www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)

جزوه

ریاضی ۱

مولف :

مهندس حسن پور

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فرمول های انتگرال گیری :

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

۲) $\int du = u + c$

۳) $\int a\,du = au + c$

۴) $\int (f(u) \pm g(u))\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$

۵) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$

۶) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

۷) $\int \sin u\,du = -\cos u + c$

۸) $\int \cos u\,du = \sin u + c$

۹) $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + c = \ln|\sec u| + c$

۱۰) $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c$

۱۱) $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c$

۱۲) $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + c = \ln|\csc u - \cot u| + c$

۱۳) $\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$

۱۴) $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$

۱۵) $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$

۱۶) $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + c$

۱۷) $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + c$

۱۸) $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + c$

۱۹) $\int e^u du = e^u + c$

۲۰) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

۲۱) $\int \ln u\,du = u\ln u - u + c$

۲۲) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$

۲۳) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + c$

۲۴) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + c & |u|<a \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + c & |u|>a \end{cases}$

۲۵) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c = \begin{cases} \frac{-1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + c & |u|<a \\ \frac{-1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + c & |u|>a \end{cases}$

۲۶) $\int \sinh u\,du = \cosh u + c$

۲۷) $\int \cosh u\,du = \sinh u + c$

۲۸) $\int \tanh u\,du = \ln|\cosh u| + c$

۲۹) $\int \coth u\,du = \ln|\sinh u| + c$

۳۰) $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + c$

۳۱) $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + c$

۳۲) $\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + c$

۳۳) $\int \operatorname{csch} u \coth u = -\operatorname{csch} u + c$

۳۴) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + c$

۳۵) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{u}{a}$

۳۶) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a}$

حسن پور

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

یادآوری روابط مثلثاتی:

① $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \tan x \cot x = 1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2 \\ 1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{cases}$ ④ $\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$

⑤ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ ⑦ $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

⑥ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

روابط طلایی $\begin{cases} ⑧ \ \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ ⑨ \ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \end{cases}$

توابع هیپربولیک:

① $\sinh u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ ② $\cosh u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ ③ $\tanh u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ ④ $\coth u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$

⑤ $\begin{cases} \cosh u + \sinh u = e^u \\ \cosh u - \sinh u = e^{-u} \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \\ \tanh u \coth u = 1 \end{cases}$

⑦ $\sinh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})$ ⑧ $\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$

⑨ $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

⑩ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1$

⑪ $\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$

⑫ $\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta$

یادآوری اتحادهای مهم:

① $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ② $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

③ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ ④ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

⑤ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ⑥ $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac$

⑦ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

سن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه‌ی مقدار میانگین :

اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، عدد حقیقی مانند c که $a \leq c \leq b$ موجود است به طوری که $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

قضیه :

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و دو عدد M و m به ترتیب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در این بازه باشند

داریم : $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$ نکته : $\int_a^b dx = b-a$

بدون حل انتگرال عبارات زیر را اثبات کنید.

① $\frac{3}{26} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \leq \frac{3}{5}$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \notin [2,5]$ غ ق ق

x	2	5
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{26}$
	Max	min

پس $\rightarrow \frac{1}{26} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{5} \xrightarrow{\int_2^5} \int_2^5 \frac{dx}{26} \leq \int_2^5 \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_2^5 \frac{dx}{5}$

$\frac{(5-2)}{26} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \leq \frac{(5-2)}{5} \rightarrow \frac{3}{26} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+1} \leq \frac{3}{5}$

---

② $0 \leq \int_0^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx \leq 2$

$f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) \rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x) = 0 \rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}x) = 0 \rightarrow x = 2k+1 \xrightarrow{k=0} x = 1$ ق ق

نقطه بحرانی

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	0
	min	Max	min

پس $\rightarrow 0 \leq \sin(\frac{\pi}{2}x) \leq 1 \xrightarrow{\int_0^2} \int_0^2 0\,dx \leq \int_0^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx \leq \int_0^2 1\,dx$

$\rightarrow 0 \leq \int_0^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx \leq 2$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

③ $0 \leq \int_0^1 x^{10}\sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{2}$ $\qquad f(x) = x^{10}\sqrt{1+x^2}$ تابع صعودی است

$\begin{cases} x = 0 & \text{min مطلق} \\ x = 1 & \text{Max مطلق} \end{cases}$ پس در $[0,1]$

x	0	1
$f(x)$	0	$\sqrt{2}$
	min	Max

$\rightarrow$ پس $\rightarrow$ $0 \leq x^{10}\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$$\rightarrow \int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 x^{10}\sqrt{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{2}\,dx \rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{10}\sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{2}$$

---

④ $\frac{35}{8} \leq \int_1^{7/2} (4x - x^2)\,dx \leq 10$ $\qquad f(x) = 4x - x^2 \rightarrow f'(x) = 4 - 2x \rightarrow x = 2$ نقطه بحرانی

x	1	2	$7/2$
$f(x)$	3	4	$7/4$
		Max	min

$\rightarrow \frac{7}{4} \leq 4x - x^2 \leq 4 \xrightarrow{\int_1^{7/2}} \int_1^{7/2} \frac{7}{4}\,dx \leq \int_1^{7/2} (4x - x^2)\,dx \leq \int_1^{7/2} 4\,dx$

$$\rightarrow \left(\frac{7}{2} - 1\right)\left(\frac{7}{4}\right) \leq \int_1^{7/2} (4x - x^2)\,dx \leq \left(\frac{7}{2} - 1\right)4 \rightarrow \frac{35}{8} \leq \int_1^{7/2} (4x - x^2)\,dx \leq 10$$

---

⑤ $\frac{1}{9} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x^2+2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \notin [2,5]$ غ ق ق

x	2	5
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{27}$
	Max	min

$\rightarrow \frac{1}{27} \leq \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{6} \xrightarrow{\int_2^5} \int_2^5 \frac{dx}{27} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2} \leq \int_2^5 \frac{dx}{6}$

$$\rightarrow \frac{1}{9} \leq \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}$$

---

⑥ $\frac{2}{33} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^5} \leq 2$ $\qquad f(x) = \frac{1}{1+x^5} \rightarrow f'(x) = \frac{-5x^4}{(1+x^5)^2} = 0 \rightarrow x = 0$ نقطه بحرانی

x	0	2
$f(x)$	1	$\frac{1}{33}$
	Max	min

$\rightarrow \frac{1}{33} \leq \frac{1}{1+x^5} \leq 1 \xrightarrow{\int_0^2} \int_0^2 \frac{dx}{33} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^5} \leq \int_0^2 dx$

$$\rightarrow \frac{2}{33} \leq \int_0^2 \frac{dx}{1+x^5} \leq 2$$

تعیین سؤالات مربوط به این بحث در پشت ۳ برگه

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حد مجموع :

مراحل کار :

① عبارت داخل پرانتز جلوی حد را به صورت $\sum_{i=1}^{n} \cdots$ می‌نویسیم

② حدود قرار می‌دهیم $a=0$ ، $b=1$ (یعنی کران‌های انتگرال) پس $\Delta x = \frac{1}{n}$ و $x_i = \frac{i}{n}$ را ظاهر می‌کنیم و از $\frac{1}{n}$ فاکتور گرفته و به بیرون $\sum$ انتقال می‌دهیم. عبارت جلوی $\sum$ همان $f\left(\frac{i}{n}\right)$ می‌باشد.

③ با استفاده از $f\left(\frac{i}{n}\right)$ ضابطه‌ی $f(x)$ در مرحله‌ی بالا به دست می‌آید و با استفاده از $\int_0^1 f(x)dx$ مقدار حد داده شده به دست می‌آید.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)i}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx \overset{\frac{i}{n}=x}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

---

① $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+i^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

متن سال ۸۵

② $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right) \longrightarrow \sin\frac{n\pi}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\pi\sin\frac{i\pi}{n} \overset{i/n=x}{=\!=\!=} \int_0^1 \pi\sin\pi x\,dx = -\cos\pi x\Big|_0^1 = 2$$

حسن پور

---

③ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{25n^2+60n+36}+\frac{3n}{25n^2+120n+144}+\frac{3n}{25n^2+180n+324}+\cdots+\frac{3n}{121n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3n}{25n^2+60ni+36i^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{3n^2}{25n^2+60ni+36i^2}$$ صورت و مخرج را به n^2 تقسیم می‌کنیم

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{25+60\frac{i}{n}+36\left(\frac{i}{n}\right)^2} \overset{i/n=x}{=\!=\!=} \int_0^1 \frac{3dx}{25+60x+36x^2} = \int_0^1 \frac{3dx}{(5+6x)^2}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\xrightarrow[6dx=du]{5+6x=u} \int_5^{11} \frac{3/6\, du}{u^2} = \frac{-1}{2} u^{-1} \Big|_5^{11} = \frac{3}{55}$$

سال ۸۴ شیخی

④ $$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\pi\right) \qquad \cos\frac{n\pi}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \pi\cos\frac{i}{n}\pi \xlongequal{i/n=x} \int_0^1 \pi\cos\pi x\, dx = \frac{\pi}{\pi}\sin\pi x\Big|_0^1 = 0$$

سال ۸۴ شیخی

⑤ $$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\sqrt{1}}{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}} \xlongequal{f(x)=\sqrt{x}} \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

⑥ $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}\left(\overset{1^2}{1} + 2^2 + \cdots + n^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} \times \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

$$= 0 \times \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = 0 \times \int_0^1 x^2\, dx = 0 \times \frac{1}{3} = 0$$

⑦ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \xlongequal{i/n=x} \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

⑧ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^5+\cdots+n^5}{n^6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^5 + \left(\frac{2}{n}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^5\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^5 = \int_0^1 x^5\, dx = \frac{1}{6}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑨ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$ می‌دانیم : $x-1<[x]\leqslant x$

طبق قضیه‌ی فشار : $\left(\dfrac{x+2x+\cdots+nx}{n^2}-\dfrac{n}{n^2}\right)<\dfrac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}\leqslant\dfrac{x+2x+\cdots+nx}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+2x+\cdots+nx}{n^2}-\cancelto{0}{\frac{n}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+2+\cdots+n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x(n(n+1))}{2n^2}=\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}=\frac{x}{2}$$

نکته : $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

هدف از طرح این مثال این است که با حد مجموع اشتباه گرفته نشود.

---

⑩ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2(1+(\frac{1}{n})^2)}}+\frac{1}{\sqrt{n^2(1+(\frac{2}{n})^2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2(1+(\frac{n}{n})^2)}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\quad\begin{cases}x=\tan\theta\\ dx=\sec^2\theta\,d\theta\end{cases}=\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}d\theta=\int_0^{\pi/4}\sec\theta\,d\theta=\ln|\tan\theta+\sec\theta|\Big|_0^{\pi/4}=\ln(1+\sqrt{2})$$

فنی سال ۸۴

⑪ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{2+4n}{n^4}}+\sqrt[3]{\dfrac{4+4n}{n^4}}+\cdots+\sqrt[3]{\dfrac{2n+4n}{n^4}}\right)$ نکته : $\sqrt[3]{n^4}=n\sqrt[3]{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{2+4n}{n}}+\sqrt[3]{\frac{4+4n}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{2n+4n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{2(1+2n)}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2(2+2n)}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{2(n+2n)}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{\frac{i+2n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{i}{n}+2}\overset{i/n=x}{=\!=\!=}\int_0^1\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x+2}\,dx$$

$$=\sqrt[3]{2}\int_0^1(x+2)^{1/3}dx=\sqrt[3]{2}\,\frac{(x+2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Big|_0^1=\sqrt[3]{2}\,\frac{3}{4}(x+2)^{4/3}\Big|_0^1$$

$$=\sqrt[3]{2}\times\frac{3}{4}\left(3^{4/3}-2^{4/3}\right)$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\frac{7}{2} \leqslant \int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx \leqslant \frac{35}{2}$ $\qquad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$\rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ نقاط بحرانی

x	$\frac{1}{2}$	1	3	4
$f(x)$	$\frac{33}{8}$	5	1 min	5 Max

$\rightarrow 1 \leqslant x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \leqslant 5$

$\xrightarrow{\int_{1/2}^{4}} \int_{1/2}^{4} dx \leqslant \int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx \leqslant \int_{1/2}^{4} 5\, dx$

$\rightarrow 4 - \frac{1}{2} \leqslant \int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx \leqslant 5(4 - \frac{1}{2}) \rightarrow \frac{7}{2} \leqslant \int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx \leqslant \frac{35}{2}$

---

⑧ $2e^{-1/4} < \int_{0}^{2} e^{(x^2 - x)}\, dx < 2e^2$ $\qquad f(x) = e^{x^2 - x} \rightarrow f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x} = 0$

$\xrightarrow{e^{x^2-x} \geqslant 0 \text{ همواره}} 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ نقطه بحرانی

x	0	$1/2$	2
$f(x)$	1	$e^{-1/4}$ min	e^2 Max

$e^{-1/4} < e^{x^2-x} < e^2 \xrightarrow{\int_0^2} \int_0^2 e^{-1/4}\, dx < \int_0^2 e^{x^2-x}\, dx < \int_0^2 e^2\, dx \rightarrow 2e^{-1/4} < \int_0^2 e^{x^2-x}\, dx < 2e^2$

---

⑨ $32 < \int_{-4}^{2} (\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7)\, dx < 204$ $\qquad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7$

$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$ نقاط بحرانی

x	-4	-3	1	2
$f(x)$	$\frac{41}{3}$	34 Max	$\frac{16}{3}$ min	$\frac{23}{3}$

$\rightarrow \frac{16}{3} < \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7 < 34$

$\xrightarrow{\int_{-4}^{2}} \int_{-4}^{2} \frac{16}{3}\, dx < \int_{-4}^{2} (\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7)\, dx < \int_{-4}^{2} 34\, dx$

$\rightarrow 32 < \int_{-4}^{2} (\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 7)\, dx < 204$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید:

① $\int_{-1.5}^{1.5} \left(2[x]x - [x]\right) dx$

$$y = 2[x]x - [x] = \begin{cases} y = -4x+2 & -1.5 \leq x < -1 \\ y = -2x+1 & -1 \leq x < 0 \\ y = 0 & 0 \leq x < 1 \\ y = 2x-1 & 1 \leq x < 1.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1.5}^{1.5} \left(2[x]x - [x]\right) dx = \int_{-1.5}^{-1} (-4x+2)\,dx + \int_{-1}^{0} (-2x+1)\,dx + \int_{0}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{1.5} (2x-1)\,dx$$

$$= \left(\frac{-4x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1.5}^{-1} + \left(\frac{-2x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + 0 + \left(\frac{2x^2}{2} - x\right)\Big|_{1}^{1.5} = 6.25$$

---

② $\int_0^2 [2x+1]\,dx$

نکته: $[x+m] = [x] + m$ اگر m عدد صحیح باشد

$$= \int_0^2 [2x]\,dx + \int_0^2 1\,dx = \int_0^{1/2} [2x]\,dx + \int_{1/2}^{1} [2x]\,dx + \int_1^{3/2} [2x]\,dx + \int_{3/2}^{2} [2x]\,dx + \int_0^2 dx$$

$$y = [2x] = \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2x < 1 \longrightarrow [2x] = 0 \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 \xrightarrow{\times 2} 1 \leq 2x < 2 \longrightarrow [2x] = 1 \\ 1 \leq x < \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 \leq 2x < 3 \longrightarrow [2x] = 2 \\ \frac{3}{2} \leq x < 2 \xrightarrow{\times 2} 3 \leq 2x < 4 \longrightarrow [2x] = 3 \end{cases}$$

نحوه‌ی بازه بندی:
معکوس ضریب متغیر داخل جزء صحیح: برای $[2x]$ بازه‌ها را $\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم.

$$= \int_0^{1/2} 0\,dx + \int_{1/2}^{1} 1\,dx + \int_1^{3/2} 2\,dx + \int_{3/2}^{2} 3\,dx + \int_0^2 dx = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{2} - 1\right) + 3\left(2 - \frac{3}{2}\right) + 2 = 5$$

---

③ $\int_{-1}^{3} |x^2 - 2x|\,dx$

$x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$

x	-1		0		2		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$= \int_{-1}^{0} +(x^2 - 2x)\,dx + \int_0^2 -(x^2 - 2x)\,dx + \int_2^3 +(x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= \left(0 - \left(\frac{-1}{3} - 1\right)\right) + \left(\left(4 - \frac{8}{3}\right) - 0\right) + \left(\left(\frac{27}{3} - 9\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right) = \frac{10}{3}$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

④ $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\tan x+1|\,dx$ $\qquad \tan x+1=0 \rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0} x=-\frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
$f(x)$	0	+	2

$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\tan x+1)\,dx=\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\tan x\,dx}_{\text{تابع فرد}}+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}dx=0+x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$$

نکته: اگر $f(x)$ فرد باشد: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

---

⑤ $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} |\sec x-2|\,dx$ $\qquad \sec x-2=0 \Rightarrow \frac{1}{\cos x}=2 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$\xrightarrow{k=0} x=\pm\frac{\pi}{3}$

x	$-\frac{\pi}{3}$		0		$\pi/3$
$f(x)$	0	−	−1	−	0

$$=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}(\sec x-2)\,dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sec x-2)\,dx$$

$$=\left(-\ln|\sec x+\tan x|+2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0}-\left(\ln|\sec x+\tan x|-2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-\ln(1)+0\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\frac{2\pi}{3}-\ln|2+\sqrt{3}|+\frac{2\pi}{3}=\ln\left|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right|+\frac{4\pi}{3}$$

نکته: $\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|$

فیزیک ۸۵

⑥ $\int_{0}^{\ln 3}\sqrt{e^{2x}+e^{3x}}\,dx$

$$=\int_{0}^{\ln 3}\sqrt{e^{2x}(1+e^{x})}\,dx \xlongequal{e^{2x}=(e^{x})^2} \int_{0}^{\ln 3} e^{x}\sqrt{1+e^{x}}\,dx \qquad \begin{cases}1+e^{x}=u \rightarrow \begin{cases}x=0\rightarrow u=2\\ x=\ln 3\rightarrow u=4\end{cases}\\ e^{x}dx=du\end{cases}$$

$$=\int_{2}^{4}\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{2}^{4}=\frac{2}{3}\left(\sqrt[2]{4^3}-\sqrt[2]{2^3}\right)=\frac{2}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right)$$

---

⑦ $\int_{0}^{2/3}|3x^2-4x+1|\,dx$ $\qquad 3x^2-4x+1=0 \rightarrow x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0$

$\rightarrow (x-1)(x-\frac{1}{3})=0 \rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=1/3\end{cases}$

x	0		$1/3$		$2/3$
$f(x)$		+	0	−	0

$$=\int_{0}^{1/3}(3x^2-4x+1)\,dx+\int_{1/3}^{2/3}-(3x^2-4x+1)\,dx$$

$$=\left(x^3-2x^2+x\right)\Big|_{0}^{1/3}-\left(x^3-2x^2+x\right)\Big|_{1/3}^{2/3}=\frac{2}{9}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑧ $\int_0^{\pi} [2\sin x]\,dx$

$$= \int_0^{\pi/6} \underbrace{[2\sin x]}_{0}\,dx + \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \underbrace{[2\sin x]}_{1}\,dx + \int_{5\pi/6}^{\pi} \underbrace{[2\sin x]}_{0}\,dx = x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3}$$

---

⑨ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ نکته: $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,dx}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x\,dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$$

فرض: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} \rightarrow 1 = \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} + \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} \xrightarrow{\int_0^{\frac{\pi}{2}}}$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = I + I \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{\pi}{4}$$

فنی سال ۱۳

⑩ $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\sin^{12} x\,dx$ $\begin{cases} \sin^{12} x & \text{تابع زوج} \\ \ln\frac{1+x}{1-x} & \text{تابع فرد} \end{cases}$

نکته: تابع فرد = تابع فرد × تابع زوج

نکته: $\int_{-a}^{a} \text{تابع فرد}\,dx = 0$

$$\Rightarrow \int_{-1/3}^{1/3} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\sin^{12} x\,dx = 0$$

---

⑪ $\int_0^3 (-1)^{[x]}\,dx$ نکته: $\int_0^n (-1)^{[x]}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$

$$= \int_0^1 (-1)^0\,dx + \int_1^2 (-1)^1\,dx + \int_2^3 (-1)^2\,dx = x\Big|_0^1 - x\Big|_1^2 + x\Big|_2^3 = 1$$

---

⑫ $\int_0^{\pi/4} \cos[x]\,dx$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos 0\,dx = \int_0^{\pi/4} 1\,dx = x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

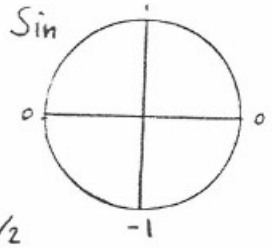
حسن پور

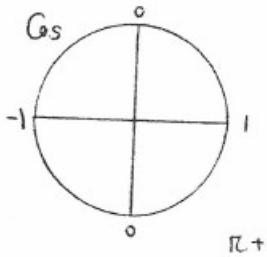
---

⑬ $\int_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{x}\right] dx = \int_{1/2}^{1} 1\,dx = x\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 1$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۴) $\int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|\, dx$





$$= \int_0^{\pi/4} -(\sin x - \cos x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x)dx + \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$+ \int_{\pi+\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} -(\sin x - \cos x)dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -(\sin x - \cos x)dx = (\cos x - \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- (\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - (\cos x + \sin x)\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} + (\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} + (\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= (\sqrt{2}-1) - (1-\sqrt{2}) - (1-1) - (-\sqrt{2}+1) + (-1+\sqrt{2}) + (1+1) = 4\sqrt{2}$$

$0 < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow \cos x > \sin x \qquad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin x > \cos x$

ناحیه‌ی دوم $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$ ناحیه‌ی چهارم $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

---

(۱۵) تابع پیوسته‌ی f را به گونه‌ای بیابید که :

$$\int_0^x f(x)dx = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{1}{8}x^{16} + \frac{1}{9}x^{18} + c$$

۸۵ فیزیک

حل (I) $\int_x^1 t^2 f(t)dt = -\int_x^1 -t^2 f(t)dt = \int_1^x -t^2 f(t)dt$ (II) $\int_0^x f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^x f(x)dx$

$\xrightarrow{\text{از I و II}}$ $\underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{\text{عدد است}} + \int_1^x f(x)dx = \int_1^x -t^2 f(t)dt + \frac{1}{8}x^{16} + \frac{1}{9}x^{18} + c$ $\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}$

$$0 + f(x) = -x^2 f(x) + 2x^{15} + 2x^{17} \Rightarrow f(x) = \frac{2x^{15}}{\cancel{1+x^2}}(\cancel{1+x^2}) \Rightarrow f(x) = 2x^{15}$$

نکته: مشتق انتگرال

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{f(x)} h(t)\,dt = f'(x)\,h(f(x)) - g'(x)\,h(g(x))$$

---

(۱۶) مطلوب است تعیین تابع غیرصفر f به طوری که

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}\,dt$$

۸۴ سال فنی

$\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $2f'(x)\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)}\frac{\sin x}{2+\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin x}{2+\cos x}$ $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\sin x\, dx}{2+\cos x} \quad \begin{cases} 2+\cos x = u \\ -\sin x\, dx = du \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{-1}{2}\ln|2+\cos x| + c \longrightarrow f(x) = \frac{-1}{2}\ln|2+\cos x| + c$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۷) فرض کنید $F(x)=\int_1^x te^{t^2}dt$ مطلوب است محاسبه‌ی $\int_0^1 tF(t)\,dt$:

۸۵ فیزیک

حل: $F(t)=\int_1^t te^{t^2}dt \Rightarrow F(t)=\frac{1}{2}\int_1^t 2te^{t^2}dt=\frac{1}{2}e^{t^2}\Big|_1^t=\frac{1}{2}(e^{t^2}-e)$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t(e^{t^2}-e)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 te^{t^2}dt-\frac{e}{2}\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{4}e^{t^2}\Big|_0^1-\frac{e}{2}\times\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=-\frac{1}{4}$$

سال ۸۵ فنی

(۱۸) الف) اولین قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل انتگرال را بدون اثبات، بیان کنید.

فرض کنیم f بر بازه‌ی I پیوسته بوده و $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ که در آن a نقطه‌ی ثابتی از I و x نقطه‌ی متغیر از I باشد

در این صورت $F(x)$ بر I مشتق پذیر است و داریم $F'(x)=f(x)$

ب) تابع پیوسته و مثبت f را چنان بیابید که $f(2)=4$ ، $\int_0^x f(t)\,dt=f^2(x)$

حل: $\xrightarrow{\text{مشتق}} f(x)=2f(x)f'(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x+c$

$f(2)=4 \Rightarrow f(2)=4=\frac{1}{2}(2)+c \Rightarrow c=3 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x+3$

مطلوب است محاسبه‌ی حدهای زیر:

فنی سال ۸۴

(۱) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$

حل: $=\frac{1}{h}\int_0^h\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\frac{1}{h}\sinh^{-1}u\Big|_0^h=\frac{1}{h}\left(\sinh^{-1}(h)-\sinh^{-1}(0)\right)$

فنی سال ۸۵

(۲) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$

حل: $=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt}{\sin x}=\frac{0}{0}$ بهم

$\xrightarrow{hop}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{1-\sin^2 x}-0}{\cos x}=1$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تجربی ۸۴

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_1^{\cos 2x} \sqrt{1-t^2}\,dt}{x^3} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

حل: $\overset{hop}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sin 2x\sqrt{1-\cos^2 2x}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sin^2 2x}{3x^2} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$\overset{hop}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-8\sin 2x\cos 2x}{6x} \overset{2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4\sin 4x}{6x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$\overset{hop}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4\times 4\cos 4x}{6} = \dfrac{-16}{6} = \dfrac{-8}{3}$

فنی ۸۳

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{1-\cosh x}\int_0^x \dfrac{dt}{1+t^6} = \dfrac{0}{0}$ مبهم $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x\int_0^x \frac{dt}{1+t^6}}{1-\cosh x}$

حل: $\overset{hop}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x\int_0^x \frac{dt}{1+t^6} + \frac{\sinh x}{1+x^6}}{-\sinh x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$\overset{hop}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x\int_0^x \frac{dt}{1+t^6} + \frac{\cosh x}{1+x^6} + \frac{\cosh x(1+x^6) - 6x^5\sinh x}{(1+x^6)^2}}{-\cosh x}$

$= \dfrac{0\int_0^0 \frac{dt}{1+t^6} + \frac{1}{1+0^6} + \frac{1(1+0^6)-0}{(1+0^6)^2}}{-1} = -2$

فنی ۸۴

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^{\sin x} (e^t-1)\,dt}{e^x-x-1}$

$\int_0^{\sin x} (e^t-1)\,dt = e^t - t\Big|_0^{\sin x} = e^{\sin x} - \sin x - e^0 - 0 = e^{\sin x} - \sin x - 1$

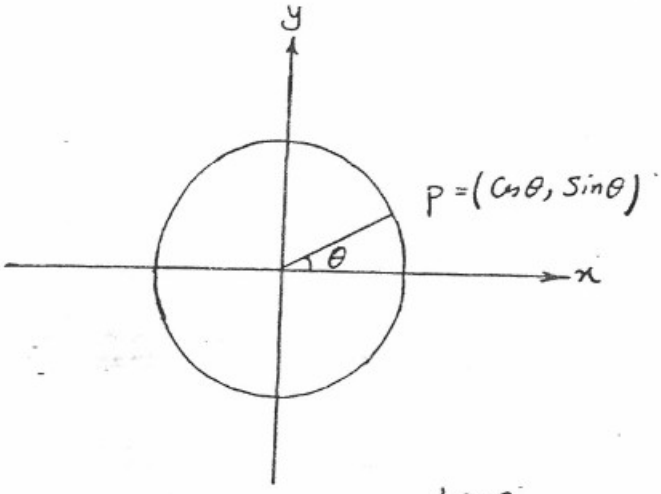
نکته: $-1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow e^{-1} \leq e^{\sin x} \leq e$ کراندار ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ کراندار

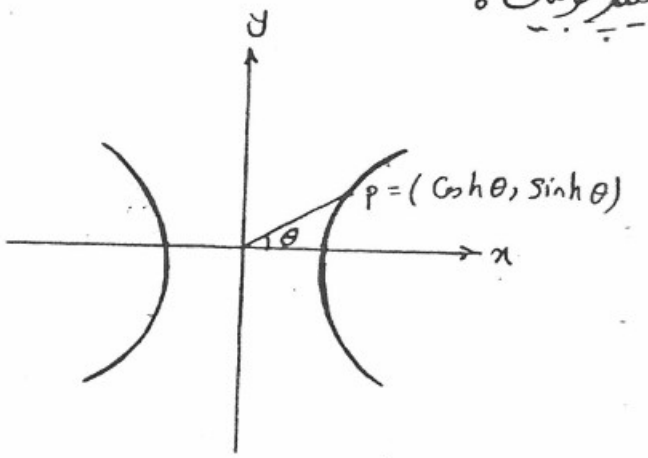
پس: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\sin x} - \sin x - 1}{e^x - x - 1} = 0$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

توابع هیپربولیک :





$x^2+y^2=1 \qquad P: \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases}$

نقطه p بر دایره یکه $x^2+y^2=1$ قرار دارد .

$x^2-y^2=1$

نقطه p بر روی هذلولی یکه $x^2-y^2=1$ قرار دارد .

← ترکیبات خاصی از e^x و e^{-x} آنقدر در ریاضیات ظاهر می شود که نام خاصی یافته اند مقادیر تابعی آنها به مختصات نقاط یک هذلولی متساوی الاضلاع مربوط اند به همان صورت که مقادیر توابع مثلثاتی نظیر به مختصات نقاط یک دایره مربوط اند

← توابع مثلثاتی و هذلولی شبیه به هم اند ولی تفاوت های اساسی هم دارند توابع هذلولوی برخلاف توابع مثلثاتی ، نه کراندار و نه متناوب هستند

۱) تابع سینوس هیپربولیک :

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \sinh(-x) = -\sinh x$ تابع فرد $\qquad$ برد : $(-\infty, +\infty)$ $\qquad$ دامنه : $\mathbb{R}$

۲) تابع کسینوس هیپربولیک :

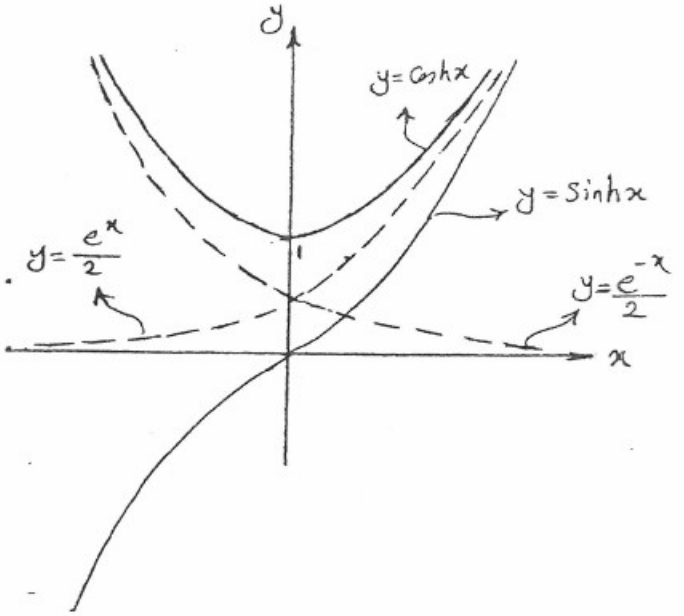
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \cosh(-x) = \cosh x$ تابع زوج $\qquad$ برد : $[1, \infty)$ $\qquad$ دامنه : $\mathbb{R}$

$\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

$\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



$y = \cosh x$

$\begin{cases} [0,+\infty) & \text{صعودی} \\ (-\infty,0] & \text{نزولی} \\ x=0 \to y=1 & \min \text{ مطلق} \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty \\ \text{تقعر رو به بالا} \end{cases}$

$y = \sinh x$

$\begin{cases} (-\infty,+\infty) & \text{صعودی} \\ (0,+\infty) & \text{تقعر رو به بالا} \\ (-\infty,0) & \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \end{cases}$

اتحادها:

① $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

② $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

③ $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

④ $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

⑤ : $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1$

نکته: برای راحتی در حفظ کردن اتحادهای هیپربولیک در فرمول های مشابه کافیست بجای نسبت های مثلثاتی، منفی نسبت های هیپربولیک قرار داده شود. بغیر از کسینوس

⑥ : $\cosh x + \sinh x = e^{x}$

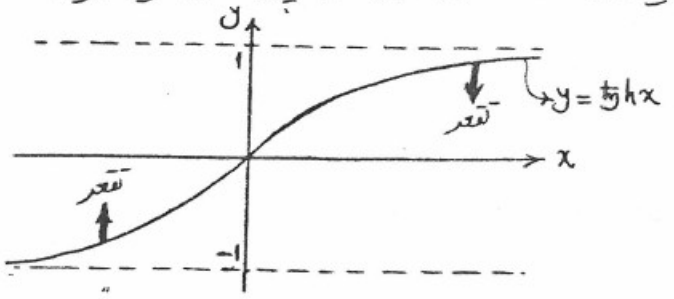
⑦ : $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

⑧ $\dfrac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x} = e^{-2x}$

۳- تابع تانژانت هیپربولیک:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

توابع $\sinh x$ و $\cosh x$ هر دو بر بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و مشتق پذیرند و $\cosh x$ هرگز صفر نمی شود پس $\operatorname{tgh} x$ نیز در این بازه پیوسته و مشتق پذیر است.



$\begin{cases} x>0 & \text{مثبت} \\ x=0 & \text{صفر} \\ x<0 & \text{منفی} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{اکسترمم ندارد} \\ \text{همواره صعودی} \\ x=0 \text{ نقطه عطف} \end{cases}$

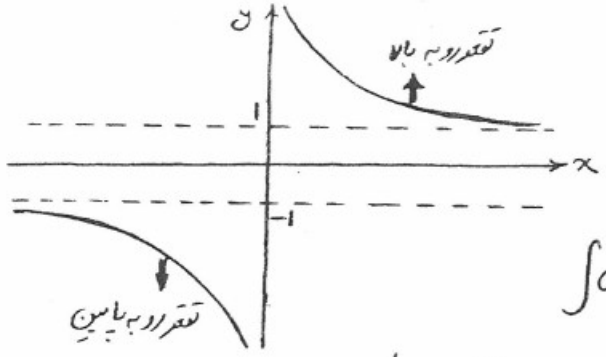
$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x > 0$ $\quad \operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$ تابع فرد $\quad$ برد: $(-1,1)$

① $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tgh}(x) = 1$ $\quad$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{tgh}(x) = -1$ مجانب های افقی $\quad \int \operatorname{tgh} x\, dx = \ln(\cosh x) + C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴ـ تابع کتانژانت هیپربولیک :

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$



مجانب افقی $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \coth x = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \coth x = -1 \end{cases}$

مجانب قائم $\begin{cases} \sinh x = 0 \\ \boxed{x=0} \end{cases}$

$$\int \coth x \, dx = \ln(\sinh x) + C$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x < 0$$ همواره نزولی

$\coth(-x) = -\coth x$ تابع فرد

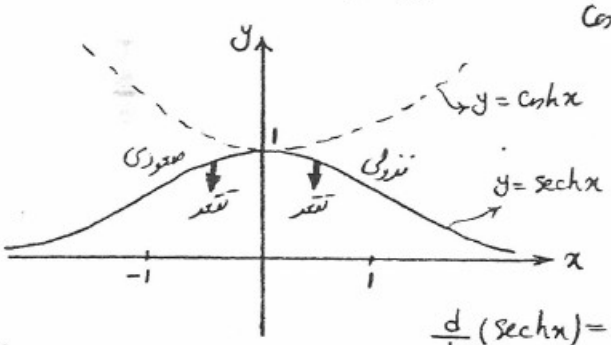
برد : $(-\infty,-1)\cup(+1,\infty)$

اکسترمم ندارد
نقطه عطف ندارد

۵ـ تابع سکانت هیپربولیک

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$ تابع زوج

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \xrightarrow{\div \cosh^2 x} 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$



max مطلق $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

نقطه عطف ندارد
مجانب قائم ندارد

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{sech} x = 0 \Rightarrow y = 0$ مجانب افقی

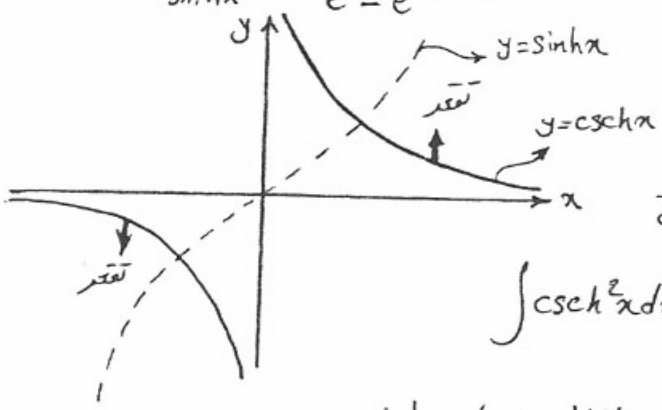
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$ دامنه : $(-\infty,+\infty)$ برد : $[0,1]$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + C$$

۶ـ کسکانت هیپربولیک

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$ تابع فرد



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow 1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} < 0$$ نزولی

$$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + C \quad , \quad \int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + C$$

دامنه : $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ برد : $\mathbb{R} - \{0\}$ اکسترمم ندارد

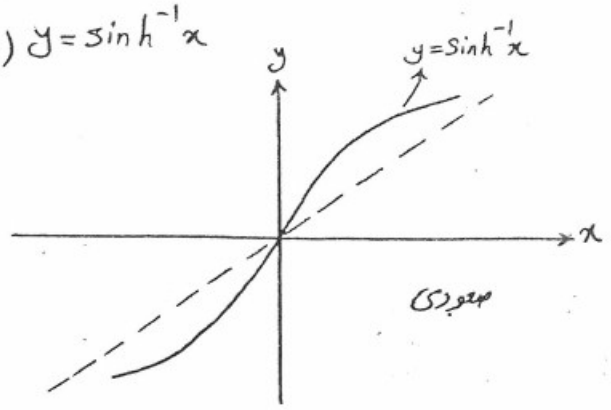
$e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{csch} x = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ مجانب افقی

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

توابع هذلولوی معکوس :

۱) $y=\sinh^{-1}x$



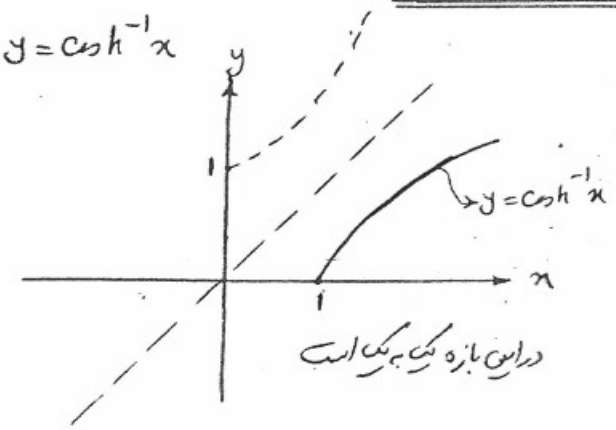
$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sinh^{-1}x+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$\sinh(\sinh^{-1}x)=x$$

۲) $y=\cosh^{-1}x$

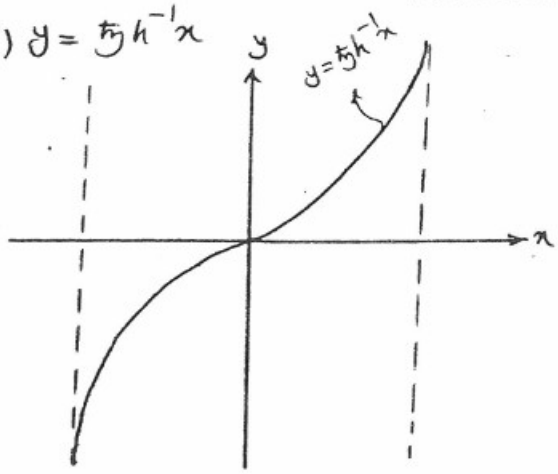


$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad(x>1)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$\cosh(\cosh^{-1}x)=x$$

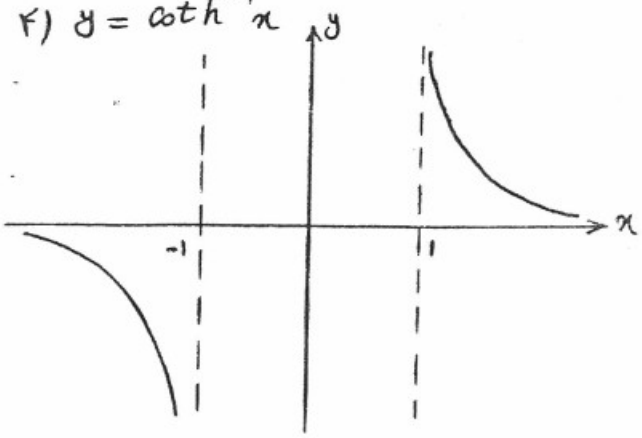
۳) $y=\tanh^{-1}x$



$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2}\quad(-1<x<1)$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

۴) $y=\coth^{-1}x$



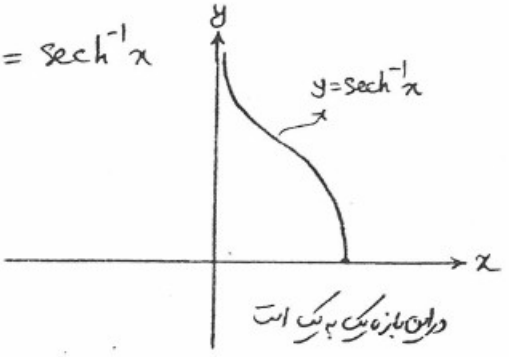
$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2}\quad(|x|>1)$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}+C$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $y = \operatorname{sech}^{-1} x$

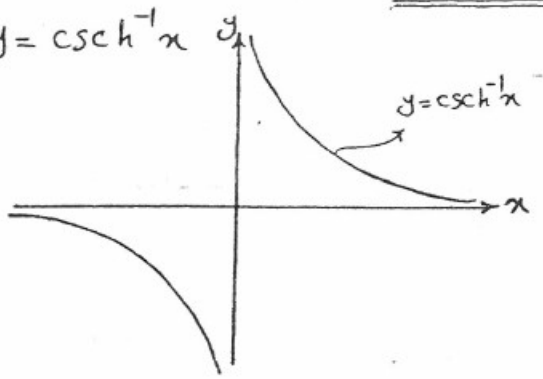


$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad 0<x<1$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

---

۶) $y = \operatorname{csch}^{-1} x$



$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \qquad x\neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{-1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\frac{|x|}{a} + C$$

اثبات های مهم:

۱) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

اثبات $\Rightarrow$ $y=\sinh^{-1}\frac{x}{a} \xrightarrow{I} \sinh y = \frac{x}{a}$ II $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a\cosh y}$

$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\pm a\sqrt{\sinh^2 y+1}} \xrightarrow{\text{چون } \cosh y>0} \frac{d}{dx}\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{+a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ★

---

۲) $\sinh^{-1}\frac{x}{a} = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ $\qquad$ اگر $a=1 \Rightarrow \sinh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

اثبات $\Rightarrow$ فرض: $\frac{x}{a} = \sinh y \rightarrow e^y = \sinh y + \cosh y = \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$

$\xrightarrow{\ln} y = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} \Rightarrow \sinh^{-1}\frac{x}{a} = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$

---

۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a}$ $\qquad$ اثبات: کافیست از عبارت ★ که در بالا اثبات شده انتگرال بگیریم.

---

۴) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\qquad$ اثبات: همانند اثبات اول می باشد.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $\text{th}^{-1}x = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{\text{فرض}} x = \text{th}\,y = \frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} \Rightarrow (e^{2y}+1)x = e^{2y}-1$

$\xrightarrow{\text{از } e^{2y} \text{ فاکتور}} e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{\text{Ln می‌گیریم}} 2y = \text{Ln}\,\frac{1+x}{1-x} \rightarrow \text{th}^{-1}x = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,\frac{1+x}{1-x}$ ★★

۶) $\frac{d}{dx}\,\text{th}^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$ طریقه اثبات: کافیست از رابطه ★★ مشتق گرفته شود.

۷) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\,\text{coth}^{-1}\frac{x}{a} + C \xrightarrow{\text{فرض}} y = \text{coth}^{-1}\frac{x}{a} \rightarrow \frac{x}{a} = \text{coth}\,y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,\text{coth}^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{a\,\text{cse}^2 y} = +\frac{1}{a(1-\text{coth}^2 y)} = \frac{1}{a(1-\frac{x^2}{a^2})}$

$\frac{d}{dx}(\text{coth}^{-1}\frac{x}{a}) = \frac{a}{a^2-x^2} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\,\text{coth}^{-1}\frac{x}{a} + C$

۸) $\text{coth}^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,\frac{x+a}{x-a} \xrightarrow{\text{اثبات}} y = \text{coth}^{-1}\frac{x}{a} \rightarrow \text{coth}\,y = \frac{x}{a} \rightarrow \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} = \frac{x}{a}$

$e^{2y} = \frac{x+a}{x-a} \xrightarrow{\text{Ln}} y = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,\frac{x+a}{x-a} \rightarrow \text{coth}^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,\frac{x+a}{x-a}$

۹) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\,\text{sech}^{-1}\frac{|x|}{a} \Rightarrow y = \text{sech}^{-1}\frac{x}{a} \rightarrow \frac{x}{a} = \text{sech}\,y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,\text{sech}^{-1}\frac{x}{a} \Rightarrow \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-a\,\text{sech}\,y\,\text{th}\,y} = -\frac{1}{a}\,\frac{1}{\text{sech}\,y\sqrt{1-\text{sech}^2 y}} = \frac{-1}{a\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$

$\frac{d}{dx}\,\text{sech}^{-1}\frac{x}{a} = -\frac{a}{x\sqrt{a^2-x^2}} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\,\text{sech}^{-1}\frac{x}{a}$

10) $\text{sech}^{-1}x = \text{Ln}\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \xrightarrow{\text{فرض}} y = \text{sech}^{-1}x \rightarrow x = \text{sech}\,y \rightarrow x = \frac{2}{e^{y}+e^{-y}}$

$xe^{2y} - 2e^{y} + x = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4x^2$

$e^{y} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4x^2}}{2x} \xrightarrow[\text{Ln می‌گیریم}]{\text{مثبت}} y = \text{Ln}\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \rightarrow \text{sech}^{-1}x = \text{Ln}\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مشتق توابع زیر را بدست آورید (هدف از نوشتن این سؤالات آشنایی با انواع مشتق هایی است که در امتحانات آمده است)

شیمی ۸۵ ① $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$

حل: $\ln f(x)=\ln(\sin x)^{\cos x} \longrightarrow \ln f(x)=\cos x\ln(\sin x)$

$$\longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos x\cos x}{\sin x} \longrightarrow f'(x)=(\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$$

شیمی ۸۵ ② $f(x)=\dfrac{(x^2+1)\sqrt[3]{x+1}}{x(x^2-1)^2\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \ln f(x)=3\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\ln x-2\ln(x^2-1)-\frac{1}{3}\ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{6x}{x^2+1}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x}-\frac{4x}{x^2-1}-\frac{1}{3x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+1)\sqrt{x+1}}{x(x^2-1)\sqrt[3]{x}}\left(\frac{6x}{x^2+1}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{4x}{x^2-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{3x}\right)$$

تیرماه ۸۵ ③ $f(x)=\left[\tan^{-1}(x^2)\times e^{\sin x}\times\tan(x^2)\right]^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \ln y=\frac{4}{3}\ln\left(\tan^{-1}x^2\times e^{\sin x}\times\tan x^2\right)$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{4}{3}\left[\ln(\tan^{-1}x^2)+\ln e^{\sin x}+\ln(\tan x^2)\right] \qquad \frac{y'}{y}=\frac{4}{3}\left[\frac{\frac{2x}{1+x^4}}{\tan^{-1}x^2}+\cos x+\frac{2x(1+\tan^2 x^2)}{\tan x^2}\right]$$

$$y'=\frac{4}{3}\left(\tan^{-1}x^2\times e^{\sin x}\times\tan x^2\right)^{4/3}\left[\frac{2x}{(1+x^4)\tan^{-1}x^2}+\cos x+\frac{2x(1+\tan^2 x^2)}{\tan x^2}\right]$$

فنی ۸۴ ④ $f(x)=\displaystyle\int_{\tan^{-1}x}^{\sin^{-1}\sqrt{x}}\frac{t^6\,dt}{1+t^4}$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}\times\frac{(\sin^{-1}\sqrt{x})^6}{1+(\sin^{-1}\sqrt{x})^4}-\frac{1}{1+x^2}\times\frac{(\tan^{-1}x)^6}{1+(\tan^{-1}x)^4}$$

شیمی ۸۵ ⑤ $f(x)=x\tan^{-1}(\ln x)$

حسن پور

$$f'(x)=\tan^{-1}(\ln x)+\frac{\frac{1}{x}\times x}{1+(\ln x)^2} \longrightarrow f'(x)=\tan^{-1}(\ln x)+\frac{1}{1+(\ln x)^2}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴ فنی

(۶) $f(x)=\dfrac{\sinh(\sqrt{x}+1)\,e^{2x}\tan^{-1}x}{(1+x^4)^3\sqrt[3]{x^2+6}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln f(x)=\ln\left[\sinh(\sqrt{x}+1)\right]+\ln e^{2x}+\ln(\tan^{-1}x)-3\ln(1+x^4)-\frac{1}{3}\ln(x^2+6)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cosh(\sqrt{x}+1)}{\sinh(\sqrt{x}+1)}+2+\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\tan^{-1}x}-\frac{12x^3}{1+x^4}-\frac{1}{3}\times\frac{2x}{x^2+6}$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\coth(\sqrt{x}+1)+2+\frac{1}{(x^2+1)\tan^{-1}x}-\frac{12x^3}{1+x^4}-\frac{2x}{3(x^2+6)}\right]$$

---

۸۵ فنی

(۷) $y=\ln\sqrt{1+x^2}+\sin^{-1}x^2+5^{\cosh x}$

$$y'=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}+\sinh x\left(5^{\cosh x}\ln 5\right)$$

$$\rightarrow y'=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}+\sinh x\left(5^{\cosh x}\ln 5\right)$$

---

۸۵ فنی

(۸) $y^{2/3}=\dfrac{(x^2+1)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{2x-4}}$

از طرفین $\ln$ می‌گیریم $\ln y^{2/3}=\ln\dfrac{(x^2+1)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{2x-4}} \Longrightarrow \frac{2}{3}\ln y=\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(3x+4)-\frac{1}{5}\ln(2x-4)$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\times\frac{y'}{y}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{2(3x+4)}-\frac{2}{5(2x-4)}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{2(3x+4)}-\frac{2}{5(2x-4)}\right)\underbrace{\left(\frac{(x^2+1)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{2x-4}}\right)^{3/2}}_{y \text{ است}}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حدهای مربوط به صورت مبهم (1^∞ , 0^0 , ∞^0) زیر را حل نمایید.

نکته: $e^{\ln f(x)} = f(x)$

۸۵ فنی

① $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cosh x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ مبهم

رفع ابهام : $I = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln(\cosh x)^{1/x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(\cosh x)}$ $\to L$

$\lim\limits_{x\to 0^+} L = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cosh x)}{x} = \frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{hop} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tanh x}{1} = \tanh 0^+ = 0$

$\Rightarrow I = e^0 = 1$

---

۸۵ فیزیک

② $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty$ مبهم $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$ $\to L$

$\lim\limits_{x\to 0} L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} = \frac{0}{0}$ مبهم $\overset{hop}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x}$

$\overset{hop}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{2(2x\sin x + x^2\cos x)} = \frac{-1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x}$

$\overset{hop}{=} \frac{-1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x} = \frac{-1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x}$

$\overset{hop}{=} \frac{-1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{2\cos x + 4\cos x - 4x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x} = \frac{-1}{6}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} e^L = e^{-1/6}$

---

۸۳ فنی

③ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)^x = 1^\infty$ مبهم

چون $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (درجه مخرج قویتر از صورت)

پس برای راحتی می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

حسن پور

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵۸ ش

④ $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x = 0^0$ مبهم $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\overbrace{x\ln \sin x}^{L}}$

$$\lim_{x\to 0^+} L = \lim_{x\to 0^+} x\ln\sin x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{hop}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x^2\cot x = 0$$

پس: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^L = e^0 = 1$

---

⑤ $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1-\frac{4}{x}\right)^{x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x-4}{x}\right)^{x-1} = 1^\infty$ مبهم $\quad = \lim\limits_{x\to -\infty} e^{\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)^{x-1}}$

$$= \lim_{x\to -\infty} e^{\underbrace{(x-1)\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)}_{L}} \qquad \lim_{x\to -\infty} L = \lim_{x\to -\infty} (x-1)\ln\left(\frac{x-4}{x}\right) = \infty\times 0$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-4}{x}\right)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم } \overset{hop}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{4}{x^2-4x}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = -\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2-8x+4}{x^2-4x} = -4$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^L = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

---

⑥ $\lim\limits_{x\to 0^+} (\csc x)^x = \infty^0$ مبهم

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\ln(\csc x)^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{x\ln(\csc x)}^{L}} \qquad \lim_{x\to 0^+} L = 0\times\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\csc x)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\overset{hop}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\csc x\cot x}{\csc x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x^2\cot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\overset{hop}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cos x - x^2\sin x}{\cos x} = 0 \qquad \text{پس: } \lim e^L = e^0 = 1$$

حسن پور

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

سؤالات متفرقه:

فنی ۸۵ ① معادله‌ی خط راستی را بیابید که اولاً: از مبدأ می‌گذرد و ثانیاً: بر نمودار $y=e^x$ مماس است.

$f(x)=e^x \to f(\alpha)=e^\alpha \to f'(\alpha)=e^\alpha$

برای حل یک نقطه مانند $P(\alpha, f(\alpha))$ در نظر می‌گیریم:

$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow y-e^\alpha=e^\alpha(x-\alpha) \xRightarrow{\text{مبدأ } (0,0)} -e^\alpha=e^\alpha(0-\alpha)$

$\Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow P(1,e) \Rightarrow y-e=e(x-1) \Rightarrow y=ex$ شیب $=m=e$

فنی ۸۵ ② الف) نشان دهید برای هر $x\geq 1$ داریم: $\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

* توجه: موارد مشابه این سؤال هر ترم سؤال امتحانی است. بقیه‌ی موارد از کتاب سیلورمن مطالعه شود.

$\cosh^{-1}x=y \Rightarrow x=\cosh y=\frac{e^y+e^{-y}}{2} \Rightarrow e^y+e^{-y}=2x \Rightarrow e^y+\frac{1}{e^y}=2x$

$\Rightarrow \frac{e^{2y}+1}{e^y}=2x \Rightarrow e^{2y}-2xe^y+1=0 \xRightarrow{e^y=t} t^2-2xt+1=0 \Rightarrow t=x\pm\sqrt{x^2-1}$

$\Rightarrow e^y=x\pm\sqrt{x^2-1} \xRightarrow{\text{ln می‌گیریم}} y=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1}) \xRightarrow[y=\cosh^{-1}x]{x\geq 1} \cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

ب) حد روبه‌رو را محاسبه کنید: $\lim_{x\to\infty}(\cosh^{-1}x-\ln x)$

$\xrightarrow{\text{از قسمت الف داریم}} \lim_{x\to\infty}(\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\ln x)=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} \xrightarrow[x\geq 1]{\text{از قسمت الف می‌دانیم}}$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+|x|}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x}{x}\right)=\ln 2$

جسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) نشان دهید :

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & x>-1\\ -\frac{3\pi}{4} & x<-1\end{cases}$$

حل :

$$\begin{cases}\tan^{-1}x=\alpha \Rightarrow x=\tan\alpha\\ \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\beta \Rightarrow \frac{1-x}{1+x}=\tan\beta\end{cases}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-\frac{x(1-x)}{1+x}}\overset{\text{مخرج مشترک}}{=}\frac{\frac{x^2+x+1-x}{1+x}}{\frac{1+x-x+x^2}{1+x}}=\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$$

$$\tan(\alpha+\beta)=1 \Rightarrow \alpha+\beta=\tan^{-1}(1)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & x>1\\ -\frac{3\pi}{4} & x<-1\end{cases}$$

فنی ۸۳

۴) اگر $f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ، $g(x)=2\tan^{-1}\sqrt{x}$ ، $x\geq 0$ آنگاه نشان دهید : $f(x)=g(x)+c$

برای راحتی در نوشتن $\begin{cases}f(x)=\alpha\\ g(x)=\beta\end{cases}$

که c مقداری ثابت است پس مقدار c را تعیین کنید.

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\xrightarrow{\text{Sin می‌گیریم}}\sin\alpha=\frac{x-1}{x+1}\\ \beta=2\tan^{-1}\sqrt{x}\Rightarrow\frac{\beta}{2}=\tan^{-1}\sqrt{x}\xrightarrow{\text{tan می‌گیریم}}\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{x}\end{cases}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{x}\Rightarrow 1+\tan^2\frac{\beta}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\Rightarrow 1+x=\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\Rightarrow\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$\sin^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}=1\Rightarrow\sin^2\frac{\beta}{2}=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}\Rightarrow\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$f(x)=g(x)+c\Rightarrow\alpha=\beta+c\xrightarrow[\text{Sin می‌گیریم}]{\text{از طرفین}}\sin\alpha=\sin(\beta+c)$$

$$\sin\alpha=\sin\beta\overset{\text{عدد ثابت}}{\cos c}+\overset{\text{عدد ثابت}}{\sin c}\cos\beta\longrightarrow\begin{cases}\sin\beta=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\\ \cos\beta=2\cos^2\frac{\beta}{2}-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{x-1}{x+1}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cos c+\sin c\left(\frac{2}{x+1}-1\right)=\frac{2\sqrt{x}\cos c}{x+1}+\sin c\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$$

$$\frac{x-1}{\cancel{x+1}}=\frac{2\sqrt{x}\cos c-\sin c(x-1)}{\cancel{x+1}}$$

c مجهول است اگر c را $\frac{3\pi}{2}$ در نظر بگیریم در معادله صدق می‌کند.

$$c=\frac{3\pi}{2}\longrightarrow\begin{cases}\sin c=-1\\ \cos c=0\end{cases}\Rightarrow x-1=x-1$$

اثبات شد

حسن پور

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

محاسبه مساحت به کمک انتگرال :

* مساحت ناحیه‌ی بین دو منحنی :

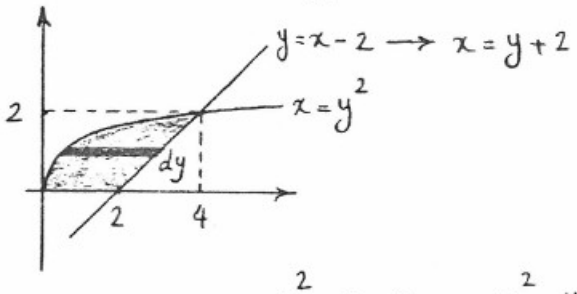
اگر در سراسر بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ مساحت ناحیه‌ی بین نمودارهای فوق از a تا b برابر است با

$$\text{مساحت} = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx$$

نکته: گاهی برای یافتن یک مساحت آسانتر است که به جای انتگرال گیری از مساحت نوارهای قائم (dx) از نوارهای افقی (dy) استفاده کنیم

$$\text{مساحت} = \int_a^b \left[f_1(y) - f_2(y)\right] dy$$

مثال: مساحت ناحیه‌ای را بیابید از طرف راست به خط $y=x-2$ و از طرف چپ به $x=y^2$ و از پایین به محور xها محدود است.



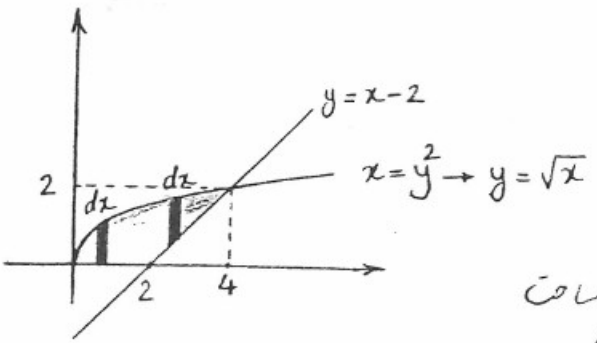
روش اول: استفاده از المان به صورت dy

$$y^2 = y+2 \rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

غ ق ق چون در ناحیه‌ی اول نیست

$$\text{مساحت} = \int_0^2 (\underbrace{y+2}_{\text{راست}} - \underbrace{y^2}_{\text{چپ}})\, dy = \frac{10}{3}$$

روش دوم: استفاده از المان به صورت dx ← باید توجه کنیم که dx یا dy بین چه منحنی‌هایی است.



$$0 \rightarrow 2 \longrightarrow \int \sqrt{x}\, dx$$

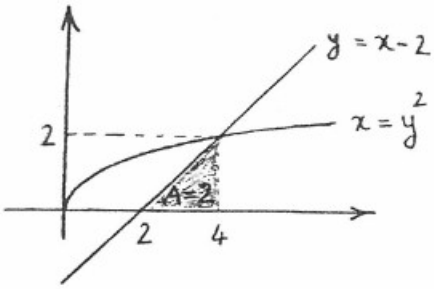
$$2 \rightarrow 4 \longrightarrow \sqrt{x} - (x-2)$$

به خاطر مثبت بودن ناحیه اول

$$\text{مساحت} = A = \int_0^2 (\sqrt{x} - 0)\, dx + \int_2^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx = \frac{10}{3}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

روش سوم: مساحت کل

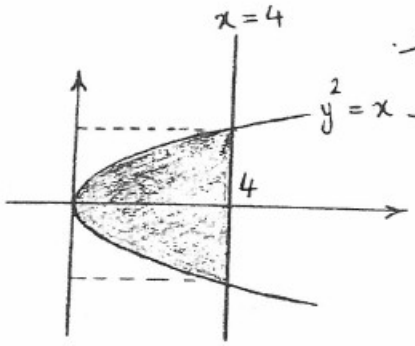


$$\text{مساحت کل} = \int_0^4 (\sqrt{x} - 0)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$\frac{16}{3} - A = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

مثال: مساحت محدود شده بین خم های زیر را بیابید.

① $y^2 = x \ , \ x = 4$



$$y^2 = x \longrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

$$\text{مساحت} = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\,dy = \frac{32}{3}$$

---

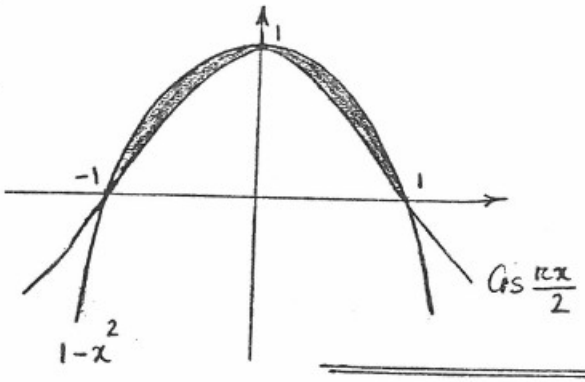
② $y = -1 \ , \ y = \cos x \quad -\pi \leq x \leq \pi$

$$\text{مساحت} = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos x - (-1)\right] dx = 2\pi$$

---

③ $y = \cos\frac{\pi x}{2} \ , \ y = 1 - x^2$

$$1 - x^2 = \cos\frac{\pi x}{2} \longrightarrow x = 0, \ x = \pm 1$$

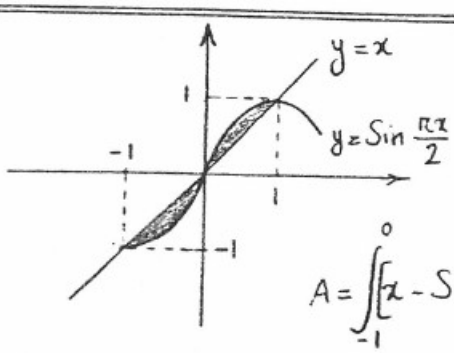


$$\text{مساحت} = A = \int_{-1}^{1} \left[1 - x^2 - \cos\frac{\pi x}{2}\right] dx = \frac{4(\pi - 3)}{3\pi}$$

---

④ $y = x \ , \ y = \sin\frac{\pi x}{2}$

$$x = \sin\frac{\pi x}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$



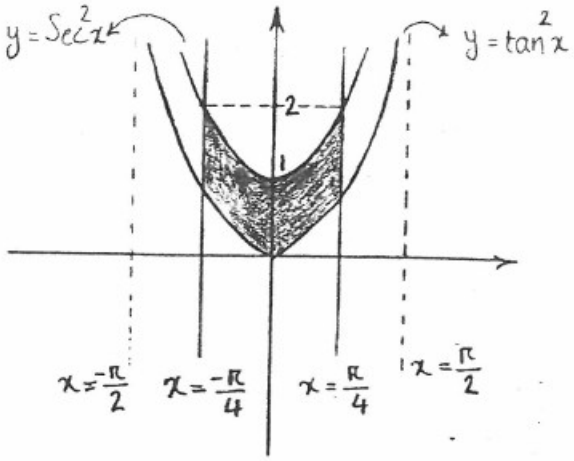
$$A = \int_{-1}^{0} \left[x - \sin\frac{\pi x}{2}\right] dx + \int_{0}^{1} \left[\sin\frac{\pi x}{2} - x\right] dx$$

$$\longrightarrow A = \frac{\pi}{4} - 1$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

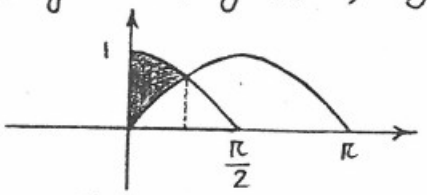
⑤ $y=\sec^2 x$, $y=\tan^2 x$, $x=\pi/4$, $x=\frac{-\pi}{4}$



مساحت $= A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} (1+\tan^2 x - \tan^2 x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

---

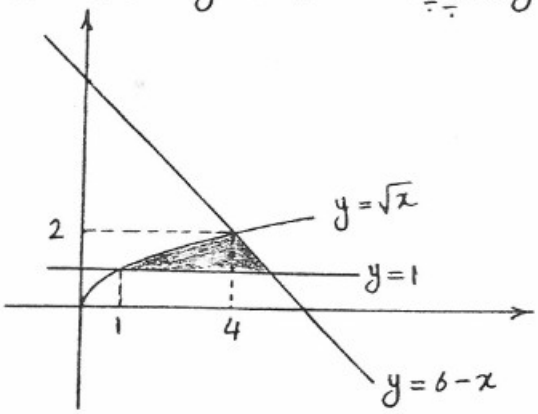
⑥ $y=\sin x$, $y=\cos x$, محور ys $\sin x = \cos x \longrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ برای $x \geq 0$



$$A=\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx = \sqrt{2}-1$$

---

⑦ از راست : $y=6-x$ از چپ : $y=\sqrt{x}$ از پایین : $y=1$



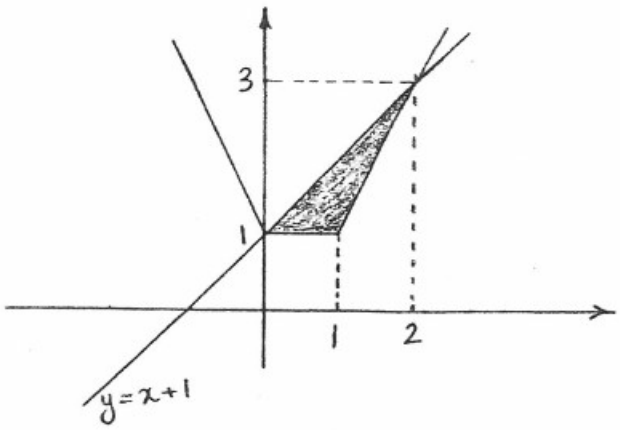
$6-x=\sqrt{x} \longrightarrow \begin{cases} x=4 \longrightarrow y=2 \\ x=9 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$ انتگرال به صورت dy

$$A=\int_1^2 (6-y-y^2)\,dy = \frac{13}{6}$$

---

⑧ $y=|x|+|x-1|$, $y=x+1$

$$y=|x|+|x-1| = \begin{cases} -2x+1 & x<0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$



$$A=\int_0^1 (x+1-1)\,dx + \int_1^2 (x+1-2x+1)\,dx = 1$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

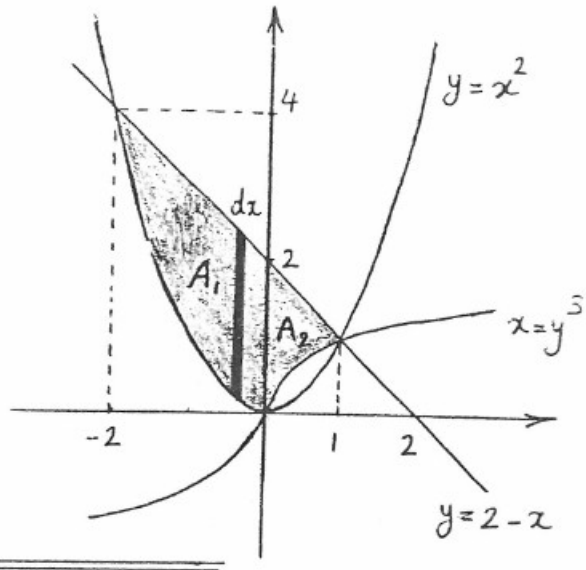
⑨ $x+y=2\,,\quad x=y^3\,,\quad y=x^2$

$$A_1=\int_{-2}^{0}(2-x-x^2)\,dx=\frac{10}{3}$$

$$A_2=\int_{0}^{1}(2-x-\sqrt[3]{x})\,dx=\frac{3}{4}$$

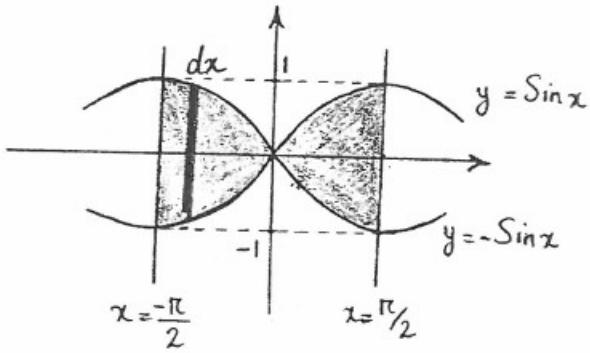
$\Rightarrow A=$ مساحت $=A_1+A_2$

$\rightarrow A=\frac{49}{12}$



⑩ $y=\sin x\,,\quad y=-\sin x\,,\quad x=\frac{\pi}{2}\,,\quad x=\frac{-\pi}{2}$

$$A=\int_{-\pi/2}^{0}(-\sin x-\sin x)\,dx+\int_{0}^{\pi/2}(\sin x+\sin x)\,dx=4$$

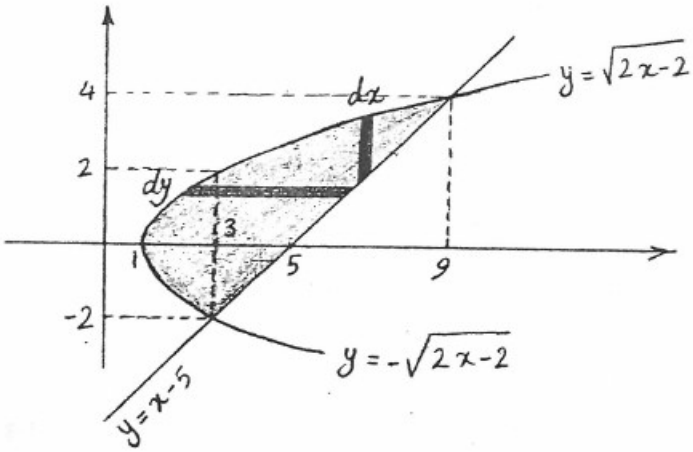


⑪ $y=x-5\,,\quad y^2=2x-2$

$y^2=2x-2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2x-2}$

$\sqrt{2x-2}=x-5 \longrightarrow x=9$

$-\sqrt{2x-2}=x-5 \longrightarrow x=3$



روش اول (dx): $A_1=\int_{1}^{3}\left[\sqrt{2x-2}-(-\sqrt{2x-2})\right]dx=\frac{16}{3}$

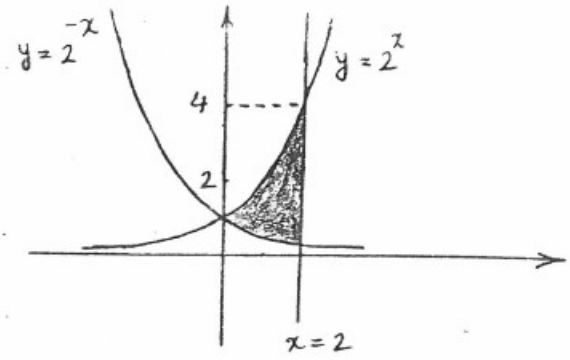
$$A_2=\int_{3}^{9}\left[\sqrt{2x-2}-(x-5)\right]dx=\frac{38}{3}$$

$\Rightarrow A=A_1+A_2=18$

روش دوم (dy): $A=\int_{-2}^{4}\left[(y+5)-(\frac{1}{2}y^2+1)\right]dy=18$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(12) $y=2^{x}$, $y=2^{-x}$, $x=2$

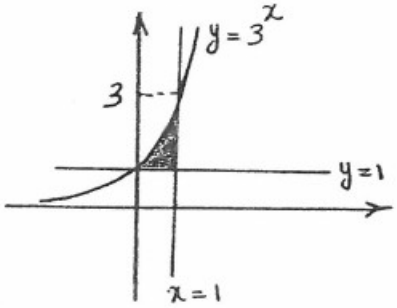


$$A=\int_0^2 (2^{x}-2^{-x})\,dx=\frac{2^{x}}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{4}{\ln 2}+\frac{1/4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{9}{4\ln 2}$$

---

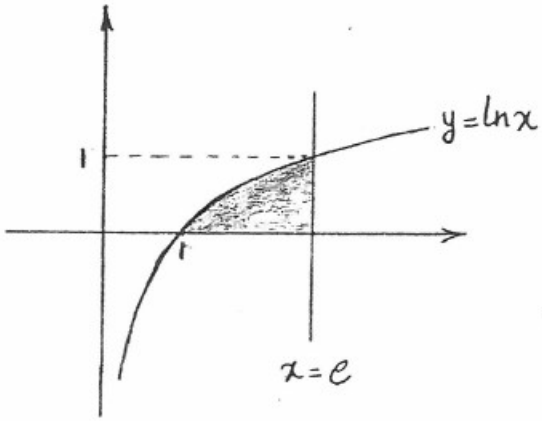
(13) $y=3^{x}$, $x=1$, $y=1$



$$A=\int_0^1 (3^{x}-1)\,dx=\frac{3^{x}}{\ln 3}-x\Bigg|_0^1=\frac{3}{\ln 3}-1-\frac{1}{\ln 3}=\frac{2}{\ln 3}-1$$

---

(14) $y=\ln x$, $x=e$, محور x ها

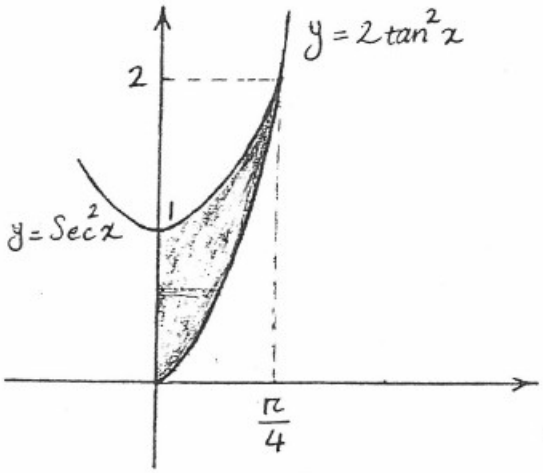


$$A=\int_1^e \ln x\,dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=\!=} x\ln x-x\Bigg|_1^e$$

$$=e(1)-e-(0-1)=1$$

---

(15) $y=\sec^2 x$, $y=2\tan^2 x$, محور y ها در ربع اول



$$\sec^2 x=2\tan^2 x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}=2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\rightarrow \cos^2 x(2\sin^2 x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=\pi/4 \\ x=-\pi/4 & \text{ناحیه دوم غ ق ق} \\ x=\pi/2 & \text{مخرج را صفر می‌کند غ ق ق} \end{cases}$$

$$A=\int_0^{\pi/4}(\sec^2 x-2\tan^2 x)\,dx=\tan x\Big|_0^{\pi/4}-2\int_0^{\pi/4}(\tan^2 x+1-1)\,dx=\tan x-2\tan x+2x\Big|_0^{\pi/4}$$

$$\rightarrow A=\frac{\pi}{2}-1$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

(16) $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \frac{1}{2}x^2=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow x^4+x^2-2=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2+t-2=0$

$$\rightarrow \begin{cases} t=1 \rightarrow x=\pm 1 \\ t=-2 \text{ غ ق ق} \end{cases} \rightarrow A=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$$

---

(17) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$ $\qquad$ توجه: $\ln^2 x=(\ln x)^2 \neq \ln x^2$

$$\ln x=\ln^2 x \rightarrow \ln x(\ln x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} \ln x=0 \rightarrow x=1 \\ \ln x=1 \rightarrow x=e \end{cases}$$

$1<x<e \rightarrow 0<\ln x<1 \rightarrow \ln^2 x<\ln x$

$$\rightarrow A=\int_1^e(\ln x-\ln^2 x)\,dx \xlongequal{\text{دو مرحله جزء به جزء}} 3-e$$

---

(18) $x=1-3y^2$, $x=-2y^2$ $\qquad -2y^2=1-3y^2 \rightarrow y^2=1 \rightarrow y=\pm 1$ محل تلاقی منحنی‌ها

$$S=\int_{-1}^{1}(1-3y^2+2y^2)\,dy=y-\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

نکته: اگر معادله یک منحنی به صورت قطبی بیان شود $r=f(\theta)$ ، آنگاه مساحت به وجود آمده توسط منحنی در فاصله $[a,b]$ از رابطه‌ی روبه‌رو بدست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta$$

مثال: مساحت ناحیه‌ی محدود به $\rho=1+\cos\phi$ کدام است؟

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\phi)^2\,d\phi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\phi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}2\cos\phi\,d\phi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi=\frac{3\pi}{2}$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خلاصه ای از اعداد مختلط :

نکته : قدر مطلق اعداد مختلط

$$z = x+yi \Rightarrow |z| = |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}$$

نکته : آرگومان اعداد مختلط

$$z = x+yi \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$* \quad z = \underbrace{x+iy}_{\text{دکارتی}} = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{مثلثاتی (قطبی)}} = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{نمایی}}$$

قضیه ی موآور :

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

می دانیم که :

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

نکته : اگر

$$z = x+yi \Rightarrow \sqrt{z} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + \underbrace{(\operatorname{Sign} y)}_{\text{علامت } y} i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right]$$

---

① ثابت کنید

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

$$A = \sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} \Rightarrow A^2 = (1+i\sqrt{3}) + (1-i\sqrt{3}) + 2\sqrt{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2 + 2\times\sqrt{1-3i^2} \xrightarrow{\sqrt{1-3i^2} = \sqrt{1-(3\times(-1))} = 2} = 2+2\times 2 = 6 \Rightarrow A^2 = 6 \Rightarrow A = \sqrt{6}$$

---

② نشان دهید :

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

حل :

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$$

$$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) + (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + \cancel{z_1\bar{z}_2} + \cancel{z_2\bar{z}_1} + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1 - \cancel{z_1\bar{z}_2} - \cancel{z_2\bar{z}_1} + z_2\bar{z}_2$$

$$= 2(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) نشان دهید:

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

حل:

$$\frac{(1+i\tan\alpha)^n}{(1-i\tan\alpha)^n}=\frac{\left(1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^n}{\left(1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^n}\xlongequal{\text{مخرج مشترک}}\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n}{(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n}=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin n\alpha}$$

از $\cos n\alpha$ فاکتور می‌گیریم

$$=\frac{\cos n\alpha(1+i\tan n\alpha)}{\cos n\alpha(1-i\tan n\alpha)}=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

ریاضی ۸۵

۴) نشان دهید به ازای هر n عبارت مقابل یک عدد حقیقی است.

$$w=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{6n}$$

حل:

$$\begin{cases}\sqrt{3}+i \text{ ناحیه اول} = \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}+i=2e^{\frac{\pi}{6}i} \\ \sqrt{3}-i \text{ ناحیه چهارم} = \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{-\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}-i=2e^{\frac{-\pi}{6}i}\end{cases}$$

$$w=\left(\frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{\frac{-\pi}{6}i}}\right)^{6n}=\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{6n}\Rightarrow e^{\frac{\pi}{3}i}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

نکته: $\sin 2n\pi=0$

$$\Rightarrow w=\cos\frac{6n\pi}{3}+i\sin\frac{6n\pi}{3}=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi\Rightarrow w=\cos 2\pi n=1$$ عدد حقیقی است

---

۵) مقادیر زیر را محاسبه نمایید.

شیمی ۸۴

الف)

$$\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}=\frac{\left((1+i)^2\right)^{50}}{\left((1-i)^2\right)^{48}-i\left((1+i)^2\right)^{49}}$$

$$\begin{cases}(1+i)^2=1+i^2+2i=1-1+2i=2i\\(1-i)^2=1+i^2-2i=1-1-2i=-2i\end{cases}$$

$$=\frac{(2i)^{50}}{(-2i)^{48}-i(2i)^{49}}$$

$$\begin{cases}i^{50}=(i^2)^{25}=-1\\i^{48}=(i^2)^{24}=+1\\i(i)^{49}=i^{50}=-1\end{cases}$$

$$=\frac{2^{50}\times(-1)}{(-2)^{48}+(1)(2)^{49}}=-\frac{2^{50}}{2^{48}(1+2)}=-\frac{2^2}{3}=-\frac{4}{3}$$

ب)

$$\frac{(1+i)^{12}}{(2-2i)^{10}}\xlongequal[\text{نمایی}]{\text{تبدیل به شکل}}\frac{\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{12}}{\left(2\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^{10}}=\frac{2^{\frac{12}{2}}\cdot e^{3\pi i}}{2^{10}\cdot 2^{\frac{5}{2}}\cdot e^{\frac{-5\pi i}{2}}}=2^{-9}e^{(3\pi+\frac{5\pi}{2})i}$$

$$=2^{-9}\left(\cos\left(3\pi+\frac{5\pi}{2}\right)+i\sin\left(3\pi+\frac{5\pi}{2}\right)\right)=2^{-9}(0-i)=-2^{-9}i$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ج) ۸۴ فنی

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}\right)^{20} = \left(\frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+1}\right)^{20} = \frac{1}{2^{20}}\left((1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right)^{20}$$

$$= \frac{1}{2^{20}}\left[\left((1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right)^2\right]^{10} \overset{*}{=} \frac{1}{2^{20}}(-4i-4\sqrt{3})^{10} = \frac{4^{10}}{2^{20}}(-i-\sqrt{3})^{10} = (-1)^{10}(i+\sqrt{3})^{10}$$

$$\begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}\right) = 2^{10}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{9}(-\sqrt{3}i+1)$$

جواب آخر

$$* \begin{cases} \left[(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right]^2 = (1-\sqrt{3})^2+2(1-3)i-(1+\sqrt{3})^2 \\ = 1-2\sqrt{3}+3-4i-1-3-2\sqrt{3} = -4i-4\sqrt{3} \end{cases}$$

د) $$\left(\frac{4}{\sqrt{3}i-1}\right)^{12} \overset{\times \text{مزدوج مخرج}}{=} \left(\frac{4(\sqrt{3}i+1)}{(\sqrt{3}i-1)(\sqrt{3}i+1)}\right)^{12} = 4^{12}\left(\frac{\sqrt{3}i+1}{(-3-1)}\right)^{12} = \frac{4^{12}}{4^{12}}(\sqrt{3}i+1)^{12}$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2 \\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{3} \end{cases} \longrightarrow = 2^{12}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12} = 2^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{3}+i\sin\frac{12\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{12}(\underbrace{\cos 4\pi}_{1}+i\underbrace{\sin 4\pi}_{0}) = 2^{12}$$

---

۸۵ شیمی

ه) $$\frac{(1-i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^4}$$

$1-i$ ناحیه چهارم $\Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\frac{-\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 1-i=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}$

$1+\sqrt{3}i$ ناحیه اول $\Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow 1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$\frac{(1-i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^4} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^6}{\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4} = \frac{2^3 e^{\frac{-3\pi}{2}i}}{2^4 e^{\frac{4\pi}{3}i}} = \frac{1}{2}e^{\left(\frac{-3\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}\right)i} = \frac{1}{2}e^{\frac{-17\pi}{6}i}$$

---

۸۳ فیزیک

۶) قدر مطلق عبارات زیر را محاسبه نمایید.

الف) $$\frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3} \longrightarrow z = \left|\frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3}\right| = \left|\frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3}\right| = \frac{|3+4i|^4}{|3-4i|^3} = \frac{5^4}{5^3} = 5$$

ب) $$\frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{(\sqrt{3}-i)^{24}} \longrightarrow z = \frac{\left|(1+\sqrt{3}i)^8\right|}{\left|(\sqrt{3}-i)^{24}\right|} = \frac{|1+\sqrt{3}i|^8}{|\sqrt{3}-i|^{24}} = \frac{2^8}{2^{24}} = \frac{1}{2^{16}}$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

ج) $\frac{z-1}{z+2} \longrightarrow \left|\frac{z-1}{z+2}\right| = \left|\frac{(x-1)+iy}{(x+2)+iy}\right| = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}$

---

۷) تمام مقادیر ریشه های زیر را تعیین کنید.

الف) $\sqrt[3]{1+i}$

ناحیه اول

$1+i \rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z=\sqrt[3]{1+i} \Rightarrow z^3=1+i \Rightarrow z=R(\cos\phi+i\sin\phi)$

$\Rightarrow R^3(\cos 3\phi+i\sin 3\phi)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow \begin{cases} R=\sqrt[6]{2} \\ 3\phi=2k\pi+\frac{\pi}{4} \rightarrow \phi=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12} \end{cases}$

$z_k=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)\right] \quad k=0,1,2$

$z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_2=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

ب) $\sqrt{-8-6i}$

برای حل این مسأله از فرمول زیر استفاده می کنیم

$-8-6i \rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{36+64}=10 \\ \theta=\tan^{-1}\frac{-6}{-8}=\tan^{-1}\frac{3}{4} \end{cases}$ چون برای یافتن θ به ماشین حساب نیاز نداریم، ناحیه چهارم

$-8-6i=z \Rightarrow |z|=10 \quad \begin{cases} x=-8 \\ y=-6 \end{cases} \xrightarrow[\text{صفحه 19}]{\text{طبق فرمول}} \sqrt{-8-6i}=\pm\left[\sqrt{\frac{10-8}{2}}-i\sqrt{\frac{10+8}{2}}\right]=\pm(1-3i)$

---

۸۵ فیزیک

ج) $\sqrt{-i}$

$z=\sqrt{-i} \Rightarrow z^2=-i$

$-i+0$ ناحیه چهارم $\begin{cases} r=1 \\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{-\pi}{2} \end{cases}$

$z^2=-i \Rightarrow z=R(\cos\phi+i\sin\phi)$

$\rightarrow -i+0=\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow R^2(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)=\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} R=1 \\ 2\phi=2k\pi-\frac{\pi}{2} \rightarrow \phi=k\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$z_k=\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right) \quad k=0,1$

$z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z_1=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

حسن پور

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

د) $\sqrt[6]{-1}$ $\quad z=\sqrt[6]{-1}$, $z=R(\cos\phi+i\sin\phi) \Rightarrow -1+0i=\cos\pi+i\sin\pi$

$\Rightarrow -1=z^6 \Rightarrow \cos\pi+i\sin\pi=R^6(\cos 6\phi+i\sin 6\phi) \rightarrow \begin{cases} R^6=1 \Rightarrow R=1 \\ 6\phi=2k\pi+\pi \Rightarrow \phi=\frac{2k\pi+\pi}{6} \end{cases}$

$z_k=\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{6}\right)\right] \quad k=0,1,2,3,4,5$

$z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_1=i$, $z_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_3=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_4=-i$, $z_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ه) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$ $\quad z=\sqrt{1-i\sqrt{3}}$ $\quad 1-i\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} |1-i\sqrt{3}|=2 \\ \theta=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}=\frac{-\pi}{3} \end{cases}$

ناحیه چهارم

$\rightarrow 1-i\sqrt{3}=2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$

$z^2=1-i\sqrt{3} \Rightarrow R^2(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)=2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$

$\begin{cases} R^2=2 \Rightarrow R=\sqrt{2} \\ 2\phi=2k\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \phi=k\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$ $\quad z_k=\sqrt{2}\left[\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right] \quad k=0,1$

$z_0=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{-\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$

---

۸۴ شیمی

و) $(64)^{1/6}$ $\quad z=\sqrt[6]{64} \Rightarrow z^6=64$

$64=64+0i \rightarrow \begin{cases} r=64 \\ \theta=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 64=64e^{0i} \\ z^6=Re^{i\phi} \end{cases} \rightarrow z^6=R^6e^{6i\phi} \rightarrow \begin{cases} 6\phi=2k\pi+0 \Rightarrow \phi=\frac{k\pi}{3} \\ R^6=64 \Rightarrow R=2 \end{cases}$

$z_k=2e^{\frac{k\pi}{3}i} \quad k=0,1,2,3,4,5$

$z_0=2$, $z_1=2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_2=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $z_3=2e^{\pi i}$, $z_4=2e^{\frac{4\pi}{3}i}$, $z_5=2e^{\frac{5\pi}{3}i}$

توجه: صورت این مثال می‌تواند بدین گونه نیز طرح شود (ریشه‌های ششم 64 را پیدا کنید).

توجه: به عنوان مثال اگر گفته شود ریشه‌ی پنجم واحد را پیدا کنید منظور $\sqrt[5]{1}$ است.

توجه: اکثر مثال‌های بالا به روش مثلثاتی (قطبی) حل شد. می‌توانستیم به روش نمایی نیز حل کنیم مانند قسمت (و).

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸: معادلات زیر را حل نمایید.

الف) $z^3-8=0 \Rightarrow z^3-2^3=0 \Rightarrow (z-2)(z^2+2z+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=2 \\ z^2+2z+4=0 \quad * \end{cases}$

$* \xrightarrow[\text{درجه ۲}]{\text{معادله}} z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}=-1\pm\sqrt{-3}=-1\pm\sqrt{3}\,i$

ب) $z^4+z^3+z^2+z+1=0 \qquad \frac{z-1}{z-1}(z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \Rightarrow \frac{z^5-1}{z-1}=0 \quad *$

$\Rightarrow z^5=1 \Rightarrow z=\sqrt[5]{1} \qquad z=R(\cos\phi+i\sin\phi)$

$\sqrt[5]{1} \Rightarrow 1=\underset{\text{ناحیه اول}}{1+0i}=\cos 0+i\sin 0 \rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases}$

$z=\sqrt[5]{1} \rightarrow z^5=1 \Rightarrow \cos 0+i\sin 0=R^5(\cos(5\phi)+i\sin(5\phi)) \begin{cases} R^5=1 \Rightarrow R=1 \\ 5\phi=2k\pi+0 \Rightarrow \phi=\frac{2k\pi}{5} \end{cases}$

$z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5} \quad k=0,1,2,3,4 \qquad z_0=1$ غ ق ق (چون مخرج در عبارت * صفر می‌شود)

$z_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}, \; z_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}, \; z_3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}, \; z_4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$

ج) $z^4+1=0 \qquad z^4=-1 \xrightarrow[\text{نمایی}]{\text{حل به روش}} \begin{cases} \underset{\text{ناحیه دوم}}{-1=-1+0i} \begin{cases} r=1 \\ \theta=\pi \end{cases} \rightarrow -1=e^{\pi i} \\ z^4=R^4e^{4\phi i} \end{cases}$

$z^4=-1 \Rightarrow R^4e^{4\phi i}=1e^{\pi i} \Rightarrow \begin{cases} R=1 \\ 4\phi=\pi+2k\pi \Rightarrow \phi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z_k=e^{(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i}$

$k=0,1,2,3$

$z_0=e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad z_1=e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad z_2=e^{\frac{5\pi}{4}i}, \quad z_3=e^{\frac{7\pi}{4}i}$

د) $z^4+5z^2=36 \Rightarrow (z^2)^2+5z^2-36=0 \Rightarrow z^2=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{2}$

۸۳ فنی

$\Rightarrow \begin{cases} z^2=4 \rightarrow z=\pm 2 \\ z^2=-9 \rightarrow z^2=9i^2 \rightarrow z=\pm 3i \end{cases}$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ه) $z^3-3z^2+3z=1+i$ فنی ۸۵ $\qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ نکته:

$z^3-3z^2+3z-1=i \rightarrow (z-1)^3=i \qquad i=0+i \rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ ناحیه اول

$z-1=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{1/3} \Rightarrow z-1=e^{\left(\frac{2k\pi+\pi/2}{3}\right)i} \Rightarrow z=e^{\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)i}+1 \quad , k=0,1,2$

$z_0=e^{\frac{\pi}{6}i}+1 \quad , \quad z_1=e^{\frac{5\pi}{6}i}+1 \quad , \quad z_2=e^{\frac{9\pi}{6}i}+1$

و) $z^6+7z^3=8 \Rightarrow (z^3)^2+7z^3-8=0 \Rightarrow z^3=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z^3=1 \\ z^3=-8 \end{cases}$ حل به شکل مثلثاتی

if $z^3=1 \rightarrow 1=1+0i \rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z^3=R^3(\cos 3\phi+i\sin 3\phi) \\ 1=1(\cos 0+i\sin 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R=1 \\ 3\phi=2k\pi+0 \Rightarrow \phi=\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

$z_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3} \quad , k=0,1,2 \qquad z_0=1 \ , \ z_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \ , \ z_3=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

if $z^3=-8 \rightarrow -8=-8+0i \rightarrow \begin{cases} r=8 \\ \theta=\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z^3=R^3(\cos 3\phi+i\sin 3\phi) \\ -8=2\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R=2 \\ 3\phi=2k\pi+\pi \Rightarrow \phi=\frac{2k\pi+\pi}{3} \end{cases}$

$z_k=2\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{3}\right) \ , k=0,1,2 \qquad z_0=1+\sqrt{3}i \ , \ z_1=-2 \ , \ z_2=1-i\sqrt{3}$

فنی ۸۵

ز) $z^3=\frac{-1+3i}{3+i} \rightarrow \frac{-1+3i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}=\frac{-3+i+9i+3}{9+1}=i$

$z^3=i \rightarrow \begin{cases} z=R(\cos\phi+i\sin\phi) \\ i+0 \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$R^3(\cos 3\phi+i\sin 3\phi)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} \boxed{R=1} \\ 3\phi=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi=\frac{2k\pi+\pi/2}{3} \end{cases}$

$z_k=\cos\left(\frac{2k\pi+\pi/2}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi/2}{3}\right) \qquad k=0,1,2$

$z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \qquad z_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

$z_2=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

c) $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0 \qquad z^5+z^4+z^3+z^2+z+1\times\frac{z-1}{z-1}=0 \Rightarrow \frac{z^6-1}{z-1}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^6-1=0 \longrightarrow z=\sqrt[6]{1} \Rightarrow z^6=1=1+0i \\ z\neq 1 \end{cases} \Rightarrow z_k=e^{\left(\frac{2k\pi+0}{6}\right)i}, \quad k=0,1,2,3,4,5$$

ناحیه اول

$z_0=e^0=1$ ، $z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، $z_2=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ، $z_3=e^{\pi i}$ ، $z_4=e^{\frac{4}{3}\pi i}$ ، $z_5=e^{\frac{5\pi}{3}i}$

غیرقابل قبول (مخرج صفر می‌شود)

نکته: $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\dots+ab^{n-1}+b^n)$

---

b) $\left(\frac{z+1}{z+2}\right)^2=\frac{i+1}{3i-3} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{i+1}{3i-3}=\frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}{3\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}}=\left[\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{3e^{\frac{3\pi}{4}i}}\right]^{1/2}=\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{z_k+1}{z_k+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\left(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}}{2}\right)i}, \quad k=0,1$$

if: $k=0 \Rightarrow \frac{z_0+1}{z_0+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow z_0+1=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}i}(z_0+2) \Rightarrow z_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}i}-1$

$$z_0=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}i}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

if: $k=1 \longrightarrow \frac{z_1+1}{z_1+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow z_1+1=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{3\pi}{4}}(z_1+2) \Rightarrow z_1=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{3\pi}{4}i}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{3\pi}{4}i}}$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

«سؤالات تکمیلی میان ترم»

حدود زیر را محاسبه کنید:

① $$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(2\int_0^x e^{t^2}dt\right)\left(e^{x^2}\right)}{e^{2x^2}} = 0$$

---

② $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = 1^\infty \rightarrow$$ مبهم

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)} = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{a^x\ln a + b^x\ln b}{a^x+b^x}}{1} = \frac{\ln a+\ln b}{2} = \frac{\ln ab}{2} = \ln\sqrt{ab}$$

---

③ $$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{Arc\,Tan}\frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4}\right) = \infty\times 0$$ مبهم

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{Arc\,Tan}\frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\frac{1}{(x+2)^2}}{1+\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+2)^2+(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

---

④ $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{Tan}^{-1}x}{x-\sin^{-1}x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \overset{HOP}{=} \lim \frac{+\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}} = -2$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $\lim\limits_{x\to 0^-} (2^{\cot x})^{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\overbrace{x\cot x}^{u}} = 2^{1} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} u = \lim\limits_{x\to 0^-} x\cot x = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0}$ Hop $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$

---

۶) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{\sin x} \operatorname{sech} t\,dt}{\ln(1+x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x \operatorname{sech}(\sin x) - 2x\operatorname{sech}(x^2)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{1-0}{1} = 1$

نکته $\rightarrow \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$

---

۷) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\overbrace{\frac{1}{x}\cdot \ln(e^x+x)}^{u}} = e^2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x+x)}{x} \overset{Hop}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = 2$

---

۸) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} \sin t\,dt}{x^6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2 \sin x^3}{6x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{2x^3} \xrightarrow{Hop} \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2\cos x^3}{6x^2} = \frac{1}{2}$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

معادلات مختلط زیر را حل کنید.

(1) $$(z-1)^3 = \left(\frac{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}}\right)^{10}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه دموآور}} (z-1)^3 = \frac{\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}}{\cos 2\pi + i\sin 2\pi} = i$$

$$z-1 = t \xrightarrow{t = Re^{\theta i}} t^3 = i \longrightarrow R^3 e^{3\theta} = 1e^{\frac{\pi}{2}i} \longrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \longrightarrow k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i} + 1 \qquad z_1 = e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})i} + 1 \qquad z_2 = e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})i} + 1$$

---

(2) $$z^4 = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i\sqrt{3})^3} \Rightarrow z^4 = \frac{(2e^{\frac{\pi}{3}i})^3}{(2e^{-\frac{\pi}{3}i})^3} \Rightarrow z^4 = e^{2\pi i}$$

$$R^4 e^{4\varphi i} = e^{2\pi i} \longrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ 4\varphi = 2\pi + 2k\pi \end{cases} \longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_k = 1e^{(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2})i} \longrightarrow z_0 = e^{\frac{\pi}{2}i} \quad z_1 = e^{\pi i} \quad z_2 = e^{\frac{3\pi}{2}i} \quad z_3 = e^{2\pi i}$$

اگر $z = \cos\theta + i\sin\theta$ باشد، نشان دهید: $z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta$

$$z^n + z^{-n} = \cos n\theta + i\sin\theta + \underbrace{\cos(-n\theta)}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{i\sin(-n\theta)}_{\text{تابع فرد}} = 2\cos n\theta$$

حسن پور

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

نشان دهید:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx \xlongequal{\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx} \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin(\pi - x))\,dx =$$

$$I = \int_0^{\pi} \pi f(\sin(\pi - x)\,dx - \int_0^{\pi} x f(\sin(\pi - x))\,dx \xlongequal{\sin(\pi - x) = \sin x}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx \Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

فرض کنید تابع f بر $[0,1]$ پیوسته باشد و $A = \int_0^1 f(x)\sin^{-1}x\,dx$ و $B = \int_0^1 f(x)\cos^{-1}x\,dx$. آنگاه مقدار $\int_0^1 x f(x^2)\,dx$ را برحسب A و B بیابید.

$$I = \int_0^1 x f(x^2)\,dx = \begin{cases} x^2 = t \\ x\,dx = \frac{dt}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt \overset{*}{=} \frac{A+B}{\pi}$$

$$A + B = \int_0^1 f(x)\sin^{-1}x\,dx + \int_0^1 f(x)\cos^{-1}x\,dx = \int_0^1 f(x)(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}} A + B = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2(A+B)}{\pi} \quad (*)$$

نکته: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر f تابعی مشتق پذیر باشد تابع $f(x)$ را در تساوی زیر بدست آورید :

$$f^2(x) = \int_0^{x^2} \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{1+t}}\,dt \Rightarrow \text{مشتق} \quad \cancel{2}f'(x)\,\cancel{f(x)} = \cancel{2}x\,\frac{\cancel{f(x)}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$f'(x) = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{\int} f(x) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \longrightarrow \begin{cases} 1+x^2 = u \\ 2x\,dx = du \end{cases} \longrightarrow f(x) = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{u} + c = \sqrt{1+x^2} + c$$

تمام ریشه های عدد $(-1-i)^{\frac{4}{5}}$ را بیابید :

$$z = (-1-i)^{\frac{4}{5}} \xrightarrow{\text{توان ۵}} z^5 = (-1-i)^4 \longrightarrow \begin{cases} z = Re^{\theta i} \\ -1-i \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

ناحیه سوم

$$\Rightarrow -1-i = \sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

$$R^5 e^{5\varphi} = \sqrt{2}^4\, e^{5\pi i} \longrightarrow \begin{cases} R^5 = \sqrt{2}^4 = 4 \longrightarrow R = \sqrt[5]{4} \\ 5\varphi = 5\pi + 2k\pi \longrightarrow \varphi = \pi + \frac{2k\pi}{5} \end{cases} \longrightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$z_k = \sqrt[5]{4}\, e^{(\pi + \frac{2k\pi}{5})i}$$

$$z_0 = \sqrt[5]{4}\, e^{\pi i} \qquad z_1 = \sqrt[5]{4}\, e^{\frac{7\pi}{5}i} \qquad z_2 = \sqrt[5]{4}\, e^{\frac{9\pi}{5}i}$$

$$z_3 = \sqrt[5]{4}\, e^{\frac{11\pi}{5}i} \qquad z_4 = \sqrt[5]{4}\, e^{\frac{13\pi}{5}i}$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

نشان دهید :

$$\frac{d}{dx}(\text{Arc}\cos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arc}\cos x = y \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \frac{d}{dx}(\text{Arc}\cos x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \overset{*}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos z \swarrow$$

$$x = \cos y \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2} \quad (*)$$

نشان دهید :

$$\text{Arc}\sin 2x + \text{Arc}\cos 2x = \frac{\pi}{2}$$

طبق تعریف $\rightarrow \begin{cases} 0 \leq \text{Arc}\cos 2x \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arc}\sin 2x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x}_{y} \leq \frac{3\pi}{2} \longrightarrow y = \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x \xrightarrow{\sin}$$

$$\sin y = \sin(\overbrace{\text{Arc}\sin x}^{\alpha} + \overbrace{\text{Arc}\cos x}^{\beta}) = \sin(\text{Arc}\sin x)\cos(\text{Arc}\cos x) + \sin(\text{Arc}\cos x)\cos(\text{Arc}\sin)$$

$$\sin y = x \times x + \sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-x^2} = 1 \longrightarrow \sin y = 1 \longrightarrow \left| \begin{array}{l} y = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

به ازای $k=0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{پس}} \text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مقدار x را طوری تعیین کنید که حاصل انتگرال $\int_x^{x+3} t(t-5)\,dt$ ماکسیمم شود.

$$f(x)=\int_x^{x+3} t(t-5)\,dt \xrightarrow{f'(x)=0} f'(x)=1(x+3)(x+3-5)-1(x(x-5))=0$$

$$(x+3)(x-2)-x^2+5x=0 \longrightarrow x^2+x-6-x^2+5x=0 \longrightarrow x=1$$

نشان دهید اگر f تابع فرد باشد: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{I_1}+\int_0^a f(x)\,dx=-\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=0$$

$$I_1=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \xrightarrow[dx=-dt]{x=-t} -\int_a^0 f(-t)\,dt=\int_0^a f(-t)\,dt \xrightarrow{\text{فرض تابع فرد}} f(-t)=-f(t)$$

$$-\int_0^a f(t)\,dt=-\int_0^a f(x)\,dx$$

معادله زیر را حل کنید:

$$(1-i\sqrt{3})z^2-1-i\sqrt{3}=0 \longrightarrow z^2=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{1+3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \longrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \longrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \longrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{2\pi}{3}i} \\ \theta=\operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$R^2e^{2\varphi i}=e^{\frac{2\pi}{3}i} \longrightarrow \begin{cases} R=1 \\ 2\varphi=2\frac{\pi}{3}+2k\pi \rightarrow \varphi=\frac{2\pi}{21}+\frac{2k\pi}{2} \quad k=0,1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$

$z_0=e^{\frac{2\pi}{21}i}$ $z_1=e^{\frac{8\pi}{21}i}$ $z_2=e^{\frac{14\pi}{21}i}$ $z_3=e^{\frac{20\pi}{21}i}$ $z_4=e^{\frac{26}{21}\pi i}$ $z_5=e^{\frac{32}{21}\pi i}$

$z_6=e^{\frac{38}{21}\pi i}$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

c را چنان بیابید که :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$$

$$\lim \left(\frac{x+c+c-c}{x-c}\right)^x = \lim \left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^x = e^{2c} = 4 \to 2c = \ln 4 \to c = \frac{\ln 4}{2} \to c = \ln 2$$

اگر $f(x) = \int_{-x}^{x} e^{t^2} dt$ باشد مقدار $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ را بیابید.

$$f(x) = \int_{-x}^{x} e^{t^2} dt \to f(-x) = \int_{x}^{-x} e^{t^2} dt = -\int_{-x}^{x} e^{t^2} dt = -f(x) \to$$ تابع فرد است

$$\to \int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}} dx = 0$$

ریشه های معادله $(z+1)^5 + (z-1)^5 = 0$ را بیابید

$$(z+1)^5 = -(z-1)^5 \longrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = -1$$

$$t = \frac{z+1}{z-1} \longrightarrow t^5 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$t = \cos\frac{2k\pi+\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi+\pi}{5} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

از طرفی $\frac{z+1}{z-1} = t \longrightarrow z+1 = (z-1)t$

$$z = \frac{t+1}{t-1} \longrightarrow z = \frac{\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{5}\right) + 1}{\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{5}\right) - 1}$$

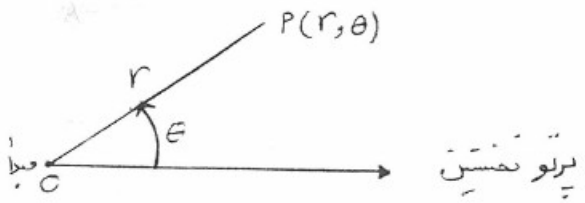
$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مختصات قطبی: محل نقطه را براساس فاصله آن از مبدأ (r) و یک زاویه جهت دار است (θ)

فرق قطبی با دکارتی: یک نقطه در صفحه، فقط یک جفت مختصات دکارتی دارد حال آنکه دارای بی نهایت

جفت مختصات قطبی است

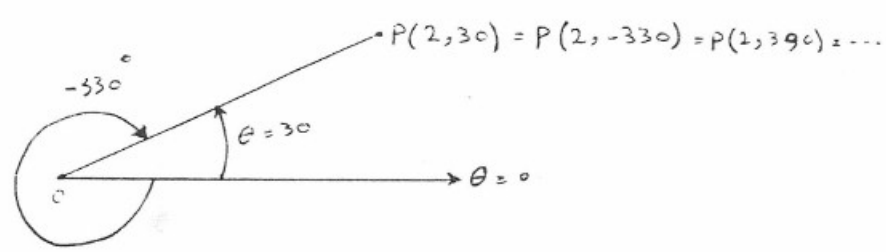


r: فاصله جهت دار از O تا P

θ: زاویه جهت دار از پرتو نخستین تا OP

☑ زاویه θ مثبت است اگر در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت اندازه گیری شود و منفی است اگر در جهت حرکت

عقربه های ساعت اندازه گیری گردد.

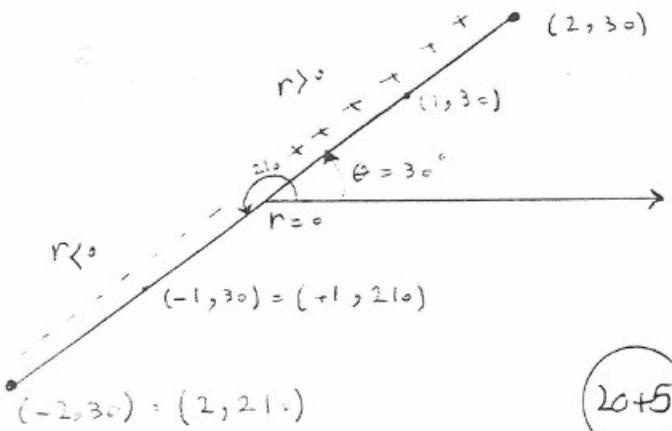


مقادیر منفی r: پرتو θ=30° و پرتو θ=210° همراه با هم یک خط کامل می سازند که از O می گذرد. هرگاه زاویه بین پرتوها

180° باشد آنها یک خط راست می سازند در اینصورت می گوییم که هر پرتو مقابل پرتو دیگر است. نقاط روی پرتو

θ = α دارای مختصات قطبی (r,α) با ضابطه r≥0 اند نقاط روبرو پرتو مقابل θ = α + 180 دارای مختصات

(r,α) با ضابطه r≤0 هستند.



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله دما و نامعادلات مختصات قطبی :

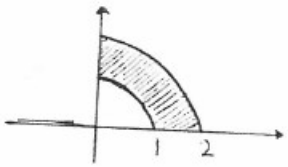
$r=a \rightarrow |a|$ معادله دایره‌ای به شعاع (مرکز مبدأ)

$r=1$ و $r=-1$ هر دو دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ است.

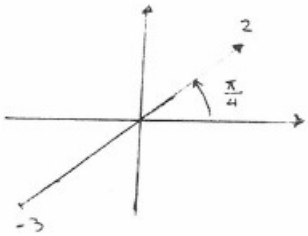
$\theta=\theta_0$ خطی است که از مبدأ می‌گذرد و زاویه θ_0 با پرتو نخستین (محور x) دارد

← مثال : نمودار مجموعه‌های زیر را رسم کنید

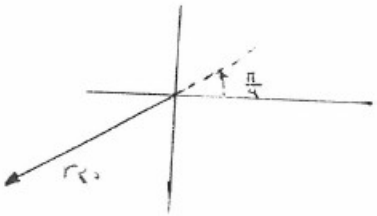
الف) $\begin{cases} 1 \leqslant r \leqslant 2 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$



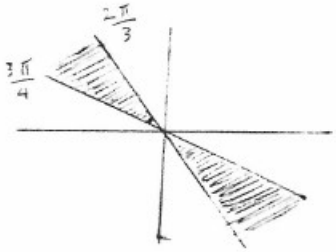
ب) $\begin{cases} -3 \leqslant r \leqslant 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$



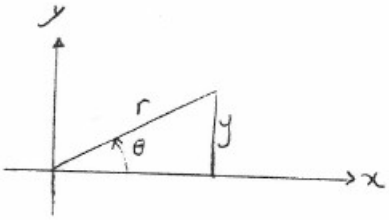
ج) $\begin{cases} r \leqslant 0 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$



د) $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$



تبدیل معادله‌های دکارتی به قطبی و برعکس :



$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$x^2+y^2=r^2 \qquad \frac{y}{x} = \tan\theta$

پرتو نخستین

(این روابط $\sin\theta$ و $\cos\theta$ در حالتی که r مثبت است تعریف می‌شود)

در حالتی هم که r منفی باشد برقرارند چون $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta \qquad \sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

← مثال) معادلات زیر را به فرم قطبی تبدیل کنید.

① $y^2-3x^2-4x-1=0$

$\rightarrow r^2\sin^2\theta - 3r^2\cos^2\theta - 4r\cos\theta - 1 = 0$

$r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - 4r^2\cos^2\theta - 4r\cos\theta - 1 = 0$

$r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) - 4r^2\cos^2\theta - 4r\cos\theta - 1 = 0$

$r^2 = 4r^2\cos^2\theta + 4r\cos\theta + 1 \longrightarrow r^2 = (2r\cos\theta+1)^2 \xrightarrow[\text{جذر}]{} \boxed{r = 2\cos\theta + 1}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

② $x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3+2xy^2-y^2=0$

$r^4\cos^4\theta+r^4\sin^4\theta+2r^4\sin^2\theta\cos^2\theta+2r^3\cos^3\theta+2r^3\cos\theta\sin^2\theta-r^2\sin^2\theta=0$

$r^4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2+2r^3\cos\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-r^2\sin^2\theta=0$

$r^4+2r^3\cos\theta-r^2\sin^2\theta=0 \longrightarrow r^2+2r\cos\theta-\sin^2\theta=0$

$r^2+2r\cos\theta-(1-\cos^2\theta)=0 \longrightarrow (r+\cos\theta)^2=1 \xrightarrow{\text{جذر}} r=1-\cos\theta$

③ $x^2-y^2=25\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=25\sqrt{r^2}=25r$

$r^2\cos 2\theta=25r \longrightarrow r\cos 2\theta=25$

مثال) معادلات زیر را به فرم دکارتی تبدیل کنید.

① $r=\dfrac{4}{2\cos\theta-\sin\theta} \longrightarrow r(2\cos\theta-\sin\theta)=4 \longrightarrow 2x-y=4 \longrightarrow y=2x-4$ (شیب خط 2)

(عرض از مبدأ: -4)

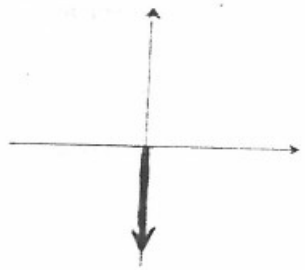
② $r+\sin\theta=2\cos\theta \xrightarrow{\times r} r^2+r\sin\theta=2r\cos\theta \longrightarrow x^2+y^2+y=2x$

$\longrightarrow (x-1)^2+(y-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{5}{4}$ دایره

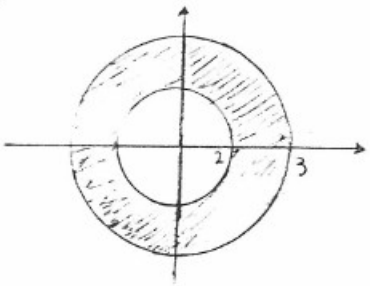
③ $r=4\tan\theta\sec\theta \longrightarrow r=4\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \xrightarrow{\times r} r^2\cos^2\theta=4r\sin\theta \longrightarrow x^2=4y$

④ $r\sin\theta=e^{r\cos\theta} \longrightarrow y=e^x$ تابع نمایی

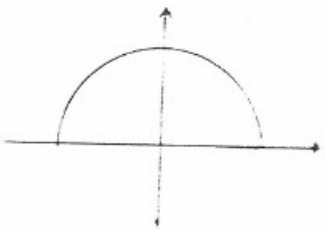
مثال) نمودار مجموعه‌های نشانی را که مختصات قطبی آنها در معادله‌ها و نامعادله‌های برصدق می‌کند را بکشید.



② $\begin{cases} r\leq 0 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases}$



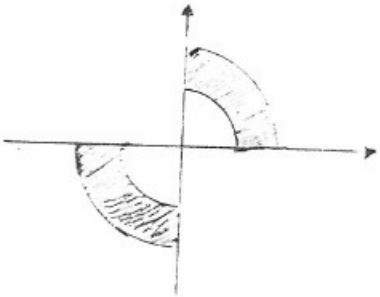
① $2\leq r\leq 3$



④ $r=1$

$0\leq\theta\leq\pi$

20+6



③ $\begin{cases} 1\leq|r|\leq 2 \\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \end{cases}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) مختصات قطبی زیر را به دکارتی تبدیل کنید

① $(0, \pi^2) \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta = 0\cos(\pi^2) = 0 \\ y = r\sin\theta = 0\sin(\pi^2) = 0 \end{cases}$ $\quad (0, 0)$

② $(2, 5\frac{\pi}{6}) \longrightarrow \begin{cases} x = 2\cos(5\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3} \\ y = 2\sin(5\frac{\pi}{6}) = 1 \end{cases}$ $\quad (-\sqrt{3}, 1)$

مثال) نمایش های نقطه به مختصات دکارتی را به قطبی تبدیل کنید. (به انضمام r های منفی)

① $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2+2} = \pm 2 \\ \tan\theta = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} (2, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi) \\ (-2, \frac{\pi}{4} + 2n\pi) \end{matrix}$

② $(0, 4) \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{0+16} = \pm 4 \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{4}{0}) \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} (4, \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \\ (-4, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi) \end{matrix}$

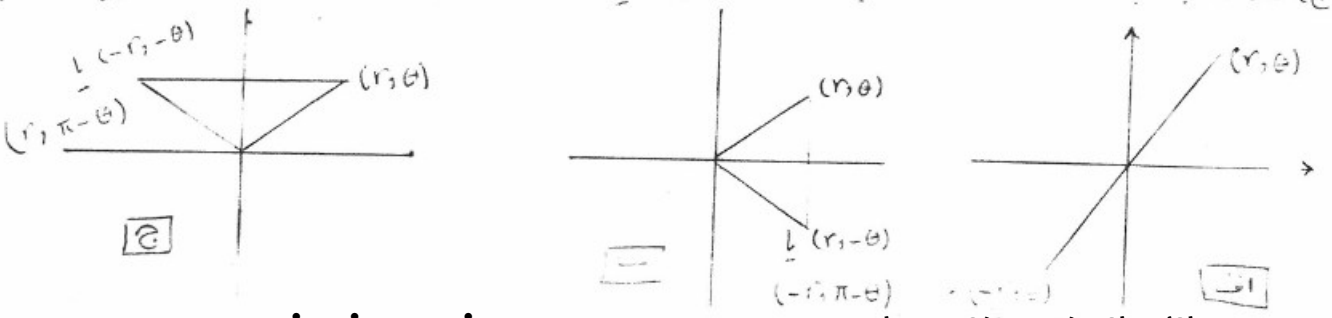
ترسیم نمودار در دستگاه مختصات قطبی.

تقارن و شیب در مبدأ: ۳ نوع تقارن را به آسانی می توان در نمودار یک معادله قطبی تشخیص داد.

الف) نمودار نسبت به مبدأ متقارن است اگر با تبدیل r به r- یا تبدیل θ به θ+π معادله تغییر نکند.

ب) نمودار نسبت به محور xها متقارن است اگر با تبدیل θ به θ- یا تبدیل جفت (r, θ) به جفت (-r, π-θ) معادله تغییر نکند.

ج) نمودار نسبت به محور y تقارن دارد اگر با تبدیل θ به π-θ یا تبدیل جفت (r, θ) به جفت (-r, -θ) معادله تغییر نکند.

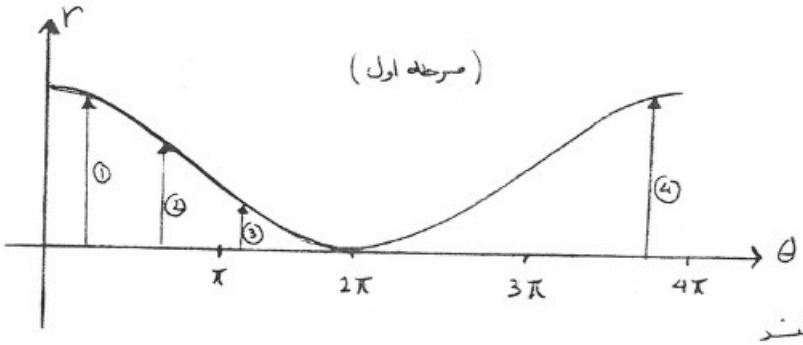


www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

روشی برای ترسیم نمودار: راهی برای ترسیم نمودار یک معادله قطبی $r=f(\theta)$ این است که جدولی از مقادیر (r,θ) تشکیل دهیم، نقاط متناظر را مشخص کنیم و آنها را به ترتیب صعودی θ به هم وصل کنیم. اگر تعداد نقاط کافی نبود که طوق‌ها و منحنی‌های نمودار مشخص گردد این روش کارساز است.

روشی اساسی و سریعتر برای رسم نمودار $r=f(\theta)$: ① نخست نمودار $r=f(\theta)$ را در صفحه $r\theta$ ی دکارتی رسم می‌کنیم (یعنی مقادیر θ را روی یک محور افقی و مقادیر متناظر r را روی یک محور قائم مشخص می‌کنیم)

② سپس نمودار دکارتی را به عنوان یک «جدول» به کار می‌گیریم و با استفاده از آن، نمودار مختصات قطبی را رسم می‌کنیم

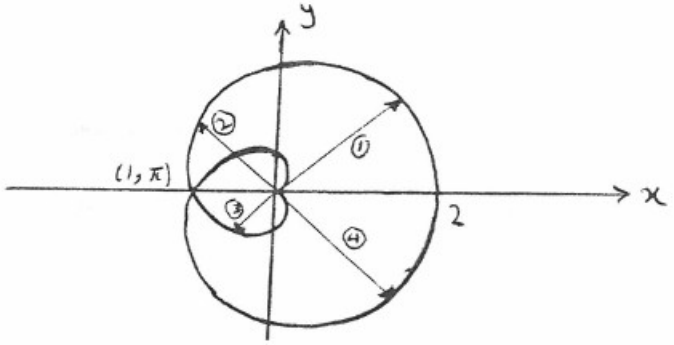


← مثال) $r=1+\cos\frac{\theta}{2}$ را ترسیم می‌کنیم

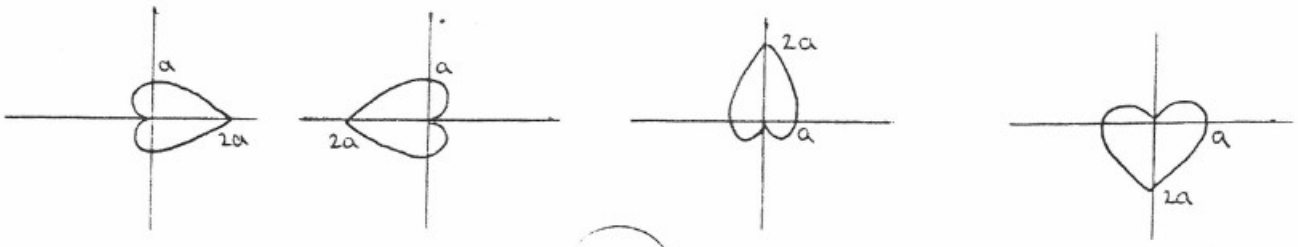
$\cos\theta$ ← دوره تناوب 2π

$\cos\frac{\theta}{2}$ ← دوره تناوب 4π

☑ نمودار نسبت به محور xها تقارن دارد چون $\theta \to -\theta$ تغییر نمی‌کند



☑ به طور کلی معادلات بصورت $r=a(1\pm\cos\theta)$ و $r=a(1\pm\sin\theta)$ را دلوار گویند.



$r=a(1+\cos\theta)$ $\quad$ $r=a(1-\cos\theta)$ $\quad$ $r=a(1+\sin\theta)$ $\quad$ $r=a(1-\sin\theta)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

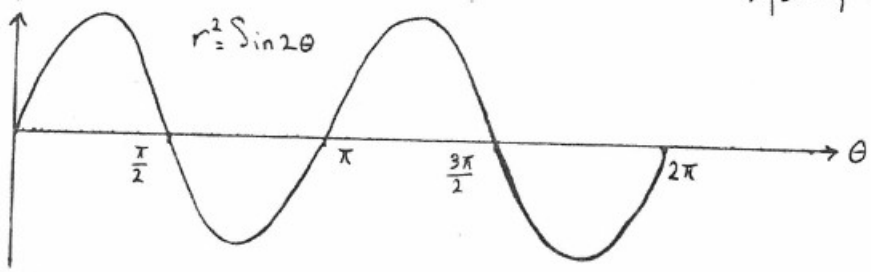
☑ به طور کلی نمودار معادله $r = a\cos n\theta$ یا $r = a\sin n\theta$ یک گل است که اگر n فرد باشد

دارای n پر و اگر n زوج باشد دارای 2n پر می باشد.

← مثال) یک پروانه: نمودار خم $r^2 = \sin 2\theta$ را رسم کنید.

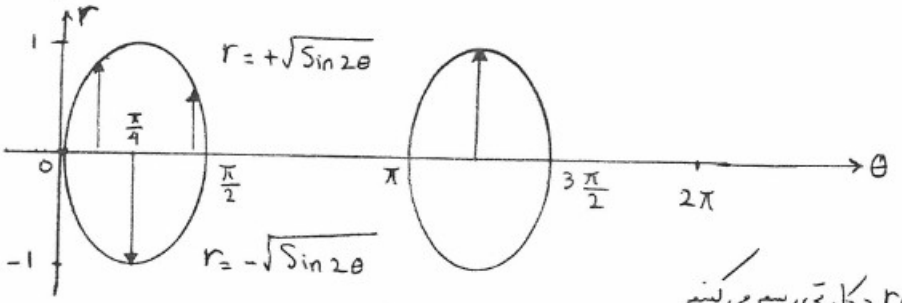
ابتدا نمودار را با ترسیم r^2 (نه r) بصورت تابعی برحسب θ آغاز می کنیم پس از اینجا به نمودار $r = \pm\sqrt{\sin 2\theta}$ در صفحه

$r\theta$ می رسیم و سپس نمودار قطبی را رسم می کنیم (از طرفی $r \to -r$ پس نسبت به مبدأ تقارن دارد)



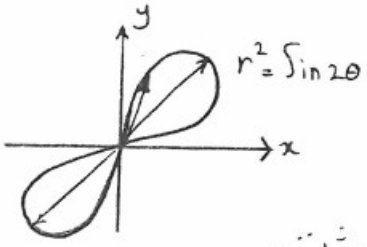
صفحه $r^2\theta$

- اعداد منفی ریشه دوم ندارند



صفحه $r\theta$

- وقتی نمودار r را برحسب θ در صفحه $r\theta$ دکارتی رسم می کنیم



نقاطی را که در آنجا r^2 منفی است نادیده می گیریم ولی قسمت های

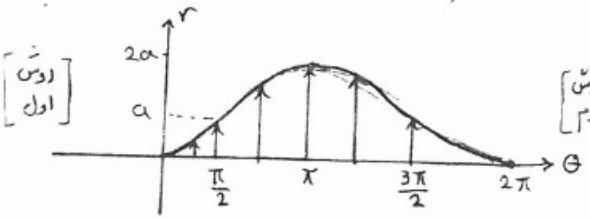
+ و − را از روی نقاطی که r^2 در آنجا مثبت است رسم می کنیم

- در صفحه $r\theta$ ی قطبی بردارهای شعاعی نمودار قبلی نمودار خطی را دوبار «می پوشانند»

← مثال) دلوار: نمودار خم $r = a(1-\cos\theta)$ ، $a > 0$ ، را رسم کنید.

چون $\cos(-\theta) = \cos\theta$ پس نمودار نسبت به محور x ها تقارن دارد. $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

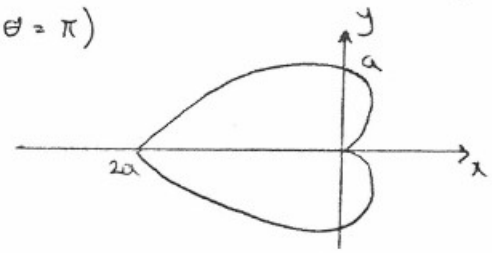
(پس min $r = 0$ $\theta = 0$)



(max $r = 2a$ $\theta = \pi$)

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	a
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3a}{2}$
π	2a

روش دوم

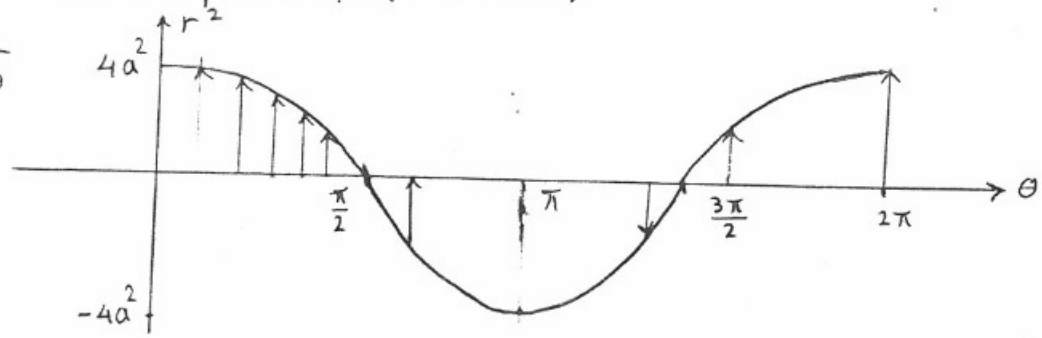


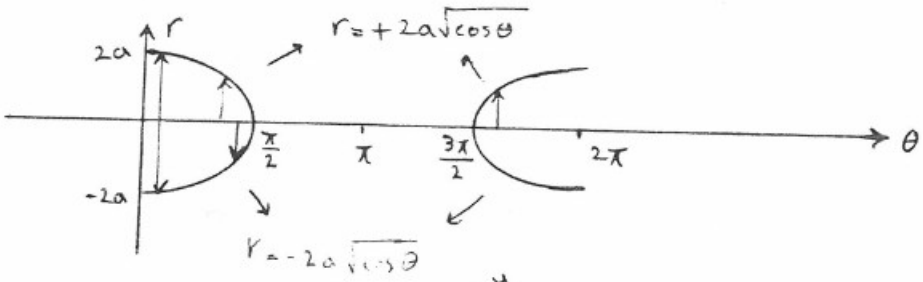
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

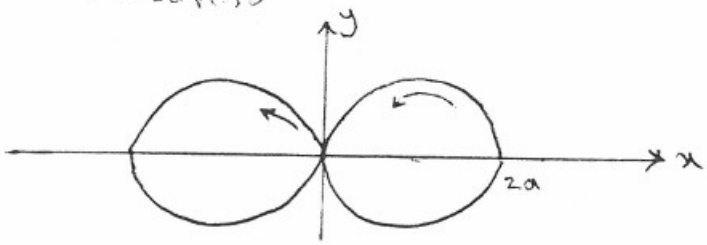
مثال) خم $r^2 = 4a^2\cos\theta$ را رسم کنید؟ ($r \to -r$ پس این خم نسبت به مبدأ متقارن است)

($\theta \to -\theta$ نسبت به محور x ها هم متقارن دارد)

$r = \pm 2a\sqrt{\cos\theta}$



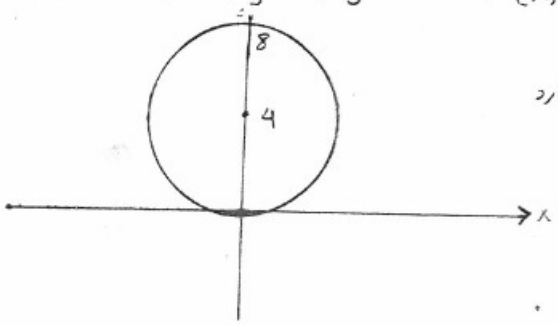




مثال) $r = 8\sin\theta$ را رسم کنید.

روش اول $\xrightarrow{\times r} r^2 = 8r\sin\theta \longrightarrow x^2 + y^2 - 8y = 0 \longrightarrow (x)^2 + (y-4)^2 = 16$ دایره‌ای

θ	r
$-\frac{\pi}{2}$	-8
$-\frac{\pi}{6}$	-4
0	0
$\frac{\pi}{6}$	4
$\frac{\pi}{2}$	8



روش دوم : نسبت به محور y ها متقارن دارد

$r \to -r$

$\theta \to -\theta$

مثال) $r = a\sin 2\theta$ را رسم کنید.

نسبت به محور y ها متقارن دارد $\longrightarrow$ معادله تغییر نمی‌کند $\longrightarrow (r,\theta) \longrightarrow (-r,-\theta)$

" " x ها " " $\longrightarrow$ معادله تغییر نمی‌کند $\longrightarrow (r,\theta) \longrightarrow (-r,\pi-\theta)$

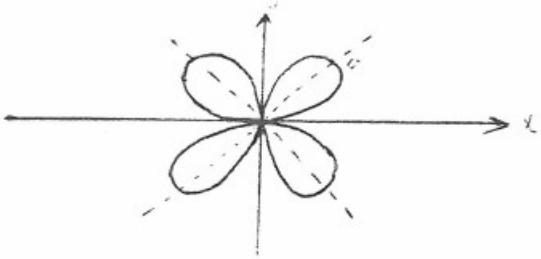
" " مبدأ " " $\longrightarrow$ معادله تغییر نمی‌کند $\longrightarrow (r,\theta) \longrightarrow (r,\pi+\theta)$

20+8

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

وقتی منحنی از ۰ تا $\frac{\pi}{4}$ تغییر می‌کند r از ۰ تا a صعود می‌کند و وقتی θ از $\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{\pi}{2}$ صعود می‌کند r از a به صفر نزول می‌کند

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	a
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0



مثال) $r=\cos 3\theta$ را رسم کنید

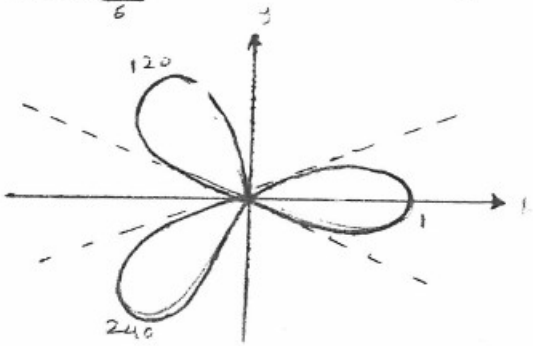
$\cos 3\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$\begin{cases} k=0 \longrightarrow \frac{\pi}{6} \\ k=1 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ k=2 \longrightarrow \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ $\begin{cases} k=3 \longrightarrow \frac{7\pi}{6} \\ k=4 \longrightarrow \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} k=5 \longrightarrow \frac{11\pi}{6} \end{cases}$

دارای 3 پر است

جاهایی که صفر می‌شود

θ	r
0	1
$\frac{\pi}{6}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0
150	0
120	1
240	1



☑ در حالت کلی

$r = a \pm b\cos\theta$

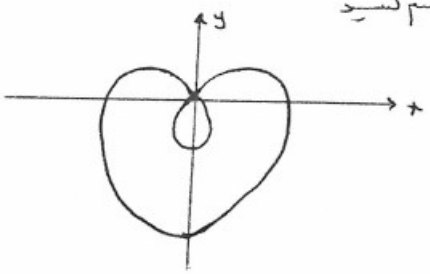
$r = a \pm b\sin\theta$

$\longleftarrow$

$\begin{cases} a>b & \text{لیماسون (یک حلقه)} \\ a=b & \text{دلگون} \\ b>a & \text{لیماسون دو حلقه} \end{cases}$

مثال) $r = 1 - 2\sin\theta$ را رسم کنید

θ	r
$-\frac{\pi}{2}$	3
0	1
$\frac{\pi}{2}$	-1
π	1
$\frac{\pi}{6}$	0



نسبت به محور y ها تقارن دارد

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

یافتن نقاط تقاطع خم های قطبی :

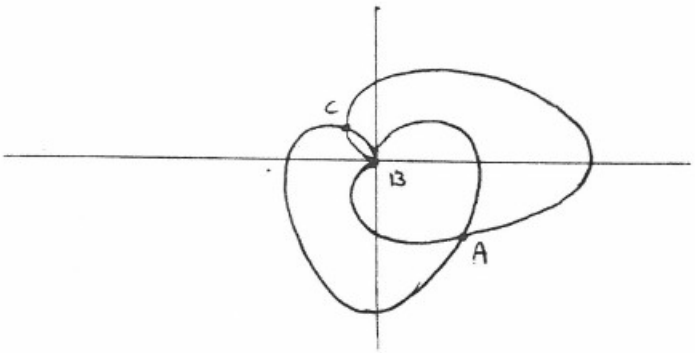
تنها راه مطمئن برای مشخص کردن همه نقاط تقاطع، ترسیم نمودار معادله هاست .

مثال) محل تقاطع دو منحنی زیر را بیابید .

$$① \begin{cases} r = a(1-\sin\theta) \\ r = a(1+\cos\theta) \end{cases} \quad a>1$$

$$r_1 = r_2 \longrightarrow 1-\sin\theta = 1+\cos\theta \longrightarrow \tan\theta = -1 \begin{cases} \theta = \frac{3\pi}{4} \\ \theta = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

پس محل تقاطع $\left(a(1-\frac{1}{\sqrt{2}}), \frac{3\pi}{4}\right)$ و $\left(a(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7\pi}{4}\right)$ و نیز $(0,0)$



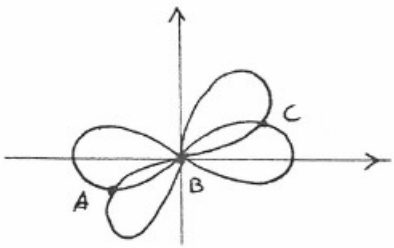
$$② \begin{cases} r^2 = \sin 2\theta \\ r^2 = \cos 2\theta \end{cases}$$

حل: $r_1^2 = r_2^2 \longrightarrow \sin 2\theta = \cos 2\theta \longrightarrow \tan 2\theta = 1$

$2\theta = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$, $2\theta = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow \theta = \frac{5\pi}{8}$

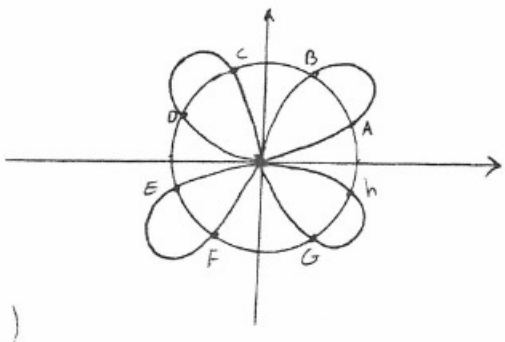
$r^2 = \sin\frac{\pi}{4} \longrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

محل تلاقی $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{5\pi}{8}\right)$, $(0,0)$



$$③ \begin{cases} r = 1 & \text{معادله دایره} \\ r^2 = 2\sin 2\theta & \text{یک گل 4 پر} \end{cases}$$

20+9



$2\sin 2\theta = 1 \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}, \ldots$

$(1, \pm\frac{\pi}{12})$; $(1, \pm\frac{5\pi}{12})$; $(1, \pm\frac{13\pi}{12})$; $(1, \pm\frac{17\pi}{12})$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مساحت در مختصات قطبی: مساحت ناحیه بین مبدا و $r=f(\theta)$ ، $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

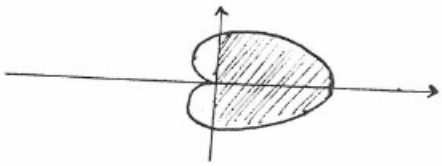
مساحت ناحیه $r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)$ ، $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2-r_1^2)\, d\theta$$

مثال) در مثال‌های زیر مساحت ناحیه محدود به خم‌ها را بیابید.

① $r=2(1+\cos\theta)$ دلوار

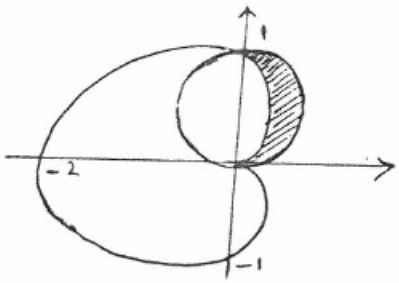
$$A=\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, 4(1+\cos\theta)^2 = 6\pi$$



---

② $\begin{cases} r=\sin\theta & \text{داخل} \\ r=1-\cos\theta & \text{خارج} \end{cases}$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2\, d\theta = 1-\frac{\pi}{4}$$

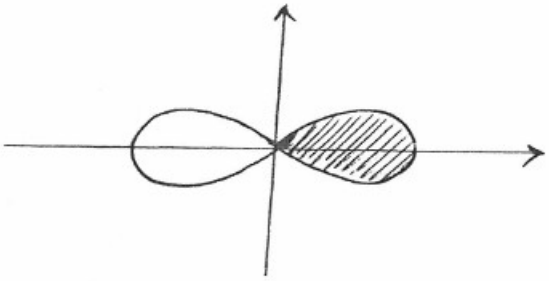


---

③ $r^2=\cos 2\theta$ مساحت یک حلقه از پروانه

$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}$$

$\begin{cases} 0 \longrightarrow \frac{\pi}{4} \\ , \\ -\frac{\pi}{4} \longrightarrow 0 \end{cases}$

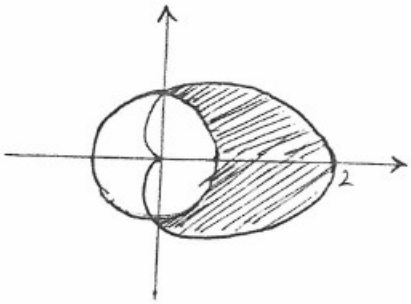


---

④ $\begin{cases} r=1 & \text{خارج} \\ r=1+\cos\theta & \text{داخل} \end{cases}$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[1-(1+\cos\theta)^2\right] d\theta$$

$$=2+\frac{\pi}{4}$$



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال های زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

① $\int x(\sqrt[5]{x-3})\,dx =$

$\xrightarrow{\text{کم و زیاد می‌کنیم } (-3+3)} \int (x-3+3)\sqrt[5]{(x-3)}\,dx = \int (x-3)^{\frac{6}{5}}dx + 3\int (x-3)^{\frac{1}{5}}dx =$

$\xrightarrow[dx=du]{x-3=u} = \dfrac{(x-3)^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}} + \dfrac{3(x-3)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C$

توجه: $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

---

② $\int \dfrac{x-5}{2\sqrt{x-1}}\,dx = \dfrac{1}{2}\int (x-1-4)(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx = \dfrac{1}{2}\int (x-1)^{\frac{1}{2}}dx - \dfrac{4}{2}\int (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$

$\xrightarrow[dx=du]{x-1=u} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \dfrac{\frac{4}{2}\,(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

---

③ $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \dfrac{dx}{1+x^2} = x - \tan^{-1}x + C$

---

④ $\int (x-1)(\sqrt{x-2})\,dx = \int (x-2+1)(x-2)^{\frac{1}{2}}dx = \int (x-2)^{\frac{3}{2}}dx + \int (x-2)^{\frac{1}{2}}dx$

$\xrightarrow[dx=du]{x-2=u} = \dfrac{(x-2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \dfrac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

---

⑤ $\int (x^2-4x)(x-2)^9\,dx \xrightarrow[\text{اتحاد می‌شود}]{\text{اگر به جای 4 اولی 4 کم و زیاد کنیم تبدیل به}} = \int (x^2-4x+4-4)(x-2)^9\,dx$

$\int (x-2)^{11}dx - 4\int (x-2)^9dx \xrightarrow[dx=du]{(x-2)=u} = \dfrac{(x-2)^{12}}{12} - \dfrac{4(x-2)^{10}}{10} + C$

---

⑥ $\int \dfrac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}\,dx = \int \dfrac{\overbrace{x^2-2x+1}^{\text{اتحاد}}+4}{(x-1)^2}\,dx = \int \dfrac{(x-1)^2+4}{(x-1)^2}\,dx$

$\int dx + 4\int \dfrac{dx}{(x-1)^2} \xrightarrow[dx=du]{(x-1)=u} x - \dfrac{4}{(x-1)} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\int \sqrt{x+2}\,dx = \int (x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx \xrightarrow[dx=du]{x+2=u} = \dfrac{(x+2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$

---

⑧ $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{3x-1}} = \int x\,(3x-1)^{-1/2}\,dx \xrightarrow{\text{در بیرون پرانتز جمع می‌سازیم } (3x-1)} \dfrac{1}{3}\int 3x\,(3x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$\dfrac{1}{3}\int (3x-1+1)(3x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{1}{3}\int (3x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx + \dfrac{1}{3}\int (3x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx \xrightarrow[dx=\frac{du}{3}]{3x-1=u}$

$\dfrac{2(3x-1)^{3/2}}{27} + \dfrac{2(3x-1)^{\frac{1}{2}}}{9} + C$

---

⑨ $\int e^{2x}\,dx \xrightarrow[dx=\frac{du}{2}]{2x=u} = \dfrac{e^{2x}}{2} + C$

---

⑩ $\int \sin 7x\,dx \Rightarrow \xrightarrow[dx=\frac{du}{7}]{7x=u} = -\dfrac{1}{7}\cos 7x + C$

---

⑪ $\int x^6(1+\tan^2(x)^7)\,dx \Rightarrow \xrightarrow[x^6dx=\frac{du}{7}]{x^7=u} = \dfrac{1}{7}\int (1+\tan^2 u)\,du = \dfrac{1}{7}\tan x^7 + C$

---

⑫ $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \xrightarrow[\frac{dx}{\sqrt{x}}=2du]{\sqrt{x}=u} 2\int \sin u\,du = -2\cos\sqrt{x} + C$

---

⑬ $\int (2x+1)\sqrt[3]{(x^2+x+5)}\,dx \xrightarrow[du=(2x+1)dx]{x^2+x+5=u} = \int \sqrt[3]{u}\,du = \dfrac{(x^2+x+5)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$

---

⑭ $\int (\tan^3 x + \tan^5 x)\,dx = \int \tan^3 x\,(1+\tan^2 x)\,dx \xrightarrow[(1+\tan^2 x)dx=du]{\tan x=u}$

$\int u^3\,du = \dfrac{\tan^4 x}{4} + C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۵) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}}\, dx = \int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos x \cos^6 x}}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \sqrt[3]{\tan x}\, dx$

$\int \sec^2 x \sqrt[3]{\tan x}\, dx \xrightarrow[\sec^2 x\, dx = du]{\tan x = u} = \int u^{\frac{1}{3}}\, du = \frac{\tan^{4/3} x}{\frac{4}{3}} + C$

---

(۱۶) $\int \underbrace{(\cos^4 x - \sin^4 x)}_{\text{اتحاد}} (\sin x + \cos x)^8\, dx \rightarrow \int \overbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}^{1} \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\text{اتحاد}} \times \rightarrow$

$\leftarrow (\sin x + \cos x)^8\, dx = \int (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)^8\, dx =$

$\int (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^9\, dx \xrightarrow[(\cos x - \sin x)dx = du]{\sin x + \cos x = u} = \int u^9\, du = \frac{(\sin x + \cos x)^{10}}{10} + C$

---

(۱۷) $\int (\tan x + \cot x)^5 (\tan x - \cot x)\, dx = \int (\tan x + \cot x)^4 (\tan^2 x - \cot^2 x)\, dx \Rightarrow$

$\xrightarrow[(1 + \tan^2 x - 1 - \cot^2 x)dx = du]{\tan x + \cot x = u} = \int u^4\, du = \frac{(\tan x + \cot x)^5}{5} + C$

---

(۱۸) $\int \sin^2 2x \tan x\, dx = \int 4\cos^2 x \sin^2 x \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = 4 \int \cos x \sin^3 x\, dx$

$\xrightarrow[\cos x\, dx = du]{\sin x = u} = 4 \frac{\sin^4 x}{4} + C = \sin^4 x + C$

---

(۱۹) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\cot x}} = \int \frac{\csc^2 x\, dx}{(\cot x)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[-\csc^2 x\, dx = du]{\cot x = u} - \int u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{-\cot^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2}} + C$

---

(۲۰) $\int 3(2x+1)\sqrt{x}\, (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = 3 \int (2x+1)\sqrt{x(x+1)}\, dx \xrightarrow[(2x+1)dx = du]{x(x+1) = u}$

$3 \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{3(x^2+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۱) $\int \sin 2x\,(a\sin^2 x + b\cos^2 x + c)^m\,dx \xrightarrow[(2a\sin x\cos x - 2b\sin x\cos x)dx = du]{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c = u}$

$\int \frac{1}{a-b}\,u^m\,du = \frac{1}{(a-b)}\,\frac{(a\sin^2 x + b\cos^2 x + c)^{m+1}}{m+1}$ نکته: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

---

(۲۲) $\int \frac{(2x+1)^{10}}{(x+1)^{12}}\,dx = \int \frac{(2x+1)^{10}}{(x+1)^{10}} \times \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{10} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

$\xrightarrow[\frac{dx}{(x+1)^2} = du]{\frac{2x+1}{x+1} = u} = \int u^{10}\,du = \frac{1}{11}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{11} + C$

---

(۲۳) $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^9 x}\,dx = \int \frac{\sin^7 x}{\cos^7 x \cos^2 x}\,dx = \int \tan^7 x \sec^2 x\,dx = \frac{\tan^8 x}{8} + C$

---

(۲۴) $\int \frac{(2x+3)^4}{(4x+5)^5}\,dx = \int \left(\frac{(2x+3)}{4x+5}\right)^4 \frac{1}{(4x+5)^2}\,dx = \xrightarrow[\frac{-2dx}{(4x+5)^2} = du]{\frac{2x+3}{4x+5} = u} \frac{dx}{(4x+5)^2} = \frac{-du}{2}$

$= \frac{-1}{2}\int u^4\,du = \frac{-1}{2\times 4}\left(\frac{2x+3}{4x+5}\right)^4 + C$

---

(۲۵) $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[3]{\ln(x^2+2x)}\,(x^2+2x)} = \xrightarrow[\frac{2(x+1)dx}{x^2+2x} = du]{\ln(x^2+2x) = u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/3}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du$

$= \frac{1}{2} \times \frac{(\ln(x^2+2x))^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C$

---

(۲۶) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx \xrightarrow[e^x dx = du]{1+e^x = u} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{(1+e^x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

---

(۲۷) $\int \frac{dx}{(\tan^{-1}x)^3(1+x^2)} = \xrightarrow[\frac{dx}{1+x^2} = du]{\tan^{-1}x = u} = \frac{(\tan^{-1}x)^{-2}}{-2} + C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۸) $\int x\cos 2x^2\,dx \xrightarrow[x\,dx=\frac{du}{4}]{2x^2=u} = \frac{1}{4}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}\sin 2x^2 + C$

---

۲۹) $\int \frac{\sin(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,\sin(\tan x)\,dx \xrightarrow[\sec^2 x\,dx=du]{\tan x=u} = -\cos(\tan x)+C$

---

۳۰) $\int \sin 2x\sqrt[3]{\cos x}\,dx = 2\int \sin x\cos x(\cos x)^{\frac{1}{3}}\,dx = 2\int \sin x(\cos x)^{\frac{4}{3}}\,dx$

$\xrightarrow[-\sin x\,dx=du]{\cos x=u} = -2\,\frac{\cos^{\frac{7}{3}} x}{\frac{7}{3}} + C$

---

۳۱) $\int \frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx \xrightarrow[\frac{4dx}{(x+2)^2}=du]{\frac{x-1}{x+2}=u}$

$\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}\times\frac{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + C$

---

۳۲) $\int \frac{\cos x+\sin x}{1-\sin 2x}\,dx \xrightarrow[\sin 2x=2\sin x\cos x]{\sin^2 x+\cos^2 x=1} \int \frac{\cos x+\sin x}{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin 2x}\,dx = \int \frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x)^2}\,dx$

$\xrightarrow[(\cos x+\sin x)dx=du]{\sin x-\cos x=u} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{\sin x-\cos x} + C$

---

۳۳) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}-x} = \times\frac{\text{مزدوج}}{\text{مزدوج}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}-x}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \int \frac{x(\sqrt{x^2+1}+x)}{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}\,dx$

$\int (x\sqrt{x^2+1}+x^2)\,dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + \frac{x^3}{3} + C \quad \left\{\begin{matrix} x^2+1=u \\ 2x\,dx=du \end{matrix}\right\}$: نکته

---

۳۴) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} \xrightarrow[\frac{dx}{x}=du]{\ln x=u} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = \frac{-1}{\ln x} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۵) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx \quad (0<x<\frac{\pi}{2}) \xrightarrow[\sin 2x = 2\sin x\cos x]{\sin^2 x+\cos^2 x=1} \int \sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\, dx \xrightarrow{\text{با توجه به بازه}}$

$\int +(\cos x-\sin x)\, dx = \sin x+\cos x+C$

---

۳۶) $\int \frac{dx}{1+\sin x} \times \frac{\text{مزدوج}}{\text{مزدوج}} = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx =$

$\int \sec^2 x\, dx - \int \sec x \cdot \tan x\, dx = \tan x - \sec x + C$

---

۳۷) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} \times \frac{\text{مزدوج مخرج}}{\text{مزدوج مخرج}} = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x(1-\sin x)\, dx}{\cos^2 x} \quad \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

$-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx \Rightarrow \int \sec x \tan x\, dx - \int \tan^2 x\, dx = \int \sec x \tan x - \int (\tan^2 x+1-1)\, dx =$

$\sec x - \tan x + x + C$

---

۳۸) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \longrightarrow \int \frac{dx}{(1+(\sqrt{x})^2)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}=u}{\frac{dx}{2\sqrt{x}}=du} = 2\int \frac{du}{1+u^2} \Rightarrow 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

---

۳۹) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x}\, dx \Rightarrow \int \frac{2\times 2^x - 5\times 5^x}{10^x}\, dx = 2\int (\frac{1}{5})^x dx - 5\int (\frac{1}{2})^x dx = 2(\frac{1}{5})^x \frac{1}{\ln\frac{1}{5}}$

$-5(\frac{1}{2})^x \frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + C \Rightarrow -\frac{5}{\ln 2}(\frac{1}{2})^x - \frac{2}{\ln 5}(\frac{1}{5})^x + C$

---

۴۰) $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\, dx = \int \frac{\sqrt{x^4+\frac{1}{x^4}+2}}{x^3}\, dx \longrightarrow \int \frac{\sqrt{\frac{x^8+1+2x^4}{x^4}}}{x^3}\, dx = \int \frac{\sqrt{x^8+1+2x^4}}{x^5}\, d$

$\longrightarrow \int \frac{\sqrt{(x^4+1)^2}}{x^5}\, dx = \int \frac{x^4+1}{x^5}\, dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^5} = \ln x - \frac{1}{4x^4} + C$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۴۱) $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int (1-\frac{1}{x^2})\,x^{\frac{3}{4}}\,dx \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}})\,dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C$

---

(۴۲) $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx = \int \frac{\sqrt[5]{(1-x)^2}}{1-x}\,dx = \int (1-x)^{\frac{2}{5}}(1-x)^{-1}\,dx = \int (1-x)^{-\frac{3}{5}}\,dx =$

$-\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{2}{5}} + C$

---

(۴۳) $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}\,dx \xrightarrow[du=\frac{n+2}{2}x^{\frac{n}{2}}\,dx]{u=x^{\frac{n+2}{2}} \to x^{n+2}=u^2} = \frac{n+2}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{n+2}{2}\sinh^{-1} u + C \Rightarrow$

$\frac{n+2}{2}\sinh^{-1}(x^{n+2/2}) + C$

نکته : $\frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1$

---

(۴۴) $\int \frac{(1-\sin\frac{x}{\sqrt{2}})^2}{\sin x/\sqrt{2}}\,dx \Rightarrow \int \frac{1-2\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \sin^2\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx = \int (\csc\frac{x}{\sqrt{2}} - 2 + \sin\frac{x}{\sqrt{2}})\,dx =$

$\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{\sqrt{2}} - \cot\frac{x}{\sqrt{2}}\right| - 2x - \sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

---

(۴۵) $\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x} \Rightarrow \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx \xrightarrow[du=(\sec^2 x+\sec x\tan x)d]{u=\sec x+\tan x}$

$\int \frac{du}{u} = \ln|\sec x + \tan x|$

---

(۴۶) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\cos e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[du=\frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{2\sqrt{x}}]{u=e^{\sqrt{x}}} = 2\int \cos u\,du = 2\sin e^{\sqrt{x}} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال‌گیری از توابع گویای $\sin x$ و $\cos x$: اگر تابع انتگرال تابع گویایی از $\sin x$ و $\cos x$ باشد می‌توان با جانشینی زیر آن را به یک تابع گویا تبدیل کرد.

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{2du}{1+u^2} \end{cases} \quad \text{if} \quad u = \tan x/2$$

$$\begin{cases} \sin 2x = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \cos 2x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2} \end{cases} \quad \text{if} \quad u = \tan x$$

① $$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{\frac{\cancel{2}du}{\cancel{1+u^2}}}{\frac{\cancel{2}u^2}{\cancel{1+u^2}}} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} + C = -\frac{1}{\tan x/2} + C =$$

$$-\cot x/2 + C$$

---

② $$\int \csc x\, dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\frac{\cancel{2}du}{\cancel{1+u^2}}}{\frac{\cancel{2}u}{\cancel{1+u^2}}} = \ln u + C = \ln\left|\tan x/2\right| + C$$

---

③ $$\int \frac{dx}{1-\sin 2x} = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1-\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{du}{1+u^2-2u} = \int \frac{du}{(u-1)^2} = -\frac{1}{u-1} + C =$$

نکته: در این مثال با توجه به کمان $\sin$ ← $u = \tan x$

$$\frac{-1}{\tan x - 1} + C$$

---

④ $$\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1-\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int \frac{du}{1+u^2-2u+1-u^2} = 2\int \frac{du}{2-2u} = \int \frac{du}{1-u} =$$

$$-\ln|1-u| + C = -\ln\left|1-\tan x/2\right| + C$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: برای انتگرال‌گیری توان‌های فرد $\sin x$ و $\cos x$، توان یک را کنار گذاشته و بقیه را به نسبت مثلثاتی مخالف تبدیل می‌کنیم.

نکته: برای انتگرال‌گیری توان‌های زوج $\sin x$ و $\cos x$ از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

① $$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \sin^2 x\, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)\, dx \xrightarrow[\substack{-\sin x\, dx = du \\ \sin x\, dx = -du}]{\cos x = u}$$

$$-\int (1-u^2)\, du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

---

② $$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos x \cos^4 x\, dx = \int \cos x (1-\sin^2 x)^2\, dx = \xrightarrow[\cos x\, dx = du]{\sin x = u}$$

$$\int (1-u^2)^2\, du = \int (1-2u^2+u^4)\, du = u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

---

③ $$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\, dx = \int \frac{1}{4}\, dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x\, dx$$

$$+ \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx \longrightarrow \frac{1+\cos 4x}{2}$$

نکته: در حالت کلی $\sin^2 ax = \frac{1-\cos 2ax}{2}$ $\qquad \cos^2 ax = \frac{1+\cos 2ax}{2}$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx \Longrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

---

④ $$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\, dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\, dx \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \int \underbrace{\sin x}_{du}(\underbrace{1-\cos x}_{u})\, dx = \frac{(1-\cos x)^2}{2} + C$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: برای انتگرال گیری از توان های زوج $\tan x$ و $\cot x$ دو توان کمتر، اضافه و کم می کنیم تا به ۱ و ۱- برسیم و بعد در انتگرال

عوامل $(1+\tan^2 x)$ یا $(1+\cot^2 x)$ را تولید می کنیم.

⑤ $\int \tan^6 x\, dx = \int (\tan^6 x + \tan^4 x - \tan^4 x - \tan^2 x + \tan^2 x + 1 - 1)\, dx \Rightarrow$

$\int [\tan^4 x\,(\tan^2 x+1) - \tan^2 x\,(\tan^2 x+1) + (\tan^2 x+1) - 1]\, dx \Rightarrow \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$

نکته: $\xrightarrow{\text{اگر } n \text{ زوج باشد}} \int \cot^n x\, dx = \frac{-\cot^{n-1}}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}}{n-3} + \cdots - \cot x + x + C$

نکته $\xrightarrow{\text{اگر } n \text{ زوج باشد}} \int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - \frac{\tan^{n-3}}{n-3} + \cdots + \tan x - x + C$

نکته: برای انتگرال گیری از توان های فرد $\tan x$ و $\cot x$ دو توان کمتر، اضافه و کم می کنیم تا به $(-\tan x, \tan x)$ یا $(-\cot x, \cot x)$

برسیم و بعد در انتگرال عوامل $(1+\tan^2 x)$ یا $(1+\cot^2 x)$ را تولید می کنیم:

⑥ $\int \cot^5 x\, dx \Rightarrow \int (\cot^5 x + \cot^3 x - \cot^3 x - \cot x + \cot x)\, dx =$

$\int \cot^3 x\,(1+\cot^2 x) - \cot x\,(1+\cot^2 x) + \cot x\, dx = \frac{-\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C$

نکته: برای محاسبه توان های زوج $\sec x$ یا $\csc x$ از $\csc^2 x$ یا $\sec^2 x$ فاکتور می گیریم و بقیه را تبدیل به $\tan x$ یا $\cot x$ می کنیم.

$\begin{cases} 1+\tan^2 x = \sec^2 x \\ 1+\cot^2 x = \csc^2 x \end{cases}$

⑦ $\int \sec^4 x\, dx \Rightarrow \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx = \int \sec^2 x\,(1+\tan^2 x)\, dx \Rightarrow$

$\xrightarrow[\sec^2 x\, dx = du]{\tan x = u} = \int (1+u^2)\, du = u + \frac{u^3}{3} + C = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$

---

⑧ $\int \csc^6 x\, dx \Rightarrow \int \csc^2 x \csc^4 x\, dx \Rightarrow \int \csc^2 x\,(1+\cot^2 x)^2\, dx = \xrightarrow[-\csc^2 x\, dx = du]{\cot x = u} =$

$-\int (1+u^2)^2\, du = -\int (1+2u^2+u^4)\, du \Rightarrow -\cot x - \frac{2\cot^3 x}{3} - \frac{\cot^5 x}{5} + C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: برای محاسبه توان های فرد $\sec x$ یا $\csc x$: حل به روش جزء به جزء :

⑨ $\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x\,(1+\tan^2 x)\,dx$ $\begin{cases} u=\sec x \to du=\sec x\tan x\,dx \\ dv=(1+\tan^2 x)\,dx \to v=\tan x \end{cases}$

$\int \sec^3 x\,dx = \tan x\sec x - \int \sec x\tan^2 x\,dx \longrightarrow \int \sec^3 x\,dx \Rightarrow \tan x\sec x + \int \sec x\,dx$

$\leftarrow \int \sec^3 x\,dx \Rightarrow 2\int \sec^3 x\,dx = \tan x\sec x + \ln|\sec x+\tan x| \longrightarrow$

$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan x\sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|$

---

⑩ $\int \sec^5 x\,dx = \int \sec^2 x\cdot\sec^3 x\,dx = \begin{cases} u=\sec^3 x \to du=3\sec^3 x\tan x\,dx \\ dv=\sec^2 x\,dx \to v=\tan x \end{cases}$

$\int \sec^5 x\,dx = \tan x\sec^3 x - 3\int \sec^3 x\underbrace{\tan^2 x}_{(\sec^2 x-1)}\,dx \Rightarrow \int \sec^5 x\,dx = \tan x\sec^3 x -$

$3\int \underbrace{\sec^5 x}_{\text{همین انتگرال طرف مسئله}} + 3\int \sec^3 x\,dx \Rightarrow 4\int \sec^5 x\,dx = \tan x\sec^3 x + 3\int \sec^3 x\,dx$

باید جداگانه محاسبه شود ولی چون در مثال قبل محاسبه شده فقط جوابش را ذکر می کنیم.

$\longrightarrow \int \sec^5 x\,dx = \frac{1}{4}\tan x\sec^3 x + \frac{3}{8}\left[\tan x\sec x + \ln(\sec x+\tan x)\right]$

نکته در مورد محاسبه $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$

الف) حداقل یکی از m و n فرد باشد توان 1 را از قسمت فرد جدا کرده و مانند مثال عمل می کنیم.

⑪ $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = \int \sin x\sin^2 x\cos^2 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^2 x\,dx = \begin{cases} \cos x=u \\ -\sin x\,dx=du \\ \sin x\,dx=-d \end{cases}$

$-\int (1-u^2)u^2\,du = -\int u^2\,du + \int u^4\,du = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$

در این مثال توان 1 فرق نمی کند اگر هر کدام یک جدا کنیم

⑫ $\int \cos^5 x\sin^3 x\,dx = \int \cos x\cos^4 x\sin^3 x\,dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)^2\sin^3 x\,dx =$

$\int \cos x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\sin^3 x\,dx = \begin{cases} \sin x=u \\ \cos x\,dx=du \end{cases} = \int (1-2u^2+u^4)u^3\,du =$

$\frac{u^4}{4} - 2\frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{8} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{3} + \frac{\sin^8 x}{8} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) m و n هر دو زوج باشند در این صورت از فرمول‌های زیر استفاده می‌شوند:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

(۱۳) $$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \overbrace{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)}^{\text{تشکیل اتحاد}} dx$$

$$\frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \underbrace{\cos^2 2x}_{I_1} - \underbrace{\cos^3 2x}_{I_2})\,dx$$

$$\int I_1 = \int \cos^2 2x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1$$

$$\int I_2 = \int \cos^3 2x\, dx = \int \cos 2x (1-\sin^2 2x)\,dx \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = u \\ \cos 2x\, dx = \frac{du}{2} \end{cases} = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,du = \frac{1}{2}u - \frac{u^3}{6} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_2$$

پس $$\Rightarrow \int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C_1\right) - \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

نکته: در مورد انتگرال $\int \sec^m x \tan^n x\, dx$: اگر توان $\sec x$ زوج باشد در این صورت $\sec^2 x$ را جدا می‌کنیم بعد تمام $\sec$ ها را با استفاده از قاعدهٔ $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ بر $\tan x$ تبدیل می‌کنیم:

(۱۴) $$\int \sec^2 x \cdot \underbrace{\tan^3 x}_{u^3}\, dx \xrightarrow[du = \sec^2 x\, dx]{u = \tan x} = \frac{\tan^4 x}{4} + C$$

$du \leftarrow u^3$

---

(۱۵) $$\int \sec^4 x \tan^3 x\, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^3 x\, dx = \int \sec^2 x (\tan x + 1)\tan^3 x\, dx$$

$$\xrightarrow[du = \sec^2 x\, dx]{u = \tan x} \int (u^2+1)u^3\, du = \int (u^5 + u^3)\,du \Rightarrow \frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + C = \frac{\tan^6 x}{6} + \frac{\tan^4 x}{4} + C$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۶) $\int \sec^6 x \tan^6 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^4 x \tan^6 x\, dx = \int \sec^2 x \cdot (1+\tan^2 x)^2 \cdot \tan^6 x\, dx$

$$\xrightarrow[du=\sec^2 x\, dx]{u=\tan x} \int (1+u^2)^2 u^6\, du = \int (u^6 + 2u^8 + u^{10})\, du = \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{2\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^{11} x}{11} + C$$

نکته: درمورد انتگرال $\int \sec^m x \tan^n x\, dx$ اگر توان $\sec x$ فرد باشد در این صورت یک $\sec x \cdot \tan x$ جدا می‌کنیم و تمام $\tan$ ها را با استفاده از قاعده $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ به $\sec x$ تبدیل می‌کنیم:

---

(۱۷) $\int \sec^3 x \tan x\, dx = \int \sec x \tan x \sec^2 x\, dx \Rightarrow \begin{cases} \sec x = u \\ \sec x \tan x\, dx = du \end{cases} =$

$$\int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sec^3 x}{3} + C$$

---

(۱۸) $\int \sec x \tan^3 x\, dx = \int \sec x \cdot \tan x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \sec x \cdot \tan x (\sec^2 x - 1)\, dx \xrightarrow[du=\sec \tan x\, dx]{u=\sec x}$

$$\longrightarrow \int (u^2 - 1)\, du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\sec^3 x}{3} - \sec x + C$$

---

(۱۹) $\int \sec^5 x \tan^3 x\, dx \Rightarrow \int \sec x \tan x \cdot \sec^4 x \tan^2 x\, dx = \int \sec x \tan x \sec^4 x (\sec^2 x - 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x\, dx \end{cases} \rightarrow \int u^4 (u^2 - 1)\, du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C$$

نکته: در ۳ مثال بالا توان $\tan x$ و $\sec x$ هردو فرد بودند اما اگر توان $\sec$ فرد و $\tan$ زوج باشد تمام $\tan$ ها را به $\sec$ تبدیل کرده $(\tan^2 x = \sec^2 x - 1)$ می‌کنیم. که در این عمل باید انتگرال های توان فرد $\sec x$ حل شود.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۰) $\int \sec x \tan^2 x \, dx = \int \sec x \, (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx =$

$\frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| - \ln|\sec x + \tan x| + C = \frac{1}{2} \tan x \sec x - \frac{1}{2} |\sec x + \tan$

$: + C$

---

(۲۱) $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$

$= \int \cot^2 x (1 + \cot^2 x) \csc^2 x dx = \int (\cot^2 x + \cot^4 x) \csc^2 x dx = \frac{-1}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + C$

---

(۲۲) $\int \cot^4 x \csc^4 x \, dx$

$= \int \cot^4 x \csc^2 x \csc^2 x dx = \int \cot^4 x (1 + \cot^2 x) \csc^2 x dx$

$= \int (\cot^6 x + \cot^4 x) \csc^2 x dx = \frac{-1}{7} \cot^7 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + C$

---

(۲۳) $\int \sec^2 x \csc^2 x \, dx$

$$\begin{cases} \sec x = \frac{1}{\cos x} \longrightarrow \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \csc x = \frac{1}{\sin x} \longrightarrow \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \end{cases}$$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx = \tan x - \cot x + C$

نکته: $\sec^2 x \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حل چندنمونه سوال سخت و مهم از تغییر متغیر:

① $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}} \to \begin{cases} u=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow u^2=x^2+1 \to x^2=u^2-1 \\ 2u\,du = 2x\,dx \to x\,dx = u\,du \end{cases} \to \int \frac{x^2\,x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{(u^2-1)\cancel{u}\,du}{\cancel{u}} =$

$\frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} - \sqrt{x^2+1} + C$

---

② $\int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x-1}} \Rightarrow \begin{cases} u=\sqrt{x-1} \to u^2=x-1 \to 2u\,du = dx \\ u^2+2=x+1 \qquad x=u^2+1 \end{cases} = \int \frac{(u^2+2)(2\cancel{u}\,du)}{(u^2+1)\cancel{u}} =$

$2\int \frac{u^2+2}{u^2+1}\,du = 2\int \frac{(u^2+1+1)\,du}{u^2+1} = 2\int du + 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2u + 2\tan^{-1}u + C =$

$2\sqrt{x-1} + 2\tan^{-1}(\sqrt{x-1}) + C$

---

③ $\int \sqrt{1+x\sqrt{x}}\,\sqrt{x}\,dx \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x\sqrt{x}} = u \Rightarrow u^2 = 1+x\sqrt{x} \\ 2u\,du = (\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx \to \frac{4}{3}u\,du = \sqrt{x}\,dx \end{cases}$

$= \int u \times \frac{4}{3}\,u\,du = \frac{4}{3}\,\frac{u^3}{3} + C = \frac{4}{9}\sqrt{(1+x\sqrt{x})^3} + C$

---

④ $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x} = u^2 \to \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2u\,du \\ \sqrt{x} = u^2-1 \\ dx = 2u\,du \times \sqrt{x} \to dx = 2u(u^2-1)\,du \end{cases} \Rightarrow \int u(2u)(u^2-1)\,du =$

$2\int (u^4-u^2)\,du = 2\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(1+\sqrt{x})^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C$

---

⑤ $\int \frac{x(\operatorname{Arcsin} x^2)^3}{\sqrt{1-x^4}} \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{Arcsin} x^2 \\ du = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\int u^3\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^4}{4} = \frac{1}{8}(\operatorname{Arcsin} x^2)^4$

---

⑥ $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx = \int \cos x(\cos x)^2(\sin x)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)\sin x^{-\frac{1}{3}}\,dx \Rightarrow$

$\int \cos x(\sin^{-\frac{1}{3}}x - \sin^{\frac{5}{3}}x)\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \int (u^{-\frac{1}{3}} - u^{\frac{5}{3}})\,du = \frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}} - \frac{u^{8/3}}{\frac{8}{3}} + C =$

$\frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{8}(\sin x)^{\frac{8}{3}} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\int \frac{(2x^2+1)(x^2+\ln 2x)}{2x}dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int(\frac{2x^2+1}{x})(x^2+\ln 2x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int(2x+\frac{1}{x})(x^2+\ln 2x)dx \Rightarrow$

$\begin{cases} u = x^2+\ln 2x \\ du = (2x+\frac{1}{x})dx \end{cases} = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2}+C = \frac{1}{4}(x^2+\ln 2x)^2+C$

---

⑧ $\int \frac{dx}{\csc x - 1} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \int \frac{\sin x\,dx}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}dx \Rightarrow \int \frac{(\sin x)(1+\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}d$

$\frac{1}{\sin x}$

$= \int(\sec x \tan x\,dx + \int(\tan^2 x)\,dx = \sec x + \tan x - x + C$

I_1 I_2

حل $I_1 = \sec x + C$

حل $I_2 = \int(\tan^2 x + 1 - 1)dx = \int(\tan^2 x+1)dx - \int dx = \tan x - x + C$

---

⑨ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}} \times$ مزدوج $= \int \frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}}{2x-1-2x-1} = -\frac{1}{2}\int(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1})dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2(\underbrace{2x-1}_{u})^{\frac{1}{2}}dx$

$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\int 2(\underbrace{2x+1}_{Z})^{1/2}dx = -\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}du - \frac{1}{4}\int Z^{1/2}dZ = -\frac{1}{6}\left[(2x-1)^{3/2}+(2x+1)^{3/2}\right]+C$

---

⑩ $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sqrt{1+\sin 4x}}dx \xrightarrow[1=\cos^2 2x+\sin^2 2x \quad (a+b)^2=a^2+b^2+2ab]{\text{نکته: } \sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x} = \int \frac{\sin 2x-\cos 2x}{\sqrt{(\cos 2x+\sin 2x)^2}}dx =$

$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x}{|\underbrace{\cos 2x+\sin 2x}_{u}|}dx = \begin{cases} \cos 2x+\sin 2x = u \\ du = 2(-\sin 2x+\cos 2x)dx \Rightarrow (\sin 2x-\cos 2x)dx = -\frac{du}{2} \end{cases}$

$-\frac{1}{2}\int\frac{du}{|u|} = -\frac{1}{2}\ln|u|+C = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x+\sin 2x|+C$

---

⑪ $\int \frac{\cos^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sin^5\sqrt{x}}dx = \int \frac{\cos^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(\sin^3\sqrt{x})} \times \frac{1}{\sin^2\sqrt{x}}dx \Rightarrow$ نکته: $\frac{1}{\sin^2 u} = 1+\cot^2 u$

$-2\int \frac{\cot^3\sqrt{x}\,(1+\cot^2\sqrt{x})}{-2\sqrt{x}}dx = \begin{cases} \cot\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{-2\sqrt{x}}(1+\cot^2\sqrt{x})dx \end{cases} \Rightarrow$

$-2\int u^3\,du = \frac{-2\cot^4\sqrt{x}}{4}+C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۲) $\int \cot 2x(\cot x+\tan x)dx \xrightarrow{\cot x+\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}}$

$$=\int \cot 2x \times \frac{2}{\sin 2x}dx = 2\int \frac{\cos 2x}{(\sin 2x)^2}dx \Rightarrow \begin{cases}\sin 2x=u\\ \cos 2x\,dx=\frac{du}{2}\end{cases} =\int \frac{du}{u^2}=\frac{-1}{u}+C$$

$$=-\frac{1}{\sin 2x}+C$$

---

(۱۳) $\int \frac{e^x(1+x)dx}{\sin^2(xe^x)} \longrightarrow \begin{cases}xe^x=u\\ du=(e^x+xe^x)dx=e^x(1+x)dx\end{cases} =\int \frac{du}{\sin^2 u}=\int \csc^2 u\,du=$

$$-\cot u+C=-\cot(xe^x)+C$$

---

(۱۴) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3\cos^2 x+5\sin^2 x+1}}dx=\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\underbrace{3\cos^2 x+3\sin^2 x}_{3=\text{جمع}}+2\sin^2 x+1}}dx=\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{4+2\sin^2 x}}=\begin{cases}\sin^2 x=u\\ du=2\sin x\cos x\,d\\ =\sin 2x\,dx\end{cases}$

$$\int \frac{du}{\sqrt{4+2u}}=\int (4+2u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\int 2(4+2u)^{-1/2}du=\begin{cases}4+2u=t\\ 2du=dt\end{cases}=\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C=\sqrt{4+2u}+C=\sqrt{4+2\sin^2 x}+C$$

---

(۱۵) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+2\cos x+\sin^2 x}}dx=\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+2\cos x+(1-\cos^2 x)}}dx \Rightarrow \begin{cases}\cos x=u\\ \sin x\,dx=-du\end{cases} \Rightarrow \int \frac{-du}{\underbrace{\sqrt{-u^2+2u+3}}_{\text{شبیه اتحاد مربع}}}$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد}]{\text{حرف ایجاد}} -\int \frac{du}{\sqrt{-(u^2-2u+1)+4}}=-\int \frac{-du}{\sqrt{-(u-1)^2+4}}=-\int \frac{du}{2\sqrt{1-(\frac{u-1}{2})^2}}=$$

$$\begin{cases}\frac{u-1}{2}=t\\ du=2dt\end{cases} =\frac{-2}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\sin^{-1}t+C=-\sin^{-1}(\frac{u-1}{2})+C=-\sin^{-1}(\frac{\cos x-1}{2})+C$$

---

(۱۶) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}dx=\begin{cases}\sqrt{x}+1=u\\ \frac{dx}{\sqrt{x}}=2du\end{cases} \longrightarrow \int 2u^3du=2\frac{u^4}{4}+C=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)^4+C$

---

(۱۷) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx \Rightarrow \xrightarrow[\text{نکته}]{\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x} \Rightarrow \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx \Rightarrow \underbrace{\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}}_{\text{نکته}}$

$$\int \csc^2 x\,dx-\int \sec^2 x\,dx \Rightarrow -\cot x-\tan x+C$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۸) $\int \cot x . \sec^2 x \, dx =$ نکته $\tan x \cot x = 1 \Rightarrow \int \frac{\sec^2 x \, dx}{\underbrace{\tan x}_{u}} = \ln|\tan x| + C$

---

(۱۹) $\int \frac{1 - 2\sin^2 x - \sin 2x}{\sqrt{1 + \sin 4x}} dx = \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x \\ \text{نکته} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin 4x = 2\cos 2x \sin 2x \end{cases}$

$\int \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sqrt{(\cos 2x + \sin 2x)^2}} dx \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = u \\ (-\sin 2x + \cos 2x) dx = \frac{du}{2} \end{cases} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{|u|} =$

$= \frac{1}{2} \ln |\cos 2x + \sin 2x| + C$

---

(۲۰) $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx = \int \tan^{\frac{1}{2}} x \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int \tan^{1/2} x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx =$

$\begin{cases} \tan x = u \\ \sec^2 x \, dx = du \end{cases} = \int u^{\frac{1}{2}} (u^2 + 1) du = \int (u^{\frac{5}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7} \tan^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{3} \tan^{\frac{3}{2}} x + C$

---

(۲۱) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^x}} dx = \begin{cases} 1 - e^x = t \rightarrow -e^x dx = dt \\ e^x = 1 - t \end{cases} = \int \frac{(e^x) e^x \, dx}{\sqrt{1 - e^x}} = -\int \frac{(1 - t) \, dt}{\sqrt{t}} =$

$-\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int \frac{t}{\sqrt{t}} dt = -2\sqrt{t} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -2\sqrt{1 - e^x} + \frac{2}{3} (1 - e^x)^{3/2} + C$

---

(۲۲) $I = \int \frac{1 - \cos 4x}{(1 + \cos 4x)^2} dx = \begin{cases} \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x \\ \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \end{cases}$

$I = \int \frac{2\sin^2 2x}{(2\cos^2 2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x \cos^2 2x} dx = \frac{1}{2} \int \tan^2 2x \sec^2 2x \, dx =$

$\{ \tan 2x = u \longrightarrow du = 2(\sec^2 2x) dx \rightarrow \sec^2 2x \, dx = \frac{du}{2}$

$I = \frac{1}{2} \int u^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{12} \tan^3 2x + C$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته (۱) روش جزء به جزء $\rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$

نکته (۲) به طور کلی Arc ها ، e^{ax} ، $\ln x$ را در حل مسائل جزء به جزء u می‌گیریم .

نکته (۳) استثناً بین e^{ax} و x^n و $u = x^n$ می‌گیریم .

(۴) در اکثر مواقع هم x^n را u می‌گیریم .

(۵) در حل مسائل جزء به جزء موردی که مشتق آن راحت است را u و موردی که انتگرال گیری آن راحت‌تر است را dv می‌گیریم .

(۶) در این روش زمانی که x^n (یک چند جمله‌ای) در توابع مثل e^{ax} و $\ln x$ و Arc ها و $\cos x$ و $\sin x$ ضرب شده باشد از جدول زیر استفاده می‌شود از محور u مشتق گرفته می‌شود تا به صفر برسد و از dv به اندازه‌ای که از u مشتق می‌گیریم انتگرال می‌گیریم سپس عین مثال (۱) عمل می‌کنیم (به نحوهٔ ضرب و علامت فلش ها دقت شود).

u	dv
x^n	سایر توابع

---

① $\int x^3 \cos x\,dx =$

$u = x^3$	$\cos x\,dx = dv$
$3x^2$	$+\ \sin x$
$6x$	$-\ \cos x$
6	$+\ \sin x$
0	$-\ \cos x$

$x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x + C$

---

② $\int \text{Arc}\sin x\,dx =$

$$\begin{cases} \text{Arc}\sin x = u \xrightarrow{\text{مشتق}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ dx = dv = \xrightarrow{\text{انتگرال}} x = v \end{cases}$$

$$= x\,\text{Arc}\sin x - \underbrace{\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1} = x\,\text{Arc}\sin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

حل $I_1 = \begin{cases} 1-x^2 = u \\ -2x\,dx = du \rightarrow x\,dx = \dfrac{du}{-2} \end{cases} \rightarrow -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

③ $\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \begin{cases} u=e^{-x} \to du=-e^{-x}dx \\ dv=\sin 2x\,dx \to v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$I=\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-x}\cos 2x\,dx}_{I_1}$$

حل $I_1=\int e^{-x}\cos 2x\,dx = \begin{cases} e^{-x}=u \to -e^{-x}dx=du \\ dv=\cos 2x\,dx \to v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$ $\quad I_1=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x+\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx$

جایگذاری در I

پس $I=\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-e^{-x}}{2}\cos 2x+\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x+\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x\,dx\right]$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-e^{-x}}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-2}{5}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{5}e^{-x}\sin 2x+C$$

نکته: کلاً درمورد انتگرال هایی که ($\sin$ یا $\cos$ $\times$ e^{ax}) هستند عین مثال بالا عمل کرده و مرحله خود انتگرال در جواب ظاهر می‌شود.

---

④ $\int x^3 e^{-x^2}dx =$ در این مثال طبق نکته‌های گفته شده باید $dv=e^{-x^2}$ بگیریم اما این انتگرال قابل حل نیست

پس با یک تغییر متغیر مسئله را ساده می‌کنیم.

$$= \begin{cases} x^2=u \\ 2x\,dx=du \end{cases} \Rightarrow \int x^3e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int 2x^2\,x\,e^{-x^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int ue^{-u}du=\frac{1}{2}\left[-ue^{-u}-e^{-u}\right]=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left[x^2+1\right]+C$$

مشتق u	انتگرال e^{-u}
1 $+$	$-e^{-u}$
0 $-$	$+e^{-u}$

---

⑤ $\int \ln(x+1)\,dx \Longrightarrow \begin{cases} \ln(x+1)=u \to du=\frac{dx}{x+1} \\ dx=dv \to x=v \end{cases}$

$$=x\ln(x+1)-\underbrace{\int\frac{x\,dx}{x+1}}_{I_1}=x\ln(x+1)-\left[x-\ln|x+1|\right]+C$$

حل $I_1=\int\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int dx-\int\frac{dx}{x+1}=x-\ln|x+1|$

---

⑥ $\int \ln x\,dx = \begin{cases} \ln x=u \to \frac{dx}{x}=du \\ dx=dv \quad x=v \end{cases} \quad =x\ln x-\int\frac{x}{x}dx=x\ln x-x+C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\int (\ln x)^2 dx = \begin{cases} (\ln x)^2 = u \Rightarrow \frac{2dx}{x}\ln x = du \\ dx = dv \Rightarrow x = v \end{cases}$

$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2\underbrace{\int \ln x\, dx}_{\text{قبلاً حل شده}} = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

---

⑧ $\int x^{-2} \operatorname{Arc}\tan x\, dx = \begin{cases} \frac{dx}{x^2} = dv \longrightarrow \frac{-1}{x} = v \\ u = \tan^{-1}x \longrightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \end{cases} = -\frac{1}{x}\tan^{-1}x - \underbrace{\int \frac{-dx}{x(1+x^2)}}_{\text{نیاز به تجزیه کسر}} =$

$\frac{-1}{x}\tan^{-1}x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

---

⑨ $\int \sec^3 x\, dx = \int \sec^2 x \sec x\, dx \Rightarrow \begin{cases} u = \sec x \to du = \sec x \tan x\, dx \\ \sec^2 x\, dx = dv \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$

$I = \int \sec^3 x\, dx = \tan x \sec x - \underbrace{\int \sec x \tan^2 x\, dx}_{I_1} =$

حل $I_1 = \int \sec x \tan^2 x\, dx = \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx \xrightarrow{\text{جایگذاری در } I}$

$\int \sec^3 x\, dx = \tan x \times \sec x - \int \sec^3 x\, dx + \underbrace{\int \sec x\, dx}_{\text{قبلاً حل شده}} = \int \sec^3 x\, dx = \frac{\tan x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan$

---

⑩ $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\, dx = \int \underbrace{\sec^5 x\, dx}_{I_1} - \int \underbrace{\sec^3 x\, dx}_{I_2}$ ①

حل $I_1 = \int \sec^5 x\, dx = \begin{cases} \sec^2 x\, dx = dv \to v = \tan x \\ u = \sec^3 x \to du = 3\sec^3 x \tan x\, dx \end{cases}$ $\int \sec^5 x\, dx = \sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$

حل $I_2 = \int \sec^3 x\, dx = \frac{\tan x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|$

جایگذاری حل I_1, I_2 در ①

انتقال به سمت چپ تساوی

$\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx - \frac{\tan x \sec x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|$

$\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x - \frac{1}{8}\tan x \sec x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۱) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx \xrightarrow{\text{ابتدا}} \begin{cases}\sqrt{x}=u \longrightarrow u^2=x\\ 2u\,du=dx\end{cases} \quad = 2\int e^{u}\,u\,du \xrightarrow{\text{حل با روش جزء به جزء}}$

u	e^{u}
1	e^{u}
0	e^{u}

$$2\left[ue^{u}-e^{u}\right]+C = 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]\left[\sqrt{x}-1\right]+C$$

---

(۱۲) $I=\int x\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx \quad \begin{cases}x\,dx=dv \longrightarrow \frac{x^2}{2}=v\\ u=\mathrm{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \longrightarrow du=\frac{-2}{1-x^2}\,dx\end{cases}$

$$I=\frac{x^2}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\int\underbrace{\frac{x^2}{1-x^2}}_{I_1}dx \Rightarrow \text{حل } I_1=\int\frac{x^2+1-1}{1-x^2}\,dx \overset{\text{فاکتور از منفی}}{=} -\int\frac{1-x^2}{1-x^2}\,dx-$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=-\int dx-\int\frac{dx}{1-x^2}=-x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+C$$

باید تجزیه کسر شود

$$I=\frac{x^2}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+C$$

---

(۱۳) $I=\int x\tan^{-1}x\,dx=\begin{cases}x\,dx=dv \longrightarrow \frac{x^2}{2}=v\\ \tan^{-1}x=u \longrightarrow \frac{dx}{1+x^2}=du\end{cases}$

$$I=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\underbrace{\frac{x^2\,dx}{1+x^2}}_{I_1}=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x\,dx+C$$

$$\text{حل } I_1=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\tan^{-1}x$$

---

(۱۴) $\int \mathrm{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx \xrightarrow{\text{نکته } \mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})=\sinh^{-1}x}$

$$I=\int\sinh^{-1}x\,dx \quad \begin{cases}dx=dv \longrightarrow x=v\\ \sinh^{-1}x=u \longrightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$$

$$I=x\sinh^{-1}x-\int\frac{x}{\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{u}}\,dx=x\sinh^{-1}x-\sqrt{1+x^2}+C$$

---

(۱۵) $I=\int x5^{x}\,dx$

$u=x$	$5^{x}dx=dv$
1	$\frac{5^{x}}{\mathrm{Ln}5}$
0	$\frac{5^{x}}{(\mathrm{Ln}5)^2}$

$$I=\frac{x5^{x}}{\mathrm{Ln}5}-\frac{5^{x}}{(\mathrm{Ln}5)^2}+C$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۶) $\int \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,dx \xrightarrow{\text{نکته } \ln(x+\sqrt{x^2-1})=\cosh^{-1}x} =$

$$I=\int \cosh^{-1}x\,dx \longrightarrow \begin{cases} dx=dv \longrightarrow x=v \\ \cosh^{-1}x=u \longrightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

$$I=x\cosh^{-1}x-\underbrace{\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}}_{I_1}=x\cosh^{-1}x-\sqrt{x^2-1}+C$$

حل $I_1=\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases} x^2-1=u \\ x\,dx=\dfrac{du}{2}\end{cases} \longrightarrow \dfrac{1}{2}\int\dfrac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}+C=\sqrt{x^2-1}+C$

---

(۱۷) $I=\int \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)dx \xrightarrow[\text{مشتق } \tan x \text{ است}]{\text{دقت: داخل پرانتز شبیه به}}$ پس $\begin{cases} x=\tan t \\ dx=\sec^2 t\,dt\end{cases}$

$$I=\int \sin^{-1}\left(\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\right)\sec^2 t\,dt=\xrightarrow{\text{نکته}}\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}=\sin 2t$$

$$I=\int \sin^{-1}(\sin 2t)\sec^2 t\,dt \xrightarrow{\sin^{-1}(\sin 2t)=2t} I=2\int t\sec^2 t\,dt$$

$u=t$	$\sec^2 t\,dt=dv$
1	$\tan t$
0	$-\ln\lvert\cos t\rvert$

$$I=2\left[t.\tan t+\ln|\cos t|\right]+C \qquad I=2\left[x.\tan^{-1}x+\ln|\cos(\tan^{-1}t)|\right]+C$$

---

(۱۸) $I=\int\dfrac{x\sin^{-1}x}{(1-x^2)^3}dx \longrightarrow \left\{\sin^{-1}x=t \longrightarrow x=\sin t \longrightarrow dx=\cos t\,dt\right.$

$$I=\int\frac{\sin t.t.\cos t\,dt}{(1-\sin^2 t)^3}=\int\frac{t\sin t\cos t\,dt}{\cos^6 t}=\int\frac{t\sin t}{\cos^5 t}dt$$

$$\int t.\tan t\sec^4 t\,dt=\int t.\tan t(1+\tan^2 t)\sec^2 t\,dt$$

$$I=\int t.(\tan t+\tan^3 t)\sec^2 t\,dt=\begin{cases} t=u \longrightarrow dt=du \\ (\tan t+\tan^3 t)\sec^2 t\,dt=dv \end{cases} \quad \frac{1}{2}\tan^2 t+\frac{1}{4}\tan^4 t=v$$

$$I=\frac{t}{2}\tan^2 t+\frac{t}{4}\tan^4 t-\underbrace{\int\left(\frac{1}{2}\tan^2 t+\frac{1}{4}\tan^4 t\right)dt}_{I_1}$$

حل $I_1=\dfrac{1}{2}\int\tan^2 t\,dt+\dfrac{1}{4}\int\tan^2 t(\sec^2 t-1)\,dt=\dfrac{1}{2}\int(\tan^2 t)\,dt$

$$\frac{1}{4}\int\tan^2 t\sec^2 t\,dt-\frac{1}{4}\int\tan^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int(\tan^2 t+1-1)\,dt+\frac{1}{4}\underbrace{\int\tan^2 t\sec^2 t\,dt}_{I_2}=$$

$$\frac{1}{4}\tan t-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4\times 3}\tan^3 t+C$$

حسن پور

حل $I_2=\begin{cases}\tan t=z \\ \sec^2 t\,dt=dz\end{cases}=\int z^2 dz=\dfrac{\tan^3 t}{3}+C$

ادامه جواب در صفحه بعد

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$t=\sin^{-1}x \rightarrow I=\frac{\sin^{-1}x}{2}\tan^2(\sin^{-1}x)+\frac{1}{4}\sin^{-1}x\,\tan^4(\sin^{-1}x)-\frac{1}{4}\tan(\sin^{-1}x)+\frac{1}{4}\sin^{-1}x$$

$$-\frac{1}{12}\tan^3(\sin^{-1}x)+C$$

---

(۱۹) $I=\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx=\begin{cases}x=u \rightarrow dx=du\\ \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=dv \rightarrow v=\frac{-1}{\sin x}\end{cases}$

$$I=\frac{-x}{\sin x}+\underbrace{\int\frac{dx}{\sin x}}_{I_1}=\frac{-x}{\sin x}-\ln|\csc x+\cot x|+C$$

حل $I_1=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\csc x\times\frac{\csc x+\cot x}{\csc x+\cot x}dx=\int\frac{\csc^2 x+\cot x\csc x}{\csc x+\cot x}dx$

$\begin{cases}\csc x+\cot x=u\\ (-\csc x\cot x-\csc^2 x)dx=du\end{cases}$ $\quad I_1=-\int\frac{du}{u}=-\ln|\csc x+\cot x|$

---

(۲۰) $\int\cos^2(\ln x)dx \Rightarrow \begin{cases}\ln x=t \rightarrow x=e^t \rightarrow dx=e^t dt\end{cases}$

$$I=\int\cos^2(t)e^t dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}e^t dt=\frac{1}{2}\int e^t dt+\frac{1}{2}\underbrace{\int e^t\cos 2t\,dt}_{I_1}$$

I_1 حل: (۳) دوبار جزء دوبار مثال عین مثال ۳ حل شود $\rightarrow I=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}e^t(\cos 2t+2\sin 2t)\right]+C$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x\left[\cos 2(\ln x)+2\sin(2\ln x)\right]+C$$

---

(۲۱) $I=\int\sin x\ln(\cos x)dx=\begin{cases}\cos x=t\\ -\sin x\,dx=dt\end{cases}$ $\quad I=-\int\ln t\,dt=$ جزء به جزء $\rightarrow$

$$-\left[t\ln t-t\right]+C=-\cos x\ln(\cos x)+\cos x+C$$

---

(۲۲) $I=\int\frac{\cot^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\begin{cases}\sqrt{x}=t \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt\end{cases} \Rightarrow I=2\int\cot^{-1}t\,dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}}$

$\begin{cases}\cot^{-1}t=u \rightarrow du=\frac{-dt}{1+t^2}\\ dt=dv \rightarrow t=v\end{cases}$ $\quad I=2\left[t\cot^{-1}t+\int\frac{t\,dt}{1+t^2}\right]=2t\cot^{-1}t+\ln|1+t^2|+C$

$$=2\sqrt{x}\cot^{-1}\sqrt{x}+\ln|1+x|+C$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۳) $I=\int \underset{x^2 x^1}{x^3} e^{x^2}\,dx = \{x^2=t \longrightarrow 2x\,dx=dt \quad I=\frac{1}{2}\int t\,e^t\,dt =$

t	e^t
1	$+\ e^t$
0	$-\ e^t$

$I=\frac{1}{2}\left[te^t-e^t\right]+C \longrightarrow I=\frac{1}{2}e^{x^2}\left[x^2-1\right]+C$

---

(۲۴) $\int \frac{\sin 2x}{e^{+x}}\,dx=\int e^{-x}\sin 2x\,dx \longrightarrow$ (۳) بقیه‌ی مثال

---

(۲۵) $I=\int \tanh^{-1}x\,dx = \begin{cases} \tanh^{-1}x=u \longrightarrow du=\frac{dx}{1-x^2} \\ dx=dv \longrightarrow x=v \end{cases}$

$I=x\tanh^{-1}x-\int\frac{x\,dx}{1-x^2}=x\tanh^{-1}x+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$

---

(۲۶) $\int x\csc x\cot x\,dx=-x\csc x-\ln|\csc x+\cot x|+C$

$u=x$	$dv=\csc x\cot x\,dx$
1	$+\ -\csc x$
0	$-\ +\ln\lvert\csc x+\cot x\rvert$

---

(۲۷) $I=\int \sec^{-1}\sqrt{x}\,dx \Rightarrow \sqrt{x}=t \quad x=t^2 \longrightarrow dx=2t\,dt$

$I=2\int t\sec^{-1}t\,dt \qquad \begin{cases} t\,dt=dv \longrightarrow v=\frac{t^2}{2} \\ u=\sec^{-1}t \longrightarrow du=\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$

$I=2\left[\frac{t^2}{2}\sec^{-1}t-\frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}\right]=t^2\sec^{-1}t-\sqrt{t^2-1}+C$

$=x\sec^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۸) $I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

$$\begin{cases} u = \sin^{-1} x \longrightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \longrightarrow v = 2\sqrt{1+x} \end{cases}$$

$$I = 2\sqrt{1+x}\,\sin^{-1} x - 2\underbrace{\int \frac{\sqrt{1+x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1} = 2\sqrt{1+x}\,\sin^{-1} x + 4\sqrt{1-x} + c$$

I_1 ولی : $I_1 = \underbrace{\int \frac{\sqrt{1+x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{اتحاد زوج}} = \int \frac{\sqrt{1+x}\,dx}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}} = \int (1-x)^{-1/2}\,dx = -2\sqrt{1-x}$

---

(۲۹) $I = \int \sin(\ln x)\,dx$

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \longrightarrow du = \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = x\sin(\ln x) - \underbrace{\int \frac{\cancel{x}\cos(\ln x)}{\cancel{x}}\,dx}_{I_1} = x\sin(\ln x) - \Big(x\cos(\ln x) + \underbrace{\int \sin(\ln x)\,dx}_{I}\Big)$$

$$2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

$$I = \int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + c$$

ولی $I_1 = \int \cos(\ln x)\,dx \longrightarrow \begin{cases} \cos(\ln x) = u \longrightarrow du = \frac{-\sin(\ln x)}{x}\,dx \\ dx = dv \longrightarrow x = v \end{cases}$

$$I_1 = x\cos(\ln x) + \int \frac{\cancel{x}\sin(\ln x)}{\cancel{x}}\,dx$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فرمول های تحویل زیر را اثبات نمایید.

① $I=\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

$$\begin{cases} u=x^n \\ dv=e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=nx^{n-1}dx \\ v=e^x \end{cases} \longrightarrow I=x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$$

② $I=\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\, dx$

$$\begin{cases} x^n=u \\ \cos x\, dx=dv \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du=nx^{n-1}dx \\ v=\sin x \end{cases} \longrightarrow I=x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\, dx$$

③ $I=\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx$

$$\begin{cases} (\ln x)^n=u \\ dx=dv \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x}dx=du \\ x=v \end{cases} \longrightarrow I=x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx$$

④ $I=\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2}x\, dx$

$$I=\int \tan^2 x \tan^{n-2}x\, dx = \int \tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)\, dx$$

$$=\underbrace{\int \sec^2 x \tan^{n-2}x\, dx}_{I_1} - \int \tan^{n-2}x\, dx$$

حل I_1: جانشانی $\begin{cases} \tan x=u \\ \sec^2 x\, dx=du \end{cases} \longrightarrow I_1=\int u^{n-2}du = \dfrac{u^{n-1}}{n-1}+c = \dfrac{\tan^{n-1}x}{n-1}$

$$\longrightarrow I=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\, dx$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑤ $I=\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-1}x\tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$ که n عدد صحیح و بزرگتر از ۱ است.

$$I=\int \sec^{n-2}x\sec^2 x\,dx \quad \begin{cases} u=\sec^{n-2}x \\ dv=\sec^2 x\,dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=(n-2)\sec^{n-2}x\tan x\,dx \\ v=\tan x \end{cases}$$

$$\rightarrow I=\tan x\sec^{n-2}x-\underbrace{\int (n-2)\sec^{n-2}x\tan^2 x}_{I_1}$$

I_1 : $(n-2)\int \sec^{n-2}x\tan^2 x\,dx=(n-2)\int \sec^{n-2}x(\sec^2 x-1)\,dx=(n-2)\int(\sec^n x-\sec^{n-2}x)\,dx$

جایگذاری در I : $I=\int \sec^n x\,dx=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int(\sec^n x-\sec^{n-2}x)\,dx$

$$\Rightarrow I=\int \sec^n x\,dx=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int \sec^n x\,dx+(n-2)\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$\Rightarrow (n-1)\int \sec^n x\,dx=\tan x\sec^{n-2}x+(n-2)\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$\Rightarrow I=\int \sec^n x\,dx=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$$

---

⑥ $I=\int x^a(\ln x)^n=\frac{1}{a+1}x^{a+1}(\ln x)^n-\frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx$

($a\neq -1$ ، n عدد صحیح مثبت)

$$\begin{cases} (\ln x)^n=u \\ x^a dx=dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}dx=du \\ \frac{x^{a+1}}{a+1}=v \end{cases}$$

$$\rightarrow I=\frac{1}{a+1}x^{a+1}(\ln x)^n-\frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تجزیه کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای اند.

نکته I: قبلاً ملاحظه شد که اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر بیشتر باشد کسری نامتعارف است و در این حالت صورت کسر را به مخرج آن تقسیم می‌کنیم تا کسری متعارف به دست آید (کسر متعارف = درجه صورت کمتر از درجه مخرج کسر باشد)

نکته: به طور کلی با انتگرال‌گیری از عباراتی به صورت زیر سروکار داریم که درجهٔ $P(x)$ کمتر از درجه $Q(x)$ است $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

① اگر $Q(x)$ کاملاً تجزیه‌پذیر باشد دو حالت وجود دارد،

الف) عوامل $Q(x)$ همگی خطی و هیچکدام تکرار نشده‌اند.

مثال: $\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{(x-1)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$

ب) عوامل $Q(x)$ همگی خطی اند و بعضی از آنها تکرار شده اند.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{(ax+b)^n} + \frac{B}{(ax+b)^{n-1}} + \cdots + \frac{C}{(ax+b)^1}$$

مثال $\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x}$

② اگر در مخرج عاملی وجود داشته باشد که غیرقابل تجزیه باشد (هم درجه ① و هم درجه ② (و ...) داریم) دو حالت داریم:

الف) عوامل Q خطی و درجه دوم اند و هیچ یک از عوامل درجهٔ (2) تکرار نشده‌اند.

مثال: $\frac{x^2-2x-3}{\underbrace{(x-1)(x^2+2x+3)}_{\text{غیرقابل تجزیه}}} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$

ب) عوامل $Q(x)$ خطی و درجه دوم اند و بعضی از عوامل درجه دوم تکرار شده اند

مثال: $\frac{x^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: به طور کلی در تجزیه کسر درجه صورت از درجه مخرج یک واحد کمتر است.

نکته: تجزیه کسرهایی که به صورت $\frac{CB+AD}{AB}$ اند به صورت زیر است.

$$\frac{CB+AD}{AB}=\frac{C}{A}+\frac{D}{B}$$

---

① $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}-e^x+2}\,dx$ $\quad \begin{cases} e^x=u \\ du=e^x dx \longrightarrow dx=\frac{du}{u}\end{cases}$

$$I=\int\frac{(u+1)}{(u^2-u+2)}\times\frac{du}{u}\Rightarrow\frac{u+1}{u(u^2-u+2)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{u^2-u+2}=\frac{Au^2-Au+2A+Bu^2+Cu}{u(u^2-u+2)}=$$

$(\Delta<0)$ ریشه ندارد — ابتدا تجزیه کسر

$$=\frac{u^2(A+B)+u(-A+C)+2A}{u(u^2-u+2)}=$$

با توجه به صورت از درجه ۲ نداریم

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-A=1 \\ 2A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{3}{2}\end{cases}$$

ضریب ها برابر ۱ است

عدد برابر ۱ است

پس $=\frac{u+1}{u(u^2-u+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{u}+\frac{-\frac{1}{2}u+\frac{3}{2}}{u^2-u+2}$

$$I=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{u}+\frac{-\frac{1}{2}u+\frac{3}{2}}{u^2-u+2}\right)du=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{2}\int\frac{u-3}{u^2-u+2}\,du=$$

هدف ایجاد مشتق مخرج در صورت → در ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2(u-3)}{u^2-u+2}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{4}\int\frac{2u-1-5}{u^2-u+2}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-$$

همان ۶

$$\frac{1}{4}\int\frac{2u-1}{u^2-u+2}\,du+\frac{5}{4}\underbrace{\int\frac{du}{u^2-u+2}}_{I_1}=\frac{1}{2}\ln u-\frac{1}{4}\ln|u^2-u+2|+\frac{5}{4}\times\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{7}}\right)+$$

$$=\frac{1}{2}\ln e^x-\frac{1}{4}\ln|e^{2x}-e^x+2|+\frac{5}{2\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2e^x-1}{\sqrt{7}}\right)+C$$

حل $I_1=\int\frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2}\right)$

---

② $\int\frac{dx}{x^4-1}=\int\frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\Rightarrow\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$

$\Delta<0$ تجزیه ناپذیر — مخرج مشترک می‌گیریم

$$=\frac{Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^3+Dx^2-Cx-D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{x^3(A+B+C)+x^2(A-B+D)+x(A+B-C)+A-B-D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 & ① \\ A-B+D=0 & ② \\ A+B-C=0 & ③ \\ A-B-D=1 & ④\end{cases}$$

$① - ③ = 2C=0 \longrightarrow C=0$

$② - ④ = 2D=-1 \longrightarrow D=-\frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} ② \ A-B=\frac{1}{2} & A=\frac{1}{4} \\ ① \ A+B=0 & B=-\frac{1}{4}\end{cases}$

پس $\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\int\left[\frac{1/4}{x-1}+\frac{-1/4}{x+1}+\frac{0-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx=$ ← بقیه جواب مسئله در صفحه بعد

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

ادامه جواب سوال ②

---

③ $I = \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

نکته: اگر درجه صورت و مخرج برابر باشند باز هم صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم)

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} \Rightarrow x^3-5x^2+6x = x(\underbrace{x^2-5x+6}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}) = x(x-2)(x-3)$$

$$I = \int\left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{\underbrace{x(x-2)(x-3)}_{\text{سیاره به تجزیه‌ها}}}\right]dx$$

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \overset{\text{بعد از مجهول جواب}}{=} \begin{cases} A = 1/6 \\ B = -\frac{9}{2} \\ C = \frac{28}{3} \end{cases}$$

$$I = \int dx + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C$$

---

④ $I = \int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}dx \longrightarrow \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/3 \\ B = 1/3 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$I = \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)} - \int\frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

---

⑤ $I = \int\frac{(x^2-2x-3)dx}{(x-1)(x^2+2x+2)} \Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1}$ $\begin{cases} A = 9/5 \\ B = 7/5 \\ C = -4/5 \end{cases}$

$$I = \frac{9}{5}\underbrace{\int\frac{x\,dx}{x^2+2x+2}}_{I_1} + \frac{7}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1} =$$

حسن پور

برای محاسبه I_1 مشاهده می‌شود که مشتق مخرج یا $2(x+1)dx$ برابر است پس در I_1 عدد یک را کم و زیاد می‌کنیم و سپس در ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

حل $I_1 = \int\frac{x\,dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int\frac{2(x+1-1)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)dx}{x^2+2x+2} - \frac{1}{\cancel{2}}\int\frac{\cancel{1}dx}{x^2+2x+2}$

$$I = \frac{9}{5}\times\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)dx}{x^2+2x+2} - \frac{9}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2} + \frac{7}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$I=\frac{9}{5}\times\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)\,dx}{x^2+2x+2}-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{\underbrace{x^2+2x+2}_{I_2}}-\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1}$$

حل $I_2=\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\tan^{-1}(x+1)$

$$I=\frac{9}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right|-\frac{2}{5}\tan^{-1}(x+1)-\frac{4}{5}\ln|x-1|+C$$

---

⑥ $\int\frac{x^4+2x^2}{x^3-1}dx$ درجه صورت بزرگتر از مخرج پس عمل تقسیم $\frac{x^4+2x^2}{x^3-1}=x+\frac{2x^2+x}{x^3-1}$

$$I=\int\left(x+\frac{2x^2+x}{x^3-1}\right)dx=\int x\,dx+\int\frac{(2x^2+x)\,dx}{x^3-1}$$

$$\frac{2x^2+x}{x^3-1}=\frac{2x^2+x}{(x-1)(\underbrace{x^2+x+1}_{\text{ریشه ندارد}})}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\qquad\begin{cases}A=+1\\B=1\\C=+1\end{cases}$$

$$I=\int x\,dx+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{(x+1)\,dx}{\underbrace{x^2+x+1}_{I_1}}$$

حل $I_1=\frac{\text{نکته}\ (x^2+x+1)'=(2x+1)dx}{\text{صورت کسر مشتق مخرج را در صورت ظاهر کنیم}}\rightarrow=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$I=\frac{1}{2}x^2+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

---

⑦ $\int\frac{\sec^4x}{1+\tan^3x}dx=\int\frac{\sec^2x\sec^2x}{1+\tan^3x}dx\Rightarrow\begin{cases}\tan x=u\longrightarrow du=\sec^2x\,dx\\ \sec^2x=1+\tan^2x\end{cases}$

$$I=\int\frac{(u^2+1)du}{1+u^3}\xrightarrow{\text{تجزیه}}\frac{u^2+1}{1+u^3}=\frac{u^2+1}{(1+u)(u^2-u+1)}=\frac{A}{1+u}+\frac{Bu+C}{u^2-u+1}=$$

$$=\frac{Au^2-Au+A+Bu+C+Bu^2+Cu}{(1+u)(u^2-u+1)}\qquad\begin{cases}A+B=1\ ①\\-A+B+C=0\ ②\\A+C=1\ ③\end{cases}\xrightarrow{②+③}\begin{cases}A+B=1\\-2A+B=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=2/3\\B=1/3\\C=1/3\end{cases}$$

$$I=\int\frac{2/3}{1+u}du+\int\frac{\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}}{u^2-u+1}du=\frac{2}{3}\int\frac{du}{u+1}+\frac{1}{3}\int\underbrace{\frac{u+1}{u^2-u+1}du}_{I_1}$$

حل $I_1\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{هر فرا ایجاد مشتق مخرج}}\int\frac{u+1}{u^2-u+1}du=\frac{1}{2}\int\frac{2u+2}{u^2-u+1}\xrightarrow[\text{یک را کم و زیاد می‌کنیم}]{\text{مشتق مخرج}=2u-1}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2u\overset{2}{-1+3}}{u^2-u+1}du=\frac{1}{2}\int\frac{2u-1}{u^2-u+1}du+\frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2-u+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2u-1}{u^2-u+1}+\frac{3}{2}\int\frac{du}{(u-1/2)+\frac{3}{4}}$$

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u+1\right|+\frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)+C_1$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ادامه جواب سوال ⑦

$$I=\frac{2}{3}\ln|u+1|+\frac{1}{6}\ln|u^2-u+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$I=\frac{2}{3}\ln|\tan x+1|+\frac{1}{6}\ln|\tan^2x-\tan x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

---

⑧ $$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{x^4+1}\longrightarrow x^4+1=x^4-2x^2+2x^2+1$$

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

پس $$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}=$$

$$=\frac{Ax^3-\sqrt{2}Ax^2+Ax+Bx^2-\sqrt{2}Bx+B+Cx^3+\sqrt{2}Cx^2+Cx+Dx^2+\sqrt{2}xD+D}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$\begin{cases} x^3\text{ ضریب } A+C=0 \quad ① \longrightarrow A=-C \quad (*) \\ x^2\text{ ضریب } -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \quad ② \\ x\text{ ضریب } A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \quad ③ \\ \text{ضریب عددها } B+D=1 \quad ④ \quad B=1-D \quad (**) \end{cases}$$

رابطه‌های (*) (**) را در رابطه‌ی ۲ و ۳ قرار می‌دهیم تا برحسب C و D بدست آیند.

$$\begin{cases} +\sqrt{2}C+(1-D)+\sqrt{2}C+D=0 \Rightarrow C=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -C-\sqrt{2}(1-D)+C+\sqrt{2}D=0 \Rightarrow D=1/2 \end{cases} \qquad A=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad B=1/2$$

$$I=\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\xrightarrow{\text{از } \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ فاکتور می‌گیریم}}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\xrightarrow[\text{ظاهر کنیم}]{\text{سعی می‌کنیم مشتق مخرج را در صورت}}$$

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2(x+\sqrt{2})}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\int\frac{2(x-\sqrt{2})}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\underbrace{\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}}_{I_1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}\,dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\underbrace{\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}}_{I_2}$$

حل $$I_1=\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\int\frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)+C_1$$

حل $$I_2=\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\int\frac{dx}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)+C_2$$

$$I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2+\sqrt{2}x+1|+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2-\sqrt{2}x+1|+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)+C$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑨ $\int \frac{6-9x-3x^2}{x^4-5x^2+4}\,dx$

$$\frac{6-9x-3x^2}{x^4-5x^2+4} = \frac{6-9x-3x^2}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{6-9x-3x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

اتحاد مشترک — اتحاد مزدوج

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2} \quad \begin{cases} A=2 \\ D=-2 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases}$$ تجزیه کسر

$$I=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+2}-\frac{2}{x-2}\right)dx = 2\ln|x+1|+\ln|x-1|-\ln(x+2)-2\ln|x-2|+C$$

$$I=\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-1)}{(x+2)(x-2)^2}\right|+C$$

نکته خیلی مهم: ۱) در تجزیه کسر اگر مجموع ضرایب چندجمله‌ای صفر باشد $(x-1)$ یکی از عوامل است.

نکته ۲) اگر عددی مثل a را جایگذاری کنیم و مجموع چندجمله‌ای صفر شود (یعنی صدق کند) $(x-a)$ یکی از عوامل است.

① $x^4-x^3-91x^2+x+90 = \longrightarrow x^4-x^3-90x^2-x^2+x+90$

$$=x^2(x^2-1)-x(x^2-1)-90(x^2-1) \Rightarrow \underbrace{(x^2-1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}\underbrace{(x^2-x-90)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = (x-1)(x+1)(x-10)(x+9)$$

---

② $x^4+x^3+2x^2+x+1 = x^4+x^3+x^2+x^2+x+1$

$$=x^2(x^2+1)+x(x^2+1)+(x^2+1)=(x^2+1)(x^2+x+1)$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جانشینی مثلثاتی:

حالت ① $\sqrt{a^2-u^2} \longrightarrow a>0 \qquad u=a\sin\theta$

اگر $\begin{cases} u\geq 0 & 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \\ u<0 & -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq 0 \end{cases} \longrightarrow du = a\cos\theta\, d\theta$

پس $\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} = a\sqrt{\cos^2\theta} \xrightarrow[\cos\theta\geq 0]{\text{چون در } -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}} a\cos\theta$

و $\sin\theta=\frac{u}{a}$ و $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{به علت یک به یک بودن}} \theta=\sin^{-1}\frac{u}{a}$

حالت دوم ② $\sqrt{a^2+u^2} \qquad a>0 \qquad u=a\tan\theta$

اگر $\begin{cases} u\geq 0 & 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \\ u<0 & -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq 0 \end{cases} \longrightarrow du = a\sec^2\theta\, d\theta$

پس $\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} = a\sqrt{\sec^2\theta} \xrightarrow[\sec\theta\geq 1]{\text{چون در } -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \text{ داریم}} a\sec\theta$

$\tan\theta=\frac{u}{a}$ و $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{به علت یک به یک بودن}} \theta=\tan^{-1}\frac{u}{a}$

حالت سوم ③ $\sqrt{u^2-a^2} \qquad a>0 \qquad u=a\sec\theta$

$\begin{cases} u\geq a & 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \\ u<-a & \pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow du = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

پس $\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = a\sqrt{\tan^2\theta} =$

چون $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ یا $\pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$ $\quad \tan\theta\geq 0$

پس $\sqrt{\tan^2\theta} = \tan\theta$

$\sec\theta=\frac{u}{a}$ وقتی $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \longrightarrow \theta=\sec^{-1}\frac{u}{a}$

$\sec\theta=\frac{u}{a}$ وقتی $\pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2} \longrightarrow \theta=2\pi-\sec^{-1}\frac{u}{a}$

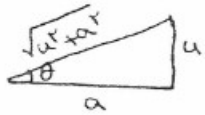
حسن پور

www.riazisara.ir

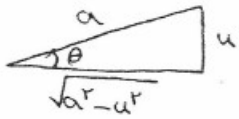
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثلث های زیر راه مناسبی برای به خاطر سپردن اطلاعات لازم جهت تبدیل انتگرال متغیرها می باشد.

$u = a\sec\theta$



$u = a\tan\theta$



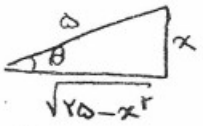
$u = a\sin\theta$

---

① $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(25-x^2)^3}}$ $\qquad x = 5\sin\theta \longrightarrow dx = 5\cos\theta\, d\theta$

$$I = \int \frac{125\sin^3\theta \times 5\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(25-25\sin^2\theta)^3}} = \int \frac{125\times 5\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta}{125\cos^3\theta}$$

$$= 5\int \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = 5\int \frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta}{\cos^2\theta} = 5\left(\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right) + C$$



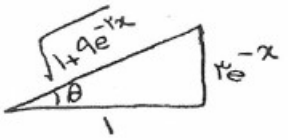
$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

$$I = 5\left(\frac{5}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}\right) + C$$

---

② $\displaystyle\int \frac{e^{-x}\,dx}{(3e^{-x})^2(9e^{-2x}+1)^{3/2}} \longrightarrow 3e^{-x} = \tan\theta \longrightarrow -3e^{-x}\,dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\tan^2\theta+1)^{3/2}} = -\frac{1}{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^{3/2}} = -\frac{1}{3}\int \cos\theta\, d\theta = -\frac{1}{3}\sin\theta + C$$



$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{+3e^{-x}}{\sqrt{1+9e^{-2x}}}$$

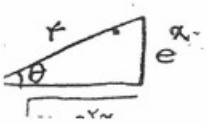
$$I = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-9e^{-2x}}} + C$$

---

③ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}\, dx \rightarrow e^x = 4\sin\theta \rightarrow e^x dx = 4\cos\theta\, d\theta \qquad dx = \cot\theta\, d\theta$

$$I = \int \frac{\sqrt{16-16\sin^2\theta}\ \cot\theta\, d\theta}{4\sin\theta} = \int \frac{\sqrt{\cos^2\theta}\ \cos\theta\, d\theta}{\sin^2\theta} = \int \cot^2\theta\, d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)\, d\theta =$$

$$(\cot\theta + \theta) + C \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{e^x}{4}\right)$$



$$I = -\left(\frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} + \sin^{-1}\frac{e^x}{4}\right) + C$$

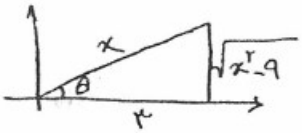
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

④ $I=\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} =$ $\qquad x=3\sec\theta \longrightarrow dx=3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

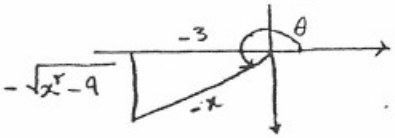
$$I=\int\frac{3\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{27\sec^3\theta\cdot 3\tan\theta}=\frac{1}{27}\int\cos^2\theta\, d\theta=\frac{1}{54}\int(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{54}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C$$

اگر $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را از شکل ① بدست می‌آوریم

اگر $\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$ $\quad$ $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را از شکل ② به دست می‌آوریم



①



②

بنابر شکل ① $\Rightarrow \theta=\sec^{-1}\left(\frac{-x}{3}\right)$

بنابر حالت شکل ② $\Rightarrow \theta=2\pi-\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$$I=\begin{cases}\frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\times\frac{3}{x}\right)+C & x>3\\ \frac{1}{54}\left(2\pi-\sec^{-1}\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\times\frac{3}{x}\right)+C & x\leqslant -3\end{cases}$$

---

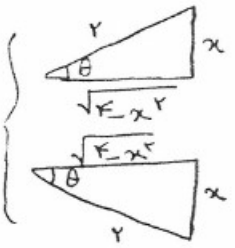
⑤ $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ $\qquad x=2\sin\theta$ $\qquad dx=2\cos\theta\, d\theta$ $\qquad \begin{cases}x>0 & 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ x<0 & -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 0\end{cases}$

$$I=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2\theta}\times 2\cos\theta\, d\theta}{4\sin^2\theta}=\underset{\cos\theta\geqslant 0}{\overset{-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}{=}}\int\cot^2\theta\, d\theta$$

$$=-\cot\theta-\theta+C=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\rightarrow\theta=\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

در این بازه $\cot\theta=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$



$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<0$

---

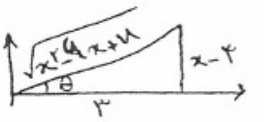
⑥ $\int\frac{dx}{(x^2-6x+18)^{3/2}}$ $\Rightarrow x^2-6x+18=(x-3)^2+9$

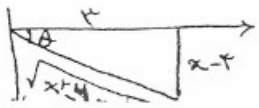
$I=\int\frac{dx}{((x-3)^2+9)^{3/2}}\longrightarrow$ $\quad x-3=3\tan\theta$, $\quad dx=3\sec^2\theta\, d\theta$ $\qquad I=\int\frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{(9\tan^2\theta+9)^{3/2}}=$

$$\frac{1}{9}\int\frac{d\theta}{\sec\theta}=\frac{1}{9}\sin\theta+C$$

حسن پور

$\begin{cases}0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 0\end{cases}$





$\sin\theta=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+18}}$

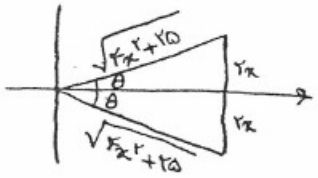
$$I=\frac{1}{9}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+18}}+C$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\int \sqrt{4x^2+25}\,dx = 2\int \sqrt{x^2+\frac{25}{4}}$ $\qquad x=\frac{5}{2}\tan\theta \longrightarrow dx=\frac{5}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

$$I=2\int\sqrt{\frac{25}{4}(\tan^2\theta+1)}\times\frac{5}{2}\sec^2\theta\, d\theta \xrightarrow[\sec\theta\geq 1]{-\frac{\pi}{2}<\theta\leq\frac{\pi}{2}} = \frac{25}{4}\int\sec^3\theta\, d\theta \xRightarrow{\text{جزء به جزء}}$$

$$\frac{25}{4}\left[\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right]+C$$



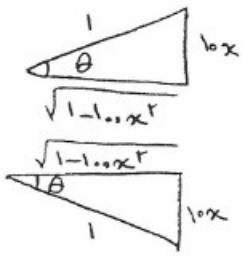
$$\Rightarrow \frac{25}{4}\left[\frac{2}{5}\sqrt{x^2+\frac{25}{4}}*\frac{2x}{5}+\ln\left|\frac{1}{5}\sqrt{4x^2+25}+\frac{2x}{5}\right|\right]+C$$

---

⑧ $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-100x^2}}=\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{1}{100}-x^2}}$ $\qquad x=\frac{1}{10}\sin\theta \qquad dx=\frac{1}{10}\cos\theta\, d\theta$

$$I=\frac{1}{10}\int\frac{\frac{1}{10}\cos\theta\, d\theta}{\frac{1}{10}\sin\theta\sqrt{\frac{1}{100}-\frac{1}{100}\sin^2\theta}}=\int\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{\underbrace{1-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta}}}=\xrightarrow[\cos\theta\geq 0]{-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}}$$

$$I=\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\int\csc\theta\, d\theta=-\ln|\csc\theta+\cot\theta|+C$$



$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ $\qquad \csc\theta=\frac{1}{10x}$

در هر دو بازه

$-\frac{\pi}{2}\leq\theta<0$ $\qquad \cot\theta=\frac{\sqrt{1-100x^2}}{10x}$

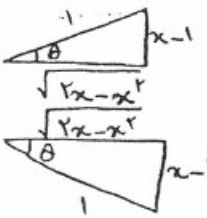
$$I=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-100x^2}}{10x}\right|+C$$

---

⑨ $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{\underbrace{1-1}_{0}+2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \Rightarrow \begin{cases} x-1=\sin\theta \\ dx=\cos\theta\, d\theta\end{cases}$

$$I=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\cos\theta\, d\theta \xRightarrow[\cos\theta\geq 0]{-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}} I=\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+C=\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}+C$$



$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ $\qquad \sin\theta=(x-1)$

در هر دو بازه

$-\frac{\pi}{2}\leq\theta<0$ $\qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{1}$

$\theta=\sin^{-1}(x-1)$

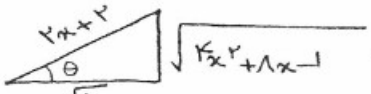
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑩ $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2+8x-1)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left[(2x-2)^2-5\right]^{3/2}} = I$

$2x+2=\sqrt{5}\sec\theta \longrightarrow dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$I=\int\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{(5\sec^2\theta-5)^{3/2}}=\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{2}\times\frac{1}{\underbrace{5\cancel{\sqrt{5}}}_{5^{3/2}}}\int\frac{\sec\theta\, d\theta}{\tan^2\theta}=\frac{1}{10}\int\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{1}{10}\int\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin^2\theta}=\frac{-1}{10\sin\theta}+C=-\frac{1}{10}\csc\theta+C$$

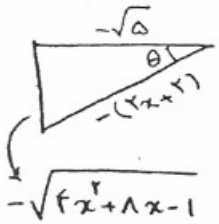


$0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

در هر دو بازه

$\pi<\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$

$$\csc\theta=\frac{2x+2}{\sqrt{4x^2+8x-1}}$$



$$I=-\frac{(x+1)}{5\sqrt{4x^2+8x-1}}+C \leftarrow \text{جواب}$$

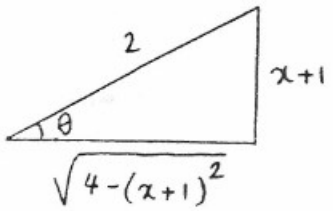
---

⑪ $\displaystyle\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

$$=\int\sqrt{-(x^2+2x-3)}\,dx=\int\sqrt{-(x^2+2x+1-4)}\,dx=\int\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$$

$$\begin{cases} x+1=2\sin\theta \\ dx=2\cos\theta\, d\theta \end{cases} \quad =2\int\sqrt{4-4\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta=4\int\cos^2\theta\, d\theta=4\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2\theta+\sin 2\theta+C=2\theta+2\sin\theta\cos\theta+C$$

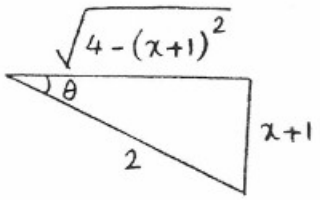


$0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

در هر دو بازه

$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<0$

$$\begin{cases} \theta=\sin^{-1}\frac{x+1}{2} \\ \sin\theta=\frac{x+1}{2} \\ \cos\theta=\frac{\sqrt{4-(x+1)^2}}{2} \end{cases}$$



$$=2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+C$$

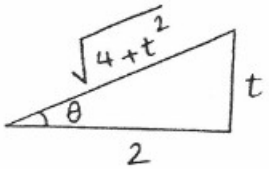
حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۲) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$ $\qquad 5+2x+x^2 = 4+(x+1)^2 \longrightarrow \begin{cases} x+1=t \\ dx=dt \end{cases}$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{(4+t^2)^3}} \qquad t = 2\tan\theta \longrightarrow dt = 2\sec^2\theta\, d\theta \rightarrow \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{(4+4\tan^2\theta)^3}}$$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4^3}\sqrt{(\sec^2\theta)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \cos\theta = \frac{1}{4}\sin\theta + C$$



$$\rightarrow \sin\theta = \frac{t}{\sqrt{4+t^2}} \qquad = \frac{1}{4}\,\frac{t}{\sqrt{4+t^2}} + C$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{x+1}{\sqrt{4+(x+1)^2}} = \frac{1}{4}\,\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + C$$

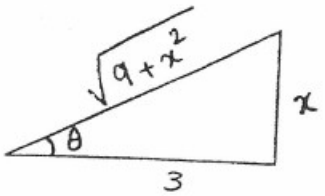
---

(۱۳) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} x = 3\tan\theta \\ dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \end{cases} \qquad = \int \frac{9\tan^2\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}} \times 3\sec^2\theta\, d\theta$

$$= 9\int \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta = 9\int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta = 9\int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta$$

$$= 9\int \sec^3\theta\, d\theta - 9\int \sec\theta\, d\theta \xlongequal[\text{محاسبه شده اند}]{\text{این انتگرال ها قبلا}} \frac{9}{2}\tan\theta\sec\theta + \frac{9}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| - 9\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

$$= \frac{9}{2}\tan\theta\sec\theta - \frac{9}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| = \frac{1}{2}x\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C$$



$$\longrightarrow \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{x}{3} \\ \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{3} \end{cases}$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال: توابعی که دارای e^u و a^u هستند با فرمول‌های مورد استفاده شده :

① $\int e^u du = e^u + C$

② $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

---

① $\int (2x+1)e^{x(x+1)} dx \Longrightarrow \begin{cases} x(x+1) = x^2+x \\ u = x^2+x \\ du = (2x+1)dx \end{cases}$

$= \int e^u du = e^u + C = e^{x^2+x} + C$

---

② $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx \Longrightarrow \begin{cases} \text{Arc}\tan x = u \\ \frac{dx}{1+x^2} = du \end{cases} = \int e^u du = e^{\text{Arc}\tan x} + C$

---

③ $\int \frac{\tan x \, 3^{\sec x}}{\cos x} dx = \begin{cases} \frac{\tan x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x \cos x} = \sec x \tan x \end{cases}$ پس $\sec x = u \rightarrow \sec x \tan x dx = du$

$\int 3^u du = \frac{3^u}{\ln 3} + C = \frac{3^{\sec x}}{\ln 3} + C$

---

④ $\int \frac{x e^{(x^2+x+1)}}{\sqrt{e^{2x+4}}} = \begin{cases} \sqrt{e^{2x+4}} = e^{(2x+4)^{1/2}} = e^{x+2} \end{cases}$ نکته: $(a^b)^c = a^{bc}$

$= \int \frac{x e^{x^2+x+1}}{e^{x+2}} dx = \int x e^{(x^2+x+1)} e^{(-x-2)} dx \Rightarrow$ نکته $e^a \times e^b = e^{a+b}$

$= \int x e^{x^2-1} = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2-1} dx \rightarrow \begin{cases} x^2-1 = u \\ 2x dx = du \end{cases} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2-1} + C$

---

⑤ $\int \frac{1+e^{2x}}{e^x} dx = \begin{cases} \text{نکته}: \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$

$= \int \frac{dx}{e^x} + \int \frac{e^{2x}}{e^x} dx$ نکته: $e^{2x} = (e^x)^2 \Rightarrow \int e^{-x} dx + \int e^x dx = -e^{-x} + e^x + C$

---

⑥ $\int e^{2x} e^{2x} dx = \int e^{5x} = \frac{1}{5} e^{5x} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $\int 2^{e^x} 3^{e^x} e^x \, dx = \longrightarrow \{a^u \times b^u = (ab)^u = \int 6^{e^x} e^x \, dx \quad \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases}$

$= \int 6^u \, du = \frac{6^u}{\ln 6} + C = \frac{6^{e^x}}{\ln 6} + C$

---

۸) $\int a^{x \ln x} (\ln x + 1) \, dx \Rightarrow \begin{cases} x \ln x = u \\ (\ln x + 1) dx = du \end{cases} = \int a^u \, du = \frac{a^{x \ln x}}{\ln a} + C$

---

۹) $\int \frac{2^{\ln(\frac{1}{x})}}{x} dx = \begin{cases} \ln \frac{1}{x} = u \\ du = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} dx \Rightarrow \frac{1}{x} dx = -du \end{cases} = -\int 2^u \, du = \frac{-2^{\ln \frac{1}{x}}}{\ln 2} + C$

---

۱۰) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x)^3 + 1}{e^x + 1} dx$

تقسیم: $(e^x)^3 + 1 \,\big|\, e^x + 1$ ، $(e^x)^2 - e^x + 1$ ، $R = 0$

$= \int [(e^x)^2 - e^x + 1] \, dx = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C$

---

۱۱) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 2}$ $\quad e^{2x} \to (e^x)^2$

$\begin{cases} e^x + 2 = u \to e^x = u - 2 \\ du = e^x dx \end{cases}$

$\int \frac{(u-2) \, du}{u} = \int du - 2 \int \frac{du}{u} = u - 2 \ln u + C = e^x + 2 - 2 \ln |e^x + 2| + C$

---

۱۲) $\int \frac{dx}{1 + e^x} = \begin{cases} 1 + e^x = u \to e^x = u - 1 \\ e^x dx = du \to dx = \frac{du}{u-1} \end{cases}$

$= \int \frac{du}{u(u-1)} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1} \right) du = -\ln |1 + e^x| + \ln |e^x| + C$

---

۱۳) $\int \operatorname{sech} x \, dx = \left\{ \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \right. \Rightarrow \int \frac{2 dx}{e^x + e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} =$

$I = 2 \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} \Rightarrow \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} \quad I = 2 \int \frac{du}{u^2 + 1} = 2 \tan^{-1}(e^x) + C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۴) $\int \operatorname{csch} 4x\,dx = \int \frac{2}{e^{4x}-e^{-4x}}\,dx \times \frac{e^{4x}}{e^{4x}} = 2\int \frac{e^{4x}\,dx}{(e^{4x})^2-1} = \begin{cases} e^{4x}=u \\ e^{4x}dx=\frac{1}{4}du \end{cases}$

$\frac{2}{4}\int \frac{du}{u^2-1} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \frac{1}{2}\int\left(\frac{1/2}{u-1}+\frac{-1/2}{u+1}\right)du = \frac{1}{4}\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u+1} =$

$\frac{1}{4}\operatorname{Ln}(u-1)-\frac{1}{4}\operatorname{Ln}(u+1)+C = \frac{1}{4}\operatorname{Ln}(e^{4x}-1)-\frac{1}{4}\operatorname{Ln}(e^{4x}+1)+C$

$\operatorname{Ln}\left|\frac{\sqrt[4]{e^{4x}-1}}{\sqrt[4]{e^{4x}+1}}\right|+C = \operatorname{Ln}\sqrt[4]{\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}}+C$

---

(۱۵) $\int \frac{2^x}{\sqrt{4^x+1}}\,dx \Longrightarrow u=2^x \longrightarrow du=2^x\operatorname{Ln}2\,dx$

$=\frac{1}{\operatorname{Ln}2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{1}{\operatorname{Ln}2}\sinh^{-1}u+C = \frac{1}{\operatorname{Ln}2}\sinh^{-1}(2^x)+C$

---

(۱۶) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}\,dx \Rightarrow u=e^{3x}-1 \Rightarrow du=3e^{3x}dx$

$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{3}\operatorname{Ln}u+C = \frac{1}{3}\operatorname{Ln}\left|e^{3x}-1\right|+C$

---

(۱۷) $\int\frac{dx}{e^{3x}-e^{x}} \longrightarrow \int\frac{dx}{e^{x}(e^{2x}-1)} = \begin{cases} e^{x}=u \\ du=e^{x}dx \\ \frac{du}{u}=dx \end{cases}$

$\int\frac{du}{u^2(u^2-1)} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \int\left(\frac{1}{u^2-1}-\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+\frac{1}{u}+C$

$=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\right|+\frac{1}{e^{x}}+C$

---

(۱۸) $\int\frac{dx}{1-\tanh x} = \int\frac{dx}{1-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}} = \frac{1}{2}\int(e^{2x}+1)\,du = \frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}x+C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حل انتگرال هایی که می توان معکوس نسبت های مثلثاتی را u در نظر گرفت مانند $u = \sin^{-1} x$

① $I = \int \sqrt{1-x^2}\, \sin^{-1} x \, dx$

$$\begin{cases} \sin^{-1} x = u \rightarrow x = \sin u \\ dx = \cos u \, du \end{cases} \rightarrow I = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos^2 u} \times u \times \cos u \, du$$

فرض: $\cos u > 0$

$$I = \int u \cos^2 u \, du = \int \frac{u(1+\cos 2u)}{2} du = \frac{1}{2}\int u \, du + \frac{1}{2}\underbrace{\int u \cos 2u \, du}_{I_1}$$

حل $I_1 =$ جزء به جزء

u	$\cos 2u$
1	$+$ $\frac{1}{2}\sin 2u$
0	$-$ $\frac{-1}{4}\cos 2u$

$$\rightarrow I_1 = \frac{u}{2}\sin 2u + \frac{1}{4}\cos 2u$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\sin 2u + \frac{1}{4}\cos 2u\right) = \frac{1}{4}\left(\sin^{-1} x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^{-1} x \sin(2\sin^{-1} x) + \frac{1}{8}\cos(2\sin^{-1} x) + C$$

---

② $I = \int \frac{\sin^{-1} x}{x^2} dx$

$$\begin{cases} \sin^{-1} x = u \rightarrow x = \sin u \\ dx = \cos u \, du \end{cases} \rightarrow I = \int \frac{u \cos u \, du}{\sin^2 u}$$

$$\rightarrow I = \int u \cot u \csc u \, du \xrightarrow{\text{جزء به جزء}}$$

u	$\cot u \csc u \, du = dv$
1	$+$ $-\csc u$
0	$-$ $+\ln\lvert \csc u + \cot u \rvert$

$$\rightarrow I = -u \csc u - \ln\lvert \csc u + \cot u \rvert + C$$

$$\rightarrow I = -\sin^{-1} x \csc(\sin^{-1} x) - \ln\lvert \csc(\sin^{-1} x) + \cot(\sin^{-1} x) \rvert + C$$

---

③ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(\cos^{-1} x)^2}$

$$\begin{cases} \cos^{-1} x = u \rightarrow x = \cos u \\ dx = -\sin u \, du \end{cases}$$

$$= \int \frac{-\sin u \, du}{\underbrace{\sqrt{1-\cos^2 u}}_{\sin^2 u} \; u^2} = \int \frac{-du}{u^2} = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos^{-1} x} + C$$

فرض: $\sin u > 0$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حل انتگرال های با فرمول های زیر:

(I) $\int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arc}\tan u + C$

(II) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arc}\sin u + C$

(III) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C$

---

① $\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} \longrightarrow \begin{cases} 2x = u \\ dx = \frac{du}{2} \end{cases} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} u + C = \frac{1}{2}\tan^{-1} 2x + C$

---

② $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\sin 2x\,dx}{1+(\sin^2 x)^2} \longrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = u \\ \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}\,dx = du \end{cases} = \int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}(\sin^2 x) + C$

---

③ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(ax)^2}} \longrightarrow \begin{cases} ax = u \\ dx = \frac{du}{a} \end{cases} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{a}\sin^{-1} u + C =$

$\frac{1}{a}\sin^{-1}(ax) + C$

---

④ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{\underbrace{a^2}_{\text{فاکتور}}(1+(\frac{x}{a})^2)} = \begin{cases} \frac{x}{a} = u \\ dx = a\,du \end{cases} = \frac{1}{a^2} \times a \int \frac{du}{(1+u^2)} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + C$

---

⑤ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4(1-(\frac{1}{x^4}))}} = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-(\frac{1}{x^2})^2}} = \begin{cases} u = \frac{1}{x^2} \\ du = \frac{-2dx}{x^4} \\ -\frac{du}{2} = \frac{dx}{x^3} \end{cases} = \frac{-1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$

$-\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{1}{x^2}) + C$

---

⑥ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} = \int \frac{dx}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{فاکتور}}(1+x)} \xrightarrow{x=(\sqrt{x})^2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = u \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du \end{cases}$

$= 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2\tan^{-1}(\sqrt{x}) + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \xrightarrow{x=(\sqrt{x})^2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=u \\ \frac{dx}{\sqrt{x}}=2du \end{cases} = 2\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

فاکتور

$$= 2\sin^{-1}(\sqrt{x})+C$$

---

⑧ $$\int \frac{dx}{\sqrt{36-25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36(1-(\frac{5}{6}x)^2)}} = \begin{cases} \frac{5}{6}x=u \\ dx=\frac{6}{5}du \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{36}} \times \frac{6}{5}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{5}\sin^{-1}(\frac{5}{6}x)+C$$

---

⑨ $$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{dx}{a^2(1+(\frac{b}{a}x)^2)} = \begin{cases} \frac{b}{a}x=u \\ dx=\frac{a}{b}du \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{a}{b}du}{1+u^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}(\frac{b}{a}x)+C$$

---

⑩ $$\int \frac{(2x^2+5)dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \xrightarrow{2x^2+5=(x^2+4)+(x^2+1)} \int \frac{(x^2+4)+(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2})+C$$

---

⑪ $$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}} = \begin{cases} \tan^{-1}x=u \\ \frac{dx}{1+x^2}=du \end{cases} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}(\tan^{-1}x)+C$$

---

⑫ $$\int \frac{10x^4\,dx}{\sqrt{9-x^{10}}}$$

نکته: $x^{10}=(x^5)^2$ از x^5 متوجه می‌شویم که اگر u گرفته شود x^4 می‌شود که در بالای کسر داریم.

$$10\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{9(1-(\frac{x^5}{3})^2)}} = \begin{cases} \frac{x^5}{3}=u \\ \frac{5}{3}x^4dx=du \rightarrow x^4dx=\frac{3}{5}du \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{9}} \times \frac{3}{5}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sin^{-1}(\frac{x^5}{3})+C$$

---

⑬ $$\int \frac{dx}{e^x+16e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x+\frac{16}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+16} = \int \frac{e^x dx}{16(1+(\frac{e^x}{4})^2)} = \begin{cases} \frac{e^x}{4}=u \\ e^x dx=4du \end{cases}$$

مخرج مشترک می‌گیریم

$$\frac{4}{16}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}(\frac{e^x}{4})+C$$

---

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{4}{2})^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}(1-4(x-\frac{4}{2})^2)}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-4)^2}} =$

تبدیل به اتحاد مربع

$\begin{cases} 2x-4=u \\ dx=\frac{du}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \times \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}(2x-4)+C$

---

(۱۵) $\int \frac{3\,dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3(+1-1)}} = 3\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}} \quad \begin{cases} x+2=u \\ dx=du \end{cases} = 3\int \frac{dx}{u\sqrt{u^2-1}} =$

اضافه می‌کنیم

تبدیل به اتحاد مربع

$3\sec^{-1}|x+2|+C$

---

(۱۶) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(2x)^2-1}} \xrightarrow{\times\frac{2}{2}} = 2\int \frac{dx}{2x\sqrt{(2x)^2-1}} = \begin{cases} 2x=u \\ dx=\frac{du}{2} \end{cases} = \frac{2}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} =$

$\sec^{-1}|2x|+C$

---

(۱۷) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$

---

(۱۸) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2\left(1-\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\cos x}{\sqrt{2}}=u \\ -\sin x\,dx=\sqrt{2}\,du \end{cases} \Rightarrow -\int \frac{\cancel{\sqrt{2}}\,du}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{1-u^2}} =$

$-\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)+C$

---

(۱۹) $\int \frac{e^{-x}\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x-e^{-x}}} = \int \frac{e^{-x}\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x(1-\frac{e^{-x}}{e^x})}} = \int \frac{e^{-x}\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x(1-e^{-2x})}} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} =$

$\begin{cases} e^{-x}=u \\ e^{-x}dx=-du \end{cases} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sin^{-1}|e^{-x}|+C$

---

(۲۰) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int x(3-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-2}\int -2x(3-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int(-2x-2+2)(3-2x-x^2)$

اضافه می‌کنیم

$= -\frac{1}{2}\left[\int(-2x-2)(3-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx + 2\int(3-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx\right]$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ادامهٔ سوال ۲۰

$$I_1 \Rightarrow \int (-2x-2)(3-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2=u \\ -2-2x=du \end{cases} = \int u^{-\frac{1}{2}}\,du \Rightarrow$$

$$2\sqrt{u}+C = 2\sqrt{3-2x-x^2}+C_1$$

$$I_2 = 2\int (3-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)}} =$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2}=u \\ dx=2du \end{cases} \quad = \frac{2}{\sqrt{4}}\int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C_2$$

جواب آخر $= -\frac{1}{2}\left[I_1+I_2\right] \Rightarrow -\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

---

(۲۱) $$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$$

---

(۲۲) $$\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}\,dx \Rightarrow \div\times($$ در صورت $$) = \int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} \times \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2}_{u}\right)}} + \frac{1}{2}\int \underbrace{-2x\,dx}_{du}\ \underbrace{(4-x^2)}_{u}{}^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{4-x^2}+C$$

---

(۲۳) $$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+13}\,dx =$$

سعی می‌کنیم مشتق مخرج را در صورت ظاهر کنیم پس در $\frac{3}{2}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}(3x+2)}{x^2+4x+13}\,dx =$$

اضافه می‌کنیم

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}+4-4}{x^2+4x+13} = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+13} - \frac{3}{2}\int \frac{\frac{8}{3}\,dx}{x^2+4x+13} = \frac{3}{2}\int \frac{\overbrace{(2x+4)\,dx}^{du}}{\underbrace{x^2+4x+13}_{u}}$$

$$-4\int \frac{dx}{\underbrace{(x+2)^2}_{u\ \text{تابع بگیریم}}+9} = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right| - \frac{4}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال‌هایی که توابع هیپربولیک معکوس را به دست می‌دهند. (برای راحتی محاسبات)

① $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) + C \qquad a>0$

② $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right) + C \qquad u>a>0$

③ $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} & |u|<a \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} & |u|>a \end{cases} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

---

① $\int \frac{dx}{25-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{5}\tanh^{-1}\frac{x}{5} + C & |x|<5 \\ \frac{1}{5}\coth^{-1}\frac{x}{5} & |x|>5 \end{cases} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right| + C$

---

② $\int \frac{dx}{4e^x - e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{e^x\,dx}{4e^{2x}-1} \qquad I = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x\,dx}{(2e^x)^2-1} \qquad \begin{cases} u = 2e^x \\ du = 2e^x dx \end{cases}$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{-1}{2}\begin{cases} \tanh^{-1}u + C & u<1 \\ \coth^{-1}u + C & u>1 \end{cases}$

$= -\frac{1}{2}\begin{cases} \tanh^{-1} 2e^x + C & 2e^x<1 \\ \coth^{-1} 2e^x + C & 2e^x>1 \end{cases}$

---

③ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}} \qquad \begin{cases} x+1=u \\ dx=du \end{cases} \rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$

$= \cosh^{-1}u + C = \cosh^{-1}(x+1) + C$

---

④ $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^4+6x^2+5}} = \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{(x^2+3)^2-4}} \Rightarrow \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{(x^2+3)^2-4}} \qquad \begin{cases} x^2+3=u \\ 2x\,dx=du \end{cases}$

$I = \frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-4}} = \frac{3}{2}\cosh^{-1}\frac{u}{2} = \frac{3}{2}\cosh^{-1}\frac{(x^2+3)}{2} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑤ $\int \frac{dx}{\sqrt{5-e^{-2x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-\frac{1}{e^{2x}}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5e^{2x}-1}{e^{2x}}}} \xrightarrow[\text{همواره}]{e^x>0} \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(\sqrt{5}e^x)^2-1}}$

$\begin{cases} \sqrt{5}e^x = u \\ \sqrt{5}e^x dx = du \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \cosh^{-1} \frac{u}{1} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \cosh^{-1}(\sqrt{5}e^x) + C$

نکته: محاسبه‌ی انتگرال‌هایی به صورت $\int f(x)\sqrt[n]{(ax+b)}\,dx$ ، $\int \frac{f(x)}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$ با $u=\sqrt[n]{ax+b}$

نکته: $\sqrt[n]{ax+b} = (ax+b)^{1/n}$

---

① $\int \sqrt{3+x}\,(x+1)^2 dx$ $\quad \begin{cases} u=\sqrt{3+x} \to u^2 = 3+x \to x = u^2-3 \\ 2u\,du = dx \end{cases}$

$= \int u(u^2-2)^2 2u\,du = 2\int u^2(u^4-4u^2+4)\,du = \frac{2}{7}u^7 - \frac{8}{5}u^5 + \frac{8}{3}u^3 + C$

$= \frac{2}{7}(3+x)^{7/2} - \frac{8}{5}(3+x)^{5/2} + \frac{8}{3}(3+x)^{3/2} + C$

---

② $\int (x^3+3)^{\frac{1}{4}} x^5 dx$ $\quad \begin{cases} u=(x^3+3)^{1/4} \to u^4 = x^3+3 \to x^3 = u^4-3 \\ 3x^2dx = 4u^3du \to x^2dx = \frac{4}{3}u^3du \end{cases}$

$= \int u(u^4-3)(\frac{4}{3})u^3du = \frac{4}{3}\int (u^8-3u^4)\,du = \frac{4(x^3+3)^{9/4}}{27} - \frac{4}{5}(x^3+3)^{5/4} + C$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

جانشینی های دیگر

الف) اگر انتگرال شامل توان های کسری از متغیرهای مثل x باشد، می‌توان آن را با جانشینی زیر ساده کرد $x=t^n$ که n کوچکترین مخرج مشترک نماهاست.

ب) در بعضی از موارد نیز از جانشینی عکس $x=\frac{1}{t}$ استفاده می‌شود (مثال ۱۰)

① $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ $\quad \begin{cases} x=t^6 \longrightarrow dx=6t^5\,dt \quad , \quad t=x^{1/6} \\ \sqrt{x}=t^3 \\ \sqrt[3]{x}=t^{6/3}=t^2 \end{cases}$

$=\int \frac{t^3\times 6t^5\,dt}{1+t^2}=6\int\frac{t^8}{t^2+1}\,dt \Rightarrow$ صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم $=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$=\frac{6}{7}x^{7/6}-\frac{6}{5}x^{5/6}+2x^{1/2}-6x^{1/6}+6\tan^{-1}x^{1/6}+C$

---

② $\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx \Rightarrow \int (x^2)^2 x\sqrt{x^2+4}\,dx \Rightarrow$ روش اول $\begin{cases} x^2+4=t \quad 2x\,dx=dt \end{cases}$

$=\frac{1}{2}\int (t-4)^2 t^{1/2}\,dt \Longrightarrow \frac{1}{2}\int (t^2-8t+16)t^{1/2}\,dt =$

$\frac{1}{2}\int\left(t^{5/2}-8t^{3/2}+16t^{1/2}\right)dt=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}-4\times\frac{2}{5}t^{5/2}+8\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{1}{7}\sqrt{(x^2+4)^7}-\frac{8}{5}\sqrt[2]{(x^2+4)^5}+\frac{16}{3}\sqrt{(x^2+4)^3}+C$

روش دوم $t=\sqrt{x^2+4} \longrightarrow t^2=x^2+4 \longrightarrow 2t\,dt=2x\,dx$

$\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx=\int (x^2)^2 x\sqrt{x^2+4}\,dx=\int (t^2-4)^2 t\,(t\,dt)=\frac{1}{7}t^7-\frac{8}{5}t^5+\frac{16}{3}t^3+C=$

$\frac{1}{7}\left(\sqrt{x^2+4}\right)^7-\frac{8}{5}\left(\sqrt{x^2+4}\right)^5+\frac{16}{3}\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3+C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

③ $\int \frac{5\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[5]{x^2} + 1}{\sqrt{x}}$ کوچکترین مضرب مشترک ۲،۳،۵ ← ۳۰ است $\quad x = t^{30} \rightarrow dx = 30t^{29}dt$

$$= \int \frac{5\sqrt[3]{t^{30}} - 4\sqrt[5]{t^{60}} + 1}{\sqrt{t^{30}}} (30t^{29})\, dt = 30\int \frac{5t^{10} - 4t^{12} + 1}{t^{15}}\, t^{29} dt$$

$$= 30\int (5t^{24} - 4t^{26} + t^{14})dt = 30\left(\frac{5}{25}t^{25} - \frac{4}{27}t^{27} + \frac{1}{15}t^{15}\right) + C$$

$$= 6\sqrt[30]{x^{25}} - \frac{120}{27}\sqrt[30]{x^{27}} + \frac{1}{2}\sqrt[30]{x^{15}} + C = 6\sqrt[6]{x^5} - \frac{40}{9}\sqrt[10]{x^9} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + C$$

---

④ $\int \frac{x}{2+\sqrt{x}}dx \longrightarrow \begin{cases} x = t^2 \rightarrow dx = 2t\,dt \\ \sqrt{x} = t \end{cases}$

$$\int \frac{t^2(2t\,dt)}{2+t} = 2\int \frac{t^3 dt}{2+t} = 2\int \left(t^2 - 2t + 4 - \frac{27}{t+2}\right)dt$$

$$= 2\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 8t - 54\ln|t+2| + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x + 8\sqrt{x} - 54\ln|\sqrt{x}+2| + C$$

---

⑤ $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+2}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = u \rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x+2}} = du \rightarrow dx = 2u\,du \end{cases}$

$$= 2\int \frac{u\,du}{2+u} = 2\int \frac{u+2-2}{u+2}du = 2\int du - 4\int \frac{du}{u+2} =$$

$$2u - 4\ln|u+2| + C = 2\sqrt{x+2} - 4\ln|\sqrt{x+2} + 2| + C$$

---

⑥ $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = u \rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \rightarrow dx = 2u\,du \end{cases}$

$$= \int \frac{2u\,du}{\sqrt{u+1}} = 2\int u(u+1)^{-1/2}du = 2\int (u+1-1)(u+1)^{-1/2}du =$$

$$2\int (u+1)^{1/2}du - 2\int (u+1)^{-1/2}du = 2\frac{(u+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{(u+1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{x}+1)^3} - 4\sqrt{\sqrt{x}+1} + C$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+4}} \times \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+4}} = \int \frac{(\sqrt{2x}+\sqrt{x+4})}{x-4}dx = \sqrt{2}\underbrace{\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-4}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\sqrt{x+4}}{x-4}dx}_{I_2} =$

$2\sqrt{2x} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right| + 2\sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{x+4}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x+4}+2\sqrt{2}}\right| + C$

حل $I_1 = \begin{cases} x = t^2 \leftrightarrow \sqrt{x} = t \\ dx = 2t\,dt \end{cases} \rightarrow \sqrt{2}\int \frac{t(2t\,dt)}{t^2-4} = 2\sqrt{2}\int \frac{t^2 \boxed{-4+4}\,dt}{t^2-4}$

$= 2\sqrt{2}\int dt + 8\sqrt{2}\int \frac{dt}{t^2-4} = 2\sqrt{2}\,t + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{t-2}{t+2}\right| = 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|$

حل $I_2 \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x+4}}{x-4}dx = \left\{ x+4=u \rightarrow x = u-4 \rightarrow dx = du \right.$

$= \int \frac{\sqrt{u}\,du}{u-8} \Rightarrow \left\{ u = t^2 \rightarrow du = 2t\,dt \right. \Longrightarrow 2\int \frac{t^2\,dt}{t^2-8} = 2\int \frac{(t^2-8+8)\,dt}{t^2-8} =$

$2t + \frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{Ln}\left|\frac{t-2\sqrt{2}}{t+2\sqrt{2}}\right| = 2\sqrt{u} + \frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{u}-2\sqrt{2}}{\sqrt{u}+2\sqrt{2}}\right| = 2\sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{x+4}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x+4}+2\sqrt{2}}\right| + C$

---

⑧ $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{5x^2+4}} = \begin{cases} 5x^2+4 = u \rightarrow x^2 = \frac{u-4}{5} \\ 10x\,dx = du \end{cases}$

$= \frac{1}{10}\int \frac{10x\,x^2\,dx}{\sqrt{5x^2+4}} = \frac{1}{10}\int \frac{\frac{u-4}{5}du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{50}\int \frac{u-4}{\sqrt{u}}du =$

$\frac{1}{50}\left(\int \sqrt{u}\,du - 4\int \frac{du}{\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{75}u^{3/2} - \frac{8}{50}\sqrt{u} + C = \frac{1}{75}\sqrt[2]{(5x^2+4)^3} - \frac{8}{50}\sqrt{5x^2+4} + C$

---

⑨ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2} \longrightarrow \begin{cases} x = t^6 \rightarrow dx = 6t^5\,dt \\ \sqrt{x} = t^3 \\ \sqrt[3]{x} = t^2 \end{cases}$

$I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3 t^2 (1+t^2)^2} = 6\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \left\{ t = \tan\theta \rightarrow dt = \sec^2\theta\,d\theta \right.$

$= 6\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} = 6\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = 6\int \cos^2\theta\,d\theta = 6\int \frac{(1+\cos 2\theta)}{2}d\theta$

$= 3\theta + \frac{3}{2}\sin 2\theta + C = 3\tan^{-1}t + 3\frac{t}{t^2+1} + C = 3\tan^{-1}\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۰) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2x+3x^2}}$ فرض: $x=\frac{1}{t} \longrightarrow -\frac{dt}{t^2}=dx$

$$=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2}}}=-\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+2t+3}}=\frac{-1}{2}\int \frac{(2t+2-2)\,dt}{\sqrt{t^2+2t+3}}=$$

$$-\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{(2t+2)\,dt}{\sqrt{t^2+2t+3}}}_{I_1}+\underbrace{\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+3}}}_{I_2}\xrightarrow[x=\frac{1}{t}]{}-\frac{\sqrt{1+2x+3x^2}}{x}+\sinh^{-1}\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

حل $I_1=\begin{cases} t^2+2t+3=u \\ (2t+2)dt=du\end{cases} \quad =-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\sqrt{u}=-\sqrt{t^2+2t+3}+C$

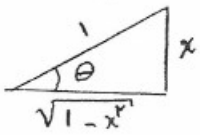
حل $I_2=\int\frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+2}} \quad \begin{cases} t+1=u \\ dt=du\end{cases} \Rightarrow I_2=\int\frac{du}{\sqrt{u^2+2}}=\sinh^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}=\sinh^{-1}\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C$

---

(۱۱) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ حل $\times\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}=\int\frac{(1+x)\,dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

$\begin{cases} x=\sin\theta \\ dx=\cos\theta\,d\theta\end{cases} \Rightarrow \int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}+\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\int\csc^2\theta+\int\csc\theta\,d\theta$

$=-\cot\theta-\ln|\csc\theta+\cot\theta|+C=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|+C$



---

(۱۲) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}=\begin{cases} 1+\sqrt[4]{x}=u \longrightarrow dx=4(u-1)^3du \\ \sqrt{x}=(u-1)^2\end{cases}$

$\int\frac{\sqrt[3]{u}\times 4(u-1)^3du}{(u-1)^2}=4\int u^{\frac{1}{3}}(u-1)\,du=4\int\left(u^{\frac{4}{3}}-u^{\frac{1}{3}}\right)du=\frac{12}{7}u^{\frac{7}{3}}-3u^{\frac{4}{3}}+C$

$=\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}+C$

---

(۱۳) $\int\frac{dx}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}} \Rightarrow \begin{cases} x=t^8 \longrightarrow dx=8t^7dt\end{cases} \qquad I=8\int\frac{t^7\,dt}{t^5-t}=8\int\frac{t^6\,dt}{t^4-1}=$ عمل تقسیم

$8\int\left(t^2+\frac{t^2}{t^4-1}\right)dt=\frac{8}{3}t^3+2\ln|t-1|-2\ln|t+1|+4\tan^{-1}t+C \Rightarrow$ تجزیه کسر

$\frac{8}{3}x^{\frac{3}{8}}+4\tan^{-1}x^{\frac{1}{8}}+2\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1}\right|+C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۴) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx = \left\{ \sqrt{x+1}+1=u \longrightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}=du \Rightarrow dx=2(u-1)du \right.$

$I=\int \frac{\sqrt{x+1}-1\boxed{+1-1}}{\sqrt{x+1}+1}dx = \int \frac{u-2}{u}(2(u-1)du) =$

$2\int \frac{u^2-3u+2}{u}du = 2\int (u-3+\frac{2}{u})du = u^2-6u+4\ln u+C$

$(x+1+2\sqrt{x+1}+1)-6(\sqrt{x+1}+1)+4\ln|\sqrt{x+1}+1|+C$

$=x-4(\sqrt{x+1}+1)+4\ln|\sqrt{x+1}+1|+C$

---

(۱۵) $\int \frac{\sqrt[2]{2x-3}\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1} \longrightarrow \begin{cases} 2x-3=t^6 \\ 2dx=6t^5dt \end{cases} = 3\int \frac{t^3t^5dt}{t^2+1} \xrightarrow{\text{عمل تقسیم}}$

$= 3\int (t^6-t^4+t^2-1)dt + 3\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3t^7}{7}-\frac{3t^5}{5}+\frac{3t^3}{3}-3t+3\tan^{-1}t+C$

$= 3\left[\frac{1}{7}(2x-3)^{7/6}-\frac{1}{5}(2x-3)^{5/6}-\frac{1}{3}(2x-3)^{1/2}-(2x-3)^{1/6}+\tan^{-1}(2x-3)^{1/6}\right]+C$

---

(۱۶) $I=\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx \quad \begin{cases} x=t^6 \\ dx=6t^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=t^3 \\ \sqrt[3]{x}=t^2 \end{cases}$

$I=6\int \frac{(t^6+t^4+t)t^5}{t^6(1+t^2)}dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt \xrightarrow{\text{عمل تقسیم}}$

$=6\int t^3dt+6\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}t^4+6\tan^{-1}t+C$

$= \frac{3}{2}x^{2/3}+6\tan^{-1}\sqrt[6]{x}+C$

حسن پور

نکته: اگر انتگرال به صورت توان های کسری از $\frac{ax+b}{cx+d}$ باشد از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$ استفاده می کنیم که m کوچکترین مضرب مشترک است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۷) $I=\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx \quad \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}=t \\ \frac{2-x}{2+x}=t^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{2-2t^3}{1+t^3} \rightarrow 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3} \\ dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}\,dt \end{cases}$

$$I=-\int \frac{2(1+t^3)^2 t\times 12t^2}{16x^6(1+t^3)^2}=\frac{-3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4t^2}+c$$

$$\rightarrow I=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+c$$

---

(۱۸) $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=\sqrt[4]{\frac{(x-1)^4}{x-1}(x+2)^4(x+2)}=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t \Rightarrow \frac{x+2}{x-1}=t^4 \Rightarrow \begin{cases} x-1=\frac{3}{t^4-1} \\ x+2=\frac{3t^4}{t^4-1} \\ dx=\frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=-\int\frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3}{3\times 3t^4 t(t^4-1)^2}\,dt=\frac{-4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3}\frac{1}{t}+c$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+c$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال مجازی (غیرعادی، ناسره، نامتعارف):

در تعریف انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ فرض کردیم که تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ معین باشد حال با در نظر گرفتن یک بازه‌ی نامتناهی انتگرال گیری، تعریف انتگرال معین را تعمیم می‌دهیم و می‌گوییم انتگرال نامتعارف است.

دو نوع انتگرال مجازی بررسی می‌کنیم:

حالت الف) وقتی حدود انتگرال گیری بینهایت اند:

① $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ شرط: تابع f در بازه‌ی $[a,+\infty)$ پیوسته است.

② $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ شرط: تابع f در بازه‌ی $(-\infty,b]$ پیوسته است.

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$ شرط: تابع f در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است. معمولاً $c=0$ است.

* در صورت وجود حدهای مورد نظر گوییم انتگرال مجازی همگراست و در صورتی که حاصل حد نامتناهی باشد و یا وجود نداشته باشد، انتگرال مجازی واگراست.

حالت ب) انتگرال مجازی شامل توابع بی کران باشد:

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته بر بازه‌ی $[a,b)$ باشد که وقتی $x\to b^-$، f به بینهایت نزدیک شود و $\lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)dx$ موجود و متناهی باشد در این صورت می‌گوییم انتگرال مجازی $\int_a^b f(x)dx$ همگراست اما اگر حد موجود نباشد و یا نامتناهی باشد، انتگرال مجازی واگراست. همین حالت برای $\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx$ نیز برقرار است.

آزمون مقایسه برای انتگرال های مجازی: اگر f و g توابعی پیوسته باشند به طوری که به ازای هر $x\geq a$، $0\leq f(x)\leq g(x)$، در این صورت ① اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگراست.

② اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ واگرا باشد، $\int_a^\infty g(x)dx$ نیز واگراست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: در مواردی که محاسبه‌ی انتگرال کلی دشوار است استفاده از آزمون مقایسه کار ما را راحت می‌کند.

مثال: اگر انتگرال مجازی داده شده، همگرا باشد، مقدارش را بیابید در غیر این صورت بگویید واگراست.

① $$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{a\to\infty}\int_2^{a} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{a\to\infty} \sec^{-1}x\Big|_2^a = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$ همگرا

نکته دار

② $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\int_a^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} + \lim_{b\to 1^-}\int_{1/2}^{b} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \lim_{a\to 0^+} \sin^{-1}(2x-1)\Big|_a^{1/2} + \lim_{b\to 1^-}\sin^{-1}(2x-1)\Big|_{1/2}^{b}$$

$$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$ همگرا

حل $$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} \quad \begin{cases} x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta \\ dx = \frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta \end{cases} \rightarrow \int \frac{\frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\frac{1}{4}(1-\sin^2\theta)}} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1}(2x-1)+c$$

---

③ $$\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx \quad \begin{cases} u = \tan^{-1}x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x^2+1} \\ v = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}\tan^{-1}x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{-1}{x}\tan^{-1}x + \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{-1}{x}\tan^{-1}x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^{a} \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\tan^{-1}x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^a$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\tan^{-1}x + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^a = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$ همگرا

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

④ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-(-x)}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty} e^{x}\Big|_a^0 - \lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b = (1-0)-(0-1)=2$ همگرا

---

⑤ $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty}(-\cos x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(-\cos b+1) \xrightarrow[\text{وجود ندارد}]{\text{چون } \lim_{b\to\infty}\cos b}$ واگرا

این مثال نمونه‌ای از یک انتگرال مجازی را نشان می‌دهد که واگراست و حد هم بی‌نهایت نیست.

---

⑥ $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx \quad \begin{cases}\sqrt{x}=t \to \begin{cases}x=0\to t=0\\ x=\infty\to t=\infty\end{cases}\\ x=t^2\to dx=2tdt\end{cases} \Rightarrow 2\int_0^{\infty} te^{-t}dt = 2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-t}dt$

$\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} -2\lim_{b\to\infty}\left(te^{-t}+e^{-t}\right)\Big|_0^b = 0+2(1)=2 \longrightarrow$ همگرا

---

⑦ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1} \xrightarrow[\text{قبلاً حل شده}]{\text{این انتگرال}} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{4\sqrt2}\ln\frac{x^2+\sqrt2x+1}{x^2-\sqrt2x+1}+\frac{1}{2\sqrt2}\tan^{-1}(\sqrt2x+1)+\frac{1}{2\sqrt2}\tan^{-1}(\sqrt2x-1)\right]_0^b$

$=\frac{1}{2\sqrt2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt2} \longrightarrow$ همگرا

---

⑧ $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x} \xlongequal{1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}} \int_0^{\pi}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac12\lim_{b\to\pi^-}\int_0^b \sec^2\frac{x}{2}dx = \frac22\lim_{b\to\pi^-}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^b = \infty \longrightarrow$ واگرا

---

⑨ $\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\frac12 e^{-x}\sin 2x\,dx \xlongequal[\text{جزء به جزء}]{\text{دو مرحله}} \frac12\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-x}}{\sqrt5}(2\cos 2x+\sin 2x)\right]_0^b = \frac{1}{\sqrt5}$ همگرا

---

⑩ $\int_0^{\infty} e^{-x}\cosh x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{e^{-x}(e^{x}+e^{-x})}{2}dx = \frac12\lim_{b\to\infty}\int_0^b(1+e^{-2x})dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac12x-\frac{e^{-2x}}{4}\right)\Big|_0^b = \infty \longrightarrow$ واگرا

---

⑪ $\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3x} = \lim_{b\to\infty}\int_{e^2}^b\frac{dx}{x\ln^3x} \xrightarrow[u=\ln x]{\text{برای حل انتگرال}} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2\ln^2x}\right)\Big|_{e^2}^b = 0+\frac{1}{2(\ln e^2)^2} = \frac18 \longrightarrow$ همگرا

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۲) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+2x+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}\right)\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}\right)\Big|_0^b=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\longrightarrow$$ همگرا

حل انتگرال: $$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}+C$$

---

(۱۳) $$\int_0^{\infty}x\sin x\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a x\sin x\,dx\overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=\!=}\lim_{a\to+\infty}\left(-x\cos x+\sin x\right)\Big|_0^a$$

این حد وجود ندارد
پس واگراست

---

(۱۴) $$\int_2^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}=\lim_{a\to\infty}\int_2^a\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}=\lim_{a\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-3}}\Big|_2^a=1\longrightarrow$$ همگرا

حل انتگرال: $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}\quad\begin{cases}x^2-3=u\\2x\,dx=du\end{cases}\longrightarrow\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^3}}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}du=\frac{1}{2}\,\frac{u^{-1/2}}{\frac{-1}{2}}+C=\frac{-1}{\sqrt{x^2-3}}+C$$

---

(۱۵) $$\int_0^{\pi}\frac{1+\tan^2x}{2+\tan^2x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\tan^2x}{2+\tan^2x}dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1+\tan^2x}{2+\tan^2x}dx$$

$$=\lim_{a\to\pi/2^-}\int_0^a\frac{1+\tan^2x}{2+\tan^2x}dx+\lim_{b\to\pi/2^+}\int_b^{\pi}\frac{1+\tan^2x}{2+\tan^2x}dx=\lim_{a\to\pi/2^-}\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^a+\lim_{b\to\pi/2^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_b^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)-0+0-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\longrightarrow$$ همگرا

حل انتگرال: $$\int\frac{1+\tan^2x}{2+\tan^2x}dx\quad\begin{cases}\tan x=u\\(1+\tan^2x)dx=du\end{cases}\longrightarrow\int\frac{du}{2+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

---

(۱۶) $$\int_0^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{x}=\lim_{a\to0}\int_a^1\frac{\ln x\,dx}{x}+\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{\ln x\,dx}{x}=\lim_{a\to0}\frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_a^1+\lim_{b\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^b=\infty\longrightarrow$$ واگرا

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۷) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}x\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\tan^{-1}x\Big|_0^b=-\left(\frac{-\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$$

پس همگراست

---

(۱۸) $$\int_{-\infty}^{+\infty}x(1+x^2)^{-1}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{x}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{xdx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^b=+\infty\longrightarrow$$ واگراست

---

(۱۹) $$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2xdx}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{2xdx}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left(\tan^{-1}(x^2)\right)\Big|_1^a=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{8}$$ همگرا

---

(۲۰) $$\int_0^{\infty}\ln x\,dx=\int_0^1\ln x\,dx+\int_1^{\infty}\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\ln x\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_1^b\ln x\,dx$$

$$=\lim_{a\to0^+}(x\ln x-x)\Big|_a^1+\lim_{b\to\infty}(x\ln x-x)\Big|_1^b=(-1-0)+\infty=\infty\longrightarrow$$ واگرا

رفع ابهام: $$\lim_{x\to0^+}x\ln x=0\times\infty\longrightarrow\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{hop}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}x\ln x-x=\lim_{x\to\infty}x(\ln x-1)=\infty\times\infty=\infty$$

---

(۲۱) $$\int_0^2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx=\int_0^2\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}\times\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}}dx=\int_0^2\frac{(x+2)dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_0^2\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}+\int_0^2\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\lim_{a\to2^-}\left[\int_0^a\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}+\int_0^a\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}\right]=\lim_{a\to2^-}\left(-\sqrt{4-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^a=\pi+2\longrightarrow$$ همگرا

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: نوع انتگرال های زیر را تعیین نمایید. (آزمون مقایسه)

① $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

$x^3+1 > \sqrt{x^3+1} \longrightarrow \frac{1}{x^3+1} < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ $\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$\overset{\text{تجزیه کسر}}{=\!=} \int_0^\infty \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} - \frac{1}{2(x^2-x+1)}\right) dx$

$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c\right)\Big|_0^b = \infty \longrightarrow$ واگرا

در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

② $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ $\quad 0<x<\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0<\sin x<1 \longrightarrow \frac{\sin x}{x^{3/2}} < \frac{1}{x^{3/2}}$

$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{\pi/2} x^{-3/2} dx = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_a^{\pi/2} = \infty \longrightarrow$ واگرا

پس در مورد انتگرال داده شده نمی توان نظر داد چون از واگرایی تابع بزرگتر به واگرایی تابع کوچکتر نمی توان رسید. از روش دیگری استفاده می کنیم

if $0<x<\frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin x>0$ می دانیم: $\sin x < x \xrightarrow{x^2>x} \sin x < x \xrightarrow{\div x\sqrt{x}} \frac{\sin x}{x^{3/2}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\int_0^{\pi/2} x^{-1/2} dx = 2x^{1/2}\Big|_0^{\pi/2} = 2\times\sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq \infty \longrightarrow$ همگرا

پس انتگرال داده شده همگراست.

③ $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ $\quad \sqrt{x^2+x} < \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = x+1 \longrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to\infty} \ln(x+1)\Big|_1^b = \infty \longrightarrow$ واگرا

پس انتگرال داده شده واگراست.

④ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ $\quad 0<x<1 \longrightarrow x^3<x^2 \longrightarrow -x^3>-x^2 \longrightarrow 1-x^3>1-x^2 \longrightarrow \sqrt{1-x^3}>\sqrt{1-x^2}$

$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \lim_{b\to 1} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1} \sin^{-1}x\Big|_0^b = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ همگرا

پس انتگرال داده شده همگراست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑤ $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}}_{I_2}$

$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}$ $\quad 0<x<1 \to 0<x^2<1 \to 1<x^2+1<2 \to 1<\sqrt{x^2+1}<\sqrt{2}$

$\to \sqrt{x} < \sqrt{x}\sqrt{x^2+1} < \sqrt{2x} \to \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست $\to$ I_1 همگراست

$I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ $\quad$ if $x \geq 1 \to x^3 \geq 1 \to x^3+x \geq x^3 \to \sqrt{x^3+x} \geq \sqrt{x^3} \to \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ همگراست $\to$ I_2 همگراست $\to$ $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ همگراست

---

⑥ $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x^2}dx}_{I_2}$ $\quad \begin{cases} 0<x<1 & e^{-x} < e^{-x^2} \\ x>1 & e^{-x^2} < e^{-x} \end{cases}$ $\quad$ I_1 همگراست (متناهی)

I_2 : مقایسه با $\int_1^\infty e^{-x} = \lim_{a\to+\infty} -e^{-x}\Big|_1^a = e^{-1} \to$ همگرا $\to \int_1^\infty e^{-x^2}dx$ همگراست $\to \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ همگراست

نکته : $\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Error Function)

---

⑦ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x\sin x}$ $\quad 0<x<\frac{\pi}{2} \begin{cases} x>0 \\ \sin x>0 \end{cases}$ $\quad 0 < x\sin x < x \to \frac{1}{x\sin x} \geq \frac{1}{x} > 0$

$\lim_{a\to0^+} \int_a^{\pi/2} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to0^+} \ln x\Big|_0^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2} - \ln 0^+ = +\infty \to$ واگراست $\xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x\sin x}$ واگراست

---

⑧ $\underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx}_{I} = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx}_{I_2}$ $\quad \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}e^x}$

$I_1 : 0 < \frac{1}{\sqrt{x}e^x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad 0<x<1 \to \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست $\to \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ همگراست

$I_2 : 0 < \frac{1}{\sqrt{x}e^x} \leq \frac{1}{e^x}$ $\quad x>1$ $\quad \int_1^\infty e^{-x}dx$ همگراست $\to \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ همگراست

پس I همگراست

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑨ $I=\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}}}_{I_2}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

$I_1: 0<x\leq 1 \to 0<x^2\leq 1 \to 1<x^2+1\leq 2 \to 1<\sqrt{x^2+1}\leq 2 \xrightarrow{\times x} x<x\sqrt{x^2+1}\leq \sqrt{2}\,x$

$\to \frac{1}{x} > \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\,x}$ چون $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2}\,x}$ واگراست پس طبق آزمون مقایسه $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ واگراست

و چون I_1 واگراست پس I نیز واگراست.

---

⑩ $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\cosh x} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{x\,dx}{\cosh x}$ $\qquad \frac{x}{\cosh x} = \frac{2x}{e^x+e^{-x}}\times\frac{e^x}{e^x} = \frac{2xe^x}{e^{2x}+1}$ $\qquad \frac{2xe^x}{e^{2x}} > \frac{2xe^x}{e^{2x}+1}$

$\int_0^\infty \frac{2xe^x}{e^{2x}} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2xe^{-x}dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=} -2\lim_{b\to\infty}\left(xe^{-x}+e^{-x}\right)\Big|_0^b = -2(0-1) = 2 \to$ همگرا

طبق آزمون مقایسه انتگرال مورد نظر نیز همگراست.

$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \infty\times 0 = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{hop}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

---

⑪ $\int_1^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$ $\qquad -1\leq \sin 2x\leq 1 \xrightarrow{\times(-4)} 4\geq -4\sin 2x\geq -4 \xrightarrow{+1} 5\geq -4\sin 2x+1\geq -3$

$\to \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}} < \frac{5}{x^3}$ $\qquad \int_1^\infty \frac{5dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} 5\int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\frac{-5}{2x^2}\Big|_1^b = \frac{-5}{2}(0-1) = \frac{5}{2} \to$ همگرا

طبق آزمون مقایسه انتگرال مورد نظر نیز همگراست.

---

⑫ $\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$ $\qquad \frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{x}$ $\qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty}\ln x\Big|_1^a = \infty \to$ واگرا

طبق آزمون مقایسه انتگرال مورد نظر واگراست

---

⑬ $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{x}dx$ $\qquad \frac{\cos x}{x} < \frac{1}{x} \to \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{x} = \infty$ واگراست $\to$ از واگرایی $\frac{1}{x}$ نمی‌توان واگرایی $\frac{\cos x}{x}$ را نتیجه گرفت

پس روش دیگری را بررسی می‌کنیم.

$\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases}\cos x\,dx = dv\\ \frac{1}{x} = u\end{cases} \to \begin{cases}\sin x = v\\ -\frac{dx}{x^2} = du\end{cases} \to \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\Big|_a^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x^2}dx}_{I_1}$

$I_1: 0<x<\frac{\pi}{2} \to 0<\sin x<1$ و $\sin x<x$ و $x<x^2 \to \sin x<x^2 \xrightarrow{\div x^2} \frac{\sin x}{x^2}<1$

$\to \lim_{a\to 0^+}\int_a^{\pi/2} dx = \lim_{a\to 0^+} x\Big|_a^{\pi/2} = \pi/2$ همگرا $\to \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{x}dx = \frac{2}{\pi}-1+\frac{\pi}{2} =$ عدد $\to$ همگراست

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

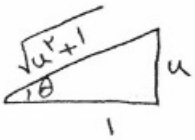
① $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = I \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{e^x})^2+1}}$ $\quad * \rightarrow \sqrt{e^x}=u \rightarrow e^x=u^2 \quad e^x dx = 2u\,du \rightarrow$

$dx = \frac{2}{u} du$

$I = \int \frac{2du}{u\sqrt{u^2+1}} \qquad u=\tan\theta \qquad du=\sec^2\theta\, d\theta \qquad u \geq 0$

$I = 2\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta\sqrt{\sec^2\theta}} \xrightarrow[\sec\theta>1]{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}} I = 2\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta\sec\theta}$

$I = 2\int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = 2\int \csc\theta = -2\ln|\csc\theta + \cot\theta| + C$



$I = -2\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+1}}{u} + \frac{1}{u}\right| + C = -2\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x}}\right| + C$

---

② $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{1+\frac{1-\cos 2x}{2}} dx = \int \frac{1-\cos 2x}{3-\cos 2x} dx = I$

اگر $u=\tan x \quad \begin{cases} \cos 2x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{cases}$

$I = \int \frac{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}}{3-\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{u^2\, du}{(u^2+1)(2u^2+1)}$ تجزیه کسر

$= \int \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{2u^2+1}\right) du = \tan^{-1}u - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}u) + C =$

$\tan^{-1}(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}\tan x) + C = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}\tan x) + C$

---

③ $\int \frac{dx}{\sin x\cos 2x} \times \frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x(2\cos^2 x - 1)} = \int \frac{\sin x\, dx}{(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)} = \quad \begin{cases} \cos x = u \\ \sin x\, dx = -du \end{cases}$

$= -\int \frac{du}{(1-u^2)(2u^2-1)} \Rightarrow$ عمل تجزیه کسر $= \int \left(\frac{-1}{2(1+u)} + \frac{1}{2(u-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}u+1} - \frac{1}{\sqrt{2}u-1}\right) du$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}u+1}{\sqrt{2}u-1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{1+\cos x}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right| + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

④ $\int \operatorname{csch} x = \int \frac{2\,dx}{e^x - e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = 2\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1} = \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases}$

$= 2\int \frac{du}{u^2-1} = 2 \times \frac{1}{2} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$

---

⑤ $\int e^{2x}\sqrt{e^x+2}\,dx = \begin{cases} u = e^x + 2 \longrightarrow e^x = u-2 \\ du = e^x dx \end{cases}$

$I = \int e^x \cdot e^x \sqrt{e^x+2}\,dx = \int (u-2)\sqrt{u}\,du = \int u^{3/2}du - 2\int u^{1/2}du =$

$\frac{2}{5}u^{5/2} - 2 \times \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt[2]{(e^x+2)^5} - \frac{4}{3}\sqrt[2]{(e^x+2)^3} + C$

---

⑥ $I = \int (\sin^{-1}x)^2 dx = \begin{cases} u = (\sin^{-1}x)^2 \\ dv = dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = \frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ x = v \end{cases}$

$I = x(\sin^{-1}x)^2 - 2\underbrace{\int \frac{x\sin^{-1}x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1} = x(\sin^{-1}x)^2 + 2\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2} - 2x + C$

حل $I_1 = \begin{cases} \sin^{-1}x = u \longrightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv \longrightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases} \longrightarrow I_1 = -\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2} + \int dx$

$I_1 = -\sin^{-1}x \times \sqrt{1-x^2} + x$

---

⑦ $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = 2\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ صورت و مخرج را بر $\cos^4 x$ تقسیم می‌کنیم

$I = 2\int \frac{\tan x \sec^2 x}{1+\tan^4 x}dx \Rightarrow \begin{cases} \tan x = u \\ \sec^2 x\,dx = du \end{cases}$

$I = 2\int \frac{u\,du}{1+u^4} = \int \frac{2u\,du}{1+(u^2)^2} = \begin{cases} u^2 = t \\ 2u\,du = dt \end{cases}$

$I = \int \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1}t + C = \tan^{-1}u^2 + C = \tan^{-1}(\tan^2 x) + C$

---

⑧ $\int \sqrt{1-\sin x}\,dx = \int \sqrt{\underbrace{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}_{\text{همانی است.}} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$

$= \int \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \int \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right| dx = 2\left|\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right| + C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑨ $\int \frac{x^4-1}{x^6-1}dx \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)} = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+x^2+1}$

$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

---

⑩ $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow \begin{cases} u=\ln x \longrightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dv=\frac{dx}{\sqrt{x}} \longrightarrow v=2\sqrt{x} \end{cases}$

$I = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}+C$

مزدوج

⑪ $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx \times \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} =$

$I = \int(\sqrt{x+1}-1)dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-x+C$

---

⑫ $I=\int\frac{x^4+1}{x^6-1}dx \Rightarrow \frac{x^4+1}{x^6-1}=\frac{x^4+1}{(x^3-1)(x^3+1)}=\frac{(x^4+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}$ تجزیه کسر

$=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2x-1}{6(x^2-x+1)}$

$I=\int\frac{x^4+1}{x^6-1}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+C$

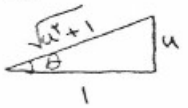
---

⑬ $\int\frac{x^{11}}{(x^8+1)^2}dx=\int\frac{x^3x^8}{(x^8+1)^2}dx = \begin{cases} x^4=u \\ 4x^3dx=du \end{cases}$

$I=\frac{1}{4}\int\frac{u^2\,du}{(u^2+1)^2}$ تجزیه کسر $\Rightarrow \frac{1}{4}\int\frac{1}{u^2+1}-\underbrace{\frac{1}{(u^2+1)^2}}_{I_1}du \times \frac{1}{4} I_1 \begin{cases} u=\tan\theta \\ du=\sec^2\theta\,d\theta \end{cases}$

$I_1=\int\frac{du}{(u^2+1)^2}=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\sec^2\theta)^2}=\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta+C$

$\frac{1}{2}\tan^{-1}u+\frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1}$



$I=\frac{1}{4}\tan^{-1}u-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}u+\frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1}\right)+C$

$=\frac{1}{8}\tan^{-1}(x^4)-\frac{1}{8}\frac{x^4}{x^8+1}+C$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۴) $\int x\sqrt{2x+3}\,dx = \begin{cases} 2x+3=u \longrightarrow 2dx=du \\ x=\dfrac{u-3}{2} \end{cases}$

$$=\int \frac{(u-3)}{2}\sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int u^{3/2}\,du - \frac{3}{4}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{10}u^{5/2} - \frac{1}{2}u^{3/2} + C$$

$$=\frac{1}{10}\sqrt{(2x+1)^5} - \frac{1}{2}\sqrt{(2x+1)^3} + C$$

---

(۱۵) $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} \longrightarrow \sqrt{\tan x} = u \longrightarrow u^2 = \tan x \longrightarrow 2u\,du = \sec^2 x\,dx$

$$\xrightarrow{1+\tan^2 x=\sec^2 x} \frac{2u\,du}{1+u^4} = dx$$

$$I = \int \frac{2u\,du}{(1+u^4)\,u} = \int \frac{2du}{1+u^4} \overset{\text{قبلاً حل شده است}}{=\!=\!=} \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{Ln}\,\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\tan^{-1}(x\sqrt{2}+1) +$$

$$\tan^{-1}(x\sqrt{2}-1)\Big] + C$$

---

(۱۶) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}\,dx$ $\quad \begin{cases} \tan x = u \rightarrow x=\tan^{-1}u \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2} \end{cases}$ $\quad \sin 2x = \dfrac{2u}{1+u^2}$

$$I = \int \frac{\sqrt{u}}{\frac{2u}{1+u^2}}\,\frac{du}{1+u^2} = \longrightarrow \int \frac{\sqrt{u}\times\frac{du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} \Rightarrow \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{\tan x} + C$$

---

(۱۷) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ $\quad \begin{cases} \sqrt{x}+1=u \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2du \end{cases}$

$$=\int \frac{2du}{u} = 2\mathrm{Ln}\,u + C = 2\mathrm{Ln}(\sqrt{x}+1) + C$$

---

(۱۸) $\int \frac{dx}{\sinh x\cosh x} = \int \frac{(\cosh^2 x - \sinh^2 x)\,dx}{\sinh x\cosh x} =$

$$\int (\coth x - \tanh x)\,dx = \mathrm{Ln}|\sinh x| - \mathrm{Ln}|\cosh x| + C$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۹) $\int \operatorname{sech}(\ln x)\,dx = \int \frac{2}{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}\,dx$

$= 2\int \frac{dx}{x+\frac{1}{x}} \times \frac{x}{x} = 2\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C$

---

(۲۰) $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx = \left\{ \sqrt{x}=t \longrightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \longrightarrow dx = 2t\,dt \right.$

$I = \int 2t\,\tan^{-1} t\,dt \qquad \begin{cases} \tan^{-1} t = u \longrightarrow du = \frac{dt}{1+t^2} \\ 2t\,dt = dv \longrightarrow t^2 = v \end{cases}$

$I = t^2\tan^{-1} t - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = t^2\tan^{-1} t - t + \tan^{-1} t + C$

$= \tan^{-1}\sqrt{x}\,(x+1) - \sqrt{x} + C$

---

(۲۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} \Rightarrow \sqrt{e^x-1} = u \longrightarrow u^2 = e^x - 1 \longrightarrow 2u\,du = e^x dx$

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} \times \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{2u\,du}{u(u^2+1)} = 2\tan^{-1} u + C = 2\tan^{-1}(\sqrt{e^x-1}) + C$

---

(۲۲) $\int \frac{dx}{x+x^{4/3}} = \int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})} \Rightarrow \begin{matrix} x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{matrix}$

$I = \int \frac{3t^2\,dt}{t^3(1+t)} = 3\int \frac{dt}{t(t+1)} = 3\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$

$= 3[\ln t - \ln(t+1)] + C = 3\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\right) + C$

---

(۲۳) $\int \frac{dx}{\sin x - 2\csc x} = \int \frac{dx}{\sin x - \frac{2}{\sin x}} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x - 2} = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x - 2} = -\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x + 1}$

$\begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x\,dx = du \end{cases} \longrightarrow I = \int \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u + C \Rightarrow \tan^{-1}(\cos x) + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۴) $\int \frac{\sin^{-1}\sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \int \frac{\sin^{-1}\sqrt{2x}\,dx}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}}$

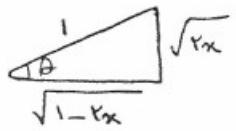
$\sqrt{2}\sqrt{x} = \sin\theta \longrightarrow \frac{\sqrt{2}\,dx}{2\sqrt{x}} = \cos\theta\,d\theta \xrightarrow{\text{دقت}} dx = \sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$I = \int \frac{\sin^{-1}(\sin\theta)\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\underbrace{1-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta}}} = \int \theta\sin\theta\,d\theta$

$u=\theta$	$\sin\theta = dv$
$1 +$	$-\cos\theta$
$0 -$	$-\sin\theta$

$\int \theta\sin\theta\,d\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta + C$



$\theta = \sin^{-1}(\sqrt{2x})$

$\sin\theta = \sqrt{2x}$

$\cos\theta = \sqrt{1-2x}$

$I = -\sin^{-1}(\sqrt{2x})\sqrt{1-2x} + \sqrt{2x} + C$

مشتق مخرج

$2x+2 = 2(x+1)+1$

(۲۵) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \Rightarrow \int \frac{x^2+x+1-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \left(\sqrt{x^2+x+1} - \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)dx$

$= \underbrace{\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx}_{I_1} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx}_{I_2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}}_{I_3} = I_1 + I_2 + I_3 + C$

حل $I_1 \Rightarrow \int \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,dx \Longrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta \end{cases}$

$I_1 = \int \sqrt{\frac{3}{4}\tan^2\theta + \frac{3}{4}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta = \xrightarrow[\sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta]{\tan^2\theta+1 = \sec^2\theta}$

$= \frac{3}{4}\int \sec^3\theta\,d\theta \xrightarrow{\text{قبلاً حل شده است}} = \frac{3}{8}\tan\theta\sec\theta + \frac{3}{8}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1$

$= \frac{3}{8\sqrt{3}}(2x+1) \times \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right| + C_1$

حل $I_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x+1 = u \\ (2x+1)dx = du \end{cases} = -\sqrt{x^2+x+1} + C_2$

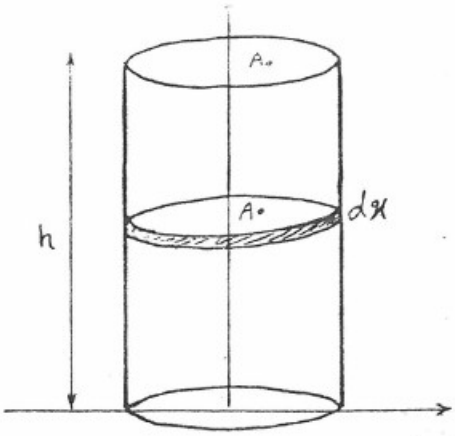
حل $I_3 = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$ $\begin{cases} x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta \end{cases}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sec^2\theta}} = -\frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_3$

$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right| + C_3$

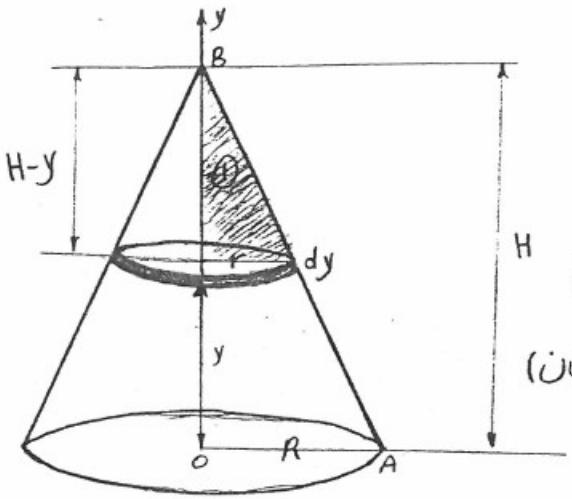
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

روش مقطع عرضی (برش دادن):



$$V=\int_0^h (A_0(x)\,dx)=\int_0^h (\pi r^2)\,dx=\pi r^2 h$$

محاسبهٔ حجم مخروط کامل:



$$V=\int_0^H A(y)\,dy$$

باید رابطهٔ مساحت المان را برحسب y بدست آوریم

(مساحت المان): $A=\pi r^2$

از تشابه مثلث ۱ و مثلث OAB داریم:

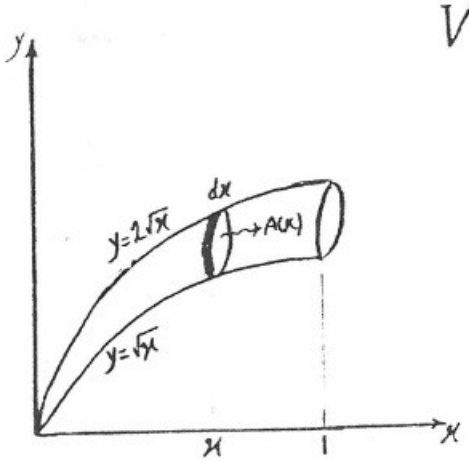
$$\frac{r}{H-y}=\frac{R}{H}\Longrightarrow r=\frac{R(H-y)}{H}\Longrightarrow \text{المان } A=\frac{\pi R^2(H-y)^2}{H^2}$$

$$V=\int_0^H \frac{\pi R^2(H-y)^2}{H^2}\,dy\Longrightarrow V=\frac{-\pi R^2}{H^2}\int_0^H -(H-y)^2\,dy=\frac{1}{3}\frac{\pi R^2}{H^2}(H-y)^3\Big|_H^0$$

$$=\boxed{\frac{1}{3}\pi R^2 H}$$

$$V=\int_0^1 A(x)\,dx$$

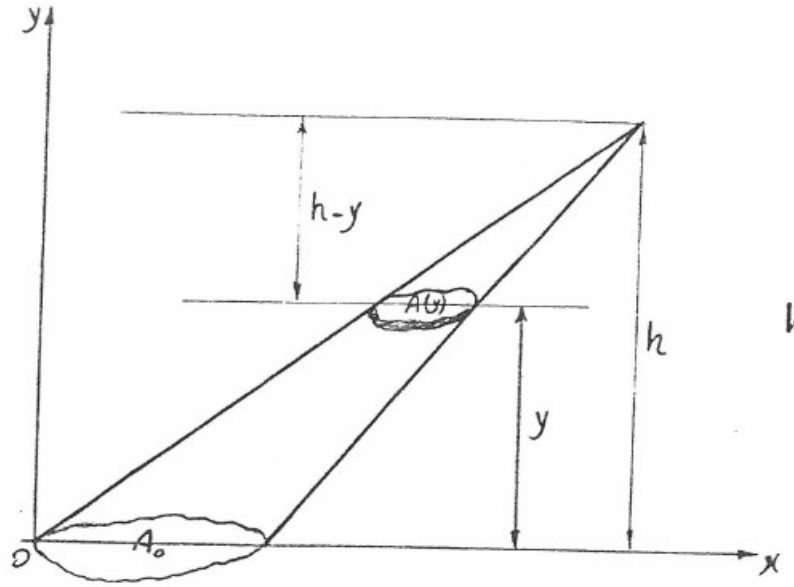
شعاع المان: $\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}}{2}=\frac{\sqrt{x}}{2}$



$$\Longrightarrow V=\int_0^1 \pi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 dx\Longrightarrow V=\pi\frac{x}{8}\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا



$$V=\int_0^h A(y)\,dy$$

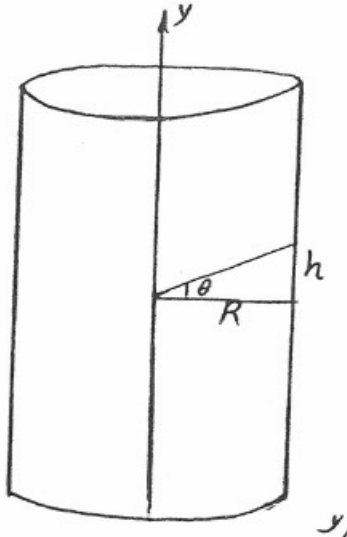
$$\frac{L'}{L}=\frac{h-y}{h} \Longrightarrow \frac{A(y)}{A_0}=\left(\frac{L'}{L}\right)^2 \Rightarrow A(y)=\left(\frac{L'}{L}\right)^2 A_0$$

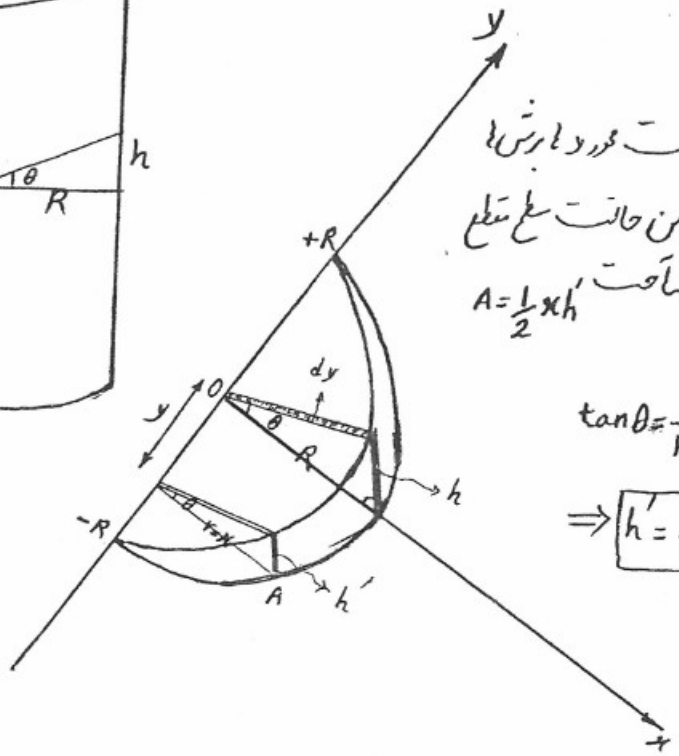
$$\Rightarrow A(y)=\left(\frac{h-y}{h}\right)^2 A_0 \Rightarrow V=\int_0^h \left(\frac{h-y}{h}\right)^2 A_0\,dy \Longrightarrow V_0=\frac{A_0}{3h^2}(h-y)^3\Big|_h^0$$

$$\boxed{V_0=\frac{A_0 H}{3}}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

از استوانهٔ مستدیر قائمی به شعاع R به وسیلهٔ دو صفحه، گوهٔ خمیده‌ای می‌بریم. یکی از صفحات بر محور استوانه عمود است و دیگری با اولی زاویه حادهٔ α می‌سازد و آن را در مرکز استوانه قطع می‌کند. حجم گوه را بیابید.





روش اول: در جهت محور y برش‌ها را انجام می‌دهیم در این حالت سطح مقطع مثلثی است با مساحت $A=\frac{1}{2}\times h'$

$$\tan\theta=\frac{h}{R}=\frac{h'}{r(y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{h'=\frac{h}{R}r} \quad ①$$

$$\Rightarrow V=\int_{-R}^{R}A(y)\,dy=\int_{-R}^{R}\frac{h'\times r}{2}\,dy$$

هم h' و هم r برحسب y تغییر می‌کنند پس آنها را باید برحسب y بدست آوریم:

$r^2+y^2=(OA)^2$ OA: شعاع استوانه $=R$ $\Rightarrow r^2+y^2=R^2 \Rightarrow r^2=R^2-y^2 \Rightarrow r=\sqrt{R^2-y^2}$

$$\overset{①}{\Longrightarrow} h'=\frac{h}{R}\sqrt{R^2-y^2}$$

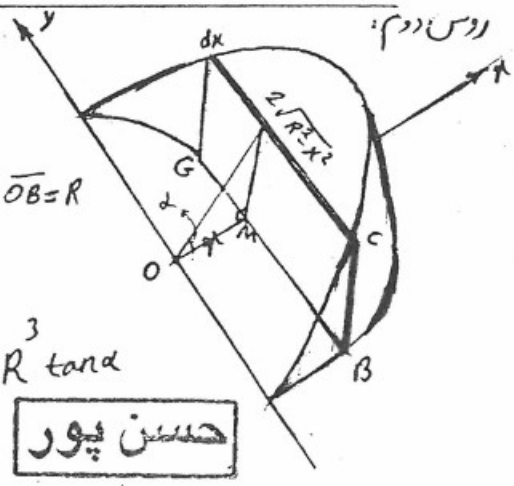
$$\Rightarrow V=\int_{-R}^{R}\frac{h'\times r}{2}\,dy=\int_{-R}^{R}\frac{h}{2R}(R^2-y^2)\,dy$$

$$\Rightarrow V=\frac{h}{2R}\left[R^2(2R)-\frac{2}{3}R^3\right]=\frac{2}{3}hR^2=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

روش دوم: در جهت محور x برش را انجام می‌دهیم در این حالت سطح مقطع مستطیلی خواهد بود

مساحت سطح مقطع: $A=\overline{GB}\times\overline{BC}$

$$\begin{cases}\overline{BC}=x\tan\alpha\\ \overline{BG}=2\,\overline{MB}\ ,\ \overline{MB}^2=\overline{OB}^2-x^2,\ \overline{OB}=R\end{cases}$$



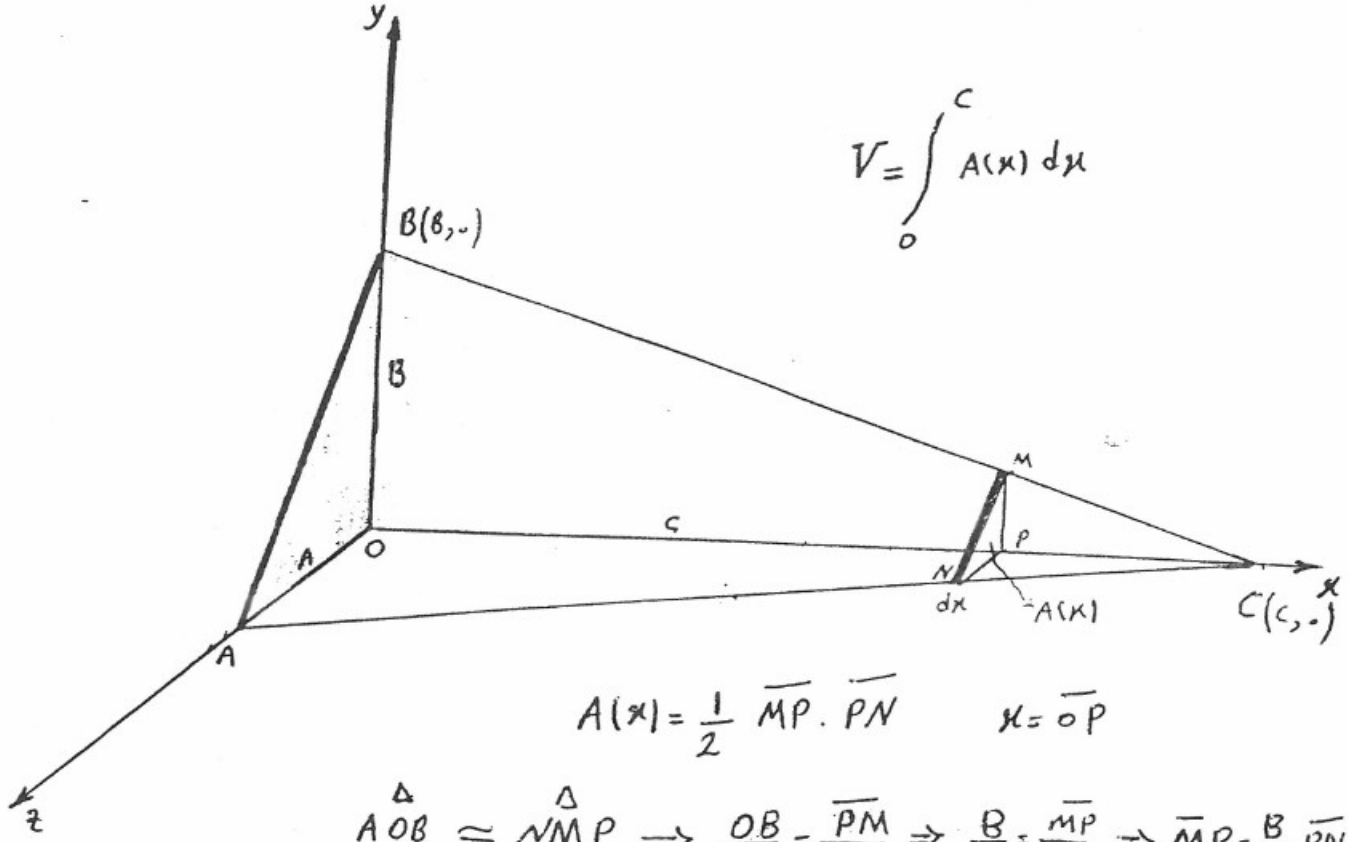
$$\Rightarrow A(x)=2\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)x\tan\alpha \Rightarrow V=\int_0^R A(x)\,dx$$

$$\Rightarrow V=\int_0^R 2\tan\alpha\, x\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{2}{3}\tan\alpha\left(R^2-x^2\right)^{3/2}\Big|_R^0=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حجم چهار وجهی (هرم مثلث القاعده) با سه وجه (۲ به ۲) متعامد و سه ضلع (۲ به ۲ متعامد) که طول ضلع های آن A و B و C هستند را بیابید:



$$V=\int_0^C A(x)\,dx$$

$$A(x)=\frac{1}{2}\,\overline{MP}\cdot\overline{PN} \qquad x=\overline{OP}$$

$$\overset{\Delta}{AOB}\simeq\overset{\Delta}{NMP}\Rightarrow\frac{OB}{OA}=\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}}\Rightarrow\frac{B}{A}=\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}}\Rightarrow\overline{MP}=\frac{B}{A}\,\overline{PN}$$

$$\Rightarrow A(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{A}{B}\cdot\overline{MP}^{\,2}$$

باید $\overline{MP}$ را برحسب x بدست بیاوریم:

معادله خط عمود گذرنده از B و C : $y-B=\frac{0-B}{C-0}(x-0)\Rightarrow y=\frac{-B}{C}x+B$

نقطه M روی خط BC است پس باید مختصات آن در معادله خط BC صدق کند پس:

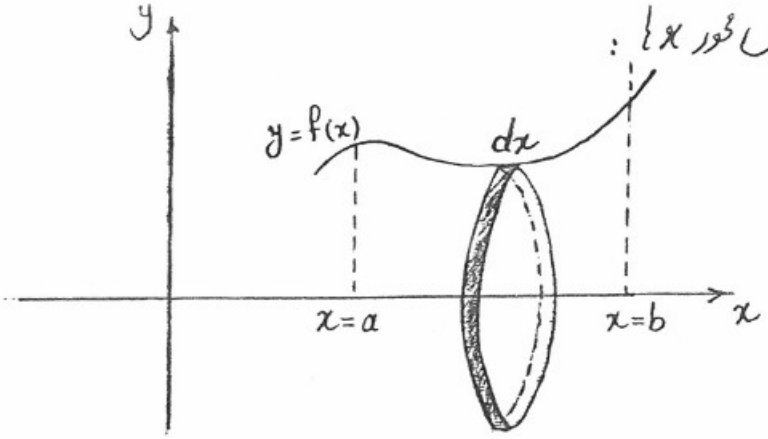
$$M\Big|_{0}^{x} \Longleftarrow P\Big|_{\frac{-B}{C}x+B}^{x}$$

$$\Rightarrow\overline{MP}^{\,2}=\left(\frac{-B}{C}x+B\right)^2\Rightarrow A(x)=\frac{A}{2B}\left(\frac{-B}{C}x+B\right)^2\Rightarrow V=\int_0^C\frac{A}{2B}\left(\frac{-B}{C}x+B\right)^2dx$$

$$\Rightarrow V=\frac{A}{2B}\times\frac{-C}{B}\left(\frac{-B}{C}x+B\right)^3\Big/3\Bigg|_0^C=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(A\times B)\times C\right)=\frac{A\times B\times C}{6}$$

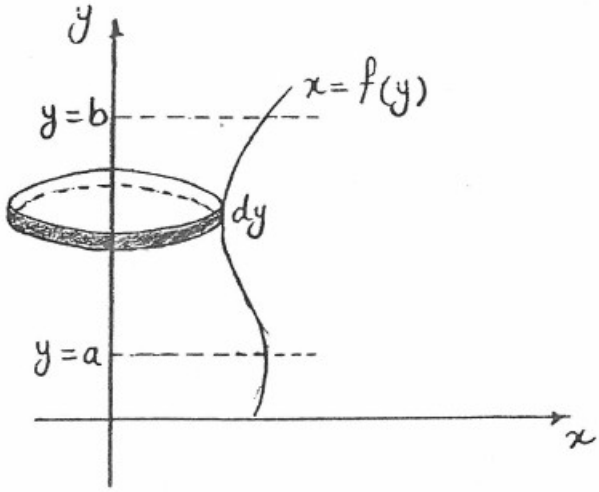
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

روش قرص‌ها: محاسبهٔ حجم حاصل دوار حول محور xها:



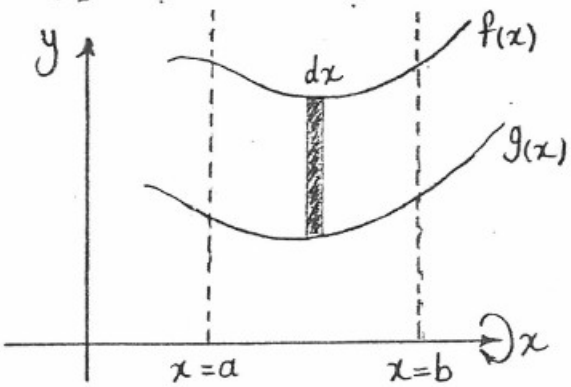
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

محاسبهٔ حجم دوار حول محور yها:



$$V=\pi\int_a^b f^2(y)\,dy$$

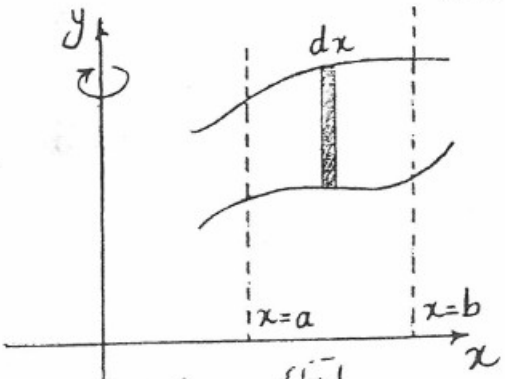
روش واشرها: حجم ناحیهٔ محصور بین خطوط $x=a$ و $x=b$ و نمودار تابع $y=f(x)$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید



$x\in[a,b]$ $\quad 0\leq g(x)\leq f(x)$

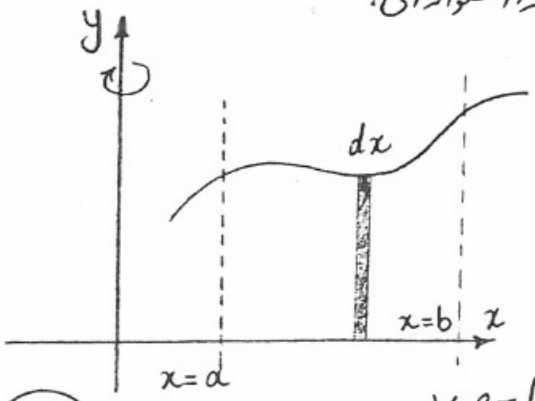
$$V=\pi\int_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|\,dx$$

روش پوسته استوانه‌ای:



$$V=2\int_{x=a}^{x=b}\pi x\underbrace{\left(f(x)-g(x)\right)}_{\text{ارتفاع}}dx$$

x: فاصله از محور دوران

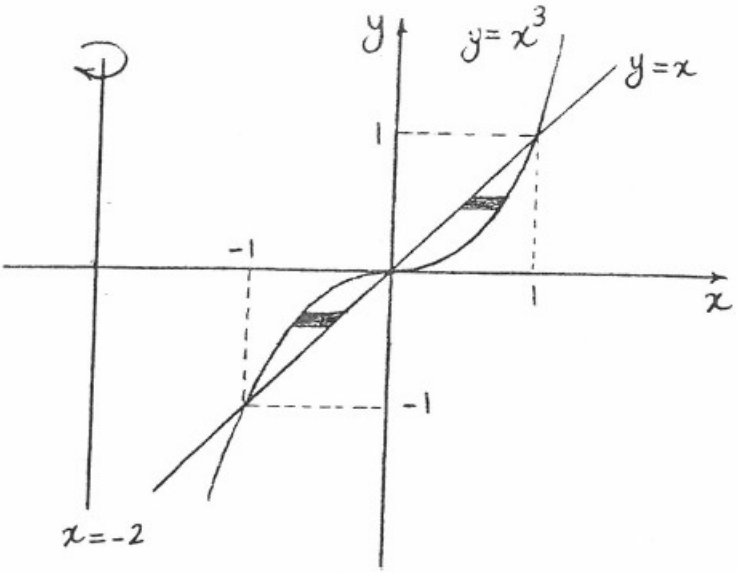


$$V=2\pi\int_a^b x\,\underbrace{f(x)}_{\text{ارتفاع}}dx$$

x: فاصله از محور دوران

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تعیین حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و خط $y=x$ حول محور $x=-2$:



روش اول: واشر یا

الف) دوران ناحیهٔ ① حول خط $x=-2$:

فاصلهٔ منحنی $x_2=y$ از خط $x=-2$ برابر $y+2$ که همان شعاع داخلی می باشد و فاصلهٔ منحنی $x_1=\sqrt[3]{y}$ از خط $x=-2$ برابر $\sqrt[3]{y}+2$ که همان شعاع خارجی می باشد بنابراین

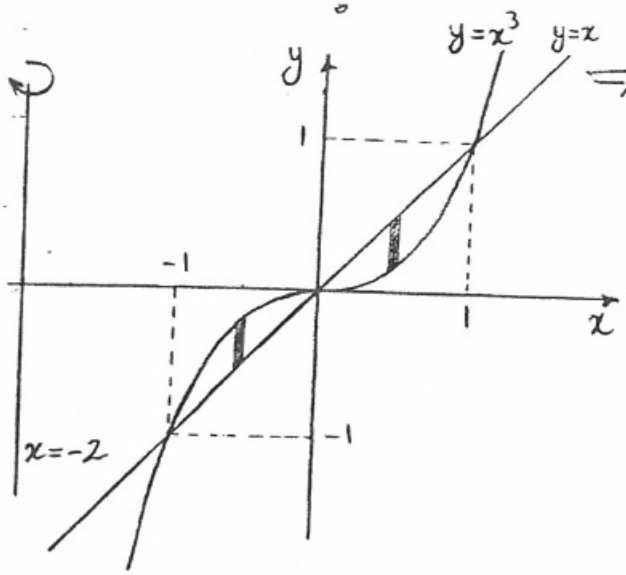
$$V_1=\pi\int_0^1 (\sqrt[3]{y}+2)^2-(y+2)^2\,dy=\frac{19}{15}\pi$$

ب) دوران ناحیهٔ ② حول خط $x=-2$:

$$V_2=\pi\int_0^{-1} (\sqrt[3]{y}+2)^2-(y+2)^2\,dy=\frac{11}{15}\pi$$

نزدیکترین همان رسیدا

روش دیگر دوران ناحیهٔ ② حول خط $x=-2$ دوران ناحیهٔ ① حول خط $x=2$ است پس: $V_2=\pi\int_0^1 (2-y)^2-(2-\sqrt[3]{y})^2\,dy=\frac{11}{15}\pi$ یا



$$\Rightarrow V=V_1+V_2=\left(\frac{11}{15}\pi+\frac{19}{15}\pi\right)=2\pi$$

روش دوم: پوستهٔ استوانه‌ای:

$$V_1=2\pi\int_0^1 (x+2)[x-x^3]\,dx=\frac{19}{15}\pi$$

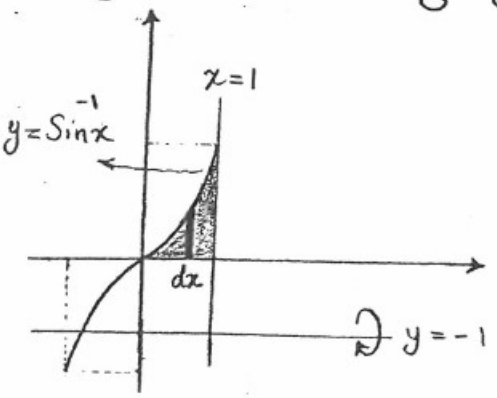
$$\Rightarrow V_t=\frac{30}{15}\pi$$

$$V_2=2\pi\int_0^{-1} (2+x)[x-x^3]\,dx=\frac{11}{15}\pi$$

روش دیگر دوران ناحیهٔ ② حول خط $x=-2$ دوران ناحیهٔ ① حول خط $x=-2$ است پس:

$$V_2=2\pi\int_0^1 (2-x)(x-x^3)\,dx=\frac{11}{15}\pi$$

مطلوب است محاسبهٔ حجم جسم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=\sin^{-1}x$ و خط $x=1$ واقع در ربع اول حول خط $y=-1$:



حل به روش واشر یا:

$$V=\pi\int_0^1 \left((1+\sin^{-1}x)^2-1^2\right)dx=1.61\pi$$

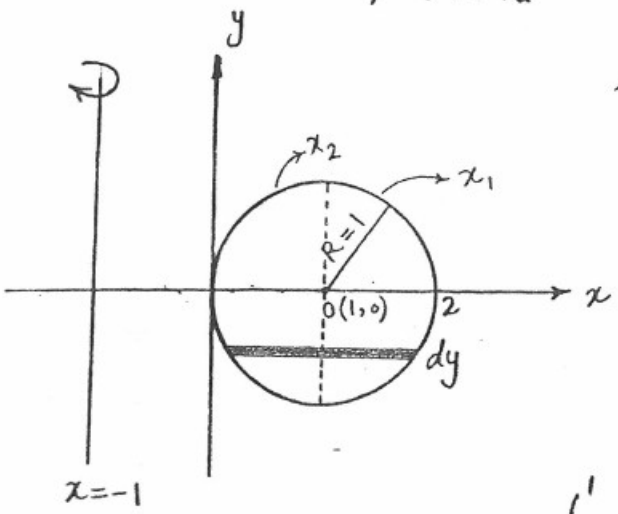
حل به روش پوسته استوانه‌ای:

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+y)(1-\sin y)\,dy=1.61\pi$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

← نمودار معادله $(x-1)^2+y^2=1$ را حول خط $x=-1$ دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل را محاسبه کنید:



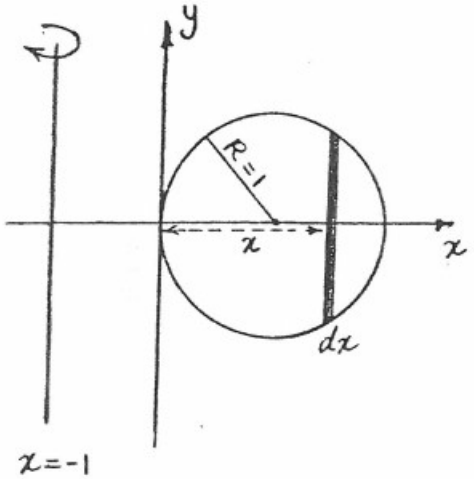
معادلهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ دایره‌ای به مرکز $O\left|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$ و شعاع ۱ می‌باشد

$$x-1=\pm\sqrt{1-y^2} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=1+\sqrt{1-y^2} \\ x_2=1-\sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

روش اول: واشرها:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\Big(\underbrace{1+1+\sqrt{1-y^2}}_{\text{شعاع بیرونی}}\Big)^2-\Big(\underbrace{2-\sqrt{1-y^2}}_{\text{شعاع داخلی}}\Big)^2 dy \Rightarrow V=4\pi^2$$



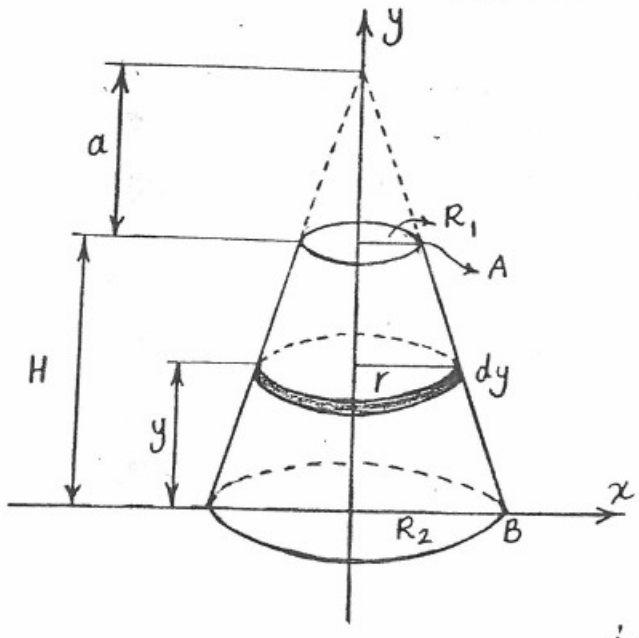
روش دوم: روش پوسته استوانه‌ای:

$$V_1=2\pi\int_{1}^{2}2\left(\sqrt{R^2-(x-R)^2}\right)(x+R)\,dx=2\pi\left(\pi+\frac{2}{3}\right)$$

$$V_2=2\pi\int_{0}^{1}(x+R)\times 2\left(\sqrt{R^2-(R-x)^2}\right)dx=2\pi\left(\pi-\frac{2}{3}\right)$$

$$V_t=V_1+V_2$$

← حجم مخروط ناقص زیر را بدست آورید



روش اول: مقاطع عرضی

$$\frac{a}{R_1}=\frac{a+H}{R_2} \Rightarrow aR_2=aR_1+HR_1$$

$$\Rightarrow a=\frac{HR_1}{R_2-R_1}\ ,\ \frac{r}{(H-y)+a}=\frac{a}{R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{r=\frac{a[(H-y)+a^2]}{R_1}} \Rightarrow V=\int_0^H(\pi r^2)\,dy$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi R_1^2 a-\frac{1}{3}\pi R_2^2(a+h)$$

روش دوم: روش قرص‌ها: دوران خط AB حول محور y ها:

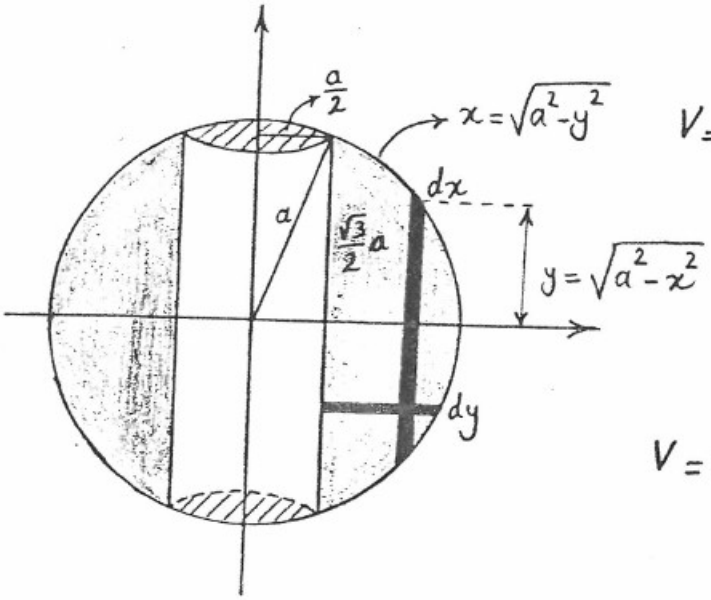
معادلهٔ خطی که از نقاط $A\left|\begin{smallmatrix}R_1\\H\end{smallmatrix}\right.$ و $B\left|\begin{smallmatrix}R_2\\0\end{smallmatrix}\right.$ می‌گذرد عبارت است از $y=\frac{R_2-R_1}{-H}(x-R_2)$

$$x=\frac{H}{R_1-R_2}y+R_2 \Rightarrow V=\int_0^H \pi x^2\,dy$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

← قرص محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ حول محور y ها دوران می‌کند و جسمی کروی ایجاد می‌کند سوراخی به قطر a در امتداد محور y ها در درون کره ایجاد می‌کنیم. حجم کرهٔ سوراخ دار را بیابید:



حل به روش واشرها:

$$V=\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left((a^2-y^2)-\frac{a^2}{4}\right)dy=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$$

حل به روش پوسته استوانه‌ای:

$$V=2\pi\int_{\frac{a}{2}}^{a}x\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$$

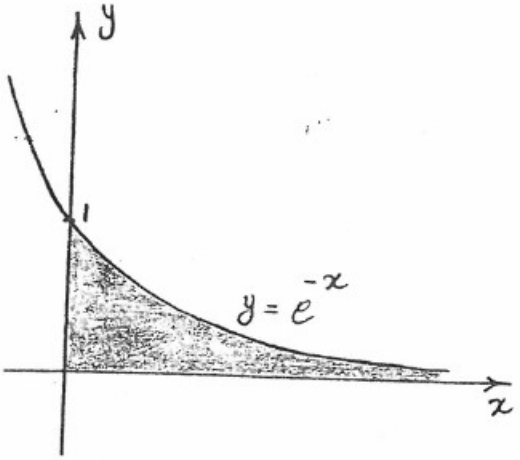
حل به روش قرص‌ها و تفریق:

حجم استوانه خالی به جز قسمت‌ها شور $V_1=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2(a\sqrt{3})=\frac{\pi}{4}\sqrt{3}a^3$

حجم کره به جز قسمت‌ها شور $V_2=\pi\int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\pi(a^2-y^2)dy=\frac{3\pi\sqrt{3}}{4}a^3$

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{2}\sqrt{3}a^3$$

← حجم حاصل از دوران منحنی $y=e^{-x}$ در فاصلهٔ $[0,+\infty)$ را حول هر یک از محورهای x و y را به طور جداگانه بدست آورید:



دوران حول محور x ها:

$$V=\pi\int_0^{\infty}e^{-x}dx=-\pi e^{-x}\Big|_0^{\infty}=\pi$$

دوران حول محور y ها:

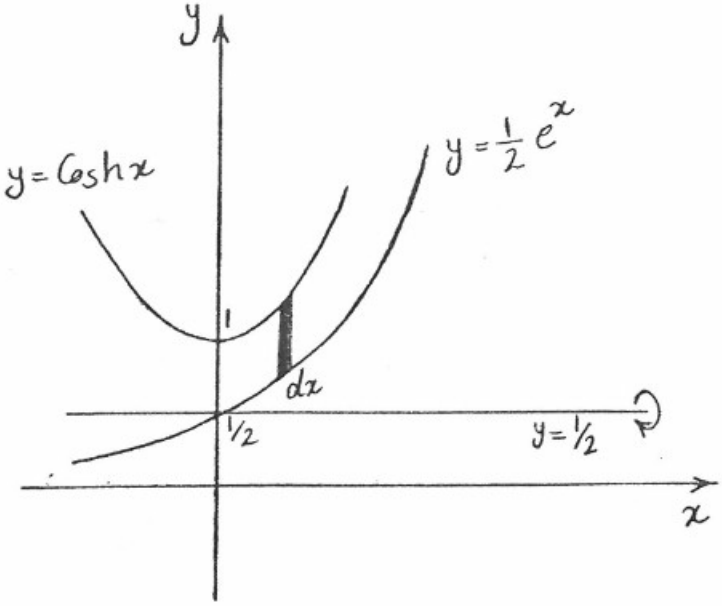
$$y=e^{-x}\Rightarrow \ln y=-x \Rightarrow x=\ln\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow V=-\pi\int_0^1\ln y\,dy=-\pi\left[y\ln y-y\right]_0^1=\pi$$

$$\lim_{y\to 0}y\ln y=\lim_{y\to 0}\frac{\ln y}{\frac{1}{y}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{hop}\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}}=-y=0$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

← ناحیهٔ محصور بین دو منحنی $y=\cosh x$ و $y=\frac{1}{2}e^{x}$ در ربع اول را حول $y=\frac{1}{2}$ دوران می‌دهیم حجم حاصل را بیابید



$$\cosh x=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$$

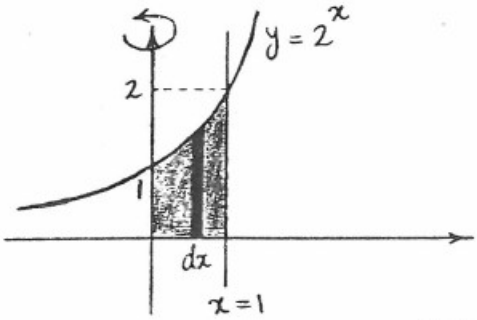
$\Rightarrow$ محل تقاطع دو منحنی: $\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\frac{1}{2}e^{x}$

$$\Rightarrow x=\infty$$

$$\Rightarrow V=\pi\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}e^{x}\right)^2\right)dx$$

$$\Rightarrow V=\pi\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{4}e^{-2x}+2\right)dx=+\infty$$

← حجم حاصل از دوران ناحیه $y=2^{x}$ و خطوط $x=0$ و $x=1$ و محور x ها را حول محور y ها



$$V=2\pi\int_0^{1}x.2^{x}\,dx=$$

$$=2\pi\left[\frac{x}{\ln 2}2^{x}-\frac{1}{(\ln 2)^2}2^{x}\right]_0^1=0.8$$

x	2^{x}
1	$\frac{1}{\ln 2}2^{x}$
0	$\frac{1}{(\ln 2)^2}2^{x}$

محاسبه طول قوس:

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشد طول منحنی $y=f(x)$ از a تا b برابر است با:

$$L=\int_a^{b}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

نکته: درصورتی که $x=f(y)$ باشد آنگاه

$$L=\int_c^{d}\sqrt{1+x'^2_y}\,dy$$

نکته: درصورتی که معادلات به صورت پارامتری بیان شوند

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\qquad L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: طول قوس منحنی‌های زیر را بیابید.

① $y=\sqrt{4-x^2}\ ,\ [0,2]$ $\quad y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \longrightarrow L=\displaystyle\int_0^2\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$\Rightarrow L=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=2\sin^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^2=\pi$$

---

② $y=\ln(\cos x)\ ,\ [0,\frac{\pi}{4}]$ $\quad y'=\dfrac{-\sin x}{\cos x}$ $\quad L=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx$

$$\Rightarrow L=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\pi/4}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

---

③ $x=\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{\ln y}{2}$ $\quad y=1$ و $y=2$ $\quad x'_y=\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{2y}$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\int_1^2\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

---

④ $x=\ln\left(\dfrac{1}{\sin y}\right)$ $\quad y=\dfrac{\pi}{4}$ و $y=\dfrac{3\pi}{4}$ $\quad x'=\dfrac{\frac{-\cos y}{\sin^2 y}}{\frac{1}{\sin y}}=-\cot y$

$$L=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{1+\cot^2 y}\,dy=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}|\csc y|\,dy=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc y\,dy=\ln|\csc y-\cot y|\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}=\ln\left|\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right|-\ln\left|\frac{2-1}{\sqrt{2}}\right|$$

---

⑤ $\begin{cases}x=1-t\\ y=t^{3/2}\end{cases}$ $\quad 0\leq t\leq 1$ $\quad L=\displaystyle\int_0^1\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}t}\,dt\ \xrightarrow[\frac{9}{4}dt=du]{1+\frac{9}{4}t=u}\ \begin{cases}t=0\to u=1\\ t=1\to u=\frac{13}{4}\end{cases}$

$$\rightarrow L=\int_1^{13/4}\sqrt{u}\,\frac{4}{9}\,du=\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_1^{13/4}=\frac{8}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\times\frac{\sqrt{13}}{2}\right)-1\right]=\frac{1}{27}\left[13\sqrt{13}-8\right]$$

---

⑥ $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{\cos x}\,dx$ $\quad [0,\frac{\pi}{2}]$ $\quad f'(x)=\sqrt{\cos x}$ $\quad L=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos x}\,dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos\frac{x}{2}\,dx=\sqrt{2}\times 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2}=2$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

آزمون مقایسه و مقایسه حدی :

قضیه : (آزمون مقایسه) : فرض کنید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ یک سری مثبت باشد ($\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ در این قضیه فرض خود حال است.)

i) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سری مثبت باشد که می دانیم همگراست و به ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $a_n \leqslant b_n$ آنگاه سری a_n همگراست.

ii) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سری مثبتی باشد که می دانیم واگراست و به ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $a_n \geqslant b_n$ ، آنگاه سری a_n واگراست.

قضیه: (آزمون مقایسه حدی) فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری مثبت باشند ، $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ باشد

i) اگر $c>0$ باشد آنگاه هر دو سری یا همگراست یا واگرا هستند .

ii) اگر $c=0$ باشد و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست .

iii) اگر $c=\infty$ باشد و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست .

---

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} \longrightarrow a_n = \frac{n^3}{n!}$ $\quad b_n = \frac{1}{n!}$ (می دانیم همگراست)

اثبات همگرایی b_n : طبق این قضیه سری نامتناهی مثبت همگراست اگر و تنها اگر دنباله مجموع های جزء دارای کران بالا باشد.

$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n!} \Longrightarrow S_1 = 1$ $\quad S_2 = 1 + \frac{1}{1\times 2}$ $\quad S_3 = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3}$

$S_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n}$ اگر دقت کنیم این مجموع هیچگاه به عدد ۲ نمی رسد پس کران بالا دارد

و عدد ۲ یک کران بالای S_n است پس این سری همگراست.

حال با استفاده از آزمون مقایسه حد $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{1}{n!}} = +\infty$

اما از قسمت سوم آزمون مقایسه حد کاربرد ندارد چون سری b_n همگراست نه واگرا ، اما راهی هست که آزمون مقایسه حد را قابل اجرا کند.

قضیه : (اگر a_n و b_n دو سری نامتناهی باشند که اختلاف آنها تنها در m جمله اول آنهاست آنگاه یا هر دو سری همگرایند یا هر دو واگرا.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{n^4}{n!} = \frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{5^4}{5!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{(n+3)^4}{(n+3)!} = \frac{4^4}{4!} + \frac{5^4}{5!} + \cdots + \frac{(n+3)^4}{(n+3)!} + \cdots \quad c_n$$

حال c_n را با b_n مقایسه می‌کنیم چون b_n همگراست پس c_n هم همگراست در نتیجه a_n هم همگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{(n+3)^4}{(n+3)!}}{\frac{1}{n!}} = 1$$

نکته: در مورد دلیل انتخاب نوع سری c_n دقت شود. تذکر: البته این با آزمون نسبت به راحتی حل می‌شود (قسمت آزمون نسبت حل شده است)

---

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+2)^{1/3}} \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n^2+2)^{1/3}}$ $\quad b_n = \frac{1}{n^{2/3}}$ (واگرا)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ سری a_n واگراست

---

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2} \longrightarrow -1 \leq \sin n \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \sin n + 1 \leq 2$

$0 \leq \frac{1+\sin n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$ چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ یک p سری با $p=2>1$ می‌باشد همگراست پس طبق آزمون مقایسه سری همگراست. نکته: در مواردی که سری شامل علامت sin و cosx است معمولاً از این فن استفاده می‌شود.

---

④ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ $\quad \ln n < n \longrightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ سری واگرا $\xrightarrow{\text{پس}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (مقایسه) واگرا

---

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (آزمون مقایسه) $\quad n^n > n^2 \longrightarrow \frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ همگرا

---

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-1}{5^n-1}$ (مقایسه حدی) $\quad \lim \frac{\frac{4^n-1}{5^n-1}}{\frac{4^n}{5^n}} = 1 > 0$

سری $\sum \frac{4^n}{5^n}$ یک سری هندسی است $\frac{4}{5} < 1$ است پس همگراست پس سری همگراست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)(n+4)}$

نکته: در این مدل سوال ها سعی می کنیم متغیر n را بدون در نظر گرفتن عددهایی که با آنها جمع و تفریق شده ساده می کنیم و بعد سری که قرار است انتخاب شود و مقایسه شود را به دست می آوریم

مثلاً در این سوال سری $\frac{1}{n}$ را انتخاب می کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)(n+4)}}{\frac{1}{n}} = 1 \xrightarrow{\text{سری } \frac{1}{n} \text{ واگراست}}$$ پس سری واگراست.

---

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}} \xrightarrow[\text{سوال ⑦}]{\text{طبق نکته}}$ مقایسه می کنیم با سری $\frac{1}{n}$ که واگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$ سری واگراست

---

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4-n^2+1}{5n^6-n^3-2}$ طبق نکته سوال ⑦

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^4-n^2+1}{5n^6-n^3-2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5} > 0$$ سری همگراست

همگراست p سری

---

⑩ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$

نکته: در حل اینگونه مسائل برای پیدا کردن سری ای که مقایسه کنیم چنین عمل می کنیم

چون $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{3^n} = 0$ پس می توان $\sin\frac{1}{3^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3^n}$ نوشت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \sin\frac{1}{3^n}}{(\frac{2}{3})^n} = 1 > 0 \xrightarrow[\text{همگراست}]{\text{چون سری هندسی } \sum(\frac{2}{3})^n}$$ سری همگراست

---

⑪ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n}+1)^3}$ $\left\{ -1 \leq \cos n \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \cos^2 n \leq 1 \right.$

از طرفی برای پیدا کردن سری که بخواهیم آزمون مقایسه را برقرار کنیم از نکته مثال ⑦ استفاده می کنیم.

$$(\sqrt{n}+1) > \sqrt{n} \longrightarrow (\sqrt{n}+1)^3 > (\sqrt{n})^3 \longrightarrow \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^3} < \frac{1}{(\sqrt{n})^3}$$

چون MAX آن عدد ۱ است

$$\frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n}+1)^3} < \frac{1}{(\sqrt{n})^3} \longrightarrow$$ پس سری همگراست.

همگراست (p سری $n=\frac{3}{2}$)

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc^n} \quad (c>1)$

البته در اینجا دوبار از آزمون مقایسه استفاده می‌کنیم.

$c^n > 2^n \longrightarrow \frac{1}{c^n} < \frac{1}{2^n} \xrightarrow{nc^n > c^n \to \frac{1}{nc^n} < \frac{1}{c^n}}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n}$

همگراست چون $\left(\frac{1}{nc^n} < \frac{1}{c^n}\right)$ پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc^n}$ نیز همگراست.

---

(۱۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n \qquad \operatorname{sech} n = \frac{2}{e^n + e^{-n}}$

سری هندسی است

$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n} \longrightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$

پس همگراست $\quad S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$ مجموع سری هندسی ← پس سری داده شده همگراست (از آزمون مقایسه)

---

(۱۴) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} n}{n^2 - 5}$ طبق نکته سوال (۷)

$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arctan} n = \frac{\pi}{2}$ پس زیاد در سری ما در دسترس جا رفتن کند

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\arctan n}{n^2-5}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{2} > 0$ ← سری همگراست

سری همگراست

و عین یک عدد عمل می‌کند.

---

(۱۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ در این نوع مسائل از روابط طلایی استفاده می‌شود $\quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$\cos\frac{1}{n} = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2n} \longrightarrow 1 - \cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{2n}$ طبق نکته سوال (۱۰)

$\lim \frac{2\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n^2}} = 2 > 0$ همگراست

همگراست.

---

(۱۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+c^n} \quad (c>0)$

چون می‌خواهیم با $\sum \frac{1}{c^n}$ مقایسه کنیم این یک سری هندسی است و باید مقدار c را بازه‌بندی کنیم.

و اگر (در این بازه شرایط اولیه همگرایی که باید حد دنباله داخل سری برابر صفر شود وجود ندارد) $(0<c<1)$

اگر $0<c<1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+c^n} = 1 \neq 0 \longrightarrow$ واگرا

اگر $c>1 \longrightarrow 1+c^n > c^n \longrightarrow \frac{1}{1+c^n} < \frac{1}{c^n}$ پس $\sum \frac{1}{1+c^n}$ همگراست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{\text{طبق نکته (۷)}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$ سری واگرا

در انتخاب سری که می‌خواهیم مقایسه کنیم عین یک عدد عمل می‌کند چون: $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}} \xrightarrow{\text{Hop از مخرج}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{0}} = 1$$

---

(۱۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt[3]{n}}{3n^2+1} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{\sqrt[3]{n}}{3n^2+1}\right) \longrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2+1}}_{\text{سری } A} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{3n^2+1}}_{\text{سری } B}$

$A: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2+1} \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{نکته مثال (۷)}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{3n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} > 0$ سری واگراست

سری واگرا $\frac{1}{n}$

$B: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{3n^2+1} = \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{نکته مثال (۷)}} \lim \frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{3n^2+1}}{\frac{1}{n^{5/3}}} = \frac{1}{3} > 0$ سری B همگراست

سری همگرا $\frac{1}{n^{5/3}}$

بنابراین جمع سری همگرا با سری «واگرا» واگرا می‌شود.

---

(۱۹) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+5} \xrightarrow[\text{فرض } \ln n < n]{\text{نکته مثال (۷)}}$ فرض $b_n = \frac{1}{n^2}$ (همگرا)

از چون مقایسه حدی $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^3+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln n}{n^3+5} \xrightarrow{\text{Hop (سه بار)}} = 0$ سری همگراست.

---

(۲۰) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos n}{n(1+e^{-n})}$ $\quad -1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \longrightarrow 2 \leqslant 3+\cos n \leqslant 4 \xrightarrow{\text{مخرج } \div}$

$$\frac{2}{n(1+e^{-n})} \leqslant \frac{3+\cos n}{n(1+e^{-n})} \leqslant \frac{4}{n(1+e^{-n})}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n(1+e^{-n})}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{2}{1+e^{-n}} = 2 > 0$ سری واگرا

واگرا $\frac{1}{n}$

دلیل انتخاب $b_n = \frac{1}{n}$ برای مقایسه حدی: $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ است که

در انتخاب b_n مانعی چندان ندارد.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} =$ $\quad -1 \leq \sin n \leq 1 \rightarrow 0 \leq |\sin n| \leq 1$

$\frac{|\sin n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ همگرا

پس بر طبق آزمون مقایسه سری همگراست

---

(۲۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$ $\quad 0 \leq \cos^2 n \leq 1$

$\frac{\cos^2 n}{3^n} < \frac{1}{3^n}$ سری هندسی (همگرا)

(آزمون مقایسه) پس سری همگراست.

---

(۲۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} \longrightarrow \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} = \frac{(n+1)\cancel{(n+1)}}{(n+2)\cancel{(n+1)}(n)!} = \frac{(n+1)}{(n+2)\,n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)}{(n+2)\,n!}}{\frac{1}{n!}} = 1 > 0$ همگرا

سری همگراست.

---

(۲۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n+1)\,n\,\cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{(n+1)\,n}$

با آزمون مقایسه حدی $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\,n}}{\frac{1}{n^2}} = 1 > 0$ همگرا

همگراست

---

(۲۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \Rightarrow n2^n > 2^n \longrightarrow \frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ همگرا

$\xrightarrow{\text{طبق آزمون مقایسه}}$ سری همگراست.

---

(۲۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3+n}} \longrightarrow \sqrt{n^3+n} > \sqrt{n^3}$ همان $n^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow \frac{3}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{3}{\sqrt{n^3}}$ همگرا $p = 3/2$

پس سری همگراست

---

(۲۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ $\quad \ln n < n \longrightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \rightarrow$ واگرا

پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ واگراست

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \text{Hop} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 1 > 0$

پس سری واگراست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

آزمون انتگرال: فرض کنید f تابعی از پیوسته نزولی و مقدارش به ازای $x \geq 1$ مثبت باشد در این صورت سری نامتناهی همگراست وقتی که انتگرال مجازی وجود داشته باشد.

آزمون انتگرال: در این قضیه از نظریه انتگرال های مجازی برای آزمایش همگرایی سری های نامتناهی مثبت استفاده می شود.

---

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ $\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ همیشه مثبت به ازای $x \geq 1$

$f'(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}=-\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}<0$ نزولی و $\sqrt{x}+1 \neq 0 \rightarrow \sqrt{x} \neq -1$ $Df=I$

پس در $[1,\infty)$ پیوسته است.

$$\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx \xrightarrow[\text{نامعین}]{\text{حل انتگرال}} \sqrt{x}+1=u \longrightarrow \begin{cases}\frac{dx}{2\sqrt{x}}=du\\ dx=2(u-1)du\end{cases}$$

$$\int\frac{2(u-1)du}{u}=2\int du-2\int\frac{du}{u}=2(\sqrt{x}+1)-2\ln|\sqrt{x}+1|$$

در نتیجه: $\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\infty$ پس واگرا

---

② $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n/2} \longrightarrow f(x)=e^{-x/2} \longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-x/2} \xrightarrow[e^{-x/2}>0]{\text{چون همواره}}$

پس $f'(x)<0$ تابع نزولی

$f(x)=e^{-x/2}>0$ همواره پس مثبت $(2,\infty)$ و پیوسته در بازه

$$\lim_{a\to+\infty}\int_2^a e^{-x/2}dx=\lim_{a\to+\infty}(-2e^{-x/2})\Big|_2^a=2e^{-1}=\frac{2}{e}$$ پس همگرا

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

③ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ $\quad f(x)=x^2e^{-x} \longrightarrow f'(x)=e^{-x}(2x-x^2) \xrightarrow[2x-x^2=0 \to \Delta>0]{\text{همواره } e^{-x}>0}$ تعیین علامت

$-\ 0\ +\ 2\ -$ نزولی است $\qquad f(x)=x^2e^{-x}$ پیوسته است $(1, \infty)$

$f(x)=x^2e^{-x} \xrightarrow[e^{-x}>0]{\text{همواره } x^2>0 \text{ همواره}}$ پس در کل $\longrightarrow$ پس در کل تابع مثبت است.

$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a x^2e^{-x}\,dx \xrightarrow{\text{حل از روش جزء به جزء}} = \frac{5}{e}$ پس سری همگراست.

---

④ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n[\ln(\ln n)]^2}$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x\ln x[\ln(\ln x)]^2}$

$f'(x)=-\left[\frac{\text{مشتق مخرج} \times 1}{(\text{مخرج})^2}\right]<0$ نزولی

$D_f \longrightarrow \begin{cases} x\ln x[\ln(\ln x)]^2 \neq 0 \\ x>3 \end{cases}$ به ازای $\longrightarrow$ f در $[3, +\infty)$ پیوسته است.

$\lim_{a\to+\infty}\int_3^a \frac{dx}{x\ln x[\ln(\ln x)]^2} \xrightarrow{\text{برای حل انتگرال}} \begin{cases} \ln(\ln x)=t \\ dt=\frac{dx}{x\ln x} \end{cases}$ در بازه $[3, +\infty)$، f مثبت است.

$\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{-1}{\ln(\ln x)}\right]_3^a = \frac{1}{\ln(\ln 3)}$ همگرا

---

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch}^2 n \longrightarrow f(x)=\operatorname{csch}^2 x$ همیشه مثبت

$f'(x)=-2\operatorname{csch}^2 x\coth x<0$ نزولی $\quad f(x)=\operatorname{csch} x$ فقط در $x=0$ ناپیوستگی دارد که در بازه مورد نظر قرار ندارد پس در $[1, \infty)$ پیوستگی است.

$\lim_{u\to+\infty}\int_1^u \operatorname{csch}^2 x\,dx = \lim_{u\to+\infty}(-\coth x)\Big|_1^u = -1+\coth(1)$ همگرا

---

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ $\qquad f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$ به ازای $x\geq 1$ پیوسته است و مقدارش مثبت است.

$1 \leq x_1 \leq x_2 \longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ پس نزولی است

$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}} \xrightarrow{\ln(x+1)=u} \lim_{b\to+\infty}\left[2\sqrt{\ln(x+1)}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[2\sqrt{\ln(b+1)}-2\sqrt{\ln 2}\right]$

$=+\infty$ پس واگراست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}}$ $\qquad f(x)=\frac{1}{(x+2)^{3/2}} \xrightarrow[\text{است}]{\text{مثبت و پیوسته}} f(x)$ ، $x\geq 1$ به ازای $\rightarrow f'(x)<0$ نزولی

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{dx}{(x+2)^{3/2}} = \lim_{a\to\infty}\int_1^a (x+2)^{-3/2}\,dx \xrightarrow[dx=du]{x+2=u} \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x+2}}\right]_1^a = 0+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$ همگرا

---

⑧ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^4+1} \longrightarrow f(x)=\frac{2x}{x^4+1} \longrightarrow f'(x)=\frac{2(x^4+1)-4x^3\times 2x}{(x^4+1)^2}=\frac{-6x^4+2}{(x^4+1)^2} \xrightarrow{x\geq 1 \text{ به ازای}}$

$f'(x)<0$: نزولی $\left\{ x\geq 1 \text{ به ازای} \longrightarrow \right.$ $f(x)$ مثبت و پیوسته است.

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{2(x)\,dx}{x^4+1} = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{2x\,dx}{(x^2)^2+1} = \begin{cases} x^2=u \to 2x\,dx=du \\ x=1 \to u=1 \\ x=a=\infty \to u=a^2=\infty \end{cases}$$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{du}{u^2+1}\,du = \lim_{a\to+\infty}\left[\tan^{-1}x^2\right]_1^a = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$ همگرا

---

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1}n}}{n^2+1} \longrightarrow f(x)=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{x^2+1}$ $\qquad \begin{cases} e^{\tan^{-1}x}\geq 0 & \text{همواره} \\ x^2+1\geq 0 & \text{همواره} \end{cases} \longrightarrow$ $f(x)$ پیوسته و مثبت است.

$$f'(x)=\frac{\frac{e^{\tan^{-1}x}}{x^2+1}\times(x^2+1)-2x\,e^{\tan^{-1}x}}{(x^2+1)^2}=\frac{e^{\tan^{-1}x}(1-2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \left\{\frac{e^{\tan^{-1}x}}{(x^2+1)^2}\geq 0\right.$$ همواره مثبت است.

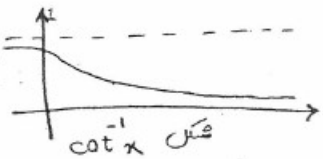
$(1-2x) \xrightarrow{x\geq 1}$ در بازه منفی است. $\qquad f'(x)<0$ نزولی

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{e^{\tan^{-1}x}}{x^2+1}\,dx \overset{\tan^{-1}x=u}{=\!=\!=} \lim_{a\to+\infty}\left[e^{\tan^{-1}x}\right]_1^a = e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{4}}$$ همگرا

---

⑩ $\sum_{n=1}^{+\infty} \cot^{-1}n \longrightarrow f(x)=\cot^{-1}x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2+1}<0$ نزولی

$f(x) \xrightarrow[\text{مثبت (با ازای محور y ها) و دریک دوره تناوب}]{x\geq 1 \text{ به ازای}}$



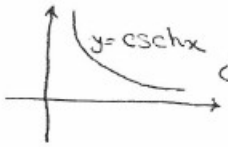
شکل $\cot^{-1}x$ $\longrightarrow \cot x\geq 1$ تابع پیوسته است

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \cot^{-1}x\,dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=\!=} \lim_{a\to+\infty}\left[x\cot^{-1}x+\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_1^a=\infty$$ سری واگرا

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑪ $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{csch} n \quad = f(x) = \operatorname{csch} x \qquad f'(x) < 0$ نزولی



با توجه به شکل هم می‌توان گفت

تابع $\operatorname{csch} x$ به ازای $x \geq 1$ بالای محور x ها است پس مثبت است پیوستگی را هم با توجه به شکل می‌توان گفت.

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \operatorname{csch} x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{dx}{\sinh x} = 2\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \lim_{a\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|\right]_1^a =$$

$$\lim_{a\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{e^a-1}{e^a+1}\right| - \ln\left|\frac{e-1}{e+1}\right|\right] \to \lim_{a\to a}\left[\frac{e^a-1}{e^a+1}\right] \overset{Hop}{=} \text{حد}_{a\to+\infty}\frac{a e^a}{a e^a} = 1 \xrightarrow{\text{جواب انتگرال}} = 1 - \ln\left|\frac{e-1}{e+1}\right| \quad \text{نزولی}$$

* حل انتگرال $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1} \xrightarrow[e^x dx = du]{e^x = u} = \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| =$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$

---

⑫ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \qquad f(x) = e^{-\sqrt{x}} \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} < 0$ نزولی

$e^{-\sqrt{x}}$ به ازای $x \geq 1$ مثبت و پیوسته است

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a e^{-\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = t \to x = t^2 \to dx = 2t\,dt \\ x = 1 \to t = 1 \\ x = a \to t = a \end{cases}$$

$$= \lim 2\int_1^{\infty} t e^{-t}\,dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} = 2\left(-t e^{-t}\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-t}\,dt\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \quad \text{همگرا}$$

---

⑬ $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 e^{-n^2} \qquad f(x) = x^5 e^{-x^2} \xrightarrow[\text{مثبت و پیوسته است}]{\text{به ازای } x \geq 1} \qquad f'(x) = 5x^4 e^{-x^2} - 2x^6 e^{-x^2} =$

$= x^4 e^{-x^2}(5 - x^2) \xrightarrow[\text{پس در کل تابع } f(x) \text{ نزولی است}]{\text{به ازای } x \geq \sqrt{5} \text{ نزولی است}}$

$$\int_1^{\infty} x^5 e^{-x^2} = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a x(x^2)^2 e^{-x^2}\,dx \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{cases} = 2\lim_{a\to+\infty}\int_1^a t e^{-t}\,dt$$

$\xrightarrow{\text{روش جزء به جزء}} = \frac{5}{2e}$ همگرا

روش دوم: (آزمون نسبت) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5 e^{-(n+1)^2}}{n^5 e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1 \times \frac{e^{n^2}}{e^{n^2} \times e^{2n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{2n+1}} = 0 < 1$ پس همگرا

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$ $\qquad f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x^2} \xrightarrow[\text{تابع مثبت و پیوسته است}]{\text{به ازای } x\geq 1}$

$$f'(x)=\frac{2x\ln x-2x(\ln x)^2}{x^4}=\frac{2\ln x\,(1-\ln x)}{x^3}<0 \quad \text{نزولی}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx \longrightarrow \begin{cases}\ln x=u \to \frac{dx}{x}=du\ ,\ x=e^u\\ x=1 \to u=0\\ x=\infty \to u=\infty\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} u^2 e^{-u}\,du \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} =2 \qquad \text{همگرا}$$

---

(۱۵) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^{\ln(\ln n)}}{n\ln n} \Rightarrow f(x)=\frac{3^{\ln(\ln x)}}{x\ln x} \xrightarrow[\text{پیوسته و مثبت است.}]{\text{به ازای } x\geq 3\ \ f(x)}$

$$f'(x)=\frac{\frac{\ln 3}{x\ln x}\,3^{\ln(\ln x)}\times x\ln x-3^{\ln(\ln x)}\times[\ln x-1]}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3^{\ln(\ln x)}[\ln 3-(\ln x-1)]}{(x\ln x)^2} \xrightarrow{x\geq 3} <0 \quad \text{نزولی}$$

همواره مثبت

$$\int_3^{\infty}\frac{3^{\ln(\ln x)}}{x\ln x}\,dx \xrightarrow[dt=\frac{dx}{x\ln x}]{\ln(\ln x)=t} \int_{\ln(\ln 3)}^{\infty} 3^t\,dt=\lim_{a\to\infty}\int_{\ln(\ln 3)}^{a} 3^t\,dt$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{3^t}{\ln 3}\Big|_{\ln(\ln 3)}^{a}=\infty \qquad \text{واگرا}$$

---

(۱۶) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} n\sqrt{n+1}=\sqrt{n^3+n^2}>\sqrt{n^3}=n^{3/2}$

همگرا (آزمون انتگرال)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^3+n^2}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}} \xRightarrow{\times\ln n} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}<\frac{\ln n}{n^{3/2}} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{\ln x}{x^{3/2}}\,dx \xrightarrow[\text{سپس جزء به جزء}]{\text{ابتدا } u \text{ گیری و}} \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-2\ln x}{x^{1/2}}-\frac{4}{x^{1/2}}\right)\Big|_2^b=\sqrt{2}\,(\ln 2+2) \qquad \text{همگرا}$$

پس سری مورد نظر نیز همگراست.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\ln n}{n}\right) \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\frac{\ln n}{n}} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\left(\frac{\ln n}{n}\right)'} \sec^2\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{\cancel{\left(\frac{\ln n}{n}\right)'}}$

$\frac{\ln n}{n} \to$ صفر

$= \lim_{n\to\infty} \sec^2\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \sec^2 0 = 1 > 0 \longrightarrow$ سری واگراست

$\frac{\ln n}{n} \to hop = 0$

دلیل واگرایی $\frac{\ln n}{n}$: $\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^b = \infty$

---

(۱۸) فرض کنید P یک عدد ثابت و مثبت است، نشان دهید $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^P}$ همگراست اگر و تنها اگر $P>1$

نکته: این سری به P-سری لگاریتمی معروف است.

از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم $\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^P} = \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln x)^{1-P}}{1-P}\Big|_2^b$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{(\ln b)^{1-P}}{1-P} - \frac{(\ln 2)^{1-P}}{1-P}\right]$$

$$\begin{cases} 1-P>0 \longrightarrow P<1 \longrightarrow \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln b)^{1-P}}{1-P} = \infty \longrightarrow \text{واگرا} \\ 1-P<0 \longrightarrow P>1 \longrightarrow \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln b)^{1-P}}{1-P} = \text{عدد} \longrightarrow \text{همگرا} \\ P=1 \longrightarrow \lim \frac{(\ln b)^{1-P}}{1-P} = \infty \longrightarrow \text{واگرا} \end{cases}$$

شرط استفاده از آزمون انتگرال که برقرار بود: $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^P}$ به ازای $x \geq 2$ تابعی پیوسته، مثبت و نزولی است

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

آزمون نسبت و ریشه :

فرض می‌کنیم $\sum a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد به طوری که :

آزمون نسبت : ① $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ آزمون ریشه : ② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$

الف) اگر $0 \leq L < 1$ باشد سری مطلقاً همگراست .

ب) اگر $L > 1$ یا $L = \infty$ سری واگراست.

ج) اگر $L = 1$ باشد آزمون بی حاصل است. (یعنی نمی‌توان نظر داد)

نکته ۱ : از آزمون نسبت اغلب در مواردی که سری شامل فاکتوریل است می‌توان استفاده کرد.

نکته ۲ : از آزمون ریشه اغلب در مواردی که n در توان ظاهر شود، می‌توان بهره جست .

نکته ۳ : آزمون ریشه از آزمون نسبت قوی‌تر است .

مثال : در مورد همگرایی یا واگرایی سری های زیر بحث کنید.

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \rightarrow$ سری مطلقاً همگراست

---

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{[(n+1)!]^2\,(2n)!} = 4 > 1 \rightarrow$ سری واگراست

---

③ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 \rightarrow$ سری به طور مطلق همگراست

---

④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{3^n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow$ سری به طور مطلق همگراست

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{100}} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^n}{n^{100}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(\sqrt[n]{n})^{100}} = e > 1 \rightarrow$ سری واگراست

نکته: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

۶) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{(\ln n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow$ سری همگراست

۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-n-1+2}{1+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1+n} - 1\right)^n \neq 0 \rightarrow$ پس سری واگراست

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\ln n}{5^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{5} = \frac{1}{5} < 1 \rightarrow$ سری همگراست

نکته: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\ln n}{n}} \overset{\text{hop}}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n\ln n}} = e^0 = 1$

تقریب استرلینگ $n! = \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n}$

۹) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \left(\frac{17}{6}\right)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}\left(\frac{17}{6}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{17}{6} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{17}{6e} > 1 \rightarrow$ سری واگراست

۱۰) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \times \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 2 \rightarrow$ سری واگراست

۱۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\frac{n}{2}}}{n\pi^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{10^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)\pi^{n+1}}}{\frac{10^{n/2}}{n\pi^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n\sqrt{10}}{\pi(n+1)}\right| = \frac{\sqrt{10}}{\pi} > 1 \rightarrow$ سری واگراست

۱۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{nn^n}} = 1 \rightarrow$ آزمون بی‌نتیجه است

* به دلیل قوی بودن آزمون ریشه از آزمون نسبت اگر آزمون ریشه جواب نداد سراغ آزمون نسبت نمی‌رویم.

آزمون مقایسه: $n+1 > n \rightarrow (n+1)^n > n^n \rightarrow \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} > \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (سری همساز) واگراست پس سری مورد نظر نیز واگراست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

چون مخرج قوی‌تر است

(۱۳) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{e^{n^2}} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{e^{n^2}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}(n+1)^2}{e^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^{n^2}}(n+1)^2}{\cancel{e^{n^2}} e^{2n} e} = 0 < 1$$

پس سری همگراست

---

(۱۴) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(2n)!}{(3n)!} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!\,(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!\,(2n)!}{(3n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3}{27n^3} = \frac{4}{27} < 1 \rightarrow$$ سری همگراست

---

(۱۵) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^n \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{(n+1)\,n!}{(n+1)^n(n+1)}\right)^n \left(\frac{(n+1)\,n!}{(n+1)^n(n+1)}\right)}{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}_{e^{-n}} \underbrace{\left(\frac{n!}{(n+1)^n}\right)}_{\text{مخرج قوی‌تر}} = 0 < 1 \longrightarrow$$ سری همگراست

همگرا $\longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ $\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}}$ روش دوم

---

(۱۶) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\pi^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\pi^n n!}{n^n}} \right| = \pi \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \right| = \frac{\pi}{e} > 1 \rightarrow$$ سری واگراست

نکته: در مواردی که $\frac{n!}{n^n}$ دیده می‌شود از آزمون نسبت استفاده می‌شود.

---

(۱۷) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n n!}{n^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^n\, 2^{n+1}(n+1)!}{2^n\, n!\,(n+1)^{n+1}} \right| = \frac{2}{e} < 1 \rightarrow$$ سری به طور مطلق همگراست

---

(۱۸) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$$ همگراست

---

(۱۹) $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0 < 1 \rightarrow$$ سری همگراست

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۰) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^2} = 1 \longrightarrow$ آزمون بی حاصل است

سری متناوب است $\xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}}$ $a_n = \frac{1}{(\ln n)^2}$ نزولی و مثبت $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^2} = 0 \longrightarrow$ سری همگرا است

$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

نکته: به ازای هر مقدار P واگرا است $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^P}$

$(\ln n)^P < n$ (به ازای هر مقدار P به قدر کافی بزرگ n) $\longrightarrow \frac{1}{(\ln n)^P} > \frac{1}{n} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{طبق آزمون}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^P}$ واگرا است

واگرا

$\longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$ واگرا است $\longrightarrow$ پس سری مفروض همگرای مشروط است

---

(۲۱) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^P}{n!} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^P}{(n+1)!}}{\frac{n^P}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^P}{(n+1)n^P} \cong \lim_{n\to\infty} \frac{n^P}{n^{P+1}} = 0 < 1$

سری همگرای مطلق می باشد.

---

(۲۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n^3}}{(n+1)\cancel{n!}} \right| = 0 < 1$ سری همگرا است

---

(۲۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(n+2) - \ln(n+1)\right] \xlongequal{\text{قاعده‌ی تلسکوپی}} \infty \longrightarrow$ سری واگرا است

---

(۲۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) = -1 \neq 0 \longrightarrow$ واگرا است

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

سری های متناوب با جملات منفی و مثبت (همگرایی مطلق و مشروط):

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به طور مطلق همگراست اگر سری مربوطه‌ی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ که جملاتش قدرمطلق های جملات $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هستند، همگرا باشد.

سری های به طور مشروط همگرا: سری هایی که بدون همگرایی مطلق، همگرا می باشند را به طور مشروط همگرا می نامیم.

قضیه: فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری باشد به طوری که $\sum |a_n|$ همگرا باشد در این صورت $\sum a_n$ نیز همگراست.

نتیجه: همگرایی مطلق، همگرایی را ایجاب می کند.

تعریف: گوییم یک سری نامتناهی متناوب است اگر جملاتش به تناوب مثبت و منفی باشند. (جملات متوالی همواره مختلف العلامه باشند یعنی یک جمله مثبت و یک جمله منفی)

$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\cdots$ این سری متناوب نیست

این سری ها متناوب اند $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1+a_2-a_3+\cdots$

قضیه‌ی ①: آزمون سری متناوب (لایب نیتز)

هرگاه $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی اکیداً نزولی از اعداد مثبت باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه سری متناوب $a_1-a_2+a_3-\cdots-(-1)^{n-1}a_n+\cdots$ همگراست.

مثال: در مورد همگرایی و واگرایی سری های زیر بحث کنید. (همگرایی مطلق یا مشروط).

① $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ طبق قضیه‌ی ① همگراست $\rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0 \\ \text{نزولی با جملات مثبت} \end{cases}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{طبق آزمون}}$ همگراست

پس سری همگرای مطلق است.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 0$ و $a_n = \frac{1}{(2n+1)^3}$ نزولی با جملات مثبت

پس طبق قضیه‌ی ① سری همگراست.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \xrightarrow[\text{حدی}]{\text{آزمون مقایسه}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{8} > 0$ پس سری مطلقاً همگراست.

---

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$ و $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ نزولی و مثبت $\longrightarrow$ طبق قضیه‌ی ① همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \ln(n+1) < n+1 \longrightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ واگرا پس سری همگرایی مشروط است.

---

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^{2n}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{2n}} = 0$ و $a_n = \frac{n}{e^{2n}}$ نزولی با جملات مثبت پس طبق قضیه‌ی ① همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{2n}} \xrightarrow[\text{(جزء به جزء)}]{\text{آزمون انتگرال}} \lim_{a\to\infty} \int_1^a x e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2e^2}$ پس سری همگرایی مطلق است

---

۵) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = 0$ و $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ نزولی با جملات مثبت $\longrightarrow$ سری همگراست

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{a\to\infty} \frac{-1}{\ln x}\Big|_2^a = \frac{1}{\ln 2}$ پس سری مطلقاً همگراست

---

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$ و $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ نزولی با جملات مثبت $\longrightarrow$ سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0 \longrightarrow \sum |a_n|$ واگراست

واگرا

پس سری همگرایی مشروط است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $\quad a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=0$

$\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)'=\frac{\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}}{n}=\frac{1}{n\sqrt{n}}-\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}=\frac{1-\ln n}{n\sqrt{n}}<0$ نزولی با جملات مثبت $\quad$ به ازای $n\geq 1$: $n\sqrt{n}$ همواره مثبت

پس سری همگراست.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \qquad \frac{\ln n}{\sqrt{n}}>\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{\ln x}{x}dx=\lim_{a\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^a=\infty$

پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ نیز واگراست پس سری به طور مشروط همگراست.

---

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} \longrightarrow$ سری متناوب

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$ پس سری واگراست

---

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \xrightarrow[\text{بودن سری}]{\text{بررسی متناوب}} -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\cdots$ پس سری متناوب است $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$

$a_n=\frac{1}{2n}$ نزولی با جملات مثبت $\quad$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0 \longrightarrow$ پس سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}>0 \longrightarrow$ واگراست

پس سری به طور مشروط همگراست.

---

⑩ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{a}{n}\ ,\ a>0 \qquad a_n=\sin\frac{a}{n}\longrightarrow (a_n)'=\frac{-a}{n^2}\cos\frac{a}{n}<0$ نزولی با جملات مثبت

$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{a}{n}\overset{\text{هم ارزی}}{=}0 \longrightarrow$ پس سری همگراست.

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}=1>0 \longrightarrow$ واگراست $\quad$ پس سری به طور مشروط همگراست

---

⑪ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{10}\right) \qquad \lim_{n\to\infty}10^{1/n}=1\neq 0 \longrightarrow$ پس سری واگراست

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}}$ $\quad a_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$ نزولی با جملات مثبت

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \lim \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0 \longrightarrow$ پس سری همگراست

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{8}{9}\right)^n} = \frac{8}{9} < 1 \longrightarrow$ سری به طور مطلق همگراست

---

(۱۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$ $\quad a_n = \frac{n}{(n+1)e^n}$ نزولی با جملات مثبت $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)e^n} = 0 \longrightarrow$ پس سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)e^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{(n+2)e^{n+1}}}{\frac{n}{(n+1)e^n}} \right| = \frac{1}{e} < 1$ پس سری مطلقاً همگراست

---

(۱۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ $\quad a_n = \frac{1}{(2n)!}$ نزولی با جملات مثبت و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)!} = 0 \longrightarrow$ سری همگراست

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{[2(n+1)]!}}{\frac{1}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}}{\frac{1}{(2n)!}} \right| = 0 < 1$

پس سری مطلقاً همگراست

---

(۱۵) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\ln n^2} \xrightarrow{\ln a^b = b\ln a} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{2\ln n} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n$

$a_n = (-1)^n \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n =$ وجود ندارد $\longrightarrow$ پس سری واگراست

روش دوم: $\lim \frac{\ln n}{\ln n^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \longrightarrow$ پس سری واگراست

---

(۱۶) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n!)^2}{(2n)!} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!\,n!}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)\,n!\,(n+1)\,n!}{(2n+2)(2n+1)\,2n!}}{\frac{n!\,n!}{(2n)!}} \right| = \frac{1}{4}$

سری مطلقاً همگراست پس سری همگراست چون همگرایی مطلق همگرایی را ایجاب می‌کند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n} = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+5^n} = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n+5^n}$

$\frac{2^n}{n+5^n}$ نزولی با جملات مثبت (مخرج توتیر) و $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+5^n} = 0$ $\longrightarrow$ پس سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+5^n} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \frac{2^n}{n+5^n} < \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ $\longrightarrow$ پس سری مورد نظر مطلقاً همگراست

سری هندسی $r = \frac{2}{5}$ (همگرا)

---

(۱۸) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}$ $\left(\frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}\right)' < 0$ نزولی با جملات مثبت و $\lim \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2} = 0$ $\longrightarrow$ پس سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = \lim_{a\to\infty} \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2}\Big|_1^a =$ عددی شود $\longrightarrow$ همگراست

پس سری مورد نظر مطلقاً همگراست.

---

(۱۹) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \longrightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ نزولی با جملات مثبت

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$ $\longrightarrow$ پس سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2} > 0$ $\longrightarrow$ (آزمون انتگرال) واگرا

پس سری مورد نظر همگرای مشروط است.

---

(۲۰) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$ $a_n = \frac{1}{\ln(n!)}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n!)} = 0$ و $\frac{1}{\ln(n!)}$ نزولی با جملات مثبت

پس سری همگراست

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \ln(n!) < n$ به ازای nهای به قدر کافی بزرگ $\longrightarrow \frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n} \longrightarrow$ واگرا

پس سری مورد نظر به طور مشروط همگراست.

---

(۲۱) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n^{10}}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n^{10}} = \infty \neq 0$ $\longrightarrow$ پس سری واگراست

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حل تعدادی مثال هم از آزمون های مختلف :

① $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \frac{n}{3n+1} < \frac{n}{3n} \rightarrow \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ سری هندسی $r=\frac{1}{3}<1 \rightarrow$ پس سری همگراست

پس $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ همگراست.

---

② $\sum_{n=1}^{\infty}\tan(2^{-n}\ln n)$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\ln(n+1)}{2^n\times 2}}{\frac{\ln n}{2^n}}\right| = \frac{1}{2}<1 \rightarrow$ پس همگراست

$\xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{\ln n}{2^n}\right)}{\frac{\ln n}{2^n}} \overset{hop}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\sec^2(2^{-n}\ln n) = 1 > 0 \rightarrow$ پس سری مورد نظر همگراست

---

③ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\frac{n+1}{n}}} \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(\ln n)^{\frac{n+1}{n}}}}{\frac{1}{n\ln n}} = 1 > 0 \rightarrow$ پس سری واگراست

$\frac{1}{n\ln n} \rightarrow$ از آزمون انتگرال نتیجه می‌شود واگراست

---

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) \xrightarrow[\text{مقایسه حدی}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \overset{hop}{=\!=} 1 > 0 \rightarrow$ سری مورد نظر همگراست

$\frac{1}{n^2} \rightarrow$ همگرا (P-سری، $P=2$)

---

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n2^n}$ $\quad a_n = \overset{A}{\frac{1}{n2^n}} - \overset{B}{\frac{1}{2^n}}$

$A: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} n2^n > 2^n \rightarrow \frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n} \rightarrow$ همگراست (هندسی)

$B: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ سری هندسی با $r=\frac{1}{2}$ همگراست

پس A همگراست

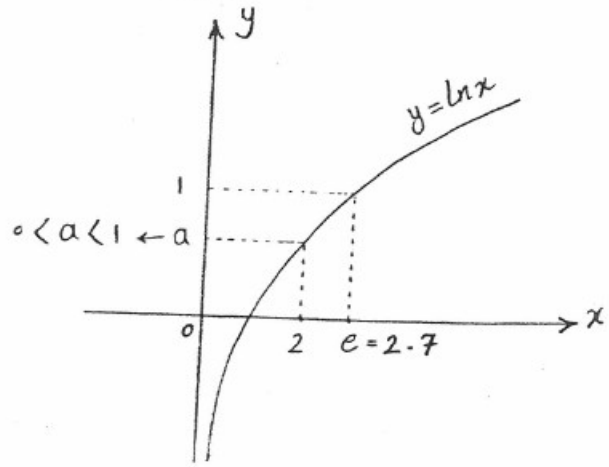
نکته: تفاضل دو سری همگرا، همگراست.

---

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n$ سری هندسی $r=\frac{1}{\ln 2}$

$\ln 2 = a \overset{\text{مثلاً}}{=\!=} \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{1/2} = 2 > 1 \rightarrow$ پس سری واگراست



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

سری توانی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$ یک سری توانی نسبت به x

نکته : قرارداد در سری های توانی $0^0 = 1$

نکته : سری توانی به طور کلی به ازای مقادیر ناصفری از x همگرا و به ازای سایر مقادیر واگرا می باشد .

قضیه ی ① (خاصیت همگرایی سری های توانی) : هرگاه سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای $x = r \ (r \neq 0)$ همگرا باشد، آنگاه به ازای هر x که $|x| < |r|$ به طور مطلق همگراست . هرگاه سری توانی به ازای $x = s$ واگرا باشد، آنگاه به ازای $|x| > |s|$ نیز واگراست .

قضیه ی ② (بازه ی همگرایی یک سری توانی) : فرض کنیم I مجموعه ی تمام نقاط x باشد که به ازای آن ها سری توانی $\sum a_n x^n$ همگراست در این صورت، I بازه ای است که 0 نقطه ی میانی آن است . (چون هر سری توانی به ازای $x=0$ همگراست)

نتایج قضیه ی ② :

۱. اگر سری فقط به ازای $x = 0$ همگرا باشد آنگاه بازه ی همگرایی آن $[0, 0]$ است که فقط شامل $x = 0$ است .

۲. اگر سری به ازای هر x مطلقاً همگرا باشد، آنگاه بازه ی همگرایی $(-\infty, \infty)$ است .

۳. اگر سری به ازای مقادیر ناصفری از x همگرا و به ازای سایر مقادیر واگرا باشد در این صورت I یک بازه ی متناهی به شکل $(-R, R)$ ، $[-R, R]$ ، $[-R, R)$ ، $(-R, R]$ که $R > 0$ است . در نتیجه $x = \pm R$ باید جداگانه بررسی شود .

شعاع همگرایی : عدد R در حالت ۳ را شعاع همگرایی سری توانی $\sum a_n x^n$ گویند : در حالت ۱ $R = 0$ است و در حالت ۲ $R = \infty$ است .

در بررسی سری های توانی از آزمون کشی نسبت و ریشه ، مخصوصاً نسبت استفاده می شود .

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

در سری توانی به شکل $\sum a_n (x-c)^n$ (c ثابت و دلخواه) سه حالت زیر وجود دارد. (یک سری توانی نسبت به $(x-c)$)

۱. سری فقط به ازای $x=c$ همگراست و در این صورت بازه‌ی همگرایی I به بازه‌ی $[c,c]$ تبدیل می‌شود که تنها شامل نقطه‌ی c می‌باشد. $(R=0)$.

۲. سری به ازای هر x (به طور مطلق) همگراست در این صورت بازه‌ی همگرایی $(-\infty,+\infty)$ است $(R=\infty)$

۳. سری به ازای بعضی مقادیر x که برابر c نیستند همگرا بوده و به ازای سایر مقادیر واگراست. در این صورت یک بازه‌ی متناهی به حالت‌های $(c-R, c+R)$، $[c-R, c+R]$، $[c-R, c+R)$، $(c-R, c+R]$ است، (باید نقاط $x=c\pm R$ جداگانه بررسی شوند) (R شعاع همگرایی است)

نکته: R (شعاع همگرایی) همواره نصف طول بازه‌ی همگرایی است.

نکته: طول بازه‌ی $[c,c]$ صفر است و طول $(-\infty,+\infty)$، ∞ است.

مثال: بازه و شعاع همگرایی سری‌های توانی زیر را بررسی کنید.

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)^2}$

آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} 5^n (n+1)^2}{5^{n+1} (n+2)^2 x^n} \right| = \frac{|x|}{5}$

طبق قضیه‌ی ①: $|x|<5$ سری مطلقاً همگراست؛ $|x|>5$ سری واگراست

پس: $R=5$

$x=5 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ همگرا

$x=-5 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{از آزمون سری}}$ مطلقاً همگراست

بازه‌ی همگرایی: $[-5,5]$

نکته‌دار

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(\ln n)^n}$

آزمون ریشه: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2 x^{2n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} |x|^2 = 0$

این سری به ازای هر x به طور مطلق همگراست.

بازه‌ی همگرایی: $(-\infty,\infty)$ شعاع همگرایی: ∞

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

③ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n+1} \xrightarrow[x-6 \text{ :}]{\text{یک سری توانی نسبت}} \lim \left| \frac{(x-6)^{n+1}(n+1)}{(n+2)(x-6)^n} \right| = |x-6| \begin{cases} |x-6|<1 & \text{همگرا} \\ |x-6|>1 & \text{واگرا} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 5<x<7 & \text{همگرا} \\ x>7 \text{ یا } x<5 & \text{واگرا} \end{cases}$ $\quad$ if: $x=7 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \rightarrow$ واگرا

if: $x=5 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \rightarrow$ به طور مشروط همگرا

بازه‌ی همگرایی: $[5,7)$ $\longrightarrow$ شعاع همگرایی: $R=1$

---

④ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+7)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+7)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+7|}{n+1} = 0$ به ازای هر عدد حقیقی همگراست

---

⑤ $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} x^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\ln n} x^n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{\ln n}{n}} |x| = |x|$

حل حد بالا: $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = \infty^0 = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}\ln n} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\frac{2\ln n}{n}}{1}} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1$

$\begin{cases} |x|>1 & \text{واگرا} \\ |x|<1 & \text{همگرا} \end{cases} \rightarrow$ if: $x=\pm 1 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} e^{(\ln n)^2} = \infty \neq 0$ واگرا

بازه‌ی همگرایی: $(-1,1)$ ، شعاع همگرایی $R=1$

---

⑥ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!\,(n+4)!} x^n$ $\quad$ آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+3)!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,(n+5)!}}{\frac{(n+2)!\,x^n}{n!\,(n+4)!}} \right| = \lim \frac{(n+3)x}{(n+1)(n+5)} = 0 < 1$

به ازای هر عدد حقیقی همگراست.

---

⑦ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2} (x+e)^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| e^{n^2} (x+e)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} e^n |x+e| = \infty$

پس $x+e=0 \leftarrow$ فقط در $x=-e$ همگرایی داریم.

---

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-4)^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{(x-4)^{n^2}}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |x-4|^{2n+1} = 0$

به ازای هر عدد حقیقی x، همگراست.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑨ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{n^2}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{2} \Rightarrow |x| < 2$

if: $x = 2 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \xrightarrow[r=2]{\text{سری هندسی}}$ واگرا

if: $x = -2 \to \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n^2} 2^n$ واگرا (جمله‌ی n ام)

بازه‌ی همگرایی: $(-2, 2)$

شعاع همگرایی $R = 2$

---

⑩ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} x^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1} \times x^{n+1}}{\frac{\ln n}{n} \times x^n} \right| \Rightarrow |x| < 1$ همگرا

if: $x = 1 \to \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ آزمون سری متناوب $\begin{cases} \frac{\ln n}{n} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \end{cases}$ پس همگراست

if: $x = -1 \to \sum_{n=2}^{\infty} \overbrace{(-1)^{2n}}^{1} \frac{\ln n}{n}$ واگرا

توجه: نیازی به همگرایی مشروط یا مطلق در اینجا نیست چون فرق ندارد.

بازه‌ی همگرایی: $(-1, 1]$ $\quad$ شعاع همگرایی $R = 1$

نکته دار

⑪ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n} + \frac{2^n}{n^2}\right) x^n$ $\xrightarrow{\text{از دو سری تشکیل شده}}$ $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n}_{I_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n}_{I_2}$

$I_1: \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n x^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3|x|}{n^{1/n}} = 3|x| < 1 \xrightarrow{\text{همگرا}} |x| < \frac{1}{3}$

$I_2: \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n x^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2|x|}{n^{2/n}} = 2|x| < 1 \xrightarrow{\text{همگرا}} |x| < \frac{1}{2}$

$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{اشتراک}} |x| < \frac{1}{3}$

if $x = \frac{-1}{3} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}}_{\text{همگرا مشروط}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n n^2}}_{\text{همگرا مطلق}} \longrightarrow$ همگرای مشروط

if $x = \frac{1}{3} \longrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{واگرا}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n^2}}_{\text{همگرا}} \longrightarrow$ واگرا

بازه‌ی همگرایی: $\left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

شعاع همگرایی $R = \frac{1}{3}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۲) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+2+\cdots+2^n)x^n \xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+2+\cdots+2^{n+1})x^{n+1}}{(1+2+\cdots+2^n)x^n}\right| \Rightarrow |x|<\frac{1}{2}$

if $x=\frac{1}{2} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2+\cdots+2^n}{2^n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ واگرا

if $x=\frac{-1}{2} \longrightarrow$ حاند باله $\longrightarrow$ واگرا بازه‌ی همگرایی : $(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$ شعاع همگرایی $R=\frac{1}{2}$

---

(۱۳) $\sum_{n=0}^{\infty}10^n\left(\frac{x-1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n(x-1)^n} = 2|x-1| \longrightarrow |x-1|<\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

if $x=\frac{1}{2} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ واگرا بازه‌ی همگرایی : $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

if $x=\frac{3}{2} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}1$ واگرا شعاع همگرایی $R=1/2$

---

(۱۴) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\ln n}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(x+1)^n}{n\ln n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|}{\sqrt[n]{n\ln n}} = |x+1|$

$|x+1|<1 \xRightarrow{\text{همگرا}} -1<x+1<1 \Rightarrow -2<x<0$

$x=-2 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون لری}} \begin{cases}\frac{1}{n\ln n} & \text{نزولی و مثبت}\\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=0\end{cases}$ همگرا (شروط)

$x=0 \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \lim_{a\to\infty}\int_2^a\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{a\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^a = \infty$ واگرا

بازه‌ی همگرایی : $[-2,0)$ شعاع همگرایی $R=1$

حد ریشه باله : $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n\ln n)^{1/n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\infty)^0} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln(n\ln n)}} \longrightarrow L$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n\ln n)}{n} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{hop} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n+1}{n\ln n}}{1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}\right) = 0$$

پس: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^0} = 1$

---

(۱۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$

اولاً: به ازای $x=1$ سری واگراست زیرا به ازای $x=1$ ، $\frac{x+2}{x-1}$ تعریف نشده است.

ثانیاً: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x+2}{x-1}\right| \times \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = \left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 1$

$$-1 < \frac{x+2}{x-1} < 1 \longrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} < 1 \xrightarrow[\text{شود}]{\text{اگر تعیین علامت}} x<1 \\ \frac{x+2}{x-1} > -1 \xrightarrow[\text{شود}]{\text{اگر تعیین علامت}} x>1 \text{ یا } x<\frac{-1}{2} \end{cases}$$

if $x=\frac{-1}{2} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{از آزمون سری}}$ سری همگرای مشروط

if $x=-1 \longrightarrow$ سری واگراست بازه‌ی همگرایی: $x \le \frac{-1}{2}$

---

(۱۶) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\,x^n}{n^n}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!}$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = |x|\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = |x|e^{-1} < 1 \Rightarrow |x| < e$$

$$\Rightarrow -e < x < e$$

if $x=e \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n} \xrightarrow[n!e^n > n^n]{\text{با توجه به اینکه}} = \infty$ واگرا

if $x=-e \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n n!}{n^n} \xrightarrow[\text{جواب نمی‌دهد}]{\text{آزمون نسبت و سری متناوب}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{e^n n!}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{e\sqrt[n]{n!}}{n}$

$\xrightarrow{\text{مخرج قوی‌تر است}} = 0 < 1$ همگرای مطلق بازه‌ی همگرایی: $[-e, e)$ شعاع همگرایی $R=e$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۷) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n} = |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$

if $x=1 \to \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ واگرا

بازه‌ی همگرایی : $(-1,1)$

if $x=-1 \to \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ واگرا شعاع همگرایی $R=1$

---

(۱۸) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n} \to \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{(2n+2)}\,2^{(2n+2)}}{2n+2}}{\frac{2^{2n}\,x^{2n}}{2n}}\right| = 4|x|^2<1 \Rightarrow |x|^2<\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{-1}{2}<x<\frac{1}{2}$

if $x=\pm\frac{1}{2} \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}}$ همگرای مشروط است

بازه‌ی همگرایی : $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ شعاع همگرایی $R=\frac{1}{2}$

---

(۱۹) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}(x-3)^{n+1}}{n(n+1)} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{2n+1}(x-3)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{2^{2n-1}(x-3)^{n+1}}{n(n+1)}}\right| = 4|x-3|<1$

$\frac{-1}{4}<x-3<\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{11}{4}<x<\frac{13}{4}$

if $x=\frac{13}{4} \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n(n+1)}\times\frac{1}{2^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}\times 2^{-1}}{n(n+1)\,2^{2n}\times 2^2}$

$=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ همگرا

if $x=\frac{11}{4} \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}(-1)^{n+1}}{n(n+1)\,4^{n+1}} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \xrightarrow{\text{آزمون سری متناوب}}$ سری همگراست

بازه‌ی همگرایی : $\left[\frac{11}{4},\frac{13}{4}\right]$ شعاع همگرایی $R=\frac{1}{4}$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۰) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} x^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n e^{-\sqrt{n}}|} = |x| \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sqrt{n}}{n}} = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x <$

if $x=1 \to \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{قابل اجراست}]{\text{آزمون انتگرال}}$ سری همگراست

if $x=-1 \to \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{n}} \to e^{-\sqrt{n}}$ نزولی و مثبت $\lim_{n\to\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$ پس سری همگراست (تا سه سری متناوب)

بازه‌ی همگرایی : $[-1,1]$ شعاع همگرایی $R=1$

---

(۲۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n} = |x-1| \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = |x-1|e$

$\Rightarrow |x-1|e < 1 \Rightarrow \frac{-1}{e} < x-1 < \frac{1}{e} \Rightarrow 1-\frac{1}{e} < x < 1+\frac{1}{e}$

if $x = 1-\frac{1}{e} \to \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0 \to$ واگرا

if $x = 1+\frac{1}{e} \to \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0 \to$ واگرا

بازه‌ی همگرایی : $\left(1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right)$ شعاع همگرایی $R = \frac{1}{e}$

---

(۲۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n(1+\sqrt{n})} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{3^n(1+\sqrt{n})}\right|} = \frac{|x|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\sqrt{n}}} = \frac{|x|}{3}$

$\frac{|x|}{3} < 1 \to -3 < x < 3$

if $x=3 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ نزولی و مثبت $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$ همگرایی مشروط

if $x=-3 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{با } \sum \frac{1}{n}]{\text{آزمون مقایسه حدی}}$ واگراست

بازه‌ی همگرایی : $(-3,3]$ شعاع همگرایی $R=3$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

سری تیلور:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

اگر $a=0$ سری را سری مکلورن می‌نامند و داریم:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

---

* روابط مهمی که باید حفظ شوند:

① $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots \qquad |x|<1$

② $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \qquad |x|<\infty$

③ $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \qquad |x|<\infty$

④ $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad |x|<\infty$

⑤ $\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \qquad |x|<\infty$

⑥ $\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad |x|<\infty$

⑦ $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots \qquad |x|<\frac{\pi}{3}$

⑧ $\frac{1}{1+x}=?\ \xrightarrow[\text{به جای } x \text{ کلی } -x \text{ قرار می‌دهیم}]{\text{در رابطه ① به جای}}\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

⑨ $\frac{1}{1-x^2}=?\ \xrightarrow[\text{به جای } x \text{ کلی } x^2 \text{ قرار می‌دهیم}]{\text{در رابطه ① به جای}}\ \frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$

⑩ $\frac{1}{1+x^2}=?\ \xrightarrow[\text{به جای } x \text{ کلی } -x^2 \text{ قرار می‌دهیم}]{\text{در رابطه ① به جای}}\ \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

⑪ $\ln(1+x)=?\ \xrightarrow[\text{انتگرال می‌گیریم}]{\text{از رابطه ⑧}}\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\overset{\text{یا}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

⑫ $\ln\frac{1+x}{1-x}=?\ \xrightarrow[\text{انتگرال می‌گیریم}]{\text{از رابطه ⑨}}\ \ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right]=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

⑬ $\tan^{-1}x=?\ \xrightarrow[\text{انتگرال می‌گیریم}]{\text{از رابطه ⑩}}\ \tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

⑭ $\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\ \xrightarrow[①]{\text{از رابطه}}\ \frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{x}{a}\right)^3+\cdots\right),\ |x|<a$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: سری مکلورن توابع زیر را بیابید.

① $f(x)=\sin x \quad f'(x)=\cos x \quad f''(x)=-\sin x$

$f^{(3)}(x)=-\cos x \quad f^{(4)}(x)=\sin x$

$$\sin x = f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!}+\cdots = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

---

② $f(x)=e^x \quad f'(x)=e^x \rightarrow f'(0)=1 \quad f''(x)=e^x \rightarrow f''(0)=1$

$$f(x)=e^x=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2 f''(0)}{2!}+\cdots = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

---

③ $f(x)=e^{1/x}$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \longrightarrow e^{1/x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/x)^n}{n!}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!\,x^2}+\cdots$$ سری لوران

---

④ $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^3}$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \longrightarrow e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots$$ سری لوران

$$\xrightarrow{\div x^3} \frac{e^{-x}}{x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\,x^{n-3}}{n!}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{6}+\frac{x}{24}-\cdots$$

---

⑤ $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{x^2}$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \longrightarrow \cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\cdots$$

$$\xrightarrow{\div x^2} \frac{\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-2+\frac{2x^2}{3}-\frac{4x^4}{25}+\cdots$$ سری لوران

---

⑥ $f(x)=\cos^2 x$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{2x}{2!}+\frac{2^4 x^4}{4!}-\cdots\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$$

---

⑦ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^3}$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$ سری لوران

$$\xrightarrow{\div x^3} \frac{\sin x}{x^3}=\frac{1}{x^3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+\cdots$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑧ $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ حول $x=0$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \longrightarrow x-\sin x=\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots$$

$$\xrightarrow{\div x^3} \frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}-\cdots$$

---

⑨ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}$ حول $x=\pi$ $\quad \dfrac{\sin x}{x-\pi}=\dfrac{\sin[(x-\pi)+\pi]}{x-\pi} \underset{\text{می‌گیریم}}{\overset{\text{بسط}}{=}} \dfrac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

$$\overset{\text{رابطه ③}}{=} \frac{-1}{x-\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{-1}{x-\pi}\left[(x-\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$=-1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$$

چون به ازای $n=0$ جمله -1 می‌شود پس -1 را داخل سری می‌آوریم

---

⑩ $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^4-1}$ $\qquad \dfrac{1}{1-x^4}\overset{\text{رابطه}}{\underset{①}{=}}\sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}$

از طرفی $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^4-1}=(2x-1)\dfrac{1}{1-x^4}=2x\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}$

---

⑪ $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sin^3 t\,dt$ $\qquad \sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t \longrightarrow \sin^3 t=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$

$$\sin^3 t=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

حال با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$f(x)=\int_0^x \sin^3 t\,dt=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!(2n+2)}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)!}$$

---

⑫ سری توانی به دست آورید که $\ln(1+x)$ را نمایش دهد؟

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n \quad |t|<1$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\cdots\Big|_0^x \Rightarrow \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$\Rightarrow \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad |x|<1$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۳) $f(x)=\ln(1+x^2) \xrightarrow{\text{برای عکس نوع تابع}} f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$$\frac{1}{1+x^2} \overset{\text{رابطه (۱۰)}}{=\!=\!=} 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}$$

$$\xrightarrow{\times 2x} \frac{2x}{1+x^2}=2\left[x-x^3+x^5-x^7+\cdots+(-1)^n x^{2n+1}+\cdots\right]$$

$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین انتگرال}} \int_0^x \frac{2x}{1+x^2}dx=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}-\frac{x^8}{8}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow \ln(1+x^2)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

---

(۱۴) تابع E با ضابطه‌ی $E(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ تابع خطا نام دارد، سری مکلورن تابع خطا را بیابید.

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots \qquad -\infty<u<+\infty$$

اگر فرض کنیم $u=-t^2 \longrightarrow e^{-t^2}=1-t^2+\dfrac{t^4}{2!}-\dfrac{t^6}{3!}+\dfrac{t^8}{4!}-\cdots \qquad -\infty<t<+\infty$

طرفین را در $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ ضرب می‌کنیم و از طرفین انتگرال $\displaystyle\int_0^x$ می‌گیریم:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5\times 2!}-\frac{t^7}{7\times 3!}+\frac{t^9}{9\times 4!}-\cdots\right)\Bigg|_0^x$$

$$\longrightarrow E(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه (قضیه ی دوجمله ای):

اگر m عدد حقیقی دلخواهی باشد آنگاه به ازای تمام مقادیری از x که در $|x|<1$ صادق باشند، داریم:

$$(1+x)^m = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

که اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد سری دوجمله ای بعد از تعدادی متناهی جمله خاتمه می یابد.

مثال: عبارات زیر را به صورت یک سری توانی برحسب x بیان کنید.

① $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $\quad |x|<1 \qquad (1+x)^{-1/2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})\cdots}{n!}x^n$

$$(1+x)^{-1/2} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times\frac{3}{2^2}}{2!}x^2-\frac{\frac{1\times3\times5}{2^3}}{3!}x^3+\frac{\frac{1\times3\times5\times7}{2^4}}{4!}x^4+\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1\times3}{2^2\cdot2!}x^2-\frac{1\times3\times5}{2^3\cdot3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n(1)(3)(5)\cdots(2n-1)}{2^n\,n!}x^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1)(3)(5)(7)\cdots(2n-1)}{n!\,2^n}x^n$$

---

② $\left(\frac{x}{1-x}\right)^3$ $\quad |x|<1 \qquad \frac{1}{(1-x)^3} \xrightarrow{\text{در فرمول}} \begin{cases} m=-3 \\ x\to -x \end{cases}$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-x)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-1)^n}{n!}x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times2\times3\times4\times5\times\cdots\times(n+2)}{1\times2\times n!}x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{2(n!)}x^n \quad |x|<1 \quad \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{طرفین را در } x^3}$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = x^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{2(n!)}x^{n+3}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(1-x^2)^{-1/2} \quad |x|<1 \xrightarrow{\text{در فرمول}} \begin{cases} m=\frac{-1}{2} \\ x \to -x^2 \end{cases}$$

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\cdots\left(\frac{-1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\cdots\left(\frac{-1}{2}-n+1\right)(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

$$(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\times 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\times 3\times 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\cdots+\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+\cdots$$

چون: $(1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[\text{انتگرال می‌گیریم}]{\text{از طرفین سری بدست آمده}}$

$$\int_0^x (1-x^2)^{-1/2}dx = x+\frac{x^3}{2\times 3}+\frac{(1)(3)}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5}+\frac{(1)(3)(5)}{2^3\cdot 3!}\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x|<1$$

---

۴) یک سری برای $(1-x^2)^{-1/2}$ بدست آورید و به کمک آن یک سری توانی برای $\sin^{-1}x$ بدست آورید. (حل بالا ↑)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مسائل تکمیلی سری مکلورن :

① $\frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$$\xrightarrow[\text{داریم}]{\text{با مشتق گیری از طرفین}} -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{1}{(1+x)^2} = \sum (-1)^{n+1} n x^{n-1}$$

---

② $\frac{-x}{(1-x^2)^2}$ $\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xRightarrow{x \to x^2} \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \xrightarrow[\text{مشتق می گیریم}]{\text{از طرفین}}$

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n x^{2n-1} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{x}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n-1}$$

---

③ $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \xlongequal{\text{تجزیه کسر}} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2\left(\frac{x}{2}-1\right)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \qquad \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right] x^n$$

---

④ $f(x) = 2^x \longrightarrow e^{\ln f(x)} = f(x) \qquad e^{\ln 2^x} = e^{x\ln 2} \longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \xRightarrow{x \to x\ln 2}$

$$e^{x\ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n 2^n}{n!}$$

---

⑤ $\ln x \longrightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \xRightarrow{x \to x-1} \ln(1+x-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑥ $\ln(1-x+x^2) \longrightarrow \ln\left[(1-x+x^2)\left(\frac{1+x}{1+x}\right)\right] = \ln\frac{1+x^3}{1+x} = \ln(1+x^3) - \ln(1+x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

---

⑦ $f(x) = xe^{1-\cos x} \longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \Rightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots$$

$$e^x \xrightarrow{x \to 1-\cos x} 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots$$

$$xe^{1-\cos x} = x\left[1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots\right]$$

---

⑧ $\ln(x^2+2x+2) = \ln\left[(x+1)^2+1\right]$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \xrightarrow{x \to (x+1)^2} \ln\left[1+(x+1)^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{2n}}{n}$$

---

⑨ $\frac{x}{2x+1} \longrightarrow \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{x \to -2x} \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} \times x} \frac{x}{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{n+1}$$

---

⑩ $f(x) = xe^{x^2} \longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \longrightarrow e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \xrightarrow{\times x} xe^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حل سؤالات گروه ریاضی

a) انتگرال های نامعین زیر را محاسبه کنید.

① $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ $\qquad x=\frac{1}{t} \rightarrow dx=\frac{-dt}{t^2}$

$$\int \frac{-dt}{t^2\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t})^2+\frac{2}{t}-1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1+2t-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-(t^2-2t-1+1-1)}}$$

$$\xrightarrow{t^2-2t+1=(t-1)^2} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} \quad \begin{cases} t-1=u \\ dt=du \end{cases} \rightarrow = -\int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-u^2}}$$

$$= -\sin^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}} = -\sin^{-1}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) = -\sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{2}}\right) = -\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{x\sqrt{2}}\right)+c$$

---

② $I=\int \frac{x^{11}dx}{x^8+x^4-2} = \int \frac{x^3(x^4)^2dx}{(x^4)^2+x^4-2} \quad \begin{cases} x^4=u \\ 4x^3dx=du \end{cases} \rightarrow = \frac{1}{4}\int \frac{u^2du}{u^2+u-2}$

$$\xrightarrow{\text{عمل تقسیم}} \frac{u^2}{u^2+u-2} = 1+\frac{2-u}{u^2+u-2} \rightarrow \frac{1}{4}\int du + \frac{1}{4}\int \frac{(2-u)du}{u^2+u-2} \quad \underline{\underline{2-u=-(u-2)}}$$

$$\frac{1}{4}\int du - \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{u-2}{u^2+u-2}du}_{I_1} \qquad I_1=\int \frac{(u-2)du}{u^2+u-2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2u-4)}{u^2+u-2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{2u+1}{u^2+u-2}\right)du - \frac{1}{2}\int \frac{5\,du}{u^2+u-2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\ln|u^2+u-2| - \frac{5}{2}\int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u^2+u-2| - \frac{5}{2}\times\frac{1}{2\times\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{u+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{u+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} I=\frac{1}{4}u-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln|u^2+u-2|-\frac{5}{6}\ln\left|\frac{u-1}{u+2}\right|\right]+c$$

$$\rightarrow I=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln|x^8+x^4-2|-\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x^4-1}{x^4+2}\right|\right]+c$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

④ $\int \frac{\cos x}{1-\cos x}dx \longrightarrow \int \frac{\cos x\,dx}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \longrightarrow I = \int \frac{\cos x+\cos^2 x}{\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}}dx$

$I = \underbrace{\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}}_{I_1} + \underbrace{\int \cot^2 x\,dx}_{I_2}$ $\quad I_1 = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} \begin{cases} \sin x = u \\ \cos x\,dx = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} = \frac{-1}{\sin x} + C_1$

$I_2 = \int (\cot^2 x + 1 - 1)dx = -\cot x - x + C_2 \longrightarrow I = \frac{-1}{\sin x} - \cot x - x + C$

---

⑤ $I = \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$ $\begin{cases} dx = \frac{2du}{1+u^2} \\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \ u = \tan\frac{x}{2} \end{cases}$

$I = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2(2u)}{1+u^2} + \frac{3(1-u^2)}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{4u+3-3u^2} = 2\int \frac{du}{-3(u^2-\frac{4}{3}u-1)} = \frac{-2}{3}\int \frac{du}{u^2-\frac{4}{3}u-1+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}}$

$= \frac{-2}{3}\int \frac{du}{(u-\frac{2}{3})^2-\frac{13}{9}}$ $\begin{cases} u-\frac{2}{3} = t \\ du = dt \end{cases}$ $= \frac{-2}{3}\int \frac{dt}{t^2-(\frac{\sqrt{13}}{3})^2} = \frac{-2}{3} \times \frac{1}{\frac{2\sqrt{13}}{3}} \ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{13}}{3}}{t+\frac{\sqrt{13}}{3}}\right| + C$

$\Rightarrow I = \frac{-1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{u-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}}{u-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}}\right| + C = \frac{-1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-(\frac{2+\sqrt{13}}{3})}{\tan\frac{x}{2}-(\frac{2-\sqrt{13}}{3})}\right| + C$

---

⑥ $I = \int \ln(x+\sqrt{x})dx = \int \ln((\sqrt{x})^2+\sqrt{x})dx = \int \ln[\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)]dx$

$\ln ab = \ln a + \ln b \longrightarrow I = \underbrace{\int \ln\sqrt{x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \ln(\sqrt{x}+1)dx}_{I_2}$

$I_1 = \int \ln\sqrt{x}\,dx$ $\begin{cases} \sqrt{x} = t \to x = t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \to dx = 2t\,dt \end{cases} \longrightarrow I_1 = \int \ln t\,(2t)dt$ $\begin{cases} \ln t = u \to \frac{dt}{t} = du \\ 2t\,dt = dv \to t^2 = v \end{cases}$

$\to I_1 = \int 2t\ln t\,dt = t^2\ln t - \int t\,dt = t^2\ln t - \frac{t^2}{2} + C_1 \longrightarrow I_1 = x\ln\sqrt{x} - \frac{x}{2} + C_1$

$I_2 = \int \ln(\sqrt{x}+1)dx$ $\begin{cases} \sqrt{x}+1 = z \to \sqrt{x} = z-1 \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dz \to dx = 2(z-1)dz \end{cases} \longrightarrow I_2 = \int 2(z-1)\ln z\,dz$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} 2(z-1)\,dz = dv \rightarrow z^2-2z = v \\ \ln z = u \rightarrow \frac{dz}{z} = du \end{cases}$$

$$\rightarrow I_2 = (z^2-2z)\ln z - \int (z-2)\,dz = (z^2-2z)\ln z - \frac{z^2}{2} + 2z + c_2$$

$$\rightarrow I_2 = \left[(\sqrt{x}+1)^2 - 2(\sqrt{x}+1)\right]\ln(\sqrt{x}+1) - \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2} + 2(\sqrt{x}+1) + C_2 \qquad I = I_1 + I_2$$

---

⑥ $\int x^{4x}(1+\ln x)\,dx$ نکته: $\begin{cases} x^{4x} = e^{\ln x^{4x}} = e^{4x\ln x} \\ e^{\ln f(x)} = f(x) \end{cases}$

$$= \int e^{4x\ln x}(1+\ln x)\,dx \xrightarrow[du=(1+\ln x)dx]{u = x\ln x} = \int e^{4u}\,du = \frac{1}{4}e^{4u} + c = \frac{1}{4}e^{4x\ln x} + c$$

---

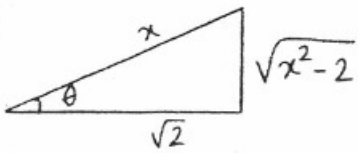
⑦ $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$ $\begin{cases} x = \sqrt{2}\sec\theta \rightarrow dx = \sqrt{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\ x \geq \sqrt{2} \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ x \leq \sqrt{2} \rightarrow \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta \times \sqrt{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{2\sec^2\theta - 2}} = 2\int \frac{\sec^3\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{\underbrace{\sec^2\theta - 1}_{\tan^2\theta}}} = 2\int \sec^3\theta\,d\theta$$

$\int \sec^3\theta\,d\theta$ در جزوه به روش جزء به جزء حل شده است.

$$= \tan\theta\sec\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c = \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}} \times \frac{x}{\sqrt{2}} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-2}\right| \underbrace{- \ln\sqrt{2} + c}_{c_1}$$



---

⑧ $I = \int e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \underbrace{\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{e^{-x}}{x^2}\,dx}_{I_2}$

$$I_1 = \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx \begin{cases} e^{-x} = u \rightarrow -e^{-x}dx = du \\ \frac{dx}{x} = dv \rightarrow \ln x = v \end{cases} \rightarrow I_1 = e^{-x}\ln x + \int \ln x\, e^{-x}\,dx$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$I_2=\int \frac{e^{-x}}{x^2}dx \quad \begin{cases} e^{-x}=u \longrightarrow -e^{-x}dx=du \\ \frac{dx}{x^2}=dv \longrightarrow \frac{-1}{x}=v \end{cases} \longrightarrow I_2=-\frac{e^{-x}}{x}-\underbrace{\int \frac{e^{-x}}{x}dx}_{I_1 \text{ ⊙ ⇐}}$$

$$I_2=-\frac{e^{-x}}{x}-e^{-x}\ln x-\int \ln x\, e^{-x}dx$$

$$I=I_1+I_2=\cancel{e^{-x}\ln x}+\cancel{\int \ln x\, e^{-x}dx}-\frac{e^{-x}}{x}-\cancel{e^{-x}\ln x}-\cancel{\int \ln x\, e^{-x}dx}$$

$$\rightarrow I=\int e^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{e^{-x}}{x}+C$$

---

⑨ $\int \sqrt{\tan x}\,dx \quad \begin{cases} t=\sqrt{\tan x} \\ t^2=\tan x \longrightarrow 2tdt=\sec^2 x\,dx \longrightarrow dx=\frac{2tdt}{1+t^4} \end{cases}$, $\sec^2 x=1+\tan^2 x$

$$I=2\int \frac{t^2dt}{1+t^4}=2\int \frac{t^2dt}{t^4+1+\underbrace{2t^2-2t^2}}=2\int \frac{t^2dt}{\underbrace{(t^2+1)^2-2t^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}}=\int \frac{2t^2dt}{(t^2+1-\sqrt{2}t)(t^2+1+\sqrt{2}t)}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \frac{2t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}=\frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$=\frac{At^3-\sqrt{2}At^2+At+Bt^2-\sqrt{2}Bt+B+Ct^3+\sqrt{2}Ct^2+Ct+Dt^2+\sqrt{2}Dt+D}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \longrightarrow -A=C \longrightarrow A=\frac{-1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=2 \longrightarrow \sqrt{2}C-\cancel{D}+\sqrt{2}C+\cancel{D}=2 \longrightarrow C=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \longrightarrow -C+\sqrt{2}D+C+\sqrt{2}D=0 \longrightarrow D=0 \\ B+D=0 \longrightarrow B=-D \longrightarrow B=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{2t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}=\frac{-\frac{t}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

$$I=\int \frac{\frac{-t}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt+\int \frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2t+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2t-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\rightarrow I = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int \frac{(2t+\sqrt{2})}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}}_{I_2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int \frac{(2t-\sqrt{2})}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt}_{I_3} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}}_{I_4}$$

$$\text{ج } I_1 : \begin{cases} t^2+\sqrt{2}t+1 = u \\ (2t+\sqrt{2})dt = du \end{cases} \rightarrow I_1 = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| + C_1$$

$$\text{ج } I_2 : \int \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}t+1) + C_2$$

$$\text{ج } I_3 : \begin{cases} t^2-\sqrt{2}t+1 = u \\ (2t-\sqrt{2})dt = du \end{cases} \rightarrow I_3 = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + C_3$$

$$\text{ج } I_4 : \int \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}t-1) + C_4$$

$$I = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}t+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}t-1) + C$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan x - \sqrt{2\tan x}+1}{\tan x + \sqrt{2\tan x}+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\tan^{-1}(\sqrt{2\tan x}+1) + \tan^{-1}(\sqrt{2\tan x}-1)\right] + C$$

---

(10) $\int \frac{x^4\,dx}{1+x^{10}}$ $\quad \begin{cases} x^5 = u \longrightarrow 5x^4dx = du \\ x^4dx = \frac{du}{5} \end{cases}$

$$\longrightarrow \frac{1}{5}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{5}\tan^{-1}u + C = \frac{1}{5}\tan^{-1}x^5 + C$$

---

(11) $I = \int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx$ $\quad \begin{cases} \tan^{-1}x = u \longrightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ \frac{dx}{x^2} = dv \longrightarrow \frac{-1}{x} = v \end{cases} \longrightarrow I = \frac{-\tan^{-1}x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$$I = -\frac{\tan^{-1}x}{x} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = -\frac{\tan^{-1}x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C = -\frac{\tan^{-1}x}{x} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| + C$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۳) $I=\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx \xrightarrow{\text{عمل تقسیم}} I=\int\left(x+\frac{x}{x^3-1}\right)dx=\int x\,dx+\underbrace{\int\frac{x\,dx}{x^3-1}}_{I_1}$

حل I_1: $\xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \longrightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=1/3 \end{cases}$

$$I_1=\int\frac{1/3\,dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx}_{I_2}$$

$$I_2=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=\int\frac{x\,dx}{x^2+x+1}-\int\frac{dx}{x^2+x+1/4+3/4}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{x^2+x+1}-\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)+C_1$$

$$I=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

---

(۱۴) $\int\frac{2^x}{8^x-1}\,dx=\int\frac{2^x\,dx}{(2^x)^3-1} \longrightarrow \begin{cases} 2^x=u \\ 2^x\ln 2\,dx=du \end{cases} \longrightarrow I=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{du}{u^3-1} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}}$

$$\frac{1}{u^3-1}=\frac{A}{u-1}+\frac{Bu+C}{u^2+u+1} \quad \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=-2/3 \end{cases} \longrightarrow I=\frac{1}{\ln 2}\int\left(\frac{1/3}{u-1}-\frac{1/3\,u+2/3}{u^2+u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{3\ln 2}\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{3\ln 2}\underbrace{\int\frac{u+2}{u^2+u+1}\,du}_{I_1}$$

حل I_1: $\int\frac{u+2}{u^2+u+1}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{2u+1+3}{u^2+u+1}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{2u+1}{u^2+u+1}\,du+\frac{3}{2}\int\frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$$=\frac{1}{2}\ln|u^2+u+1|+\frac{3}{2}\times\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u+1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C_1$$

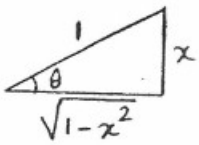
$$I=\frac{1}{3\ln 2}\ln|u-1|-\frac{1}{3\ln 2}\left[\frac{1}{2}\ln|u^2+u+1|+\frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C$$

$$\longrightarrow I=\frac{1}{3\ln 2}\ln|2^x-1|-\frac{1}{6\ln 2}\ln|2^{2x}+2^x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}\ln 2}\tan^{-1}\left(\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۵) $I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\times\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+\underbrace{\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1}$

در I_1: $\begin{cases}x=\sin\theta\\ dx=\cos\theta\,d\theta\end{cases}\longrightarrow I_1=\int\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\int\sin\theta\,d\theta=-\cos\theta+C_1$

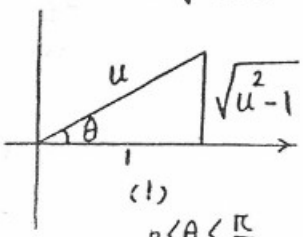


$\longrightarrow I_1=-\sqrt{1-x^2}+C_1\longrightarrow I=\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C$

---

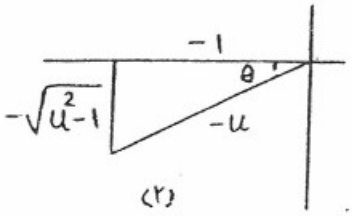
(۱۴) $I=\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}=\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-1}}\quad\begin{cases}x+1=u\\ dx=du\end{cases}\longrightarrow I=\int\frac{du}{u^3\sqrt{u^2-1}}\quad\begin{cases}u=\sec\theta\\ du=\sec\theta\tan\theta\,d\theta\end{cases}$

$I=\int\frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sec^3\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}}=\int\frac{d\theta}{\sec^2\theta}=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}+C$



(۱)

$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$



(۲)

$\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$

$\begin{cases}\text{شکل (۱)}: \theta=\sec^{-1}u\\ \text{شکل (۲)}: \theta=2\pi-\sec^{-1}u\end{cases}$

در هر دو بازه $\begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}\\ \cos\theta=\frac{1}{u}\end{cases}$

$$I=\begin{cases}\frac{1}{2}\sec^{-1}u+\frac{\sqrt{u^2-1}}{2u}\times\frac{1}{u}+C & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}(2\pi-\sec^{-1}u)+\frac{\sqrt{u^2-1}}{2u}\times\frac{1}{u}+C & \pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$I=\begin{cases}\frac{1}{2}\sec^{-1}(x+1)+\frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{2(x+1)^2}+C & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\left[2\pi-\sec^{-1}(x+1)\right]+\frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{2(x+1)^2}+C & \pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

---

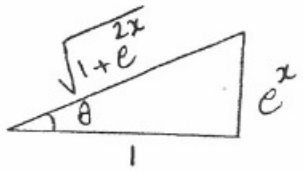
(۱۷) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+(\sinh x+\cosh x)^2}}$ نکته: $\sinh x+\cosh x=e^x$

$\rightarrow I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+(e^x)^2}}\quad\begin{cases}e^x=\tan\theta\\ e^x dx=\sec^2\theta\,d\theta\longrightarrow dx=\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\tan\theta}\end{cases}$

$\rightarrow I=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\tan\theta\sec\theta}=\int\frac{\frac{1}{\cos\theta}d\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\int\csc\theta\,d\theta=-\ln|\csc\theta+\cot\theta|+C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



$$\longrightarrow I = -\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}+1}{e^x}\right| + c$$

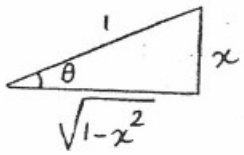
---

(۱۸) $$\int \frac{dx}{x(1-x^2)^{3/2}} \quad \begin{cases} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{cases} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\,(1-\sin^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{d\theta}{\sin\theta\cos^2\theta} \times \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$I = \int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \int \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta} \quad \begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\sin\theta\, d\theta \end{cases} = -\int \frac{du}{(1-u^2)u^2} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}}$$

$$\frac{1}{(1-u^2)u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Cu+D}{1-u^2} = \frac{Au - Au^3 + B - Bu^2 + Cu^3 + Du^2}{(1-u^2)u^2} \longrightarrow \begin{cases} C - A = 0 \to A = C \to C = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \\ -B + D = 0 \to D = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \int \frac{du}{(1-u^2)u^2} = \int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2}\right) du = \frac{-1}{u} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + c = \frac{-1}{\cos\theta} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta-1}\right| + c$$



$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \qquad I = \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}\right| + c$$

---

(۱۹) $$I = \int \frac{x^4+2x^2}{x^3-1}\, dx \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{عمل}} \frac{x^4+2x^2}{x^3-1} = x + \frac{2x^2+x}{x^3-1} = x + \frac{2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}}$$

$$\frac{2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)} = \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+x+1)} \longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \qquad \longrightarrow I = \int \left(x + \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right) dx$$

$$= \int x\,dx + \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}_{I_2}$$

$$\text{در } I_1: \begin{cases} x^2 + x + 1 = u \\ (2x+1)dx = du \end{cases} \longrightarrow \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x^2+x+1| + c_1$$

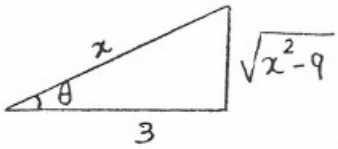
$$\text{در } I_2: \begin{cases} x + \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{cases} \longrightarrow \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_2$$

$$\longrightarrow I = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۰) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx \quad \begin{cases} x = 3\sec\theta \\ dx = 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta \end{cases} \quad = \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}}{9\sec^2\theta}\, 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}d\theta$

$$= \int \frac{(\sec^2\theta - 1)}{\sec\theta}d\theta = \int \sec\theta\, d\theta - \int \cos\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| - \sin\theta + c_1$$



$$= \ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| - \ln 3 - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c_1$$

$$\xrightarrow{-\ln 3 + c_1 = c} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c$$

---

(۲۱) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad \begin{cases} x = t^6 \to dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = t^3,\ \sqrt[3]{x} = t^2 \end{cases} \to I = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt \xrightarrow{\text{عمل تقسیم}}$

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \to I = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + c$$

$$\to I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + c$$

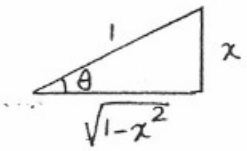
---

(۲۲) $I = \int x\sin^{-1}x\, dx \quad \begin{cases} \sin^{-1}x = u \\ x\,dx = dv \end{cases} \to \begin{cases} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ x^2/2 = v \end{cases} \to I = \frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1}$

$$= \frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c$$

در I_1: $\begin{cases} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{cases} \to I_1 = \int \frac{\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int \sin^2\theta\, d\theta = \int\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$

$\to I_1 = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c_1$



نکته: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\to I_1 = \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c_1$

---

(۲۳) $I = \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x + 4\tan^2 x}dx = \int \frac{(1+\tan^2 x)dx}{\tan^2 x(\tan^2 x + 4)} \quad \begin{cases} \tan x = u \\ (1+\tan^2 x)dx = du \end{cases} \to I = \int \frac{du}{u^2(u^2+4)} \xrightarrow{\text{تجزیه کسر}}$

$$\frac{1}{u^2(u^2+4)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Cu+D}{u^2+4} = \frac{Au^3 + 4Au + Bu^2 + 4B + Cu^3 + Du^2}{u^2(u^2+4)} \to \begin{cases} A = 0 \\ B = 1/4 \\ C = 0 \\ D = -1/4 \end{cases}$$

$$\to I = \int \frac{1/4}{u^2}du - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+4} = \frac{-1}{4u} - \frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + c = \frac{-1}{4\tan x} - \frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) + c$$

حسن پور

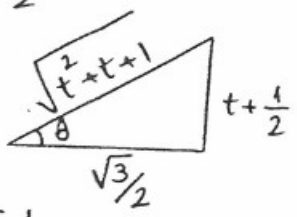
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۴) $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}\times\frac{x^2}{x^2}=\int\frac{x^2dx}{x^3\sqrt{1+x^3+(x^3)^2}}$ $\begin{cases}x^3=u\\3x^2dx=du\to x^2dx=\end{cases}$

$\to I=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u\sqrt{1+u+u^2}}$ $\begin{cases}u=\frac{1}{t}\\du=\frac{-dt}{t^2}\end{cases}$ $\to I=\frac{-1}{3}\int\frac{dt}{t^2\times\frac{1}{t}\times\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}=\frac{-1}{3}\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{t^2+t+1}{t^2}}}$

$=\frac{-1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$ $\begin{cases}t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\\dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta\end{cases}$ $\to I=\frac{-1}{3}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}}=\frac{-1}{3}\int\sec\theta\,d\theta$

$=\frac{-1}{3}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1$



$\begin{cases}\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{\sqrt{3}/2}\\\tan\theta=\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}\end{cases}$

$\to I=\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|+C_1$ $\to I=\frac{-1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}+C_1$

$\to I=\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{1}{u}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}\right|+C=\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^3}+1}\right|+C$

---

(۲۷) $I=\int\frac{dx}{x(x^n-1)}$ $\begin{cases}x^n-1=t\to x^n=t+1\\nx^{n-1}dx=dt\to\frac{nx^n}{x}dx=dt\to\frac{dx}{x}=\frac{dt}{n(t+1)}\end{cases}$

$\to I=\int\frac{dt}{nt(t+1)}=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{n}\left(\ln t-\ln(t+1)\right)+C=\frac{1}{n}\ln\frac{t}{t+1}+C=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x^n-1}{x^n}\right)+$

---

(۲۸) $I=\int\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2dx=\int\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}dx\overset{\text{تقسیم}}{=}\int\left(1-\frac{4x}{x^2+2x+1}\right)dx=\int dx-2\underbrace{\int\frac{2x\,dx}{x^2+2x+1}}_{I_1}$

حل I_1: $\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx-\int\frac{2dx}{(x+1)^2}=\ln|x^2+2x+1|+\frac{2}{x+1}+C_1$

$\to I=x-2\ln|x^2+2x+1|-\frac{4}{x+1}+C$

---

(۲۹) $\int\frac{\cos^4x\,dx}{\sin^2x}=\int\frac{(\cos^2x)^2}{\sin^2x}dx=\int\frac{(1-\sin^2x)^2}{\sin^2x}dx=\int\frac{1-2\sin^2x+\sin^4x}{\sin^2x}dx$

$=\int\csc^2x\,dx-2\int dx+\int\sin^2x\,dx=-\cot x-2x+\frac{1}{2}\int(1-\cos2x)dx=-\left(\cot x+\frac{\sin2x}{4}+\frac{3}{2}x\right)+C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: در مواردی که با انتگرال هایی به صورت $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ روبه رو می شویم که m و n اعدادی گویا هستند $m+n$ زوج است

(۳۰) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x \cos x}} = \int \sin^{-11/3} x \cos^{-1/3} x\,dx$$

$$m+n = \frac{-11}{3} - \frac{1}{3} = -4 \text{ زوج} \rightarrow \begin{cases} t = \tan x \rightarrow \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

از تغییر متغیر $\tan x = t$ استفاده می نماییم.

$$\xrightarrow[\text{است } \tan x]{\text{هدف ایجاد}} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{11} x \cos x \cos^{11} x}{\cos^{11} x}}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt[3]{\tan^{11} x}} = \int \frac{(1+t^2)\,dt}{\sqrt[3]{t^{11}}} = \int \left(t^{-11/3} + t^{-5/3}\right) dt$$

$$= -\frac{3}{8} t^{-8/3} - \frac{3}{2} t^{-2/3} + C = \frac{-3}{8\sqrt[3]{\tan^8 x}} - \frac{3}{2\sqrt[3]{\tan^2 x}} + C$$

---

(۳۲) $$I = \int \frac{\tan x}{\sqrt{\sec x}}\,dx = \int \frac{\tan x}{\sqrt{\sec x}} \times \frac{\sec x}{\sec x}\,dx = \int \frac{\tan x \sec x}{(\sec x)^{3/2}}\,dx \quad \begin{cases} \sec x = t \\ \sec x \tan x\,dx = dt \end{cases}$$

$$\rightarrow I = \int \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{-2}{\sqrt{t}} + C = \frac{-2}{\sqrt{\sec x}} + C$$

---

(۳۱) $$I = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx = \int \frac{\sin x \sin^2 x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx = \int \frac{\sin x (1-\cos^2 x)}{(\cos x)^{1/3}}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{(\cos x)^{1/3}} - \int \sin x \cos^{5/3} x\,dx \quad \begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x\,dx = du \end{cases} \rightarrow I = -\int \frac{du}{u^{1/3}} + \int u^{5/3}\,du$$

$$\rightarrow I = \frac{-u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{u^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{-3}{2}\sqrt[3]{u^2} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{u^8} + C = \frac{-3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{\cos^8 x} + C$$

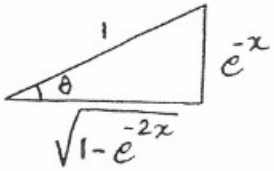
---

(۳۴) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} \quad \begin{cases} e^{-x} = \sin\theta \\ -e^{-x}\,dx = \cos\theta\,d\theta \rightarrow dx = \dfrac{-\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow I = -\int \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta = -\int \csc\theta\,d\theta = \ln\left|\csc\theta + \cot\theta\right| + C$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



$$\begin{cases} \csc\theta = \dfrac{1}{e^{-x}} \\ \cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-e^{-2x}}}{e^{-x}} \end{cases} \longrightarrow I = \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-e^{-2x}}}{e^{-x}}\right| + c$$

---

b) انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

① $$I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\tan^4 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4 x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} \qquad \int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$$

نکته: $$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \end{cases} \longrightarrow I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx}{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}=I$$

$$\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2} \longrightarrow 1=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x} \longrightarrow \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}+\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=1 \xrightarrow{\int_0^{\pi/2}}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int_0^{\pi/2}1\,dx \Rightarrow I+I=\frac{\pi}{2} \Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

---

② $$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=I_1+I_2$$

$$I_2=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \begin{cases} x=\pi-t \\ dx=-dt \end{cases} \longrightarrow I_2=-\int_{\pi/2}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt \longrightarrow I=I_1+I_2=\cancel{\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx}+\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos^2 t}-\cancel{\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt}$$

$$\longrightarrow I=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos^2 t} \begin{cases} \cos t=u \\ -\sin t\,dt=du \\ t=0\rightarrow u=1 \\ t=\frac{\pi}{2}\rightarrow u=0 \end{cases} \longrightarrow I=-\pi\int_1^0\frac{du}{1+u^2}=\pi\int_0^1\frac{du}{1+u^2}$$

$$\longrightarrow I=\pi\tan^{-1}u\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin 2x\cos 2x\,dx}{(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2 \underbrace{-2\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^2 x\cos^2 x}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin 2x\cos 2x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{-2\sin 2x\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,dx \xrightarrow{\sin^2 x\cos^2 x=(\sin x\cos x)^2=\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2}$$

$$\begin{cases} 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = u \\ \frac{-2\times 2}{2}\sin 2x\cos 2x\,dx = du \end{cases} \rightarrow = -\int_0^{\pi/4} \frac{du}{u} = -\ln|u|+c = -\ln\left|1-2\sin^2 x\cos^2 x\right|\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -\ln \tfrac{1}{2} = \ln 2$$

---

۴) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx \rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{1/2}\,dx}{(\sin x)^{1/2}+(\cos x)^{1/2}} \qquad \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$\rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^{1/2}dx}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^{1/2}+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^{1/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{1/2}\,dx}{(\cos x)^{1/2}+(\sin x)^{1/2}}$$

نتیجه: $$\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{1/2}+(\cos x)^{1/2}}{(\sin x)^{1/2}+(\cos x)^{1/2}}\,dx = I+I = \frac{\pi}{2} \rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

---

۵) $$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\left(\sqrt{e^x}\right)^2-1}\,dx$$

$$\begin{cases} \sqrt{e^x} = e^{x/2} = \sec\theta \longrightarrow \frac{1}{2}e^{x/2}dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta \rightarrow dx = \frac{2\cancel{\sec\theta}\tan\theta\,d\theta}{\cancel{\sec\theta}} \rightarrow dx = 2\tan\theta\,d \\ x=0 \longrightarrow \sec\theta = 1 \longrightarrow \theta = 0 \\ x=\ln 2 \rightarrow \sec\theta = \sqrt{e^{\ln 2}} = \sqrt{2} \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2\theta-1}\,\tan\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/4} \tan^2\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/4} (\tan^2\theta+1-1)\,d\theta$$

$$= (2\tan\theta-2\theta)\Big|_0^{\pi/4} = 2-\frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

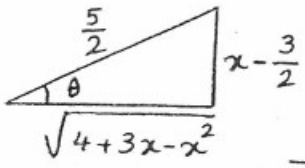
d) انتگرال های نامعین زیر را بیابید.

① $$I=\int\frac{5x+2}{\sqrt{4+3x-x^2}}dx=\underbrace{\int\frac{5x\,dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{3}{2})^2}}}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{2\,dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{3}{2})^2}}}_{I_2}$$

$$4+3x-x^2=-(x^2-3x-4+\frac{9}{4}-\frac{9}{4})=-\left[(x-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}\right]=\frac{25}{4}-(x-\frac{3}{2})^2$$

حل I_1: $\begin{cases}x-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\sin\theta\\ dx=\frac{5}{2}\cos\theta\,d\theta\end{cases}\rightarrow I_1=\frac{25}{2}\int\frac{(\frac{5}{2}\sin\theta+\frac{3}{2})\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\frac{25}{4}(1-\sin^2\theta)}}=5\int(\frac{5}{2}\sin\theta+\frac{3}{2})d\theta$

$$=-\frac{25}{2}\cos\theta+\frac{15}{2}\theta+c$$



$$I_1=\frac{-25}{2}\times\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{\frac{5}{2}}+\frac{15}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}\right)+C_1$$

$$\rightarrow I_1=-5\sqrt{4+3x-x^2}+\frac{15}{2}\left(\frac{2x-3}{5}\right)+C_1$$

$$I_2=2\int\frac{\frac{5}{2}\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\frac{25}{4}(1-\sin^2\theta)}}=\frac{4}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{2}\int d\theta=2\theta+C_2=2\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{5}\right)+C_2$$

$$\rightarrow I=-5\sqrt{4+3x-x^2}+\frac{19}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{5}\right)+C$$

---

② $$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}\,(1+\ln x)}\quad\begin{cases}\ln x=u\\ \frac{dx}{x}=du\end{cases}\rightarrow I=\int\frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u)}=\int\frac{du}{\sqrt{u}\,(1+(\sqrt{u})^2)}\quad\begin{cases}\sqrt{u}=t\\ \frac{du}{2\sqrt{u}}=dt\end{cases}$$

$$\rightarrow I=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\tan^{-1}t+c=2\tan^{-1}\sqrt{u}+c=2\tan^{-1}\sqrt{\ln x}+c$$

---

④ $$I=\int e^{\sin^{-1}x}dx\quad\begin{cases}\sin^{-1}x=t\rightarrow x=\sin t\\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt\rightarrow dx=\sqrt{1-\sin^2t}\,dt=\cos t\,dt\end{cases}\rightarrow I=\int e^t\cos t\,dt$$

$$\begin{cases}e^t=u\\ \cos t\,dt=dv\end{cases}\rightarrow\begin{cases}e^t dt=du\\ \sin t=v\end{cases}\rightarrow I=e^t\sin t-\int\sin t\,e^t dt\quad\begin{cases}e^t=u\\ \sin t\,dt=dv\end{cases}\rightarrow\begin{cases}e^t dt=du\\ -\cos t=v\end{cases}$$

$$\rightarrow I=e^t\sin t-\Big(-\cos t\,e^t+\underbrace{\int\cos t\,e^t dt}_{I}\Big)\rightarrow 2I=2\int e^t\cos t\,dt=e^t\sin t+e^t\cos t$$

$$\rightarrow I=\frac{e^{\sin^{-1}x}}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+c$$

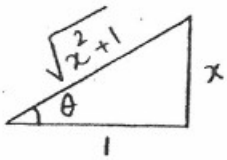
---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $I=\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$ $\begin{cases} x=\tan\theta \\ dx=\sec^2\theta d\theta \end{cases} \rightarrow I=\int \frac{\tan^2\theta \sec^2\theta d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}=\int \frac{\tan^2\theta \sec^2\theta d\theta}{\sec^4\theta}=\int \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$

$$=\int \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta}{\frac{1}{\cos^2\theta}}=\int \sin^2\theta d\theta=\int\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{1}{2}\int d\theta-\frac{1}{2}\int \cos 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta+c$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+c$$



$$\rightarrow I=\frac{1}{2}\tan^{-1}x-\frac{x}{2(x^2+1)}+c$$

---

⑧ $I=\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$ $\begin{cases} \ln x=u \\ \frac{xdx}{(1+x^2)^2}=dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x}=du \\ \frac{-1}{2(1+x^2)}=v \end{cases} \rightarrow I=\frac{-1}{2}\ln x\left[\frac{1}{1+x^2}\right]+\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x(1+x^2)}}_{I_1}$

I_1: $\xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} \frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2} \rightarrow I_1=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\ln x-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+c_1$

$$\rightarrow I=\frac{-1}{2}\ln x\left[\frac{1}{1+x^2}\right]+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$$

---

⑨ $I=\int \cos^2(\sqrt{x})dx$ $\begin{cases} \sqrt{x}=t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt \rightarrow dx=2tdt \end{cases} \rightarrow I=2\int t\cos^2 t dt=\cancel{2}\int \frac{t(1+\cos 2t)}{\cancel{2}}dt$

$\rightarrow I=\int tdt+\underbrace{\int t\cos 2t\, dt}_{I_1}$

$u=t$	$\cos 2t\,dt=dv$
1	$+\ \frac{1}{2}\sin 2t$
0	$-\ \frac{-1}{4}\cos 2t$

$\rightarrow I_1=\frac{t}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t$

$$\rightarrow I=\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+c=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+c$$

---

⑩ $I=\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ $\begin{cases} xe^x=u \\ \frac{dx}{(1+x)^2}=dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1+x)e^x=du \\ \frac{-1}{1+x}=v \end{cases} \rightarrow I=-\frac{xe^x}{1+x}+\int e^x dx$

$$\rightarrow I=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+c=e^x\left(\frac{-x}{1+x}+1\right)+c=\frac{e^x}{1+x}+c$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $\int \frac{\operatorname{Arcsin} e^x}{e^x}dx \quad \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \to dx = \frac{dt}{t} \end{cases} \to = \int \frac{\operatorname{Arcsin} t}{t^2}dt \quad \begin{cases} \operatorname{Arcsin} t = u \to t = \sin u \\ dt = \cos u\, du \end{cases}$

$$= \int \frac{u\cos u}{\sin^2 u}du$$

u	$\frac{\cos u}{\sin^2 u}$
1	$+$ $\frac{-1}{\sin u}$
0	$-$ $-\ln\lvert\csc u - \cot u\rvert$

$$= -\frac{u}{\sin u} + \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + c$$

$$= -\frac{\sin^{-1} t}{t} + \ln\left|\frac{1}{t} - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right| + c$$

$$\begin{cases} \csc u = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{t} \\ \cot u = \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \end{cases} \longrightarrow = -\frac{\sin^{-1} e^x}{e^x} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\right| + c$$

---

e) اگر داشته باشیم $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ مطلوب است مقدار:

الف) $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx \quad \begin{cases} x^2 = t \to x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \infty \to t = \infty \\ x = 0 \to t = 0 \end{cases}$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t\, dt}{t} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

ب) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} \sin^2 x = u \\ \frac{dx}{x^2} = dv \end{cases} \to \begin{cases} 2\sin x\cos x\, dx = du \to \sin 2x\, dx = du \\ \frac{-1}{x} = v \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{-\sin^2 x}{x}\Big|_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}dx}_{I} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

حل I: $\begin{cases} 2x = t \\ dx = \frac{dt}{2} \end{cases} \to I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t/2}\frac{dt}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{\sin^2 x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin^2 x \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

c) همگرایی یا واگرایی انتگرال های مجازی زیر را بررسی کنید.

۴) $\int_1^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx = \int_1^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{e^{x}}$ $\qquad \ln x < x \longrightarrow \frac{\ln x}{e^{x}} < \frac{x}{e^{x}}$

$\xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{e^{x}} = \lim_{a\to\infty}\int_1^{a} e^{-x}x\,dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=} \lim_{a\to\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_1^{a} = 0-0-(-e^{-1}-e^{-1}) = \frac{2}{e} \to$ همگرا

* پس $\int_1^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx$ طبق آزمون مقایسه، همگراست. $\qquad$ حل حد بالا: $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}} \overset{hop}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}} = 0$

---

۵) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{0} xx^2e^{-x^2}dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xx^2e^{-x^2}dx$

$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)\right)\Big|_a^{0} + \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)\right)\Big|_0^{b} = \frac{-1}{2} - 0 + \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow$ همگرا

$I = \int xx^2e^{-x^2}dx \begin{cases} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{cases} \longrightarrow I = \frac{1}{2}\int te^{-t}dt \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=} \frac{-1}{2}e^{-t}(t+1) = \frac{-1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)$

رفع ابهام: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^{x^2}} \overset{hop}{=\!=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}e^{x^2}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^{x^2}} \overset{hop}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}e^{x^2}} = 0$

---

۶) $\int_2^{+\infty}\frac{5dx}{(2-x)^2} = \lim_{a\to2}\int_a^{\infty}\frac{5\,dx}{(2-x)^2} = \lim_{a\to2}\frac{5}{2-x}\Big|_a^{\infty} = \infty$ $\qquad$ واگراست

$I = \int\frac{5dx}{(2-x)^2} \begin{cases} 2-x = u \\ -dx = du \end{cases} \to I = \int\frac{-5du}{u^2} = \frac{5}{u} + C = \frac{5}{2-x} + C$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{x}+e^{-x}}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{\sin x\,dx}{e^{x}+e^{-x}}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{\sin x\,dx}{e^{x}+e^{-x}}$

$\displaystyle\frac{\sin x}{e^{x}+e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}=\frac{e^{x}\sin x}{e^{2x}+1}\xrightarrow[\text{چون } -1\leq\sin x\leq 1]{\text{آزمون مقایسه}}\frac{e^{x}\sin x}{e^{2x}+1}<\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$ A

اثبات همگرایی A : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}=\lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}e^{x}\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\tan^{-1}e^{x}\Big|_{0}^{b}=\frac{\pi}{4}-0+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\longrightarrow$ همگرا

* پس $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{e^{x}+e^{-x}}$ طبق آزمون مقایسه همگراست.

---

۹) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{1}^{a}\frac{\sin x}{x}dx\quad\begin{cases}\sin x\,dx=dv\\ \frac{1}{x}=u\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}-\cos x=v\\ \frac{-dx}{x^{2}}=du\end{cases}$

$\displaystyle=\lim_{a\to+\infty}\left[\left(\frac{-\cos x}{x}\right)\Big|_{1}^{a}-\int_{1}^{a}\frac{\cos x\,dx}{x^{2}}\right]=\underbrace{\cos 1}_{\text{عدد ثابت}}-\underbrace{\int_{1}^{a}\frac{\cos x\,dx}{x^{2}}}_{\text{همگرا}}$

* : $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^{2}}$ همگراست چون $\frac{\cos x}{x^{2}}\leq\frac{1}{x^{2}}$ ، $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}}$ همگراست (طبق آزمون مقایسه) پس $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x}$ همگراست.

---

۷) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\underbrace{\int_{0}^{1/2}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^{2}}}}_{I_2}+\underbrace{\int_{1/2}^{1}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^{2}}}}_{I_1}\qquad I_1=\int_{1/2}^{1}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\lim_{b\to 1}\int_{1/2}^{b}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^{2}}}\xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}}$

$\displaystyle\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^{2}}}<\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}$ همگرا ، $\displaystyle\lim_{b\to 1}\int_{1/2}^{b}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\lim_{b\to 1}\left(-\sqrt{1-x^{2}}\right)\Big|_{1/2}^{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\longrightarrow$ همگرا

$\displaystyle I_2=\int_{0}^{1/2}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^{2}}}\quad\begin{cases}x=1/t\\ dx=\frac{-dt}{t^{2}}\end{cases}\quad\begin{cases}x=0\to t=\infty\\ x=1/2\to t=2\end{cases}\longrightarrow I_2=\int_{\infty}^{2}\frac{-\ln t}{\sqrt{1-(1/t)^{2}}}\left(\frac{-dt}{t^{2}}\right)=-\int_{2}^{\infty}\frac{\ln t\,dt}{t\sqrt{t^{2}-1}}$

$\xrightarrow[\text{با}]{\text{مقایسه}}\displaystyle\int_{2}^{\infty}\frac{-\ln t}{t^{2}}dt\quad\begin{cases}\ln t=u\to t=e^{u}\\ \frac{dt}{t}=du\end{cases}\longrightarrow-\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{u}{e^{u}}du=-\int_{\ln 2}^{\infty}u\,e^{-u}du\xlongequal{\text{جزء به جزء}}$ همگرا

$I=I_1+I_2=$ همگرا $+$ همگرا $=$ همگرا

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

d) مطلوب است محاسبه‌ی حد زیر با استفاده از بسط سری توانی

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}} \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{x-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}}{x^2} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

---

e) مقدار انتگرال روبه‌رو را با استفاده از سری توانی بیان کنید.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sin x=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$\to \frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$$

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)dx=\lim_{a\to 0^+}\left(x-\frac{x^3}{(3)3!}+\frac{x^5}{(5)5!}-\frac{x^6}{(7)7!}+\cdots\right)\Bigg|_a^1$$

$$\longrightarrow \int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{(5)5!}-\frac{1}{(7)7!}+\cdots$$

---

f) بسط مک لورن تابع $f(x)=\int_0^x \sin(t^3)\,dt$ را بنویسید.

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin t^3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (t^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin t^3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{6n+3}}{(2n+1)!}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین انتگرال}} \int_0^x \sin t^3\,dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{6n+3}}{(2n+1)!}\,dt$$

$$\longrightarrow \int_0^x \sin(t^3)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+4}}{(2n+1)!\,(6n+4)}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

h) تابع $f(x)$ را که به صورت زیر تعریف شده است را به شکل یک سری توانی نوشته و جمله عمومی آن را تعیین کنید و سپس شعاع همگرایی آن را بدست آورید.

$$f(x)=\int_0^x \frac{1-\cos^2 t}{t}\,dt$$

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}\ ,\quad \cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\ \longrightarrow\ \cos 2t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2t)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2t)^{2n}}{(2n)!}\right]\xlongequal[0!=1\ \text{می‌نویسیم}]{\text{جمله اول سری را}}\frac{1}{2}\left[1+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} t^{2n}}{(2n)!}\right]$$

ابتکار

$$\longrightarrow\ \cos^2 t=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} t^{2n}}{(2n)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\longrightarrow\ 1-\cos^2 t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} t^{2n}}{(2n)!}\ \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{به } t}\ \frac{1-\cos^2 t}{t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} t^{2n-1}}{(2n)!}\ \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}}$$

$$\int_0^x \frac{1-\cos^2 t}{t}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} t^{2n}}{(2n)!\,2n}\Bigg|_0^x\ \longrightarrow\ \int_0^x \frac{1-\cos^2 t}{t}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)(2n)!}$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}}\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+2)!}}{\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{2n(2n)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2^{2n}\times 2\times x^{2n}\times x^2}{(2n+2)(2n+2)(2n+1)\,2n!}}{\dfrac{2^{2n}\times 2^{-1}\times x^{2n}}{2n(2n)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n^2}=0$$

به ازای هر عدد حقیقی x همگراست. $R=\infty$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

g) اگر $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ باشد، با استفاده از آن بسط مک لورن توابع زیر را بدست آورید.

① $\frac{1}{(1-x)^3}$ $\quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2} \quad \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

* با تغییری در جمله ای نیز این مسأله قابل حل است.

پس $\Longrightarrow \frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}$

---

② $Ln(1+x)$ $\quad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(x)^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$$

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\int_0^x\left(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n\right)dx$$

$$\longrightarrow \ln|x+1|=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \longrightarrow \ln|x+1|=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad |x|<1$$

---

③ $\arctan x$ $\quad \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{انتگرال}}$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \longrightarrow \tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ز) بسط مک لورن توابع زیر را بنویسید.

c) $h(x)=x\tan^{-1}x$, $|x|<1$ $\qquad f(x)=\tan^{-1}x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \xrightarrow[\text{قرار می دهیم } -x^2]{\text{به جای } x \text{ ها}} \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می گیریم}}$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{\text{طرفین در } x \text{ ضرب}}$$

$$x\tan^{-1}x=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}-\frac{x^8}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1} \longrightarrow x\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}(-1)^n$$

سن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

k) با فرض $p>1$، همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p+5}$ $\quad n^p+5 > n^p \rightarrow \frac{1}{n^p+5} < \frac{1}{n^p} \xrightarrow{\times \ln n} \frac{\ln n}{n^p+5} < \frac{\ln n}{n^p} \xrightarrow{\text{به ازای } p>1}$ همگراست

$$\xrightarrow[\text{مقایسه‌ای}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\ln n}{n^p+5}}{\frac{\ln n}{n^p}} \right| = 1 > 0 \longrightarrow \text{پس همگراست}$$

---

a) حد دنباله‌های زیر را بیابید.

۱) $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = e^0 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2/n^3}{\frac{n^2-1}{n^2}}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{(n^2-1)n^3}}{\frac{-1}{n^2}} = 0$$

---

۲) $b_n = \sqrt[n]{n^k}$ (k ثابت) $\rightarrow b_n = n^{\frac{k}{n}} \rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\frac{k}{n}} = \infty^0$ مبهم

رفع ابهام: $\lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\frac{k}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{\frac{k}{n}\ln n}^{L}} = e^0 = 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n}\ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{k\ln n}{n} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0$$

---

۳) $C_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم $\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - \frac{1}{e^n}}{e^n + \frac{1}{e^n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2e^{2n}}{2e^{2n}} = 1$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $d_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \longrightarrow A = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}} \rightarrow \ln A = \frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n} \Rightarrow \ln A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \dots + \ln\frac{n}{n}\right]$

$$\ln A = \lim \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{i}{n} = \int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x - x\right)\Big|_0^1 = -1 \longrightarrow \ln A = -1 \longrightarrow A = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

استفاده از رابطه‌ی استرلینگ روش راحت‌تر نقش مهم : $n! = \sqrt{2n\pi}\, e^{-n} n^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n\pi}\,e^{-n}n^n\right)^{1/n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{2n\pi}\,e^{-1}\cancel{n}}{\cancel{n}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n\pi} = 1$$

---

۵) $e_n = \frac{n!}{n^n} \xrightarrow[\text{استرلینگ}]{\text{رابطه‌ی}} \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\pi}\,e^{-n}\cancel{n^n}}{\cancel{n^n}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\pi}}{e^n} \xrightarrow[\text{است}]{\text{مخرج قویتر از صورت}} 0$$

---

۶) $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{L}} = e^{\infty} = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty\times 0 \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \overset{hop}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1/n^2}{1+1/n}}{\frac{-2}{n^3}} = \infty \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$$

روش دوم $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty$

---

۷) $g_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}^{L}}$

$$\lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{n}{n+1}}}{\frac{-1}{n^2}} = -1$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} e^L = e^{-1} = \frac{1}{e} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

b) همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(1+\ln^4 n)}$ $\quad f(x)=\frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)}$ در بازه‌ی $[1,+\infty)$ نزولی، مثبت و پیوسته است

$$\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x\,dx}{x(1+(\ln x)^4)} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\tan^{-1}(\ln^2 x)\Big|_1^b = \frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4} \longrightarrow \text{همگرا}$$

حل انتگرال بالا: $\begin{cases}(\ln x)^2=t\\ \frac{2\ln x\,dx}{x}=dt\end{cases} \longrightarrow \int\frac{\ln x\,dx}{x(1+\ln^4 x)}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}t+C=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\ln^2 x)+C$

---

② $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\infty$ یا $\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$ اگرا

---

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \cot^{-1} n$ $\quad f(x)=\cot^{-1}x$ در بازه‌ی $[1,+\infty)$ نزولی، پیوسته و مثبت است

$$\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \cot^{-1}x\,dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=\!=} \begin{cases}\cot^{-1}x=u\\ dx=dv\end{cases} \xrightarrow[\text{۱۲}]{\text{جزء به جزء}}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(x\cot^{-1}x+\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right)\Big|_1^b=\infty \longrightarrow \text{واگراست}$$

---

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^5-2n+4}}{n^4-2}$ $\quad a_n=\frac{\sqrt{n^5-2n+4}}{n^4-2}$ $\quad b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$ ← همگراست $\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\sqrt{n^5-2n+4}}{n^4-2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}\right|=1>0 \longrightarrow$ همگراست

---

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ $\quad f(x)=\frac{\ln x}{x^2} \longrightarrow f'(x)<0$ در بازه $[1,+\infty)$ مثبت، پیوسته و نزولی است

$$\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-e^{\ln x^{-1}}(\ln x+1)\right]_1^b \overset{e^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim_{b\to+\infty}-\left(\frac{\ln x+1}{x}\right)\Big|_1^b=1 \longrightarrow \text{همگراست}$$

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx \begin{cases}\ln x=u\to x=e^u\\ \frac{dx}{x}=du\end{cases} =\int\frac{u\,du}{e^u}=\int e^{-u}u\,du$$

u	e^{-u}
1	$-e^{-u}$
0	e^{-u}

$$=-ue^{-u}-e^{-u}+C$$

$$=-e^{-\ln x}(\ln x+1)+C$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1} n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \tan^{-1} n = \frac{\pi}{2} \neq 0 \longrightarrow$ واگراست

---

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \longrightarrow$ شرط لازم برای همگرایی را دارد

$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\xrightarrow[\text{حدی}]{\text{آزمون مقایسه}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 > 0 \longrightarrow$ سری مورد نظر واگراست

$\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow$ واگرا

---

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ $\quad \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)(n+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \longrightarrow$ همگراست

---

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$ $\quad a_n = \frac{\arctan n}{n}$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$ واگرا

$\xrightarrow[\text{حدی}]{\text{آزمون مقایسه}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\arctan n}{n}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{\pi}{2} > 0 \longrightarrow$ پس سری واگراست

---

⑩ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ $\quad \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 0 \longrightarrow$ پس همگراست

حسن پور

⑪ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $\quad f'(x) < 0$ در بازه‌ی $[2,+\infty)$ پیوسته، نزولی و مثبت است

$\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln\ln x\Big|_2^b = \infty \longrightarrow$ واگراست

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ if: $p>1$ همگراست

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۲) $\sum_{n=1}^{\infty} Ct^n(1)$ روش اول: $Ct(1) \cong 57.3 > 1$ نکته: $\sum_{n=1}^{\infty} (r^n)$ سری هندسی است $r > 1$

$\lim_{n\to\infty} (r^n) = \lim_{n\to\infty} (57.3)^n = \infty \longrightarrow$ واگراست

روش دوم: $\xrightarrow{\text{آزمون ریشه}}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{Ct^n(1)} = Ct(1) > 1 \longrightarrow$ سری واگراست

---

(۱۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n(1)$ $\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tan^n(1)} = \tan(1) \cong 0.02 < 1 \longrightarrow$ همگراست

---

(۱۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$ $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} \neq 0 \longrightarrow$ واگراست

---

(۱۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$ $b_n = \frac{1}{n}$ واگرا

$\xrightarrow[\text{حدی}]{\text{آزمون مقایسه}}$ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}}{\frac{1}{n}} \right| = 1 > 0 \longrightarrow$ واگراست

---

(۱۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$ $\xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}}$ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\pi^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{\pi^n n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^n}{\pi n^n} \right| = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$= \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{\pi} \simeq \frac{2.7}{3.14} < 1 \longrightarrow$ سری مطلقاً همگرا $\longrightarrow$ سری همگراست

---

(۱۷) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ $a_n = \frac{\ln n}{n}$ نزولی با جملات مثبت $\xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \longrightarrow$ سری همگراست

$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}}$ $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{\ln x\, dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_2^b = \infty \longrightarrow$ واگرا

* پس سری همگرای مشروط است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۹) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sinh \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} n \sinh\frac{1}{n} = \infty \times 0$ بهم $\to \lim_{n\to\infty} \frac{\sinh 1/n}{\frac{1}{n}} \cong 1 \neq 0 \longrightarrow$ واگراست

---

(۲۰) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!}$ $\xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1+(1+n)!}{(n+2)!}}{\frac{1+n!}{(n+1)!}} \right| \cong \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)n!}{(n+2)(n+1)!}}{\frac{n!}{(n+1)!}} \right| = 1 \longrightarrow$ بی‌نتیجه

$\frac{1+n!}{(1+n)!} = \frac{1}{(1+n)!} + \frac{n!}{(1+n)!} = \underbrace{\frac{1}{(1+n)!}}_{\text{همگرا}} + \underbrace{\frac{1}{1+n}}_{\text{واگرا}}$ $\quad$ واگرا + همگرا = واگرا $\longrightarrow$ پس سری مورد نظر واگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ اثبات همگرایی : $\xrightarrow[\text{حدی با } \frac{1}{n!}]{\text{آزمون مقایسه}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)n!} \right| = 0 \longrightarrow$ همگرا

همگرا

---

(۲۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1+n^2}$ $\quad -1 \leq \sin n \leq 1 \longrightarrow \frac{-1}{1+n^2} \leq \frac{\sin n}{1+n^2} \leq \underbrace{\frac{1}{1+n^2}}_{\text{همگرا } (P=2 \text{ ، سری } P)}$ $\xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1+n^2}$ همگراست

---

(۲۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ $\xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \right| = 2 \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \right| = \frac{2}{e} \simeq \frac{2}{2.7} < 1 \longrightarrow$ همگراست

---

(۲۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n = 0^{\infty} = 0 \longrightarrow$ شرط لازم برای همگرایی را دارد

$\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \arctan\frac{1}{n} = 0 \longrightarrow$ همگراست

حسن پور

---

(۲۷) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ پیوسته، نزولی و مثبت است $\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}}$

$\lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{-1}{2(\ln x)^2} \right|_2^b = 0 + \frac{1}{2(\ln 2)^2} =$ عدد $\longrightarrow$ سری همگراست

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۳) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$ $\quad \lim_{n\to\infty} e^{-\sqrt[3]{n}} = 0 \longrightarrow$ شرط لازم برای همگرایی را دارد $\quad f(x)=e^{-\sqrt[3]{x}} \quad f'(x)<0$

در بازه‌ی $[1,+\infty)$ پیوسته، نزولی و مثبت است.

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} -\left(3\sqrt[3]{x^2}\,e^{-\sqrt[3]{x}} + 6\sqrt[3]{x}\,e^{-\sqrt[3]{x}} + 6e^{-\sqrt[3]{x}}\right)\Big|_1^b = 0 \longrightarrow \text{همگراست}$$

حل انتگرال بالا: $I=\int e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx \begin{cases} \sqrt[3]{x}=t \longrightarrow x=t^3 \\ dx = 3t^2dt \end{cases} \longrightarrow I=\int 3t^2 e^{-t}\,dt$

$3t^2$	$e^{-t}dt$
$6t$	$-e^{-t}$
6	e^{-t}
0	$-e^{-t}$

$$\longrightarrow I = -3t^2e^{-t} - 6te^{-t} - 6e^{-t} \longrightarrow I = -3\sqrt[3]{x^2}\,e^{-\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x}\,e^{-\sqrt[3]{x}} - 6e^{-\sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2}\,e^{-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} x^{2/3}e^{-\sqrt[3]{x}} = \infty\times 0 \text{ مبهم} \longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}}{e^{\sqrt[3]{x}}} \overset{hop}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,e^{\sqrt[3]{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\,\frac{x^{1/3}}{e^{\sqrt[3]{x}}} \overset{hop}{=\!=} \lim_{x\to\infty} 2\,\frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,e^{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^{\sqrt[3]{x}}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\,e^{-\sqrt[3]{x}} \overset{\text{همانند بالا}}{=\!=\!=} 0$$

---

(۲۴) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{ne^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln n}{ne^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{e}<1 \longrightarrow$ همگراست

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/n} = 0^0 \text{ مبهم} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\ln n}{n}\right)}^{L}} \qquad \lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\ln n}{n}\right)}{n} \overset{hop}{=\!=}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\ln n}{n^2}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\ln n}{n\ln n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} e^{L} = e^0 = 1$$

---

(۲۵) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{200e^n}{n!} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{200e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{200}\,e}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{e}{\infty} = 0 \longrightarrow$ سری همگراست

نکته: از آزمون نسبت راحت‌تر حل می‌شود

نکته: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C} = 1$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۳۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)n!\,(n+1)n!}{(2n+2)(2n+1)\,2n!}}{\frac{n!\,n!}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{4n^2} \right| = \frac{1}{4}$

← مطلقاً همگراست پس همگراست.

---

(۳۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ روش اول : $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگرا $\xrightarrow[\text{حدی}]{\text{آزمون مقایسه}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right| = \frac{1}{2} > 0 \longrightarrow$ واگرا

روش دوم: قاعده انعام $\longrightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right] = \sqrt{n+1}-\sqrt{1}$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \longrightarrow$ واگراست

---

(۳۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}+2^n}{n^2+e^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{n^2+e^n}}_{I_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+e^n}}_{I_2}$. بررسی I_1 : $\frac{n^{100}}{n^2+e^n} < \frac{n^{100}}{e^n} \longrightarrow$ همگرا $\longrightarrow I_1$ همگراست

دلیل همگرایی $\frac{n^{100}}{e^n}$: $\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^{100}}{e^n}\right|} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{100}} = \frac{1}{e} < 1 \longrightarrow$ همگرا

نکته: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^c} = 1$ (c : ثابت)

بررسی I_2 : $\frac{2^n}{n^2+e^n} < \frac{2^n}{e^n} \longrightarrow$ همگرا $\longrightarrow I_2$ همگراست

همگرایی $\frac{2^n}{e^n}$ $\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{e^n}} = \frac{2}{e} < 1 \longrightarrow$ همگراست

همگرا + همگرا = همگرا $\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}+2^n}{n^2+e^n}$ همگراست

---

(۳۰) $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{n+4}{3n+\ln n}$ $3n+\ln n < 3n+n = 4n \longrightarrow \frac{1}{3n+\ln n} > \frac{1}{4n} \xrightarrow{\times(n+4)} \frac{n+4}{3n+\ln n} > \frac{n+4}{4n}$ واگرا

$\xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{طبق آزمون}}$ سری مورد نظر واگراست

اثبات واگرایی $\frac{n+4}{4n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{4n} = \frac{1}{4} \neq 0 \longrightarrow$ واگرا

تهیه‌ی رشد : $n^n \geqslant n! \geqslant \alpha^n \geqslant n^\alpha \geqslant \ln n$ ($\alpha > 1$ ، $\alpha > 0$)

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

c) شعاع همگرایی و بازه‌ی همگرایی سری‌های توانی زیر را تعیین کنید. (همگرایی یا واگرایی در نقاط انتهایی بررسی شود)

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2+n-1} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{n^2+n-1}} \xrightarrow[e^x>0]{\text{همواره}} \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt[n]{n^2+n-1}} = e^x < 1$

$e^x<1 \xrightarrow{\text{ln می‌گیریم}} x < \ln 1 \to x<0$ if $x=0 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1} \xrightarrow[\text{همگراست}]{\text{مقایسه با } \frac{1}{n^2} \text{ که}}$ سری همگراست

بازه‌ی همگرایی : $(-\infty, 0]$

$\lim_{n\to\infty} (n^2+n-1)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{n}\ln(n^2+n-1)}^{L}} = e^0 = 1$

$\lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n-1)}{n} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2+n-1}}{1} = 0$

---

② $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{2\sqrt[n]{n+3}} = \frac{|x-1|}{2} < 1$

$|x-1|<2 \to -2<x-1<2 \to -1<x<3$

if : $x=-1 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 0$ همگرای مشروط

if : $x=3 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} \xrightarrow[\text{با } \frac{1}{n}]{\text{آزمون مقایسه}}$ واگرا بازه‌ی همگرایی : $[-1, 3)$ $R=2$

$\lim_{n\to\infty} (n+3)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n+3)} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\frac{1}{n+3}}{1}} = e^0 = 1$

---

③ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{n(\ln n)^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n(\ln n)^2}} = |x-1|<1 \to 0<x<2$

if $x=0 \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = 0 \to$ همگرا

if $x=2 \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \xrightarrow[\text{و انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{\ln x}\right)\Big|_2^b = 0 + \frac{1}{\ln 2} \to$ همگرا

بازه‌ی همگرایی : $[0, 2]$ $R=1$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\lim_{n\to\infty}\left[n(\ln n)^2\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{\frac{\ln[n(\ln n)]}{n}}^{L}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln[n(\ln n)^2]}{n} \overset{hop}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(\ln n)^2+2\ln n}{n(\ln n)^2}}{1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n\ln n}\right) = 0$$

---

④ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}\frac{(x-3)^n}{2^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{2n+1}\frac{(x-3)^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{2\sqrt[n]{2}} = \frac{|x-3|}{2} < 1$

$\to |x-3| < 2 \to 1 < x < 5$ if $x=1 \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1)}(-1)^n \xrightarrow[\text{تناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ واگرا

if $x=5 \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} \neq 0 \to$ واگرا بازه همگرایی : $(1,5)$ $R=2$

---

⑤ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n(\ln n)^3}$ مشابه مثال ③ حل می‌شود

---

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2+2}{3}\right)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{x^2+2}{3}\right)^n\right|} = \frac{x^2+2}{3} < 1 \to x^2 < 1 \to -1 < x < 1$

if $x=\pm 1 \to \sum_{n=1}^{\infty}(1)^n \to$ واگراست بازه‌ی همگرایی : $(-1,1)$ $R=1$

---

⑦ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{3^n(n+2)} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-5)^n}{3^n(n+2)}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-5|}{3\sqrt[n]{n+2}} = \frac{|x-5|}{3} < 1$

$\to |x-5| < 3 \to -3 < x-5 < 3 \to 2 < x < 8$

if $x=2 \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2} \xrightarrow[\text{تناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0 \to$ همگرایی مشروط

if $x=8 \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2} \xrightarrow[\frac{1}{n}]{\text{آزمون مقایسه با}}$ واگرا بازه‌ی همگرایی : $[2,8)$ $R=3$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑧ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{ne^n}(x-1)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\ln n (x-1)^n}{ne^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{e}\sqrt[n]{\frac{\ln n}{n}} = \frac{|x-1|}{e} < 1 \to |x-1| <$

$\to \quad 1-e < x < 1+e \qquad if: x = 1+e \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{طبق آزمون}}$ واگراست

$if: x = 1-e \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{طبق آزمون سری}} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \longrightarrow$ همگرایی شروط

بازه همگرایی: $[1-e, 1+e) \qquad R = e$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/n} = 1$ حل در قسمت ۲۶ بحث سری

---

⑨ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{2n}+n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{3^{2n}+n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt[n]{3^{2n}+n}} = \frac{x^2}{9} < 1 \to x^2 < 9 \to -3 < x <$

$x = \pm 3 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{9^n+n}$ روش اول: $\lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{9^n+n} = 1 \neq 0 \to$ واگرا

آزمون مقایسه سری: روش دوم $\longrightarrow 9^n + n > 9^n \longrightarrow \frac{1}{9^n+n} < \frac{1}{9^n} \xrightarrow{\times 9^n} \frac{9^n}{9^n+n} < 1 \longrightarrow$ واگرا

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9^n}{9^n+n}}{\frac{9^n}{9^n}} = 1 > 0 \longrightarrow a_n$ واگراست $\qquad$ بازه همگرایی: $(-3, +3) \qquad R = 3$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{2n}+n} = \lim_{n\to\infty} (3^{2n}+n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{n}\ln(3^{2n}+n)}^{L}} = e^{\ln 9} = 9$ $\qquad$ نکته: $x^{2n} = (x^2)^n$

$\lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3^{2n}+n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(9^n+n)}{n} \overset{hop}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9^n \ln 9 + 1}{9^n+n}}{1} = \ln 9$

---

⑩ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n+e^{-n}}{n} x^n \qquad \frac{e^n+e^{-n}}{n} = \frac{e^{2n}+1}{ne^n}$

$\xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{e^n+e^{-n}}{n} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}+1}{ne^n} x^n} \cong \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e^{2n}}}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{e^n}} |x| = \frac{e^2}{e}|x| < 1$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$\longrightarrow |x| < \frac{1}{e} \longrightarrow \frac{-1}{e} < x < \frac{1}{e}$

واگرا

$$\text{if } x=\frac{-1}{e} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}+1}{n e^{2n}} \xrightarrow[\text{مقایسه}]{\text{آزمون}} \frac{e^{2n}+1}{ne^{2n}} > \frac{e^{2n}}{ne^{2n}} = \frac{1}{n} \longrightarrow$$ پس واگراست

$$\text{if } x=\frac{1}{e} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(e^{2n}+1)}{ne^{2n}} \xrightarrow[\text{همگرایی مشروط است}]{\text{آزمون سری متناوب}} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}+1}{ne^{2n}} = 0$$

بازه همگرایی: $\left(\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right]$

$R = \frac{1}{e}$

---

(۱۱) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^2+1} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{(2x-1)^n}{n^2+1}} \right| = |2x-1| < 1 \to -1 < 2x-1 < 1 \to 0 < x < 1$$

$$\text{if } x=0 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0 \longrightarrow$$ همگراست

$$\text{if } x=1 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad (P=2)\ \text{سری-P} \longrightarrow$$ همگرا

بازه همگرایی: $[0,1]$ $\quad R = \frac{1}{2}$

---

(۱۲) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times 2n}(x-2)^n \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)(x-2)^{n+1}}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n+2)}}{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)(x-2)^n}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)(2n+1)(x-2)\cancel{(x-2)^n}}{(2n-1)(2n+2)\cancel{(x-2)^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n}{4n^2+2n-2}|x-2| = |x-2| < 1 \longrightarrow 1 < x < 3$$

$$\text{if } x=1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times 2n}(-1)^n \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times 2n} \right| \neq 0 \longrightarrow$$ واگرا

$$\text{if } x=3 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times 2n} \quad \lim a_n \neq 0 \longrightarrow$$ واگرا

بازه همگرایی: $(1,3)$ $\quad R=1$

---

(۱۳) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x+1)^n}_{I_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n}(x+1)^n}_{I_2}$$

حسن پور

$$I_1 \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{n}(x+1)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3|x+1|}{\sqrt[n]{n}} = 3|x+1| < 1 \Longrightarrow |x+1| < \frac{1}{3}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$I_2 \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n 2^n}{n}(x+1)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x+1|}{\sqrt[n]{n}} = 2|x+1| < 1 \Rightarrow |x+1| < \frac{1}{2}$$

$$|x+1| < \frac{1}{3} \underset{\text{اشتراک}}{\cap} |x+1| < \frac{1}{2} \longrightarrow |x+1| < \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{-1}{3} < x+1 < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-4}{3} < x < \frac{-2}{3}$$

$$\text{if } x = \frac{-2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \text{واگرا} + \text{همگرا} = \text{واگرا}$$

$$\text{if } x = \frac{-4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \text{همگرای مشروط} + \text{همگرا} = \text{همگرا}$$

$\longrightarrow$ بازه همگرایی : $\left[\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ $\quad R = \frac{1}{3}$

---

(۱۴) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(x-1)^n \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x-1)^{n+1}}{\frac{\ln n}{n}(x-1)^n}\right| = |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(-1)^n \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0 \longrightarrow \text{همگراست}$$

$$\text{if } x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{آزمون}} \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}(\ln x)^2\Big|_1^b = \infty \longrightarrow \text{واگراست}$$

بازه همگرایی : $[0, 2)$ $\quad R = 1$

---

(۱۵) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}\right| = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\text{if } x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0 \longrightarrow \text{همگرا}$$

$$\text{if } x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[1/n^2]{\text{آزمون مقایسه با}} \text{سری همگراست}$$

بازه همگرایی : $[-1, 1]$ $\quad R = 1$

---

(۱۶) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n|x| = e|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{e} < x < \frac{1}{e} \qquad \text{if } x = \frac{-1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n \neq 0$$

پس واگراست

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\text{if } x=\frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n \neq 0 \longrightarrow \text{واگرا}$$

بازه همگرایی : $\left(\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ $\qquad R=\frac{1}{e}$

---

(۱۷) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n}\right| = |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$$

$$\text{if } x=+1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots+\frac{n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{i} \overset{x=\frac{i}{n}}{=\!=\!=} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \infty \longrightarrow \text{واگرا}$$

$$\text{if } x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n \xrightarrow[\text{سری متناوب}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \overset{\text{همانند بالا}}{=\!=\!=} \infty \longrightarrow \text{واگرا}$$

بازه همگرایی : $(-1,1)$ $\qquad R=1$

---

(۱۸) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n (x-3)^n}{n^4} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n 2^n (x-3)^n}{n^4}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x-3|}{\sqrt[n]{n^4}} = 2|x-3|<1$$

$$\Rightarrow |x-3|<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2}<x-3<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$$

$$\text{if } x=\frac{5}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad (P=4)\ \text{سری-P} \longrightarrow \text{همگرا}$$

$$\text{if } x=\frac{7}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}=0 \longrightarrow \text{همگرا}$$

بازه همگرایی : $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ $\qquad R=\frac{1}{2}$

---

(۱۹) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{n^2}(x+e)^n \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n e^{n^2}(x+e)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}|x+e|e^n = |x+e|\lim_{n\to\infty}e^n<1$$

این سری توانی تنها به ازای $x=-e$ همگراست.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۲۰) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n \ln n}{e^n} \xrightarrow[\text{نسبت}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)\,(x-1)^{n+1}}{e^{n+1}}}{\frac{\ln n\,(x-1)^n}{e^n}} \right| = \frac{1}{e}|x-1| < 1 \Rightarrow |x-1| < e$

$\Rightarrow 1-e < x < 1+e$

if $x = 1-e \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^n \ln n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n \xrightarrow[\text{متناوب}]{\text{آزمون سری}} \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty \neq 0 \to$ واگرا

if $x = 1+e \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \ln n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty \neq 0 \to$ واگرا

بازه همگرایی : $(1-e, 1+e) \quad R = e$

---

(۲۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \xrightarrow[\text{ریشه}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{a^n+b^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} \begin{cases} \text{if } a>b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = a \Rightarrow |x|<a \Rightarrow -a<x<a \\ \text{if } a<b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b \Rightarrow |x|<b \Rightarrow -b<x<b \\ \text{if } a=b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = a=b \Rightarrow |x|<a \end{cases}$$

if $x = \pm a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm a)^n}{a^n+b^n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n+b^n} = 1 \neq 0 \to$ واگرا $\quad$ بازه همگرایی : $(-a, a) \quad R = a$

if $x = \pm b \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm b)^n}{a^n+b^n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{a^n+b^n} = 1 \neq 0 \to$ واگرا $\quad$ بازه همگرایی : $(-b, b) \quad R = b$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) طول کمان خم $y=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$ را در بازه‌ی $[2,4]$ بدست آورید.

$$y=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)\rightarrow y'=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{e^{2x}-1}=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_2^4\sqrt{1+\left(\frac{2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}\,dx=\int_2^4\sqrt{\frac{(e^{2x}-1)^2+4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\,dx=\int_2^4\sqrt{\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}}\,dx$$

$$=\int_2^4\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx\quad\begin{cases}e^{2x}=u\\2e^{2x}dx=du\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\rightarrow e^4=u\\x=4\rightarrow e^8=u\end{cases}\rightarrow\int_{e^4}^{e^8}\frac{du}{2(u-1)}+\frac{1}{2}\int_{e^4}^{e^8}\frac{du}{u(u-1)}\rightarrow I$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln u+\frac{1}{2}\ln|u-1|\right)\Bigg|_{e^4}^{e^8}=\ln\frac{u-1}{\sqrt{u}}\Bigg|_{e^4}^{e^8}=\ln\frac{e^8-1}{e^4}-\ln\frac{e^4-1}{e^2}=\ln\frac{e^4+1}{e^2}$$

حل I: $\int\frac{du}{u(u-1)}\overset{\text{تجزیه کسر}}{=\!=\!=}-\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{u-1}=-\ln|u|+\ln|u-1|+c$

نکته: $e^8-1=(e^4)^2-1^2=(e^4-1)(e^4+1)$

---

۴) طول قوس منحنی تابع $y=e^x$ را از نقطه $A(0,1)$ تا نقطه $B(1,e)$ محاسبه کنید.

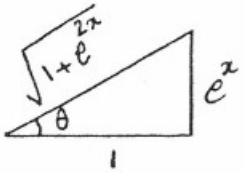
$y'=e^x$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+(e^x)^2}\,dx\quad\begin{cases}e^x=\tan\theta\\e^xdx=\sec^2\theta d\theta\rightarrow dx=\frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta}\end{cases}$$

$$\Rightarrow L=\int\sqrt{1+\tan^2\theta}\,\frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta}=\int\frac{\sec^3\theta d\theta}{\tan\theta}\overset{\text{در } \tan\theta \text{ ضرب و تقسیم}}{=\!=\!=}\int\frac{\sec^2\theta\sec\theta\tan\theta d\theta}{\tan^2\theta}=\int\frac{\sec^2\theta\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sec^2\theta-1}$$

$$\begin{cases}\sec\theta=t\\\sec\theta\tan\theta d\theta=dt\end{cases}\Rightarrow L=\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\frac{(t^2-1+1)}{t^2-1}dt=\int dt+\int\frac{dt}{t^2-1}=t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}$$

$$=\sec\theta+\frac{1}{2}\ln\frac{\sec\theta-1}{\sec\theta+1}=\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}$$



$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}=\sqrt{1+e^{2x}}$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}dx=\left(\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right)\Bigg|_0^1=\sqrt{1+e^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$y' = 2^x \ln 2$

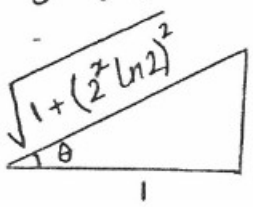
۷) ب) طول قوس منحنی تابع $y = 2^x$ را از نقطه $A(0,1)$ تا نقطه $B(1,2)$ محاسبه کنید.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(2^x \ln 2)^2}\, dx \qquad 2^x \ln 2 = \tan\theta \rightarrow 2^x (\ln 2)^2 dx = \sec^2\theta\, d\theta \rightarrow dx = \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta \ln 2}$$

$$L = \int \sqrt{1+\tan^2\theta}\ \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\sec^3\theta\, d\theta}{\tan\theta} \times \frac{\tan\theta}{\tan\theta} \xlongequal[\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1]{\sec^3\theta = \sec\theta \sec^2\theta} \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\sec\theta \tan\theta\,(\sec^2\theta)}{\sec^2\theta - 1}\, dt$$

$$\begin{cases} \sec\theta = t \\ \sec\theta \tan\theta\, d\theta = dt \end{cases} \rightarrow L = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1}\, dt = \frac{1}{\ln 2}\int dt + \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{\ln 2} t + \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{t-1}{t+1}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\sec\theta + \ln \frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}\right)$$



$\rightarrow \sec\theta = \sqrt{1+(2^x \ln 2)^2}$

$$\Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1+(2^x \ln 2)^2}\, dx = \frac{1}{\ln 2}\left[\sqrt{1+(2^x \ln 2)^2} + \ln \frac{\sqrt{1+(2^x \ln 2)^2} - 1}{\sqrt{1+(2^x \ln 2)^2} + 1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\sqrt{1+(2\ln 2)^2} + \ln \frac{\sqrt{1+(2\ln 2)^2} - 1}{\sqrt{1+(2\ln 2)^2} + 1} - \sqrt{1+(\ln 2)^2} - \ln \frac{\sqrt{1+(\ln 2)^2} - 1}{\sqrt{1+(\ln 2)^2} + 1}\right]$$

---

۱۵) طول قوس منحنی $y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt$ از $x = 0$ تا $x = \pi/4$ را بیابید.

$$y = \int_0^{f(x)} h(t)\, dt \Rightarrow y' = f'(x)\, h(f(x)) \qquad \Rightarrow y' = \sqrt{\cos 2x}$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 2x}\, dx \xlongequal{1+\cos 2x = 2\cos^2 x} \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos x|\, dx \xrightarrow[\cos x > 0]{0 < x < \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{2}\ \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا