$y = c_2 e^{1/x} \quad ۱.$$

$$xy = \log y + c \quad ۲.$$

$$x \tan^{-1} \frac{y+1}{x-1} = \log[(y+1)^2 + (x-1)^2] + c \quad ۳.$$

$$y\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \log(y + \sqrt{x^2 + y^2}) + y^2 = 2x^2 \log x + cx^2 \quad ۴.$$

$$3y = 2x^2 + cx^2 y^3 \quad ۵.$$

$$-\frac{1}{2x^2 y^2} = \log \frac{y}{x} + c \quad ۶.$$

$$y^2 = c_2 e^{2x} + c_1 \quad ۷.$$

$$xy = x \sin x + \cos x + c \quad ۸.$$

$$y = x \log y + cx \quad .9$$

$$ye^x - x^y y^x = c \quad .10$$

$$c_1 \tan^{-1} c_1 x = y + c_2 \quad .11$$

$$y = x^y + cx \quad .12$$

$$y = x \sin x + 2 \cos x - 2x^{-1} \sin x + cx^{-1} \quad .13$$

$$(2x + 2y) + \log(2x + 2y)^y + x = c \quad .14$$

$$x \cos(x + y) = c \quad .15$$

$$y = \frac{1}{y} (\log x)^y + c_1 \log x + c_2 \quad .16$$

$$ye^{xy} + \sin x = c \quad .17$$

$$(x - y) \log(x - y) = c - y \quad .18$$

$$y = xe^{-x^y} + ce^{-x^y} \quad .19$$

$$x^y y^y - 2x^y y - x^y = c \quad .20$$

$$y = x^y (1 + x^y)^{-1} + c(1 + x^y)^{-1} \quad .21$$

$$e^x \sin y + \cos xy = c \quad .22$$

$$y = c_1 \log(x + \sqrt{1 + x^2}) + c_2 \quad .23$$

$$2xe^y + x^y + y^y - 2x^y y = c \quad .24$$

$$2xe^x e^{-y} + y^y = c \quad .25$$

$$, k_1 = k_2 \text{ و اگر } y = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}), k_1 \neq k_2 \text{ اگر } \quad .26$$

$$; y = k_1 x_0 t e^{-k_1 t}$$

$$t = 25 \text{ وقتی} \quad .27$$

$$ce^{(2/5)x} = \frac{y - x}{y + x} \quad .28$$

$$b \log\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{gm_2}{a} = \text{سرعت در پایان سوخت} \quad .29$$

$$\frac{-gm_1^y}{2a^y} + \frac{bm_2}{a} + \frac{bm_1}{a} \log \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \text{ارتفاع در پایان سوخت}$$

۳۲. الف) اگر شتاب ثابت ناشی از میدان گرانشی ثابت با A نمایش داده شود، در آن صورت

$$v = c \left(\frac{1 - e^{-2At/c}}{1 + e^{-2At/c}} \right)$$

بخش ۱۴

$$y = c_1 x + c_2 + e^x \quad .۱$$

$$y = -\frac{1}{2x} \quad \text{الف) } \quad y = -3x \quad \text{ب) } \quad y = -\frac{1}{3} \sin x \quad \text{ج)}$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad \text{الف) } \quad y'' - k^2 y = 0 \quad \text{ب) } \quad y'' + k^2 y = 0 \quad \text{ج)}$$

بخش ۱۵

$$y = x + 2x^2 \quad \text{الف) } .۲$$

$$y = -3e^x + 2e^{2x} \quad .۳$$

بخش ۱۶

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad \text{الف) } .۲$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad \text{ب)}$$

$$y = c_1 + c_2 x^{-2} \quad .۳$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^{-2} \quad .۴$$

$$y = c_1 x + c_2 \left[\frac{x}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1 \right] \quad .۵$$

$$y = c_1 x^{-1/2} \sin x + c_2 x^{-1/2} \cos x \quad .۶$$

$$y = c_1 x + c_2 x^{-2} \quad \text{ب) } \quad y = c_1 x + c_2 e^x \quad \text{الف) } .۷$$

$$y = c_1 x + c_2 x \int x^{-2} e^{[x f(x)] dx} dx \quad .۸$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x^2 e^x \quad .۹$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \int e^{[-2x + \int f(x) dx]} dx \quad .۱۰$$

بخش ۱۷

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \quad \text{الف) } .۱$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \quad (\text{ب})$$

$$y = c_1 \cos \sqrt{r} x + c_2 \sin \sqrt{r} x \quad (\text{ج})$$

$$y = e^x (c_1 \cos \sqrt{r} x + c_2 \sin \sqrt{r} x) \quad (\text{د})$$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \quad (\text{ه})$$

$$y = c_1 e^{\delta x} + c_2 e^{rx} \quad (\text{و})$$

$$y = e^{-x/r} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{\delta}}{r} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{\delta}}{r} x \right) \quad (\text{ز})$$

$$y = x^{-1} [c_1 \cos (\log x^r) + c_2 \sin (\log x^r)] \quad (\text{الف. ۴})$$

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \log x \quad (\text{ب})$$

$$y = c_1 x^r + c_2 x^{-r} \quad (\text{ج})$$

بخش ۱۸

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-\delta x} + \frac{1}{r} e^{rx} \quad (\text{الف. ۱})$$

$$y = c_1 \sin rx + c_2 \cos rx + \sin x \quad (\text{ب})$$

$$y = c_1 e^{-\delta x} + c_2 x e^{-\delta x} + rx^2 e^{-\delta x} \quad (\text{ج})$$

$$y = e^x (c_1 \cos rx + c_2 \sin rx) + 2 + rx + \delta x^2 \quad (\text{د})$$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-rx} - rx e^{-rx} \quad (\text{ه})$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{rx} + 2 \sin rx + 3 \cos rx \quad (\text{و})$$

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x \sin x \quad (\text{ز})$$

$$y = c_1 + c_2 e^{rx} + rx - rx^2 \quad (\text{ح})$$

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx + \frac{\sin bx}{k^2 - b^2} \quad ۲.$$

مگر وقتی $b = k$ ، که در آن حالت $\frac{x \cos kx}{rk}$

$$y = c_1 \sin rx + c_2 \cos rx + x \sin rx + 2 \cos x - 1 - x + rx^2 \quad ۳.$$

بخش ۱۹

$$y_p = rx + 2 \quad ۱.$$

$$y_p = -\frac{1}{4} e^{-x} \quad .۲$$

$$y_p = -\frac{1}{4} \cos 2x \log(\sec 2x + \tan 2x) \quad (الف) \quad .۳$$

$$y_p = \frac{1}{4} x^2 e^{-x} \log x - \frac{3}{4} x^2 e^{-x} \quad (ب)$$

$$y_p = -e^{-x} (8x^2 + 2x + 1) \quad (ج)$$

$$y_p = \frac{1}{4} x e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x \log(\cos 2x) \quad (د)$$

$$y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1) + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 \quad (الف) \quad .۴$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x^{-1} - x - 1 - \frac{1}{3} x^2 \quad (ب)$$

بخش ۲۰

۱. وقتی $(k/M) - (c^2/2M^2)$ مثبت باشد، که محدودیت آن بیشتر از شرط

$(k/M) - (c^2/2M^2) > 0$ است، بسامد (فرکانس) برابر است با

$$(1/2\pi) \sqrt{(k/M) - (c^2/2M^2)} \quad .۳$$

$$2\pi \sqrt{2r/3g} \quad \text{ثانیه} \quad .۳$$

۴. مدت رفت و برگشت مسافرت $2\pi \sqrt{R/g}$ است، که در آن R شعاع کره زمین

است؛ این مدت زمان تقریباً ۹۰ دقیقه است.

بخش ۲۲

$$u'' + \left(1 + \frac{1-2p^2}{4x^2}\right) u = 0 \quad .۳$$

بخش ۲۳

۳. اگر $f(x) \geq 0$ و $k > 0$ ، آنگاه هر جواب معادله $y'' + [f(x) + k]y = 0$

دارای تعداد نامتناهی صفر مثبت است.

بخش ۲۴

$$\lambda_n = 4n^2, \quad y_n(x) = \sin 2nx$$

(الف) ۱.

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4}, y_n(x) = \sin \frac{nx}{2} \quad (\text{ب})$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, y_n(x) = \sin n\pi x \quad (\text{ج})$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{د})$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{4L^2}, y_n(x) = \sin \frac{n\pi(x+L)}{2L} \quad (\text{ه})$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2}, y_n(x) = \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \quad (\text{و})$$

بخش ۲۵

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad .۶$$

بخش ۲۶

$$y = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots \right) = a_0 e^{x^2} \quad (\text{الف } ۱)$$

$$y = a_0 - (a_0 - 1)x + \frac{(a_0 - 1)}{2!} x^2 - \frac{(a_0 - 1)}{3!} x^3 + \dots \quad (\text{ب})$$

$$= 1 + (a_0 - 1) \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = 1 + (a_0 - 1)e^{-x}$$

۲. الف) $y = a_1 x$ هیچ اشکالی وجود ندارد.

ب) $y = 0$ ، $y = ce^{-1/x}$ ، تابع دوم، تنها وقتی $c = 0$ ، در $x = 0$ تحلیلی است.

$$\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad .۳$$

$$y = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \quad .۵$$

$$= \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \right) + x - 1 = e^{-x} + x - 1$$

بخش ۲۷

$$y = a_0 \left(1 + x^2 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{24} x^6 - \frac{1}{720} x^8 + \dots \right) + a_1 x \quad ۱.$$

$$= a_0 (1 + x \tan^{-1} x) + a_1 x$$

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \times 4} - \frac{x^6}{2 \times 4 \times 6} + \dots \quad (\text{الف } ۲)$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \times 5} - \frac{x^7}{3 \times 5 \times 7} + \dots$$

$$a_{n+2} = - \frac{(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \quad ۳.$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2 \times 3} - \frac{x^4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{x^6}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \dots \quad (\text{الف})$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \times 3} - \frac{x^7}{2 \times 3 \times 4} + \dots \quad (\text{ب})$$

$$a_{n+2} = - \frac{p-n}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (\text{ج } ۴)$$

$$w(x) = a_0 \left[1 - \frac{p}{2!} x^2 + \frac{p(p-2)}{4!} x^4 - \dots \right] \\ + a_1 \left[x - \frac{(p-1)}{3!} x^3 + \frac{(p-1)(p-3)}{5!} x^5 - \dots \right]$$

$$y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-1) 2^n n!} \right] \quad (\text{ب } ۵)$$

$$+ a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) 2^n n!} \right]$$

$$y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-1) 2^n n!} \right] \quad (\text{ج})$$

$$+ a_1 \left[-x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) 2^n n!} \right]$$

$$y_1(x) = 1 - \frac{p \times p}{2!} x^2 + \frac{p(p-2)p(p+2)}{4!} x^4 - \dots \quad (\text{الف } ۶)$$

$$y_1(x) = x - \frac{(p-1)(p+1)}{3!} x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+1)(p+3)}{5!} x^5 - \dots$$

بخش ۲۸

۱. الف) $x=0$ نامنظم ، $x=1$ منظم

ب) $x=0$ و $x=1$ منظم ، $x=-1$ نامنظم

ج) $x=0$ نامنظم

د) $x=0$ و $x=1/3$ منظم

۲. الف) نقطه عادی

ب) نقطه عادی

ج) نقطه غیر عادی منظم

د) نقطه غیر عادی منظم

ه) نقطه غیر عادی نامنظم

۳. الف) $m(m-1) - 2m + 2 = 0$ ، $m_1 = 2$ ، $m_2 = 1$

ب) $m(m-1) - \frac{5}{4}m + \frac{1}{4} = 0$ ، $m_1 = 2$ ، $m_2 = \frac{1}{4}$

۴. الف) $y_1(x) = x^{1/2} \left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \dots \right) = \sin \sqrt{x}$

$$y_2(x) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots = \cos \sqrt{x}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} \quad \text{ب)}$$

$$y_2(x) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = x^{-1/2} e^{x/2}$$

$$y_1(x) = x^{1/2} \left(1 - \frac{7}{6}x + \frac{71}{40}x^2 + \dots \right) \quad \text{ج)}$$

$$y_2(x) = 1 - 3x + 2x^2 + \dots$$

$$y_1(x) = x \left(1 + \frac{1}{\delta} x + \frac{1}{\gamma_0} x^2 + \dots \right) \quad (د)$$

$$y_2(x) = x^{-1/2} \left(1 - x - \frac{1}{\gamma} x^2 + \dots \right)$$

$$y_2(x) = -x e^{1/x} \quad (ب. ۶)$$

بخش ۲۹

$$y = x^2 (1 - 2x + 2x^2 + \dots) \quad ۱.$$

$$y = c_1 x^{1/2} e^x + c_2 x^{1/2} e^x \log x \quad ۲.$$

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = x^{-1} \sin x \quad (الف. ۳)$$

$$y_2 = x^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) = x^{-1} \cos x$$

$$y_1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} x + \frac{1}{\gamma_0} x^2 - \frac{1}{\delta_0} x^3 + \dots \right) \quad (ب)$$

$$y_2 = x^{-1} \left(1 + \frac{1}{\gamma} x + \frac{1}{\gamma} x^2 - \frac{1}{\lambda} x^3 + \dots \right)$$

$$y_1 = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) = \sin x^2 \quad (ج)$$

$$y_2 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos x^2$$

$$y = x \left(1 - \frac{x^2}{2! \times 2!} + \frac{x^4}{2! \times 2! \times 2!} - \dots \right) \quad ۴.$$

$$y_1 = x^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) = x^{-1/2} \sin x \quad ۵.$$

$$y_2 = x^{-1/2} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) = x^{-1/2} \cos x$$

بخش ۳۰

$$y = c_1 F\left(2, -1, \frac{r}{\gamma}, x\right) + c_2 x^{-1/2} F\left(\frac{r}{\gamma}, -\frac{r}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}, x\right) \quad (الف. ۲)$$

$$= c_1 \left(1 - \frac{r}{\gamma} x \right) + c_2 x^{-1/2} F\left(\frac{r}{\gamma}, -\frac{r}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}, x\right)$$

$$y = c_1 F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -x\right) + c_2 (-x)^{1/2} F\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -x\right) \quad (ب)$$

$$= c_1 \left(\frac{1}{1+x}\right) + c_2 \left[\frac{(-x)^{1/2}}{1+x}\right]$$

$$y = c_1 F\left(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{x+1}{2}\right) + c_2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^{1/2} F\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x+1}{2}\right) \quad (ج)$$

$$y = c_1 F\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{3-x}{2}\right) \quad (د)$$

$$+ c_2 \left(\frac{3-x}{2}\right)^{-1/2} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3-x}{2}\right)$$

$$y = c_1 F(p, 1, p, x) + c_2 x^{1-p} F(1, 2-p, 2-p, x) \quad (الف) ۴$$

$$y = c_1 \left(\frac{1}{1-x}\right) + c_2 \left(\frac{x^{1-p}}{1-x}\right) \quad (ب)$$

$$y = c_1 \left(\frac{1}{1-x}\right) + c_2 \left(\frac{\log x}{1-x}\right) \quad (ج)$$

$$y = c_1 F\left(1, -1, -\frac{1}{2}, 1-e^x\right) + c_2 (1-e^x)^{1/2} F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1-e^x\right) \quad ۵$$

بخش ۳۱

۱. الف) يك نقطه غير عادى منظم با توانهای p و $p+1$

ب) يك نقطه غير عادى نامنظم

بخش ۳۲

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(\frac{5}{2}x^3 - 3x) \quad (ج) ۲$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

بخش ۳۳

$$f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \dots \quad (الف) ۴$$

$$f(x) = \frac{1}{\gamma}(e - e^{-1})P_0(x) + 3e^{-1}P_1(x) \\ + \frac{1}{\gamma}(\delta e - 3\delta e^{-1})P_2(x) + \dots$$

بخش ۳۴

۷. اگر p عدد صحیح نباشد،

$$y = x^{-c}[c_1 J_p(ax^b) + c_2 J_{-p}(ax^b)]$$

$$y = x^{-c}[c_1 J_p(ax^b) + c_2 Y_p(ax^b)] \quad \text{در تمام حالات،}$$

بخش ۳۵

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x) \quad ۳.$$

$$J_3(x) = \left(\frac{\lambda}{x^2} - 1\right)J_1(x) - \frac{2}{x}J_0(x)$$

$$J_4(x) = \left(\frac{4\lambda}{x^3} - \frac{\lambda}{x}\right)J_1(x) - \left(\frac{2\lambda}{x^2} - 1\right)J_0(x)$$

بخش ۳۶

$$\frac{dy}{dx} = z \quad (\text{ب})$$

$$\frac{dy}{dx} = z \quad (\text{الف ۱})$$

$$\frac{dz}{dx} = w$$

$$\frac{dz}{dx} = xy + x^2 z$$

$$\frac{dw}{dx} = w - x^2 z^2$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad ۲.$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{f(t, x, y)}{m}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{g(t, x, y)}{m}$$

بخش ۳۷

$$\begin{cases} x = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt} \\ y = c_1 e^{rt} - c_2 e^{-rt} \end{cases} \quad (\text{ب. ۵})$$

$$\begin{cases} x = 3e^{rt} + 2e^{-rt} \\ y = 3e^{rt} - 2e^{-rt} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{rt} + c_2 e^{-t} \\ y = 3c_1 e^{rt} - c_2 e^{-t} \end{cases} \quad (\text{ب. ۶})$$

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{rt} + c_2 e^{-t} + 3t - 2 \\ y = 3c_1 e^{rt} - c_2 e^{-t} - 2t + 3 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ y = c_1 e^t \end{cases} \quad .8$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_2 e^t \end{cases} \quad (\text{الف. ۹})$$

بخش ۳۸

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \end{cases} \quad (\text{الف. ۱})$$

$$\begin{cases} x = e^{rt} (2c_1 \cos 3t + 2c_2 \sin 3t) \\ y = e^{rt} [c_1 (\cos 3t + 3 \sin 3t) + c_2 (\sin 3t - 3 \cos 3t)] \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} x = -2c_1 e^{rt} + c_2 (1 + 2t) e^{rt} \\ y = c_1 e^{rt} - c_2 t e^{rt} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} x = 2c_1 + c_2 e^{-2t} \\ y = 2c_1 + 2c_2 e^{-2t} \end{cases} \quad (\text{د})$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{rt} \\ y = c_2 e^{rt} \end{cases} \quad (\text{ه})$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-2t} + c_2 (1-t) e^{-2t} \\ y = -c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} \end{cases} \quad (و)$$

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{1.0t} + 3c_2 e^{2t} \\ y = c_1 e^{1.0t} - 2c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (ز)$$

$$\begin{cases} x = e^{2t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) \\ y = e^{2t}[c_1(\sin 2t - \cos 2t) - c_2(\sin 2t + \cos 2t)] \end{cases} \quad (ح)$$

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases} \quad (ب. ۵)$$

بخش ۳۹

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} = (dx^2 - cx) \frac{dx}{dt} + (acx^2 - adx^2) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad ۱.$$

۲. منحنی روباه، مقعر روبه بالاست، هرگاه منحنی خرگوش صعودی باشد.

بخش ۴۰

۲. مقدار c را برابر $t_1 - t_2$ قرار دهید واز یگانگی استفاده کنید.

۳. یکسانند بجز آنکه جهت تمامی مسیرها، درعبور از یکی به دیگری، معکوس می شود.

۴. الف) هر نقطه يك نقطه بحرانی است، و هیچ مسیری وجود ندارد.

ب) هر نقطه واقع بر محور y ها يك نقطه بحرانی است، و مسیرها نیم خطهای افقی هستند که به طرف چپ و راست محور y ها رسم شده اند.

ج) نقاط بحرانی وجود ندارند، و مسیرها خطوطی مستقیم با شیب ۲ هستند که به طرف راست و به بالا می روند.

د) نقطه $(0, 0)$ تنها نقطه بحرانی است، و مسیرها نیم خطوطی با همه شیبهای ممکن و متوجه مبدأ هستند.

۵. برای معادلات (۱) و (۲)، عبارتند از $(0, 0)$ ، $(\pm\pi, 0)$ ، $(\pm 2\pi, 0)$ ، $(\pm 3\pi, 0)$ ، ...؛ و برای معادله (۳)، $(0, 0)$ ، تنها نقطه بحرانی است.

۶. الف) $(-2, 0)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ب) $(2, 2)$ ، $(3, 3)$

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_1 e^t + e^t + c_2 \end{cases} \quad .۷$$

بخش ۴۱

۱. الف (۱) نقاط بحرانی نقاط روی محور x ها هستند .

$$dy/dx = 2xy/(x^2 + 1) \quad (۲)$$

$$y = c(x^2 + 1) \quad (۳)$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (۳) \quad dy/dx = -x/y \quad (۲) \quad (۰, ۰) \quad (۱) \quad (ب)$$

(ج) (۱) نقطه بحرانی وجود ندارد؛

$$y = \sin x + c \quad (۳) \quad dy/dx = \cos x \quad (۲)$$

(د) (۱) نقاط بحرانی نقاط روی محور y ها هستند .

$$y = 0 \quad و \quad y = 1/(x^2 + c^2) \quad (۳) \quad dy/dx = -2xy^2 \quad (۲)$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^t \\ y = c_2 e^{-t} \end{cases} \quad (۱) \quad (الف ۲) \quad dy/dx = -y/x \quad (۲)$$

$$xy = c \quad (۳) \quad (۴) \text{ ناپایدار}$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-t} \\ y = c_2 e^{-2t} \end{cases} \quad (۱) \quad (ب) \quad dy/dx = 2y/x \quad (۲)$$

$$y = cx^2 \quad (۳) \quad (۴) \text{ بطور مجانبی پایدار}$$

$$\begin{cases} x = 2c_1 \cos 2t + 2c_2 \sin 2t \\ y = -c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t \end{cases} \quad (۱) \quad (ج)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y} \quad (۲)$$

$$\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \quad (۳)$$

(۴) پایدار ولی نه بطور مجانبی پایدار

بخش ۴۲

(ب) حلزونی بهطور مجانبی پایدار

۱. الف) گره ناپایدار

- (ج) نقطه زینی ناپایدار
 (ه) گره به طور مجانبی پایدار
 (ز) حلزونی ناپایدار

۳.ج) نقطه بحرانی (۲، ۳-) است، دستگاه تبدیل یافته عبارت است از

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = 2\bar{x} - 2\bar{y} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = 11\bar{x} - 8\bar{y} \end{cases}$$

و نقطه بحرانی يك گره به طور مجانبی پایدار است.

۴.الف) $q = a^2$ ، $p = 2b$ ؛ $m^2 + 2bm + a^2 = 0$

(ب) (۱) يك مرکز پایدار ولی نه به طور مجانبی پایدار؛ جرم نوسان می کند؛ تغییر x و سرعت $y = dx/dt$ متناوب از زمان هستند.

(۲) نقطه حلزونی به طور مجانبی پایدار؛ جرم نوسانات میرا را جبران می کند؛ نوسانات کوچکتر و کوچکتر می شوند و x و dx/dt به صفر میل می کنند.

(۳) گره به طور مجانبی پایدار، جرم نوسان نمی کند؛ x و $dx/dt \rightarrow 0$ بدون نوسان.

(۴) همانند (۳)

۵. $a_2 x^2 - 2a_1 x y - b_1 y^2 = c$

بخش ۴۳

- ۱.الف) هیچکدام
 (ب) مطلقاً مثبت
 (ج) هیچکدام
 (د) مطلقاً منفی

بخش ۴۴

۲. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 y - y^3}{x^3 - 2x y^2}$

۳. بنویسید $D = -pq = (a_1 + b_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) > 0$

۴. وقتی دستگاه خطی (۳) در (۰، ۰) يك مرکز داشته باشد، نمی توان در مورد خواص پایداری دستگاه غیر خطی (۴) در (۰، ۰) نتیجه ای گرفت.

- ۵.الف) حلزونی ناپایدار؛ (ب) گره به طور مجانبی پایدار
 ۶. اگر $\mu > 0$ نقطه بحرانی (۰، ۰) ناپایدار است و اگر $\mu < 0$ به طور مجانبی

پایدار است.

بخش ۴۵

۱. اگر $f(0) = 0$ و $f(x) < 0$ برای $x \neq 0$ ، نقطه بحرانی نقطه زینی ناپایدار است.
۳. $y^2 - x^2 + x^4 = 2E$ ؛ $(-\sqrt{2}/2, 0)$ یک مرکز است؛ $(0, 0)$ یک نقطه زینی است و $(\sqrt{2}/2, 0)$ یک مرکز است.
۴. وقتی $z = F(x)$ دارای ماکزیمم است، نقطه بحرانی نقطه زینی است؛ وقتی می نیمم دارد، نقطه بحرانی یک مرکز است؛ و وقتی نقطه عطف دارد، نقطه بحرانی یک قله است.

بخش ۴۶

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(4 - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = -4 \end{cases} \quad (۲. الف)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cos \varphi(t+t_0)}{\sqrt{1+ce^{-\lambda t}}} \\ y = \frac{-2 \sin \varphi(t+t_0)}{\sqrt{1+ce^{-\lambda t}}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \cos \varphi t \\ y = -2 \sin \varphi t \end{cases} \quad (ج)$$

۴. الف) جواب متناوب (دوره‌ای) دارد (قضیه لینار)؛

ب) جواب متناوب ندارد (قضیه ب)؛

ج) جواب متناوب ندارد (قضیه الف)؛

د) جواب متناوب ندارد (قضیه ب)؛

ه) جواب متناوب دارد (قضیه لینار).

بخش ۴۸

$$(x - c_1)^2 + y^2 = c_1^2 \quad (۱. الف)$$

$$y = c_1 \sin(x - c_1) \quad (ب)$$

$$y = \frac{1}{\varphi}(x^2 - x) \quad (۲)$$

ب) همان جواب (الف)

$$۴. الف) $c_1 = r \cos(\theta - c_2)$$$

بخش ۴۹

$$y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2} \quad x = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (۳. الف)$$

$$z = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$y + \lambda = c_1 \cosh \left(\frac{x - c_2}{c_1} \right) \quad (۵. زنجیری)$$

بخش ۵۰

$$L[\sin^2 ax] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4a^2} \right) \quad (۳.$$

و

$$L[\cos^2 ax] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4a^2} \right)$$

مجموع این تبدیلهای همان تبدیل $(1/p)$ است.

$$\frac{51}{p^6} + \frac{p}{p^2 + 4} \quad (ب. ۴. الف) \frac{10}{p}$$

$$\frac{4}{p^2 + 4} + \frac{2}{p + 1} \quad (د. ۳. ج) \frac{2}{p - 3} - \frac{5}{p^2 + 25}$$

$$\frac{61}{p^7} \quad (۵)$$

$$2e^{-2x} \quad (ب. ۵. الف) 5x^2$$

$$x - \sin x \quad (۵. ۳. ج) 2x^2 + 3 \sin 2x$$

$$1 - e^{-x} \quad (د)$$

بخش ۵۱

$$\frac{1}{p(e^p - 1)} \quad (ب. ۲. الف) \frac{1}{pe^{ap}}$$

$$\frac{1 + e^{-\pi p}}{p^2 + 1} \quad (د. ۳. ج) \frac{e^p - 1 - p}{p^2(e^p - 1)}$$

بخش ۵۲

$$\frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{51}{(p+2)^2} \quad (\text{الف } ۱)$$

$$\frac{p-3}{(p-3)^2+2} \quad (\text{ج})$$

$$2e^{-2x} x^2 \quad (\text{ب})$$

$$2e^{-2x} \sin 2x \quad (\text{الف } ۲)$$

$$e^{-x} \cos 2x + e^{-x} \sin 2x \quad (\text{ج})$$

$$y(x) = -e^{-x} + e^{2x} \quad (\text{الف } ۳)$$

$$y(x) = 3xe^{2x} \quad (\text{ب})$$

$$y(x) = 1 - e^{-x} \cos x \quad (\text{ج})$$

$$y(x) = -5 + 6x - 3x^2 + x^3 + 5e^{-x} \quad (\text{د})$$

$$y(x) = e^{-x} \sin 2x + e^{-x} \sin x \quad (\text{ا})$$

$$y(x) = y_0 e^{ax} + (y_0' - ay_0) x e^{ax} \quad ۴$$

$$1 - e^{-x} \quad ۵$$

بخش ۵۳

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(p^2 + a^2)^2} \right] = \frac{1}{2a^3} \left(\frac{\sin ax}{a} - x \cos ax \right) \quad ۱$$

$$\frac{3}{4p^2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{6ap^2 - 2a^3}{(p^2 + a^2)^2} \quad (\text{الف } ۲)$$

$$y(x) = xe^{-x} \quad (\text{ب})$$

$$y(x) = cx^2 e^x \quad (\text{الف } ۳)$$

$$\tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (\text{ب})$$

$$\log \frac{b}{a} \quad (\text{الف } ۵)$$

$$\frac{1}{p(1+e^{-p})} \quad (\text{ب } ۸)$$

بخش ۵۴

$$y(x) = e^{2x} \quad (\text{ب})$$

$$y(x) = \cos x \quad (\text{الف } ۲)$$

$$y(x) = -2 \sin x + 2 \sin 2x \quad (\text{د})$$

$$y(x) = e^{-x}(x-1)^2 \quad (\text{ج})$$

$$y = cx \quad .۴$$

بخش ۵۵

$$y = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots |x| < 1 \quad .۱$$

$$y_1(x) = 1 + x, \quad y_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^3$$

$$y = e^{x^2} - 1 \quad .۲$$

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 + \frac{x^4}{2}$$

$$y_3(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \times 3}$$

$$y_4(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \times 3} + \frac{x^8}{2 \times 3 \times 4}$$

$$y_n(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + e^x \rightarrow (e^x - x - 1) + e^x \quad .۳ \text{ (الف)}$$

$$y_n(x) = 1 + x + 2 \left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right] \quad .۴ \text{ (ب)}$$

$$\rightarrow 1 + x + 2(e^x - x - 1)$$

$$y_1(x) = (\sin x - x) + 1 + x + \frac{x^2}{2!} \quad .۵ \text{ (ج)}$$

$$y_2(x) = -\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}\right) + 1 + x + (x^2) + \frac{x^4}{4!}$$

$$y_3(x) = -\left(\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right) + 1 + x + \left(x^2 + \frac{x^4}{2}\right) + \frac{x^6}{6!}$$

$$y_4(x) = \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right) + 1 + x$$

$$+ \left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \times 3}\right) + \frac{x^8}{8!}$$

بخش ۵۶

۶. الف) همه نقاط (x_0, y_0) با شرط $y_0 \neq 0$.

ب) همه نقاط (x_0, y_0) ، زیرا $f(x, y) = |y|$ در هر مستطیلی در شرط لیشیتز صدق می کند.

۷. همه نقاط (x_0, y_0) .

بخش ۵۷

$$\begin{cases} y = \cos x \\ z = -\sin x \end{cases} \quad .۱$$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

asymptotically stable	به‌طور مجانبی پایدار	test	آزمون
ellipsoid	بیضی‌وار	comparison –	– مقایسه
stability	پایداری	ratio –	– نسبت
conservative	پایستار	rate	آهنگ
diffusion	بخش	vibration	ارتعاش
function	تابع	free –	– آزاد
elliptic –	– بیضوی	damped –	– میرا
admissible –	– پذیرفتنی	principle	اصل
step –	– پله‌ای		– بایستگی انرژی
single valued –	– تک مقداری	– of conservation of energy	– حداقل زمان فرما
automorphic –	– خودریخت	Fermat's principle of least time	– کمترین عمل
Dirac delta –	– دلتای دیراک	principle of least action	انتگرال
sawtooth –	– دندانه‌اره‌ای	integral	– بیضوی
unit impulse –	– ضرب‌به‌ای واحد	elliptic –	– ناسره
hypergeometric –	– فوق هندسی	improper –	انحناء
	– فوق هندسی متلاقی	curvature	ایستا، ایستنی
confluent hypergeometric –		stationary	
generating –	– مولد	unit vector	بردار یکه
weight –	– وزن	frequency	بسامد
eigenfunction	تابع ویژه	manifold	بسطا

steady-state حالت ماندگار
حساب تغییرات

calculus of variations

spiral حلزونی

property خاصیت

focal — — کانونی

minimax — — مینی ماکس

eccentricity خروج از مرکز

linearization خطی کردن

global properties خواص سرتاسری

inductor خود القا

amplitude دامنه

degree درجه

system دستگاه

autonomous — — خود گردان

uncoupled — — غیر زوج (غیر جفت)

shifting formula دستور انتقالی

sequence دنباله

periodic دوره‌ای

exact differential دیفرانسیل کامل

dynamics دینامیک

particle ذره

recursion formula رابطه بازگشتی

phase portrait رخساره فاز

growth رشد

 رصدخانه مغناطیسی

magnetic observatory

method روش

 — تغییر پارامترها

variation of parameters —

transformation تبدیل

integral — — انتگرالی

Laplace transform تبدیل لاپلاس

 تبدیل لاپلاس معکوس

inverse Laplace transform

formalism تعیین صوری

underdamped تحت میرا

analytic تحلیلی

 تحلیل موضعی (توپولوژی)

analysis situs

 تراز انرژی کوانتیده

quantized energy level

linear combination ترکیب خطی

resonance تشدید

equilibrium تعادل

 تقریبات متوالی

successive approximations

decay تلاشی

 تناظر یک به یک

one to one correspondence

special functions توابع خاص

 توان معادله دیفرانسیل

exponent of differentialequa-

tion

constant ثابت

separation — — جداسازی

gravitational — — گرانشی

solution جواب

particular — — خصوصی

trivial — — صفر

general — — عمومی

cycloid چرخزاد

polynomial چند جمله‌ای

Euler multiplier — اویلر
 inductance — خود القایی
 binomial — دوجمله ای
 Lagrange multiplier — لاگرانژ
 arc length — طول کمان
 integrating factor — عامل انتگرال ساز
 membrane — غشا
 transcendental — غیر جبری
 uncoupled — غیر زوج (غیر جفت)
 singular — غیر عادی
 interval — فاصله
 phase space — فضای فاز
 overdamped — فوق میرا
 law — قانون
 — شکست اسنل
 Snell's law of refraction
 — of gravitation — گرانش
 theorem — قضیه
 central limit — حد مرکزی
 — مجزا کننده استورم
 Sturm separation —
 — مقایسه استورم
 Sturm comparison —
 — وجود و یگانگی
 existence and uniqueness —
 — قطعه به قطعه پیوسته
 piecewise continuous
 — کاهش لگاریتمی
 logarithmic decrement
 reduction of order — کاهش مرتبه

— ضرایب نامعین
 undetermined coefficient —
 — مبتنی بر تکرار
 iteration process —
 minimal surface — رویه کمترین مساحت
 Wronskian — رونسکی
 descent time — زمان سقوط
 geodesic — ژئودزیک
 geomagnetism — ژئومغناطیس
 mechanism — سازوکار
 velocity — سرعت
 escape — فرار
 terminal — نهایی
 series — سری
 infinite — بینهایت
 binomial — دوجمله ای
 power — توانی
 quasi power — شبه توانی
 hypergeometric — فوق هندسی
 retarded fall — سقوط تأخیری
 planet — سیاره
 initial conditions — شرایط اولیه
 — شعاع همگرایی
 radius of convergence
 normal form — شکل نرمال
 intuitive — شهودی، حسی
 phase plane — صفحه فاز
 formal — صوری، رسمی
 coefficient — ضریب

analytical —	تحلیلی —
celestial —	سماوی —
Hamiltonian—	همیلتنی —
curve	منحنی
integral —	انتگرال —
pursuit —	تعقیب —
directed—	جهت دار —
catenary—	زنجیری —
tractrix —	کشاننده —

— کو تا هترین زمان

brachistochrone—	
regular	منظم
solar system	منظومه شمسی
local	موضعی
gravitational field	میدان گرانشی
critically damped	میرای بحرانی

jump discontinuity	نا پیوستگی جهشی
discontinuous	نا پیوسته
undamped	نامیرا
general relativity	نسبیت عام
theory	نظریه

ergodic —	ارگودیک —
of approximation —	تقریب —
	منسجم نورشناسی

coherent theory of optics	
end points	نقاط انتهایی
point	نقطه

critical —	بحرانی —
isolated critical—	بحرانی منزوی—
saddle —	زینی —
ordinary —	عادی —
	غیر عادی نامنظم

irregular singular —	
optics	نورشناسی

bounded	کرواندار
continued fraction	کسر مسلسل
least squares	کمترین مربعات
convolution	کنولوسیون

transient	گذرا
node	گره
pear - shaped	گلابی شکل

satellite	ماهواره
-----------	---------

discriminant	مبین
transcendental	متعالی (غیر جبری)
variable	متغیر

dummy —	ظاهری —
dependent —	وابسته —
convex	محدب

order	مرتبه
exponential —	نمایی —
conjugate	مزدوج

مسئله همزمانی

tautochrone problem	
variational problems	مسائل تغییراتی
linearly independant	مستقل خطی
	مسیرهای متعامد

orthogonal trajectories	
positive definite	مطلقاً مثبت
negative definite	مطلقاً منفی

equation	معادله
integral —	انتگرالی —
indicial —	شاخص —

auxiliary —	کمکی —
	همبند اوپلر
Euler' s equidimensional —	

eigenvalue	مقدار ویژه
mechanics	مکانیک

negative semidefinite	نیم مطلق منفی
positive semidefinite	نیم مطلق مثبت
kernel	هسته
harmonic	همساز
neighborhood	همسایگی
isoperimetric	هم پیرامون
convergence	همگرایی
absolute —	مطلق —

oscillate	نوسان کردن
forced vibrations	نوسانات
— نیروی بازگرداننده	
restoring force	
tension —	— کشش
	— گرانشی مرکزی
central gravitational force	
central force	— مرکزی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

absolute convergence	همگرایی مطلق	calculus of variations	حساب تغییرات
action	عمل	catenary	زنجیری
admissible function	تابع پذیرفتنی	celestial mechanics	مکانیک سماوی
amplitude	دامنه	central	مرکزی
analysis situs	تحلیل موضعی (توپولوژی)	— force	نیروی —
analytic	تحلیلی	— gravitational force	نیروی گرانشی —
analytical mechanics	مکانیک تحلیلی	— limit theorem	قضیه حد —
arc length	طول کمان	coherent	منسجم
asymptotically stable	به طور مجانبی پایدار	comparison test	آزمون مقایسه
automorphic function	تابع خودریخت	confluent hypergeometric function	تابع فوق هندسی متلاشی
autonomous system	دستگاه خودگردان	conjugate	مزدوج
auxiliary equation	معادله کمکی	conservative	پایستار
binomial	دوجمله‌ای	continued fraction	کسر مسلسل
— coefficient	ضریب —	convergence	همگرایی
— series	سری —	convex	محدب
bounded	کرا انداز	convolution	کنولوسیون
brachistochrone	منحنی کوتاهترین زمان	critically damped	میرای بحرانی
		critical point	نقطه بحرانی
		crude approximation	تقریب خام
		curvature	انحناء
		cycloid	چرخزاد

damped vibration	ارتعاش میرا
decay	تلاشی
degree	درجه
dependent variable	متغیر وابسته
descent time	زمان سقوط
difference	اختلاف
diffusion	پخش
Dirac delta function	

تابع دلتای دیراک

directed curve	منحنی جهت دار
discontinuous	ناپیوسته
discriminant	مبین
dummy variable	متغیر ظاهری
dynamics	دینامیک

eccentricity	خروج از مرکز
eigenfunction	تابع ویژه
eigenvalue	مقدار ویژه
ellipsoid	بیضی وار
elliptic	بیضوی

تابع —

انتگرال —

end points	نقاط انتهایی
escape velocity	سرعت فرار
exact differential	دیفرانسیل کامل
exponential order	مرتبه نمایی
exponent of differential equation	

توان معادله دیفرانسیل

equilibrium	تعادل
-------------	-------

ergodic theory	نظریه ارگودیک
----------------	---------------

Euler's equidimensional equation	معادله همبعد اویلر
----------------------------------	--------------------

Euler multiplier	ضریب اویلر
------------------	------------

existence and uniqueness theorem	قضیه وجود و یگانگی
----------------------------------	--------------------

Fermat's principle of least time	اصل حداقل زمان فرما
----------------------------------	---------------------

focal property	خاصیت کانونی
----------------	--------------

forced vibrations	نوسانات واداشته
-------------------	-----------------

formal	صوری، رسمی
--------	------------

formalism	تعیین صوری
-----------	------------

free vibration	ارتعاش آزاد
----------------	-------------

frequency	بسامد
-----------	-------

general	عام، عمومی
---------	------------

نسبیت —

جواب —

generating function	تابع مولد
---------------------	-----------

geomagnetism	ژئومغناطیس
--------------	------------

global properties	خواص سرتاسری
-------------------	--------------

gravitational	گرانشی
---------------	--------

ثابت —

میدان —

growth	رشد
--------	-----

Hamiltonian mechanics

مکانیک همبستگی

harmonic	همساز
----------	-------

homogeneous	همگن
-------------	------

hypergeometric	فوق هندسی
----------------	-----------

معادله —

تابع —

سری —

improper integral	انتگرال ناسره
-------------------	---------------

indicial equation	معادله شاخص
-------------------	-------------

inductance	ضریب خودالقایی
------------	----------------

inductor	خودالقا
----------	---------

infinite series	سری بینهایت
-----------------	-------------

initial conditions	شرایط اولیه
--------------------	-------------

integral انتگرال، انتگرالی
 — curve منحنی —
 — equation معادله —
 — transformation تبدیل —

integrating factor عامل انتگرال‌ساز

interval فاصله

intuitive حسی، شهودی

inverse Laplace transform تبدیل لاپلاس معکوس

irregular singular point نقطه غیر عادی نامنظم

isolated critical point نقطه بحرانی منزوی

isoperimetric هم‌پیرامونی

iteration process روش مبتنی بر تکرار

jump discontinuity ناپیوستگی جهشی

kernel هسته

Lagrange multiplier ضریب لاگرانژ

Laplace transform تبدیل لاپلاس، مبدل لاپلاس

law of gravitation قانون گرانش

least squares کمترین مربعات

linear combination ترکیب خطی

linearization خطی کردن

linearly dependant وابسته خطی

linearly independant مستقل خطی

local موضعی

logarithmic decrement کاهش لگاریتمی

magnetic observatory رصدخانه مغناطیسی

manifold بسلا

mechanism ساز و کار

membrane غشاء

method of variation of parameters روش تغییر پارامترها

minimal surface method رویه کمترین مساحت

minimax property خاصیت مینی‌ماکس

negative منفی
 — definite مطلقاً —

— semidefinite نیم مطلق —

neighborhood همسایگی

node گره

normal form شکل نرمال

one to one correspondence تناظر یک به یک

optics نورشناسی

order مرتبه

ordinary point نقطه عادی

orthogonal trajectories مسیرهای متعامد

oscillate نوسان کردن

overdamped فوق میرا

particle ذره

particular solution جواب عمومی

pear - shaped گلابی شکل

periodic دوره‌ای

phase فاز

— plane صفحه —

— portrait رخساره —

— space فضای —

piecewise continuous

قطعه به قطعه پیوسته

planet

سیاره

polynomial

چندجمله‌ای

positive

مثبت

— definite

مطلقاً —

— semidefinite

نیم مطلق —

power series

سری توانی

principle

اصل

— of conservation of energy

— بایستگی انرژی

— of least action

— کمترین عمل

pursuit curve

منحنی تعقیب

quantized energy level

تراز انرژی کوانتیده

quasi power series

سری شبه توانی

radius of convergence

شعاع همگرایی

rate

آهنگ

ratio test

آزمون نسبت

recursion formula

رابطه بازگشتی

reduction of order

کاهش مرتبه

regular

منظم

resonance

تشدید

restoring force

نیروی بازگرداننده

retarded fall

سقوط تأخیری

saddle point

نقطه زینی

satellite

ماهواره

sawtooth function

تابع دندان‌اره‌ای

separation constant

ثابت جدا سازی

sequence

دنباله

single valued function

تابع تک مقداری

singular

غیر عادی

Snell's law of refraction

قانون شکست اسنل

stability

پایداری

stationary

ایستا، ایستی

steady - state

حالت ماندگار

step function

تابع پله‌ای

shifting formula

دستور انتقالی

solar system

منظومه شمسی

special functions

توابع خاص

spiral

حلزونی

Sturm comparison theorem

قضیه مقایسه استورم

Sturm separation theorem

قضیه مجزا کننده استورم

successive approximations

تقریبات متوالی

tautochrone problem

مسئله همزمانی

tension

کشش

terminal velocity

سرعت نهایی

theory of approximation

نظریه تقریب

tractrix curve

منحنی کشاننده

transcendental

متعالی (غیر جبری)

transformation

تبدیل

transient

گذرا

trivial solution

جواب صفر

uncoupled system

دستگاه غیر زوج (غیر جفت)

undamped

نامیرا

underdamped

تحت میرا

unit impulse function

تابع ضربه ای واحد

unit vector

بردار یکه

variation of parameters method

روش تغییر پارامترها

variational problems

مسائل تغییراتی

vibration

ارتعاش

weight function

تابع وزن

Wronskian

رونسکی

undetermined coefficient method

روش ضرایب نامعین

فهرست راهنما

- آبل ، نیلس، هنریك ، ۲۱۴، ۲۲۳، ۲۴۴
 ۳۸۱، ۴۵۶-۴۵۹
 اظهار نظر در مورد گاوس، ۲۱۷
 مسئله مکانیکی، ۴۵۰
 معادله انتگرالی، ۴۵۱
 اتحاد اویلر برای اعداد اول، ۱۱۹،
 ۲۴۰-۲۴۱
 اثر جرم، قانون، ۱۹
 آدامار، ح.، ۲۴۱
 آدامز، جان کوچ، ۱۷۳
 ارتعاشات اجباری، ۱۰۶
 ارتعاشات آزاد، ۱۰۶
 ارتعاشات تحت میرا، ۱۰۴
 ارتعاشات فوق میرا، ۱۰۴
 ارتعاشات میرا، ۱۰۳
 ارتعاشات میرای بحرانی، ۱۰۴
 ارتعاشات نامیرا، ۱۰۱
 آزمون مقایسه، انتگرال ناسره، ۴۳۲
 آزمون نسبت، ۱۵۶
 استاندارد، معادله دیفرانسیل، شکل، ۱۲۹
 استورم، ژاك، شارل، فرانسوا، ۱۲۸
 قضیه جدا کننده، ۱۲۸
 قضیه مقایسه، ۱۳۳
 استورم - لیوویل، بسط، ۱۴۹
 اسنل، و.، ۲۸
 قانون شکست، ۲۸
 اصل کمترین عمل، ۴۱۶
 اعداد غیر جبری (متعالی)، ۱۵۱
 اکسترمال، ۳۹۵
 انتگرال بیضوی:
 نوع اول، ۲۴
 نوع دوم، ۲۴
 انتگرال ناسره:
 آزمون مقایسه، ۴۳۲
 همگرایی، ۴۳۱
 همگرایی مطلق، ۴۳۲
 انرژی:
 پایداری (بقای)، ۲۱، ۴۱۹
 پتانسیل، ۲۱، ۱۱۳، ۳۵۲، ۴۱۵
 جنشی، ۲۱، ۱۱۳، ۳۵۲، ۴۱۵
 آونگ، ۲۲، ۳۲۲، ۳۶۳، ۳۶۸-۳۶۹
 اویلر، ل.، ۹۳، ۱۱۶-۱۱۹، ۱۲۰
 اتحاد برای اعداد اول، ۱۱۹،
 ۲۴۰-۲۴۱

- تابع فوق هندسی، ۱۹۴
 حساب تغییرات، ۳۸۹، ۳۹۵، ۴۱۵
 دنباله اعداد اول، ۲۳۰
 روش، ۷۲
 اصلاح شده، ۷۴
 رویه کمترین مساحت، ۴۲۳
 ضرایب فوریه، ۱۳۹، ۱۴۰
 غشای مدور، ۲۵۶
 غشای مرتعش، ۲۸۲
 غیرگویایی، ۱۵۱
 فرمول، ۹۲
 برای ضرایب فوریه، ۱۴۰
 قانون تقابل مربعی، ۲۱۶
 مجموع سری ها، ۲۴۴
 معادله، حساب تغییرات، ۳۹۵
 معادله همبند، ۹۳
 ولاگرانژ، ۴۱۴
 اهم. گ. ز. ۶۴
 قانون، ۶۴
 ایری، جرج، بیدل، ۱۷۳
 تابع، ۱۷۲
 معادله، ۱۷۲، ۲۶۷
 ایستی، منحنی، ۳۹۵
 تابع، ۳۹۵
 مقدار، ۳۹۵
 اینشتین، آلبرت:
- استفاده از حساب تغییرات، ۳۹۰
 اهمیت گاوس در نسبیت، ۲۱۹-۲۲۰
 جرم متغیر و $E=mc^2$ ، ۷۰، ۷۱
 درباره آینده فیزیک ریاضی، ۳۲۲
 درباره هندسه ریمانی، ۲۳۹
 شک کردن در واضحات، ۲۸۱
- برنولی دانیل، ۳۴، ۱۳۹، ۲۵۶
 برنولی، معادله، ۵۴
 برنولی یا کوب، ۳۳
 برنولی یوهان، ۲۶، ۳۳، ۱۱۶، ۱۲۲، ۳۸۹
 بسط استورم-لیوویل، ۱۴۹
 بسل، ف. و.، ۲۵۶
 نامه های گاوس به، ۲۲۲، ۲۲۳
 بسل، توابع، ۲۵۶
 از مرتبه ۵، ۱۶۱، ۱۸۲، ۲۵۹، ۴۴۵
 نمودار، ۲۵۹
 از مرتبه ۱/۲، ۱، ۹۰، ۱۸۹، ۲۶۶
 از مرتبه ۱، ۱۸۹، ۲۵۹
 نمودار، ۲۵۹
 از نوع اول، ۲۵۸
 از نوع دوم، ۲۶۲، ۲۶۴
 انتگرال، ۲۶۹، ۲۷۰
 تعامد، ۲۷۱-۲۷۳
 صفرهای، ۱۳۴، ۲۷۰، ۲۷۳
 غشای مرتعش، ۲۸۶
 فرمول انتگرالی، ۲۸۹
 کروی، ۲۶۹
 نوسان، ۱۳۲-۱۳۵
 بسل، سری، ۲۷۰
 قضیه بسط، ۲۷۱
 بسل، معادله، ۳، ۱۷۵، ۲۵۶
 تعمیم، ۲۶۷
 جواب عمومی، ۲۶۲-۲۶۴
 جواب مربوط به $P=0$ ، ۱۶۱، ۱۸۲
 ۲۵۹، ۴۴۳
 جواب دوم، ۱۹۰
 جواب مربوط به $P=1/2$ ، ۹۰
 ۱۸۹، ۲۶۶
 جواب مربوط به $P=1$ ، ۱۸۹، ۲۵۹
 زنجیر مرتعش، ۱۴۴
 شکل نرمال، ۱۳۱، ۱۳۴
- بارو، آیزک، ۱۲۰
 برتران، اصل، ۲۳۱

- ۳۹۱، پذیرفتنی
 ۱۵۹، تحلیلی
 ۱۵۳، جبری
 ۱۵۳، خاص
 ۴۳۶، دیراک
 ۴۳۶، ضربه‌ای واحد
 ۱۹۱، فوق هندسی
 ۱۹۹، متلاقی
 ۴۳۲، قطعه به قطعه پیوسته
 ۲۵۹، گاما
 ۱۶۹، لژاندر
 ۳۵۰، لیاپونوف
 ۱۵۳، متعالی
 ۱۵۳، بالاتر
 ۲۵۴، ۱۴۹، متعامد
 ۳۵۰، مطلقاً مثبت
 ۳۵۰، مطلقاً منفی
 ۱۵۳، مقدماتی
 مولد:
 ۲۸۸، بسل
 ۲۴۹، چند جمله‌ای لژاندر
 ۲۰۶، چند جمله‌ای هرمیت
 ۳۵۰، نیم مطلق مثبت
 ۳۵۰، نیم مطلق منفی
 ۲۱۲، ۱۴۸، ۱۳۵، ویژه
 ۱۴۹، ۱۴۰، بسط
 ۲۱۱، ۲۰۹، هرمیت
 همگن
 ۴۲۰، قضیهٔ اوایلر
 تاریخ گذاری به وسیلهٔ رادیو کربن،
 ۱۷-۱۹
 ۴۲۷، تبدیل لاپلاس
 ۴۳۹، معکوس
 تبدیلات:
 ۴۲۸، انتگرالی
 ۲۸۶، غشای مرتعش
 نقطه در بینهایت، ۱۹۸
 نوسان، ۱۳۲-۱۳۵
 به طور جانبی پایدار، ۳۳۵
 بقای انرژی، پایداری انرژی، ۴۱۹، ۲۱
 بندیکسون، ۳۷۶
 بویونی، ۲۲۲
 بیر کهوف، ج. د. ۳۸۲
 پتانو، ج. ۴۷۲
 قضیه، ۴۷۲
 پاسکال، ب. ۳۲
 پایدار، نقطه بحرانی، ۳۳۵
 پایداری انرژی، ۴۱۹، ۲۱
 پتانسیل، ۲۷۶
 الکترواستاتیکی، ۲۷۶
 انرژی، ۴۱۵، ۳۵۲، ۱۱۳، ۲۱
 دو قطبی الکترواستاتیکی، ۲۸۱
 گرانشی، ۲۷۶
 نظریه، ۲۷۶
 پلاتو، ج. ۴۲۴
 مسئله، ۴۲۴
 پلانک، ماکس. ۴۱۷
 پوانکاره، ه. ۳۷۶، ۳۵۷، ۳۲۱، ۲۱۴،
 ۳۸۳-۳۸۰
 پیکار، ا. ۴۶۳
 روش تقریبات متوالی، ۴۶۳
 قضیه، ۴۶۶، ۲۹۴، ۷
 تابع (ها):
 از مرتبه‌نمایی، ۴۳۳
 ایری، ۱۷۲
 ایستی، ۳۹۵
 بسل
 بسل کروی، ۲۶۹

- خطی، ۴۲۸
ترازهای انرژی کوانتیده، ۲۱۳
ترکیب خطی، ۸۲
تشدید، ۱۰۷
تعامل:
توابع بسل، ۲۷۱
توابع هرمیت، ۲۰۹
چند جمله‌ایهای چیشف، ۲۲۷
چند جمله‌ایهای لژاندر، ۲۵۰
۲۵۶-۲۵۵
تغییر پارامترها:
برای دستگاههای خطی، ۳۱۳
برای معادلات خطی، ۹۸
تقریب کمترین مربعات، ۲۵۴
تلاشی رادیواکتیو، ۶۸، ۱۶
توانها، ۱۸۶
توریچلی، اوانجلیستا، ۳۵
قانون، ۳۵
تیلور، سری، ۱۵۹
فرمول، ۱۵۸
ثابت جدا سازی، ۲۷۹
جبر گرایمی مکانیکی، ۲۹۶
جدا سازی (کردن) متغیرها، روش، ۱۳۷
۲۸۵، ۲۷۸
جرم متغیر، ۶۹
جنبشی، انرژی، ۲۱، ۱۱۳، ۳۵۲، ۴۱۵
جواب برنولی معادله موج، ۱۴۰
جواب خصوصی، ۸
جواب صفر، ۸۱-۸۲
جواب عمومی، ۸، ۲۹۹
جهان:
استفاده اولیه از، ۱۱۹
تعریف جینز از، ۲۹۶
- چیشف، پ. ل.، ۲۲۹-۲۳۰
چند جمله‌ای، ۱۷۳، ۱۹۶، ۲۲۴-۲۳۱
تعامل، ۲۲۷
سری، ۲۲۷
مسئله، ۲۲۸
معادله، ۱۵۰، ۱۷۳، ۱۹۵، ۱۹۶، ۲۲۶
چرخزاد، ۳۱، ۳۴، ۵۷، ۳۹۹، ۴۵۳
چند جمله‌ایهای:
چیشف، ۱۷۳، ۱۹۶، ۲۲۴-۲۳۱
لاگر، ۱۹۹
لژاندر، ۱۶۹، ۲۴۵
هرمیت، ۱۷۳، ۲۰۹-۲۱۳
حرکت، قانون دوم نیوتن، ۱، ۶۹، ۱۰۱
۱۱۰، ۱۳۶، ۲۸۳، ۴۱۶
حلزونی، ۳۳۳
خاص، توابع، ۱۵۳
معادله ریکاتی، ۶۸، ۲۷۵
خاصیت کانونی، سهمی‌ها، ۵۱
خاصیت مینی‌ماکس، ۲۲۸
خروج از مرکز، معنای فیزیکی، ۱۱۳
خطی:
تبدیلات، ۴۲۸
ترکیب، ۸۲
دستگاه:
غیرزوج (غیر جفت)، ۳۱۰
ناهمگن، ۲۹۷
همگن، ۲۹۷
مستقل، ۸۳، ۳۰۱
معادله دیفرانسیل، ۵۲، ۷۹
وابسته، ۸۴، ۳۰۰
خطی کردن، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۵۶
دالامبر، ژان لورون، ۱۴۲

تقریبات متوالی پیکار، ۴۶۳
جسدا کردن (سازی) متغیرها، ۱۳۷،
۲۸۵، ۲۷۸

رونکه-کوتا، ۷۶

فروینوس، ۱۷۸

رونسکی، هوینه، ۸۴

رونسکی، ۸۴، ۲۹۹

رونکه، کارل، ۷۶

رویة کمترین مساحت، ۴۲۳

ریکاتی، ج. اف.، ۶۸

معادله، ۶۸

خاص، ۶۸، ۲۷۵

ریمان، ب.، ۱۱۶، ۲۳۴-۲۳۸

زنجیری، ۵۹

زینی، نقطه، ۳۳۱

ژئودزیک، ۳۹۷، ۴۰۳، ۴۱۱

براستوانه، ۴۰۲

برکره، ۴۰۲، ۴۱۱

برمخروط، ۴۰۲

در فیزیک، ۴۱۷

سرعت فرار، ۲۶

سرعت نهایی، ۲۲

سری:

بسل، ۲۷۰

توانی، ۱۵۵

تیلور، ۱۵۹

چیشف، ۲۲۷

دو جمله ای، ۱۶۳

سینوسی فوریه، ۱۴۰

فروینوس، ۱۷۸

فوریه-بسل، ۲۷۱

فوق هندسی، ۱۹۱

جواب، معادله موج، ۱۴۲

فرمول، ۱۴۲

ددکیند، ریچارد، ۲۱۸

درجه آزادی، ۴۱۸

دستگاه:

خطی غیرزوج (غیرجفت)، ۳۱۰

خودگردان، ۳۲۳

معادله کمکی، ۳۰۶، ۳۳۸

ناهمگن خطی، ۲۹۷

همگن خطی، ۲۹۷

دسته منحنی های تک پارامتری، ۸

دو بعدی، معادله موج، ۲۸۴

دوجمله ای، ضرایب، ۱۶۴

سری، ۱۶۳

قضیه، ۱۶۳

دوره تناوب دوران سیارات، ۱۱۴

دیراک، پ. آ. ام.، ۴۳۶

تابع دلتا، ۴۳۶

دیریکله، پ.، ۶۴، ۲۳۵-۲۳۷

مسئله، ۲۸۰

دیفرانسیل کامل، ۴۳

رابطه (یا فرمول) بازگشتی، ۱۶۸

دو جمله ای، ۱۷۱

سه جمله ای، ۱۷۲

رادو، ت.، ۴۲۴

رادیکرین، ۱۸

رخساره فاز، ۳۲۶

رودریگ، ا.، ۲۴۸

فرمول:

چند جمله ایهای لژاندر، ۲۳۸

چند جمله ایهای هرمیت، ۲۰۸

روش:

اوپلر، ۷۲

اصلاح شده، ۷۴

فاصله:

باز، ۸۰

بسته، ۸۰

همگرایی، ۱۵۷

فرد هولم، آیوار، ۱۵۰

فرما، پ.، ۳۲، ۱۱۸

اصل حداقل زمان، ۲۸، ۲۲۵

فرمول (رابطه) بازگشتی، ۱۶۸

دو جمله‌ای، ۱۷۱

سه جمله‌ای، ۱۷۲

فرمول تیلور، ۱۵۸

فرمی، انریکو، ۷۰

فروبینوس، ف. گت.، ۱۷۸

روش، ۱۷۸

سری، ۱۷۸

فلاسفه، ۲۱۷، ۲۲۳

فوریه، ژ.، ۱۴۰

سری سینوسی، ۱۴۰

قضیه بسط، ۱۴۱

فوق هندسی:

تابع، ۱۹۱

متلاقی، ۱۹۹

سری، ۱۹۱

معادله:

تعمیم یافته، ۲۳۴

گاوس، ۱۹۰-۱۹۴، ۱۹۷، ۲۳۱

متلاقی، ۱۹۸، ۱۹۹

قانون:

اثر جرم، ۱۹

اهم، ۶۴

(اصل) بایستگی انرژی، ۲۱، ۴۱۹

توربیچلی، ۳۵

سرد شدن نیوتن، ۲۰

شکست اسنل، ۲۸

لژاندر، ۲۵۲

هرمیت، ۲۱۰

سریهای توانی، ۱۵۵

شعاع همگرایی، ۱۵۶

فاصله همگرایی، ۱۵۷

سهمی، خاصیت کانونی، ۵۱

سیارات، دوره تناوب دوران، ۱۱۴

شرایط:

اولیه، ۸

مرزی، ۱۳۵

شرط لپشیتس، ۴۷۲

شرودینگر، اروین، ۲۱۲، ۳۹۰

توابع موج، ۲۱۲

معادله موج، ۲۱۲

شعاع همگرایی، ۱۵۶

شکار و شکارچی، معادلات، ۳۱۵

شکست، قانون اسنل، ۲۸

شکل استاندارد، معادله دیفرانسیل، ۱۲۹

شکل نرمال، معادله دیفرانسیل، ۱۲۹

صفحه فاز، ۳۲۳

صفر تابع، ۸۳

صفرهای توابع بسل، ۲۷۰

ضریب نامعین، ۹۵

عادی، معادله دیفرانسیل، ۳

نقطه، ۱۶۵

عامل انتگرال ساز، ۴۶

عمل، ۴۱۵

غشای مدور، ۲۸۴

غیر عادی:

مسئله استورم-لیوویل، ۱۴۹

منظم، نقطه، ۱۷۵، ۱۸۳

نامنظم، نقطه، ۱۷۵

گرائشن، نیوتن، ۲۶، ۱۱۱، ۲۹۵، ۴۵۴
قانوندانان (وکلا)، ۳۵، ۲۱۶
قضیه:

اعداد اول، ۲۳۱

اقلیدس، ۱۱۸

اویلر، توابع همگن، ۴۲۰
بسط:

بسل، ۲۷۱

فوریه، ۱۴۱

لژاندر، ۲۵۳

بنیادی (یا اساسی) حساب دیفرانسیل و
انتگرال، ۵

پثانو، ۴۷۲

پوانکاره-بندیکسون، ۳۷۶

پیکار، ۷، ۲۹۴، ۴۶۶

مجزاکنده استورم، ۱۲۸

مقایسه استورم، ۱۳۲، ۱۳۳

وجود و یگانگی، ۴۶۵

قطعه به قطعه پیوسته، ۴۳۲

کامل:

دیفرانسیل، ۴۳

معادله، ۴۳

کانتور، گگ، ۲۳۷

کپرنیک، ن، ۱۲۲

کپلر، ی، ۱۱۱، ۱۲۲

قانون:

اول، ۱۱۲

دوم، ۱۱۱

سوم، ۱۱۵

کسرهای مسلسل، ۲۹۱

کشانده، ۵۹، ۶۳

کمترین:

زمان، اصل فرما، (حداقل زمان)، ۲۸

۲۲۵

عمل، اصل، ۴۱۶

کوشی، ا، ل، ۴۵۷

معادله همبند، ۹۳

کیرشهوف، گوستاو روبرت، ۶۵

قانون، ۶۵

گالیله، ۲۶، ۳۵، ۱۲۲

گاوس، کت. ف، ۱۱۶، ۲۱۴-۲۲۴، ۲۳۵

اعداد مختلط و کواترنیونها، ۴۲۶

تابع فوق هندسی، ۱۹۴

درباره تز دکترای ریمان، ۲۳۶

قضیه اعداد اول، ۲۳۰-۲۳۱

معادله فوق هندسی، ۱۹۰، ۱۹۷، ۲۳۱

نظریه پتانسیل، ۲۷۷

و آبل، ۴۵۶

هندسه ریمانی، ۲۳۸

گاوس، هلن، و، ۲۱۵

گراسما، ن، ه، ۴۲۶

گرائشن، قانون نیوتن، ۲۶، ۱۱۱، ۲۹۵

۴۵۴

گره، ۳۲۹

گیز، و، ۴۲۶

لاپلاس، پیرسیمون، ۴۲۵، ۴۵۴-۴۵۶

تبدیل، ۴۲۹

معکوس، ۴۳۹

معادله، ۳، ۲۷۶

لاگر، ادمون، ۱۹۹

چند جمله ایهای، ۱۹۹

معادله، ۱۵۰، ۱۹۹

لاگرانژ، ۴۱۳-۴۱۴، ۴۲۳، ۴۵۵

ضریب، ۴۰۵

معادلات، ۴۱۹

لاگرانژی، ۴۱۵، ۴۱۷

لامبرت، یوهان هاینریش، ۲۵، ۱۵۱

۲۹۱، ۲۴۲

- قانون جذب ، ۲۰
 لایب نیتس ، گک. و. ۳۳، ۱۲۰
 لیاچفسکی ، ن. ا. ۶۰، ۲۲۳
 لژاندر ، آدرین ، ماری ، ۲۱۶، ۲۴۴، ۲۹۱، ۴۵۷
 توابع ، ۱۶۹
 چند جمله‌ای‌های ، ۱۶۹، ۲۴۵
 تابع مولد ، ۲۴۹، ۲۸۱
 تعامل ، ۲۵۵، ۲۵۶-۲۵۵
 فرمول رودریگگ ، ۲۴۸
 کاربرد ، ۲۷۸-۲۸۰
 سری ، ۲۵۲
 قضیه بسط ، ۲۵۳
 معادله ، ۳، ۹۰، ۱۴۹، ۱۶۷، ۱۹۸، ۲۴۴، ۲۷۹
 لم اساسی ، حساب تغییرات ، ۳۹۵
 لیاپونوف ، آ. م. ۴۰، ۳۴۹، ۳۵۱، ۳۶۰
 تابع ، ۳۵۰
 لیبی ، و. ۱۸، ۱۹
 لیشیتس ، رودولف ، ۴۷۲
 شرط ، ۴۷۲
 لینار ، آلفرد ، ۳۷۷
 معادله ، ۳۷۷
 قضیه ، ۳۷۷، ۳۸۳
 لیندمان ، ف. ۱۵۱
 لیوویل ، ج. ۱۵۰، ۱۵۱-۱۵۰، ۲۶۹
 ماکسول ، جیمز ، کلارک ، ۱۱۹، ۲۲۱
 متعالی ، توابع ، ۱۵۳
 متعامل ، توابع ، ۱۴۹، ۲۵۴
 مختصات ، تعمیم یافته ، ۴۱۹
 مرتبه معادله دیفرانسیل ، ۳
 مرکز ، ۳۳۱
 مسئله (ها) :
 آب شور (آب نمک) ، ۳۵، ۶۷
 استورم ، لیوویل منظم ، ۱۴۹
 غیرعادی ، ۱۴۹
 جسمی ، ۲۹۵
 آینه ، ۵۰
 باکتری‌ها ، ۲۰
 برف پاک‌کن ، ۳۴
 پلاتو ، ۴۲۴
 تلاشی رادیواکتیو ، ۶۸
 قوپ راگبی ، ۳۵
 تونل در طول زمین ، ۱۰۸
 جسم کروی شناور ، ۱۰۸
 حشره‌های روی میز ، ۳۷
 دینامیکی ، جرم متغیر ، ۶۹
 رئیس‌جمهور و نخست‌وزیر ، ۳۶
 رویه با کمترین مساحت حاصل از
 دوران ، ۵۹، ۳۹۷
 زمین منفجر می‌شود ، ۱۱۵
 زنجیر آویخته ، ۵۷، ۴۱۳
 زنجیر روی میز ، ۳۶
 زنجیر مرتعش ، ۱۴۳
 ژئودزیک :
 براستوانه ، ۴۰۲
 برکره ، ۴۰۲، ۴۱۱
 بر مخروط ، ۴۰۲
 ساعت آبی قدیمی ، ۳۵
 ستون مخروطی ، ۳۶
 سرعت فرار ، ۲۶
 سگ-خرگوش ، ۶۰، ۶۳
 سوراخ ایجاد شده در زمین ، ۲۶
 طناب پیچیده بدور تیر چوبی ، ۳۶
 فشار هوا ، ۲۰
 قانون توریچلی ، ۳۵
 قانون جذب لامبرت ، ۲۰
 قانون سرد شدن نیوتون ، ۲۰
 قطره باران در حال سقوط ، ۷۰

خطی، ۵۲، ۷۹
 شکل استاندارد، ۱۲۹
 شکل نرمال، ۱۲۹
 مرتبه، ۳
 معمولی، ۳
 نقاط عادی، ۱۶۵
 نقاط غیر عادی، ۱۶۵، ۱۷۴
 منظم، ۱۷۵
 نامنظم، ۱۷۵
 ریکاتی، ۶۸
 ریکاتی خاص، ۶۸، ۲۷۵
 ریمان، ۲۳۴
 شاخص، ۱۸۵، ۱۸۱، ۱۸۶
 شکار و شکارچی، ۳۱۳
 غیر همگن، ۸۱
 فوق هندسی:
 تعمیم یافته، ۲۳۴
 گاوس، ۱۹۰، ۱۹۴، ۱۹۷، ۲۳۱
 متلاقی، ۱۹۸، ۱۹۹
 کامل، ۴۳
 کمکی، ۹۱، ۳۰۶، ۳۳۸
 لاپلاس، ۳، ۲۷۶
 لاگر، ۱۵۰، ۱۹۹
 لاگرانژ، ۴۱۹
 لواندر، ۳، ۹۰، ۱۴۹، ۱۶۷، ۱۹۸
 ۲۴۴، ۲۷۹
 لینار، ۳۷۷، ۳۸۳
 موج، ۳، ۲۷۶
 دو بعدی، ۲۸۴
 شرودینگر، ۲۱۲
 يك بعدی، ۱۳۷، ۴۲۴
 جواب برنولی، ۱۴۰
 جواب دالامبر، ۱۴۲
 وان در بیل، ۳۲۲، ۳۲۶، ۳۶۵، ۳۷۸
 ۳۸۰

قوتی (استوانه) بر از آب در حال
 دوران، ۳۶
 کشانده، ۵۹
 کوتاهترین زمان، ۲۶، ۱۲۲، ۳۸۹
 ۳۹۹
 گلوله نفتالین، ۳۴
 مخزن، ۳۵، ۳۶
 مسیر قایق، ۶۲، ۶۳
 مقاطع مخروطی هم کانون، ۳۵
 مقدار اولیه، ۱۳۵
 مقدار مرزی، ۱۳۵
 مکانیکی آبل، ۴۵۰
 منحنی همزمان، ۳۲، ۵۷، ۴۵۲
 موج يك بعدی، ۱۴۲
 موشك، ۷۰
 مهره بر دایره، ۳۶
 ناوشکن در پی شکار زیر دریایی، ۳۶
 نسیت، ۷۰
 واکنش شیمیایی، ۱۹
 هم پیرامونی، ۴۰۲، ۴۰۷، ۴۰۸
 ۴۱۳
 مسیرهای متعامد، ۱۲
 معادله (ها):
 استورم-لیوویل، ۱۴۴، ۱۴۷
 انتگرالی، ۴۴۹، ۴۶۲
 آبل، ۴۵۱
 اوپلر، حساب تغییرات، ۳۹۵
 ایری، ۱۷۲، ۲۶۷
 برنولی، ۵۴
 بسل، ← بسل
 چیشف، ۱۵۰، ۱۷۳، ۱۹۵-۱۹۶،
 ۲۲۶
 حرارت، ۳، ۲۷۶
 دیفرانسیل، ۱
 جزئی، ۳ (مراجعه شود به معادله
 گرما، لاپلاس و موج)

- هرمیت ، ۱۵۰ ، ۱۷۳ ، ۲۰۴
همبند:
- اولر ، ۹۳
کوشی ، ۹۳
همگن ، ۴۰ ، ۸۱
معادلات شکار و شکارچی ، ۳۱۵
مقاطع مخروطی هم کانون ، ۳۵
مقدار اولیه ، مسئله ، ۱۳۵
مقدار ایستی ، ۳۹۵
مقدار مرزی ، مسئله ، ۱۳۵
مقدار ویژه ، ۱۳۵ ، ۱۴۸ ، ۲۱۲
منحنی:
- ایستی ، ۳۹۵
چرخزاد ، ۳۱
منحنیهای انتگرال ، ۷
موج:
- دو بعدی ، ۲۸۴
یک بعدی ، ۱۴۲
مینی ماکس ، خاصیت ، ۲۲۸
ناپایدار ، نقطه بحرانی ، ۳۳۵
نابیوستگی جهشی ، ۱۴۰
نابساوی هم پیرامونی ، ۴۰۹
نامیرا ، ارتعاشات ، ۱۰۱
ناهمگن ، معادله ، ۸۱
دستگاه خطی ، ۲۹۷
نظریه پتانسیل ، ۲۷۶
نقطه:
- بحرانی ، ۳۲۴
به طور مجانبی پایدار ، ۳۳۵
پایدار ، ۳۳۵
ساده ، ۳۵۷
منزوی ، ۳۲۴
ناپایدار ، ۳۳۵
در بینهایت ، ۱۹۶
- زینی ، ۳۳۱
عادی ، ۱۶۵
غیرعادی ، ۱۶۵ ، ۱۷۴
منظم ، ۱۷۵
نامنظم ، ۱۷۵
نوسانگر همساز ، ۲۱۱
نیروی:
- مرکزی ، ۱۱۰
پایستار ، ۴۱۵
گرانیش مرکزی ، ۱۱۱
میزا ، ۱۰۳ ، ۳۶۶-۳۶۷
نیم عمر ، ۱۶
نیوتن ، آیزاک ، ۲۰ ، ۳۲ ، ۳۳ ، ۱۱۹
۱۲۰-۱۲۳ ، ۲۵۴
قانون دوم حرکت ، ۱ ، ۶۹ ، ۱۰۱
۱۱۰ ، ۱۳۶ ، ۲۸۳ ، ۴۱۶
قانون سرد شدن ، ۲۰
قانون گرانش ، ۲۶ ، ۱۱۱ ، ۲۹۵ ، ۴۵۴
واکنش:
- مرتبه اول ، ۱۶
مرتبه دوم ، ۱۹
وان درپل ، بالتازار ، ۳۷۸
معادله ، ۳۲۲ ، ۳۲۶ ، ۳۶۵ ، ۳۷۸ ، ۳۸۰
وبر ، و.و. ، ۲۲۱
وجود و یگانگی:
- جوابها ، ۴۶۱
قضیه ، ۴۶۵
وردورث ، و.و. ، ۴۲۶
ولترا ، و.و. ، ۳۱۵
معادلات شکار و شکارچی ، ۳۱۵
- هالی ، ادموند ، ۱۲۱
هرمیت ، ش. ، ۱۵۱ ، ۲۱۳ ، ۴۵۸
تابع ، ۲۰۹ ، ۲۱۱
تعامد ، ۲۰۹

همگن، معادله، ۴۰، ۸۱

تابع، ۴۰

قضیهٔ اوایلر، ۴۲۰

دستگاه خطی، ۲۹۷

همیلتن، و.و.ر.، ۴۱۴، ۴۲۵

اصل، ۳۹۰، ۴۱۵

هوک، رابرت، ۱۲۱

هیلبرت، د.، ۱۵۰، ۲۲۱، ۲۶۵، ۲۸۱

۳۱۴

یک بعدی،

معادلهٔ موج، ۱۳۷، ۴۲۴

موج، ۱۴۲

چند جمله‌ایهای، ۱۷۴، ۲۰۸، ۲۰۹

۲۱۳

تابع مولد، ۲۰۶

فرمول رودریگ، ۲۰۶، ۲۰۸

معادله، ۱۵۰، ۱۷۳، ۲۰۳

هستهٔ تبدیل انتگرالی، ۴۲۸

هم پیرامونی، مسئله، ۴۰۲، ۴۰۷، ۴۰۸

۴۱۳

نامساوی، ۴۰۹

همزمانی، خاصیت، ۳۴، ۵۷، ۴۵۲

همگرایی، انتگرال ناسره، ۴۳۱

همگرایی مطلق، انتگرال ناسره، ۴۳۲

همگردش، ۴۴۸



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)