www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

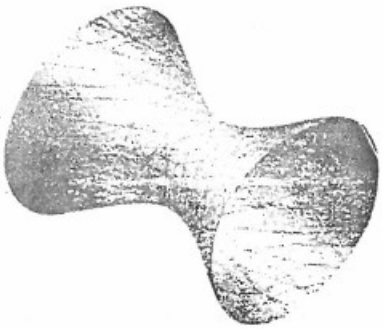
نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)

جزوه آموزشی



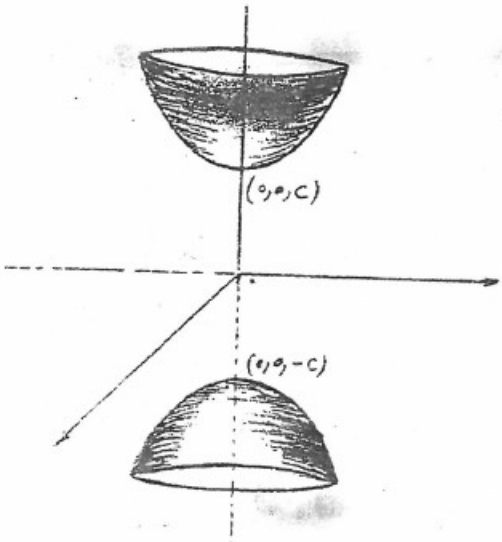
و

سوالات حل شده امتحانی

ریاضی ۲

مولف :

مهندس حسن پور



منابع :

ریاضی ۲ جورج توماس

ریاضی ۲ لوئیس لیتهلد

ریاضی عمومی ۲ دکتر

ریاضی ۲ نیکوکار(راهیان ارشد)

ریاضی کاربردی جواد کاظمی

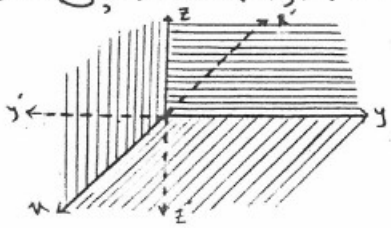
۸۷

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

بردارها :

معادلات صفحات مختصات : مختصات تمام نقاطی که بر روی صفحهٔ (xoy) (کف) قرار دارند به صورت $(x,y,0)$ هستند. پس معادلهٔ صفحهٔ xoy به صورت $z=0$ است.



صفحهٔ yoz $\begin{cases} yoz \\ x=0 \end{cases}$ صفحهٔ xoz $\begin{cases} xoz \\ y=0 \end{cases}$

معادلات محورهای مختصات

مختصات تمام نقاطی که بر روی محور xها قرار دارند به صورت $(x,0,0)$ است.

برای zoz' محور zها $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=z_0 \end{cases}$ برای yoy' محور yها $\begin{cases} x=0 \\ y=y_0 \\ z=0 \end{cases}$ برای $x'ox$ محور xها $\begin{cases} x=x_0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

نکته: محور xها فصل مشترک در صفحهٔ xoy $(z=0)$ و xoz $(y=0)$ است.

تصاویر یک نقطه بر صفحات و محورهای مختصات $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطه:

تصویر نقطهٔ A:

- بر روی صفحهٔ xoy : $A_1:(x_0, y_0, 0)$
- بر روی صفحهٔ xoz : $A_2:(x_0, 0, z_0)$
- بر روی صفحهٔ yoz : $A_3:(0, y_0, z_0)$
- بر روی محور xها : $A_4:(x_0, 0, 0)$
- بر روی محور yها : $A_5:(0, y_0, 0)$
- بر روی محور zها : $A_6:(0, 0, z_0)$

نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ مفروض است فاصلهٔ این نقطه تا:

- صفحهٔ xoy ← $|z_0|$
- صفحهٔ xoz ← $|y_0|$
- صفحهٔ yoz ← $|x_0|$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ از

محور xها ← $a=\sqrt{y_0^2+z_0^2}$

محور yها ← $b=\sqrt{x_0^2+z_0^2}$

محور zها ← $c=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$

مبدأ مختصات ← $d=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ و $B:(x_1, y_1, z_1)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

قرینهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ نسبت به:

صفحهٔ xoy ← $A_1:(x_0, y_0, -z_0)$

صفحهٔ yoz ← $A_2:(-x_0, y_0, z_0)$

محور xها ← $A_3:(x_0, -y_0, -z_0)$

محور yها ← $A_4:(-x_0, y_0, -z_0)$

محور zها ← $A_5:(-x_0, -y_0, z_0)$

مبدأ مختصات ← $A_6:(-x_0, -y_0, -z_0)$

بردار:

تعریف پیکان: پیکان $\overrightarrow{AB}$ پاره خط جهت داری است که نقطهٔ A را به نقطهٔ B منتقل می‌کند.

اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

خواهد بود (انتها منهای ابتدا) و اندازهٔ پیکان $\overrightarrow{AB}$ را با $|\overrightarrow{AB}|$ نشان می‌دهیم که در واقع همان طول پاره خط AB است.

تعریف بردار: پیکانی است که از مبدأ مختصات آغاز می‌شود را بردار می‌گوییم. بردار $\overrightarrow{OA}$ را به صورت a نشان می‌دهیم.

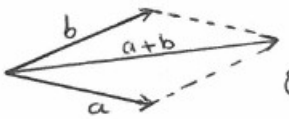
$$a=\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1, z_1)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

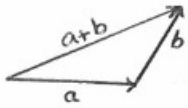
جمع دو بردار : اگر $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند $a+b$ هم یک بردار است

$$a+b=(a_1+b_1\,,\,a_2+b_2\,,\,a_3+b_3)$$

* تعبیر هندسی :



روش متوازی الاضلاع



روش مثلث

اندازه بردار $\vec{u}=ai+bj+ck$ برابر است با : $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

جهت بردار ناصفر u عبارت است از : $\vec{u}_{\text{جهت}}=\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

ضرب یک عدد در یک بردار : اگر $\vec{a}:(a_1,a_2,a_3)$ یک بردار و $r\in R$ یک عدد حقیقی باشد

حاصلضرب عدد r در بردار $\vec{a}$ یک بردار است. $r\vec{a}=(ra_1\,,\,ra_2\,,\,ra_3)$

مشخصات $r\vec{a}$: 1) راستا : به موازات بردار a است.

2) جهت : بستگی به علامت r دارد
- $r>0 \leftarrow r\vec{a}$ همجهت $\vec{a}$ است.
- $r<0 \leftarrow r\vec{a}$ مختلف الجهت با $\vec{a}$ است.
- $r=0 \leftarrow r\vec{a}$ بردار صفر است که فاقد راستا و جهت

3) اندازه : اندازه بردار $r\vec{a}$ ، $|r|$ برابر اندازه بردار $\vec{a}$ است:

$$|ra|=|r|\times|a|$$

اگر دو بردار a و b موازی باشند حتماً : $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}=r$

مثال اگر $\vec{a}=\sqrt{2}i+j-k$ باشد برداری که هم راستای $\vec{a}$ و در خلاف جهت آن بوده و اندازه‌اش برابر $\sqrt{3}$ می‌باشد، کدام است؟ b : بردار مجهول

$$\vec{a}=\sqrt{2}i+j-k \rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{2+1+1}=2 \qquad \vec{a}_{\text{جهت}}=\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$$

$$b_{\text{جهت}}=-(a_{\text{جهت}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$$

$$b_{\text{بردار}}=(b_{\text{جهت}})\times(b_{\text{اندازه}})=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i-\frac{\sqrt{3}}{2}j+\frac{\sqrt{3}}{2}k$$

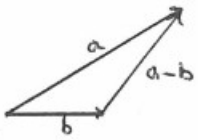
تفاضل دو بردار : دو بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ مفروض است داریم :

$$a-b=a+(-b)=(a_1-b_1\,,\,a_2-b_2\,,\,a_3-b_3)$$

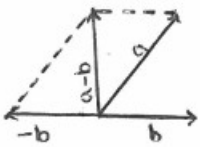
حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تعبیر هندسی : روش مثلث



روش متوازی الاضلاع

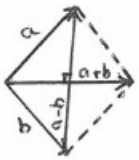


در روش مثلث کافیست انتهای دو بردار را به هم وصل کنیم.

نتایج : علت: در لوزی، اقطار بر هم عمودند و

1) $|a|=|b| \longleftrightarrow (a+b \perp a-b)$

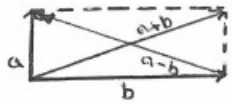
برعکس تنها متوازی الاضلاعی که اقطارش بر هم عمودند لوزی است.



علت: در مستطیل اندازهٔ اقطار با هم برابرند و برعکس

2) $(a \perp b) \longleftrightarrow (|a+b|=|a-b|)$

تنها متوازی الاضلاعی که اندازهٔ اقطارش با هم برابرند مستطیل است.

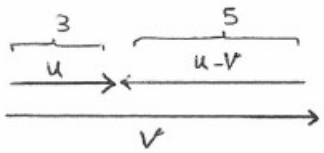


مثال: اگر $v(a,b,c)$ و $u(2,1,2)$ و $|u-v|=5$ باشد آنگاه کمترین مقدار $a^2+b^2+c^2$ کدام است؟

+ این عبارت زمانی min می‌شود که بردار v کوچکترین اندازه‌اش را اختیار کند $|v|^2=a^2+b^2+c^2$

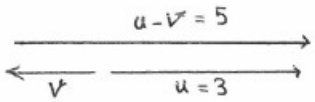
از طرفی $|u|=3$ و $|u-v|=5$

الف) اگر u و v هم راستا و همجهت باشند



پس: $|v|=8$

اگر u و v هم راستا و مختلف الجهت باشند



پس: $|v|=2$

$|v|^2=a^2+b^2+c^2=2^2=4$

بقیه حالات u و v بین این دو حالت است پس $2<|v|<8$.

مثال: اگر $v=2i+3j+k$ و $u=i-j+k$ باشد حاصل $\frac{|v-2u|}{|v+2u|}$ را بیابید؟

$v-2u=(2,3,1)-(2,-2,2)=(0,5,-1) \longrightarrow |v-2u|=\sqrt{0+25+1}=\sqrt{26}$

$v+2u=(2,3,1)+(2,-2,2)=(4,1,3) \longrightarrow |v+2u|=\sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}$

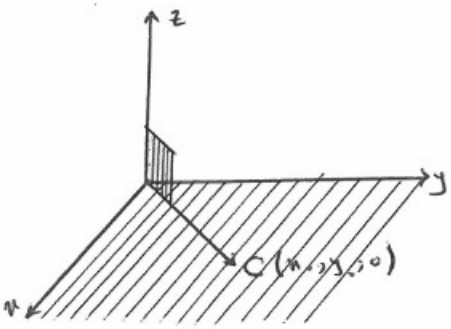
$\Longrightarrow \frac{|v-2u|}{|v+2u|}=1$

امام حسن (ع): بردباری زینت دانش است، وفا جوانمردی است و خویشتن‌داری نعمت.

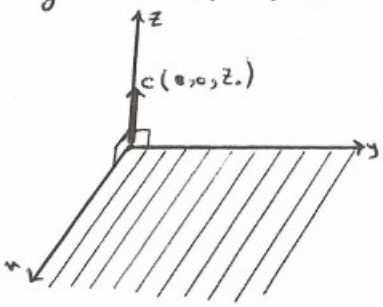
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: هرگاه یک بردار بر یک محور عمود باشد مولفه متناظر با آن محورش برابر صفر است.

به عنوان مثال:



نکته: اگر برداری بر یکی از صفحات مختصات عمود باشد مثلاً: بردار c بر صفحه xoy عمود باشد پس بر هر دو محور ox و oy عمود است پس طول و عرضش برابر صفر است و فقط مؤلفه ارتفاع دارد.



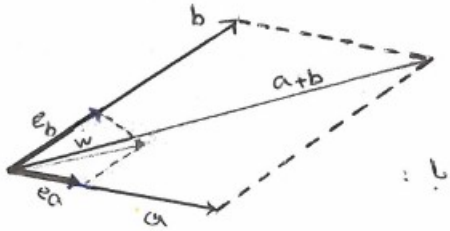
تعریف بردار یکه: برداری که اندازه‌اش واحد باشد بردار یکه نام دارد.

بردار یکه a را با e_a نمایش می‌دهیم و برداری است هم راستا و هم جهت با بردار a که اندازه‌اش برابر یک است.

$$e_a = \frac{\vec{a}}{|a|} \longrightarrow \vec{a} = |a| e_a$$

$$\vec{a}\ \text{بردار} = (\text{اندازهٔ } a) \times (\text{جهت } a)$$

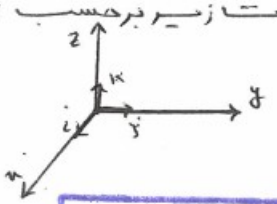
یکی از مهمترین کاربردهای بردار یکه: هنگامی است که بخواهیم امتداد نیمساز زاویه بین دو بردار a و b را بدست آوریم.



اگر $|a| \neq |b|$ باشد نیمساز زاویه بین دو بردار a و b برابر است با:

در راستای نیمساز a و b است. $w = |b|a + |a|b$ یا $w : e_a + e_b = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$ نیمساز

بردار یکه محورهای مختصات: هر بردار دلخواه a را می‌توان به صورت زیر برحسب i، j، k



$i : (1, 0, 0)$

$j : (0, 1, 0)$

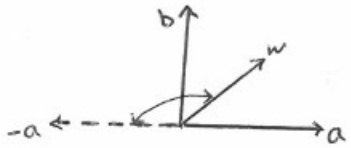
$k : (0, 0, 1)$

نوشت: $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) زاویه میان دو بردار a و b برابر $\frac{\pi}{2}$ است زاویه بین دو بردار $\left(\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\right)$ و $(-a)$ کدام است؟



$w=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$ در راستای نیمساز است

جواب : $3\pi/4$

مثال) اندازه تصویر بردار $\vec{v}(3,1,2)$ بر صفحه yoz را حساب کنید؟

تصویر بردار $\vec{v}$ بر صفحه yoz $(0,1,2) \xrightarrow{\text{اندازه}} d=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

ضرب داخلی دو بردار و ویژگی های آن :

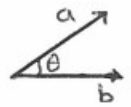
اگر زاویه بین دو بردار u و $\vec{v}$ برابر θ باشد : $u.\vec{v}=|u||\vec{v}|\cos\theta$

اگر $u(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{v}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند

$$u.\vec{v}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

ویژگی ها :

1) ضرب داخلی دو بردار غیر صفر یک عدد حقیقی است که بسته به زاویه میان دو بردار می تواند (+) و (0) و (−) باشد.



$0\leq\theta\leq\pi/2 \quad a.b>0$

$\theta=90 \quad a.b=0$

$\pi/2\leq\theta\leq\pi \quad a.b<0$

2) قابلیت جابه جایی دارد. $a.b=b.a$

3) دارای خاصیت پخشی است.
$$\begin{cases} a.(b\mp c)=a.b\mp a.c & \text{پخشی} \\ a.b\mp a.c=a.(b\mp c) & \text{فاکتور} \end{cases}$$

4) $a^2=a.a=|a|^2$

5) فاقد خاصیت حذف است : $a.b=a.c \neq b=c$

6) $$\begin{cases} (a+b)(a-b)=a^2-b^2 \\ (a+b)^2=a^2+2a.b+b^2 \end{cases}$$

7) $\alpha(u.\vec{v})=(\alpha u).\vec{v}=u.(\alpha\vec{v})$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) اگر $|a|=2$ و $b=2i+2j-k$ و زاویه دو بردار $\theta=\frac{2\pi}{3}$ باشد $|a+b|$ چقدر است؟

تذکر مهم: در اغلب موارد وقتی $|a+b|$ یا $|a-b|$ یا $|a+b+c|$ یا ... را می‌خواهند $|b|=3$

آنها را A فرض می‌کنیم و طرفینش را به توان 2 می‌رسانیم. [تکنیک توان 2]

$$A=|a+b| \longrightarrow A^2=|a|^2+2a.b+|b|^2=4-6+9=7 \rightarrow A=|a+b|=\sqrt{7}$$

$$a.b=|a||b|\cos\theta=3\times2\times(-\tfrac{1}{2})=-3$$

مثال) اگر $|a+b|=3$ و $|a-b|=1$ آنگاه $a.b$ را بیابید؟

$$|a+b|=3 \longrightarrow |a|^2+2a.b+|b|^2=9 \quad (I)$$

$$(I)-(II) \rightarrow 4a.b=8 \rightarrow a.b=2$$

$$|a-b|=1 \longrightarrow |a|^2-2a.b+|b|^2=1 \quad (II)$$

مثال) بردارهای a و b و c به اندازه‌های 1 و 2 و 4 دو به دو زاویه 60° با هم می‌سازند حاصل $|a+b-c|$ را بیابید؟

$$A=|a+b-c| \Longrightarrow A^2=|a|^2+|b|^2+|c|^2+2a.b-2a.c-2b.c$$

$$A^2=1+4+16+2-4-8=11 \longrightarrow A=|a+b-c|=\sqrt{11}$$

$$a.b=|a||b|\cos60^\circ=1 \qquad a.c=|a||c|\cos60^\circ=2 \qquad b.c=|b||c|\cos60^\circ=4$$

کاربردهای ضرب داخلی:

کاربرد 1: هرگاه a و b دو بردار غیر صفر باشند از رابطه $\cos\theta=\frac{a.b}{|a|\times|b|}$ زاویه θ (زاویه بین دو بردار) را می‌توان محاسبه کرد.

مثال) اگر $|a|=2$ ، $|b|=\sqrt{3}$ ، $|2a+b|=\sqrt{37}$ آنگاه زاویه بین دو بردار a با $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$ را بیابید؟

$$A=|2a+b| \longrightarrow A^2=4|a|^2+4a.b+|b|^2 \longrightarrow 37=16+4a.b+3 \rightarrow a.b=3$$

$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}=\frac{3}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$ نیمساز دو بردار a و b است پس زاویه بین دو بردار a و نیمساز برابر $\frac{\pi}{12}$ است.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) اگر $|a|=\sqrt{2}$ و $|a+b|=\sqrt{6}$ و $|a-b|=\sqrt{2}$ باشند زاویهٔ میان دو بردار a و b را بیابید؟

$$A=|a+b| \rightarrow A^2=|a|^2+2a.b+|b|^2 \rightarrow 6=2+2a.b+|b|^2 \quad (I)$$

$$B=|a-b| \rightarrow B^2=|a|^2-2a.b+|b|^2 \rightarrow 2=2-2a.b+|b|^2 \quad (II)$$

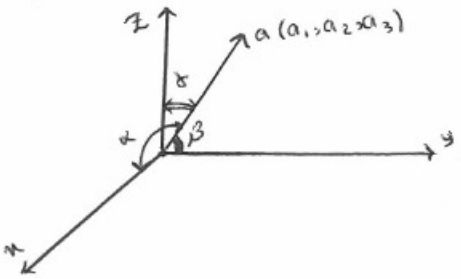
$$(I)+(II) \rightarrow 8=4+2|b|^2 \rightarrow |b|=\sqrt{2} \xrightarrow{\text{جایگذاری در } (I)} a.b=1$$

$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}=\frac{1}{2} \rightarrow \theta=\pi/3$$

تمرین) زاویهٔ میان دو بردار a و b با اندازهٔ $\pi/3$ است و $|a|=2$ و $|b|=1$ است زاویهٔ میان دو بردار $a+b$ و $a-b$ را بیابید؟

[جواب: $\cos\theta=\frac{\sqrt{27}}{7}$]

کاربرد 2: محاسبه زاویهٔ تشکیل شده بین بردار a و محورهای مختصات (زوایای هادی):

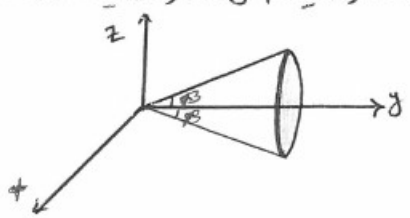


کسینوس های هادی:
$$\begin{cases} \cos\alpha=\frac{a_1}{|a|} \\ \cos\beta=\frac{a_2}{|a|} \\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|a|} \end{cases}$$

اگر $a(a_1,a_2,a_3)$ یک بردار باشد بردار یکه آن به صورت $e_a=\left(\frac{a_1}{|a|},\frac{a_2}{|a|},\frac{a_3}{|a|}\right)$ است پس اگر بردار a را بدهند و کسینوس های هادی را بخواهند کافی است بردار یکه آن را بدست آوریم و از آنجا که اندازهٔ بردار یکه واحد است پس: $e_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1 \rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

نکته: به عنوان مثال مکان هندسی تمام بردارهایی که با محور yها زاویهٔ β می سازند یک مخروط است که محورش محور yها و زاویهٔ رأسش نیز 2β است.



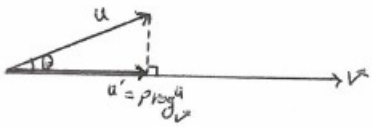
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) برداری با محور طول‌ها و محور عرض‌ها زاویای $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ ساخته است این بردار با محور z ها کدام زاویه را می‌سازد؟ غ.ق.ق

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1 \rightarrow \cos^2\gamma=-\frac{1}{4}$$

چنین برداری وجود ندارد

کاربرد 3: محاسبه تصویر و اندازهٔ تصویر یک بردار بر امتداد بردار دیگر (تصویر بردار: u')



$$\text{proj}_v^u = \mp v \text{ جهت} = \mp \frac{\vec{v}}{|v|}$$

$$\left|\text{proj}_v^u\right| = |u|\,|\cos\theta| = |u|\left|\left(\frac{\mp u\cdot v}{|u||v|}\right)\right| = \frac{u\cdot v}{|v|}$$

$$\overrightarrow{\text{proj}}_v^u = \left|\text{proj}_v^u\right|\cdot\left|\text{جهت}\right| = \frac{u\cdot v}{|v|}\left(\frac{v}{|v|}\right) = \underbrace{\left(\frac{u\cdot v}{|v|^2}\right)}_{\text{عدد ثابت}} \times \vec{v}$$

مثال) اندازهٔ تصویر بردار $a(1,-2,3)$ بر امتداد بردار $b(2,1,-2)$ چقدر است؟

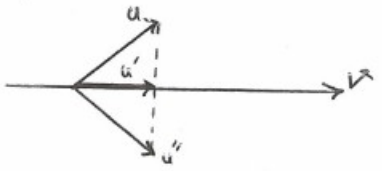
$$\left|\text{proj}_b^a\right| = \frac{|a\cdot b|}{|b|} = \frac{|2-2-6|}{\sqrt{4+1+4}} = 2$$

مثال) اگر $a(3,-6,1)$ ، $b(1,4,-5)$ ، $c(3,-4,12)$ تصویر قائم $a+b$ بر امتداد c را بیابید؟

$$d = a+b = (4,-2,-6) \qquad c\,(3,-4,12)$$

$$\text{proj}_c^d = \left(\frac{12+8-72}{\left(\sqrt{9+16+144}\right)^2}\right)\times(3,-4,12) = \left(\frac{-12}{13},\frac{16}{13},\frac{-48}{13}\right)$$

کاربرد 4: بدست آوردن قرینهٔ یک بردار نسبت به امتداد بردار دیگر (قرینهٔ بردار: u'')



$$u'' = 2u' - u$$

نکته: $|u| = |u''|$

$u'' = -u \qquad u' = 0$

اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد.

مثال) قرینهٔ بردار $u(5,5,-1)$ را نسبت به بردار $v(2,6,0)$ بدست آورید؟

$$u' = \frac{u\cdot v}{|v|^2}\times\vec{v} = \left(\frac{10+30+0}{4+36}\right)(2,6,0) = (2,6,0)$$

$$u'' = 2u' - u \rightarrow u'' = (4,12,0)-(5,5,-1) = (-1,7,1)$$

حسن پور

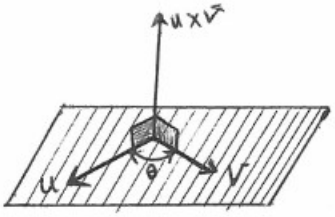
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

نامساوی مثلثی (کوشی-شوارتس) : $|u.v| \leq |u| \times |v|$ چون $|\cos\theta| \leq 1$

اثبات) $u.v = |u||v| \cos\theta \xrightarrow{|\cos\theta| \leq 1} |u.v| = |u||v||\cos\theta| \rightarrow |u.v| \leq |u||v|$

ضرب خارجی دو بردار: برخلاف ضرب داخلی، حاصل ضرب خارجی دو بردار (x) یک بردار است که دارای مشخصات زیر است:

1) امتداد: امتداد آن بر امتداد هر دو بردار u و v عمود است و در نتیجه بردار $u \times v$ بر صفحه ای که شامل دو بردار u و v است عمود می باشد.



2) جهت: اگر انگشتان دست راست خود را از امتداد بردار u به سمت امتداد بردار v بچرخانیم جهت انگشت شست در جهت $u \times v$ است.

3) طول بردار $u \times v$: $|u \times v| = |v| \times |u| \times \sin\theta$

یادآوریم $|u \times v|$ عددی مثبت است، برای $\sin\theta$ قدر مطلق می گذاریم چونکه $0 \leq \theta \leq \pi$ است و در این محدوده $\sin\theta$ مثبت است.

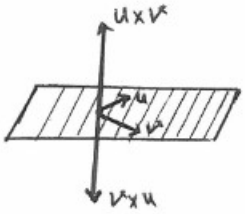
ویژگی های ضرب خارجی:

1) اندازه بردار $u \times v$، در واقع عدد مساحت متوازی الاضلاعی است که دو بردار u و v بنا می کنند.

2) مساحت مثلث: $\frac{|u \times v|}{2}$

3) حاصل ضرب خارجی دو بردار غیر صفر، صفر است، اگر و تنها اگر دو بردار بر هم موازی باشند

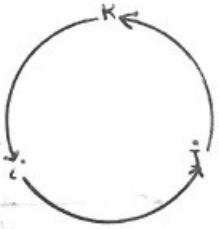
$a, b \neq 0 \; ; \; a \times b = 0 \longrightarrow a \parallel b$ چون $\theta = 0$ یا π



4) ضرب خارجی دو بردار فاقد خاصیت جابه جایی است.

$u \times v \neq v \times u \; ; \; u \times v = -v \times u$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

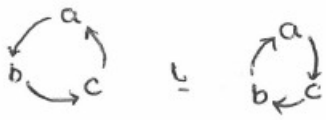
5) 

$$\begin{cases} j\times i=-k \\ k\times j=-i \\ i\times k=-j \end{cases} \qquad \begin{cases} i\times j=k \\ j\times k=i \\ k\times i=j \end{cases} \qquad i\times i=j\times j=k\times k=0$$

6) ضرب خارجی خاصیت پخشی دارد :

$$a\times(b\mp c)=a\times b\mp a\times c$$

7) اگر $a+b+c=0$



$$\begin{cases} a\times b=b\times c=c\times a \\ b\times a=a\times c=c\times b \end{cases}$$

8) ضرب خارجی فاقد خاصیت حذف و خاصیت شرکت پذیری است :

$$a\times b=a\times c \not\Longrightarrow b=c \qquad a\times(b\times c)\neq(a\times b)\times c$$

مثال) حاصل عبارت فوق را بیابید؟

$$i\times(j+k)+(i+k)\times j+k\times(i-j)$$

$$=i\times j+\cancel{i\times k}+i\times j+\cancel{k\times j}+\cancel{k\times i}-\cancel{k\times j}=2(i\times j)=2k$$

اگر $a=a_1i+a_2j+a_3k$, $b=b_1i+b_2j+b_3k$:

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=(a_2b_3-b_2a_3)i-(a_1b_3-b_1a_3)j+(a_1b_2-b_1a_2)k$$

ویژگی های مشترک ضرب داخلی و خارجی :

1) $$|a\times b|^2+(a.b)^2=(|a|\times|b|)^2$$

2) اگر زاویه بین دو بردار غیر صفر a و b برابر θ باشد داریم : $\tan\theta=\dfrac{|a\times b|}{a.b}$

3) از آنجایی که بردار $a\times b$ هم بر a و هم بر b عمود است

$$\begin{cases} a.(a\times b)=0 \\ b.(a\times b)=0 \end{cases}$$

مثال) اگر $|a|=3$ و $|b|=4$ و $a.b=0$ آنگاه $|a\times b|$ بیابید؟

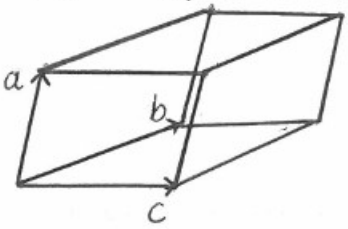
$$a.b=0\rightarrow a\perp b\rightarrow\theta=90^\circ \qquad |a\times b|=|a||b|\sin\theta=3\times4\times1=12$$

ضرب سه گانه عددی (ضرب مختلط) : ضرب سه گانه عددی، عملی است که روی سه بردار صورت می گیرد و حاصل آن عدد حقیقی است.

$$a.(b\times c)$$

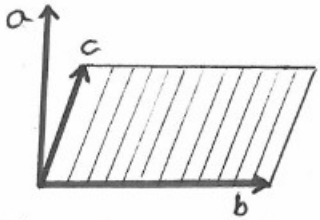
حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

حجم متوازی السطوح : حجم متوازی السطوحی که با سه بردار a, b, c بنای شود برابر است با :

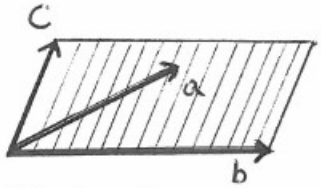


$$V = |a \cdot (b \times c)|$$

شرط لازم و کافی برای آن که سه بردار a و b و c هم صفحه باشند آن است که : $a \cdot (b \times c) = 0$



(a و b و c در یک صفحه نیستند)



(a و b و c در یک صفحه اند)

ضرب سه گانه برداری :

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad \text{یا} \quad b \times (a \times c) = (b \cdot c)a - (a \cdot b)c$$

مثال) نشان دهید که : $|u \cdot v| \leq |u||v|$

$$u \cdot v = |u||v| \cos\theta$$

$$|u \cdot v| = |u||v||\cos\theta| \xrightarrow[|\cos\theta| \leq 1]{-1 \leq \cos\theta \leq 1} \leq |u||v| \rightarrow |u \cdot v| \leq |u||v|$$

مثال) فرض کنید که u و v دو بردار واحد و θ زاویه بین آن دو باشد نشان دهید : $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$

$$(u - v)^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$$

* اندازه بردار واحد برابر یک است.

$$(u - v)^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \cos\theta = 2 - 2\cos\theta = 2(1 - \cos\theta)$$

از طرفی : $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\theta/2 \rightarrow 1 - \cos\theta = 2\sin^2\theta/2$

$$(u - v)^2 = 2 \times 2\sin^2\theta/2 \longrightarrow \sin^2\theta/2 = 1/4\,(u - v)^2 \rightarrow \sin\theta/2 = 1/2\,(\vec{u} - \vec{v})$$

مثال) فرض کنید که $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$ ، $|u| = 3$ ، $|v| = 5$ و $|w| = 7$ زاویه بین u و v را بیابید.

$$u + v = -w \qquad |u + v|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = (-w) \cdot (-w) = |w|^2 = 49$$

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|\cos\theta = |u|^2 + |v|^2 + 2(u \cdot v) \Rightarrow 49 = 9 + 25 + 2u \cdot v$$

$$\rightarrow u \cdot v = 7.5 \qquad \cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{7.5}{3 \times 5} = 1/2 \rightarrow \theta = \pi/3$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) فرض کنید u و v و w سه بردار در سه بعد متعامد با اندازه‌های یکسان باشند نشان دهید که بردار $s=u+v+w$ با هر یک از بردارهای u و v و w زاویه یکسانی را می‌سازد؟

فرض کنیم: $|v| = |u| = |w| = a$

زاویه بین s و u $\longrightarrow \theta_1$

زاویه بین s و v $\longrightarrow \theta_2$

زاویه بین s و w $\longrightarrow \theta_3$

$$|s|^2 = |u+v+w|^2 = (u+v+w)\cdot(u+v+w) = |u|^2 + \cancel{u\cdot v}^{\,0} + \cancel{u\cdot w}^{\,0} + |v|^2 + \cancel{v\cdot u}^{\,0} + \cancel{v\cdot w}^{\,0} + |w|^2 + \cancel{w\cdot u}^{\,0} + \cancel{w\cdot v}^{\,0}$$

$$|s|^2 = |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \longrightarrow \boxed{|s| = \sqrt{3}\,a}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{u\cdot s}{|u||s|} = \frac{u\cdot(u+v+w)}{a\cdot\sqrt{3}a} = \frac{|u|^2 + u\cdot v + v\cdot w}{\sqrt{3}a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{v\cdot s}{|v||s|} = \frac{v\cdot(u+v+w)}{a\cdot\sqrt{3}a} = \frac{|v|^2 + v\cdot u + v\cdot w}{\sqrt{3}a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{w\cdot s}{|w||s|} = \frac{w\cdot(u+v+w)}{a\cdot\sqrt{3}a} = \frac{|w|^2 + w\cdot u + w\cdot v}{\sqrt{3}a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Longrightarrow \cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \cos\theta_3 \Longrightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_2 = \theta_3}$$

مثال) فرض کنید $u+v+2w=0$ ، $|u|=7$ ، $|v|=4$ و $|w|=2$ مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید؟

$$\mu = u\cdot v + v\cdot w + w\cdot u$$

$$u+v+2w=0 \longrightarrow -w = u+v+w \qquad (-w)\cdot(-w) = |w|^2 = 4$$

$$(-w)\cdot(-w) = (u+v+w)\cdot(u+v+w) = |u|^2 + u\cdot v + u\cdot w + |v|^2 + v\cdot u + v\cdot w + |w|^2 + w\cdot u + w\cdot v$$

$$4 = 1 + 16 + 4 + 2u\cdot v + 2v\cdot w + 2w\cdot u$$

$$\boxed{\mu = u\cdot v + v\cdot w + w\cdot u = -\frac{17}{4}}$$

تمرین) نشان دهید که: $|u+v| \leq |u| + |v|$

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین فرض کنید $|u|=a$ و $|v|=b$ نشان دهید که $\left|\frac{u}{a^2}-\frac{v}{b^2}\right|^2=\left|\frac{u-v}{ab}\right|^2$

تمرین فرض کنید که u و v دو بردار غیرصفر باشند نشان دهید که بردار $\vec{w}=|v|\vec{u}+|u|\vec{v}$ نیمساز زاویهٔ بین u و v است؟

تمرین هرگاه u و v بردارهای واحدی باشند که $|u+v|=\sqrt{3}$ باشد حاصل عبارت زیر را بیابید؟

$(3u-4v)\cdot(2u+5v)$

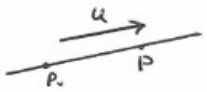
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خط و صفحه :

معادلات خط در فضای $\mathbb{R}^3$: برای نوشتن معادله یک خط به یک نقطه از آن مانند $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و برداری موازی با آن خط مثل $u = ai + bj + ck$ (بردار هادی) نیاز داریم.

اگر نقطه $P(x, y, z)$ روی این خط واقع باشد آنگاه بردارهای $\overrightarrow{P_0P}$ و u موازیند:

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{u} \longrightarrow \overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{u}$$ (هم مضرب اند)



✓ شکل استاندارد : یعنی ضرایب x و y و z باید یک باشد.

معادله پارامتری خط :
$$L: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

معادله متقارن (کانونیک) خط :
$$L: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

✓ اگر معادله خط به فرم استاندارد خود باشد آنگاه اعداد مخرج ها به ترتیب مولفه های بردار هادی هستند.

✓ طریقه استاندارد کردن معادله خط : اگر ضریب ها 1 نبودند از همان ضریب فاکتور و عکس آن را در مخرج می بریم. به طور مثال داریم:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{2-y}{1} = \frac{1-2z}{5} \rightarrow \frac{x-7}{3} = \frac{-(y-2)}{1} = \frac{-2(z-\frac{1}{2})}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(1, 2, -1)$ گذشته و با بردار $(0, 7, -3)$ موازی باشد؟

$$x = 1 , \quad \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-3} \longrightarrow \begin{cases} \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-3} \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3, 2, 1)$ می گذرد و با هر دو محور ox و oy زاویه 60° می سازد؟

$$\alpha = \beta = 60^\circ \rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \rightarrow \cos\gamma = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k \longrightarrow u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{x-3}{\frac{1}{2}} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{\mp\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

امام سجاد (ع) : چشم امید از مردم بردار، زیرا که این همان توانگری است.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) زاویه خط به معادلات $\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ با محور xها را بیابید؟

$u=(\sqrt{2},2,\sqrt{2})$ $\quad |u|=\sqrt{2+4+2}=2\sqrt{2}$ $\quad e_L=\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}},\frac{2}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$

$e_L=\cos\alpha\, i+\cos\beta\, j+\cos\gamma\, k \longrightarrow \cos\alpha=1/2 \longrightarrow \alpha=60^\circ$

روش دوم: اگر بردار هادی خط، $u(a,b,c)$ باشد: زاویه خط با محور xها: $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

yها " " " : $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

zها " " " : $\cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

نکته: به عبارت دیگر کافی است زاویه‌ی بردارهای را با بردار یکه‌ی محور مربوطه پیدا کنیم.

زاویه بین دو خط L_1 و L_2: اگر بردار هادی خط L_1 برابر با $u_1(a_1,b_1,c_1)$ و بردار هادی خط L_2 برابر با $u_2(a_2,b_2,c_2)$ باشد: زاویه بین دو خط: $\cos\theta=\frac{u_1\cdot u_2}{|u_1|\,|u_2|}$

مثال) زاویه بین دو خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2\sqrt{6}}$ و $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ را بیابید؟

$$\cos\theta=\frac{(2,2,2)\cdot(2,-2,2\sqrt{6})}{\sqrt{4+4+4}\times\sqrt{4+4+24}}=\frac{4-4+4\sqrt{6}}{\sqrt{12}\times\sqrt{32}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\sqrt{8}}=\frac{1}{2}=\theta=\pi/3$$

معادلات خط در حالات خاص:

1) اگر خطی بر محور xها عمود باشد این خط با صفحه yoz موازی است؟ $u(0,b,c)$

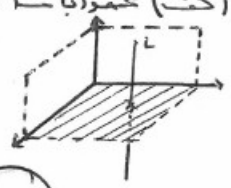
$$L:\begin{cases}x=\cancel{0t}+x_0\\ y=bt+y_0\\ z=ct+z_0\end{cases} \quad \text{یا} \quad L:\begin{cases}x=x_0\\ \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\end{cases}$$

2) اگر خطی بر محور yها عمود باشد این خط با صفحه xoz موازی است: $u(a,0,c)$

$$L:\begin{cases}x=at+x_0\\ y=\cancel{0t}+y_0\\ z=ct+z_0\end{cases} \quad \text{یا} \quad L:\begin{cases}\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}\\ y=y_0\end{cases}$$

3) اگر راستای خط L بر صفحه xoy (کف) عمود باشد این خط بر صفحه xoy عمود است و با محور zها موازی است.

معادله پارامتری خط: $\begin{cases}x=x_0\\ y=y_0\\ z=ct+z_0\end{cases}$



www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

* درمورد عمود بودن یک خط بر صفحات xoz و yoz نیز همینطور است.

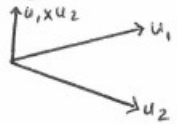
مثال معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1,2,-4)$ گذشته و با محور xها موازی باشد؟

نکته: وقتی خط با محور xها موازی است راستایش به صورت $(1,0,0)$ می باشد و y و z باید جداگانه

نوشته شوند: $\begin{cases} y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$

[جواب: $\begin{cases} y=2 \\ z=5 \end{cases}$]

مثال معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(1,2,3)$ گذشته و بر دو خط $l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{2y+1}{3}=1-z$ و $l_2: \begin{cases} x=2t+1 \\ y=2-t \\ z=5 \end{cases}$ عمود باشد؟

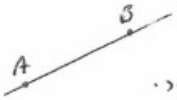


* راستای این خط به موازات $u_1 \times u_2$ می باشد.

$u_1(2, \frac{3}{2}, -1)$ $\quad u_2(2,-1,0)$

$u_1 \times u_2 = (-1,-2,-5) \parallel (1,2,5)$ $\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{5}$

مثال معادله خطی که از دو نقطه $A(1,2,3)$ و $B(3,5,7)$ می گذرد را بنویسید؟ $\overrightarrow{AB}(2,3,4)$



* واضح است که بردار $\overrightarrow{AB}$ هادی خط می شود. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$: با یک نقطه دلخواه

اوضاع نسبی دو خط:

1) دو خط برهم عمودند هرگاه: ضرب داخلی بردارهای هادیشان صفر شود. $u_1 \cdot u_2 = 0 \rightarrow l_1 \perp l_2$

2) دو خط باهم موازیند هرگاه: بردارهای هادی دو خط باهم موازی باشند (بردارهای هادیشان مضربی از هم باشند)

$u_1 \times u_2 = 0 \rightarrow u_1 \parallel u_2 \rightarrow l_1 \parallel l_2$

حال برای تشخیص این که آیا دو خط برهم منطبق اند، یک نقطهٔ دلخواه (مثلاً به ازای $t=0$) از یکی از دو خط انتخاب کرده و در معادله خط دیگر قرار می دهیم:

1) اگر صدق کرد دو خط برهم منطبق اند

2) اگر صدق نکرد دو خط موازی اند.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

3) متقاطع بودن : برای تشخیص این مطلب ابتدا معادلات پارامتری هریک از خطوط را با پارامترهای مختلف (مثلاً یکی را با t و دیگری را با s) می‌نویسیم و در یک دستگاه قرار می‌دهیم تا یک دستگاه سه معادله و دو مجهول بدست آید. از دو تا از معادلات (به دلخواه) t و s را بدست می‌آوریم. و t و s بدست آمده را در رابطه سوم قرار می‌دهیم. اگر در این رابطه صدق کرد [z های برابر] خطوط متقاطع‌اند. [نقطهٔ تقاطع هم بدست می‌آید] در غیر این صورت در خط متنافرند.

مثال در خط $L_1: x = y-1 = z-2$ و $L_2: \frac{x-1}{2} = y-2 = 1-\frac{z}{3}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

$u_1(1,1,1)$ $\quad$ $u_2(2,1,-3)$

$u_1 \cdot u_2 = (1,1,1)(2,1,-3) = 0$ عمودهستند

$u_1 \times u_2 \neq 0$ موازی نیستند

یا

$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-3}$

$$L_2: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+2 \\ z = -3t+3 \quad (I) \end{cases} \qquad L_1: \begin{cases} x = s \\ y = s+1 \\ z = s+2 \quad (II) \end{cases} \xrightarrow[y=y]{x=x} \begin{cases} 2t+1 = s \\ t+2 = s+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ s = 1 \end{cases}$$

$(2t+1, t+2, -3t+3)_{t=0} (1,2,3)$ نقطه تقاطع

جایگذاری در (I) و (II) $\begin{cases} (I) \quad z = 3 \\ (II) \quad z = 3 \end{cases}$ پس متقاطع‌اند

پس در خط عمود و متقاطع‌اند.

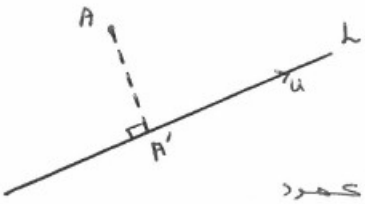
تمرین در خط $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{3}$ و $\begin{cases} x = 2t+4 \\ y = t+2 \\ z = 3t+6 \end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ [جواب: منطبق‌اند]

تمرین در خط به معادلات $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{-1}$ و $\begin{cases} x = t \\ y = t+2 \\ z = -2t-1 \end{cases}$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟ [جواب: متقاطع‌اند]

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

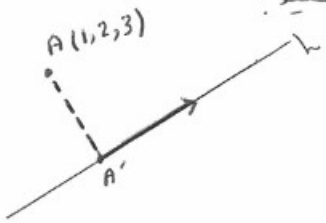
طریقه پیدا کردن تصویر نقطهٔ A بر روی خط L :

تصویر نقطهٔ A بر روی خط L همان پای عمودی است که از نقطه A بر خط L وارد می شود.



برای این کار ابتدا نقطه A' را روی خط در نظر می گیریم (با استفاده از خود معادله خط) پس $\overrightarrow{AA'}$ را پیدا کرده و با توجه به اینکه هادی خط (u) بر $\overrightarrow{AA'}$ عمود است $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{AA'}=0)$ t را پیدا کرده و با جایگذاری در A' تصویر بدست می آید.

مثال تصویر نقطهٔ $A(1,2,3)$ را روی خط $L: \frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-8}{4}$ را پیدا کنید؟



معادله پارامتری $\begin{cases} x=2t+4 \\ y=3t+3 \\ z=4t+8 \end{cases}$ $\quad A'(2t+4,\ 3t+3,\ 4t+8)$ $\quad \vec{u}(2,3,4)$

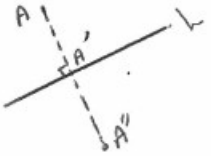
$\overrightarrow{AA'}=(2t+4-1,\ 3t+3-2,\ 4t+8-3)=(2t+3,\ 3t+1,\ 4t+5)$

حال $(2,3,4)\cdot(2t+3,\ 3t+1,\ 4t+5)=0 \longrightarrow 4t+6+9t+3+16t+20=0 \longrightarrow \boxed{t=-1}$

جایگذاری در $A' \longrightarrow (2,0,4)$ تصویر نقطهٔ A روی خط L

طریقه پیدا کردن قرینه نقطهٔ A بر روی خط L :

ابتدا کافیست تصویر A را روی خط L (با روش قبلی) پیدا کنیم (A') حال کافی است قرینهٔ A نسبت به A' را بیابیم که می شود A'' :



مثال قرینهٔ نقطهٔ $A(1,2,3)$ نسبت به خط $L: \frac{x+7}{3}=\frac{y-3}{7}=\frac{z}{4}$ را بیابید؟

ابتدا تصویر A روی خط L : $A'=(3t-7,\ -7t+10,\ 4t)$ $\quad \overrightarrow{AA'}=(3t-2,\ 8-7t,\ 4t-3)$

هادی خط $u:(3,-7,4)$ $\quad \vec{u}\cdot\overrightarrow{AA'}=0 \longrightarrow \boxed{t=1} \xrightarrow{\text{جایگذاری در } A'} A'=(2,3,4)$

حال کافیست قرینهٔ A را نسبت به A' پیدا کنیم. $\quad A''(3,4,5)$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

فاصله یک نقطه از یک خط در فضا:

ابتدا یک نقطه مانند Q را روی خط در نظر می‌گیریم (با توجه به معادله پارامتری خط) سپس فاصله PQ را پیدا کرده (باید دنبال کمترین فاصله باشیم با روش مشتق گیری).

مثال) فاصله نقطه $(1,1,1)$ را از خط $x=y=z-1$ را بدست آورید؟

$P(1,1,1)$

$Q(t,t,t+1)$

معادله پارامتری خط $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t+1 \end{cases}$

فاصله P تا Q $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(t-1)^2+(t-1)^2+(t+1-1)^2} \longrightarrow |\overrightarrow{PQ}|^2=(t-1)^2+(t-1)^2+t^2=f(t)$

$$\frac{df}{dt}=2(t-1)+2(t-1)+2t=0 \longrightarrow \boxed{t=\frac{2}{3}}$$

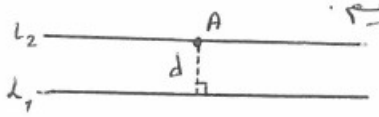
به ازای $t=\frac{2}{3}$ و با توجه به مشتق دوم (تقعر رو به بالا) نقطه مینیمم داریم. $\frac{d^2f}{dt^2}=6>0$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری } t \text{ در } Q} Q\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$ $\quad PQ=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

تمرین) فاصله نقطه $P(1,1,5)$ را از خط $x=1+t,\ y=3-t,\ z=2t$ بدست آورید؟ [جواب: $\sqrt{5}$]

فاصله بین دو خط موازی:

کافیست یک نقطه دلخواه را از روی خط L_2 انتخاب کرده و A بنامیم.



و سپس فاصله نقطه A را از خط L_1 بدست آوریم.

مثال) فاصله دو خط موازی $L_1:(x+y=1, z=1)$, $L_2:(x+y=3, z=3)$ را بیابید؟

$L_1:\begin{cases} x=1-y \\ z=1 \end{cases}$ $\quad L_2:\begin{cases} x=3-y \\ z=3 \end{cases}$

* ابتدا یک نقطه مثلاً از خط L_2 انتخاب می‌کنیم $P(3,0,3)$ حال فاصله این نقطه را تا خط L_1 می‌یابیم.

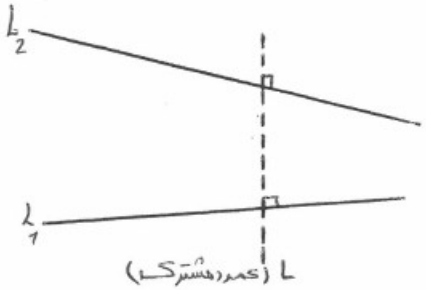
Q از روی خط L_1: $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$ $\quad Q(t,1-t,1)$ $\quad |PQ|=\sqrt{(t-3)^2+(1-t)^2+(1-3)^2} \Longrightarrow$

$$\frac{df}{dt}=2(t-3)-2(1-t)=0 \longrightarrow 4t=8 \longrightarrow \boxed{t=2} \longleftarrow |PQ|^2=(t-3)^2+(1-t)^2+4=f(t)$$

$\frac{d^2f}{dt^2}=4>0 \longrightarrow$ داریم min $\quad Q=(2,-1,1)$ $\quad PQ=\sqrt{(2-3)^2+(-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله عمود مشترک دو خط متنافر :



متناظر با دو خط متنافر L_1 و L_2 یک و تنها یک خط وجود دارد که بر هر دو خط L_1 و L_2 عمود بوده و هر دو را قطع کند به این خط عمود مشترک دو خط L_1 و L_2 گویند.

برای بدست آوردن راستای عمود مشترک (بردار هادی) دو خط L_1 و L_2 را ضرب خارجی می‌کنیم $u = u_1 \times u_2$

مثال) معادله عمود مشترک دو خط متنافر $L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$ و $L_2 = \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{1}$ را بدست آورید؟

فرض کنید که $M_1(x_1, y_1, z_1)$ و $M_2(x_2, y_2, z_2)$ محل برخورد عمود مشترک مطلوب با خطوط L_1 و L_2 باشد پس M_1 و M_2 جزئی از L_1 و L_2 می‌باشند و M_1M_2 بر بردار هادی دو خط عمود می‌باشد.

$u_1 = i + 2j - 3k \qquad u_2 = -2i + j + k \qquad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$

$$M_1 \to L_1 \Rightarrow \frac{x_1-2}{1} = \frac{y_1-2}{2} = \frac{z_1+1}{-3} \longrightarrow \begin{cases} z_1 = -3x_1 + 5 & (1) \\ y_1 = 2x_1 - 2 & (2) \end{cases}$$

$$M_2 \to L_2 \Rightarrow \frac{x_2}{-2} = \frac{y_2-2}{1} = \frac{z_2-4}{1} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = -2z_2 + 8 & (3) \\ y_2 = z_2 - 2 & (4) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{u}_1 = x_2 - x_1 + 2(y_2 - y_1) - 3(z_2 - z_1) = 0 \quad (*)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{u}_2 = -2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) = 0 \quad (**)$$

روابط (1)، (2)، (3)، (4) را در معادلات (*) و (**) قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} -2z_2 + 8 - x_1 + 2z_2 - 4 - 4x_1 + 4 - 3z_2 - 9x_1 + 15 = 0 \\ 4z_2 - 16 + 2x_1 + z_2 - 2 - 2x_1 + 2 + z_2 + 3x_1 - 5 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3z_2 + 14x_1 = 23 \\ 6z_2 + 3x_1 = 27 \end{cases} \to \boxed{z_2 = 3} \ \boxed{x_1 = 1}$$

مقدار x_1 و z_2 را در روابط (1)، (2)، (3)، (4) قرار داده تا z_1، y_1، x_2، y_2 بدست آیند.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 2 \\ y_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} M_1 = (1, 0, 2) \\ M_2 = (2, 1, 3) \\ \overrightarrow{M_1M_2} = i + j + k \end{array} \longrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{1}$$

معادله عمود مشترک

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

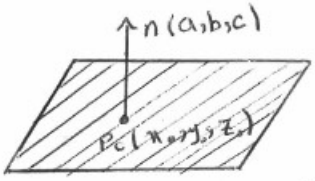
معادلات صفحه در فضای $\mathbb{R}^3$:

برای بدست آوردن معادله یک صفحه به یک نقطه از آن صفحه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و برداری عمود بر آن صفحه (بردار نرمال صفحه) نیاز داریم: $\vec{n} = ai + bj + ck$

انواع مسائل صفحه :

حالت ۱ : فرض کنیم نقطه $P(x, y, z)$ درون این صفحه باشد در اینصورت بردارهای n , $\vec{P_0P}$ بر هم عمودند در نتیجه: $\vec{n} \perp \vec{P_0P} \longrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{P_0P}) = 0 \rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

نکته: در معادله صفحه همه عبارات باید در یک طرف تساوی باشند تا از روی ضرایب x, y, z بردار نرمال را بدست آوریم. فرم دیگر معادله صفحه: $ax+by+cz=d$ (مجموع عددها)



مثال معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(1,2,3)$ گذشته بر بردار $(3,-1,2)$ عمود باشد؟

$$3(x-1)-(y-2)+2(z-3)=0 \longrightarrow 3x-y+2z=7$$

حالت 2 : برای بدست آوردن معادله صفحه‌ای که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و بر خط L با بردار هادی $n(a,b,c)$ عمود باشد کافیست بردار هادی خط را همان بردار نرمال صفحه بگیریم چون با هم موازیند.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

مثال معادله صفحه‌ای که محور عرض ها را در نقطه‌ای به طول 3 قطع کرده و بر خط $\frac{x+1}{2}=\frac{2y-1}{3}=1-z$ عمودی باشد را بنویسید؟

$A(0,3,0)$ هادی خط: $(2, \frac{3}{2}, -1)$

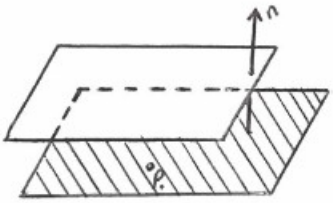
$$\rightarrow 2x+\frac{3}{2}(y-3)-z=0 \rightarrow 2x+\frac{3}{2}y-z=\frac{9}{2} \xrightarrow{\times 2} 4x+3y-2z=+9$$

مثال معادله صفحه‌ای که از نقطه $(1,1,1)$ گذشته و بر نیمساز ناحیه اول در صفحه xoy عمود باشد را بنویسید؟

نیمساز ناحیه اول و سوم $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow u=(1,1,0)$ $\quad 1(x-1)+1(y-1)+0(z-1)=0 \rightarrow \boxed{x+y=2}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حالت 3: برای بدست آوردن معادله صفحه که از P_0 گذشته و به موازات صفحه $ax+by+cz+d=0$ می باشد کافیست بدانیم نرمال های دو صفحه یکی هستند.



مثال معادله صفحه ای که از مبدا گذشته و به موازات صفحه ای به معادله $2x-y+z=7$ می باشد را بیابید؟

$$2(x-0)-(y-0)+(z-0)=0 \longrightarrow \boxed{2x-y+z=0}$$

حالت 4: برای بدست آوردن معادله صفحه ای که از نقطه P_0 گذشته و با دو بردار u و v موازی باشد

در این حالت $\vec{n}=u\times v$ نرمال صفحه است.

مثال معادله صفحه ای که از نقطه $A(1,0,-1)$ گذشته و به موازات دو بردار $(1,0,2)$ و $(2,-1,1)$ می باشد را بیابید؟

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2i+3j-k \rightarrow 2(x-1)+3y-(z+1)=0 \rightarrow \boxed{2x+3y-z=3}$$

حالت 5: برای بدست آوردن معادله صفحه عمود منصف پاره خط AB، بردار $\overrightarrow{AB}$ را به عنوان n

و نقطه M (وسط پاره خط AB) را نیز بر روی صفحه در نظر می گیریم.

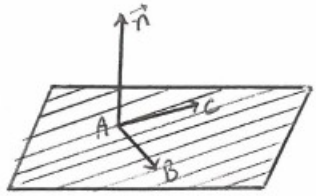
مثال دو نقطه $A(1,-1,4)$ و $B(3,5,2)$ مفروض اند معادله صفحه عمود منصف پاره خط AB را

بنویسید؟ وسط پاره خط $M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{5-1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)=(2,2,3)$ $\quad \overrightarrow{AB}:(2,6,-2)$

$$2(x-2)+6(y-2)-2(z-3)=0 \xrightarrow{\div 2} \boxed{x+3y-z=5}$$

حالت 6: برای بدست آوردن معادله صفحه ای که از سه نقطه معلوم A, B, C می گذرد کافیست

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ را پیدا کنیم. $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ و با یکی از نقاط به طور دلخواه معادله صفحه را می نویسیم.



نتیجه: از هر سه نقطه در فضا یک صفحه عبور می کند.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

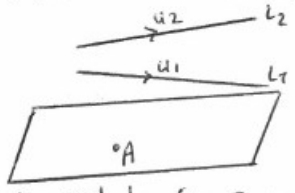
مثال) معادله صفحه‌ای که از سه نقطه $A(0,1,2)$ ، $B(+1,0,-1)$ ، $C(2,1,0)$ می‌گذرد را بنویسید؟

$\vec{AB}=(1,-1,-3)$ $\quad$ $\vec{AC}=(2,0,-2)$ $\quad\Longrightarrow\quad \vec{AB}\times\vec{AC}=(2,-4,2)=\vec{n}$

$2(x-0)-4(y-1)+2(z-2)=0 \longrightarrow 2x-4y+2z=0 \longrightarrow x-2y+z=0$

نکته‌ی مهم: مختصات تمام نقاط باید در معادله صفحه صدق کند.

حالت 7: برای بدست آوردن معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ گذشته و با دو خط



L_1 و L_2 موازی می‌باشد، کافیست $\vec{n}=u_1\times u_2$ را حساب کنیم.

مثال) معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(3,4,-1)$ گذشته و با دو خط $L_1:(x=2,\ y+2z=5)$ ، $L_2:(\frac{x+1}{3}=1-y=2z)$ موازی باشد را بنویسید؟

$L_1:\begin{cases}x=2\\ y=5-2z\end{cases} \longrightarrow u_1=(0,1,-\frac{1}{2})$ $\qquad u_2=(3,-1,\frac{1}{2})$

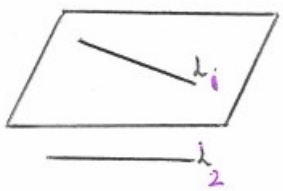
$\vec{n}=u_1\times u_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 3 & -1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=(0,1,2) \longrightarrow 0(x-3)+(y-4)+2(z+1)=0 \Longrightarrow \boxed{y+2z=2}$

حالت 8: برای بدست آوردن معادله صفحه‌ای که شامل خط L_1 بوده و به موازات خط L_2 می‌باشد

کافیست هادی خط L_1 و هادی خط L_2 را بدست آوریم. $\vec{n}=u_1\times u_2$ و یک نقطه دلخواه $(t=0)$ را بر روی

خط L_1 در نظر بگیریم.

مثال) معادله صفحه‌ای که شامل خط $L_1:\frac{x+1}{2}=y-3=z$ بوده و موازی خط $L_2:\begin{cases}x=2t+1\\ y=3t-5\\ z=1-4t\end{cases}$ می‌باشد را بنویسید؟



L_1 بر روی $t=0$

$A(-1,3,0)$

$u_1(2,1,1)$

$u_2(2,3,-4)$

$u_1\times u_2=\vec{n}=(-7,10,4)$

$-7(x+1)+10(y-3)+4(z-0)=0$

$\longrightarrow \boxed{-7x+10y+4z=+37}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

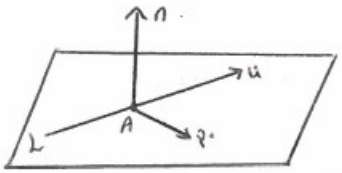
حالت 9: برای بدست آوردن معادله صفحه‌ای که شامل دو خط متقاطع می‌باشد بردار $u_1 \times u_2$ را به عنوان $\vec{n}$ در نظر می‌گیریم و نقطه دلخواه A را از روی یکی از خطوط انتخاب می‌کنیم [یا نقطه را می‌توانیم از محل تقاطع دو خط بدست آوریم].

مثال معادله صفحه‌ای که شامل دو خط $L_1: (x+2y=1, z=2)$ و $L_2: (z=2x, y=0)$ می‌باشد را بدست آورید؟

$L_1: \begin{cases} x=1-2y \\ z=2 \end{cases}$ $\quad u_1(1, -\frac{1}{2}, 0)$ $\qquad L_2: \begin{cases} z=2x \\ y=0 \end{cases}$ $\quad u_2(\frac{1}{2}, 0, 1)$

$u_1 \times u_2 = \vec{n}: (2, 4, -1) \Rightarrow \boxed{2x+4y-z=0}$ $\qquad$ پارامتری $\begin{cases} z=t \\ x=\frac{1}{2}t \\ y=0 \end{cases} \xrightarrow{t=0} (0,0,0)$

حالت 10: برای بدست آوردن معادله صفحه‌ای که شامل خط L بوده و از نقطه P_0 عبور می‌کند نقطه دلخواه A روی خط L را در نظر گرفته و بردار $\vec{AP_0}$ را می‌سازیم پس $\vec{n} = \vec{AP_0} \times \vec{u}$ خواهد شد.



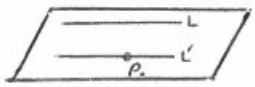
مثال معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(1,0,-1)$ گذشته شامل خط زیر می‌باشد را بنویسید؟

$\frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{5} = z$ $\qquad$ نقطه دلخواه B روی خط $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=-5t+2 \\ z=t \end{cases} \xrightarrow{t=0} B(1,2,0)$, $A(1,0,-1)$, $\vec{AB}(0,2,1)$

$\vec{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 7i + 3j - 6k$

با نقطه A: $7(x-1) + 3(y) - 6(z+1) = 0 \rightarrow \boxed{7x+3y-6z=13}$

حالت 11: برای بدست آوردن معادله صفحه‌ای که شامل دو خط موازی L و L' می‌باشد نقطه دلخواه P_0 را بر روی خط L' در نظر می‌گیریم و دیگر به خط L هیچ احتیاجی نداریم.



مثال معادله صفحه‌ای که شامل دو خط $L_1: \frac{x}{2} = y = z$ و $L_2: \frac{x+1}{2} = y = z$ می‌باشد را بنویسید؟ $L_1 \parallel L_2$

$L_1: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \xrightarrow{t=0} A(0,0,0)$ $\qquad L_2: \begin{cases} \frac{x+1}{2}=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \xrightarrow{t=0} B(-1,0,0)$ $\qquad \vec{BA}(1,0,0)$, $\vec{u_1}(2,1,1)$

$\vec{u_1} \times \vec{BA} = n = (0,-1,1)$ $\xrightarrow{\text{نقطه } A} 0(x-0) - y + z = 0 \rightarrow z - y = 0$

ملاحظه شد که خط L_2 بعد از انتخاب نقطه B به درد نخورد.

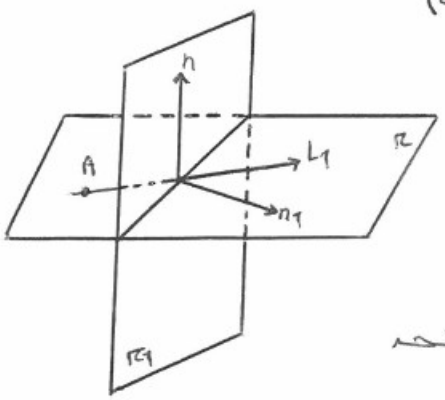
حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

حالت 12: برای بدست آوردن معادله صفحه‌ای که شامل خط L_1 بوده و عمود بر صفحه π_1 می‌باشد

بردار $\vec{n} = u_1 \times n_1$ را به عنوان بردار نرمال صفحه و نقطه A (دلخواه)

بر روی خط L_1 را هم به عنوان نقطه مورد نظر در نظر می‌گیریم.



مثال معادله صفحه‌ای که شامل خط $L_1: \frac{x+1}{2} = y = 1-z$ بوده و بر صفحه $\pi_1: 2x-3y+5z=7$ عمود باشد را بنویسید؟

$$L_1: \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = -t+1 \end{cases} \xrightarrow{t=0} A(-1,0,1) \text{ دلخواه}$$

$u_1: (2,1,-1)$

$n_1: (2,-3,5)$

$$n = u_1 \times n_1 = (2,-12,-8)$$

$$2(x+1) - 12(y-0) - 8(z-1) = 0 \rightarrow \boxed{2x - 12y - 8z = -10}$$

مثال معادله صفحه‌ای که بر صفحه $x+y+z=0$ عمود است و از دو نقطه $(1,0,1)$ و $(-1,2,0)$ می‌گذرد را بنویسید؟

$A(1,0,1)$ $\quad \vec{AB} = (2,-2,1)$

$B(-1,2,0)$ $\quad \vec{n_1} = (1,1,1)$ $\quad n = \vec{AB} \times \vec{n_1} = (-3,-1,4)$

با نقطه A: $-3(x-1) - (y-0) + 4(z-1) = 0 \rightarrow \boxed{-3x - y + 4z = 1}$

تمرین صفحه‌ای که از دو نقطه $A(1,0,2)$ و $B(2,1,1)$ گذشته و بر صفحه $x+2y-z=10$ عمود باشد محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ چرا؟

الف) 0 $\quad$ ب) 1 $\quad$ ج) -1 $\quad$ د) قطع نمی‌کند ✓

حالت 13: برای بدست آوردن معادله صفحه‌ای که از نقطه A گذشته و بر دو صفحه π_1 و π_2 عمود باشد کافیست بردار $n = n_1 \times n_2$ اختیار کنیم.

مثال صفحه‌ای که از نقطه $A(1,2,3)$ گذشته و بر دو صفحه‌ی $\pi_1: 2x-y+z=5$ و صفحه $\pi_2: x-2y+3z=1$ عمود باشد را بنویسید؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$n_1=(2,-1,1)$

$n_2=(1,-2,3)$

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-i-5j-3k$$

$$-(x-1)-5(y-2)-3(z-3)=0 \longrightarrow x+5y+3z=20$$

نکته: اگر صفحه‌ای با هر کدام از محورهای مختصات موازی باشد مولفهٔ متناظر با آن محور در بردار نرمال صفحه، صفر است.

به عنوان مثال: اگر صفحه‌ای موازی محور yها باشد (عمود بر صفحه xoz) معادلهٔ آن به فرم $ax+cz=d$.

نکته: اگر صفحه‌ای از مبداء مختصات بگذرد در معادله صفحه $d=0$ است.

نکته: اگر صفحه‌ای شامل محور zها باشد [عیناً برای محورها صادق است] معادله‌اش به فرم:

$ax+by=0$ است.

نکته: اگر صفحه π از نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ گذشته و بر صفحه xoy موازی باشد معادله آن به فرم $z=z_0$ است. [عیناً برای بقیه صفحات برقرار است].

اوضاع نسبی دو صفحه: دو صفحه $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ، $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

1) موازی بودن دو صفحه: در صورتی که بردار نرمالهای دو صفحه باهم موازی باشند، دو صفحه باهم موازیند.

$n_1 \parallel n_2 \longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$ یا $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

* حال اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ باشد دو صفحه موازی و برهم منطبق اند.

2) درصورتیکه دو صفحه باهم موازی نباشند حتماً متقاطع اند و مقطع آنها یک خط است که به آن فصل مشترک دو صفحه می‌گوییم.

$n_1 \nparallel n_2 \longrightarrow$ (π_1 و π_2 متقاطع اند)

زاویهٔ بین دو صفحه: همان زاویه بین بردار نرمال های دو صفحه است.

$$\cos\theta=\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) وضعیت دو صفحه $x+y-2z=1$ و $x+y-2z=0$ به هم چیست؟

$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{0}{1}$ پس متوازی هستند (متمایز)

مثال) زاویه بین دو صفحه $x+y=1$ و $z+y=1$ را بیابید؟

$n_1=(1,1,0)$

$n_2=(0,1,1)$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\longrightarrow\boxed{\theta=\pi/3}$

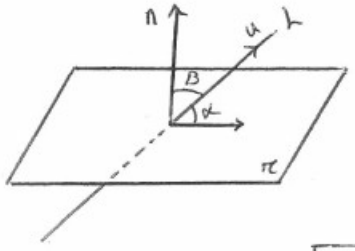
اوضاع نسبی خط و صفحه: خط L و صفحه π

1) اگر بردار هادی خط (u_1) و نرمال صفحه (n_1) بر هم عمود باشند آنگاه خط و صفحه با هم موازیند.

$u_1\cdot n_1=0\longrightarrow u_1\perp n_1\longrightarrow L\parallel\pi$

2) اگر $u_1\not\perp n_1$ باشد آنگاه خط و صفحه یک نقطه اشتراک دارند و متقاطع اند.

* البته در یک حالت خاص که $u_1\parallel n_1$ هست خط بر صفحه عمود است.



زاویه یک خط و یک صفحه:

ابتدا باید زاویه حاده میان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ را بیابیم سپس از 90° کم کنیم.

$\boxed{\alpha=90^\circ-\beta}$

روش بدست آوردن مختصات نقطه تقاطع یک خط و یک صفحه:

ابتدا معادلات خط را به صورت پارامتری بر حسب t نوشته و سپس این مختصات را در معادله صفحه قرار می‌دهیم به این ترتیب t مناسب بدست می‌آید. که سه حالت پیش می‌آید:

1) معادله دارای یک جواب است (یک t) این در صورتی است که خط و صفحه متقاطع باشند.

2) معادله به تناقض برسد مثل $(4=3)$ در این صورت خط و صفحه نقطه تقاطع ندارند.

3) معادله به یک رابطه بدیهی مثل $(3=3)$ برسد که در این صورت خط و صفحه بر هم منطبق اند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) خط $L: \frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{4}$ با صفحه $\pi: 2x+3y-z=2$ چه وضعیتی دارند؟

$\vec{u}:(3,2,4)$

$\vec{n}:(2,3,-1)$ $\quad \vec{n}.\vec{u}\neq 0 \quad L \nparallel \pi \longrightarrow$ متقاطع‌اند

پارامتری خط $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t-1 \\ z=4t+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{صفحه}]{\text{جایگذاری در}} 6t-2+6t-3-4t-1=2 \rightarrow 8t=8 \rightarrow \boxed{t=1}$

$(2,1,5) \rightarrow$ نقطهٔ تقاطع

فصل مشترک دو صفحه متقاطع:

اگر دو صفحه π_1 و π_2 موازی نباشند حتماً یکدیگر را در فصل مشترک قطع می‌کنند.

معادلهٔ فصل مشترک: برای نوشتن معادلهٔ فصل مشترک $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ را به عنوان هادی فصل مشترک در نظر می‌گیریم. حال نیاز به مختصات یک نقطه داریم که روی فصل مشترک باشد به دلیل اینکه نقطه اشتراک دو صفحه در فصل مشترک بیشمار است پس دستگاه دو معادله سه مجهولی $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$ را باید حل کنیم برای اینکار به یکی از متغیرهای [مثلاً z] مقداری دلخواه [مانند صفر] می‌دهیم و از حل دو معادله دو مجهول مختصات نقطه مورد نظر را بدست می‌آوریم.

مثال) فصل مشترک در صفحه $\pi_1: x+y+z=3$ ، $\pi_2: 2x+3y=5z$ را بیابید؟

$\vec{n}_1:(1,1,1) \qquad \vec{n}_2:(2,3,-5) \qquad \vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-8,7,1)$

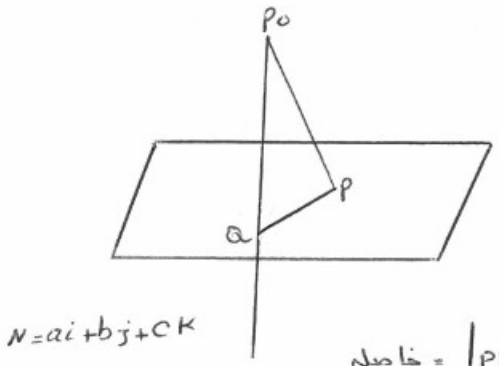
$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-5z=0 \end{cases} \xrightarrow{z=0} \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} y=-6 \\ x=9 \end{matrix}}$ نقطه دلخواه $(9,-6,0)$

$$\boxed{\frac{x-9}{-8}=\frac{y+6}{7}=\frac{z}{1}}$$

تمرین) معادلهٔ فصل مشترک دو صفحه $x+y+z=2$ و $x-y+3z=1$ کدام خط است؟

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه:



فاصله نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $\pi: ax+by+cz=d$

برابر است با طول تصویر بردار $\overrightarrow{P_0P}$ بر راستای $\vec{N}$.

$$\text{فاصله} = \left|\text{proj}_{\vec{N}}^{\overrightarrow{P_0P}}\right| = \left|\left(\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{N}}{|\vec{N}|^2}\right)\times\vec{N}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{N}\right|}{|\vec{N}|}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k$$

$$\vec{N} = ai + bj + ck$$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{N} = ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = -(ax_0+by_0+cz_0) + \overbrace{ax+by+cz}^{\text{همان برابر } d}$$

$$\text{فاصله} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی:

$$D = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

تذکر: برای محاسبه فاصله یک خط از یک صفحه که با هم موازی اند کافی است فاصله یک نقطه دلخواه خط (مثلاً به ازای $t=0$) را از صفحه پیدا کنیم.

مثال فاصله خط $x=2, 3y-2z=3$ از صفحه $6x-3y+2z=-5$ را بیابید؟

$$\text{خط}\begin{cases}3y=3+2z\\ x=2\end{cases} \longrightarrow \vec{u}=(0,\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) \qquad \vec{n}=(6,-3,2)$$

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \longrightarrow$ پس خط و صفحه موازی اند

یک نقطه دلخواه از خط به ازای $t=0$

$$\begin{cases}y=\frac{1}{3}t\\ z=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\\ x=2\end{cases} \xrightarrow{t=0} (2,0,-\tfrac{3}{2})$$

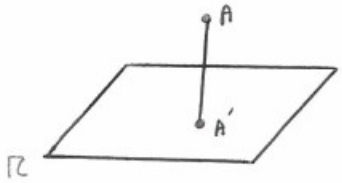
$$\text{فاصله} = \frac{|6\times2+0+2(-\frac{3}{2})+5|}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{14}{7} = 2$$

تولستوی: به دوستان خود خوبی کن که محبتشان به تو بیشتر شود و به دشمنانت خوبی کن تا دوست شوند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

بدست آوردن مختصات تصویر نقطه A روی صفحه π :

برای این کار ابتدا خط گذرنده از نقاط A , A' را می‌نویسیم برای این کار A را



نقطه مطلوب و نرمال صفحه راهنمای خط در نظر می‌گیریم.

پس برای پیدا کردن مختصات A' خط و صفحه را قطع می‌دهیم.

مثال تصویر نقطه $A(3,5,3)$ بر صفحه $\pi_2: 2x+2y+z=1$ کدام است؟

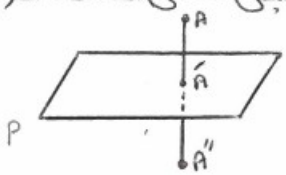
$A\left|\begin{matrix}3\\5\\3\end{matrix}\right.$ $\quad$ راهنمای خط $\left|\begin{matrix}2\\2\\1\end{matrix}\right.$ $\quad \frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{1} \longrightarrow \begin{cases}x=2t+3\\y=2t+5\\z=t+3\end{cases}$ با صفحه قطع می‌دهیم.

$2(2t+3)+2(2t+5)+t+3=1 \longrightarrow \boxed{t=-2}$

پس تصویر $A(-1,1,1)$ بدست می‌آید. $\xrightarrow[\text{خط}]{\text{جایگذاری در مختصات}} \begin{cases}x=-1\\y=1\\z=1\end{cases}$

قرینه نقطه A نسبت به صفحه p :

برای این کار ابتدا تصویر نقطه A را روی صفحه پیدا کرده (A') و سپس کافی است قرینه A را



نسبت به A' بیابیم که می‌شود A''

مثال قرینه نقطه $A(5,2,-1)$ نسبت به صفحه $x+y+z=3$ را بیابید؟

ابتدا تصویر A روی صفحه $\longrightarrow$ ابتدا باید خطی که شامل A و A' است را بیابیم : $\begin{cases}\vec{u}:(1,1,1)\\A:(5,2,-1)\end{cases}$

خط: $\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1} \longrightarrow \begin{cases}x=t+5\\y=t+2\\y=t-1\end{cases} \xrightarrow[\text{در صفحه}]{\text{جایگذاری}} t+5+t+2+t-1=3 \longrightarrow \boxed{t=-1}$

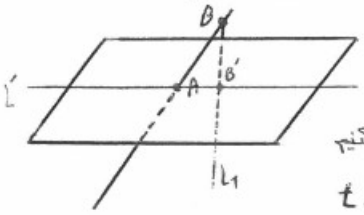
$\Longrightarrow A(5,2,-1) \xrightarrow{t=-1 \text{ به ازای}} A'(4,1,-2) \qquad A''(3,0,-3)$

نکته: A' وسط A و A'' است در نتیجه:

$$x_{A'}=\frac{x_{A''}+x_A}{2}$$
$$y_{A'}=\frac{y_{A''}+y_A}{2}$$
$$z_{A'}=\frac{z_{A''}+z_A}{2}$$

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) تصویر خط $x-2=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{4}$ بر صفحه $x+2y-2z+1=0$ را بیابید؟



ابتدا مختصات نقطه A $\quad A:(t+2,\ -t-1,\ 4t+5) \xrightarrow[\text{معادله صفحه}]{\text{جایگذاری در}}$

محل برخورد خط با صفحه را پیدا می کنیم

$$t+2-2t-2-8t-10+1=0 \longrightarrow \boxed{t=-1} \longrightarrow A\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$$

حال نقطه B را به طور دلخواه روی خط انتخاب می کنیم مثلاً به ازای $t=0$ $\quad B(2,-1,5) \xrightarrow[\text{صفحه می یابیم}]{\text{تصویر B را بر روی}} \begin{cases} \text{هادی خط } (1,2,-2) \\ B(2,-1,5) \end{cases}$

معادله خط l_1 می نویسیم: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{-2} \longrightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=2t-1 \\ z=-2t+5 \end{cases} \longrightarrow$ قطع با صفحه

$$t+2+4t-2+4t-10+1=0 \longrightarrow \boxed{t=1} \qquad B'(3,1,3)$$

حال بردار $\overrightarrow{AB'}$ همان هادی خط تصویر می شود $\quad \overrightarrow{AB'}:(2,1,2) \xrightarrow[\text{و نقطه دلخواه A}]{\text{با داشتن خط هادی}} \boxed{l':\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}}$

تمرین ۱ ← معادله خطی را بنویسید که از نقطه (۱و۳و۴-) عبور کرده و موازی با صفحه $x+2y-z=-1$ بوده و نیز خط $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{-2}$ را قطع کند. جواب ← $\frac{x+4}{9}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{5}$

تمرین ۲ ← نقطه P محل تقاطع خط l_1 با معادلات ($x=3+2t$ ، $y=2t$ و $z=t$) را با صفحه $x+3y-z+4=0$ بیابید و معادله خطی واقع بر این صفحه را بیابید که از P بگذرد و بر l_1 عمود باشد.

جواب: $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{-4}$

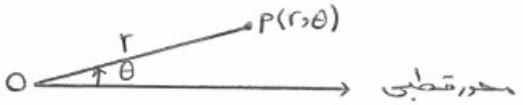
تمرین ۳ ← معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه $\begin{cases} P: 2x-y+3z-5=0 \\ P': x+2y-z+2=0 \end{cases}$ بگذرد و با بردار $u=(3,-1,2)$ موازی باشد.

تمرین ۴ ← معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه تقاطع خطوط $x-1=y=2z$ و $2x=5-y=8z$ گذشته و با خط $2x-\frac{1}{2}=1-2y=z$ موازی و بر صفحه $y=2x$ عمود باشد.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

رویه‌ها:

مختصات قطبی: یک نقطه ثابت به نام مبداء و یک محور از O را به عنوان محور قطبی تعریف می‌کنیم، موقع هر نقطه مانند P با مختصات قطبی (r,θ) نشان داده می‌شود که در آن r فاصله

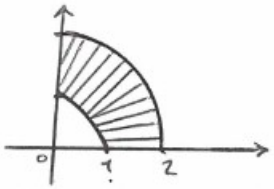


O تا P و θ زاویه بین محور و OP است.

نکته: $r=a$ دایره‌ای به شعاع $|a|$ و مرکز O است. $\theta=\theta_0$ خط گذرنده از O و زاویه آن با محور قطبی θ_0

مثال) نمودار زیر را رسم کنید؟

$1 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$



تبدیل مختصات دکارتی و قطبی به یکدیگر:

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad x^2+y^2=r^2 \qquad \tan^{-1}\frac{y}{x}=\theta$

مثال) معادله قطبی دایره $x^2+(y-3)^2=9$ را بنویسید؟

$$x^2+y^2-6y+9=9 \rightarrow r^2-6r\sin\theta=0 \rightarrow r(r-6\sin\theta)=0 \rightarrow \begin{cases} r=0 \\ \text{یا} \\ r=6\sin\theta \end{cases}$$

مثال) معادلات قطبی زیر را به فرم دکارتی تبدیل کرده و خم آنها را شناسایی کنید؟

الف) $r=\dfrac{4}{2\cos\theta-\sin\theta} \rightarrow 2r\cos\theta - r\sin\theta = 4 \rightarrow 2x-y=4 \rightarrow y=2x-4$ ، خط با شیب 2

ب) $r=4\tan\theta\sec\theta \rightarrow r=4\tan\theta\frac{1}{\cos\theta} \rightarrow r\cos\theta=4\tan\theta \rightarrow x=\frac{4y}{x} \rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$ سهمی

ج) $r\sin(\overset{\alpha}{\theta}+\overset{\beta}{\frac{\pi}{6}})=2 \rightarrow r\left[\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right]=2$

$\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}x=2 \rightarrow \sqrt{3}y=4-x \rightarrow y=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}x$ خط با شیب $m=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

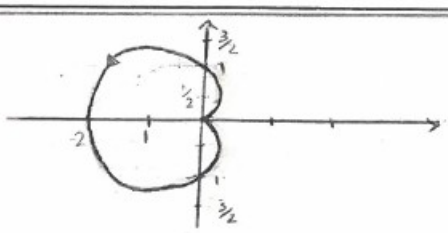
رسم نمودار در مختصات قطبی:

مثال) $r=1-\cos\theta$ (دلوار)

$\begin{cases} r>0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$

θ	r
0	0
π/3	1/2
2π/3	3/2
π	2

θ	r
π/2	1
3π/2	1
2π	0



حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

رویه‌های درجه دوم: فرض می‌کنیم a و b و c اعداد ثابت مثبت هستند.

① کره: مجموعه نقاطی از فضای R^3 که از یک نقطه ثابت به یک فاصله باشند را کره می‌نامیم.

معادله: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

مرکز کره (α,β,γ)

شعاع کره R

حالت خاص: کره به شعاع R و مرکز مبدأ مختصات $x^2+y^2+z^2=R^2$

هر کره فضا را به سه قسمت تقسیم می‌کند:

مجموعه نقاط روی کره: $\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$

مجموعه نقاط داخل کره: $\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2<R^2\}$

مجموعه نقاط خارج کره: $\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2>R^2\}$

مثال) معادله کره $x^2+y^2+z^2-2x+4y=1$ را به فرم استاندارد بنویسید و وضعیت نقطه $(1,-1,0)$ را نسبت به کره مشخص کنید؟

$x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4+z^2=1$

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=(\sqrt{6})^2$ کره به مرکز $(1,-2,0)$ و شعاع $\sqrt{6}$

پس نقطه درون کره است. $(1,-1,0) \xrightarrow{\text{صدق}} (1-1)^2+(-1+2)^2+0^2<6 \rightarrow 1<6$

② بیضی‌گون (بیضی‌وار): $a,b,c>0$ معادله: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

(شکل: تخم مرغ) نقاط برخورد با صفحات مختصات:

صفحه xy ، $(z=0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a\neq b)$ بیضی ، $(a=b)$ دایره

صفحه xz ، $(y=0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a\neq c)$ بیضی ، $(a=c)$ دایره

صفحه yz ، $(x=0) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(b\neq c)$ بیضی ، $(b=c)$ دایره

از بین a و b و c هر کدام بزرگتر باشد کشیدگی در امتداد آن محور است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر $\begin{cases} a=b \\ a=c \\ b=c \end{cases}$ بیضی‌گون دوار است. و اگر $a=b=c$ ← معادله همان کره است.

* بیضی‌گون به مرکز (α,β,γ)

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

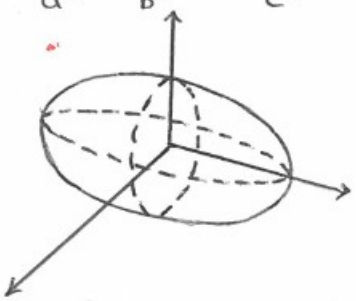
برش رویه با صفحات (مانند $z=h$):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \Leftrightarrow$$

① $-c<h<c \longrightarrow$ بیضی

② $h>c$ یا $h<-c \longrightarrow$ تهی

$h=\mp c \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \longrightarrow (0,0,\mp c)$ نقطه



مثال) $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{y^2}{9}+\frac{(z-3)^2}{4}=1$ بیضی‌گون به مرکز $(2,0,3)$ با پارامترهای $a=2\sqrt{2},\ b=3,\ c=2$

مثال) معادله زیر معادله چه رویه‌ای است؟

$$2x^2+y^2+3z^2-12z+77=0$$

$$2x^2+y^2+3(z^2-4z+4-4)=-77$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+y^2+\frac{(z-2)^2}{\frac{1}{3}}=1$$

معادله بیضی‌گون به مرکز $(0,0,2)$

با پارامترهای ← $\begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=1 \\ c=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

③ استوانه: رویه‌ای است در فضا که از خطوط موازی با یک خط ثابت در فضا و گذرنده از یک منحنی ساخته می‌شود. این منحنی را مولد استوانه می‌نامند. اگر منحنی مولد یک استوانه به شکل دایره باشد آنگاه استوانه یک استوانه دوار (مستدیر) است.

استوانه‌ای که منحنی مولدش خط راست باشد یک صفحه است.

استوانه‌ای که منحنی مولدش سهمی باشد استوانه سهموی است.

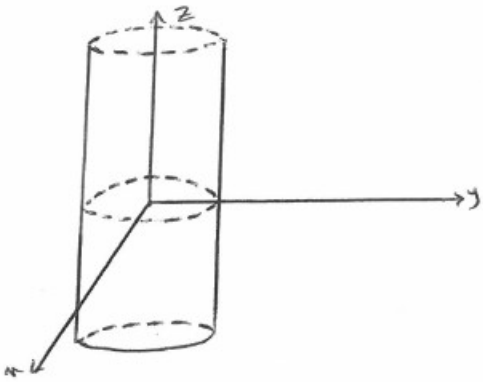
استوانه‌ای که منحنی مولدش هذلولی باشد استوانه هذلولوی است.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: هر معادله‌ای که شامل یکی از متغیرها نباشد معادله یک استوانه می‌باشد و آن متغیری که وجود ندارد نشان دهنده محور استوانه خواهد بود.

منظور از استوانه قائم یعنی استوانه‌ای که محورش به موازات یکی از سه محور x و y و z باشد.



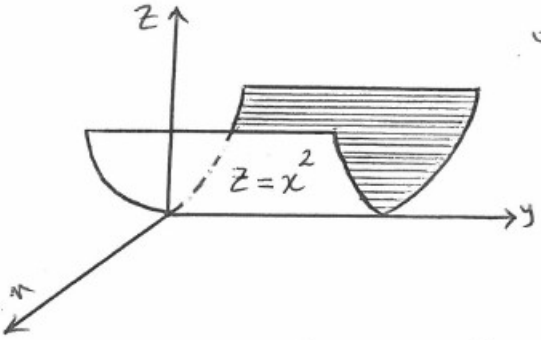
* استوانه قائم دوار که محورش محور z است.

نکته:

معادله دایره: $x^2+y^2=1$ (دربعدی)

معادله استوانه: $x^2+y^2=1$ (3بعدی)

استوانه سهموی: محورش به موازات محور y ها است



نکته: سهمی $z=x^2$ (دربعدی)

استوانه $z=x^2$ (3بعدی)

انواع دیگر این نمونه: $z=ax^2$, $x=az^2$, $y=az^2$, $z=ay^2$, $y=ax^2$, $x=ay^2$

استوانه بیضوی:

حالتی است که یک لوله به شکل دوار را با کمی فشار سطح مقطعش عین بیضی شود.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a\neq b$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad a\neq c$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad b\neq c$$

نکته:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{c^2}=1$$

(x_0, y_0) مرکز بیضی مولد هستند.

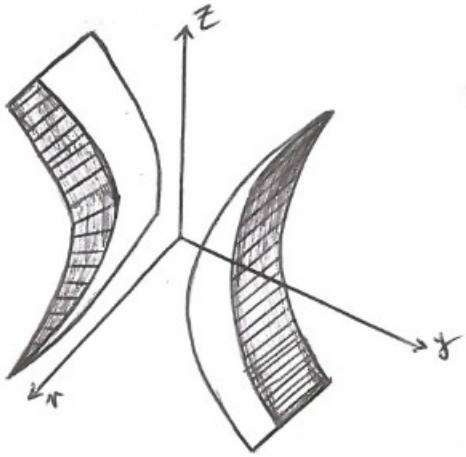
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

استوانه هذلولوی :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



مولد : هذلولی

$y^2 - z^2 = 1$

④ سهمی گون (سهمی وار) بیضوی : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ $\quad a,b>0 \quad c\neq 0 \rightarrow c>0$ یا $c<0$

مشخصات معادله : یکی از متغیرها توان 1 و بقیه توان 2 دارند و توان 2 ها هم علامت اند. و متغیری که توان 1 دارد محور رویه است.

سطح رویه با صفحات مختصات :

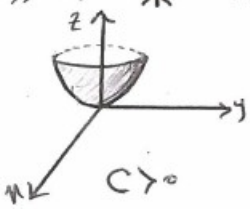
صفحه xy $(z=0) \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \longrightarrow x=0, y=0 \rightarrow (0,0,0)$ فقط مبدا مختصات

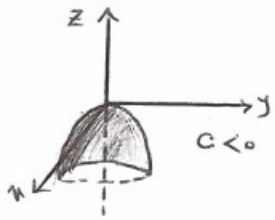
صفحه xz $(y=0) \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \longrightarrow z = \frac{c}{a^2}x^2$ یک سهمی

صفحه yz $(x=0) \longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \longrightarrow z = \frac{c}{b^2}y^2$ یک سهمی

صفحات تقارن : صفحه yz و xz ✱ محور تقارن : محور zها ✱ مرکز تقارن : ندارد

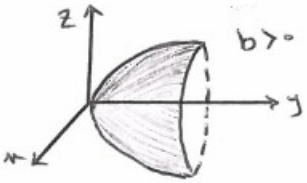
1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

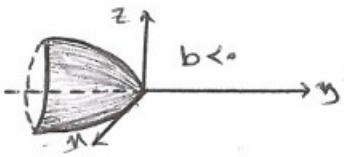




اگر : $a=b$ سهمی گون دوار

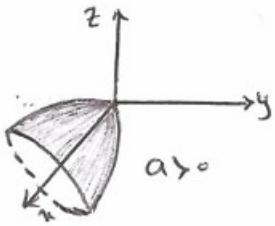
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b}$

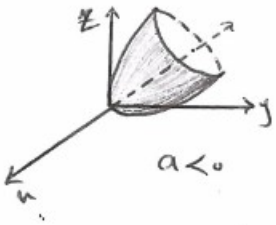




اگر : $a=c$ سهمی گون دوار

3) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a}$





اگر : $b=c$ سهمی گون دوار

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته: رأس سهمی‌گون (α,β,γ)

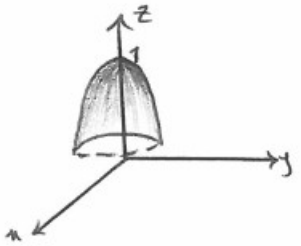
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=\frac{z-\gamma}{c}$$

مثال) رویه زیر را توصیف کنید و رسم کنید؟

$$z=1-x^2-y^2 \rightarrow x^2+y^2=1-z$$

$z=1 \rightarrow x=y=0$

$z=0 \rightarrow x^2+y^2=1$ دایره



مثال) رویه زیر را توصیف کنید؟

$$x^2+2z^2+4x-8y+4z-1=0$$

$$x^2+4x+4-4+2(z^2+2z+1-1)=8y+1 \rightarrow (x+2)^2+2(z+1)^2=8y+7 \xrightarrow{\div 2}$$

$$\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{(z+1)^2}{1}=\frac{y+\frac{7}{8}}{1/4}$$

سهمی‌گون به رأس $(-2,-\frac{7}{8},-1)$ و محورش موازی محور y ها.

---

⑤ مخروط بیضوی:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \qquad a,b,c>0$$

محور

مشخصات معادله: همه توان 2 دارند - عدد ثابت نداریم - علامت یکی از متغیرها با بقیه فرق دارد.

قطع رویه با صفحات مختصات:

صفحه xy $(z=0) \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \rightarrow x=y=0$ نقطه مبدأ $(0,0,0)$

صفحه xz $(y=0) \rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2} \rightarrow z=\mp\frac{c}{a}x$ در خط متقاطع در مبدأ

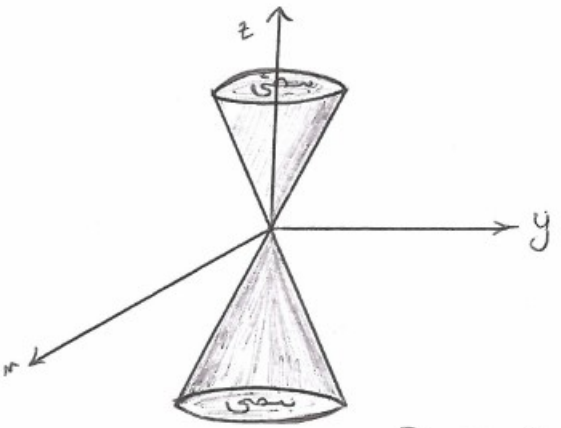
صفحه yz $(x=0) \rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \rightarrow z=\mp\frac{c}{b}y$ در خط متقاطع در مبدأ

محور مخروط در راستای متغیری است که علامتش با بقیه فرق دارد.

مخروط دوپارچه بیضوی به رأس (α,β,γ)

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



صفحات تقارن : هر سه صفحه مختصات

محورهای تقارن : هر سه محور مختصات

مرکز تقارن : مبدا مختصات.

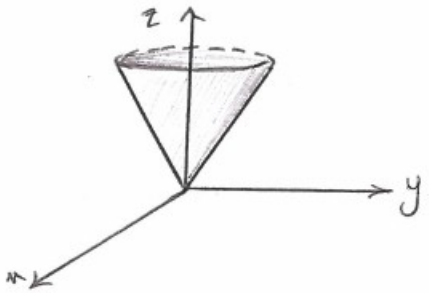
اگر $z = z_0 \neq 0 \rightarrow$ (بیضی $a \neq b$) ، (دایره $a = b$)

* اگر $a=b$ باشد مخروط را مخروط دوار گوییم . (مقطعش دایره است).

فرم های دیگر مخروط : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2}$

مثال) رویه زیر را رسم کنید؟ $z = \sqrt{x^2+y^2}$

به دلیل وجود رادیکال فقط قسمت بالای ($z \geq 0$) را رسم می کنیم. $\xrightarrow[z \geq 0]{\text{توان } 2} z^2 = +(x^2+y^2)$



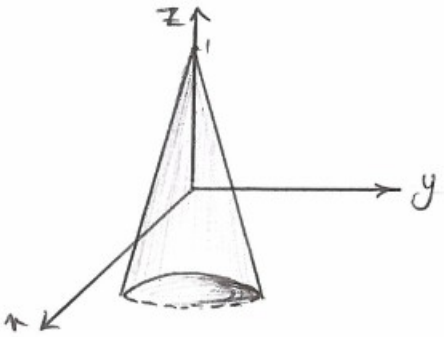
$z = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$z = h \rightarrow x^2+y^2 = h^2$ دایره به شعاع h

$x = 0 \longrightarrow z = \mp y \quad , \quad y = 0 \longrightarrow z = \mp x$

مثال) رویه زیر را رسم کنید؟

$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 - z \xrightarrow{1-z \geq 0} x^2+y^2 = (1-z)^2$



$z = 0 \longrightarrow x^2+y^2 = 1$

$z = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

مونتسکیو : اندیشهٔ بلند تنها به دارندهٔ آن زیان می رساند ولی سخنان ناهنجار به همهٔ شنوندگان آسیب می رساند.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

⑥ هذلولی گون یکپارچه : [کشیدگی محور zها] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

مشخصات معادله: معادله اش مانند مخروط است با این فرق که عدد ثابت باشد. علامت یکی از متغیرها منفی است و بقیه مثبت.

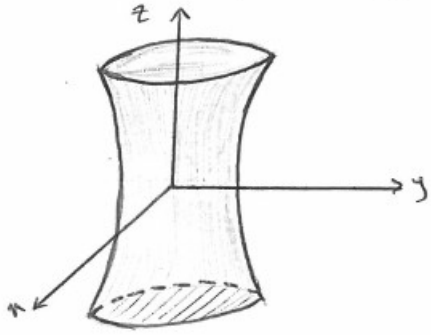
تقاطع با صفحات مختصات :

صفحه $yz\ (x=0) \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ یک هذلولی

صفحه $xz\ (y=0) \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ یک هذلولی

صفحه $xy\ (z=0) \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a\neq b)$ بیضی ، $(a=b$ دایره$)$

$z=\mp k \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$ $(a\neq b$ بیضی$)$ ، $(a=b$ دایره$)$



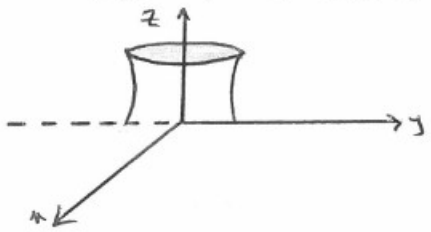
اگر $a=b$ باشد هذلولی گون یکپارچه دوار داریم.

مثال) رویه زیر را رسم کنید؟

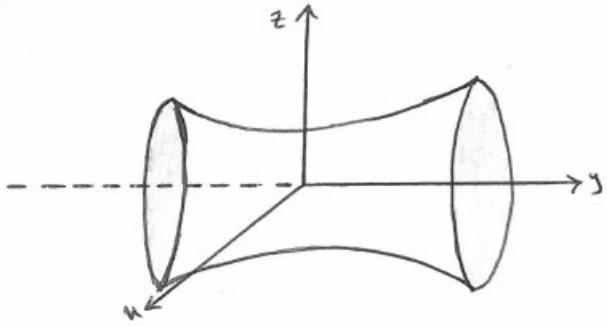
الف) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$

$\xrightarrow{z\geq 0} z^2=x^2+y^2-1 \longrightarrow x^2+y^2-z^2=1$

(هذلولی گون یکپارچه دوار)



ب) $x^2+z^2-y^2=1$



$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$ هذلولی گون یکپارچه به مرکز نقاط (α,β,γ)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ هذلولی گون دوپارچه: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

محور جسم در جهت متغیری است که علامتش با بقیه فرق دارد.

قطع با صفحات مختصات:

صفحه xy $(z=0) \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ غ ق ق (صفحه xy را قطع نمی‌کند)

صفحه xz $(y=0) \longrightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ یک هذلولی

صفحه yz $(x=0) \longrightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ یک هذلولی

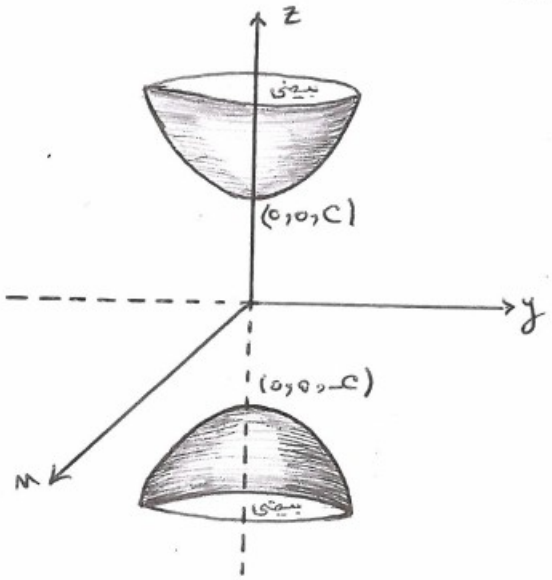
$z=k \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1 \longrightarrow$

- $k = \mp c \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ یک نقطه $(0,0,\mp c)$
- $\begin{cases} k>c \\ k<-c \end{cases} \longrightarrow$ معادله یک بیضی
- $-c<k<c$ ناحیه تهی است

فرم های دیگر رویه: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

معادله هذلولی گون دوپارچه به مرکز (α,β,γ): $\frac{(z-\gamma)^2}{c^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

اگر $a=b$ باشد هذلولی گون دوپارچه دوار است.



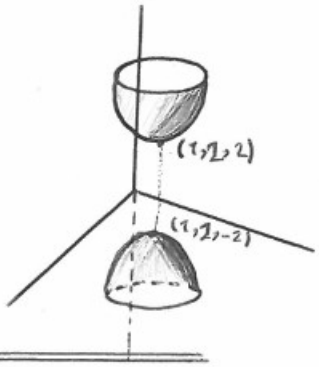
حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) شکل رویه به معادله $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{1}=z^2-4$ را بکشید؟

$$4=z^2-\frac{(y-2)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{4} \xrightarrow{\div 4}$$

$$1=\frac{z^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{16}$$

$z=\pm 2 \longrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$ $\quad z=0 \longrightarrow$ ناحیه‌ی تهی



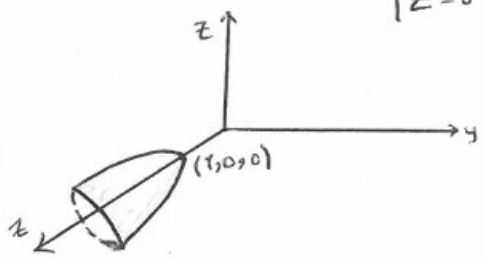
مثال) رویه زیر را رسم کنید؟

$x=\sqrt{1+y^2+z^2} \qquad x\geq 0$

$\xrightarrow{\wedge 2} x^2=1+y^2+z^2 \longrightarrow x^2-y^2-z^2=1 \longrightarrow x=1 \longrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ نقطه

$x=0 \longrightarrow$ ناحیه تهی

$x=c>1 \longrightarrow$ معادله دایره



---

⑧ سهمی‌گون هذلولوی: (زین اسبی)

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c} \qquad a,b>0 \qquad c\neq 0$$

معادله اش همانند سهمی گون بیضوی است با این فرق که علامت رسمه متغیرهای توان 2 (-) است.

قطع با صفحات مختصات:

صفحه $xy\ (z=0) \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0 \longrightarrow y=\mp\frac{b}{a}x$ در خط راست متقاطع در مبدا

صفحه $xz\ (y=0) \longrightarrow \frac{-x^2}{a^2}=\frac{z}{c} \longrightarrow z=\frac{-c}{a^2}x^2$ یک سهمی

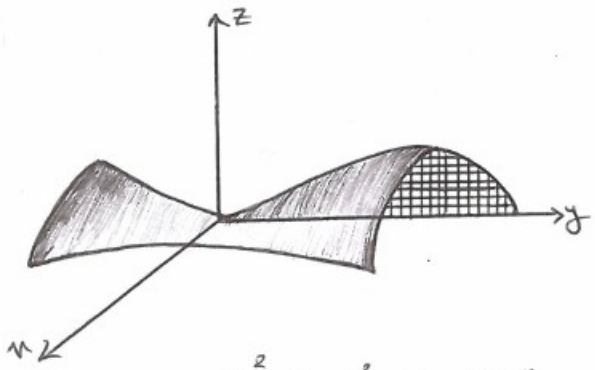
صفحه $yz\ (x=0) \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \qquad z=\frac{c}{b^2}y^2$ یک سهمی

$z=k \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k}{c}$ معادله هذلولی

فرم های دیگر: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\ ,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{y}{b}\ ,\ \dots$

نقطه زین اسبی (α,β,γ): $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=\frac{(y-\beta)}{b}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



صفحات تقارن : صفحه xz و yz

محور تقارن : محور zها

مرکز تقارن : ندارد.

مثال) معادله زیر را توصیف کنید؟

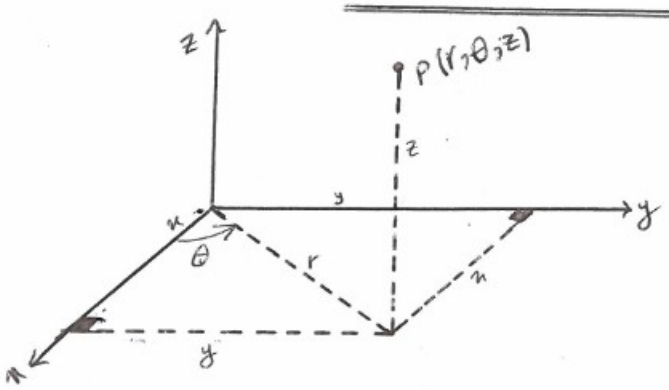
$$x^2+x-y^2+y+z=1$$

$$\to \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\left(y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+z=1 \to \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z=1$$

$$\to \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1-z \to (z-1)=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$ سهمی گون هذلولوی

نقطه زین اسبی : $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

دستگاه مختصات:



① مختصات دکارتی $p(x,y,z)$

② مختصات استوانه ای $p(r,\theta,z)$

r و θ مختصات قطبی تصویر قائم p بر صفحه xy است.

z : مختص قائم دکارتی است (z دکارتی همان z استوانه ای)

r : فاصله تصویر نقطه تا مبدا مختصات

θ : زاویه با محور $+x$ها.

تبدیل دکارتی به استوانه ای

$$r^2=x^2+y^2$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad r\geq 0$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \to \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \quad x\neq 0$$

تبدیل استوانه ای به دکارتی

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

$$z=z$$

امام صادق(ع) : خاموشی دری از درهای حکمت است.

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) مختصات دکارتی $(2, \frac{\pi}{4}, 3)$ و مختصات استوانه‌ای $(3, \sqrt{3}, 1)$ را پیدا کنید؟

$(2, \pi/4, 3)$: استوانه‌ای

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \pi/4 \\ z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \rightarrow x = \sqrt{2} \\ y = r\sin\theta \rightarrow y = \sqrt{2} \\ z = 3 \rightarrow z = 3 \end{cases} \longrightarrow (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$$ دکارتی

$(3, \sqrt{3}, 1)$: دکارتی

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow r = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \rightarrow \theta = \pi/3 \\ z = 1 \longrightarrow z = 1 \end{cases}$$

استوانه‌ای : $(2\sqrt{3}, \pi/3, 1)$

مثال) عبارات زیر را توصیف کنید؟

الف) $r = 0 \rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$, $z =$ دلخواه کلیه نقاط واقع بر محور z ها

ب) $\theta = \theta_0 \rightarrow \tan\theta = \tan\theta_0 \rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta_0 \rightarrow y = x\tan\theta_0$ معادله صفحه

زاویه معلوم

یک صفحه عمود بر صفحه xy و گذرنده از محور z ها که مقطع آن با صفحه xy خطی است که با جهت مثبت محور xy زاویه θ_0 را می‌سازد.

ج) $r = 6\sin\theta \rightarrow r - 6\sin\theta = 0 \xrightarrow{\times r} r^2 - 6r\sin\theta = 0 \rightarrow x^2+y^2-6y = 0 \rightarrow x^2+(y-3)^2 = 9$

استوانه قائم دار.

د) $r = 2 \xrightarrow{\wedge 2} r^2 = 4 \rightarrow x^2+y^2 = 4$. استوانه‌ای به مرکز (0,0) که محور آن z و شعاع دایره مولدش 2 است.

نکته: اگر r, θ مقادیر ثابت بودند این مقادیر را در $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ قرار می‌دهیم تا روابط x و y بدست آیند.

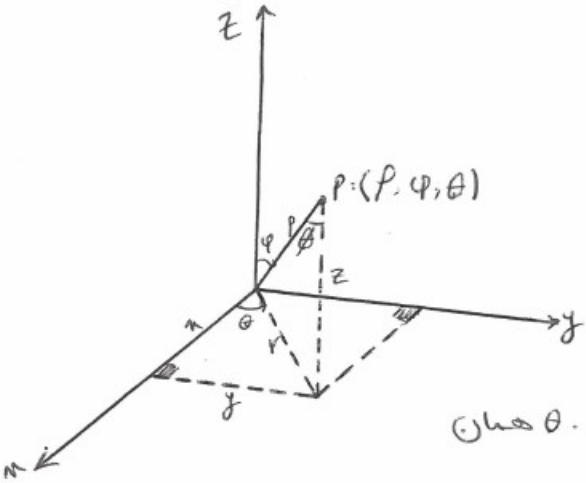
$r = r_0 \rightarrow$ معادله استوانه

$\theta = \theta_0 \rightarrow$ معادله صفحه

سعدی: هر که با بدان نشیند، اگر طبیعت ایشان را نگیرد، به طریقت ایشان متهم می‌گردد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مختصات کروی:



نقطه P را در فضا در نظر بگیرید اگر از این نقطه مستقیماً به مبدا وصل کنیم ρ و φ پدید می آیند فاصله مستقیم نقطه تا مبدا را ρ و زاویه بین ρ و محور z را φ می نامیم. θ همان مختصات استوانه‌ای است (زاویه با محور xها) در این حالت داریم: $P(\rho, \varphi, \theta)$

ρ روی محور z ها همان مقدار z را دارد.

نکته: محدوده تغییرات θ از $0 \leq \theta \leq 2\pi$ است و محدوده تغییرات φ، $0 \leq \varphi \leq \pi$ است.

تبدیل مختصات کروی به دکارتی.

$$r = \rho \sin\varphi \xrightarrow{x = r\cos\theta} x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$

$$r = \rho \sin\varphi \xrightarrow{y = r\sin\theta} y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi \qquad z = \rho \cos\varphi$$

تبدیل مختصات دکارتی به کروی:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \xrightarrow{\rho \geq 0} \rho^2 = x^2+y^2+z^2 \longrightarrow \rho^2 = r^2+z^2$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho} \longrightarrow \varphi = \cos^{-1}\frac{z}{\rho}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \longrightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\tan\varphi = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad (z \neq 0)$$

مثال) توصیف کنید؟

الف) $\rho = 0 \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0$ فقط مبدا مختصات

ب) $\rho = a \longrightarrow \rho^2 = a^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2 = a^2$ کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع a

حسن پور

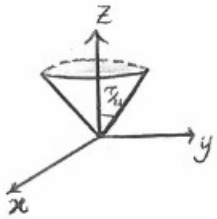
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

ج) $\varphi = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \longrightarrow x = 0 \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \longrightarrow y = 0 \\ z = \rho \cos\varphi \longrightarrow z = \rho > 0 \end{cases}$ جهت مثبت محور zها به جز مبدا

د) $\varphi = \pi \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\rho \xrightarrow{\rho > 0} z < 0 \end{cases}$ جهت منفی محور zها (به جز مبدا)

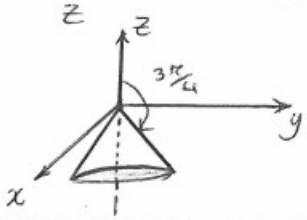
هـ) $\varphi = \pi/2 \longrightarrow \begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \longrightarrow x = r\cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \longrightarrow y = r\sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \longrightarrow z = 0 \end{cases}$ معادله صفحه xy $y = \tan\theta\, x$

و) $\varphi = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \tan\varphi = 1 \longrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = 1 \longrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{z \geq 0} z^2 = x^2 + y^2$



نیم مخروط دوار (رو به بالا)

ز) $\varphi = \frac{3\pi}{4} \longrightarrow \tan\varphi = -1 \longrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = -1 \longrightarrow z = -\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{z < 0} z^2 = x^2 + y^2$



نیم مخروط دوار (رو به پایین)

نکته: به طور کلی هر معادله به صورت $\varphi = \varphi_0$ (φ_0: زاویه دلخواه) که در آن $0 < \varphi_0 < \pi/2$ یا $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$ ($\varphi_0 \neq 0, \pi/2, \pi$) یک نیم مخروط دوار را توصیف می‌کند.

نکته: به طور کلی هر معادله به صورت $\rho = \rho_0$ (ρ_0: مقدار) معادله کره ای به مرکز مبدا و به شعاع $\sqrt{\rho_0}$ است.

نکته: اگر ρ یا φ مقادیر ثابتی داشتند آنها را در فرمولهای: $\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$ قرار می‌دهیم تا رابطه x و y و z بدست آید.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) رویه‌های زیر را توصیف کنید؟

الف) $\begin{cases} z=r \\ \theta=\pi/3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=r\cos\pi/3=\frac{1}{2}r \\ y=r\sin\pi/3=\frac{\sqrt{3}}{2}r \rightarrow 2x=\frac{2}{\sqrt{3}}y=z \\ z=r \end{cases}$ معادله خط

ب) $z=r^2 \longrightarrow z=x^2+y^2$ سهمی‌گون دوار

ج) $\begin{cases} \varphi=\pi/4 \longrightarrow \begin{cases} r=\rho\sin\varphi \rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \\ z=\rho\cos\varphi \rightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \end{cases} \rightarrow r=z \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=z \xrightarrow{z\geq 0} x^2+y^2=z^2 \\ \theta=\pi/4 \longrightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}r \\ y=r\sin\theta \rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}r \end{cases} \rightarrow x=y \rightarrow x-y=0 \end{cases}$

نیم‌مخروط

معادله صفحه

محل تقاطع رویه‌های فوق یک خط گذرنده از مبدا است.

د) $\begin{cases} \rho=4\cos\varphi \xrightarrow{\times\rho} \rho^2=4\rho\cos\varphi \longrightarrow x^2+y^2+z^2=4z \longrightarrow x^2+y^2+(z-2)^2=4 \\ \theta=\pi/2 \longrightarrow x=0 \end{cases}$

کره‌ای به شعاع 2 و مرکز $(0,0,2)$

معادله صفحه yz

تقاطع دو رویه فوق یک دایره خواهد بود.

هـ) $\rho\sec\theta=\sin\varphi(1+\tan\theta)+\cos\varphi\sec\theta$

$$\frac{\rho}{\cos\theta}=\sin\varphi+\sin\varphi\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \xrightarrow{\times\rho\cos\theta} \rho^2=\rho\cos\theta\sin\varphi+\rho\sin\varphi\sin\theta+\rho\cos\varphi$$

$\rightarrow x^2+y^2+z^2=x+y+z \rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$ کره به مرکز $\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ و شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$

و) $\cot\varphi\cos\varphi-\sin\varphi-\csc\varphi\,\rho^{-2}=0$

$$\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}-\sin\varphi-\frac{1}{\rho^2\sin\varphi}=0 \xrightarrow{\times\rho^2\sin\varphi} \rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi-1=0 \rightarrow z^2-r^2=1$$

$\rightarrow z^2-x^2-y^2=1$ هذلولی‌گون دوپارچه به موازات محور zها (دوار)

ز) $r=\frac{2}{2-\cos\theta} \rightarrow 2r-r\cos\theta=2 \rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}-x=2 \rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=2+x$

$\rightarrow 4x^2+4y^2=(x+2)^2 \rightarrow 3x^2+4y^2-4x=4$ استوانه‌ای حول محور zها خم مولدش بیضی

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

ج) $\begin{cases} z=2 & \longrightarrow \text{صفحه} \\ r=\ln z & \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\ln 2 \longrightarrow x^2+y^2=\ln^2 2 \end{cases}$ تقاطع در رویه دایره به مرکز 0 و شعاع $\ln 2$.

---

b) $\sec\theta(\cos 2\theta - \cot^2\varphi) = \rho^{-1}\csc\varphi$

$$\frac{1}{\cos\theta}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta - \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right) = \frac{1}{\rho\sin\varphi} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}$$

$$\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta - \sin^2\theta\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right) = \frac{1}{\rho\sin\varphi} \longrightarrow \sin^2\varphi\cos^2\theta - \sin^2\varphi\sin^2\theta - \cos^2\varphi = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\rho}$$

$$\xrightarrow{\times\rho^2} \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\varphi = \rho\cos\theta\sin\varphi \longrightarrow x^2-y^2-z^2=x$$

$$\longrightarrow \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 - z^2 = \tfrac{1}{4}$$ هذلولی‌گون دوپارچه به موازات محور xها (دوار)

تمرین رویه‌های زیر را توصیف کنید؟

الف) $\begin{cases} \sin(\varphi+\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho^{-1} & \text{[جواب: مخروط]} \\ \theta = \pi/3 & \text{[جواب: معادله صفحه]} \end{cases}$

ب) $\rho\csc\varphi = \sin\theta - 2\cos\theta - \cot\varphi$ [جواب: معادله کره]

ج) $\begin{cases} \varphi = \pi/3 \\ \theta = \pi/6 \end{cases}$ [جواب: معادله صفحه و مخروط]

د) $\rho^2\cos 2\phi = a^2$ [جواب: هذلولیوار دوپارچه]

مثال معادله دکارتی خطی را بیابید که در مختصات کروی معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} \varphi = \pi/3 \longrightarrow \begin{cases} z = \rho\cos\pi/3 \longrightarrow z = \rho/2 \\ r = \rho\sin\pi/3 \longrightarrow r = \frac{\sqrt{3}\rho}{2} \end{cases} \longrightarrow \sqrt{3}z = r \xrightarrow{z^2} 3z^2 = x^2+y^2 \quad \text{نیم مخروط دوار} \\ \theta = \pi/6 \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\pi/6 \longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ y = r\sin\pi/6 \longrightarrow y = \frac{1}{2}r \end{cases} \longrightarrow x = \sqrt{3}y \quad \text{صفحه} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{با مخروط تقاطع می‌دهیم}} 3z^2 = 3y^2 + y^2 \longrightarrow 3z^2 = 4y^2 \longrightarrow \sqrt{3}z = \mp 2y$$ معادلات خط

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) معادلات پارامتری $x=x(\theta)$ ، $y=y(\theta)$ ، $z=z(\theta)$ را برای خمی که فصل مشترک کره $\rho=a$ با صفحه $y+z=0$ پیدا کنید؟ معادلات کروی y و z را در معادله صفحه دکارتی قرار می‌دهیم.

$y=\rho\sin\varphi\sin\theta \qquad x=\rho\sin\varphi\cos\theta \qquad z=\rho\cos\varphi \qquad \rho=a$

$y=-z \longrightarrow \rho\sin\varphi\sin\theta=-\rho\cos\varphi \longrightarrow \sin\theta=-\cot\varphi$

$1+\sin^2\theta=1+\cot^2\varphi=\dfrac{1}{\sin^2\varphi} \longrightarrow \sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$

$x=\rho\sin\varphi\cos\theta \longrightarrow x=\dfrac{a\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} \qquad y=\rho\sin\varphi\sin\theta=a\sin\theta\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}\right)$

$z=-y \Longrightarrow z=-a\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$

تذکر: مسئله خواسته که x و y و z را برحسب $f(\theta)$ بنویسیم چون این پارامترها وابسته به φ هم هستند پس ابتدا φ را برحسب تابعی از θ محاسبه کردیم.

مثال) معادله $r^2+z^2=4r\cos\theta+6r\sin\theta+2z$ معادله یک کره در مختصات استوانه‌ای است مختصات دکارتی مرکز کره را بدست آورید؟

$x^2+y^2+z^2=4x+6y+2z$

$\longrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=14$ کره‌ای به مرکز $(2,3,1)$ است.

مثال) معادلات زیر را در مختصات کروی بیان کنید؟

الف) $x^2-y^2=z^2 \longrightarrow \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta=\rho^2\cos^2\varphi$

$\longrightarrow \sin^2\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\cos^2\varphi \Longrightarrow \cos 2\theta=\cot^2\varphi$

ب) $x^2+y^2=z^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2-z^2=z^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2=2z^2$

$\longrightarrow \rho^2=2\rho^2\cos^2\varphi \longrightarrow \cos^2\varphi=1/2 \longrightarrow \cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \varphi=\pi/4$

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) فاصلهٔ بین دو نقطه را بر حسب مختصات استوانه‌ای و کروی تعیین کنید؟

استوانه‌ای: $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \rightarrow d=\sqrt{(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0)^2+(r\sin\theta-r_0\sin\theta_0)^2+(z-z_0)^2}$

$$d=\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0)+(z-z_0)^2} \rightarrow d=\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0(\cos(\theta-\theta_0))+(z-z_0)^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} r=\rho\sin\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

مستقیم از فاصله در مختصات استوانه‌ای شروع می‌کنیم.

کروی: $d=\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+\rho_0^2\sin^2\varphi_0-2\rho\rho_0\sin\varphi\sin\varphi_0(\cos(\theta-\theta_0))+(\rho\cos\varphi-\rho_0\cos\varphi_0)^2}$

$$d=\sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+\rho_0^2(\sin^2\varphi_0+\cos^2\varphi_0)-2\rho\rho_0\sin\varphi\sin\varphi_0(\cos(\theta-\theta_0))-2\rho\rho_0\cos\varphi\cos\varphi_0}$$

$$d=\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0(\sin\varphi\sin\varphi_0(\cos(\theta-\theta_0))-\cos\varphi_0\cos\varphi)}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

توابع برداری و معادله حرکت:

یک تابع برداری تابعی است مانند $R: R \to R^3$ که در حالت کلی به صورت زیر داده می‌شود:

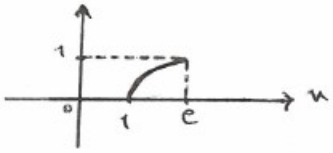
$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad a \leq t \leq b$$

که به هر عدد حقیقی مانند t یک بردار در فضا و صفحه نسبت می‌دهد. منحنی یک خم (منحنی) نامیده می‌شود که در واقع مسیر حرکت یک ذره را نشان می‌دهد از این رو این گونه توابع را معادلات حرکت می‌نامیم.

نکته: $R(t)$ را معادله پارامتری خم نیز می‌گویند. اگر بخواهیم رابطه دکارتی بین z و y و x را بدست آوریم کافیست از دستگاه: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ پارامتر t را حذف کنیم رابطه مستقیم بین z و y و x بدست می‌آید.

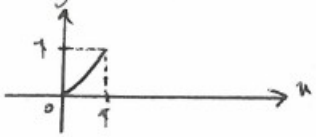
مثال مسیر حرکت یک ذره با معادله $R(t) = ti + \ln t\, j$ $\quad 1 \leq t \leq e$ را مشخص کنید؟

$$\begin{cases} x = t \\ y = \ln t \end{cases} \to y = \ln x \qquad 1 \leq x \leq e$$



مثال مسیر حرکت یک ذره با معادله $R(t) = t^2 i + t^4 j$ $\quad 0 \leq t \leq 2$ را مشخص کنید؟

$$\begin{cases} x = t^2 \to t = \sqrt{x} \\ y = t^4 \to y = x^2 \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq 2 \qquad \text{سهمی}$$



حد توابع برداری:

اگر $\vec{R}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \to \lim\limits_{t \to t_0} R(t) = \lim\limits_{t \to t_0} x(t)i + \lim\limits_{t \to t_0} y(t)j + \lim\limits_{t \to t_0} z(t)k$

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} R(t) = l_1 i + l_2 j + l_3 k = \vec{l}$$

یک بردار ثابت در فضا

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) اگر $R(t)=\sqrt{1-t^2}\,i+\frac{\sin t}{t}j+e^{2t}k$ باشد حد تابع را وقتی $t\to 0$ بدست آورید؟

$$\lim_{t\to 0} R(t)=\lim_{t\to 0}\sqrt{1-t^2}\,i+\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}j+\lim_{t\to 0}e^{2t}k=i+j+k$$

مثال) آیا تابع $R(t)=(t^2+1)i+\sin\frac{1}{t}j$ در $t=0$ دارای حد است؟

چون تابع $\sin\frac{1}{t}$ در $t=0$ حد ندارد پس $R(t)$ دارای حد در $t=0$ نیست.

پیوستگی توابع برداری:

تابع برداری $R(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ در نقطه $t=t_0$ پیوسته است اگر و فقط اگر تابع مؤلفه ای آن هر سه در t_0 پیوسته باشند.

مثال) پیوستگی $R(t)=\frac{1}{2t-1}i+\frac{\sin t}{t}j+e^{t^2}k$ بررسی کنید؟

$x(t)=\frac{1}{2t-1}\to t\neq\frac{1}{2}$ $\quad y(t)=\frac{\sin t}{t}\to t\neq 0$ $\quad z(t)=e^{t^2}$ همه جا پیوسته

مجموعه نقاط پیوستگی $R-\{0,\frac{1}{2}\}$

مثال) پیوستگی تابع زیر را بررسی کنید؟

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t}i+(t^2+1)j+\tan t\,k & t\neq 0\\ i+j & t=0\end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}i+\lim_{t\to 0}(t^2+1)j+\lim_{t\to 0}\tan t\,k=i+j$$

در همه نقاط R پیوستگی داریم.

مشتق توابع برداری:

مشتق تابع برداری $R(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$V(t)=\frac{dR(t)}{dt}=x'(t)i+y'(t)j+z'(t)k$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$V(t)$ تابع برداری سرعت ذره و $|V(t)|$ اندازه سرعت (قدر حرکت) در لحظه t می‌باشد.

جهت حرکت: $\frac{V(t)}{|V(t)|}$

شتاب حرکت ذره نیز عبارت است از: $a(t) = \frac{d^2R(t)}{dt^2} = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k$

مثال) بردار $R(t) = 3\cos t\, i + 3\sin t\, j + t^2 k$ موقعیت ذره در زمان t است:

الف- در لحظه $t=2$ سرعت و جهت حرکت ذره را حساب کنید؟

ب- در چه لحظه‌ای سرعت و شتاب ذره بر هم عمودند؟

الف) $R(t) = 3\cos t\, i + 3\sin t\, j + t^2 k \longrightarrow V(t) = \frac{dR}{dt} = -3\sin t\, i + 3\cos t\, j + 2t k$

$a(t) = \frac{d^2R}{dt^2} = -3\cos t\, i - 3\sin t\, j + 2k$ سرعت: $|V(2)| = \sqrt{(-3\sin 2)^2 + (3\cos 2)^2 + 4^2} = 5$

جهت حرکت: $\frac{V(2)}{|V(2)|} = -\frac{3}{5}\sin 2\, i + \frac{3}{5}\cos 2\, j + \frac{4}{5}k$

ب) $V \cdot a = 0 \longrightarrow 9\sin t\cos t - 9\sin t\cos t + 4t = 0 \longrightarrow t = 0$ در لحظه صفر سرعت و شتاب عمودند.

اگر $R(t)$ یک تابع برداری و t خود تابعی برحسب s باشد به موجب قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dR}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

قواعد مشتق گیری:

فرض کنید $R_1(t)$ و $R_2(t)$ توابع برداری باشند و C عددی ثابت باشد داریم:

1) $\frac{d}{dt}(C \cdot R_1(t)) = C\frac{dR_1(t)}{dt}$

2) $\frac{d}{dt}(R_1(t) \cdot R_2(t)) = \frac{dR_1(t)}{dt} \cdot R_2(t) + \frac{dR_2(t)}{dt} \cdot R_1(t)$

3) $\frac{d}{dt}(R_1(t) \times R_2(t)) = \frac{dR_1(t)}{dt} \times R_2(t) + R_1(t) \times \frac{dR_2(t)}{dt}$ ترتیب مهم است

4) $\frac{d}{dt}(R_1(t) \mp R_2(t)) = \frac{dR_1(t)}{dt} \mp \frac{dR_2(t)}{dt}$

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) اگر $R_1(t)=e^t i+(2t+1)j+\cos t\,k$ و $R_2(t)=2\cos t\, i+2\sin t\, j+2t\,k$ باشد حاصل

$\frac{d}{dt}(R_1(t)\times R_2(t))$ را در $t=0$ حساب کنید؟

$$\frac{d}{dt}(R_1(0)\times R_2(0))=R_1'(0)\times R_2(0)+R_1(0)\times R_2'(0)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2j-2k$$

$$R_1'(t)=e^t i+2j-\sin t\,k \longrightarrow R_1'(0)=i+2j$$

$$R_2'(t)=-2\sin t\, i+2\cos t\, j+2k \longrightarrow R_2'(0)=2j+2k$$

$$R_1(0)=i+j+k \qquad R_2(0)=2i$$

قضیه: هرگاه $R(t)$ یک تابع برداری با اندازهٔ ثابت باشد آنگاه $\frac{dR}{dt}$ و R بر هم عمودند (عکس این مطلب نیز صادق است).

$$(R(t))=C \longleftrightarrow R\perp\frac{dR}{dt}$$

اثبات: فرض کنیم اندازه $R(t)$ ثابت باشد: $R\cdot R=|R|^2=C^2=$ ثابت

$$\frac{d}{dt}(R\cdot R)=0 \longrightarrow \frac{dR}{dt}R+\frac{dR}{dt}R=0 \longrightarrow 2\frac{dR}{dt}\cdot R=0 \longrightarrow \frac{dR}{dt}\cdot R=0 \rightarrow R\perp\frac{dR}{dt}$$

انتگرال گیری از توابع برداری:

اگر $\vec{R(t)}=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ باشد داریم:

انتگرال نامعین

$$\int\vec{R}(t)dt=\int x(t)dt\,\vec{i}+\int y(t)dt\,\vec{j}+\int z(t)dt\,\vec{k}+\underbrace{C}_{\text{بردار ثابت}}$$

انتگرال معین

$$\int_a^b\vec{R}(t)dt=\int_a^b x(t)dt\,\vec{i}+\int_a^b y(t)dt\,\vec{j}+\int_a^b z(t)dt\,\vec{k}$$

مثال) اگر $\frac{dR}{dt}=\cos t\, i-\sin t\, j+k$ باشد بردار موقعیت ذره $(R(t))$ را در صورتیکه $R(0)=2i+k$ بدست آورید؟

$$\frac{dR}{dt}=\cos t\, i-\sin t\, j+k \xrightarrow{\int} R(t)=\sin t\, i+\cos t\, j+tk+C$$

$$\xrightarrow{R(0)=2i+k} R(0)=\sin 0\, i+\cos 0\, j+0k+C=2i+k \rightarrow j+C=2i+k \rightarrow C=2i-j+k$$

$$\longrightarrow R(t)=(\sin t+2)i+(\cos t-1)j+(t+1)k$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین اگر $R(t)=e^t i+e^t \sin t\, j+e^t \cos t\, k$ باشد در لحظه $t=0$ زاویه بین بردار شتاب و سرعت ذره را بیابید؟

[جواب: $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$]

مثال فرض کنید $R(t)=e^t \cos t\, i+e^t \sin t\, j$

الف) نشان دهید: $a = 2v - 2R$

ب) نشان دهید که زاویه بین R و a ثابت است؟

ج) زاویه بین R و a را بیابید؟

$$v(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t)i+(e^t\sin t+e^t\cos t)j$$

$$a(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t-e^t\sin t-e^t\cos t)i+(e^t\sin t+e^t\cos t+e^t\cos t-e^t\sin t)j$$

$$\rightarrow a(t)=-2e^t\sin t\, i+2e^t\cos t\, j$$

الف) $a=2v-2R \rightarrow -2e^t\sin t\, i+2e^t\cos t\, j \rightarrow$

$$=(2e^t\cos t-2e^t\sin t)i+(2e^t\sin t+2e^t\cos t)j-(2e^t\cos t\, i+2e^t\sin t)j$$

$\rightarrow -2e^t\sin t\, i+2e^t\cos t\, j=-2e^t\sin t\, i+2e^t\cos t\, j \rightarrow$ تساوی برقرار است

ب) $a\cdot R=-2e^{2t}\sin t\cos t+2e^{2t}\sin t\cos t=0$

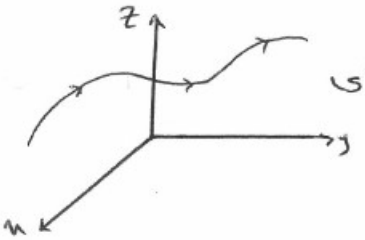
ج) $a\cdot R=0 \longrightarrow \theta=\pi/2$

تعریف: مسیر پیموده شده توسط تابع برداری $\vec{R}(t)$ را یک مسیر (منحنی) هموار گوییم در صورتیکه $\vec{R}(t)$ دارای مشتق پیوسته باشد، و مشتق آن در هیچ نقطه‌ای صفر نباشد.

حسن پور

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا



تذکر: منحنی های هموار (توابع برداری هموار) منحنی هایی هستند که دارای شکستگی و گوشه نیز نیستند.

نکته: توابعی به فرم $R(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + bt^n k$ شکل مارپیچ به خود می گیرند و به ازای n های کوچک شکل مارپیچ فشرده تر و ازای n های بزرگ شکل مارپیچ بزرگتر می شود.

طول یک منحنی هموار $a \leq t \leq b$. $R(t) = x(t)\, i + y(t)\, j + z(t)\, k$ برابر است با:

$$L = \int_a^b |\vec{v}|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\; dt$$

مثال) طول یک دور گردش مارپیچ زیر را بیابید؟

$R(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t k$ * هنگامی که t از ۰ تا 2π تغییر کند مارپیچ یک دور کامل می سازد

$$L = \int_0^{2\pi} |\vec{v}|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\; dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}$$

تابع طول قوس (طول قوس به عنوان پارامتر) (فاصله جهت دار):

تابع طول قوس: $S(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(\tau)|\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2}\; d\tau$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = |\vec{v}(t)| > 0 \longrightarrow \frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)|$$

نتیجه: S تابعی صعودی از متغیر t است. لذا یک به یک است و در نتیجه معکوس پذیر است.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{v}|}$$

تمرین) طول خم زیر را از $t = -\pi$ تا $t = \pi$ بیابید؟

$R(t) = e^t \cos t\, i + e^t \sin t\, j + e^t k$ [جواب: $L = \sqrt{3}(e^{\pi} - e^{-\pi})$]

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

طول خم تابع $y=f(x)$ ، $a\leq x\leq b$ از رابطه زیر بدست می‌آید: طول خم: $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

اثبات: خم را پارامتری می‌کنیم $R(t)=ti+f(t)j$

$$\begin{cases} x=t \longrightarrow x'=1 \\ y=f(t) \longrightarrow y'=f'(t) \end{cases}$$

طول خم: $\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(t)}\,dt \xrightarrow[dt=dx]{t\to x} L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

نکات مهم پارامتری سازی:

① معادله پارامتری خمی به صورت $a\leq x\leq b$ ، $y=f(x)$ عبارت است از:

$$\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases} \quad a\leq t\leq b \qquad R(t)=ti+f(t)j \qquad a\leq t\leq b$$

② معادله پارامتری خمی به صورت $c\leq y\leq d$ ، $x=g(y)$ عبارت است از:

$$\begin{cases} y=t \\ x=g(t) \end{cases} \quad c\leq t\leq d \qquad R(t)=g(t)i+tj \qquad c\leq t\leq d$$

③ معادله پارامتری یک دایره به مرکز (α,β) و شعاع a عبارت است از:

$$R(t)=(a\cos t+\alpha)i+(a\sin t+\beta)j \qquad (\cos^2 t+\sin^2 t=1)$$

در حالت کلی $\square^2+\bigcirc^2=1 \longrightarrow \begin{cases} \square=\cos t \\ \bigcirc=\sin t \end{cases}$

④ معادله پارامتری یک هذلولی عبارت است از: $R(t)=a\sinh t\, i+b\cosh t\, j$

در حالت کلی $\square^2-\bigcirc^2=1 \longrightarrow \begin{cases} \square=\cosh t \\ \bigcirc=\sinh t \end{cases} \qquad (\cosh^2 t-\sinh^2 t=1)$

مثال) معادله $2y^2-x^2=3$ را پارامتری کنید؟

$2y^2-x^2=3 \rightarrow \frac{2y^2}{3}-\frac{x^2}{3}=1$

$\rightarrow \left(\frac{y}{\sqrt{3/2}}\right)^2-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=1 \longrightarrow \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{3/2}}=\cosh t \rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cosh t \\ \frac{x}{\sqrt{3}}=\sinh t \rightarrow x=\sqrt{3}\sinh t \end{cases} \rightarrow$

$R(t)=(\sqrt{3}\sinh t)i+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cosh t\right)j$

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) بیضی $3x^2+4y^2=4$ را پارامتری کنید؟

$$3x^2+4y^2=4 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{3}}+y^2=1$$

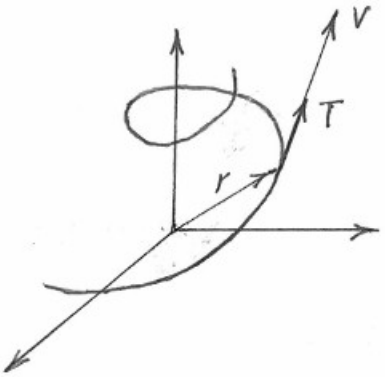
$$\rightarrow \left(\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2+y^2=1 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\cos t \rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}=\cos t \\ \frac{y}{1}=\sin t \rightarrow y=\sin t \end{cases} \rightarrow R(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\, i+\sin t\, j$$

مثال) محیط یک دایره به شعاع a را محاسبه کنید؟

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \quad 0\leq t\leq 2\pi$$

$$\text{محیط} = \text{طول خم} = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2}\,dt=2\pi a$$

تذکر: مرکز دایره در حل مسئله تأثیری نداشت پس مرکز دایره را مبدأ گرفتیم.



تعریف: بردار مماس واحد (T):

اندازهٔ بردار مماس (T) واحد (یک) است و همجهت با بردار $\vec{v}$ است.

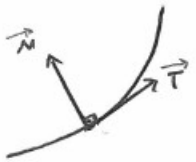
$$|\vec{T}|=1$$

$$\vec{T}=\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\rightarrow \vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

تعریف: بردار قائم واحد اصلی (N): این بردار به صورت زیر تعریف می‌شود و اندازهٔ $\vec{N}$ مانند بردار T برابر یک است. بردار N همواره به سمت تقعر خم می‌باشد.

$$\vec{N}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|} \qquad |\vec{N}|=1$$



مثال) بردار قائم اصلی بر دایره $R(t)=a\cos t\, i+a\sin t\, j$ را تعیین کنید؟

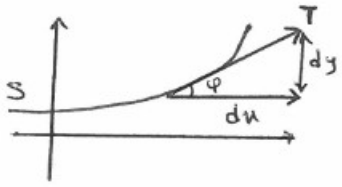
$$T(t)=\frac{v}{|v|} \rightarrow v(t)=\frac{dR}{dt}=-a\sin t\, i+a\cos t\, j \rightarrow |v|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=a$$

$$T(t)=-\sin t\, i+\cos t\, j \qquad N(t)=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|} \rightarrow \begin{cases} \frac{dT}{dt}=-\cos t\, i-\sin t\, j \\ \left|\frac{dT}{dt}\right|=\sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2}=1 \end{cases}$$

$$N(t)=-\cos t\, i-\sin t\, j$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

انحنای (خمیدگی) یک منحنی مسطح: انحنا را با حرف K (کاپا) نشان می‌دهیم و عبارت است از:



زمانی که یک خم واقع در صفحه حرکت می‌کند با چرخیدن به چپ و راست بردار T نیز به چپ یا راست می‌چرخد فرض کنید

زاویه بین T و محور xها (بردار i) زاویه φ باشد در این صورت آهنگ چرخش T را می‌توان با اندازه‌گیری تغییرات زاویه φ نسبت به طول قوس (S) مشخص کرد که آن را خمیدگی خم می‌نامند و به عبارت دیگر خمیدگی هر خم در هر لحظه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| \qquad \tan\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt}\underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{|v|}} = \frac{\frac{\dot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}}{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}} \Rightarrow K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

فرمولهای کاربردی:

اگر: $R(t) = x(t)i + y(t)j \rightarrow K = \frac{|v \times a|}{|v|^3}$

اگر: $y = f(x) \longrightarrow K = \frac{|f''(x)|}{|1+f'^2(x)|^{3/2}}$

مثال نشان دهید انحنای یک دایره به شعاع a برابر با مقدار ثابت $\frac{1}{a}$ است.

(تذکر: مرکز دایره در حل مسئله تأثیری ندارد و مبدا را فرض می‌کنیم) $0 \le t \le 2\pi$

$R(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j$

$v(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j \longrightarrow |v| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = a$

$a(t) = -a\cos t\, i - a\sin t\, j$

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & 0 \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)k = a^2 k \rightarrow |v \times a| = a^2$$

$$K = \frac{|v \times a|}{|v|^3} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}$$

تمرین انحنای منحنی $R(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + bt\, k$ را در نقطه $(-a, 0, b\pi)$ بدست آورید؟

$$\left[\text{جواب}: \quad K = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{a}{a^2+b^2}\right]$$

تذکر: زمانی که بیشترین و کمترین خمیدگی (انحنا) را بخواهیم حساب کنیم کافی است ابتدا خمیدگی را محاسبه کرده و بعد مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم نقاط بحرانی بدست آمده را در K جایگذاری می‌کنیم.

مثال در چه نقطه خمیدگی مسیر $y = e^x$ مینیمم است، مقدار انحنا را بدست آورید؟

$$K = \frac{|f''(x)|}{|1+f'(x)^2|^{3/2}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}} \longrightarrow \frac{dK}{dx} = 0 \longrightarrow \frac{dK}{dx} = \frac{e^x(1+e^{2x})^{3/2} - \frac{3}{2}\times 2e^{2x}e^x(1+e^{2x})^{1/2}}{(1+e^{2x})^3} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{صورت = 0 قرار می‌دهیم}} e^x(1+e^{2x})^{3/2} = 3e^{3x}(1+e^{2x})^{1/2}$$

$$\longrightarrow 1+e^{2x} = 3e^{2x} \longrightarrow 1 = 2e^{2x} \longrightarrow e^{2x} = 1/2 \longrightarrow 2x = \ln(1/2) \longrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(1/2)$$

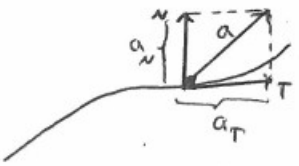
$$K = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}} = \frac{e^{\ln(1/2)^{1/2}}}{(1+e^{\ln 1/2})^{3/2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{3}{2})^{3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

نقطه: $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

مولفه‌های مماس و قائم شتاب:

$$\vec{a} = \underbrace{a_T}_{\text{مماس}}\vec{T} + \underbrace{a_N}_{\text{قائم}}\vec{N}$$

$$\begin{cases} a_T = \frac{d}{dt}|\vec{v}| \\ a_N = K|\vec{v}|^2 \end{cases} \longrightarrow |\vec{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2 \longrightarrow a_N = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_T^2}$$



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) $R(t)=t\cos t\, i + t\sin t\, j + t^2 k$ مسیر حرکت یک منحنی است در لحظه $t=0$ شتاب را به صورت مجموع مؤلفه های مماسی و قائم بنویسید؟

$$\vec{v}(t)=R'(t)=(\cos t - t\sin t)i+(\sin t + t\cos t)j+2t\,k \rightarrow |\vec{v}(t)|=\sqrt{1+t^2+4t^2}=\sqrt{1+5t^2}$$

$$a_T=\frac{d}{dt}|v(t)|=\frac{10t}{2\sqrt{1+5t^2}}=\frac{5t}{\sqrt{1+5t^2}} \longrightarrow a_T(t)=\frac{5t}{\sqrt{1+5t^2}}=0 \longrightarrow \boxed{a_T(0)=0}$$

$$a(t)=(-2\sin t - t\cos t)i+(2\cos t - t\sin t)j+2k \longrightarrow a(0)=2j+2k \rightarrow |\vec{a}(0)|=\sqrt{8}$$

$$\vec{a}_N(0)=\sqrt{|a(0)|^2-a_T^2(0)}=\sqrt{8} \longrightarrow \boxed{a_N(0)=\sqrt{8}}$$

مثال) انحنای منحنی $y=\sin^{-1}x$ را در نقطه $(\frac{1}{2}, \pi/6)$ بدست آورید؟

$$K=\frac{|y''_x|}{|1+y'^2_x|^{3/2}}=\frac{|x''_y|}{|1+x'^2_y|^{3/2}} \xrightarrow{\text{پس}} y=\sin^{-1}x \longrightarrow \sin y = x$$

$$K=\frac{|-\sin y|}{(1+\cos y^2)^{3/2}} \xrightarrow{y=\pi/6} K=\frac{|-1/2|}{(1+\frac{3}{4})^{3/2}}=\frac{4}{7\sqrt{7}}$$

دایره انحنا (بوسان) برای منحنی های مسطح :

دایره ای در صفحه بوسان که شعاعش $\rho(t)$ و مرکزش نوک بردار انحنا است.

ویژگی های دایره بوسان:

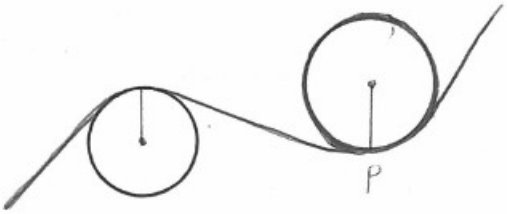
① دایره بر خم در نقطه p مماس است.

② انحنای خمیدگی خم در نقطه p با خمیدگی دایره برابر است.

③ دایره بوسان در طرف تقعر (درون خم) واقع است.

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

برای بدست آوردن معادله دایرهٔ بوسان فرض می‌کنیم که مرکز آن (α,β) و شعاع آن ρ باشد.



در این صورت معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

ρ: چون خمیدگی خم در نقطهٔ P با خمیدگی دایره بوسان برابر است و همچنین خمیدگی دایره عکس شعاع آن است پس اگر خمیدگی را K فرض کنیم آنگاه: $\boxed{\rho=\frac{1}{K}}$

(α,β): الف- چون خم و دایره در نقطه P بر هم مماس اند پس شیب خطوط مماس بر آنها در نقطهٔ P برابر است پس مشتق معادلهٔ خم و مشتق معادلهٔ دایره به ازای نقطهٔ P برابر است با برقراری این تساوی یک رابطه بین α و β بدست می‌آید.

ب- از طرفی معادلهٔ دایرهٔ بوسان از نقطهٔ P می‌گذرد پس باید نقطهٔ P در دایرهٔ بوسان صدق کند و از این هم یک رابطه بین β و α بدست می‌آید با تشکیل یک دستگاه α و β بدست می‌آید.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \longrightarrow \text{دایره}\ \frac{dy}{dx}=\frac{-2(x-\alpha)}{2(y-\beta)}=\frac{-(x-\alpha)}{y-\beta} \qquad (\text{مشتق ضمنی})$$

نکته: ممکن است α و β های زیادی از حل دستگاه حاصل شود. آن (α,β) مورد قبول است که در طرف تقعر منحنی باشد.

مثال: معادله دایره بوسان خم $y=e^x$ را در $x=0$ بدست آورید؟

$$y=e^x \longrightarrow x=0 \longrightarrow y=e^0=1 \longrightarrow P(0,1) \qquad K=\frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{3/2}} \longrightarrow K(0)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{شعاع انحنا}} \rho=2\sqrt{2}$$

الف:

$$y'=e^x \longrightarrow y'_{P(0,1)}=e^0=1 \quad \text{I}$$

$$y'_{\text{دایره}}=\frac{-(x-\alpha)}{(y-\beta)} \longrightarrow y'_{\text{دایره}(0,1)}=\frac{\alpha}{1-\beta} \quad \text{II}$$

$$\xrightarrow{\text{I}=\text{II}} \frac{\alpha}{1-\beta}=1 \quad (*)$$

ب:

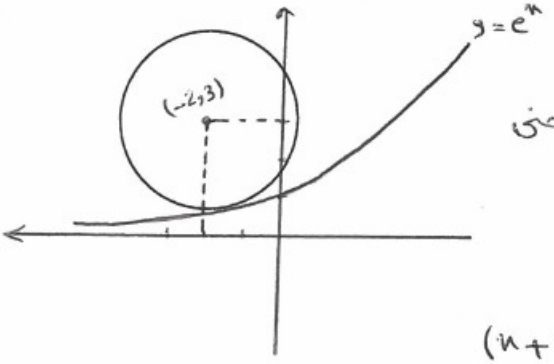
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \longrightarrow \text{نقطهٔ P صدق می‌کند}\ (0-\alpha)^2+(1-\beta)^2=8 \longrightarrow \alpha^2+(1-\beta)^2=8 \quad (**)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(*),(**)\begin{cases}\alpha = 1-\beta \\ \alpha^2+(1-\beta)^2 = 8 \longrightarrow \alpha^2+\alpha^2 = 8 \longrightarrow \begin{cases}\alpha = -2 \longrightarrow \beta = 3 \\ \alpha = 2 \longrightarrow \beta = -1\end{cases}\end{cases}$$

مرکز : $(-2,3)$ ✓

مرکز : $(2,-1)$ غ ق ق



دلیل : شکل $y=e^x$ را رسم می‌کنیم دایرهٔ بوسان باید در طرف تقعر منحنی باشد پس β باید از 1 بیشتر باشد.

معادلهٔ دایره بوسان : $(x+2)^2+(y-3)^2=8$

تمرین معادلهٔ دایرهٔ بوسان $y=\ln x$ را در نقطهٔ $x=0$ بیابید؟ [جواب : $(x-3)^2+(y+2)^2=8$]

تمرین منحنی به معادله $y=x^2-\sin x$ مفروض است معادله دایره بوسان را بیابید؟ [جواب : $(x-1)^2+(y-1)^2=2$]

مثال معادله دایره خمیدگی خم مسطح زیر را بیابید؟ (در $t=1$)

$$R(t)=2\ln t\, i-(t+\frac{1}{t})j \xrightarrow{\begin{cases}x=2\ln t \xrightarrow{t=1} p(0,-2) \\ y=-(t+1/t)\end{cases}} v(t)=\frac{2}{t}i+(-1+\frac{1}{t^2})j \longrightarrow a(t)=-\frac{2}{t^2}i-\frac{2}{t^3}j$$

$$v(1)=2i \longrightarrow |v(1)|=2 \qquad a(1)=-2i-2j$$

$$|v(1)\times a(1)| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0\end{matrix}\right\| = 4 \qquad K=\frac{|v\times a|}{|v|^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \longrightarrow \rho=2 : \text{شعاع انحنا}$$

$$y'_{\text{خم}} = y'_{\text{دایره}} \longrightarrow \begin{cases} y'_{\text{خم}} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-1+\frac{1}{t^2}}{\frac{2}{t}} \longrightarrow y'_{\text{خم}}(t=1)=0 \quad (*) \\ y'_{\text{دایره}} = y'_p = \dfrac{-(x-\alpha)}{(y-\beta)} \longrightarrow y'_{(0,-2)} = \dfrac{\alpha}{-2-\beta} \quad (**)\end{cases} \xrightarrow{(*)=(**)} \alpha=0$$

نقطهٔ p در دایره صدق می‌کند $\rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \rightarrow (0-\alpha)^2+(-2-\beta)^2=4 \xrightarrow{\alpha=0} -2-\beta=\mp 2$ ↗ $\beta=-4$ ✓ ق ق ، ↘ $\beta=0$ غ ق ق

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

دلیل انتخاب $\beta=-4$ را از رسم منحنی هم می‌توان متوجه شد چون دایره بوسان باید در جهت تقعر منحنی باشد.

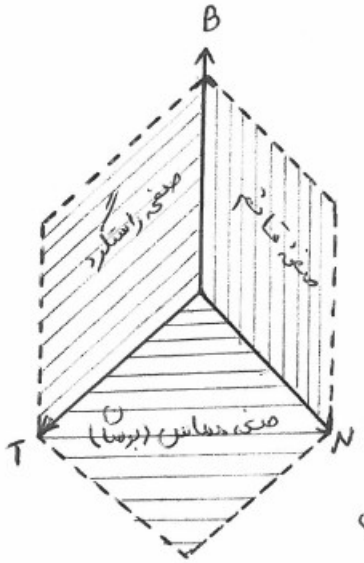
$$y(t)=-\underbrace{\left(t+\frac{1}{t}\right)}_{\geq 2} \xrightarrow{\text{همواره}} y(t)\leq -2 \rightarrow \beta=0 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

معادلهٔ دایره بوسان: $(x)^2+(y+4)^2=4$ ،

بردار یکه قائم درم ($\vec{B}$): بردار $\vec{B}$ هم بردار واحد است که هم بر بردار $\vec{N}$ و هم بر بردار $\vec{T}$ عمود است.

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N} \longrightarrow |\vec{B}|=|\vec{T}||\vec{N}|\sin\frac{\pi}{2}=1$$

سه بردار B و N و T در هر نقطه از یک خم سه بردار واحد دو به دو عمود بر هم تشکیل می‌دهند که یک دستگاه متحرک راستگرد (فرنه) را تشکیل می‌دهند.



قاب فرنه: (TNB):

سه بردار $\vec{B}$ و $\vec{N}$ و $\vec{T}$ سه صفحه پدید می‌آورند به شرح زیر:

① صفحه قائم: این صفحه توسط بردارهای قائم $\vec{B}$ و $\vec{N}$ پدید می‌آیند بنابراین بردار (نرمال) عمود بر آن بردار $\vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ است که می‌توان به جای آن از $\vec{v}$ نیز استفاده کرد.

② صفحه راستگرد: این صفحه توسط بردارهای T و B پدید می‌آیند و لذا بردار نرمال آن بردار: $\vec{N}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|}$ است که می‌توان به جای آن از $\frac{dT}{dt}$ استفاده کرد.

③ صفحهٔ بوسان: این صفحه توسط بردارهای N و T پدید می‌آید و نرمال آن بردار $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ است که می‌توان به جای آن از $\vec{v}\times\frac{dT}{dt}$ استفاده کرد.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تاب (پیچش) منحنی فضایی: تاب در واقع آهنگ تغییرات B نسبت به طول قوس S است.

$$\tau = \left|\frac{dB}{ds}\right| \qquad \tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\left|V \times a\right|^2}$$

همیشه عددی مثبت است.

اگر در تمام لحظه‌ها (به ازای هر t) $\tau = 0$ شود می‌توان نتیجه گرفت منحنی مسطح است.

مثال تاب منحنی $R(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + bt\, k$ را بیابید؟

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}\right|^2} = \frac{b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)}{a^2(a^2+b^2)} \Rightarrow \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

تمرین اگر $R(t) = e^t \sin 2t\, i + e^t \cos 2t\, j + 2e^t k$ باشد در لحظه $t=0$ بردارهای T و N و B و انحنا را بدست آورید؟

جواب: $T(0) = \frac{1}{3}(2i + j + 2k)$ $\quad N(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} i - \frac{2}{\sqrt{5}} j$ $\quad B(0) = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4i + 2j - 5k)$

$k = \frac{2\sqrt{5}}{9}$

مثال خم C به معادله $R(t) = -3\cos t\, i + 3\sin t\, j + 4t\, k$ مفروض است معادله صفحه بوسان در $t = \pi/2$ را بدست آورید؟

$V(t) = 3\sin t\, i + 3\cos t\, j + 4k \rightarrow |V(t)| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5$

$\vec{T}(t) = \frac{3}{5}\sin t\, i + \frac{3}{5}\cos t\, j + \frac{4}{5} k \rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{3}{5}\cos t\, i - \frac{3}{5}\sin t\, j \rightarrow \left|\frac{dT}{dt}\right| = \frac{3}{5}$

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|} = \cos t\, i - \sin t\, j$$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{3}{5}\sin t & \frac{3}{5}\cos t & \frac{4}{5} \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}\sin t\, i + \frac{4}{5}\cos t\, j - \frac{3}{5} k$$

$$B(\pi/2) = \frac{4}{5} i - \frac{3}{5} k \xrightarrow[\text{صفحه}]{\text{بردار نرمال}} \begin{vmatrix} x = -3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 4t \end{vmatrix}_{t=\pi/2} \longrightarrow P_0 = \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 2\pi \end{vmatrix}$$

معادله صفحه بوسان: $\frac{4}{5}(x-0) + 0(y-3) - \frac{3}{5}(z - 2\pi) = 0$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) اگر $R(t)=\left(\int_0^t \sin(\frac{\pi}{2}u^2)\,du\right)i+\left(\int_0^t \cos(\frac{\pi}{2}u^2)\,du\right)j+(\sqrt{3}t)k$ مطلوبست محاسبه بردارهای T, N, B در $t=0$ ؟

نکته: $\frac{d}{dt}\left(\int_0^{g(t)} f(u)\,du\right)=g'(t)\,f(g(t))$

$$v(t)=\sin(\tfrac{\pi}{2}t^2)i+\cos(\tfrac{\pi}{2}t^2)j+\sqrt{3}k \rightarrow |v(t)|=\sqrt{\sin^2(\tfrac{\pi}{2}t^2)+\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t^2)+3}=2$$

$$T(t)=\frac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}t^2)i+\frac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}t^2)j+\frac{\sqrt{3}}{2}k \longrightarrow T(0)=\frac{j+\sqrt{3}k}{2}$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{2}\left[2t\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}t^2)\right]i-\frac{1}{2}\left[2t\tfrac{\pi}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}t^2)\right]j$$

$$\left|\frac{dT}{dt}\right|=\sqrt{\frac{t^2\pi^2}{4}\cos^2(\tfrac{\pi}{2}t^2)+\frac{t^2\pi^2}{4}\sin^2(\tfrac{\pi}{2}t^2)}=\frac{t\pi}{2} \qquad N(t)=\cos(\tfrac{\pi}{2}t^2)i-\sin(\tfrac{\pi}{2}t^2)j$$

$$N(0)=i \longrightarrow B(0)=T\times N=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2}j-\frac{1}{2}k$$

مثال) معادله صفحه بوسان، قائم، راست گرد را برای خم زیر در $t=0$ بنویسید.

$$R(t)=2\cos t\,i+2\sin t\,j+t\,k$$

$\rightarrow R(t=0)=(2,0,0)=$ نقطه مورد نظر

$\rightarrow v(t)=-2\sin t\,i+2\cos t\,j+k \rightarrow |v|=\sqrt{5}$

$$T(t)=\frac{-2}{\sqrt{5}}\sin t\,i+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t\,j+\frac{1}{\sqrt{5}}k \rightarrow \frac{dT}{dt}=\frac{-2}{\sqrt{5}}\cos t\,i-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t\,j$$

$$\left|\frac{dT}{dt}\right|=\sqrt{\frac{4}{5}\cos^2 t+\frac{4}{5}\sin^2 t}=\frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow N(t)=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|}=-\cos t\,i-\sin t\,j$$

$$\vec{T}(0)=\frac{2}{\sqrt{5}}j+\frac{1}{\sqrt{5}}k \qquad \vec{N}(0)=-i \qquad \vec{B}(0)=\vec{T}(0)\times\vec{N}(0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\frac{-1}{\sqrt{5}}j+\frac{2}{\sqrt{5}}k$$

صفحه قائم: $0(x-2)+\frac{2}{\sqrt{5}}(y-0)+\frac{1}{\sqrt{5}}(z-0)=0 \rightarrow \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}}z=0}$

صفحه راستگرد: $-1(x-2)+0(y-0)+0(z-0)=0 \rightarrow \boxed{x=2}$

صفحه بوسان: $0(x-2)-\frac{1}{\sqrt{5}}(y-0)+\frac{2}{\sqrt{5}}(z-0)=0 \rightarrow \boxed{\frac{-1}{\sqrt{5}}y+\frac{2}{\sqrt{5}}z=0}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ارتباط منحنی رویه‌ها و توابع برداری :

مثال) مسیر حرکت $\vec{r}(t) = (1-\cos t)i + (\cos t + \sin t)j + \sin^2 t\, k$ بر چه رویه‌ای درجه دومی واقع است؟

$$\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = \cos t + \sin t \\ z = \sin^2 t \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } t} \cos t = 1 - x$$

$$y = 1 - x + \sin t \rightarrow y + x - 1 = \sin t \xrightarrow{\text{توان } 2} (y+x-1)^2 = \sin^2 t$$

$$\rightarrow \boxed{(y+x-1)^2 = z}$$

مثال) مسیر حرکت $R(t) = (1+2t\cos t)i + (-3+t\sin t)j + (2t^2-1)k$ بر چه رویه درجه دومی واقع است؟

نام رویه را ذکر کنید؟

$$x = 1 + 2t\cos t \rightarrow \frac{x-1}{2} = t\cos t \rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} = t^2\cos^2 t$$

$$y = -3 + t\sin t \rightarrow y+3 = t\sin t \rightarrow (y+3)^2 = t^2\sin^2 t$$

$$\xrightarrow{+} \frac{(x-1)^2}{4} + (y+3)^2 = t^2 \quad \text{II}$$

$$z = 2t^2 - 1 \rightarrow \frac{z+1}{2} = t^2 \quad \text{I}$$

سهمی‌گون بیضوی به رأس $(1,-3,-1)$

جهت گشیدگی به سمت بالای محور zها

$$\text{I}, \text{II} \rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + (y+3)^2 = \frac{z+1}{2}$$

مثال) خم $R(t) = 2\sqrt{1+4^t}\, i + 2^t \sin 3t\, j + (2^t\cos 3t + 1)k$ معادله رنام رویه‌ای که این خم بر آن واقع است را مشخص کرده و آن را رسم کنید؟

$$x = 2\sqrt{1+4^t} \xrightarrow{x>0} \frac{x^2}{4} = 1 + 4^t \rightarrow \frac{x^2}{4} - 1 = 4^t \quad \text{I}$$

$$y = 2^t \sin 3t \rightarrow y^2 = 4^t \sin^2 3t$$

$$z = 2^t \cos 3t + 1 \rightarrow (z-1)^2 = 4^t \cos^2 3t$$

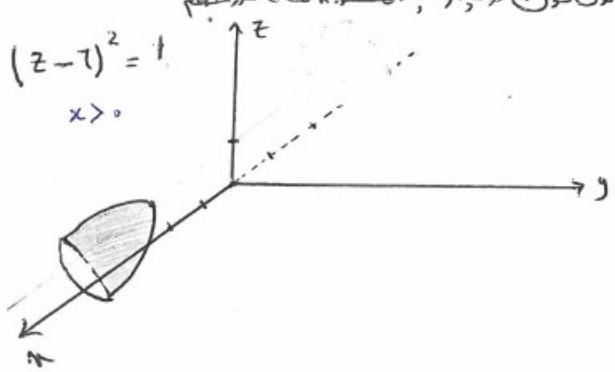
$$\rightarrow y^2 + (z-1)^2 = 4^t(\sin^2 3t + \cos^2 3t) = 4^t \quad \text{II}$$

هذلولی‌گون دوپارچه محور xها محور جسم

$$\text{I} = \text{II} \rightarrow \frac{x^2}{4} - 1 = y^2 + (z-1)^2 \rightarrow \frac{x^2}{4} - y^2 - (z-1)^2 = 1$$

$x > 0$

برای رسم $x = 2 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$



حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال) خم $R(t)=2e^{t}\cos 2t\, i+(e^{t}+1)j+(-1+e^{t}\sin 2t)\,k$ مفروض است معادله و نام رویه

درجه دومی که این خم بر آن واقع است را بیابید و آنرا رسم کنید؟

$x=2e^{t}\cos 2t \rightarrow \frac{x^2}{4}=e^{2t}\cos^2 2t$ (I)

$y=e^{t}+1 \rightarrow (y-1)^2=e^{2t}$ (II)

(I) + (III) $\rightarrow \frac{x^2}{4}+(z+1)^2=e^{2t}$ (IV)

$z=-1+e^{t}\sin 2t \rightarrow (z+1)^2=e^{2t}\sin^2 2t$ (III)

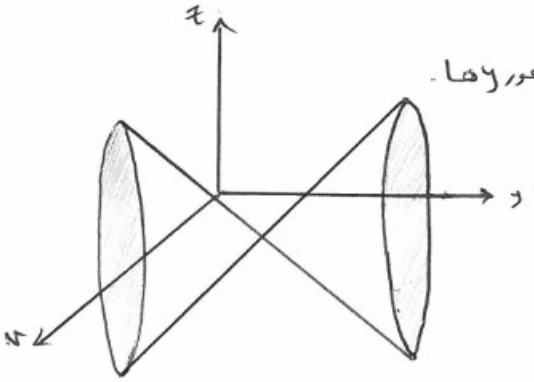
(IV) − (II) $\rightarrow \frac{x^2}{4}+(z+1)^2=(y-1)^2$

$y=1 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-1 \end{cases}$

$x=0 \rightarrow \begin{cases} z=y-2 \\ z=-y \end{cases}$

$z=-1 \rightarrow \{x=\mp 2(y-1)$

$y=+1 \rightarrow \frac{x^2}{4}+(z+1)^2=a^2$ بیضی



مقطع بیضوی به موازات محور yها.

مثال) خم $\vec{R}(t)=(-1+2t\sinh t)i+(2+3t\cosh t)j+2t^2k$ مفروض است معادله و نام رویه درجه دوم؟

$x=-1+2t\sinh t \rightarrow \frac{x+1}{2}=t\sinh t \rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}=t^2\sinh^2 t$ (I)

$y=2+3t\cosh t \rightarrow \frac{y-2}{3}=t\cosh t \rightarrow \frac{(y-2)^2}{9}=t^2\cosh^2 t$ (II)

$z=2t^2 \rightarrow \frac{z}{2}=t^2$ (III)

(II) − (I) $\rightarrow \frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{4}=t^2(\cosh^2 t-\sinh^2 t)=t^2$ (IV)

(IV) = (III) $\rightarrow \frac{z}{2}=\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{4}$ → سهمی‌گون هذلولوی به موازات محور zها

نقطه زینی $(-1,2,0)$

تمرین) معادله و نام رویه درجه دومی را که خم زیر بر آن واقع است را مشخص کنید؟

$R(t)=(-2+2e^{2\sqrt{t}}\sin^2 t)i+4e^{\sqrt{t}}j+(1+3e^{\sqrt{t}}\cos t)k$ جواب: $\frac{y^2}{16}-\frac{(z-1)^2}{9}=\frac{x+2}{2}$

تمرین) $R(t)=2t\cos t\, i+t\sin t\, j+\sqrt{1+t^2}\,k$ را در نظر بگیرید:

الف) معادله و نام رویه درجه دومی را که خم بر آن واقع است را بنویسید؟ جواب:

ب) انحنای این خم را در $t=0$ محاسبه کنید؟

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

توابع چند متغیره :

به تابع $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $z = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تابع n متغیره میگویند که حوزهٔ تعریف آن R^n و حوزهٔ مقادیر آن $\mathbb{R}$ میباشد .

برای تعیین دامنهٔ یک تابع چند متغیرهٔ حقیقی باید به همان نکات مربوط به تعیین دامنهٔ توابع یک متغیره توجه داشت.

مثال : دامنهٔ توابع زیر را تعیین کنید :

۱) $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad D_F = \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}_F = [0, \infty)$

۲) $z = \dfrac{1}{y^2-x^2} \to y^2-x^2=0 \to y^2=x^2 \to D_F = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid y^2=x^2\}$, $\mathbb{R}_F = \mathbb{R} - \{0\}$

۳) $w = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \to x^2+y^2+z^2>0 \to (x,y,z) \neq (0,0,0)$ و

$D_F = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, $\mathbb{R}_F = [0, +\infty)$

۴) $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \to D_F = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

به ازای $\to (x,y) \neq (0,0) \to z = \dfrac{(x^2+y^2)-2y^2}{x^2+y^2} = 1 - \dfrac{2y^2}{x^2+y^2} \leqslant 1 \to R_F : [1, -1]$

به ازای $\to (x,y) \neq (0,0) \to z = \dfrac{-(x^2+y^2)+2x^2}{x^2+y^2} = -1 + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} \geqslant -1$

۵) $F(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \to x^2-y^2=0 \to y = \pm x \to D_F : \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid y = \pm x\}$

به ازای $(x,y) ; y \neq \pm x \to \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \geqslant 1$ یا $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \leqslant -1 \longrightarrow \mathbb{R}_F : (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$

۶) $F(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \to 1-x^2-y^2 \geqslant 0 \to x^2+y^2 \leqslant 1$ (نقاط درون یا روی دایره واحد)

$D_F : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\} \to$ به ازای $\to (x,y) \in D_F \to 0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1 \xrightarrow{\times -} -1 \leqslant -x^2-y^2 \leqslant 0$

$\xrightarrow{+1} 0 \leqslant -x^2-y^2+1 \leqslant +1 \xrightarrow{\text{جذر}} 0 \leqslant \sqrt{-x^2-y^2+1} \leqslant 1 \longrightarrow \mathbb{R}_F : [0, 1]$

گاندی : پیروزی آن نیست که هرگز زمین نخوری ، بلکه باید بعد از هر زمین خوردن برخیزی .

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

⑦ $f(x,y) = \ln(x+y) \longrightarrow D_f = \{(x,y) \mid x \in R \,,\, y \in R \,,\, x+y > 0\}$

$D_f = \{(x,y) \mid x,y \in R \,,\, y > -x\}$ برد تابع $= (-\infty, +\infty)$

تمرین : دامنه توابع زیر را بیابید .

① $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

② $f(x,y,z) = x^2 y^3 + e^{xy} + z e^{x^2}$

③ $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}}$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

منحنی های تراز: یک منحنی تراز تابع دو متغیره $f(x,y)$ منحنی است در صفحهٔ xy که تابع در تمام نقاط روی آن منحنی (در داخل دامنهٔ f) دارای مقادیری ثابت است. برای این کار کافیست قرار دهید:

$$f(x,y)=c$$

سطح تراز (رویهٔ تراز) توابع ۳ متغیره:

برای توابع سه متغیره نمودار توصیف نمی‌شود، زیرا این کار مستلزم $w=f(x,y,z)$ تجسم هندسی از یک فضای چهار بعدی است ولی برای توابع (۳ متغیره)، سطوح هم تراز را می‌توان تعریف کرد.

$$\text{رویهٔ تراز به ازای مقدار ثابت } c = \{(x,y,z)\in R^3 \mid f(x,y,z)=c\}$$

مثال: منحنی های تراز تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ را توصیف کنید:

$$f(x,y)=c \longrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\geq 0}=c$$

اگر $\rightarrow (c<0) \rightarrow$ منحنی تراز وجود ندارد (تهی) $\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \not\leq 0$

اگر $\rightarrow (c=0) \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=0 \longrightarrow (x,y)=(0,0) \rightarrow$ مبدأ مختصات

اگر $\rightarrow (c>0) \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=c>0 \longrightarrow x^2+y^2=c^2 \rightarrow$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع دلخواه

فیثاغورث: برای تربیت اراده، بهترین زمان ایام جوانی است.

جان دیویی: زندگی خود را تبدیل به مدرسه‌ای برای یادگرفتن کن.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: رویه‌های تراز را در دامنهٔ توابع مفروض مشخص کنید:

(۱) $F(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}=c \rightarrow x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{c} \quad c\in\mathbb{R}^+-\{0\}$

رویه‌های تراز، کره‌هایی به مرکز مبدأ و شعاع دلخواه هستند.

(۲) $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9} \rightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=c>0$

رویه‌های تراز بیضیوار $\dfrac{x^2}{25c}+\dfrac{y^2}{16c}+\dfrac{z^2}{9c}=1$ هستند.

(۳) $F(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2) \rightarrow \ln(x^2+y^2+z^2)=c \rightarrow x^2+y^2+z^2=e^c, c\in\mathbb{R}$

رویه‌های تراز کره‌هایی به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{e^c}$ هستند.

تمرین: خم تراز توابع زیر را بیابید.

(۱) $F(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2} \rightsquigarrow$ (ج: دایره)

(۲) $F(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \rightsquigarrow$ (ج: خط)

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حد و پیوستگی توابع چند متغیره :

تعریف : گوئیم حد تابع $f(x,y)$ در نقطهٔ (a,b) برابر عدد l است و می نویسیم :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \; ; \; 0<\underbrace{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}_{\text{فاصلهٔ } (x,y) \text{ از نقطه } (a,b)}<\delta \rightarrow \underbrace{|f(x,y)-l|}_{\text{فاصلهٔ } f(x,y) \text{ از } l}<\varepsilon$$

مثال : $\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} (x^2y+\sin xy) = 1^2\times\pi+\sin\pi = \pi$

مثال : $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-xy}{x^2-y^2} = \lim \dfrac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{1}{2}$

مثال : $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2xy-y^2}{8x^3-y^3} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{مبهم}} \lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{y(2x-y)}{(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)} = \dfrac{1}{6}$

نکته : در مثال هایی که از ما خواسته شده ثابت کنیم حد موجود است ، باید از تعریف حد استفاده کنیم .

خلیل جبران : دوستی همواره یک مسئولیت شیرین است نه یک فرصت .

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: نشان دهید $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3}{x^2+y^2} = 0$:

فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ باید $\delta>0$ را چنان تعیین کنیم که اگر $\sqrt{x^2+y^2}\leq\delta$ آنگاه $\left|\frac{3x^3}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

$$\forall\varepsilon>0 \to \exists\delta>0;\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta \to \left|\frac{3x^3}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon \to \frac{|3x^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|3x^3|}{x^2} = 3|x| = 3\sqrt{x^2}$$

$$\to 3\sqrt{x^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta < \varepsilon \to \delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

مثال: نشان دهید $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$:

$|x|<\delta$

$|y|<\delta$

$$\forall\varepsilon>0 \to \exists\delta>0 \to 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \to \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\to \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right||y| \leq |y| < \delta$$

پس برای برقراری $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$ کافی است قرار دهیم $\delta=\varepsilon$.

مثال: نشان دهید $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = 0$.

$|x|<\delta$

$|y|<\delta$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta \to \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon \to \frac{|x||y||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x||y|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x||y| < \delta\delta = \delta^2$$

پس $\to \delta^2<\varepsilon \to \delta\leq\sqrt{\varepsilon}$.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: حاصل حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}$ را بیابید:

$$I=\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}=\frac{0}{0} \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}\times\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x+y-y}{x(\sqrt{x+y}+\sqrt{y})}=\frac{1}{2}$$

شرایط وجود حد: تابع $f(x,y)$ در نقطهٔ (x_0,y_0) حد دارد اگر روی هر مسیری که (x,y) به (x_0,y_0) میل می‌کند مقادیر تابع به یک عدد ثابت منحصر به فرد نزدیک شود.

نتیجه: اگر روی دو مسیر متفاوت منتهی به (x_0,y_0) مقادیر تابع به ۲ عدد متفاوت نزدیک شود، آنگاه تابع در نقطهٔ (x_0,y_0) حد ندارد.

نکته: مهم‌ترین مسیرهایی که از مبدأ می‌گذرند:

$y=0$ ، $x=0$ ، $y=x$ ، $y=-x$ ، $y=mx$ ، $y=x^2$ ، $y=x^3$ ، $y=\sin x$ ، $y=e^x-1$ ،

$y=1-\cos x$ ، $y=\ln(x+1)$ ، ...

$y=x^n$: n ممکن است عدد صحیح یا کسری (مثبت) باشد.

نکته: این روش که بخواهیم مقدار حد را از مسیرهای مختلف بدست آوریم، روشی برای اثبات عدم وجود حد است نه برای اثبات وجود حد.

تذکر: اگر از مسیر $y=mx$ استفاده کنیم و جواب حد وابسته به m باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم حد موجود نیست.

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: نشان دهید حدود زیر در مبدأ وجود ندارند:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

$$\xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{xm^2x^2}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 . x m^2}{x^2(1+m^4x^2)} = 0$$

$$\xrightarrow{y=x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x x^4}{x^2+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1+x^6} = 0$$

$$\xrightarrow{y=\sqrt{x}} \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x})^2}{x^2+(\sqrt{x})^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

چون به ازای مسیرهای مختلف جواب حدی نشد، پس حد موجود نیست.

نکته: در چنین حدهایی بهتر است مسیری را انتخاب کنیم که درجهٔ صورت را با درجهٔ مخرج یکی کند.

---

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

$$\to y=0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\times 0}{x^2+0} = 0$$

$$\to y=x^{\frac{1}{3}} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

$\to$ پس حد موجود نیست.

---

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$\to x=0 \longrightarrow \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1$$

$$\to y=0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$$

$\to$ پس حد موجود نیست.

---

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$

$$\to y=x^3 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^3x^3}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}$$

پس حد موجود نیست.

$$\to y=x^2 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^3x^2}{x^6+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^4(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{x^4+y^4} \longrightarrow y=mx^3 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x(mx^3)}{x^4+m^4x^{12}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3m}{1+m^4x^8} = 3m$

چون مقدار حد وابسته به m است ، پس حد موجود نیست .

---

۶) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^3}{2x+y^4} \longrightarrow x=0 \longrightarrow \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0\times y^3}{2\times 0+y^4} = 0$

$\longrightarrow \begin{cases} y=x^{\frac{1}{4}} \\ \text{یا} \\ x=y^4 \end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y^{4/4}\times y^3}{2y^4+y^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y^4}{3y^4} = \dfrac{1}{3}$

پس حد موجود نیست .

تمرین : نشان دهید حدود زیر در مبدأ حد ندارند :

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^4}$ ۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^3+y^{12}}$ ۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+xy^2}$

---

۵) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$ ۶) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ ۷) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xye^{x}}{x^2-y^2}$ ۸) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

تمرین : نشان دهید : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته : در مواردی که درجهٔ صورت نسبت به y و x (مجموعاً) کوچکتر یا مساوی با درجهٔ مخرج نسبت به x و y (مجموعاً) باشد، تابع در نقطهٔ $(0,0)$ حد ندارد، در غیر این صورت باید بررسی شود.

نکته : برای حدهایی به شکل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^n y^n}{x^{2n}+y^{2n}}$ مسیر $y=mx$ همیشه جواب می‌دهد.

پیوستگی توابع چند متغیره :

تابع $F(x,y)$ در نقطهٔ (a,b) پیوسته است هرگاه :

I) $F(a,b)$ موجود باشد (یعنی تابع مقدار داشته باشد.)

II) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y)$ موجود باشد (یعنی تابع حد داشته باشد)

III) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y) = F(a,b)$

نکته ① : توابع چند جمله‌ای همه جا پیوسته‌اند.

نکته ② : توابع گویا همه جا جز ریشه‌های مخرج پیوسته‌اند.

فرانکلین : آنها که آزادی را برای امنیت می‌کنند، نه شایستگی آزادی را دارند و نه لیاقت امنیت را.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : پیوستگی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را بررسی کنید :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\longrightarrow y=mx\longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x(mx)}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

حد موجود نیست ، پس تابع پیوسته نیست .

مثال : پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{y^2+x^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را بررسی کنید :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\frac{y^3}{x^2+y^2}\xrightarrow[\text{مختصات قطبی}]{\text{استفاده از}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\sin^3\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\sin^3\theta=0$$

← مقدار حد با مقدار تابع یکی نیست پس پیوسته نمی باشد. $\qquad$ مقدار تابع $\to f(0,0)=1$

نکته : بعضی مواقع استفاده از مختصات قطبی کار ما را راحت می کند . هرگاه با استفاده از مختصات قطبی تابع داده شده را برحسب θ و r مرتب کنیم ، اگر حد به دست آمده به θ بستگی پیدا نکند و تنها با $r\to 0$ محاسبه شود حد این تابع بدست آمده است . امّا اگر حد به θ بستگی پیدا کند نمی توان از طریق قطبی حد را محاسبه کرد ، در این حالت بهتر است دنبال روش مسیرها برویم .

گوته : کسی که دارای عزمی راسخ است ، جهان را مطابق میل خویش عوض می کند .

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta \times r^2\sin^2\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} r(\cos\theta \sin^2\theta) = 0$

مثال : پیوستگی تابع زیر را بدست آورید :

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

مقدار تابع $\to F(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2} \longrightarrow y=0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2\times 0}{x^2\times 0+(0-x)^2} = 0$$

$$\longrightarrow y=x \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2\times x^2}{x^4+0} = 1$$

پس حد موجود نیست لذا پیوسته نیست.

مثال : نشان دهید تابع $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{1}{x^2}}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ در مبدأ پیوسته است.

چون پیوسته است پس از تعریف حد استفاده می‌کنیم. $\to$ مقدار حد $\to$ $F(0,0)=0$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ ; \ \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{|x|<\delta \quad |y|<\delta} < \delta \to \left| \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{1}{x^2}}} - 0 \right| < \varepsilon \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{|y||e^{-\frac{1}{x^2}}|}{|y^2+e^{-\frac{1}{x^2}}|} \leqslant \frac{|y||e^{-\frac{1}{x^2}}|}{|e^{-\frac{1}{x^2}}|} = |y| < \delta$$

پس کافیست $\delta \leqslant \varepsilon$ اختیار کنیم.

بزرگمهر : کسی که کردار به سخاوت بیاراید و گفتار به راستی، در این جهان نیک بخت است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: پیوستگی $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را بررسی کنید:

$f(0,0)=0 \rightarrow$ مقدار حد $\rightarrow$ برای پیوسته بودن $\xrightarrow{\text{باید}} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ ;\ \sqrt{x^2+y^2}<\delta \rightarrow \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}-0\right|<\varepsilon \longrightarrow$

$\rightarrow |(x+y)|\overbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}^{\leq 1}\overbrace{\left|\sin\frac{1}{y}\right|}^{\leq 1}\leq|x+y| \rightarrow |x+y|\leq|x|+|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta$

اگر فرض کنیم $\delta\leq\frac{1}{2}\varepsilon$ نتیجه می‌شود $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ و لذا تابع پیوسته است.

تمرین: پیوستگی توابع زیر را در $(0,0)$ بررسی کنید.

① $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

② $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

③ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

④ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{y^3-x} & y^3\neq x\\ 1 & y^3=x\end{cases}$ در $(1,1)$

⑤ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

⑥ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\cos^2(x-y)}{|x|+|y|} & |x|+|y|\neq 0\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مشتقات جزئی توابع چند متغیره :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \text{ یا } F_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x, y_0) - F(x_0,y_0)}{\Delta x} \longrightarrow \text{مشتق نسبت به } x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ یا } F_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x_0, y_0+\Delta y) - F(x_0,y_0)}{\Delta y} \longrightarrow \text{مشتق نسبت به } y$$

با توجه به تعریف هرگاه بخواهیم نسبت به x مشتق بگیریم باید y را همانند یک عدد ثابت فرض کنیم و برای محاسبهٔ $\frac{\partial F}{\partial y}$ باید x را مانند عدد ثابت فرض کنیم. بقیهٔ قواعد همانند قواعد مشتق گیری از تابع یک متغیره است.

$$F(x,y) = x^2\cos(xy) \begin{cases} \longrightarrow F_x = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) \\ \longrightarrow F_y = x^2(-x\sin(xy)) \end{cases}$$

$$F(x,y,z) = zy^2 e^{\frac{x}{y}} \begin{cases} \longrightarrow F_x = zy^2\left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right) = ze^{x/y}\,y \\ \longrightarrow F_y = z\left[2ye^{\frac{x}{y}} - y^2\left(\frac{x}{y^2}\cdot e^{x/y}\right)\right] \\ \longrightarrow F_z = y^2 e^{\frac{x}{y}} \end{cases}$$

مشتق جزئی مراتب بالاتر :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_{xx} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_{yy} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_{xy}$$

$\longrightarrow$ مشتق های ۲ میخته

فلش ها : جهت مشتق گیری

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه : هرگاه توابع $F(x,y)$ در همسایگی نقطهٔ (a,b) پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته

F_x و F_y و F_{xy} و F_{yx} باشد آنگاه : $F_{xy(a,b)} = F_{yx(a,b)}$

نتیجه : $F_{xy} = F_{yx}$

مثال : تابع $F(x,y) = \sin^{-1} xy$ مفروض است، مطلوب است محاسبهٔ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right) = y\left(\frac{\frac{2xy^2}{2\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2}\right) = \frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$$

مثال : تابع $F(x,y) = yx^2 + \frac{e^y + \sin y}{\cos^2 y + \tan y}$ مفروض است، مطلوب است محاسبهٔ $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$$

در اینگونه مسائل با وجود اینکه $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ اما باید توجه داشت از کدام متغیر اول مشتق بگیریم ، راحت تر است .

معادلهٔ لاپلاس

دو متغیره ← $F_{xx} + F_{yy} = 0$

سه متغیره ← $F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = 0$

تعریف : تابعی که در معادلهٔ لاپلاس صدق کند ، یک تابع همساز یا هارمونیک نامیده می شود .

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : نشان دهید تابع زیر همساز است ؟

$$F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow F(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x=\dfrac{x}{x^2+y^2} \longrightarrow F_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ F_y=\dfrac{y}{x^2+y^2} \longrightarrow F_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \longrightarrow F_{xx}+F_{yy}=0$$

تمرین : نشان دهید توابع زیر همسازند :

(1) $F(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (2) $F(x,y,z)=e^{2x+4y}\cos 5z$

قاعدهٔ زنجیری برای توابع چند متغیره : فرض کنید $z=F(x,y)$ تابعی از x و y و x و y خود تابعی برحسب t باشند در این صورت داریم :

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

یا

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

بطلیموس : زمان را بر کارهای خود تقسیم کنید تا کاری بر زمین نماند .

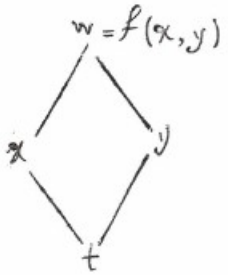
ناپلئون : مرگ حقیقی برای انسان مرگ امید است .

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

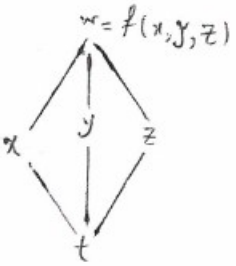
بهترین راه برای به خاطر سپردن قاعدهٔ زنجیری استفاده از نمودارهای زیر است، کافیست برای محاسبهٔ $\frac{\partial w}{\partial t}$

از w شروع کنیم و در امتداد هر مسیر که به t منتهی می‌شود حرکت کنیم و سپس مشتق‌ها را در هم ضرب کنیم و

سرانجام حاصلضرب‌ها را با یکدیگر جمع کنیم.

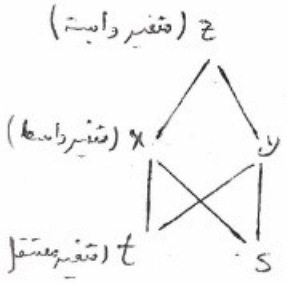


$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$



$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

حالت دیگر: فرض کنید $z=f(x,y)$ ، $x=x(t,s)$ ، $y=y(t,s)$.



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال: اگر $z=e^x\sin y$ ، $x=t^2+1$ ، $y=\ln t$ ، $\frac{\partial z}{\partial t}$ را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x\sin y)(2t) + (e^x\cos y)(\frac{1}{t}) = e^{t^2+1}(2t)(\sin\ln t) + \frac{e^{t^2+1}\cdot\cos(\ln t)}{t}$$

برایان ترسی: آغاز تصمیم‌ها مهمتر، نقطهٔ پایان تصمیم‌ها مهم‌تر است.

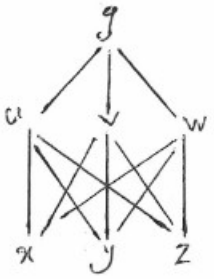
حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: فرض کنید $g(x,y,z)=F(x-y,\ y-z,\ z-x)$ ثابت کنید که $g_x+g_y+g_z=0$.

نکتهٔ مهم: در این گونه مسائل باید توجه کنیم چون تابع g را مشخص نکرده (به طور واضح) پس g_u و g_v و g_w را نمی‌توانیم محاسبه کنیم.

فرض: $\begin{cases} u=x-y \\ v=y-z \\ w=z-x \end{cases}$



$$g_x=g_u u_x+g_v v_x+g_w w_x=g_u(1)+g_v(0)+g_w(-1)\rightarrow (1)$$

$$g_y=g_u u_y+g_v v_y+g_w w_y=g_u(-1)+g_v(+1)+g_w(0)\rightarrow (2)$$

$$g_z=g_u u_z+g_v v_z+g_w w_z=g_u(0)+g_v(-1)+g_w(1)\rightarrow (3)$$

$$(1)+(2)+(3)\rightarrow g_x+g_y+g_z=g_u-g_w-g_u+g_v-g_v+g_w=0$$

مثال: اگر $z=F(x,y)$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ با فرض وجود مشتقات جزئی مربوطه، درستی رابطهٔ مقابل را بیابید. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}\right)$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial x}(\cos\theta)+\frac{\partial F}{\partial y}(\sin\theta)\xrightarrow{\text{توان ۲}}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta+2\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial F}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial F}{\partial y}(r\cos\theta)\xrightarrow{\text{توان ۲}}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 r^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 r^2\cos^2\theta-2r^2\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta+\sin 2\theta\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\sin 2\theta$$

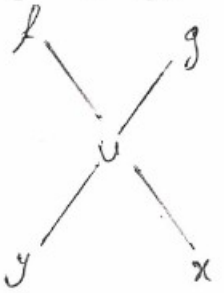
$$=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\underbrace{[\sin^2\theta+\cos^2\theta]}_{1}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\underbrace{[\sin^2\theta+\cos^2\theta]}_{1}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

---

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: اگر $z = xF(\frac{y}{x}) + g(\frac{y}{x})$ باشد ثابت کنید: $x^2 z_{xx} + 2xy\, z_{yx} + y^2 z_{yy} = 0$.

فرض $\rightarrow u = \frac{y}{x}$



پس: $z = xF(u) + g(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F(u) + x\left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{\partial g}{\partial u} = F(u) - \frac{y}{x}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{y^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} =$$

$$= \frac{y^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} =$$

$$= -\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

جاگذاری در معادله $\rightarrow x^2\left[\frac{y^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right] + 2xy\left[\frac{-y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right] +$

$+ y^2\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right] = 0 \rightarrow$ ادامه در صفحهٔ بعد

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{2y}{x}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{2y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{2y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial u^2}+\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}=0$$

تمرین : اگر $f(u,v)=u^2+v^2$ و $u=r\cos\theta$ و $v=r\sin\theta$ باشد، نشان دهید :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=4u^2+4v^2$$

تمرین : فرض کنید تابع دو متغیرهٔ $f(u,v)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد و $w=f(xy, z-2x)$

نشان دهید : $xw_x-yw_y+2xw_z=0$.

تمرین : اگر $z=x^2-xy+2y^2$ و $x=\frac{1}{t+1}$ و $y=1+\sqrt{t}$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ را به ازای $t=1$ بیابید .

(جواب $=4$)

تمرین : اگر $z=\frac{f(x-y)}{y}$ نشان دهید : $z+y\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

مولیر : مانند آسمان بخشنده و مانند زمین افتاده باش ، رمز زندگی همین است .

ولتر : کار و کوشش از ما سه عیب را دور می‌سازد : افسردگی ، زردی ، نیازمندی .

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مشتق گیری ضمنی : اگر تابع $F(x,y,z)=0$ به طور ضمنی مشتق پذیر باشد که در آن $z=z(x,y)$

آنگاه داریم : $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z}$

مثال : z تابعی برحسب x و y می باشد ، حاصل عبارات زیر را در نقاط داده شده بیابید.

الف) $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0 \rightarrow (\pi,\pi,\pi) \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=?$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)} \rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(\pi,\pi,\pi)}=-1$$

ب) $z^3-xy+yz+y^3-2=0 \longrightarrow (1,1,1) \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=?$

روش اول $\rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-y}{3z^2+y} \rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(1,1,1)}=\frac{1}{4}$

روش دوم $\rightarrow 3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-y+y\frac{\partial z}{\partial x}=0 \rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(1,1,1)}=\frac{y}{3z^2+y}=\frac{1}{4}$

ج) $xy+z^3x-2yz=0 \rightarrow (1,1,1) \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=?$

$z \rightarrow$ وابسته
$x \rightarrow$ مستقل
$y \rightarrow$ ثابت

$$\rightarrow y+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+z^3-2y\frac{\partial z}{\partial x}=0 \rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(1,1,1)}=-2$$

تمرین : از رابطهٔ $xz^2-zy+y^2x=7$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در $(1-,2,1)$ بدست آورید. ج: $\frac{5}{4}$

تمرین : اگر $z=z(x,y)$ باشد و داشته باشیم $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$ ثابت کنید: $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مشتقات جزئی با متغیرهای مقید : اگر متغیرهای x و y و z تابع $w = F(x,y,z)$ با رابطه‌ای مثل $z = x^2+y^2$ مقید شوند، مقادیر مشتقات جزئی F بستگی به این دارد که کدام متغیر را مستقل و کدام متغیر را وابسته در نظر بگیرید.

نحوهٔ نمایش : $\frac{\partial F}{\partial y}$ با فرض اینکه x و y و z مستقل باشند : $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,z}$

مثال : مطلوب است $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}$ اگر $w = x^2+y-z+\sin t$ و $x+y=t$.

$$t = x+y \rightarrow w = x^2+y-z+\sin(x+y) \rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 2x+0-0+\cos(x+y)$$

نکته : نمودارهای پیکانی بهترین روش برای نشان دادن چگونگی ارتباط متغیرها و توابع می‌باشد، فرض کنید :

$w = x^2+y-z+\sin t$ و $x+y=t$ و می‌خواهیم $\frac{\partial w}{\partial x}$ را بدست آوریم. وقتی x و y و z مستقل اند

نمودار شبیه نمودار زیر است :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{متغیرهای مستقل}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{\text{متغیرهای میانی در رابطه}} \longrightarrow \underbrace{w}_{\text{متغیر وابسته}}$$

$x = x$
$y = y$
$z = z$
$t = x+y$

پس $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{*} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{**} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{*} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{**} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{*} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{**} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{*} \cdot \underbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}_{**}$

برای محاسبهٔ ★ها از رابطهٔ $w = x^2+y-z+\sin t$ استفاده می‌کنیم و برای محاسبهٔ ★★ها از اطلاعاتمان دربارهٔ متغیرهای داده شده که x و y و z مستقل اند و $t = x+y$ (ستون دوم نمودار پیکانی).

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 2x(1)+1(0)+(-1)(0)+\cos t(1+0) = 2x+\cos(x+y)$$ برحسب متغیر مستقل

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مطلوبست: الف) $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ ، ب) $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$ در نقطهٔ $(x,y,z)=(0,1,\pi)$ هرگاه:

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad y\sin z + z\sin x = 1$$

الف) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to w$

$x = x$

$y = y$

$y\sin z + z\sin x = 1$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \to \star$$

از طرفی $\to y\sin z + z\sin x = 1 \to$

$$y\cos z\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\sin x + z\cos x = 0$$

$$\xrightarrow{(0,1,\pi)} \to \frac{\partial z}{\partial x} = \pi$$

$$\xrightarrow{\star} \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = 2(x)(1) + 2y(0) + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \to \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y\,(0,1,\pi)} = 2(0) + 2\pi(\pi) = 2\pi^2$$

ب) $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \to w$

$x = x$

$y = y$

$y\sin z + z\sin x = 1$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} \to \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = 2z(1) + 2y(0) + 2x\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$$

$$\xrightarrow{(0,1,\pi)} = 2\pi + 0 + 0 = 2\pi \to y\sin z + z\sin x = 1 \to \frac{\partial x}{\partial z} \to y\cos z + 1\times\sin x + \frac{dx}{\partial z}\cos z = 0$$

$$\xrightarrow{(0,1,\pi)} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{\pi}$$

سالوسل: بزرگترین فن زندگی استفاده از فرصت‌های بی‌نظیری است که برما می‌گذرد.

ناپلئون: دنیا از آن کسانی است که حرارت و انرژی دارند.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: پیدا کنید $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$ را هرگاه $xyuv=1$ و $x+y+u+v=0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ x \\ v \end{pmatrix} \to y$$

$u=u$

$x=x$

$v=-x-y-u$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right)_u = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}(0) + \left(\frac{-1}{uvx^2}\right)\times 1 + \left(\frac{-1}{xuv^2}\right)(-1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right)_u = -\frac{1}{x^2uv} + \frac{1}{xuv^2}$$

مثال: اگر $F(x,y,z)=0$ ثابت کنید $\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left.\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to F$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\cancel{\frac{\partial x}{\partial x}}}_{1} + \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}}_{0} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \longrightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

مشتق F نسبت به x زمانی که y ثابت است

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\cancel{\frac{\partial y}{\partial y}}}_{1} + \frac{\partial F}{\partial z}\underbrace{\cancel{\frac{\partial z}{\partial y}}}_{0} = 0 \longrightarrow \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

مشتق F نسبت به y زمانی که z ثابت است.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\cancel{\frac{\partial x}{\partial z}}}_{0} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z}\underbrace{\cancel{\frac{\partial z}{\partial z}}}_{1} = 0 \longrightarrow \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مشتق F نسبت به z زمانی که x ثابت است.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left.\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) = -1$$

آنتونی رابینز: انعطاف پذیری عامل خوشبختی انسان است.

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: با فرض اینکه $t - xe^{\frac{y}{z}} = 1$ و $x^2yz^2 = \sin xz$ مطلوب است محاسبهٔ $\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right)_y$.

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \rightarrow t$$

مستقل $\quad x^2yz^2 = \sin xz \quad$ وابسته

$$t = 1 + xe^{y/z} \rightarrow \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\underbrace{\cancel{\frac{\partial y}{\partial z}}}_{0} + \frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right)_y = (x)\left(\frac{-y}{z^2}\right)e^{y/z}\times 1 + x\left(\frac{1}{z}\right)e^{y/z}(0) + e^{y/z}\left(\frac{x\cos xz - 2zyx^2}{2xyz^2 - z\cos xz}\right)$$

$$\rightarrow x^2yz^2 = \sin xz \rightarrow x^2yz^2 - \sin xz = 0 \rightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = ?$$

$$\rightarrow y\left[z^2\times 2x\frac{dx}{dz} + 2zx^2\right] - \left[z\frac{dx}{dz} + x\right]\cos xz = 0 \rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{x\cos xz - 2zyx^2}{2xyz^2 - z\cos xz}$$

تمرین: فرض کنید $w = x^3y^2 + x^2z^3 - yz$ و $x^2y^2z^2 + y^2z = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ مطلوب است محاسبهٔ $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

تمرین: با فرض $w = x^2yz + x\ln(y+z)$ و $x^2 + y^2 = xyz$ مطلوب است محاسبهٔ $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

تمرین: $w = x - \sin^{-1}(yz)$ و $x^2yz^2 = 1 - \ln z$ مطلوب است محاسبهٔ $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

مثال: اگر $w = x^2e^{yz}$ و $z = x^2 - y^2$ مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ ب) $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ ج) $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

الف : $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ $\qquad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow w$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\cancel{\frac{\partial y}{\partial y}}^{\,1} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\cancel{\frac{\partial z}{\partial y}}^{\,0} = 2ye^{yz} + x^2ze^{yz} = e^{yz}(2y + x^2z)$$

$$z = x^2 - y^2 \longrightarrow \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = ? \qquad 0 = 2x\frac{dx}{dy} - 2y \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$$

$$w = x^2e^{yz} \longrightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{yz}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = x^2ze^{yz}$$

ب : $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow w$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\cancel{\frac{\partial x}{\partial z}}^{\,0} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\cancel{\frac{\partial z}{\partial z}}^{\,1} = \frac{-x^2z}{y}e^{yz} + x^2ye^{yz} = x^2e^{yz}\left(\frac{-z}{y} + y\right)$$

$$z = x^2 - y^2 \longrightarrow \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = ? \qquad 1 = 0 - 2y\frac{\partial y}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{-2y}$$

$$w = x^2e^{yz} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = ? \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = x^2ze^{yz}$$

ج : $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$ $\qquad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow w$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\cancel{\frac{\partial y}{\partial z}}^{\,0} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\cancel{\frac{\partial z}{\partial z}}^{\,1} = e^{yz} + x^2ye^{yz} = e^{yz}(1 + x^2y)$$

$$z = x^2 - y^2 \longrightarrow \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \Rightarrow 1 = 2x\frac{\partial x}{\partial z} - 0 \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2x}$$

$$w = x^2e^{yz} \longrightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{yz}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = x^2ye^{yz}$$

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : درصورتی که x و y مستقل و u و v توابع از x و y باشند $xu = yv$ و $xv + yu = 1$ ثابت کنید :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$xu = yv \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{yv}{u} & (1) \\ y = \dfrac{xu}{v} & (2) \end{cases} \qquad xv + yu = 1 \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{\text{در}} (3) \quad \frac{yv^2}{u} + yu = 1 \longrightarrow yv^2 + yu^2 = u \longrightarrow y = \frac{u}{u^2+v^2} \quad (4)$$

$$(2) \xrightarrow{\text{در}} (3) \quad xv + \frac{xu^2}{v} = 1 \longrightarrow xv^2 + xu^2 = v \longrightarrow x = \frac{v}{u^2+v^2} \quad (5)$$

$$\xrightarrow{\text{از (4) نسبت به y مشتق}} 1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(u^2+v^2) - \left[2u\frac{du}{dy} + 2v\frac{dv}{dy}\right]u}{(u^2+v^2)^2} = \frac{\frac{du}{dy}(v^2-u^2) - 2uv\frac{dv}{dy}}{(u^2+v^2)^2} \quad (A)$$

$$\xrightarrow{\text{از (5) نسبت به x مشتق}} 1 = \frac{\frac{dv}{dx}(u^2+v^2) - \left[-2u\frac{du}{dx} + 2v\frac{dv}{du}\right]v}{(u^2+v^2)^2} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(u^2-v^2) - 2uv\frac{du}{dx}}{(u^2+v^2)^2} \quad (B)$$

از A و B داریم $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-\partial v}{\partial x} \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

مشتق جهتی، بردار گرادیان

مشتق جهتی : فرض کنید $F(x, y, z)$ یک تابع و $P_0(x_0, y_0, z_0)$ یک نقطه در دامنهٔ آن باشد در اینصورت آهنگ تغییرات تابع F در نقطهٔ P_0 و در جهت بردار $\vec{u}$ را مشتق جهتی F در جهت u در نقطهٔ P_0 نامیده و آن را با نماد $D_u F(P_0)$ نشان میدهند.

نکته : اگر بردار داده واحد نباشد خودمان باید آن را با تقسیم بر اندازه‌اش واحد میکنیم : $D_u F)_{P_0} = \vec{\nabla} F(P_0) \cdot \vec{u}$

نکته : اگر مشتق های جزئی F در نقطهٔ P_0 تعریف شوند آنگاه گرادیان F در P_0 بردار زیر است :

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : مشتق سوئی $F(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ را در $P_0(1,1,0)$ و در جهت بردار $A = 2i - 3j + 6k$ بیابید؟

$$|A| = \sqrt{4+9+36} = 7 \qquad u = \text{جهت } A = \frac{A}{|A|} = \frac{2i}{7} - \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k$$

$$\nabla F = (3x^2 - y^2)i + (-2xy)j - k \longrightarrow \nabla F(P_0) = 2i - 2j - k$$

$$(D_u F)_{P_0} = \vec{\nabla F}_{P_0} \cdot \vec{u} = \frac{2}{7} \times 2 + \left(\frac{-3}{7}\right)(-2) + \left(\frac{6}{7}\right)(-1) = \frac{4}{7}$$

مثال : فرض کنید مشتق جهتی تابع x و y در نقطهٔ $P_0(1,2)$ در جهت بردار $i+j$ برابر $2\sqrt{2}$ و در جهت بردار $-2j$ برابر -3 باشد مشتق تابع را در جهت بردار $-i-2j$ بیابید.

$$\vec{A} = i + j \to |A| = \sqrt{2} \to \vec{u}_A = \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \qquad \nabla F(P_0) = F_x(P_0)i + F_y(P_0)j$$

$$\vec{B} = -2j \to |B| = 2 \to \vec{u}_B = -j$$

$$\vec{C} = -i - 2j \to |C| = \sqrt{5} \to \vec{u}_C = \frac{-i}{\sqrt{5}} - \frac{2j}{\sqrt{5}}$$

$$(D_{uA}F)P_0 = 2\sqrt{2} \longrightarrow \nabla \vec{F}(P_0) \cdot \vec{u}_A = 2\sqrt{2} \to F_x(P_0) \times \frac{1}{\sqrt{2}} + F_y(P_0) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \to F_x P_0 + F_y P_0 = 4$$

$$(D_{uB}F)P_0 = -3 \to \nabla \vec{F}(P_0) \cdot \vec{u}_B = -3 \to F_x(P_0) \times 0 + F_y(P_0)(-1) = -3 \to F_y(P_0) = 3 \to F_x(P_0) = 1$$

$$(D_{uC}F)P_0 = \nabla \vec{F}(P_0) \cdot \vec{u}_C = 1 \times \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + 2\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-7}{\sqrt{5}}$$

تمرین ــ مشتق F را در نقطهٔ P_0 و در جهت A بیابید :

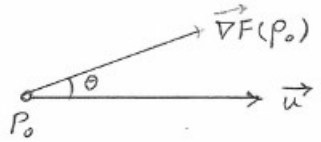
$$P_0 = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \qquad A = i + 2j + 2k$$

جواب = 2

$$F(x,y,z) = \cos xy + e^{zy} + \ln zx$$

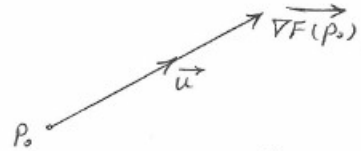
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

خواص مشتق سوئی : $D_uF(p_0) = |\vec{\nabla}F(p_0)|\,|\vec{u}|\cos\theta = |\nabla F(p_0)|\cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$



(۱) اگر $\theta = 0$ آنگاه $D_uF(p_0)$ بیشترین مقدار ممکن را دارد و برابر است با $D_uF(p_0) = |\vec{\nabla}F(p_0)|$ چون

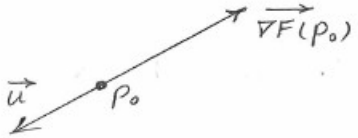
$\cos 0 = 1$ یعنی F در بین تمام نقاط دامنه‌اش در جهت ∇F سریعترین افزایش (بیشترین آهنگ افزایش) را دارد.



$\vec{u} = \dfrac{\vec{\nabla F}(p_0)}{|\nabla F(p_0)|} \Rightarrow$ $\vec{u}$ و $\nabla \vec{F}_{p_0}$ هم جهتند.

(۲) به همین ترتیب اگر $\theta = \pi$ [$\vec{u}$ و $\vec{\nabla F}_{p_0}$ در جهت عکس هم هستند] آنگاه $D_uF(p_0)$ کمترین مقدار ممکن را

دارد و برابر است با $|D_uF(p_0)| = -|\vec{\nabla F}_{p_0}|$ (چون $\cos\pi = -1$) یعنی F در بین تمام نقاط دامنه‌اش در جهت



$-\nabla F$ سریعترین کاهش (بیشترین آهنگ کاهش) را دارد.

(۳) اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ یعنی بردار u بر بردار ∇F در p_0 عمود است آنگاه $D_uF(p_0) = 0$ یعنی مقدار تابع F در جهت حرکتی

عمود بر ∇F تغییر نمیکند. $D_uF(p_0) = |\nabla F_{p_0}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$

مثال : جهت هایی را بیابید که در آنها $F(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2-1)$ در $P_0(1,1,1)$ از دامنه‌اش

سریعترین افزایش یا کاهش را داشته باشد. در این جهت ها آهنگ تغییر F را بدست آورید :

$$\vec{\nabla F} = z\frac{2x}{x^2+y^2-1}i + z\frac{2y}{x^2+y^2-1}j + \ln(x^2+y^2-1)k \longrightarrow \nabla F_{p_0} = 2i + 2j$$
$$\longrightarrow |\nabla F_{p_0}| = 2\sqrt{2}$$

جهت سریعترین افزایش $\rightarrow u_1 = \dfrac{\vec{\nabla F}_{p_0}}{|\nabla F_{p_0}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}i + \dfrac{1}{\sqrt{2}}j \Rightarrow (D_{u_1}F)_{p_0} = |\vec{\nabla F}(p_0)| = 2\sqrt{2}$

جهت سریعترین کاهش $\rightarrow u_2 = \dfrac{-\vec{\nabla F}_{p_0}}{|\nabla F_{p_0}|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}i - \dfrac{1}{\sqrt{2}}j \Rightarrow (D_{u_2}F)_{p_0} = -|\vec{\nabla F}(p_0)| = -2\sqrt{2}$

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : در مسائل زیر جهت هایی را بیابید که در آنها F در نقطهٔ P_0 سریعترین افزایش یا کاهش را داشته باشد

در این جهت ها آهنگ تغییر P را بدست آورید :

الف : $F(x,y) = x^2 + \cos xy \longrightarrow P_0(1,0)$

ب : $F(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \longrightarrow P_0(2,-1,2)$

مثال : تابع $F(x,y) = x^2 + y^2$:

الف : در (۱و۱) در چه جهتی از دامنه اش سریعترین افزایش را دارد ، مشتق F را در این جهت ها در (۱و۱) بیابید :

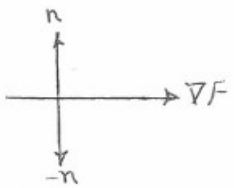
$$\begin{cases} \nabla F = 2x i + 2y j \\ \nabla F_{P_0} = 2i + 2j \\ |\nabla F_{P_0}| = 2\sqrt{2} \end{cases} \qquad \vec{u} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j \qquad (D_u F)_{P_0} = |\nabla F_{P_0}| = 2\sqrt{2}$$

ب : جهت هایی که در آنها مشتق F در (۱و۱) برابر صفر است :

نکته : مشتق F در جهت های عمود بر ∇F صفر است . برای بدست آوردن این جهت ها کافیست در بردار u جای مؤلفهٔ اوّل و دوم را عوض کنیم و علامت اولی را عوض کنیم $(\vec{n})$ سپس بردار n را در منفی ضرب میکنیم تا $(-\vec{n})$ نیز حاصل شود .

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j \longrightarrow n = -\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j \xrightarrow{\times -1} -n = \frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

* برای امتحان درستی جواب میتوانید حاصل $\nabla F \circ (n)$ و $\nabla F \circ (-n)$ را محاسبه کنید که باید حاصلش صفر شود .



ارسطو : بدترین نوع نابرابری ، تلاش برای برابر جلوه دادن نابرابرهاست .

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین ــ در کدام جهت است که مشتق $F(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در (۱ و ۱) برابر صفر میشود .

تمرین ــ مطلوبست مشتق $F(x,y,z)=xyz$ در جهت بردار سرعت زیر در $p(t)=\cos 3t\,i+\sin 3t\,j+3t\,k$
$(t=\pi/3)$

جواب = $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

تمرین ــ مشتق سوئی تابع $F(x,y,z)=e^{xyz}$ را در نقطهٔ (۱ و ۱ و ۱) در راستای بردار گرادیان تعیین کنید .

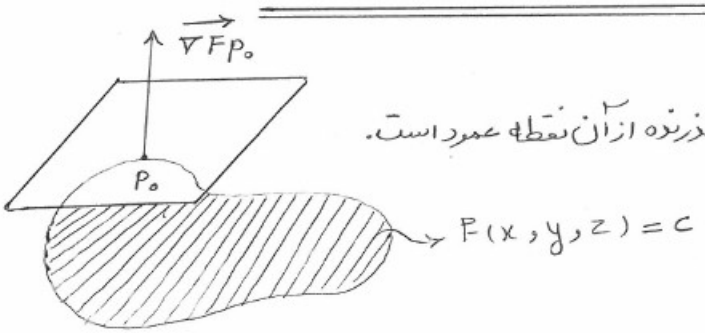
جواب = $\sqrt{3}e$

تمرین ــ مشتق $F(x,y,z)$ در نقطه‌ای چون P_0 در جهت بردار $A=i+j+k$ بزرگترین مقدار را دارد .

مقدار مشتق در این جهت $2\sqrt{3}$ است مطلوب است :

الف : ∇F در P_0 ب : مشتق F در P_0 در جهت بردار $i+j$ جواب = $2\sqrt{2}$

تمرین ــ مشتق سوئی تابع $F(x,y)=\tan^{-1}(\frac{y}{x})+\sqrt{3}\sin^{-1}(\frac{xy}{2})$ را در نقطهٔ (۱ و ۱) در سوی بردار $\vec{A}=3i-2j$ بیابید . جواب = $\frac{-3}{2\sqrt{13}}$



تذکر : بردار گرادیان یک تابع ۳ متغیره بر رویه تراز گذرنده از آن نقطه عمود است.

سانتاباز : تولد و مرگ اجتناب ناپذیرند . فاصله میان این دو را زندگی میکنیم .

حسن نور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

صفحه های مماس و خط های قائم بر رویهٔ $F(x,y,z)=c$

نکتهٔ ۱ـ اگر فرض کنیم $F(x,y,z)=c$ و مشتق های جزئی آن پیوسته اند و $z=z(t)$ و $y=y(t)$ و $x=x(t)$ خم مشتق پذیری است بر رویهٔ S قرار دارد.

پس $\rightarrow F(x(t),y(t),z(t))=c \rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=0$ یا $\vec{\nabla F}\cdot\vec{V}=0$

بردار سرعت خم.

یعنی در هر نقطهٔ دلخواه از منحنی، ∇F بر بردار سرعت منحنی عمود است.

نکتهٔ ۲ـ بردار نرمال صفحه $=\vec{\nabla F}_{P_0}$ ، $F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$ ، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $F(x,y,z)=c$ در نقطهٔ P_0

نکتهٔ ۳ـ هادی خط $=\vec{\nabla F}_{P_0}$ ، $\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$ خط قائم بر رویهٔ $F(x,y,z)=c$ در نقطهٔ P_0.

نکتهٔ ۴ـ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $z=F(x,y)$ در نقطهٔ $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ که در آن $z_0=F(x_0,y_0)$:

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

نکتهٔ ۵ـ شرط لازم و کافی برای تعامد دو رویه $g(x,y,z)$ و $F(x,y,z)$ در نقطهٔ $P_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\nabla F_{(P_0)}\cdot\nabla g_{(P_0)}=0$$

نکتهٔ ۶ـ فرض کنید خم C، خم حاصل از برخورد دو رویه F و g باشند در اینصورت بردارهای خط مماس بر خم C در نقطهٔ P_0 برابر است با:

$$\text{بردار هادی خط مماس بر خم } C = \nabla F(P_0)\times\nabla g(P_0)=ai+bj+ck$$

معادلهٔ خم مماس بر خم C : $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: معادلهٔ صفحهٔ مماس و خط قائم بر کرهٔ $x^2+y^2+z^2=3$ در $p_0:(1,1,1)$ بیابید:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3 \Rightarrow \nabla F=2xi+2yj+2zk \longrightarrow \nabla F_{p_0}=2i+2j+2k$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس $\Rightarrow 2(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0 \longrightarrow x+y+z=3$

معادلهٔ خط قائم $\Rightarrow \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$

مثال: مقطع رویه های یک استوانه $F(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$ و یک صفحهٔ $g(x,y,z)=x+z-4=0$ منحنی مثل C است. معادلات پارامتری خط مماس بر C در نقطهٔ $(1,1,3)$ بیابید. (نکتهٔ ۶)

$$\nabla F_{(1,1,3)}=2i+2j \qquad \nabla g_{(1,1,3)}=i+k \longrightarrow u=\vec{\nabla F}\times\vec{\nabla g}=2i-2j-2k$$

خط مماس بر C $\rightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+1 \\ z=-2t+3 \end{cases}$

مثال: کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ مفروض اند، نشان دهید در هر نقطهٔ مشترکشان متعامدند.

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2 \longrightarrow \nabla F=2xi+2yj+2zk$$

$$g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2 \longrightarrow \nabla g=2xi+2yj-2zk$$

شرط تعامد $\Rightarrow \nabla F\cdot\nabla g=0 \longrightarrow 4x^2+4y^2-4z^2=0 \longrightarrow 4\underbrace{(x^2+y^2-z^2)}_{\text{همان معادلهٔ مخروط}}=0 \rightarrow$ پس متعامدند

مثال: نشان دهید که خم زیر $R=\sqrt{t}\,i+\sqrt{t}\,j+(2t-1)k$ ، $t=1$ بر رویهٔ $x^2+y^2-z=1$ عمود است.

نکتهٔ ① $\dfrac{dR}{dt}=V=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}i+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}j+2k \longrightarrow \vec{V}(1)=\dfrac{1}{2}i+\dfrac{1}{2}j+2k$

$R(1)=i+j+k \longrightarrow p_0=(1,1,1)$ برای پیدا کردن نقطهٔ p_0 مقدار $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ در $t=1$

$\nabla F=2xi+2yj-k \longrightarrow \nabla F(1,1,1)=2i+2j-k$

شرط $\nabla F\cdot V=0 \longrightarrow \frac{1}{2}(2)+2\times\frac{1}{2}-2=0$

موجود $R(t)$ جایگذاری می کنیم.

حسن پور
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین ــ هذلولی گون دوپارچه $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=1$ مفروض است. نقاطی از هذلولی گون را پیدا کنید که صفحهٔ مماس در آن نقاط موازی صفحهٔ $2x+y+z=0$ باشد.

جواب ⇐ $(\mp 4\sqrt{\frac{2}{5}}\ ,\ \pm\sqrt{\frac{2}{5}}\ ,\ \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}})$

تمرین ــ ثابت های a و b و c را طوری بیابید که مشتق جهت تابع $F(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$ در نقطهٔ (1-, 2, 1) دارای ماکزیمم 64 در جهت موازی محور z ها باشد.

جواب ⇐ $(a,b,c)=(6,24,-8)$ یا $(-6,-24,8)$

تمرین ــ معادلهٔ خط مماس و صفحهٔ قائم بر منحنی c که مقطع رویه $S_1: x^2-3xy+z^2=1$ و $S_2: 2x\tan(xz)+2y^2-z=1$ را در نقطهٔ (0, 0, 1) بیابید.

تمرین ــ بر رویهٔ $xy+yz+zx-x-z^2=0$ نقاطی را بیابید که در آنها صفحهٔ مماس با صفحهٔ xy موازی باشد.

جواب ⇐ $P_0(0,0,1)$ و $P_1(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

دیل کارنگی: زندگی کوتاه‌تر از آن است که کوچک و بی اهمیت نبرده شود.

ویلیام جیمز: وقتی انتظار بهترین پیشامد را دارید، مغزتان بهترین ها را جذب می‌کند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : نقاطی از رویهٔ $(y+z)^2+(z-x)^2=16$ را بیابید که در آنها خط قائم با صفحهٔ yz موازی باشد.

تذکر : برای اینکه خط قائم با صفحهٔ yz موازی باشد باید بر بردار i عمود باشد.

نقطه مورد نظر (مجهول) $\rightarrow P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\nabla F(P_0) = -2(z_0-x_0)i + 2(y_0+z_0)j + 2(y_0+2z_0-x_0)k$$

$$\nabla F_{P_0}\cdot i = 0 \rightarrow -2(z_0-x_0)=0 \rightarrow x_0=z_0$$

از طرفی P_0 روی رویه قرار دارد پس باید در آن صدق کند. $\rightarrow (y_0+z_0)^2+\underbrace{(z_0-x_0)^2}_{0}=6$

$$\rightarrow y_0+z_0=\pm 4 \rightarrow y_0=\pm 4-z_0$$

$$\Rightarrow P_0(x_0, y_0, z_0) = (z_0, \pm 4-z_0, z_0)$$

مثال : مطلوب است محاسبهٔ معادلهٔ خطی که در نقطهٔ داده شده برخم محل تلاقی رویه‌های زیر مماس است.

نکتهٔ 6

$$\underbrace{xyz}_{F}=1 \quad , \quad \underbrace{x^2+2y^2+3z^2}_{g}=6 \quad , \quad P_0(1,1,1)$$

$$\nabla F_{P_0} = i+j+k \qquad \nabla g_{P_0} = 2i+4j+6k$$

$$\nabla F_{P_0}\times\nabla g_{P_0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2i+4j+6k$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{6} \rightarrow$$ معادلهٔ خط مماس برخم حاصل از تلاقی ۲ رویه

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: بردار واحدی بیابید که به کره $x^2+y^2+z^2=8$ در نقطهٔ (۱ و ۲ و ۰) عمود باشد.

$$F = x^2+y^2+z^2-8$$

$$\nabla F = 2xi + 2yj + 2zk \rightarrow \nabla F_{P_0} = 4j + 2k \rightarrow$$ بر کره عمود است.

$$\rightarrow \quad \text{بردار قائم واحد} = \frac{4j+2k}{\sqrt{20}}$$

مثال: معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $z = x\cos y - ye^x$ را در نقطهٔ (۰ و ۰ و ۰) بیابید.

★ نکتهٔ (4)

$$F_x = \cos y - ye^x \rightarrow \begin{cases} F_{x_{(0,0)}} = 1 \\ F_y = -x\sin y - e^x \rightarrow F_{y_{(0,0)}} = -1 \end{cases}$$

$$1(x-0) - 1(y-0) - (z-0) = 0 \rightarrow x - y - z = 0$$

---

۱) تمرین: معادلهٔ صفحهٔ مماس و خط قائم بر رویهٔ زیر را در (۲ و ۱ و ۰) P_0 بیابید:

$$\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$$

۲) تمرین: یک بردار قائم بر خم $x^2+y^2=5$ در نقطهٔ (۱- و ۱) بیابید. معادله‌ای برای خط مماس بر این خم در P_0 بنویسید.

۳) تمرین: نشان دهید منحنی $r(t) = \ln t\, i + t\ln t\, j + tk$ بر رویهٔ $xz^2 - yz + \cos xy = 1$ در (۱ و ۰ و ۰) مماس است.

۴) تمرین: نشان دهید مشتق تابع $F(x,y,z) = e^{xyz}$ در نقاط واقع بر رویهٔ $x^2+y^2-2z^2=c$ در جهت عمود بر رویه صفر است.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

کاربرد مشتق های جزئی :

اکسترمم توابع دو متغیره :

نقطهٔ (a,b) را یک نقطهٔ MAX نسبی تابع $F(x,y)$ گویند هرگاه در یک همسایگی از این نقطه داشته باشیم :

$$F(x,y) \leq F(a,b)$$

نقطهٔ (a,b) را یک نقطهٔ Min نسبی تابع $F(x,y)$ گویند هرگاه در یک همسایگی از این نقطه داشته باشیم :

$$F(x,y) \geq F(a,b)$$

نقطهٔ بحرانی : نقاطی که در آنها F_x و F_y برابر صفر باشند یا نقاطی که F_x و F_y موجود نباشند را گوئیم.

مراحل پیدا کردن نقاط اکسترمم توابع دو متغیره :

۱) برای این کار ابتدا F_x و F_y را محاسبه کرده و دستگاه $\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \end{cases}$ را حل کرده و جواب را به صورت (a,b) مشخص میکنیم.

۲) $D_{(x,y)} = F_{xx} \cdot F_{yy} - F_{(xy)}^2$ را تشکیل میدهیم و برای نقاط (a,b) بدست آمده از دستگاه، $D(a,b)$ را بدست می آوریم.

الف) اگر $D_{(a,b)}<0$ ← نقطهٔ (a,b) نقطهٔ زینی

ب) اگر $D(a,b)>0$ ← (a,b) یک Min نسبی ← $F_{xx}(a,b)>0$ ← تقعر رو به بالا

← (a,b) یک Max نسبی ← $F_{xx}(a,b)<0$ ← تقعر رو به پایین

ج) $D_{(a,b)}=0$ ← آزمون بی نتیجه.

شکسپیر: قدرتمند کسی است که به مشکلات و مصائب زندگی لبخند زند.

حسین پیوز

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : مقادیر اکسترمم توابع زیر را بیابید:

$$1)\ F(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4 \longrightarrow \begin{cases} F_x = y - 2x - 2 = 0 \\ F_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow (-2,-2)$$

$$F_{xx} = -2 \ ,\ F_{yy} = -2 \quad F_{xy} = 1$$

$$D_{(-2,-2)} = (-2)(-2) - 1^2 = 3 > 0 \xrightarrow{\text{چون } F_{xx} < 0}$$ $F(-2,-2) = 8$ پس $(-2,-2)$ یک MAX نسبی است.

$$2)\ F(x,y) = x\sin y \xrightarrow{\text{به ازای هر } x \text{ و } y \text{ مشتق دارد.}} \begin{cases} F_x = \sin y = 0 \\ F_y = x\cos y = 0 \end{cases} \longrightarrow x = 0 \longrightarrow \sin y = 0 \xrightarrow{*}$$

$$\xrightarrow{*} y = k\pi \longrightarrow (0, k\pi)$$

$$\begin{cases} F_{xx} = 0 \\ F_{yy} = -x\sin y \,\Big]_{0,k\pi} = 0 \\ F_{xy} = \cos y \,\Big]_{0,k\pi} = \pm 1 \end{cases} \qquad D_{(0,k\pi)} = 0 - (\pm 1)^2 = -1 < 0 \longrightarrow (0, k\pi) \longrightarrow$$ یک نقطه زینی

$$\longrightarrow$$ مقدار تابع $\rightarrow F(0, k\pi) = 0$

$$3)\ F(x,y) = x^3 - 2y^3 + 2x^2 + y + 3 \longrightarrow \begin{cases} F_x = 3x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(3x+4) = 0 \nearrow x = 0 \ ,\ \searrow x = -\frac{4}{3} \\ F_y = -6y^2 + 1 = 0 \rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$(0, \tfrac{1}{\sqrt{6}})(0, \tfrac{-1}{\sqrt{6}})(\tfrac{-4}{3}, \tfrac{1}{\sqrt{6}})(\tfrac{-4}{3}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}})$$

$$\begin{cases} F_{xx} = 6x + 4 \\ F_{yy} = -12y \\ F_{xy} = 0 \end{cases} \qquad D(x,y) = (6x+4)(-12y) - 0 = -24y(3x+2)$$

$$D(0, \tfrac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{-48}{\sqrt{6}} < 0 \longrightarrow$$ $(0, \frac{1}{\sqrt{6}})$ نقطهٔ زینی

$$D(0, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}) = \frac{48}{\sqrt{6}} > 0 \rightarrow F_{xx}(0, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = 4 > 0 \rightarrow$$ Min نسبی $\leftarrow (0, \frac{-1}{\sqrt{6}})$

$$D(-\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{48}{\sqrt{6}} > 0 \rightarrow F_{xx}(\tfrac{-4}{3}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}) = -4 < 0 \rightarrow$$ MAX نسبی $(\frac{-4}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$

$$D(-\tfrac{4}{3}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}) = \frac{-48}{\sqrt{6}} < 0 \longrightarrow$$ $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ نقطهٔ زینی

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $F(x,y) = e^{-x}(x^2 - 5xy^2 - 4y^2) \Rightarrow \begin{cases} F_x = e^{-x}(2x - y^2 - x^2 + 5xy^2) = 0 & (0,0) \\ F_y = e^{-x}(-10xy - 8y) = 0 & (2,0) \end{cases}$ → نقاط بحرانی

$F_{xx} = e^{-x}(2 - 4x + x^2 - 5xy^2 + 4y^2)$

$F_{yy} = e^{-x}(-10x - 8)$

$F_{xy} = e^{-x}(-10y + 10xy + 8y)$

$D(0,0) = F_{xx}(0,0)F_{yy}(0,0) - F_{xy}^2(0,0) = -16 < 0 \qquad F(0,0) = 0$ نقطه زینی

$D(2,0) = F_{xx}(2,0)F_{yy}(2,0) - F_{xy}^2(2,0) = (-2e^{-2})(-28e^{-2}) - 0 > 0 \rightarrow F_{xx}(2,0) < 0$

$F(2,0) = 4e^{-2} \rightarrow$ پس نقطهٔ $(2,0)$ نقطهٔ MAX است.

تمرین: $F(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y \rightarrow$ جواب $\rightarrow$ نقطهٔ Min $(3,3)$ و نقطهٔ زینی $(-1,-1)$

تمرین: $F(x,y) = 4xy + 2x^2y - xy^2 \rightarrow$ جواب $\rightarrow (0,4)(0,0)(-2,0)$ نقطه زینی

تمرین: $F(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y \rightarrow$ جواب $\rightarrow (\frac{1}{2},1)$ و $(-\frac{1}{2},1)$ Min و $(\frac{1}{2},-1)$ MAX و $(-\frac{1}{2},-1)$ زینی

مقادیر اکسترمم روی خم های پارامتری :

برای یافتن مقادیر اکسترمم یک تابع $F(x,y)$ بر یک خم $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و F به صورت یک تابع از یک متغیر t تلقی میشود و از قاعدهٔ زنجیری برای حل $\frac{dF}{dt} = 0$ استفاده می کنیم و بقیهٔ مراحل همانند رفتار یک تابع یک متغیره می شود : الف) نقاط بحرانی را پیدا میکنیم. ب) نقاط ابتدائی و انتهایی دامنهٔ پارامتر (t)

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : مقادیر اکسترمم و مینیمم مطلق $F(x,y) = xy$ را برای خم زیر بیابید :

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq \pi$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = y(-3\sin t) + x(2\cos t) = -6\sin^2 t + 6\cos^2 t = 6\cos 2t = 0$$

$$2t = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow t = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \begin{cases} \rightarrow k=0 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ \rightarrow k=1 \rightarrow t = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

t	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	π
x	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3
y	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
$F(x,y)$	0	3	-3	0
		Max مطلق	Min مطلق	

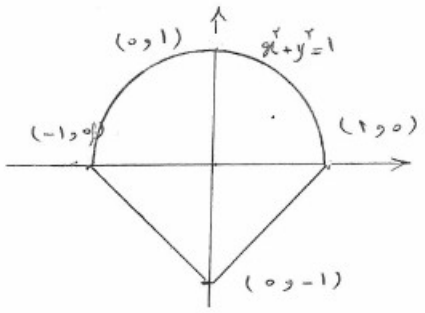
اکسترمم های مطلق تابع $F(x,y)$ بر روی ناحیهٔ A :

ابتدا دستگاه $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$ را حل میکنیم و جوابها را به صورت (a,b) مینویسیم (نقاط بحرانی) سپس نقاطی که درون ناحیهٔ A قرار دارند را در نظر میگیریم [بقیه نقاط را در نظر نمیگیریم.] حال به سراغ خم های مرزد نظر میرویم و معادلهٔ خم را در $F(x,y)$ جایگذاری میکنیم و از آن مشتق گرفته و با مشخص شدن هر مقدار برای x یا y برای دیگری هم از روی معادلهٔ خم مربوطه مقداری بدست می آید. از این طریق چند نقطهٔ دیگر حاصل میشود. سپس نقاط گوشه را هم در نظر میگیریم. در نهایت $F(a,b)$ را برای تمام نقاط بدست آمده حساب میکنیم. بیشترین مقدار MAX مطلق و کمترین مقدار Min مطلق است.

مثال مربوط به این قسمت در صفحهٔ ۱۱۵

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین ـ نقاط اکسترمم مطلق $F(x,y)=xy^2$ را بر ناحیهٔ A بیابید.

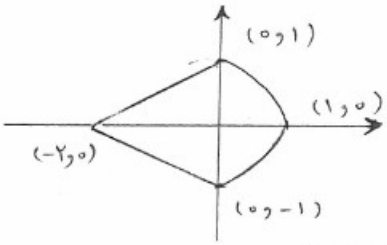


جواب:
- MAX مطلق $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$
- Min مطلق $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

تمرین ـ ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $F(x,y)=(x^2-4x)\cos y$ را بر ناحیهٔ $1 \leqslant x \leqslant 3$ و $-\frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$ بیابید:

جواب:
- $F(2,0)=-4 \longrightarrow$ Min مطلق
- $F(3,-\frac{\pi}{4})=F(1,-\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2} \longrightarrow$ MAX مطلق

تمرین ـ مقادیر اکسترمم مطلق تابع $F(x,y)=x^2y$ را بر ناحیهٔ بستهٔ زیر بیابید:



تمرین ـ مقادیر اکسترمم تابع $F(x,y)=x^2-y^2$ را بر قرص $x^2+y^2 \leqslant 4$ بیابید.

تمرین ـ نقطهٔ بحرانی $F(x,y)=xy+2x-\ln(x^2y)$ را در ربع اوّل با صفحهٔ xy نسبت آوریدونشان دهید که F در این نقطه مینیمم موضعی دارد:

جواب: $(2, \frac{1}{2})$

استاد مطهری: سعادت بشر در کوشش و عمل است.

آنتونی رابینز: شهامت، زیبایی اراده و تصمیم است.

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: ماکزیمم مقدار تابع $F(x,y) = 6xye^{-(2x+3y)}$ را بر ناحیهٔ بستهٔ ربع اوّل بدست آورید.

$$F(x,y) = 6xye^{-(2x+3y)}$$

دستگاه $\Rightarrow$
$$\begin{cases} F_x = 6ye^{-(2x+3y)} - 12xye^{-(2x+3y)} = 0 \longrightarrow e^{-(2x+3y)}[6y-12xy] = 0 \rightarrow 6y = 12xy \begin{cases} y=0 \text{ و } x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \\ F_y = 6xe^{-(2x+3y)} - 18yxe^{-(2x+3y)} = 0 \longrightarrow e^{-(2x+3y)}[6x-18xy] = 0 \longrightarrow x=0 \text{ و } y=0 \\ \qquad\qquad\qquad\

مثال: بر صفحهٔ $2x + y - z = 5$ نقطه‌ای را بیابید که نزدیکترین فاصله را به مبدأ دارد؟

نکته: هرجا صحبت از فاصلهٔ یک نقطه تا مبدأ در میان باشد باید تابع F را به صورت $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ در نظر بگیریم. امّا اگر فاصلهٔ نقطه‌ای مثل تا $(x_0 \text{ و } y_0 \text{ و } z_0)$ از ما خواستند $F(x,y,z) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ را در نظر میگیریم.

در این مسأله هدف محاسبهٔ نزدیک‌ترین مقدار فاصله $F(x,y,z)$ تحت قید $2x + y - z = 5$ است. پس باید در چنین مسائلی از ضرایب لاگرانژ استفاده کنیم.

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \xrightarrow[\text{میرسانیم.}]{\text{برای راحتی محاسبه به توان ۲}} F^2 = x^2+y^2+z^2 \rightarrow \nabla F^2 = \lambda \nabla g$$

$$g(x,y,z) = 2x + y - z - 5 = 0$$

$$\begin{cases} F_x = \lambda g_x \\ F_y = \lambda g_y \\ F_z = \lambda g_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda & (1) \\ 2y = \lambda & (2) \\ 2z = -\lambda & (3) \\ 2x + y - z - 5 = 0 & (4) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2}\lambda \\ z = -\frac{1}{2}\lambda \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۴)}} 2\lambda + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{در نتیجه}} \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{6} \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

نزدیک نقطهٔ تا مبدا $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : مطلوب است دورترین و نزدیک‌ترین نقاط خم $x^2+xy+y^2=1$ به مبدأ ؟

نکته : اگر g از دو متغیر x و y تشکیل شده باشد $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ را در نظر میگیریم.

$$F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{برای راحتی}} F^2=x^2+y^2$$

$$g(x,y)=x^2+xy+y^2-1$$

$$\Rightarrow \nabla F^2=\lambda\nabla g \rightarrow \begin{cases} 2x=\lambda(2x+y) \\ 2y=\lambda(2y+x) \\ x^2+xy+y^2-1=0 \quad (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda)=\lambda y \quad (1) \\ x\lambda=2y(1-\lambda) \quad (2) \end{cases}$$

$x=y=0 \rightarrow$ چون در غیر اینصورت روی خم صدق نمی‌کند $\rightarrow \lambda\neq 0 \rightarrow \frac{(1)}{(2)}=\frac{2(1-\lambda)}{\lambda}=\frac{\lambda}{2(1-\lambda)} \rightarrow (1-\lambda)^2=\frac{\lambda^2}{4} \xrightarrow{\Delta} \lambda_1=2 \;,\; \lambda_2=\frac{2}{3}$

$$\xrightarrow{\lambda=2} \text{جایگذاری در (1) و (2)} \rightarrow \begin{cases} -x=y \\ -x=y \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در (3)}} x^2-x^2+x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \xrightarrow{y=-x} y=\pm 1$$

$$\Rightarrow (1,-1) \;,\; (-1,1)$$

$$\xrightarrow{\lambda=\frac{2}{3}} \text{جایگذاری در (1) و (2)} \rightarrow \begin{cases} y=x \\ y=x \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در (3)}} x^2+x^2+x^2-1=0 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{y=x} y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \;,\; \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$F(1,-1)=\sqrt{2}$, $F(-1,1)=\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ دورترین نقاط

$F\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ نزدیک‌ترین نقاط

رابرت هاچ گادارد : مشکل می‌توان گفت چیزی غیرممکن است، زیرا رؤیای دیروز، امید امروز و واقعیت فردا است.

بیلی گراهام : خداوند به ما دو دست داده است تا با یکی بگیریم و با دیگری ببخشیم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مطلوبست مقادیر Max و Min ، $F(x,y,z)=x-2y+5z$ بر کرهٔ $x^2+y^2+z^2=30$.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=x-2y+5z \\ g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-30=0 \end{cases} \xrightarrow{\nabla F=\lambda\nabla g} \begin{cases} \nabla F=+i-2j+5k \\ \nabla g=2xi+2yj+2zk \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1=2\lambda x \to x=\frac{1}{2\lambda} \quad (1) \\ -2=2\lambda y \to y=\frac{-1}{\lambda} \quad (2) \\ 5=2\lambda z \to z=\frac{5}{2\lambda} \quad (3) \\ x^2+y^2+z^2-30=0 \quad (4) \end{cases} \longrightarrow \text{جایگذاری در (1) و (2) و (3) در (4)} \to \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2-30=0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{1+4+25-120\lambda^2}{4\lambda^2}=0 \to \lambda^2=\frac{1}{4} \to \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اگر}} \lambda=\frac{1}{2} \to \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=5 \end{cases} \to F(1,-2,5)=30 \ \text{Max}$$

$$\xrightarrow{\text{اگر}} \lambda=-\frac{1}{2} \to \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-5 \end{cases} \to F(-1,2,-5)=-30 \ \text{Min}$$

مثال: مطلوب است مقادیر اکسترمم $F(x,y,z)=x^2yz+1$ برمحل تقاطع صفحهٔ $z=1$ با کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2$.

$$\begin{cases} g(x,y,1)=x^2+y^2-1 \\ F(x,y,1)=x^2y+1 \end{cases} \xrightarrow{\nabla F=\lambda\nabla g} \begin{cases} 2xy=2x\lambda \quad (1) \\ x^2=2\lambda y \quad (2) \\ x^2+y^2-1=0 \quad (3) \end{cases} \to x=y=0 \to \text{غ ق ق ← در قید صدق نمیکند}$$

از (1) داریم $\to y=\lambda \xrightarrow[\text{قرار میدهیم}]{\text{در (2)}} x^2=2\lambda^2 \xrightarrow[(3)]{\text{جایگذاری در}} 2\lambda^2+\lambda^2-1=0 \to \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \to x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}+1 \to \text{Max}$ $\qquad$ $F\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}+1 \to \text{Max}$

$F\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},1\right)=\frac{-\sqrt{3}}{9}+1 \to \text{Min}$ $\qquad$ $F\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},1\right)=\frac{-\sqrt{3}}{9}+1 \to \text{Min}$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: نزدیک‌ترین نقاط رویه $y^2-x^2-z^2=1$ را به مبدأ بیابید.

$$F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \begin{cases} F^2=x^2+y^2+z^2 \\ g(x,y,z)=y^2-x^2-z^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \nabla F=\lambda\nabla g \Rightarrow \begin{cases} 2x=-2\lambda x \\ 2y=2\lambda y \\ 2z=-2\lambda z \\ * \; x^2-y^2-z^2-1=0 \end{cases}$$

حالت اول $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow$ غ ق ق ← صدق نمیکند

حالت دوم $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=? \\ \lambda=1 \end{cases} \xrightarrow[(*)]{\text{جایگذاری در}} y=\pm 1$

نزدیک‌ترین نقاط $\rightarrow (0,1,0)$ $(0,-1,0)$ نزدیک‌ترین فاصله $\rightarrow F(x,y,z)=\sqrt{0+1+0}=1$

مثال: اگر $x+y+z^2=16$ بیشترین مقدار حاصلضرب xyz را بیابید.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=xyz \\ g(x,y,z)=x+y+z^2-16 \end{cases} \xrightarrow{\nabla F=\lambda\nabla g} \begin{cases} yz=\lambda & (1) \\ xz=\lambda & (2) \\ xy=2\lambda z & (3) \\ x+y+z^2-16=0 & (4) \end{cases}$$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{y}{x}=1 \rightarrow x=y$ (A) $\qquad \frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{z}{y}=\frac{1}{2z} \rightarrow z^2=y/2$ (B)

جایگذاری (A)، (B) در (4) $\rightarrow y+y+y/2=16 \rightarrow y=\frac{32}{5} \rightarrow z=\sqrt{\frac{32}{10}}$, $x=\frac{32}{5}$

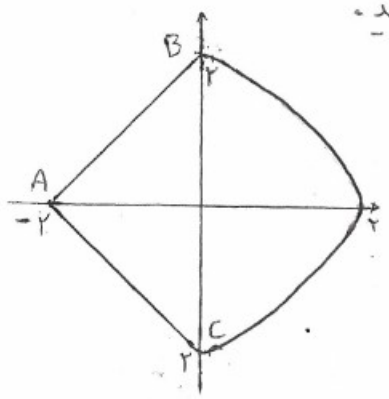
$F\left(\frac{32}{5},\frac{32}{5},\sqrt{\frac{32}{10}}\right)=\checkmark \rightarrow Max$

زاپلیون: همیشه چیزی را بنویس، که بتوانی زیرش را امضا کنی.

پائولو کوئلیو: سن و سال فقط از ضرب آهنگ کسانی می‌کاهد که هرگز جرأت نکرده‌اند با قدم‌های خود سال‌ها راه بروند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مقادیر اکسترمم تابع $F(x,y) = x^2y^2$ را بر ناحیهٔ بستهٔ شکل زیر بیابید.



$$\begin{cases} F_x = 2xy^2 = 0 \\ F_y = 2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,0) \text{ یا } (0,y)$$

$$\rightarrow -2 \leq x \leq 2 \qquad -2 \leq y \leq 2$$

$F(x,0) = 0 \qquad F(0,y) = 0$

روی پاره خط AB $\rightarrow$ $\underbrace{m}_{\text{شیب}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1 \rightarrow y = x + 2 \rightarrow F(x,y) = x^2(x+2)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = g(x)$

$$g'(x) = 0 \rightarrow g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 3x + 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow -2 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{از روی معادلهٔ خم} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$F(-1,1) = 1 \qquad F(0,2) = 0 \qquad F(-2,0) = 0$

روی پاره خط AC $\rightarrow y = -x - 2 \rightarrow F(x,y) = x^2(x+2)^2 = g(x)$

$$\rightarrow g'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow -2 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{از روی معادلهٔ خم} \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$F(0,-2) = 0 \qquad F(-1,-1) = 1 \qquad F(-2,0) = 0$

روی نیمدایرهٔ BC $\rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow F(x,y) = x^2(4 - x^2) = g(x) \rightarrow g'(x) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases} \rightarrow 0 \leq x \leq 2 \rightarrow \text{از روی معادلهٔ دایره} \rightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} F(0,\pm 2) = 0 \\ F(\sqrt{2},\pm\sqrt{2}) = 4 \end{matrix}$$

$\max \; f(x,y) = 4 \longrightarrow (\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

$\min \; f(x,y) = 0 \longrightarrow (0,2), (0,-2), (2,0), (0,y), (x,0)$ $\rightarrow$ یعنی تمام نقاط مرزی درون ناحیه

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین ـ نزدیک‌ترین نقطهٔ صفحهٔ $x + 2y + 3z = 13$ را به نقطهٔ (۱و۱و۱) بیابید.

جواب $\rightarrow \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

تمرین ـ مطلوب است بزرگترین و کوچکترین مقادیری که تابع $F(x,y) = xy$ روی بیضی با معادلهٔ $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ اختیار میکند.

جواب $\rightarrow$ (۲) : بزرگترین (۲-) : کوچکترین

تمرین ـ کمترین و بیشترین فاصلهٔ منحنی $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{4}$ را از مبدأ تعیین کنید.

جواب $\rightarrow$ کمترین فاصله $= \frac{1}{\sqrt{6}}$ دورترین فاصله $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

تمرین ـ درجهٔ حرارت در هر نقطه (x,y,z) از کره $x^2+y^2+z^2=0$ از رابطهٔ $T(x,x,z) = 100x^2y^2z$ مشخص شود. نقاطی از این کره را بیابید که دارای بیشترین و کمترین حرارت است.

جواب $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $y = \sqrt{2}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

مثال ـ مطلوب است بیشترین حجم یک مکعب مستطیل را تحت این قید که سطح جانبی آن ۱۰ متر مربع است:

$V = F(x,y,z) = xyz \rightarrow$ سطح کل مکعب $= S = 2xy + 2yz + 2xz$

پس $\rightarrow xy + yz + xz = 5 \rightarrow g(x,y,z) = xy + yz + zx - 5 = 0$

لاگرانژ:
$$\begin{cases} yz = \lambda(y+z) \rightarrow (1) \\ xz = \lambda(x+z) \rightarrow (2) \\ xy = \lambda(y+x) \rightarrow (3) \\ xy + yz + xz - 5 = 0 \rightarrow (4) \end{cases}$$

* برای ایجاد مکعب باید $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ ، $z \neq 0$ باشد.

** پس $x+z \neq 0$ ، $x+y \neq 0$ ، $y+z \neq 0$ است.

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y+z}{x+z} \rightarrow \cancel{xy} + yz = \cancel{xy} + xz \rightarrow x = y$

$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{z}{y} = \frac{x+z}{y+x} \rightarrow \cancel{zy} + xz = yx + \cancel{yz} \rightarrow z = y$

$\rightarrow$ پس $\rightarrow x = y = z \xrightarrow{\text{جایگذاری در } (4)} x^2 + x^2 + x^2 - 5 = 0 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{\frac{5}{3}} \rightarrow y = z = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$\rightarrow V_{Max} = F(x,y,z) = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^3}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال های چندگانه :

انتگرال های مکرر: فرض کنید $F(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد در اینصورت دقیقاً مانند بحث مشتقات جزئی میتوان از این تابع نسبت به یکی از متغیرها انتگرال گرفت برای اینکار باید متغیر دیگر را مانند یک عدد ثابت فرض کرد. بنابراین لازم است که روش ها و فرمول های انتگرالگیری را تسلط داشته باشیم.

① $\int_c^d \int_a^b F(x,y)\,dx\,dy$ ② $\int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx$

برای محاسبهٔ هر یک از این انتگرال ها ابتدا باید انتگرال میانی را با توجه به دیفرانسیل مربوط حل کنیم و سپس سراغ انتگرال بیرونی برویم.

مثال) $\int_0^3 \int_0^2 e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^2 e^x e^y\,dx\,dy = \int_0^3 e^y e^x \Big|_{x=0}^{x=2} dy = (e^2-1)\int_0^3 e^y dy =$

$= (e^2-1)e^y \Big|_0^3 = (e^2-1)(e^3-1)$

انتگرال های دوگانه :

فرض کنید که تابع $F(x,y)$ روی ناحیهٔ D واقع در صفحهٔ xy پیوسته باشد. در این صورت انتگرال دوگانهٔ تابع F روی ناحیهٔ D به عنوان حجم جسمی در نظر گرفته میشود که از بالا به نمودار تابع F و از پایین به ناحیهٔ D محدود است.

این انتگرال را با نماد زیر نمایش میدهند:

$$\text{حجم } V = \iint_D F(x,y)\,dA$$

$dA \to dx\,dy$

مارک فیشر: اگر به آنچه انجام میدهی عشق بورزی، احتمال شکست صفر میشود.

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیهٔ فوبینی :

برای نواحی مستطیلی هرگاه تابع $F(x,y)$ برناحیهٔ مستطیلی $D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ پیوسته باشد داریم :

$$\iint_D F(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)\,dx\right)dy$$

طرز محاسبهٔ انتگرال های دوگانه روی نواحی مستطیلی :

$$\int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,dy\right)dx \qquad \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)\,dx\right)dy$$

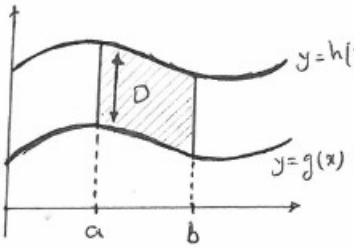
مثال : اگر $0 \leq y \leq 2$ و $1 \leq x \leq 3$ ، $\iint_D (x^2+xy)\,dA$ را بدست آورید :

$$\iint_D (x^2+xy)\,dA = \int_1^3\int_0^2 (x^2+xy)\,dy\,dx \text{ یا } \int_0^2\int_1^3 (x^2+xy)\,dx\,dy = \int_1^3\int_0^2 (x^2+xy)\,dy\,dx =$$

$$= \int_1^3 \left[x^2y + \frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_1^3 (2x^2+2x)\,dx = \frac{2}{3}x^3 + x^2\Big]_1^3 = \frac{76}{3}$$

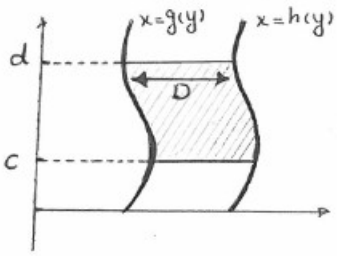
انتگرال گیری دوگانه روی نواحی غیر مستطیل :

ناحیهٔ نوع اوّل (x - منتظم) : یک ناحیه مانند $D_1: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases}$ یک ناحیه از نوع اوّل است .



قضیهٔ فوبینی برای نواحی نوع اوّل : $\iint_D F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} F(x,y)\,dy\,dx$

ناحیهٔ نوع دوم (y - منتظم) : به یک ناحیه مانند $D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ g(y) \leq x \leq h(y) \end{cases}$ یک ناحیه از نوع دوم است .



قضیهٔ فوبینی برای نواحی نوع دوم : $\iint_D F(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{x=g(y)}^{x=h(y)} F(x,y)\,dx\,dy$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

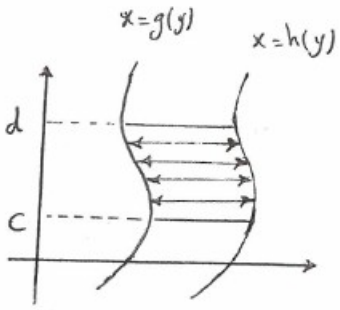
تذکر: توجه داشته باشید که در ناحیهٔ نوع اوّل توابع به شکل تابع برحسب $y = x$ می‌باشد و در ناحیهٔ دوم توابع به صورت تابع برحسب $x = y$ می‌باشد. پس اگر در ناحیهٔ نوع دوم توابع به فرم مورد نظر داده شده نباشد باید در آنها x را برحسب y محاسبه کنیم.

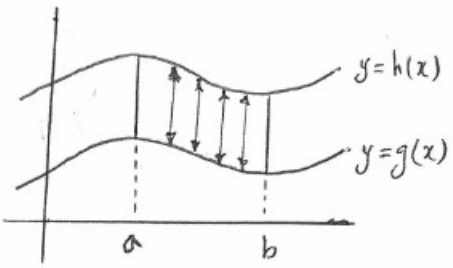
ناحیهٔ نوع سوم: هرگاه بتوان یک ناحیه را هم از نوع اوّل و هم از نوع دوم در نظر بگیریم آن را یک ناحیه از نوع سوم در نظر می‌گیریم.

نکته: در انتگرال سمت چپ هیچ وقت متغیر نباید باشد فقط باید عدد ثابت باشد.

روش تشخیص انواع ناحیه‌ها: برای تشخیص نوع اوّل بودن یا نبودن یک ناحیه یک فلش موازی محور yها ($\updownarrow$) در روی ناحیه در نظر می‌گیریم، آن را به موازات ناحیه حرکت می‌دهیم. در صورتی این ناحیه، ناحیهٔ نوع اوّل است که سر فلش‌ها همواره بر یک منحنی واقع می‌باشد (یعنی در عین حرکت از روی یک منحنی، روی منحنی دیگر نیفتد.)

در این صورت منحنی‌ای که ته فلش‌ها بر آن واقع باشد معرف تابع $h(x)$ (منحنی بالایی) و منحنی‌ای که سر فلش‌ها بر آن واقع است معرف تابع $g(x)$ (منحنی پایین) است.





حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

به همین ترتیب برای تشخیص نوع دوم بودن یک ناحیه کافی است فلش ها را موازی محور x ها در نظر بگیریم

و مانند قبل عمل می کنیم . در این حالت توابع برحسب y می باشد.

قضیه : هرگاه D به نواحی مقدماتی D_1 و D_2 و ... و D_n افراز شده باشد داریم :

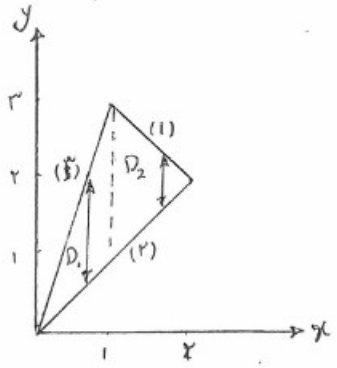
$$\iint_D F(x,y)\,dA = \iint_{D_1} F(x,y)\,dA + \iint_{D_2} F(x,y)\,dA + \iint_{D_3} F(x,y)\,dA + \cdots + \iint_{D_n} F(x,y)\,dA$$

مثال : حاصل $\iint_D (x-2y)\,dA$ را که در آن D ناحیهٔ محدود به مثلثی با رئوس $(0,0)$ ، $(1,3)$ ، $(2,2)$

می باشد را محاسبه کنید.

نکته : ناحیهٔ مورد نظر نه نوع اوّل و نه نوع دوم است . پس ناحیه را می شکنیم به ۲ ناحیهٔ D_1 و D_2 که

هر دو ناحیه نوع اوّل است .



$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 3x \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq -x+4 \end{cases}$$

معادلهٔ ۱ : $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-3}{2-1} = -1 \longrightarrow y = -1(x-2)+2 \longrightarrow y = -x+4$

معادلهٔ ۲ : $m = 1 \longrightarrow y = x$

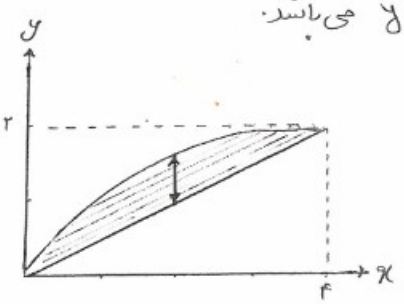
معادلهٔ ۳ : $m = \dfrac{3-0}{1} = 3 \longrightarrow y = 3x$

$$\iint_{D_1} (x-2y)\,dA = \int_0^1 \int_x^{3x} (x-2y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_x^{-x+4} (x-2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (xy-y^2)\Big]_{y=x}^{y=3x} dx + \int_1^2 (xy-y^2)\,dx\Big]_{y=2}^{y=-x+4}$$

$= \cdots$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : انتگرال $\iint_D x\,dA$ که در آن D محدود به $y=\sqrt{x}$ و $y=\frac{1}{2}x$ می‌باشد.



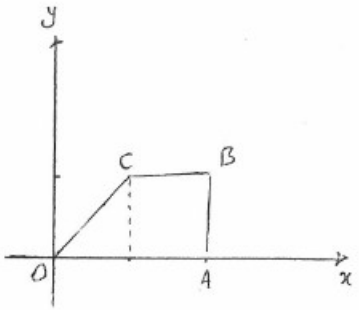
$$\frac{1}{2}x=\sqrt{x} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array} \right.$$

$$\iint x\,dA=\int_0^4\int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=\sqrt{x}} x\,dy\,dx=\int_0^4 xy\Big]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=\sqrt{x}}dx=\int_0^4\left(x^{3/2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\frac{2}{5}x^{5/2}-x^3/6\Big]_0^4=2/5\times(4)^{5/2}-\frac{(4)^3}{6}$$

مثال : اگر D ناحیه‌ای ذوزنقه‌ای با رئوس $O:(0,0)$ ، $A:(2,0)$ ، $B:(1,1)$ ، $C:(1,1)$ باشد

حدود انتگرال دوگانهٔ $\iint_D F(x,y)\,dA$ را به ترتیب $dydx$ و $dxdy$ تعیین کنید :



$$\iint_D F(x,y)\,dA=\int_0^1\int_0^x F(x,y)\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^1 F(x,y)\,dy\,dx \quad (\updownarrow)$$

$$\iint_D F(x,y)\,dA=\int_0^1\int_y^2 F(x,y)\,dx\,dy \quad (\longleftrightarrow)$$

تغییر ترتیب در انتگرال دوگانه : وقتی انتگرال های مکرر با ترتیب دیفرانسیلی داده شده قابل حل نباشد (یا سخت حل شود.) امّا بتوان با تغییر ترتیب دیفرانسیلی (جای dx و dy) انتگرال را حل کرد. در این حالت برای انجام این تغییر ترتیب باید ناحیهٔ داده شده را مشخص کنیم و نوع آن را معین کنیم. سپس نوع آن را عوض کنیم و مجدداً انتگرال را روی فرم جدید ناحیه بنویسیم.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال های غیرقابل حل :

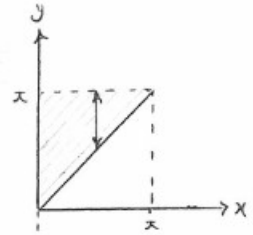
$$\int \sin x^2\,dx \qquad \int \cos x^2\,dx \qquad \int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int e^{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int \cos x^3\,dx \qquad \int e^{\frac{1}{x}}\,dx \qquad \int \sin\frac{1}{x}\,dx \qquad \int \cos\frac{1}{x}\,dx, \ldots$$

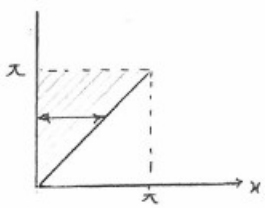
مثال : انتگرال های دوگانهٔ زیر را محاسبه کنید :

(۱) $\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ x \leq y \leq \pi \end{cases}$$



$$D^*: \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

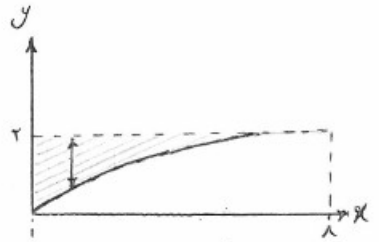


$$= \int_0^{\pi}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, x \Big]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^{\pi} \sin y\,dy = -\cos y \Big]_0^{\pi} = 2$$

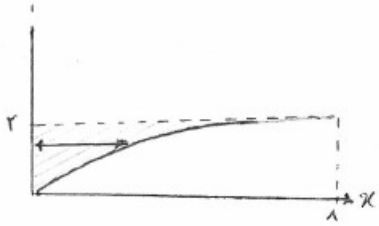
---

(۲) $\int_0^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2 \end{cases}$$



$$D^*: \begin{cases} 0 \leq x \leq y^3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

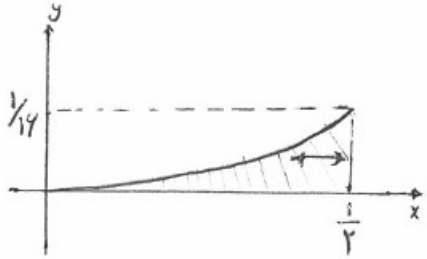


$$\int_0^{2}\int_0^{y^3} \frac{dx\,dy}{y^4+1} = \int_0^{2} \frac{x}{y^4+1}\Big]_{x=0}^{x=y^3} dy = \int_0^{2} \frac{y^3\,dy}{y^4+1} = \frac{1}{4}\ln(y^4+1)\Big]_0^{2} = \frac{1}{4}\ln 17$$

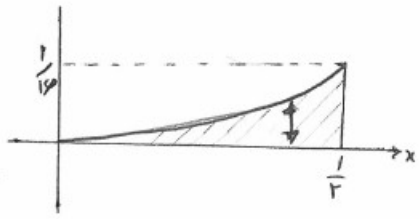
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

③ $\int_0^{\frac{1}{16}}\int_{\sqrt[4]{y}}^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5)\,dx\,dy$

$$D:\begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{16} \\ \sqrt[4]{y} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$D^*:\begin{cases} 0 \le y \le x^4 \\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$



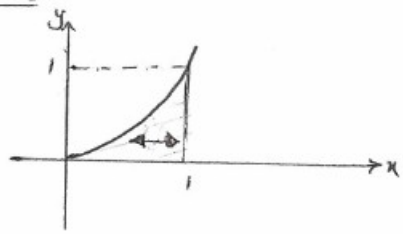
$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{y=x^4} \cos(16\pi x^5)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5)\,y\Big]_{y=0}^{y=x^4} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^4\cos(16\pi x^5)\,dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16\pi x^5 = t \\ 80\pi x^4 dx = dt \end{cases} \Rightarrow x^4 dx = \frac{dt}{80\pi} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to t=0 \\ x=\frac{1}{2} \to t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

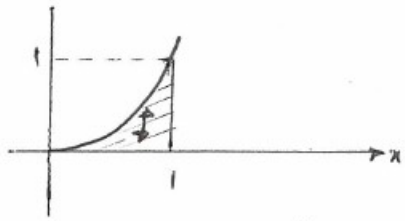
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{80\pi}\,dt = \frac{1}{80\pi}\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{80\pi}$$

④ $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \cos\frac{y}{x}\,dx\,dy$

$$D:\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 1 \end{cases}$$



$$D^*:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$



$$= \int_0^1\int_0^{x^2} \cos\frac{y}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 x\sin\frac{y}{x}\Big]_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^1 x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x\Big]_0^1 =$$

$= \sin 1 - \cos 1$

x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

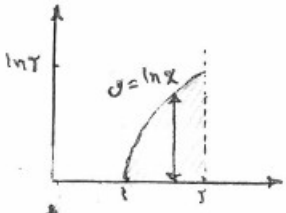
برای این ترسی: شما تبدیل به همان چیزی می‌شوید که بیشتر به آن فکر می‌کنید.

حسن پور

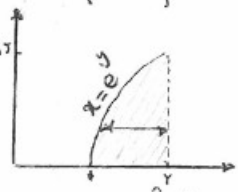
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $\int_1^2 \int_0^{\ln x} x\sqrt{1+e^{2y}}\, dy\, dx$

$$D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \ln x \end{cases}$$



$$D^*: \begin{cases} 0 \leq y \leq \ln 2 \\ e^y \leq x \leq 2 \end{cases}$$



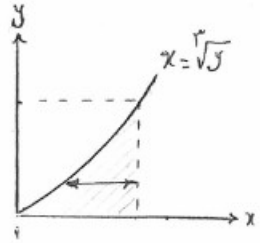
$$= \int_0^{\ln 2}\int_{x=e^y}^{2} x\sqrt{1+e^{2y}}\, dx\, dy = \int_0^{\ln 2} \frac{x^2}{2}\sqrt{1+e^{2y}}\Big|_{x=e^y}^{x=2} dy = \int_0^{\ln 2} (2-\frac{e^{2y}}{2})\sqrt{1+e^{2y}}\, dy$$

$$= \underbrace{\int_0^{\ln 2} 2\sqrt{1+e^{2y}}\, dy}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\, dy}_{I_2} \longrightarrow$$ حل در پاسخ صفحه

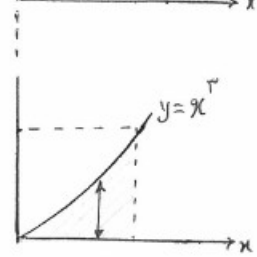
---

۶) $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{2\pi \sin \pi x^2}{x^2}\, dx\, dy$

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt[3]{y} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$D^*: \begin{cases} 0 \leq y \leq x^3 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$= \int_0^1 \int_0^{x^3} \frac{2\pi \sin \pi x^2}{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{2\pi \sin \pi x^2}{x^2}\, y\Big|_{y=0}^{y=x^3} dx = \int_0^1 2\pi x \sin \pi x^2\, dx =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi x^2 = t \\ 2\pi x = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to t=0 \\ x=1 \to t=\pi \end{cases} \Rightarrow = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = -\cos t\Big|_0^{\pi} = 2$$

حل I_1: $\int_0^{\ln 2} 2\sqrt{1+e^{2y}}\, dy \to e^y = \tan\theta \to dy = \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta} \longrightarrow I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}\frac{1}{2}} \frac{\sec^3\theta\, d\theta}{\tan\theta} \times \frac{\tan\theta}{\tan\theta}$

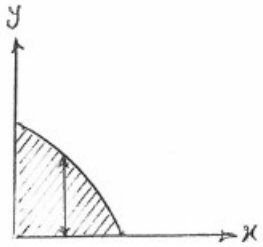
$$I_1 = \sec\theta - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sec\theta-1}{\sec\theta+1}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}\frac{1}{2}} = \sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}-1}{\frac{2}{\sqrt{2}}+1}\right|$$

حل I_2: $\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\, dy \to 1+e^{2y} = u \to 2e^{2y}dy = du \to I_2 = \frac{1}{4}\int_2^5 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{12}u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$

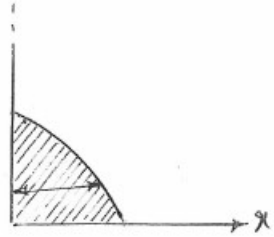
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

(۷) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4-x^2 \end{cases}$$



$$D^*: \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \end{cases}$$



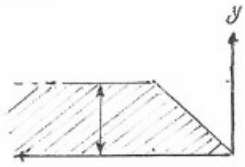
$$= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \cdot x^2 \Big]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy =$$

$$= \frac{1}{4} e^{2y} \Big]_0^4 = \frac{1}{4}(e^8 - 1)$$

---

(۸) $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\, dy\, dx$

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq b \\ x+y \leq 0 \end{cases}$$



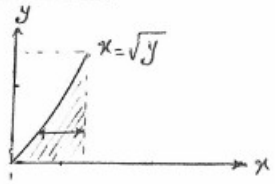
$$D^*: \begin{cases} 0 \leq y \leq b \\ -\infty \leq x \leq -y \end{cases}$$

$$= \int_0^b \int_{-\infty}^{-y} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \int_0^b y e^{\frac{x}{y}} \Big]_{x=-\infty}^{x=-y} dy = \int_0^b y e^{-1} dy = \frac{e^{-1} y^2}{2} \Big]_0^b = \frac{b^2}{2e}$$

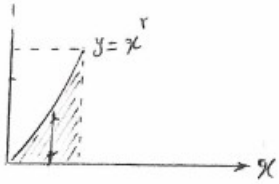
---

(۹) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}\, dx\, dy$

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$D^*: \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < x^2 \end{cases}$$



$$= \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\, dy\, dx = \int_0^2 y\sqrt{x^3+1} \Big]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$$

$$\underline{\underline{t = x^3+1}} \int_1^9 \frac{1}{3} \sqrt{t}\, dt = \frac{52}{9}$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : انتگرال های دوگانهٔ زیر را محاسبه کنید :

① $\int_0^1 \int_{2y}^{2} \cos(x^2)\,dx\,dy$ جواب $= \frac{1}{4}\sin 4$

② $\int_0^2 \int_x^2 y^2 \sin xy\,dy\,dx$ جواب $= 2 - \frac{1}{2}\sin 4$

③ $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy$ جواب $= \frac{1}{2}(e-2)$

④ $\int_0^1 \int_{2y}^{2} 4\cos(x^2)\,dx\,dy$ جواب $= \sin 4$

⑤ $\int_0^2 \int_{y/2}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy$ جواب $= e-1$

⑥ $\int_0^2 \int_{y/2}^{1} y e^{x^3}\,dx\,dy$ جواب $= \frac{2}{3}(e-1)$

⑦ $\int_0^1 \int_y^1 \sin(\pi x^2)\,dx\,dy$ جواب $= \frac{1}{\pi}$

⑧ $\int_0^1 \int_{e^x}^{e} \frac{1}{\ln y}\,dy\,dx$ جواب $= e-1$

⑨ $\int_0^1 \int_0^{\sin^{-1}x} e^{\cos y}\,dy\,dx$

⑩ $\int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\,dx$

⑪ $\int_0^\infty \int_0^x x e^{\frac{-x^2}{y}}\,dy\,dx$ جواب $= \frac{1}{2}$

⑫ حاصل انتگرال $\iint_D \sqrt{1-y^2}\,dA$ را که در آن D ناحیهٔ محدود به دایره‌ای $x^2+y^2=1$ و خط $x+y=1$ در ناحیهٔ اوّل و دوم می‌باشد را محاسبه کنید : جواب $= \frac{\pi}{4}+1$

⑬ حاصل انتگرال $\iint_D (x^2+y)\,dA$ را بیابید که در آن D محدود به خطوط $y=x$ و $y=2x$ و $x=1$ می‌باشد: جواب $= \frac{11}{12}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه :

برای حل برخی از انتگرال‌ها لازم است از تغییر متغیری نظیر $(I)\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ استفاده کنیم . در اینصورت فرمول

تغییر متغیر در انتگرال به صورت زیر خواهد بود .

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} F(u,v)\,|j|\,du\,dv$$

---

① تابع $F(u,v)$: باید تابع $F(x,y)$ را به یک تابع برحسب u و v تبدیل کنیم برای این کار کافی است به جای x و y در ضابطه $F(x,y)$ با توجه به تغییر متغیرهای (I) برحسب u و v مقدار می‌گذاریم .

---

② $j = j(u,v)$: باید ارتباط بین $dx\,dy$ و $du\,dv$ را پیدا کنیم این ارتباط را ژاکوبی می‌نامند .

تذکر : در این حالت لازم است در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی x و y را برحسب u و v پیدا کنیم .

$$j = j(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

---

③ ناحیهٔ D^* : تبدیل شدهٔ ناحیهٔ D در دستگاه مختصات xy را با D^* نمایش میدهیم که دستگاه uv می‌باشد.

برای این کار می‌توان در هر یک از معادلات مربوط به مرزهای ناحیهٔ D به جای x و y از روی تغییر متغیرهای (I)

برحسب u و v مقدار بگذاریم تا رابطهٔ بین u و v را در هر یک از مرزهای ناحیهٔ D مشخص کنیم .

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

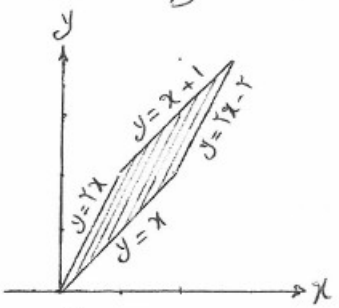
نکته : هرگاه فرمول های تغییر متغیر را به ما ندهند:

(۱) به تابع زیر انتگرال توجه می کنیم اگر دو ترکیب مشخص داشت یکی را u و دیگری را v می گیریم.

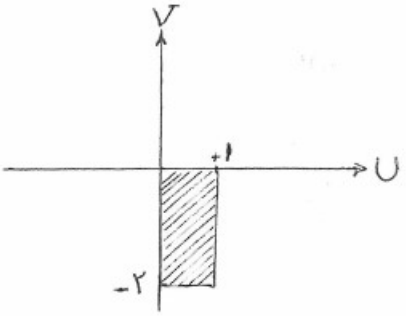
(۲) باید به ناحیهٔ D توجه می کنیم و عباراتی را برابر u و v می گیریم که حتی المقدور بین دو مقدار ثابت تغییر کند.

مثال : فرض کنید D متوازی الاضلاعی محدود به $y=2x$ ، $y=2x-2$ ، $y=x$ ، $y=x+1$ باشد در این صورت انتگرال $\iint_D dxdy$ را با تغییر متغیرهای $x=u-v$ و $y=2u-v$ بدست آورید :

$$\begin{cases} y-2x=-2 \\ y-2x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x=0 \\ y-x=1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y=2u-v \\ x=u-v \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y-x=u \\ y-2x=v \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} y=2x \longrightarrow y-2x=0 \longrightarrow v=0 \\ y-2x=-2 \longrightarrow v=-2 \\ y-x=0 \longrightarrow u=0 \\ y-x=1 \longrightarrow u=1 \end{cases}$$

با توجه به اضلاع متوازی الاضلاع

$$\Longrightarrow J=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1$$

نکته: در این سؤال نیازی به دادن تغییر متغیر نیست چون اضلاع متوازی الاضلاع دو به دو موازی اند.

$$\iint_D dydx=\int_{-2}^{0}\int_{0}^{1} dudv=2$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : انتگرال $\iint_D \frac{1}{y}\,dx\,dy$ که در آن D ناحیهٔ محدود به منحنی های $y^3=4x^2$ و $y^3=x^2$ و خطوط $y=2x$ و $y=x$ است را محاسبه کنید :

$$\begin{matrix} y^3=4x^2 \\ y^3=x^2 \end{matrix} \;\searrow\nearrow\; \frac{y^3}{x^2}=v \;\begin{matrix}\nearrow v=1 \\ \searrow v=4\end{matrix} \qquad \begin{matrix} y=2x \\ y=x \end{matrix} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \frac{y}{x}=u \;\begin{matrix}\nearrow u=2 \\ \searrow u=1\end{matrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ \frac{-2y^3}{x^3} & \frac{2y^2}{x^2} \end{vmatrix}=\frac{-y^3}{x^4}$$

نکتهٔ مهم : درصورتی که محاسبهٔ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ مشکل باشد می‌توان از رابطهٔ $J=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ استفاده کرد:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\frac{-y^3}{x^4}}=\frac{-x^4}{y^3}\Rightarrow |J|=\frac{x^4}{y^3}$$

$$\int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{4}\frac{1}{y}\cdot\frac{x^4}{y^3}\,dv\,du \xrightleftharpoons{y/x=u} \int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{4}u^{-4}\,dv\,du=\int_{u=1}^{2}u^{-4}v\Big]_{v=1}^{4}du=$$

$$3\int_1^2 u^{-4}\,du=-\frac{1}{u^3}\Big]_1^2=-\frac{1}{8}+1=\frac{7}{8}$$

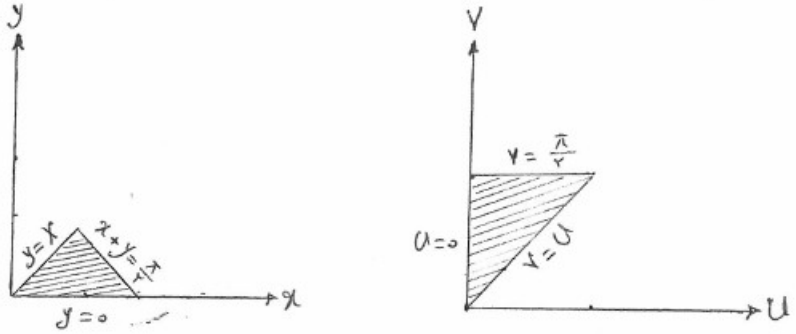
برایان ترسی : ذهن مانند باغی است که در آن یا گل می‌روید یا علف هرز .

الکس مکنزی : علت هر شکستی عمل کردن روی فکر است .

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مقدار $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy$ که در آن D ناحیهٔ محدود به خطوط $y=x$ و $x+y=\frac{\pi}{2}$ است را بدست آورید:



$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{v-u}{2} \end{cases} \Rightarrow J=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

اگر $\Rightarrow \begin{cases} y=0 \longrightarrow v=u \\ y=x \longrightarrow u=0 \\ x+y=\frac{\pi}{2} \longrightarrow v=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{v} \cos\frac{u}{v}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v\sin\frac{u}{v}\Big]_{u=0}^{u=v} dv=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v(\sin 1)\,dv=$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\sin 1)\cdot\frac{v^2}{2}\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{16}\sin 1$$

هنری برگسون: "بودن" یعنی تغییر، "تغییر" یعنی بلوغ، "بلوغ" یعنی استمرار خلاقیت و پویای تولد دوباره.

آن ویلارد: زندگی‌مان همان گونه سپری می‌شود که روزهایمان را سپری می‌کنیم.

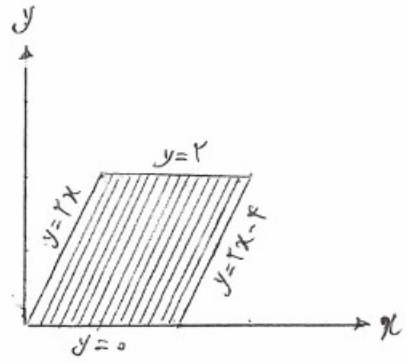
جین جکسون: هرگز به دیگران از بالا نظر نکن، مگر آن که بخواهی آنها را هم بالا بکشی.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : انتگرال زیر را حل کنید :

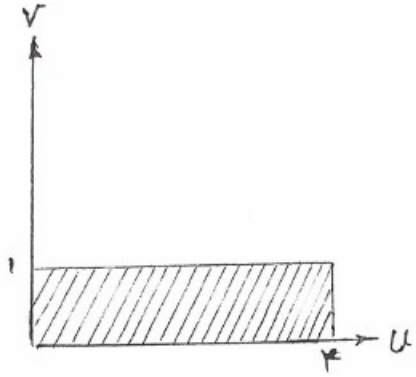
① $$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+4}{2}} y^3 (2x-y) e^{(2x-y)^2} \, dx\,dy$$

$$\begin{cases} \frac{y}{2} = v \longrightarrow y = 2v \\ 2x - y = u \xrightarrow{\div 2} x - \frac{y}{2} = \frac{u}{2} \longrightarrow x = \frac{u}{2} + v \end{cases} \Longrightarrow$$



$$J = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} y = 0 \longrightarrow v = 0 \\ y = 2 \longrightarrow v = 1 \\ y = 2v \longrightarrow \frac{y}{2} = v \rightarrow v = \frac{u}{2} + v \longrightarrow u = 0 \\ 2x - 4 = y \longrightarrow u + 2v - 4 = 2v \longrightarrow u = 4 \end{array} \right.$$



$$\int_0^1 \int_0^4 8v^3 u e^{u^2} \, du\,dv = 4 \int_0^1 v^3 e^{u^2} \Big]_{u=0}^{u=4} dv = 4 \int_0^1 v^3 (e^{16} - 1)\, dv = 4(e^{16} - 1) \frac{v^4}{4} \Big]_0^1 =$$

$$= e^{16} - 1$$

---

② $$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)} dA \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} = u^2 \\ x = 2u \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{9} = v^2 \\ y = 3v \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} 6\,du\,dv \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} D^* : \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant \infty \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} (6r)\, dr\, d\theta = -3 \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} \Big]_0^\infty d\theta = 3 \int_0^{\pi/2} d\theta = 3 \frac{\pi}{2}$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : انتگرال دوگانهٔ $I = \iint_D \left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^5 dx\,dy$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیهٔ محدود به خطوط $x+2y=1$ ، $x+2y=3$ ، $x-2y=1$ ، $x-2y=2$ در صفحهٔ xy است.

جواب $= \frac{325}{486}$

تمرین : اگر D ناحیهٔ محصور بین $x=0$ و $y=0$ و $x+y=1$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx\,dy$ را بیابید.

جواب $= \frac{e-e^{-1}}{4}$

تمرین : اگر ناحیهٔ D به صورت $xy=1$ ، $y=4x$ ، $xy=9$ ، $y=x$ باشد حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dx\,dy$$

جواب $= 8 + \frac{52}{3}\ln 2$

تمرین : انتگرال داده شده زیر را حل نمائید :

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \frac{2x-y}{2}\, dx\,dy$$

راهنمایی : $\begin{cases} y/2 = v \\ u = \frac{2x-y}{2} \end{cases}$

جواب $= 2$

تمرین : اگر D درون یک چهارضلعی با رئوس $(\pi, 0)$ ، $(2\pi, \pi)$ ، $(\pi, 2\pi)$ ، $(0, \pi)$ باشد.

حاصل $I = \iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dx\,dy$ را محاسبه کنید :

جواب $= \frac{\pi^4}{3}$

کنفوسیوس : مردی را با عدالت پاسخ دهید، مهربانی را با مهربانی.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال دوگانه در دستگاه قطبی :

فرمولهای تغییر متغیر در دستگاه قطبی

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r,\theta)\,J\,dr\,d\theta$$

$$J_{\text{قطبی}}(r,\theta) = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

نتیجه $\Rightarrow dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

مراحل :

① تابع $f(r,\theta)$: باید در ضابطهٔ تابع $f(x,y)$ به جای x و y به ترتیب $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$ قرار دهیم و به جای $r^2 = x^2 + y^2$

② ناحیهٔ D^* : این ناحیه تبدیل شدهٔ ناحیهٔ D در دستگاه قطبی می‌باشد. برای پیدا کردن D^* باید محدودهٔ r و θ را در ناحیهٔ D مشخص کنیم. θ زاویه‌ای با محور مثبت xها (به صورت پادساعتگرد) و محدودهٔ تغییرات θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

③ r: برای پیدا کردن محدودهٔ r باید یک پرتو از مبدأ بتابیم، از هر جا وارد ناحیهٔ مورد نظر شد فاصلهٔ آن تا مبدأ حد پایین r و از یک نقطه از ناحیه خارج می‌شود که فاصله‌ی آن تا مبدأ حد بالای r می‌باشد، حال اگر نقاط خروجی تا مبدأ یا نقطهٔ مرزی به ناحیه برابر نباشد باید معادله‌ای برای r برحسب θ بدست بیاوریم. محدودهٔ تغییرات r $(0 \leq r < \infty)$. r همواره نامنفی است.

معمولاً در یکی از موارد زیر از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم :

۱- زمانی که تابع زیر انتگرال ترکیبی از (x^2+y^2) باشد.

۲- زمانی که ناحیهٔ D بخشی از یک دایره باشد.

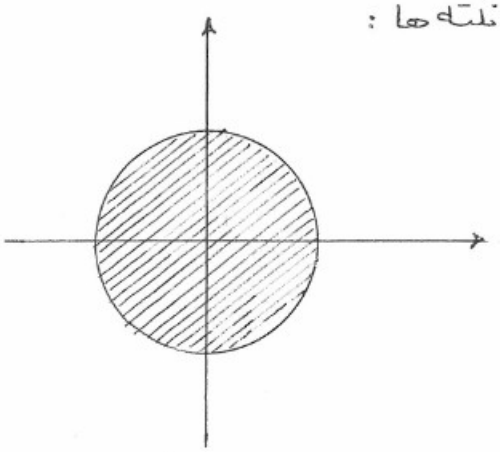
حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته ها :

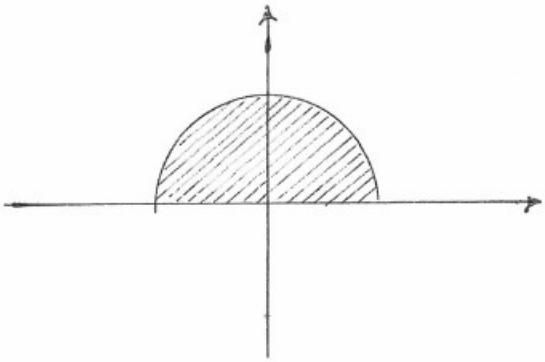
$$D: \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a \\ -\sqrt{a^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$$

$$D^*: \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \end{cases}$$



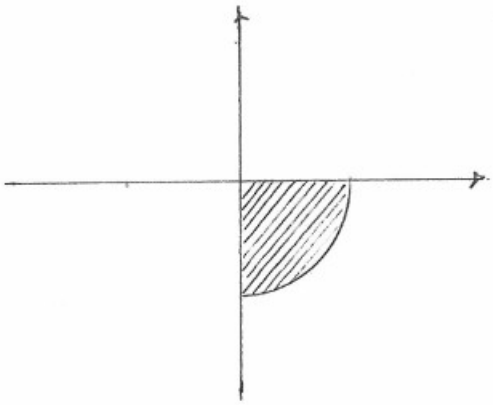
$$D: \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$$

$$D^*: \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \end{cases}$$



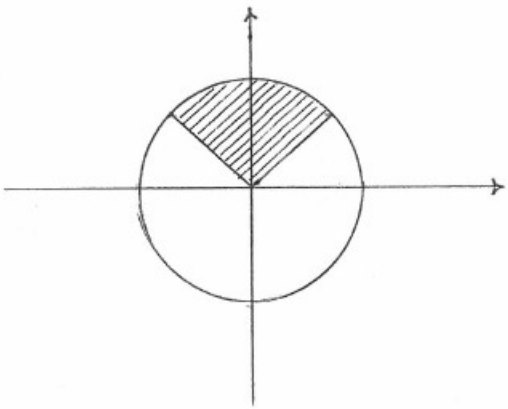
$$D: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a \\ -\sqrt{a^2-x^2} \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$D^*: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0 \\ 0 \leqslant r \leqslant a \end{cases}$$



$$D: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x \ , \ y=-x \end{cases}$$

$$D^*: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4} \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

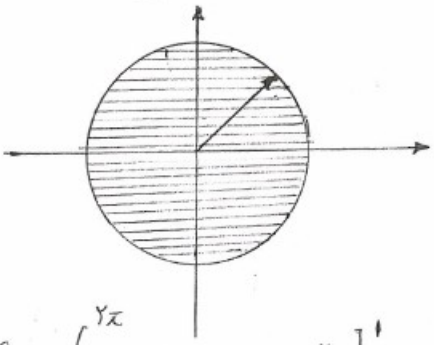


www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : انتگرال زیر را بیابید :

① $\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$



$D: \{x^2+y^2 \leqslant 1 \rightarrow$ دایره

$D^* \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$

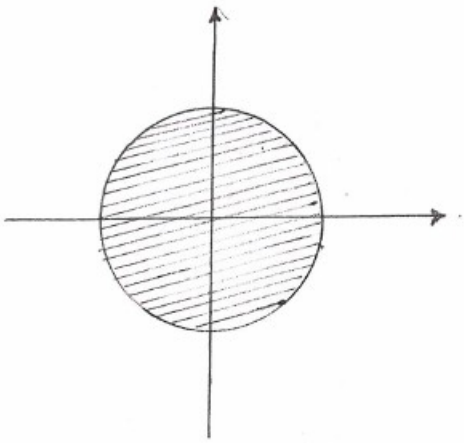
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \ln r \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi}\int_a^1 \ln r \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\cdot\ln r - \frac{r^2}{4}\right)\Big]_a^1 d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\theta\Big]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

حل : $\int r\ln r\,dr = \begin{cases} \ln r = u \longrightarrow \frac{dr}{r} = du \\ r\,dr = dv \longrightarrow \frac{r^2}{2} = v \end{cases} = \frac{r^2}{2}\ln r - \int \frac{r\,dr}{2} = \frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}$

---

② $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$



$D: \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$D^*: \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2}{(1+r^2)^2}\,r\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+r^2}\Big]_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

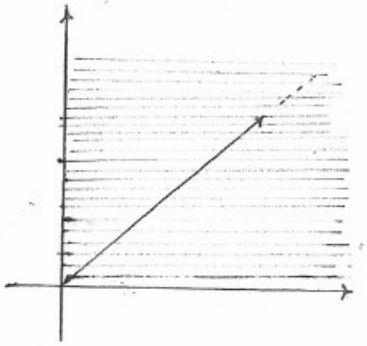
کنفوسیوس : با یک کار می‌توان زندگی را نوشن و با یک نگه داشت : محبت به دیگران

پائولو کوئیلیو : راز آینده در زمان حال است .

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$

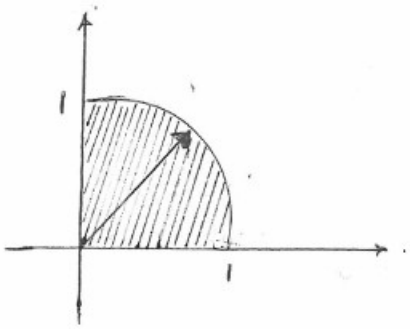


$$D:\begin{cases} 0 \leq x \leq \infty \\ 0 \leq y \leq \infty \end{cases} \qquad D^*:\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \infty \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} . r . dr . d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big]_{r=0}^{r=\infty} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

---

۴) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$

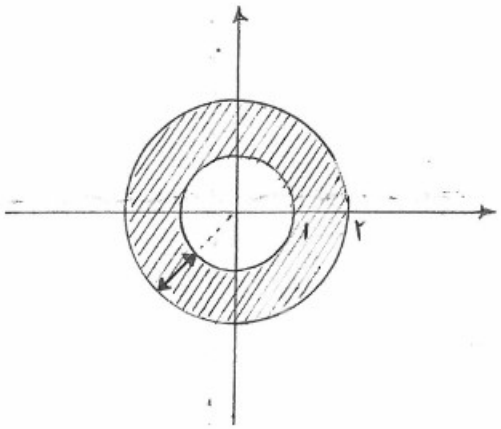


$$D:\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases} \qquad D^*:\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\sqrt{(1-r^2)^3}\Big]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

---

۵) $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dy\,dx$



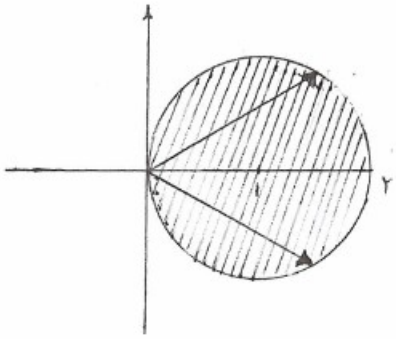
$$D: \{ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \qquad D^*:\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{\ln r^2}{r^2}\, r dr d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{\ln r}{r} dr\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \frac{\ln^2 r}{2}\Big]_{r=1}^{r=2} d\theta = 2\pi \ln^2 2$$

امام سجاد (ع): مؤمن سکوت می‌کند تا سالم بماند و سخن می‌گوید تا سود برد.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

(۶) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA$



$D: \{ x^2 - 2x + y^2 = 0 \rightarrow$ دایره

$x^2 - 2x + y^2 = 0 \longrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

$x^2 - 2x + y^2 = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow r^2 - 2r\cos\theta = 0 \nearrow r = 0$, $\searrow r = 2\cos\theta$

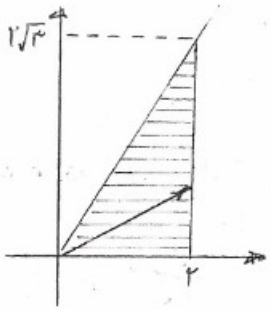
$$D^*: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta \end{cases}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{r^2}\, r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \Big]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,(1 - \sin^2\theta)\, d\theta = \frac{8}{3}\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}$$

---

(۷) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{dy\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$



$$D: \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \qquad D^*: \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant ? \\ 0 \leqslant r \leqslant ? \end{cases}$$

$y = \sqrt{3}x \longrightarrow r\sin\theta = \sqrt{3}\, r\cos\theta \longrightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \longrightarrow 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$

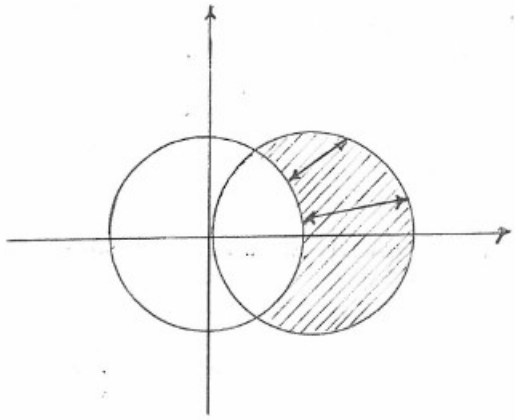
$x = 2 \longrightarrow r = \frac{2}{\cos\theta} \longrightarrow r = 2\sec\theta \longrightarrow 0 \leqslant r \leqslant 2\sec\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\sec\theta} \frac{r\,dr\,d\theta}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} r \Big]_0^{2\sec\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec\theta\, d\theta = 2\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\ln(2+\sqrt{3})$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$



$$D:\begin{cases} x^2+y^2=8x & \text{داخل دایره} \\ x^2+y^2=16 & \text{خارج دایره} \end{cases}$$

$$D:\begin{cases} (x-4)^2+y^2=16 & \text{داخل دایره} \\ x^2+y^2=16 & \text{خارج دایره} \end{cases}$$

محل تلاقی دایره ها و محدودهٔ r و θ

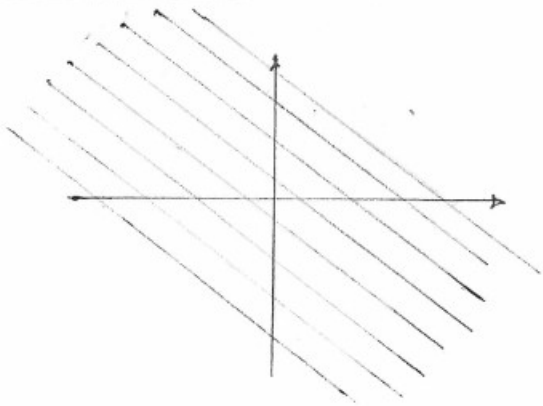
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8x \to r=8\cos\theta \to 8\cos\theta=4 \to \cos\theta=\frac{1}{2} \to \begin{cases}\theta=-\frac{\pi}{3}\\ \theta=\frac{\pi}{3}\end{cases} \\ x^2+y^2=16 \to r^2=16 \to r=4 \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_4^{8\cos\theta}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2}} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} r\Big]_{r=4}^{r=8\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8\cos\theta-4)\,d\theta$$

$$8\sin\theta-4\theta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{2}-4\frac{\pi}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{2}-4\frac{\pi}{3} = 8\sqrt{3}-8\frac{\pi}{3}$$

---

۹) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$



$$D:\begin{cases} -\infty\leqslant x\leqslant\infty \\ -\infty\leqslant y\leqslant\infty \end{cases} \qquad D^*:\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant r\leqslant\infty \end{cases}$$

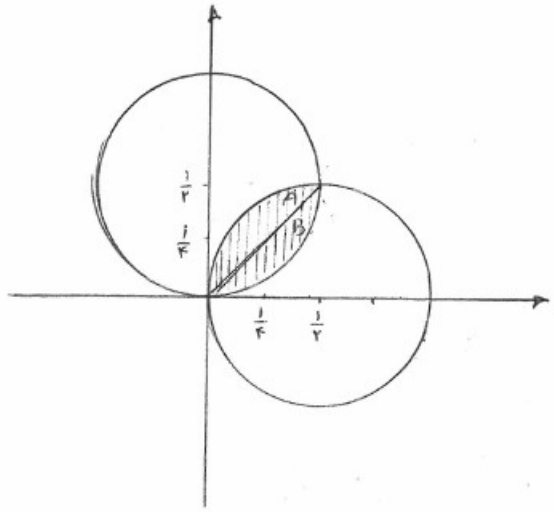
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\sin r^2\,dr\,d\theta \xrightarrow{r^2=t} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-t}\sin t\,dt\,d\theta \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=} \frac{\pi}{2}$$

طبق نکته:

$$*\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۰) $\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$



$$D: \begin{cases} x^2+y^2-x=0 \\ x^2+y^2-y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{ناحیهٔ بین دو دایره}$$

$$D: \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} & (1) \\ x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

$$D_A^*: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant (1) \text{ معادلهٔ دایرهٔ} \end{cases} \xrightarrow{\text{دایرهٔ (1)}} x^2+y^2-x=0 \to r^2=r\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=\cos\theta \end{cases}$$

$$D_B^*: \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 0 \leqslant r \leqslant (2) \text{ معادلهٔ دایرهٔ} \end{cases} \xrightarrow{\text{دایرهٔ (2)}} x^2+y^2-y=0 \to r^2=r\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=\sin\theta \end{cases}$$

$$\iint_D \sqrt{(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sin\theta} \sqrt{r^2}\,r\,dr\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} \sqrt{r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3}{3}\Big]_0^{\sin\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big]_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta\,d\theta + \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\theta + \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3}\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \checkmark$$

حل $I_1 = \int \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\theta = \int -(1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3}-t = \frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta \quad (\cos\theta = t)$

حل $I_2 = \int \cos\theta\,(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \int (1-t^2)\,dt = t-\frac{t^3}{3} = \sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3} \quad (\sin\theta = t)$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : انتگرال های زیر را حل کنید :

① $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$ جواب $= \frac{(e^a-1)\pi}{2}$

② $\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy$ راهنمایی : $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases} \Rightarrow$ ناحیهٔ بین دو دایره

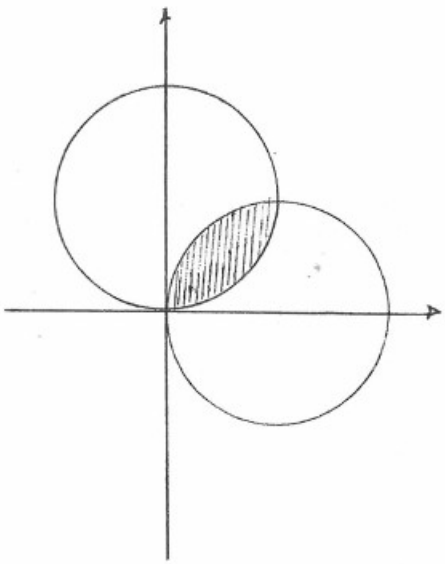
③ $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ راهنمایی $D: \begin{cases} x^2+y^2-x \leqslant 0 & \text{دایره ①} \\ \text{و} & \text{ناحیهٔ محدود به} \\ x^2+y^2-y \geqslant 0 & \text{دایره ②} \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

④ $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^a} \quad (a>1)$ راهنمایی $D: \{x^2+y^2 \geqslant 1$

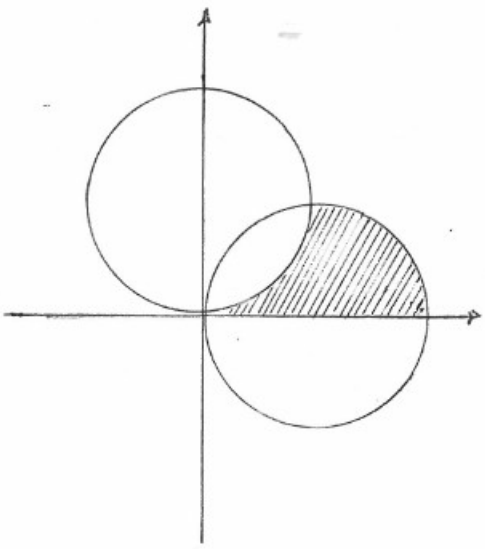
⑤ $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ راهنمایی $D: \begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x \end{cases}$ ناحیهٔ محدود به

⑥ ناحیهٔ D محدود به بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ است. حال انتگرال تابع $F(x,y)=e^{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}$ را بیابید.

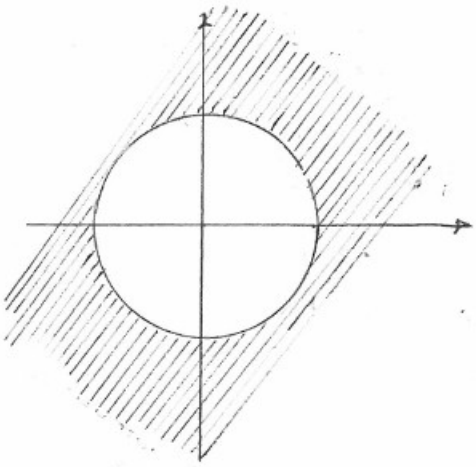
جواب : $6\pi(e-1)$



(شکل تمرین ۲)



(شکل تمرین ۳)



(شکل تمرین ۴)

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

کاربردهای انتگرال دوگانه :

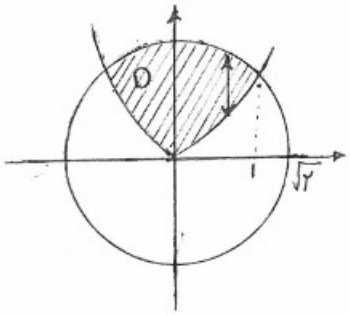
۱ـ محاسبهٔ مساحت به کمک انتگرال دوگانه : مساحت ناحیهٔ D برابر است با انتگرال مضاعف تابع ثابت .

$F(x,y) = 1 \rightsquigarrow$ روی D $\qquad \iint_D 1\, dA$

مثال : مساحت یک دایره به شعاع a را بدست آورید :

$$\iint_D dA \overset{\text{قطبی}}{=\!=} \int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big]_0^a d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi a^2$$

مثال : مساحت ناحیهٔ محدود به ناحیهٔ منحنی $y = x^2$ و دایرهٔ $x^2 + y^2 = 2$ را در بالای محور xها محاسبه کنید ؟



* محل برخورد دو منحنی فوق (۱و۱) و (۱و۱-) میباشد.

$$S_1 = \iint_D 1\, dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 y\Big]_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_0^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2)\,dx \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\sin t \\ dx = \sqrt{2}\cos t\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \longrightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = 0 \longrightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 - 2\sin^2 t}\,(\sqrt{2}\cos t\,dt) - \int_0^1 x^2 dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\,dt - \frac{1}{3} = t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$S = 2S_1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : مساحت ناحیهٔ محدود به مثلثی به رئوس (۱-و۰) ، (۲ و ۲) ، (۱ و ۱-) را به کمک انتگرال دوگانه بیابید .

تمرین : مطلوب است مساحت ناحیهٔ داخل دایرهٔ $r = 8\cos\theta$ و خارج دایرهٔ $r = 4$ را بیابید .

جواب $= 8\sqrt{3} + 16\frac{\pi}{3}$

مثال : مساحت بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را بیابید :

$$\left| \begin{array}{l} x = au \\ y = bv \end{array} \right.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow u^2 + v^2 = 1 \qquad J = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

$$\iint_D 1\, dA = \iint_{D^*} ab\, dv\, du \overset{\text{قطبی}}{=\!=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\, dr\, d\theta = \int_0^{2a} ab \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = ab\pi$$

تولستوی : مردان نیک نام نمی میرند ، زیرا قلوب مردم نسل بعد آرامگاه هستند است .

گوته : کسی شایستهٔ آزادی است که هر روز بتواند بر هوس های خود چیره شود .

شکسپیر : فراموش کن چیزی که نمی توانی در بدست بیاوری و در بدست بیاور چیزی که نمی توانی فراموش کنی .

فرانسیس بیکن : انسان دانا به جای اینکه منتظر فرصت ها باشد ، خود فرصت ها را بوجود می آورد .

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

کاربردهای انتگرال دوگانه :

۲ـ محاسبهٔ حجم به کمک انتگرال دوگانه : اگر تابع $z=f(x,y)$ در ناحیهٔ D مثبت باشد آنگاه $\iint_D f(x,y)\,dA$ برابر با حجم جسم است که از بالا به رویهٔ $z=f(x,y)$ و از پایین به ناحیهٔ D محدود شده است.

نکته : برای پیدا کردن f کافیست به سراغ معادله‌ای که شامل متغیر z است برویم و z را آنجا به صورت $z=f(x,y)$ مشخص کنیم. برای پیدا کردن D باید تغییرات x و y را در صفحهٔ $z=0$ مشخص کنیم.

نکته : اگر جسم از برخورد یک رویه با صفحهٔ کف بدست آمده باشد ما نیز باید معادلهٔ آن را با صفحهٔ $z=0$ قطع دهیم.

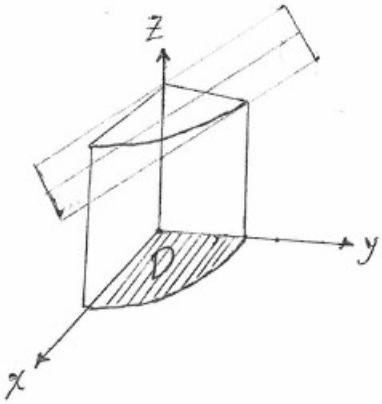
نکته : اگر جسم داده شده از طرف به یک استوانهٔ قائم محدود باشد ناحیهٔ D یعنی کف جسم دقیقاً همان معادلهٔ استوانه خواهد بود.

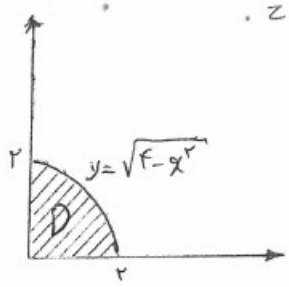
نکته : هرگاه جمله $\frac{1}{8}$ فضا یا صفحهٔ xy آمد باید x و y مثبت باشد.

حسین پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: حجم جسمی را بیابید که در $\frac{1}{8}$ اوّل فضا است و محدود به صفحات مختصات و استوانهٔ $x^2+y^2=4$ و صفحهٔ $z+y=3$.

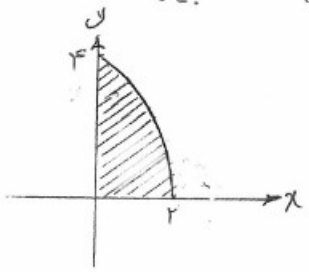




$$V=\iint_D F(x,y)\,dA=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(3-y)\,dy\,dx \xlongequal{\text{قطبی}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2(3-r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\sin\theta\Big]_{r=0}^{r=2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(6-\frac{8}{3}\sin\theta\right)d\theta=6\theta+\frac{8}{3}\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=3\pi-\frac{8}{3}$$

مثال: حجم جسمی را بیابید که صفحهٔ $z=4-x^2-y$ از یک هشتم اوّل فضا جدا می‌کند.



$z=4-x^2-y \longrightarrow F(x,y)=4-x^2-y$

$(z=0)$ برای پیدا کردن D در کف $\rightarrow 0=4-x^2-y \rightarrow y=4-x^2$

$$V=\int_0^2\int_0^{y=4-x^2}(4-x^2-y)\,dy\,dx=\int_0^2\left(4y-x^2y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big]_{y=0}^{y=4-x^2}dx$$

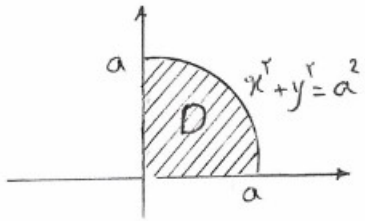
$$V=\int_0^2\left(16-4x^2-4x^2-x^4-\frac{1}{2}(16-8x^2+x^4)\right)dx=\frac{128}{3}$$

دل کارنگی: زندگی ما برآیندهٔ اندیشهٔ ماست.

امام محمد غزالی: قدرت هنگامی نتیجهٔ مثبت دارد که با ایمان توأم باشد.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حجم کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ را بیابید. (ابتدا برای $\frac{1}{8}$ اوّل فضا حساب می‌کنیم برای راحتی)



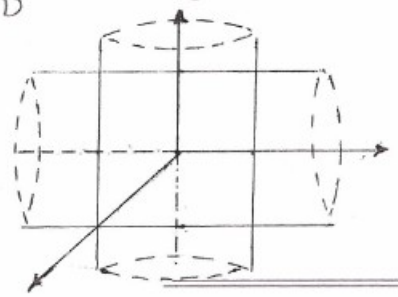
$$V=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy \Rightarrow$$

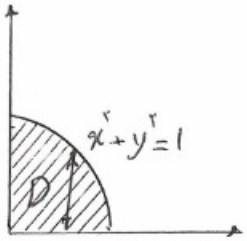
$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}\Big]_0^a\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{3}\,d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1=a^3\frac{\pi}{6} \rightarrow V=8V_1=4a^3\frac{\pi}{3}$$

مثال : حجم ناحیهٔ محدود به استوانهٔ $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$ را در $\frac{1}{8}$ اوّل فضا محاسبه کنید :

$$V=\iint_D \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dy\,dx=\int_0^1(\sqrt{1-x^2})\,y\Big]_0^{y=\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1(1-x^2)\,dx=\frac{2}{3}$$





مثال : مطلوب است محاسبهٔ حجم جسمی که به رویه های زیر محدود شده است :

$$z=x^2+y^2 \;,\; z=0 \;,\; y=x^2 \;,\; y=1 \longrightarrow x=\pm 1$$

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=1}dx=\frac{88}{105}$$

آموختنی را بیاموز : عادت یا بهترین خدمتکار یا بدترین ارباب ماست.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : مطلوب است حجم جسمی که به رویه های زیر محدود شده است :

$$z = x^2 + y^2 \,,\; z = 0 \,,\; y = x^2 \,,\; y = 1$$

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{0} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=x^2}^{y=1} dx = \frac{88}{105}$$

مثال : حجم جسم محدود به سهمی گون $x^2 + y^2 = 5z$ و صفحهٔ xy ، استوانهٔ $x^2 + y^2 = 9$ را بیابید.

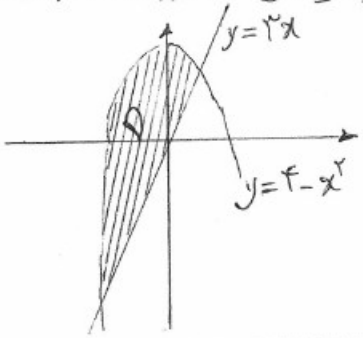
$$V = \iint_D \frac{x^2 + y^2}{5}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} \frac{r^2}{5}\, r\, dr\, d\theta = \frac{81\pi}{10} \qquad D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

همان معادله استوانه

---

* در مثال زیر فقط ناحیه ها مشخص شده اند حل انتگرال برعهدهٔ خود دانشجو است .

مثال : حجم جسمی که قاعدهٔ پایین اش ناحیهٔ واقع در صفحهٔ xy و محدود به سهمی $y = 4 - x^2$ و صفحهٔ $y = 3x$ و قاعدهٔ بالایی اش محدود است به صفحهٔ $z = x + 4$.



$$V = \int_{-4}^{1}\int_{3x}^{4-x^2} (x+4)\, dy\, dx$$

$$V = \int_{-4}^{1} (x+4)(4 - x^2 - 3x)\, dx = \frac{625}{12}$$

تمرین : حجم ناحیهٔ محدود به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2$ و مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ و صفحهٔ xy را در $\frac{1}{8}$ اول فضا محاسبه کنید .

تمرین : حجم ناحیهٔ محدود به سهمی گون $z = 4 - 2x^2 - y^2$ و صفحهٔ xy را محاسبه کنید ! جواب $\Rightarrow V = 4\sqrt{2}\pi$

تمرین : حجم جسمی که از پایین به صفحهٔ xy و از بالا توسط سهمی گون $z = 25 - x^2 - y^2$ محدود شده است را بیابید.

جواب $= \frac{625\pi}{2}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

کاربرد های انتگرال دوگانه :

۳ـ حل انتگرال های یگانه

مثال : حاصل $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ را بدست آورید :

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx \rightarrow I^2=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^\infty d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}\rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال : حاصل انتگرال $I=\int_0^2(\tan^{-1}\pi x-\tan^{-1}x)\,dx$ را بیابید.

$$I=\int_0^2\int_x^{x\pi}\frac{dy}{1+y^2}dx=\int_0^2\int_{\frac{y}{\pi}}^{y}\frac{dx}{1+y^2}dy+\int_2^{2\pi}\int_{\frac{y}{\pi}}^{2}\frac{1}{1+y^2}dxdy$$

$$I=\int_0^2\frac{x}{1+y^2}\Big]_{x=y/\pi}^{x=y}dy+\int_2^{2\pi}\frac{x}{1+y^2}\Big]_{x=y/\pi}^{x=2}dy$$

$$I=\int_0^2\frac{y}{1+y^2}dy-\frac{1}{\pi}\int_0^2\frac{y}{1+y^2}dy+2\int_2^{2\pi}\frac{1}{1+y^2}dy-\frac{1}{\pi}\int_2^{2\pi}\frac{y}{1+y^2}dy=$$

$$I=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big]_0^2-\frac{1}{2\pi}\ln(1+y^2)\Big]_0^2+2\tan^{-1}y\Big]_2^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\ln|1+y^2|\Big]_2^{2\pi}=$$

$$\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2\pi}\ln 5-2\tan^{-1}2\pi-\frac{1}{2\pi}\ln 5+\frac{1}{2\pi}\ln|1+4\pi^2|$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حاصل انتگرال زیر را بیابید .

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

نکته : $\int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y}\, e^{-yx}\Big]_0^\infty = \frac{1}{y}$

پس $\Rightarrow \int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y}$ $\xrightarrow{\text{از طرفین از } a \text{ تا } b \text{ انتگرال می‌گیریم .}}$

$$\int_{y=a}^{y=b}\left(\int_{x=0}^{x=\infty} e^{-yx}\,dx\right)dy = \int_{y=a}^{y=b}\frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a} \quad (*)$$

تغییر ترتیب $\rightarrow \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=a}^{b} e^{-yx}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-yx}}{x}\Big]_{y=a}^{y=b}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx = (*) \Rightarrow$

$\Rightarrow (*) = \ln\frac{a}{b}$

گوپ مایر : کار انسان را خسته نمی‌کند ، بیکاری و درخوت خسته کننده‌ترین کارهای جهان است .

گوپ مایر : سعی کن با خیالت بخندی ، دیگران بدلخند و شادابی را در خیالت ببینند .

موریس ترلینگ : در موفقیت افسوس نخوردن برای گذشته ، غنیمت شمردن حال و امید به آینده است .

گوته : قطعه سنگی که برای ضعیفان مانع است ، برای با اراده‌ها به قدرت بدل می‌شود .

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال های سه گانه :

فرض کنید $F(x,y,z)$ یک تابع سه متغیره باشد در این صورت انتگرال مکرر سه تایی این تابع دقیقاً مانند انتگرال مکرر دوتایی محاسبه می شود.

* اگر R مکعب $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \\ \gamma \leqslant z \leqslant \beta \end{cases}$ باشد در این صورت داریم :

$$\iiint_R F(x,y,z)\,dv = \int_a^b \int_c^d \int_\gamma^\beta F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

نواحی مقدماتی در فضا نیز با تعمیم مفاهیم مربوط به نواحی مقدماتی در صفحه به نواحی سه بعدی قابل تعریف می باشد، مثلاً یک ناحیهٔ مقدماتی در فضا می تواند به صورت زیر باشد.

$$R: \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \\ h_1(x,y) \leqslant z \leqslant h_2(x,y) \end{cases}$$

با عوض کردن نقش هر دو متغیر از سه متغیر روبه رو می توان نواحی مقدماتی دیگری نیز در فضا بدست آورد.

قضیه فوبینی : (برای فضا)

هرگاه $F(x,y,z)$ پیوسته باشد:

$$\iiint_R F(x,y,z)\,dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

کوپ مایر : زندگی فرصت یا شانسی برای موفق شدن به تو نخواهد داد، تو باید این فرصت را از زندگی بگیری.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : حاصل $\iiint_R xz\,dv$ را که در آن R ناحیهٔ محدود به نیم کرهٔ فوقانی به شعاع a است را بیابید.

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \longrightarrow (z>0)$$

$$z^2=a^2-x^2-y^2 \xrightarrow{z>0} 0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

برای بدست آوردن ناحیهٔ کف جسم آن را با صفحهٔ $z=0$ قطع می‌دهیم.

$$z=0 \longrightarrow x^2+y^2=a^2 \Longrightarrow R:\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant a\\ -\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}\\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant a\\ -\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} zx\,dz\,dy\,dx=\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{2}x(a^2-x^2-y^2)\,dy\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{1}{2}r\cos\theta(a^2-r^2)r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\cos\theta(a^2-r^2)r^2\,dr\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\frac{a^2r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Big]_0^{r=a}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right)\sin\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

آنتونی رابینز : آنچه سرنوشت ما را تعیین می‌کند شرایط زندگی ما نیست، بلکه تصمیم‌های ماست.

شیلتون : به زیبایی اجازه بده که قبل از اندیشه‌ات به راه بیفتد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حجم یک ناحیه در فضا :

هرگاه R یک ناحیه در فضا باشد آنگاه حجم R را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد :

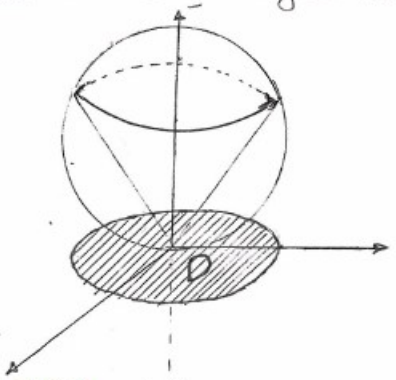
$$\text{حجم } R = \iiint_R dv$$

نکته : در این بخش اجسامی را در نظر می‌گیریم که از بالا به یک رویه و از پایین نیز به یک رویه محدود باشد.

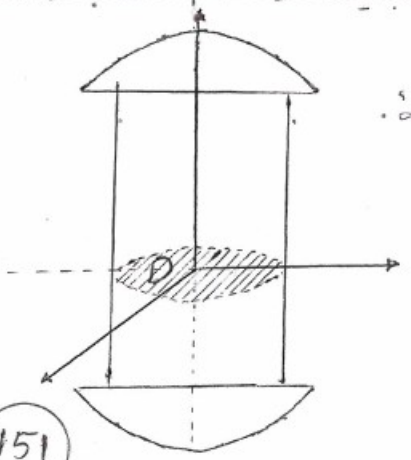
در حالت کلی برای محاسبهٔ حجم ابتدا باید رویه‌های فوقانی و تحتانی را مشخص کنیم. برای این کار سراغ معادله‌هایی که متغیر z دارند می‌رویم و از آنها z را به صورت $z = h_1(x,y)$ رویهٔ تحتانی و $z = h_2(x,y)$ رویهٔ فوقانی مشخص می‌کنیم. پس باید سایهٔ (D) را در کف (xy) بدست آوریم.

اگر جسم از برخورد دو رویه پدید آمده باشد برای پیدا کردن سایهٔ جسم باید معادله‌های این دو رویه را قطع دهیم تا مرز D بدست آید و سپس محدودهٔ xy را در ناحیهٔ D مشخص می‌کنیم. (شکل ۱)

اگر جسم R از اطراف به یک استوانهٔ قائم محدود باشد، آنگاه سایهٔ جسم در صفحهٔ xy ناحیه‌ای است محدود به همان معادلهٔ استوانه.



(۱)



حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

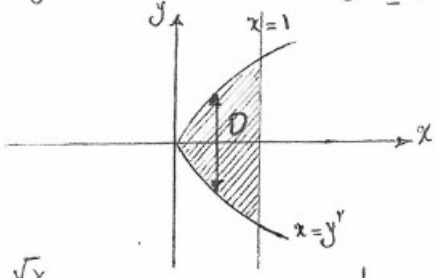
مثال : حجم جسمی را بیابید که از بالا به رویهٔ $x^2+y^2+z=4$ و از پائین به رویهٔ $x^2+y^2-z=1$ و از اطراف به استوانهٔ $x^2+y^2=3$ محدود باشد.

همان معادلهٔ استوانه $\Rightarrow D: \begin{cases} -\sqrt{3-x^2} \leq y \leq \sqrt{3-x^2} \\ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2-1 \leq z \leq 4-x^2-y^2$

$$V=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{x^2+y^2-1}^{4-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} 5-2(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{قطبی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(5-2r^2)r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(5\frac{r^2}{2}-\frac{1}{2}r^4\right)\Big|_{r=0}^{\sqrt{3}}d\theta=\left(\frac{15}{2}-\frac{9}{2}\right)2\pi=6\pi$$

مثال : حجم محدود به رویهٔ $z=x^2+y^2$ و استوانهٔ $x=y^2$ و صفحات $x=1$ و $z=0$ را محاسبه کنید.



$$V=\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_0^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx$$

$$V=\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} z\Big|_0^{x^2+y^2}dy\,dx=\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_0^1 x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}}dx=$$

$$V=\frac{88}{105}$$

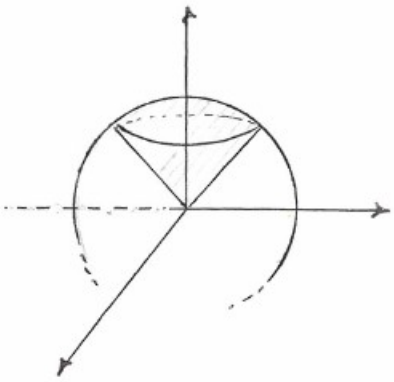
ابوعلی سینا : معلّم نفس خود و شاگرد وجدان خویش باش.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حجم جسمی را که از بالا به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ $z\geq 0$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود است بیابید.

$$x^2+y^2+z^2=4 \xrightarrow{z\geq 0} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \rightarrow \text{فوقانی}$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \text{تحتانی}$$



* برای پیدا کردن ناحیهٔ D ابتدا دو رویه را قطع می‌دهیم :

$$\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+y^2=2 \quad \text{ناحیهٔ دایره}$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx \overset{\text{قطبی}}{=\!=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-r^2}-\sqrt{r^2}\right)r\,dr\,d\theta =$$

$$=\int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\sqrt[2]{(4-r^2)^3}-\frac{r^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{2}}\,d\theta = \left(-\frac{1}{3}\sqrt[2]{8}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{64}\right)2\pi$$

تمرین : حجم ناحیهٔ R را بیابید اگر $R: x^2+y^2+z^2=1$ جواب : $\frac{4}{3}\pi$

انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه :

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} \Rightarrow dx\,dy\,dz=r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{R^*} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

ناحیهٔ R^* : تبدیل شدهٔ ناحیهٔ R به یک ناحیه در دستگاه استوانه است. r و θ را در سایهٔ جسم در صفحهٔ xy مشخص می‌کنیم برای تعیین محدودهٔ z مانند حالت دکارتی عمل می‌کنیم یعنی رویهٔ فوقانی و تحتانی را بدست می‌آوریم اما آنها را در مختصات استوانه می‌نویسیم.

محدودهٔ z : در راستای محور zها از طرف منفی به طرف zهای مثبت پرتویی می‌تابانیم، این پرتو از یک نقطه وارد ناحیه می‌شود که معادلهٔ آن رویه مقدار z حد پائین و از یک نقطهٔ دیگر از ناحیه خارج می‌شود (معادلهٔ آن رویه) مقدار z حد بالا می‌باشد.

محدودهٔ r : پرتو θ از مبدأ مختصات می‌تابانیم این پرتو از یک نقطه وارد ناحیه می‌شود، فاصلهٔ آن نقطه تا مبدأ حد پائین r و از یک نقطه از ناحیه خارج می‌شود که فاصلهٔ آن تا مبدأ حد بالای r می‌شود. (همواره $r>0$)

محدودهٔ θ : اگر شکل را ترسیم کنیم می‌توانیم به راحتی محدودهٔ θ را تعیین کنیم. [محدوده‌اش $0\leq\theta\leq 2\pi$]

معمولاً در موارد زیر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

۱- اگر در تابع زیر انتگرال ترکیباتی از x^2+y^2 ببینیم.

۲- در مواردی که سایهٔ جسم در صفحهٔ xy بخشی از یک دایره باشد و رویه‌های فوقانی و تحتانی جسم شامل ترکیبات x^2+y^2 باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تذکر: در صورتی می‌توان از مختصات استوانه‌ای استفاده کرد که جسم R مورد نظر از بالا فقط به یک رویه، (رویهٔ فوقانی) و از پایین نیز فقط به یک رویه (رویهٔ تحتانی) محدود باشد. این مطلب را با رسم فلش در راستای محور z می‌توان تشخیص داد که همواره باید سر فلش‌ها به یک رویه و ته فلش به یک رویه ختم شود.

مختصات کروی: (تغییر متغیرها در دستگاه کروی)

$$\begin{cases} y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R^*} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\,\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

مراحل:

1. باید در تابع $f(x,y,z)$ به‌جای x و y و z مقادیر مربوط در مختصات کروی را قرار دهیم.
2. ژاکوبی تبدیل کروی برابر است با $J = \rho^2 \sin\varphi$.
3. ناحیهٔ R^* تبدیل شدهٔ ناحیهٔ R در مختصات کروی می‌باشد. برای این کار باید محدودهٔ ρ و φ و θ را در ناحیهٔ R معلوم کنیم و محدودهٔ θ را در سایهٔ جسم بررسی کنیم.

روش رولان: برای موفق شدن، مرزی در پی باکی است که باید به آن رسید ولی نباید از آن عبور کرد.

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

نحوهٔ ترسیم :

الف) ناحیهٔ R را با تصویرش D روی صفحهٔ xy رسم کنید.

ب) حدود ρ : ابتدا باید از مبدأ مختصات پرتوی را به داخل ناحیه می‌تابانیم، این پرتو از یک نقطه به ناحیه وارد می‌شود و از یک نقطه از ناحیه خارج می‌شود. فاصلهٔ نقطه‌ای که پرتو از آن وارد ناحیه می‌شود تا مبدأ مختصات، حد پائین ρ و فاصلهٔ نقطه‌ای که پرتو از آن خارج می‌شود تا مبدأ، حد بالای ρ است.

ج) حدود φ : φ از محور zها شروع می‌شود (یعنی صفر φ، محور zها است)، φ زاویه با محور zها است و جهت حرکت آن مهم نیست. حداقل و حداکثر مقدار φ عبارت است از صفر و π.

د) حدود θ همانند مختصات استوانه‌ای عمل می‌کنیم و اگر جسم به صورت دوران کامل حول محور zها باشد $0 \leq \theta \leq 2\pi$ می‌شود.

معمولاً در موارد زیر از انتگرال سه‌گانه استفاده می‌کنیم : (مختصات کروی)

۱) در تابع زیر انتگرال ترکیباتی از $x^2+y^2+z^2$ باشد.

۲) زمانی که ناحیهٔ R بخشی از یک کره باشد.

---

* معمولاً زمانی می‌توان از مختصات کروی بهره جست که سر فلش‌ها روی یک رویه و ته فلش‌ها روی یک رویهٔ دیگر باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حاصل انتگرال $I = \iiint_R \frac{dr}{x^2+y^2+z^2}$ را بیابید در حالتی که در آن :

الف) R ناحیهٔ بین دو کره به مرکز مبدا و شعاع های α و β باشد.

ب) همان الف در $\frac{1}{8}$ فضا باشد.

ج) همان الف در $y \geq 0$ باشد.

الف)

$$R^* : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ \alpha \leq \rho \leq \beta \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\rho^2}\cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\beta-\alpha)\sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = -(\beta-\alpha)\int_0^{2\pi} \cos\varphi \Big|_0^{\pi} d\theta = 2(\beta-\alpha)\theta\Big|_0^{2\pi} = 4\pi(\beta-\alpha)$$

ب)

$$R^* : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \alpha \leq \rho \leq \beta \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)$$

ج)

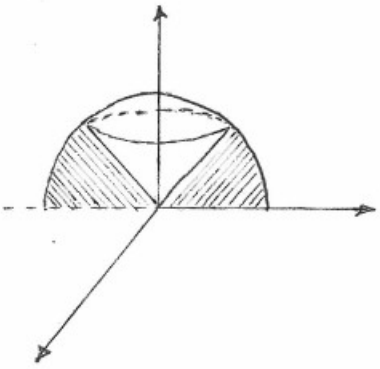
$$R^* : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ \alpha \leq \rho \leq \beta \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\rho^2}\cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 2\pi(\beta-\alpha)$$

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حجم جسمی را بیابید که در زیر مخروط $x^2+y^2=z^2$ و بالای صفحهٔ xy و در نیمکرهٔ $x^2+y^2+z^2=3$ واقع باشد.



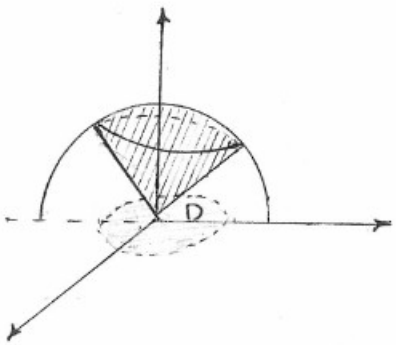
$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} & \text{مخروط} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{3} & \text{کره} \end{cases}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3} \sin\varphi \Big]_0^{\sqrt{3}} d\varphi \, d\theta = -\sqrt{3}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= -\sqrt{3}\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta = \frac{\sqrt{6}}{2} \times 2\pi = \sqrt{6}\,\pi$$

مثال : حاصل انتگرال $I = \iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dV$ را بیابید که R ناحیهٔ واقع در زیر نیمکرهٔ $x^2+y^2+z^2=3$ ، $(z>0)$ و بالا مخروط $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$ است را محاسبه کنید.

$$R^* : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \varphi & \text{مخروط} \\ 0 \leq \rho \leq \rho & \text{کرهٔ} \end{cases}$$



$$x^2+y^2=z^2 \rightarrow r^2=z^2 \qquad \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{3}} e^{\rho^3}\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} e^{\rho^3} \sin\varphi \Big]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{3}} d\varphi \, d\theta =$$

$$I = \frac{1}{3}\left(e^{3\sqrt{3}}-1\right)\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{3}\left(e^{3\sqrt{3}}-1\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)2\pi$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حاصل $\iiint_R e^{x^2+y^2}\,dr$ که R همان ناحیهٔ مسالهٔ قبل است. (بهتر است از مختصات استوانه استفاده شود.)

قطع دورویه : $x^2+y^2+z^2=3$

$$\Rightarrow x^2+y^2+x^2+y^2=3 \rightarrow x^2+y^2=\frac{3}{2}$$

$$x^2+y^2=z^2$$

$$\rightarrow r^2=\frac{3}{2} \longrightarrow r=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\int_{z=x^2+y^2=r^2}^{z=\sqrt{3-r^2}} e^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} e^{r^2} rz\Big]_{z=r^2}^{z=\sqrt{3-r^2}} dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} e^{r^2} r(\sqrt{3-r^2}-r^2)\,dr\,d\theta \longrightarrow r^2=t \;\ldots\ldots \checkmark$$

مثال : حاصل $\iiint_R \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2}}$ که R واقع بین استوانه های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ است که از بالا به نیم کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ $(z>0)$ و از پائین به صفحهٔ xy محدود است را بیابیم.

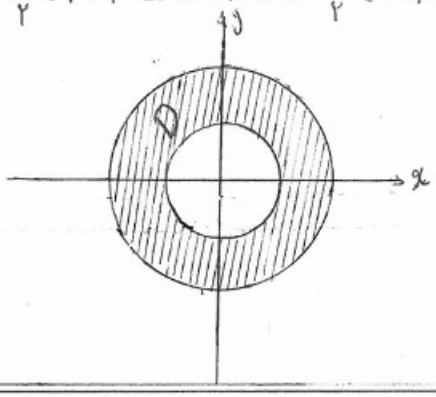
$$I=\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{z=0}^{z=\sqrt{9-r^2}} \frac{1}{\sqrt{r^2}}\,r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_1^2\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{r}{3}+\frac{r}{2}\sqrt{9-r^2}\Big]_0^2 d\theta=$$

$$=\left[\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}+\sqrt{5}-\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3}-\sqrt{2}\right]2\pi$$

حل : $\int\sqrt{9-r^2}\,dr \Rightarrow \begin{cases} r=3\sin\theta \\ dr=3\cos\theta\,d\theta \end{cases}$

$$=3\int\sqrt{9-9\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{9}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{9}{2}\theta+\frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta=$$

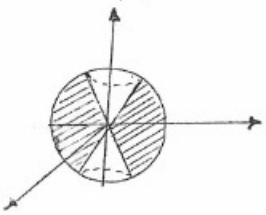
$$=\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{r}{3}+\frac{r}{2}\sqrt{9-r^2}$$



حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مطلوب است حجم ناحیه‌ای از کره $\rho = a$ که بین مخروط های $\varphi = \frac{\pi}{3}$ و $\varphi = 2\frac{\pi}{3}$ قرار دارد؟

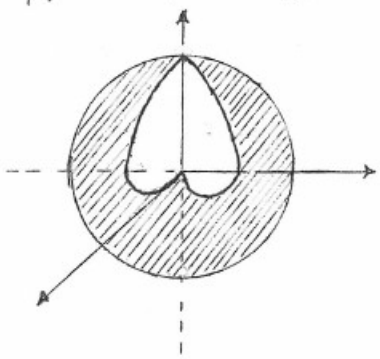


$$V = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^{a} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 2\frac{\pi}{3} a^3$$

مثال: مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از درون به رویهٔ $\rho = 1 + \cos\varphi$ و از بیرون به کرهٔ $\rho = 2$ است را محاسبه کنید.

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
ρ	2	1	0

شعاع $\rho = 2 \longrightarrow \rho^2 = 4$

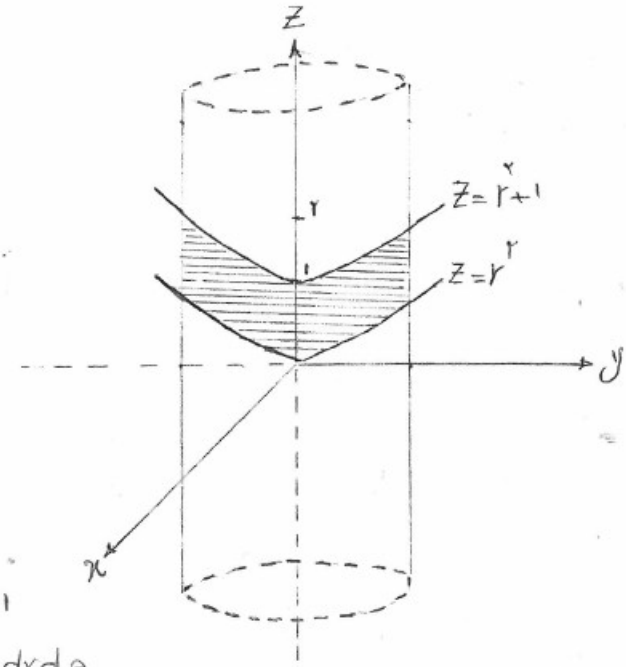


$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1+\cos\varphi}^{2} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 43\frac{\pi}{6}$$

مثال: حجم ناحیه‌ای که از پائین به سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ و از اطراف به استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و از بالا به سهمی‌وار $z = x^2 + y^2 + 1$ محدود است.

قطع: $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow z = 1$

قطع: $\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow z = 2$



$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{r^2+1} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} rz \Big|_{r^2}^{r^2+1} dr \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تغییر متغیر در انتگرال سه گانه :

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \iiint_{R^*} f(u,v,w)\,j\,du\,dv\,dw$$

① در تابع $f(x,y,z)$ به جای x و y و z برحسب u و v و w می‌نویسیم ،

② j را بدست می‌آوریم .

③ ناحیهٔ R^* را با توجه به تغییر متغیرهای ناحیهٔ R بدست می‌آوریم :

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

موری کوهن : کشتی نوح را یک غیر حرفه ای و تایتانیک را متخصصان ساختند ، فقط متخصصان نباش .

اورایلن اسوت : خوش بینی شکل ظاهری ایمان است ، تا ایمان و امید وجود نداشته باشد هیچ کاری نمی توان انجام داد .

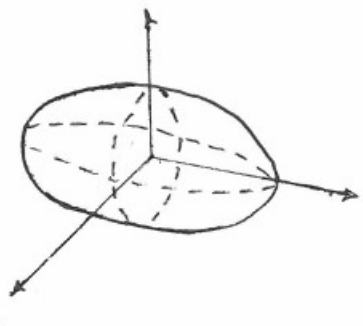
الکساندر دوکمات : در زندگی چیزی به نام روزی بی اهمیت وجود ندارد .

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: حجم بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را محاسبه کنید.

$$\text{تغییر متغیرها} = \begin{cases} \frac{x}{a} = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ \frac{y}{b} = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ \frac{z}{c} = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



$$j = \begin{vmatrix} a\sin\varphi\cos\theta & a\rho\cos\varphi\cos\theta & -a\rho\sin\varphi\sin\theta \\ b\sin\varphi\sin\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta \\ c\cos\varphi & -c\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\Rightarrow = a\sin\varphi\cos\theta(cb\rho^2\sin^2\varphi\cos\theta) - a\rho\cos\varphi\cos\theta(-cb\rho\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta) -$$

$$-a\rho\sin\varphi\sin\theta(-bc\rho\sin^2\varphi\sin\theta - bc\rho\cos^2\varphi\sin\varphi) =$$

$$= abc\rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta + abc\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\cos^2\theta + abc\rho^2\sin^3\varphi\sin^2\theta +$$

$$+ abc\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta = abc\rho^2\sin^3\varphi(1) + abc\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi(1) =$$

$$= abc\rho^2\sin\varphi(1) = |abc|\rho^2\sin\varphi$$

$$V = \iiint_R dv = \iiint_{R^*} j\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = |abc|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \Rightarrow$$

$$V = |abc|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\Big]_0^1 d\varphi\, d\theta = \frac{|abc|}{3}\int_0^{2\pi}(-\cos\varphi)\Big]_0^{\pi} d\theta = 2\,\frac{|abc|}{3}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}|abc|$$

دلیل انتخاب $\rho = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = 1$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر:

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

تبدیل مختصات کروی: $I = \int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta\, d\rho}{(\rho^2+a^2)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\rho^2}{(\rho^2+a^2)^2}\cos\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\theta\, d\rho = \int_0^\infty \frac{\rho^2}{\rho^2+a^2}\,\theta\Big|_0^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2+a^2)^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2+a^2)^2} \longrightarrow \begin{cases} \rho = a\tan\beta \longrightarrow d\rho = a\sec^2\beta\, d\beta \\ \rho = 0 \longrightarrow \beta = 0 \\ \rho = \infty \longrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\tan^2\beta\,(a\sec^2\beta\, d\beta)}{a^4(1+\tan^2\beta)^2} = \frac{\pi}{2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\beta\, d\beta = \frac{\pi}{4a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\beta)\, d\beta$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4a}\left(\beta - \frac{1}{2}\sin 2\beta\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8a}$$

برنارد برلسون: موفقیت برای کسانی اتفاق می‌افتد که آن را بدست دارند.

ویلسون مازیز: در مسیر رشد با دیگران مهربان باش، چرا که در مسیر افول هم دوباره آنها را خواهی دید.

حسین پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حاصل انتگرال زیر را با توجه به تبدیل داده شده بدست آورید :

$$I=\int_0^3\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz \qquad u=\frac{2x-y}{2} \quad v=\frac{y}{2} \quad w=\frac{z}{3}$$

$$x=u+v\ ,\ y=2v\ ,\ z=3w \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{y}{2}\leq x\leq \frac{y}{2}+1 \xrightarrow{-\frac{y}{2}} 0\leq u\leq 1 \\ 0\leq y\leq 4 \longrightarrow 0\leq v\leq 2 \\ 0\leq z\leq 3 \longrightarrow 0\leq w\leq 1 \end{array}\right.$$

$$J=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6 \qquad \Rightarrow I=\int_0^1\int_0^2\int_1^1 (u+w)6\,du\,dv\,dw =$$

$$\Rightarrow I=6\int_0^1\int_0^2 \frac{u^2}{2}+vw\Big|_0^1 dv\,dw=6\int_0^1\int_0^2\left(\frac{1}{2}+w\right)dv\,dw=6\int_0^1(1+2w)\,dw=$$

$$=6(w+w^2)\Big|_0^1=12$$

تمرین : مطلوب است حجم ناحیهٔ محدود به استوانهٔ $y=\cos x$ ، صفحات $z=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ ، $z=y$ ، $x=0$

جواب $=\frac{\pi}{8}$

تمرین : حجم ناحیهٔ محصور بین رویه‌های $z=x^2+y^2$ و $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)$ را بیابید؟

جواب $\Rightarrow V=\frac{\pi}{4}$

تمرین : حجم بیضی‌گون مقابل را بیابید . $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ جواب $\Rightarrow V=8\pi$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین: مطلوبست حجم ناحیهٔ محصور در رویهٔ $\rho = a\sin\varphi$. جواب $\Rightarrow V = \frac{\pi^2 a^3}{4}$

تمرین: مطلوب است در $\frac{1}{8}$ اوّل فضا حجم بین استوانه‌های $r=1$ و $r=2$ قرار دارد و از پایین به صفحهٔ xy و از بالا به رویهٔ $z=xy$ محدود است. جواب $\Rightarrow \frac{15}{8}$

تمرین: حجم جسمی را بیابید که بین دو رویهٔ $x^2+y^2+z=3$ و $x^2+y^2=z$ محدود است؟

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ حجم ناحیهٔ محدود به رویه‌های $z=x^2+y^2$ و $z=8-x^2-y^2$. $V=16\pi$

تمرین: مطلوب است حجم ناحیهٔ بالایی که توسط مخروط $z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$ از کره $x^2+y^2+z^2=1$ جدا می‌کند. $V=\frac{\pi}{3}$

تمرین: مطلوبست محاسبهٔ حجم درون مخروط $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ و $\rho=1-\cos\varphi$. $V=\frac{175}{86}\pi$

تمرین: اگر R ناحیهٔ بین دو کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ و $\rho^2=4$ باشد آنگاه عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$I=\iiint_R e^{(x^2+y^2+z)^{3/2}}\,dV$$

جواب $= \frac{4\pi e(e^7-1)}{3}$

تمرین: حجم کره‌ای توپر به شعاع a را به کمک مختصات کروی تعیین کنید. $V=\frac{4\pi}{3}a^3$

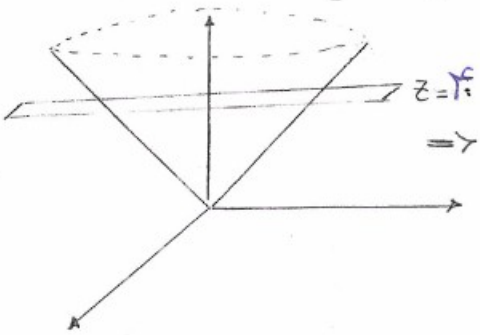
حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

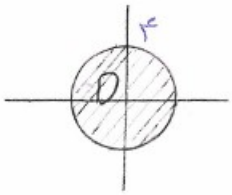
محاسبهٔ حجم :

مثال : مقدار حجم محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحهٔ $z=4$ را تعیین کنید :

$$z>0 \rightarrow z^2=x^2+y^2 \rightarrow \rho^2\cos^2\varphi=\rho^2\sin^2\varphi \longrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$



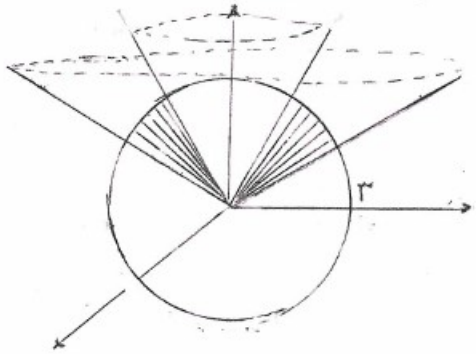
$$\Rightarrow z^2=x^2+y^2 \longrightarrow x^2+y^2=16$$



$$\text{حجم } V=\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_{\sqrt{r^2}}^{4} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{4} r.z\Big]_r^4\,dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{4} r(4-r)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi} 2r^2-\frac{r^3}{3}\Big]_0^4\,d\theta=\left(32-\frac{64}{3}\right)2\pi$$

مثال : حجم جسمی را بیابید که درون نیم کرهٔ فوقانی $x^2+y^2+z^2=3$ و مابین مخروط های $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ و $z=\sqrt{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2}$ واقع است .



$$V=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{3}}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

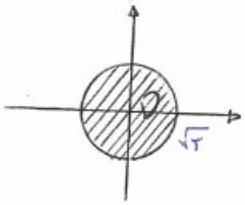
$$V=\sqrt{3}\int_0^{2\pi} -\cos\varphi\Big]_{\pi/6}^{\pi/3}\,d\theta=-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2\pi=\pi(3-\sqrt{3})$$

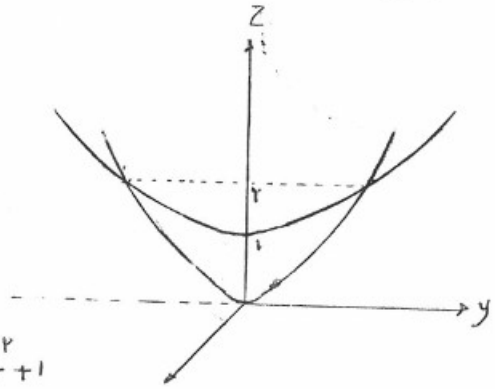
کوته فکر: همیشه به خاطر بسپار، موفقیت مانند یک دوچرخه است اگر بالای آن را نخواهی می افتی .

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : مطلوب است حجم ناحیهٔ محصور بین رویه‌های $x^2+y^2-z=0$ و $x^2+y^2=2z-2$.

$x^2+y^2=z$ و $x^2+y^2=2(z-1)$ $\Longrightarrow$ قطع $\Rightarrow z=2z-2 \Rightarrow z=2$





$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{\frac{r^2}{2}+1} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} rz\Big|_{r^2}^{\frac{r^2}{2}+1} dr\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\left(\frac{r^2}{2}+1-r^2\right)dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-r^4}{8}+\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)d\theta=\pi$$

مثال : حجم ناحیهٔ واقع در $\frac{1}{8}$ اوّل فضا که به صفحات مختصات و استوانه $x^2+z=1$ و

سهمی‌گون $y=x^2+z^2$ محدود است را بیابید .

راهنمایی : اوّل نسبت به y انتگرال بگیرید .

$$V=\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{x^2+z^2} dy\,dz\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x^2}(x^2+z^2)\,dz\,dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2z+\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_0^{1-x^2}dx=\frac{2}{7}$$

کن کنز : ناراحتی برای نداشته‌ها ، یعنی به هدر دادن داشته‌ها .

ویلاکاس : جایی که عشق در اوج باشد ، معجزه نیز ظهور پیدا می‌کند .

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : حجم ناحیهٔ محصور بین رویه های $x = y^2 + z^2$ و $x = 1 - y^2$ را بیابید.

$$x = 1 - y^2 \ \text{و}\ x = y^2 + z^2 \rightarrow 1 - y^2 = y^2 + z^2 \longrightarrow z^2 + 2y^2 = 1 \longrightarrow \text{بیضی}$$

$$\hookrightarrow y = 0 \longrightarrow z = \pm 1$$

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}} \int_{y^2+z^2}^{1-y^2} dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \int_{-\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}} (1 - 2y^2 - z^2)\,dy\,dz$$

$$z^2 + 2y^2 = 1 \longrightarrow z^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \quad \begin{cases} \longrightarrow z = r\cos\theta \\ \longrightarrow y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$$

$$j(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} r$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta)\,\frac{r}{\sqrt{2}}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

تمرین : حجم بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ را بین صفحات $z = 2$ و $z = -2$ را محاسبه کنید.

زیگ زیگلار : اگر به دنبال مقصودی هستی باید قبل از لحظهٔ رسیدن به آن، آن را در ذهنت تصاره کنی.

ماریوس لستر : چه بسیار از کسانی که سپیده دمان شب سیاه را می بینند چون توقع چیزی بالاتر از سپیده را ندارند.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال گیری در میدان های برداری :

فرض کنید تابع $F(x, y, z)$ روی یک ناحیهٔ شامل خم c با معادلهٔ پارامتری :

$$R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

$a \leq t \leq b$ تعریف شده باشد . در این صورت انتگرال تابع F روی خم c بصورت زیر تعریف می شود :

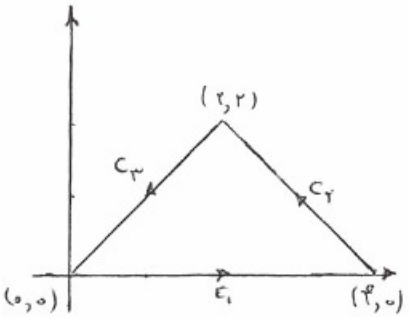
$$\int_c F(x,y,z)\,ds = \int_a^b F(R(t)).|v(t)|\,dt = \int_a^b F(R(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

انتگرال روی خم .

هرگاه خم متشکل از خم های هموار c_1 و c_2 و ... و c_n باشد داریم :

$$\int_c F\,ds = \int_{c_1} F\,ds + \int_{c_2} F\,ds + \int_{c_3} F\,ds + \cdots + \int_{c_n} F\,ds$$

مثال : حاصل $\int_c xy\,ds$ را که c مرز مثلثی به رئوس $(0,0)$ ، $(4,0)$ ، $(2,2)$ است را محاسبه کنید :



$$c_1 : y = 0 \longrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow R(t) = ti + 0j \rightarrow 0 \leq t \leq 4$$

$$\int_{c_1} xy\,ds = \int_0^4 t\times(0)\sqrt{1+0}\,dt = 0$$

$$c_2 : y = 4 - x \rightarrow 2 \leq x \leq 4 \longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \end{cases} \rightarrow R(t) = ti + (4-t)j \rightarrow 2 \leq t \leq 4$$

$$\int_{c_2} xy\,ds = \int_2^4 t(4-t)\sqrt{1^2 + (-1)^2}\,dt = \int_2^4 4\sqrt{2}\,t\,dt - \int_2^4 \sqrt{2}\,t^2\,dt = 2\sqrt{2}t^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}t^3\Big]_2^4 = 24\sqrt{2} - \frac{56}{3}\sqrt{2}$$

ادامهٔ حل در صفحهٔ بعد.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$C_3 : \ y = x \rightarrow 0 \leq x \leq 2 \rightarrow R(t) = t i + t j \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$\int_{C_3} xy\, ds = \int_0^2 t^2 \sqrt{1^2 + 1^2}\, dt = \sqrt{2}\, \frac{t^3}{3} \Big]_0^2 = \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

نکته : خمی که در جهت افزایش x ها پارامتری سازی شود (مثل C_1) ، پارامتری سازی آن جهت نگه دار است و

اگر در جهت کاهش x ها پارامتری سازی شود برعکس . یعنی پارامتری سازی آن جهت برگردان است .

$$\Rightarrow \int_C xy\, ds = \int_{C_1} xy\, ds - \int_{C_2} xy\, ds - \int_{C_3} xy\, ds = \checkmark$$

مثال : حاصل $\int_C xy\, ds$ که C بخشی از دایره $x^2 + y^2 = 1$ در ربع اول است را بدست آورید ؟

$$\rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \rightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = dt$$

$$\int_C xy\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt = \frac{\sin^2 t}{2} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

میدان های برداری : فرم کلی یک میدان برداری :

$$F(x, y, z) = M(x, y, z) i + N(x, y, z) j + P(x, y, z) k$$

$$F = M i + N j + P k$$

$$\text{کار} = \int_C F \cdot dR = \int_C M dx + N dy + P dz$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته : فرض کنید خم c با معادلهٔ پارامتری $R(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ و $a\leq t\leq b$ داده شده باشد :

$$\text{کار} = \int_c M\,dx + N\,dy + P\,dz = \int_a^b \left(M(t)\frac{dx}{dt} + N(t)\frac{dy}{dt} + P(t)\frac{dz}{dt}\right)dt$$

مثال : کار انجام شده توسط میدان نیرو را محاسبه کنید در حالتی که $\vec{F}=(y-x^2)i+(z-y^2)j+(x-z^2)k$

روی خم $c: r(t)=ti+t^2j+t^3k$ ، $0\leq t\leq 1$ باشد :

$$M = y-x^2 = t^2-t^2 = 0$$

$$N = z-y^2 = t^3-t^4$$

$$P = x-z^2 = t-t^6$$

روی خم

$$x=t \Rightarrow dx=dt \quad \text{و} \quad y=t^2 \rightarrow dy=2t\,dt \quad \text{و} \quad z=t^3 \rightarrow dz=3t^2dt$$

$$\text{کار } W = \int_c F\cdot dR = \int_c M\,dx + N\,dy + P\,dz = \int_0^1 0\,dt + (t^3-t^4)(2t\,dt) + (t-t^6)(3t^2dt)$$

$$W = \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^2 - 3t^8)\,dt = \frac{29}{60}$$

مثال : کار انجام شده توسط نیروی F روی خم $R(t)=ti+t^2j+t^4k$ ، $0\leq t\leq 1$ را بیابید .

$$F(x,y,z)=xyi+yzj+xzk \Rightarrow \quad \text{روی خم} \left|\begin{array}{l} M=t^3 \\ N=t^6 \\ P=t^5 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} x=t \rightarrow dx=dt \\ y=t^2 \rightarrow dy=2t\,dt \\ z=t^4 \rightarrow dz=4t^3dt \end{array}$$

$$W=\int_c F\cdot dR = \int_0^1 (t^3-2t^7+4t^8)\,dt = \frac{17}{18}$$

حسن پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال شارش و گردش :

انتگرال خمیدهٔ خطی مؤلفهٔ مماس میدان برداری F روی خم C را انتگرال شارش F روی C می‌نامند .

$$\text{شارش (جریان)} \rightarrow \int_C F\cdot T\,ds = \int_C F\cdot dR \qquad T=\frac{dR}{ds}=\int_a^b M\,dx+N\,dy+P\,dz$$

نکته : وقتی خم C بسته باشد مقدار انتگرال شارش را گردش در امتداد خم می‌نامند.

مثال : گردش میدان $F=(x-y)i+xj$ را حول دایره $r(t)=\cos t\,i+\sin t\,j$ ، $0\leq t\leq 2\pi$ را

حساب کنید :

$$\frac{dR}{dt}=-\sin t\,i+\cos t\,j \longrightarrow F=(\cos t-\sin t)i+\cos t\,j$$

$$F\cdot\frac{dR}{dt}=-\sin t\cos t+\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}=1-\sin t\cos t$$

$$\text{گردش}=\int_0^{2\pi} F\cdot\frac{dR}{dt}\,dt=\int_0^{2\pi}(1-\sin t\cos t)\,dt=2\pi$$

مثال : انتگرال شارش میدان برداری $F(x,y,z)=-yi+xj+2k$ را روی خم $R(t)=\cos t\,i+2\sin t\,j+2t\,k$

بدست آورید : $(0\leq t\leq 2\pi)$

$$dR=-\sin t\,dt\,i+2\cos t\,dt\,j+2\,dt\,k$$

$$F(t)=-2\sin t\,i+\cos t\,j+2k$$

$$\text{انتگرال شارش}=\int_0^{2\pi}F\cdot dR=\int_0^{2\pi}(2\sin^2 t+2\cos^2 t+4)\,dt=6t\Big|_0^{2\pi}=12\pi$$

اورانیوم است : بنای آینده را با مصالح فکری بساز .

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : انتگرال شار میدان برداری $F(x,y)=(x+y)i-(x^2+y^2)j$ را روی نیمهٔ بالائی $x^2+y^2=1$ که در صفحهٔ xy از $(0,1)$ تا $(0,-1)$ واقع است را بیابید.

جواب $= -\frac{\pi}{2}$

تعریف خم ساده : منحنی های ساده خود را قطع نمی کنند.

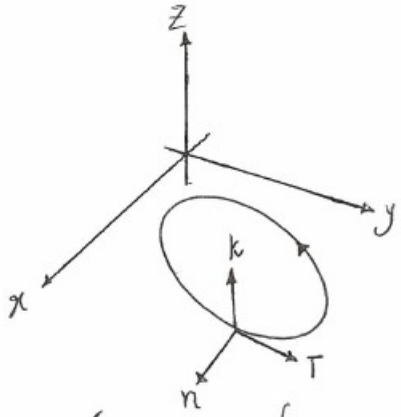
شار F گذرنده از خم c : فرض کنید خم c ، یک خم واقع در صفحه‌ای با معادلهٔ پارامتری :

$$\begin{cases} a \leqslant t \leqslant b \\ R(t)=x(t)i+y(t)j \end{cases}$$

باشد، در این صورت شار میدان برداری $F=Mi+Nj$ گذرنده از خم c عبارت است از انتگرال خمیدهٔ خطی مؤلفهٔ قائم F روی c :

$$\text{شار} = \int_c (F.n)\,ds$$

اگر خم c در صفحهٔ xy باشد و در خلاف جهت ساعت پارامتری شده باشد آنگاه : $n = T \times k$



n : جهت قائم رو به بیرون نسبت به طول قوس

T : بردار مماس واحد نسبت به طول قوس

$$\text{شار} = \oint F.n\,ds = \oint_c M\,dy - N\,dx$$

امام علی (ع) : خوش گمانی (مثبت اندیشی) مایهٔ آرامش دل و سلامت ایمان است.

امام علی (ع) : برتو باد به خوشرویی، که خوشرویی کمند دوستی است.

حسین نیور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مطلوبست محاسبهٔ شار میدان $F(x,y) = (x-y)i + x j$ گذرنده از دایرهٔ زیر که در صفحهٔ xy واقع است.

$$R(t) = \cos t\, i + \sin t\, j \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$M = x - y = \cos t - \sin t \quad , \quad N = x = \cos t \quad , \quad dy = \cos t\, dt \quad , \quad dx = -\sin t\, dt$$

$$\text{شار} = \oint M dy - N dx = \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t\, dt) - (\cos t)(-\sin t\, dt) =$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \Big]_0^{2\pi} = \pi$$

چون جواب شار مثبت است پس شارش خالص گذرنده از خم رو به بیرون (برون سو) است.

قضیهٔ گرین: صورت های مماس و قائم قضیهٔ گرین به صورت زیر می باشند:

فرض می کنیم خم C یک خم سادهٔ بسته واقع در صفحه و D ناحیهٔ محدود به خم C میباشد و میدان برداری $F = Mi + Nj$ را داریم:

۱) صورت مماسی قضیهٔ گرین که برای محاسبهٔ گردش F روی خم کاربرد دارد:

$$F \text{ گردش} = \oint_C F.T\, ds = \oint_C M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

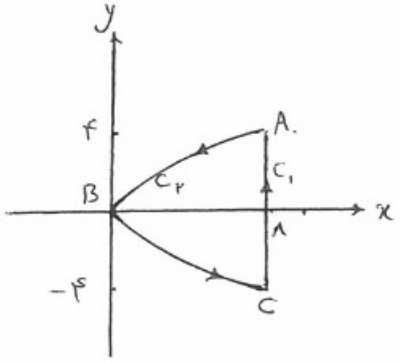
۲) صورت قائم قضیهٔ گرین که برای محاسبهٔ شار F گذرنده از C کاربرد دارد:

$$F \text{ شار} = \oint_C F.n\, ds = \oint_C M dy - N dx = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته : اگر خم c متشکل از چند خم باشد ناحیهٔ مربوط به آن ناحیهٔ مقدماتی باشد بهتر است از قضیهٔ گرین محاسبه شود .

مثال : درستی شکل مماس قضیهٔ گرین را برای میدان برداری $F=(x^2+y^2)i+(2xy+3)j$ روی c مرز ناحیهٔ



تعریف شده بوسیلهٔ $x=8$ و $y^2=2x$ تحقیق کنید .

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R}=\oint_C M\,dx+N\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

الف : حل به روش مستقیم :

For $c_1: x=8$ $\quad y=$ دلخواه $\quad \vec{R}(t)=8i+tj \Rightarrow \begin{cases} x=8 \to dx=0 \\ y=t \to dy=dt \end{cases} \to -4\leq y\leq 4$

$$\begin{cases} M=x^2+y^2 \to M=64+t^2 \\ N=2xy+3 \to N=16t+3 \end{cases} \longrightarrow -4\leq t\leq 4$$

$$\oint_{c_1} M\,dx+N\,dy=\int_{-4}^{4}(64+t^2)\times 0+(16t+3)\,dt=\frac{16}{2}t^2+3t\Big|_{-4}^{4}=24$$

For $c_2: y^2=2x \longrightarrow \begin{cases} y=t \\ x=\frac{t^2}{2} \end{cases} \quad \vec{R}(t)=\frac{t^2}{2}i+tj \Rightarrow \begin{cases} dy=dt \\ dx=t\,dt \end{cases} \to -4\leq y\leq 4$

$$\begin{cases} M=\frac{t^4}{4}+t^2 \\ N=t^3+3 \end{cases} \longrightarrow -4\leq t\leq 4 \qquad \oint_{c_2} M\,dx+N\,dy=\int_{-4}^{4} t\left(\frac{t^4}{4}+t^2\right)dt+(t^3+3)\,dt=$$

$$=\underbrace{\int_{-4}^{4}\frac{t^5}{4}\,dt}_{0\ \text{فرد}}+\underbrace{\int_{-4}^{4}t^3\,dt}_{0\ \text{فرد}}+\underbrace{\int_{-4}^{4}t^3\,dt}_{0\ \text{فرد}}+3\int_{-4}^{4}dt=3t\Big|_{-4}^{4}=3(4+4)=24$$

برگردان (-24)
در جهت کاهش y ها :

$$\int_c M\,dx+N\,dy=24-24=0$$

حسین پور

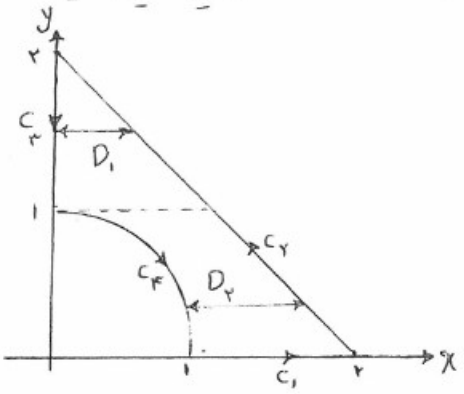
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

ب : محاسبهٔ مثال صفحهٔ قبل با قضیهٔ گرین :

$$\oint F\cdot dR = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\, dA = \begin{cases} M = x^2 + y^2 \rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ N = 2xy + 3 \rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint (2y - 2y)\, dA = 0$$

مثال : قضیهٔ گرین را برای میدان $F(x,y) = -y^3 i + x^3 j$ و منحنی نشان داده شده در شکل زیر تحقیق کنید :



$$\begin{cases} C_1 : & y = 0 \quad 1 \leq x \leq 2 \\ C_2 : & y = -x + 2 \\ C_3 : & x = 0 \quad 1 < y \leq 2 \\ C_4 : & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

حل به روش مستقیم : $C_1 : \begin{cases} x = t \rightarrow dx = dt \\ y = 0 \rightarrow dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = -y^3 = 0 \\ N = x^3 \rightarrow N = t^3 \end{cases} \rightarrow 1 \leq t \leq 2$

$C_2 : \begin{cases} x = t \rightarrow dx = dt \\ y = 2 - t \rightarrow dy = -dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = -(2-t)^3 \\ N = t^3 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$

$C_3 : \begin{cases} x = 0 \rightarrow dx = 0 \\ y = t \rightarrow dy = dt \end{cases} \quad \begin{cases} M = -t^3 \\ N = 0 \end{cases}$

$C_4 : \begin{cases} x = \cos t \rightarrow dx = -\sin t\, dt \\ y = \sin t \rightarrow dy = \cos t\, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = -\sin^3 t \\ N = \cos^3 t \end{cases} \rightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\oint_{C_1} M dx + N dy = \int 0 + 0 = 0 \qquad \oint_{C_2} M dx + N dy = \int_0^2 -(2-t)^3 dt + t^3(-dt) = -8 \xrightarrow{\text{برگردان}} 8$

$\oint_{C_3} = 0 \qquad \oint_{C_4} -\sin^3 t(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t\, dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t + \cos^4 t)\, dt = \frac{3\pi}{8} \xrightarrow{\text{برگردان}} -\frac{3\pi}{8}$

$\oint_C F\cdot dR = 0 + 8 + 0 - \frac{3\pi}{8} = 8 - \frac{3\pi}{8}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

ب) حل مثال قبل با استفاده از قضیهٔ گرین :

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \\ \frac{\partial M}{\partial y} = -3y^2 \end{cases}$$

$$\iint_{D_1 (\leftrightarrow)} 3(x^2+y^2)\,dA + \iint_{D_2} 3(x^2+y^2)\,dA = \int_1^2\int_0^{2-y} 3(x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2-y} 3(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= 8 - \frac{3\pi}{8}$$

تمرین : قضیهٔ گرین را برای میدان برداری $F(x,y) = \vec{x\,i} + \vec{y\,j}$ و ناحیهٔ محدود به خم‌های $y = x^2$ و $x + y = 2$ تحقیق کنید.

جواب : $\oint \vec{F} \cdot \vec{dR} = 0$

تمرین : درستی فرم مماس قضیهٔ گرین را برای میدان برداری $F(x,y) = -x^2y\,\hat{i} + xy^2\,\hat{j}$ روی دایرهٔ واحد و ناحیهٔ محصور به آن بررسی نمائید.

جواب : $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dR} = \frac{\pi}{2}$

تمرین : درستی قضیهٔ گرین را برای فرم دیفرانسیل $-x^2y\,dx + xy^2\,dy$ روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ بررسی کنید :

نکته : $F(x,y) = xy^2\,\hat{i} + x^2y\,\hat{j}$ $\qquad \int_C \vec{F} \cdot \vec{dR} = \frac{\pi a^4}{2}$

تمرین : مطلوب است محاسبهٔ $I = \oint_C (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos^2 y)\,dy$ هرگاه C مرز ناحیهٔ محصور شده توسط منحنی‌های $y = x^2$ و $y^2 = x$ باشد. (راهنمائی : از قضیهٔ گرین استفاده و تبدیل به انتگرال دوگانه کنید.)

جواب $= \frac{1}{3}$

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: اگر C یک منحنی بستهٔ ساده در صفحه باشد و R توسط آن محصور شده باشد و در شرایط قضیهٔ گرین صدق کند،

آنگاه نشان دهید:

$$\text{مساحت ناحیهٔ } R = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

می‌دانیم که مساحت ناحیهٔ R در انتگرال دوگانه برابر است با $\iint_R dA$.

پس برای اثبات این رابطه کافی است با قضیهٔ گرین به انتگرال دوگانه برسیم.

$$\text{مساحت ناحیه } R = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C M\,dy - N\,dx = \frac{1}{2}\iint_R \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\,dA = \frac{1}{2}\iint (1+1)\,dA$$

$$= \iint_R dx\,dy \xrightarrow{\text{پس}} \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \iint_R dA$$

امام علی (ع): ناتوان‌ترین مردم کسی است که از بازسازی خویش عاجز باشد.

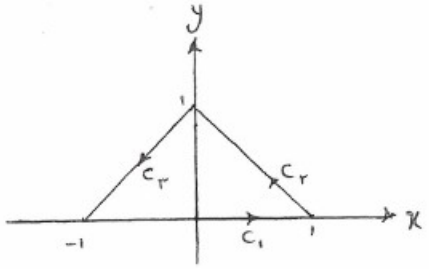
امام علی (ع): بدترین عیب این است که دیگری را به چیزی که در خودت هست سرزنش کنی.

امام صادق (ع): دل حرم خداست، در حرم خدا غیر خدا را نشان.

امام علی (ع): هرچه محبت داری نثار دوستت کن، اما هرچه اطمینان داری به پای او نریز.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : درستی قضیهٔ گرین (مماسی) را برای میدان برداری $F(x,y) = (x+y)i - (x^2+y^2)j$ روی ناحیهٔ مثلثی به رئوس (۰و۱) و (۱و۰) و (۰و۱-) بررسی کنید.



حل با روش مستقیم :

$$C_1 : \begin{cases} y = 0 \\ x = t \quad \text{دلخواه} \end{cases} \qquad R(t) = t\,i \longrightarrow \begin{cases} x = t \longrightarrow dx = dt \\ y = 0 \longrightarrow dy = 0 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1 \longrightarrow \begin{cases} M = x + y = t \\ N = -(x^2+y^2) = -t^2 \end{cases}$$

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_{C_1} M dx + N dy = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0$$

$$C_2 : \begin{cases} y = -x + 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \quad \text{برگردان} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = t \longrightarrow dx = dt \\ y = -t + 1 \longrightarrow dy = -dt \end{cases} \longrightarrow 0 \leq t \leq 1 \longrightarrow \begin{cases} M = x + y = 1 \\ N = -2t^2 + 2t - 1 \end{cases}$$

$$\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_{C_2} M dx + N dy = \int_0^1 dt + (-2t^2 + 2t - 1)(-dt) = \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{برگردان}} -\frac{5}{3}$$

$$C_3 : \begin{cases} y = x + 1 \\ -1 \leq x \leq 0 \quad \text{برگردان} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \longrightarrow dx = dt \\ y = t + 1 \longrightarrow dy = dt \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 0 \longrightarrow \begin{cases} M = x + y = 2t + 1 \\ N = -2t^2 - 2t - 1 \end{cases}$$

$$\oint_{C_3} \vec{F} \cdot dR = \int_{-1}^{0} (2t + 1)dt + (-2t^2 - 2t - 1)dt = -\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{برگردان}} \frac{2}{3}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = -1$$

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

حل مثال صفحهٔ قبل با قضیهٔ گرین :

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (-2x-1)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[-(1-y^2)^2 - (1-y) - (y-1)^2 + (y-1)\right] dy = -1$$

نتیجه‌ای از قضیهٔ گرین : تعیین مساحت :

فرض کنید بخواهید ناحیهٔ D محدود به خط سادهٔ بسته C را محاسبه کنیم و فقط معادلهٔ پارامتری خم C را داریم

در اینصورت داریم :

$$\text{مساحت } D : \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$$

مثال : نشان دهید فرمول $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$ برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محدود به خم بسته $R = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

در مختصات قطبی به شکل $\frac{1}{2}\oint_C r^2 d\theta$ تبدیل می‌شود سپس مساحت ناحیهٔ محدود به دکلون $r = 1 + \cos\theta$ بیابید.

الف) در مختصات قطبی $\rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \rightarrow dx = -r\sin\theta\, d\theta \\ y = r\sin\theta \rightarrow dy = r\cos\theta\, d\theta \end{cases} \rightarrow R(\theta) = r\cos\theta\, i + r\sin\theta\, j$

$$I = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C r\cos\theta\,(r\cos\theta\, d\theta) - (r\sin\theta)(-r\sin\theta\, d\theta) = \frac{1}{2}\int r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta$$

$$I = \frac{1}{2}\oint r^2 d\theta$$

ب) $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \rightarrow I = \frac{1}{2}\oint r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\oint_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$

$$= \frac{1}{2}\theta + \sin\theta + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta \Big]_0^{2\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : مساحت محدود به درون چرخ زاد $R(t) = a\cos^3 t\, i + a\sin^3 t\, j$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$. $A = \frac{3}{4}\pi a^2$

تمرین : مساحت بیضی $R(t) = a\cos t\, i + b\sin t\, j$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ را بیابید . جواب $= \pi ab$

مثال : مساحت دایرهٔ $R(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ را بیابید .

$$\begin{cases} M = x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 1 \\ N = y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\iint \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$\frac{2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big]_0^a d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} d\theta =$$

روش دوم : $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(a\cos t) - (a\sin t)(-a\sin t)\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi a^2$

نکته : باید توجه داشته باشیم $\oint_C x\,dy - y\,dx$ را باید با پارامتری سازی خم C و محاسبهٔ معمولی انتگرال مشخص کنیم .

مثال : مساحت ناحیهٔ محدود به خم $R(t) = t^2 i + \left(\frac{t^3}{3} - t\right) j$ را بیابید . $-\sqrt{3} < t < \sqrt{3}$

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 & \longrightarrow dx = 2t\,dt \\ y = \frac{t^3}{3} - t & \longrightarrow dy = (t^2 - 1)\,dt \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(t^2 - 1)\,dt - \left(\frac{t^3}{3} - t\right)(2t\,dt) = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3}t^4 + t^2\right) dt \overset{\text{زوج}}{=} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3}t^4 + t^2\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{3}} \Rightarrow A = \frac{9\sqrt{3}}{15} + \sqrt{3} = \frac{24\sqrt{3}}{15}$$

هشتمین چاپ

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

انتگرال رویه ای (سطح):

فرض کنید رویهٔ S داده شده باشد آنرا با صورت $G(x,y,z)=0$ می نویسیم و فرض می کنیم تابع $F(x,y,z)$ روی این سطح تعریف شده باشد. در این صورت انتگرال رویه ای تابع F روی رویهٔ S به صورت زیر تعریف می شود:

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS = \iint_{D} F(x,y,z)\,\frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}\,dA$$

(۱) (۲) (۳) (۴)

توجه:

(۱) باید در تابع $F(x,y,z)$ به جای یکی از متغیرها با توجه به معادلهٔ رویه برحسب دو متغیر دیگر مقدار بگذاریم تا یک تابع بدست آید. (دو متغیره)

(۲) ناحیهٔ D در واقع سایهٔ رویه است که روی یکی از صفحات مختصات قرار می گیرد.

$z=h(x,y) \rightarrow$ ناحیه D در صفحه xy $\rightarrow p=k$

$y=h(x,z) \rightarrow$ ناحیهٔ D در صفحهٔ xz $\rightarrow p=j$

$x=h(y,z) \rightarrow$ ناحیهٔ D در صفحهٔ yz $\rightarrow p=i$

(۳) تمامی جملات را به یک طرف انتقال میدهیم و برابر $G(x,y,z)$ در نظر می گیریم و گرادیان می گیریم.

(۴) بردار p برداری است عمود بر صفحه ای که سایهٔ رویهٔ (D) در آن افتاده است.

پاسکال: تمام فضیلت ها در فکر داشت، پس بکوشیم تا خوب فکر کنیم.

ارسطو: فضیلت انسان در نگه داشتن حد وسط میان افراط و تفریط است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $g(x,y,z) = yz$ بر بخشی از صفحهٔ $x+y+z=1$ که در $\frac{1}{8}$ اوّل فضا واقع است.

$$F = x+y+z-1 \rightarrow \begin{cases} \nabla F = i+j+k \\ P = k \end{cases} \qquad |\nabla F \cdot P| = 1 \qquad |\nabla F| = \sqrt{3}$$

$$z = 1-x-y \xrightarrow{D \text{ ناحیهٔ}} Z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ \frac{1}{8} \text{ اوّل فضا} \end{cases}$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot P|} dA = \sqrt{3}\, dx\, dy$$

$$\iint (yz)\, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{1-y} y(1-y-x)\sqrt{3}\, dx\, dy = \sqrt{3} \int_0^1 \left(yx - \frac{x^2}{2}y - xy^2\right)\Big]_{x=0}^{x=1-y} dy = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

مثال: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $g(x,y,z) = x^2+y^2$ بر نیمکرهٔ $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = a^2 \qquad F = x^2+y^2+z^2-a^2 \rightarrow \begin{cases} \nabla F = 2xi + 2yj + 2zk \\ P = k \end{cases}$$

$$|\nabla F \cdot P| = 2z \qquad |\nabla F| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2a$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot P|} \cdot dA = \frac{2a}{2z} dx\, dy = \iint_R (x^2+y^2)\frac{a}{z}\, dx\, dy = \iint_D (x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 \frac{a\, r\, dr\, d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} = 4\frac{\pi}{3}a^4$$

بوفن: نبوغ را به عبارت دیگر می‌توان، پشتکار و بردباری و شکیبائی نامید.

ناپلئون: اراده قوی بر همه چیز غالب می‌شود حتی زمان.

حسین پور

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $g(x,y,z)=x+y+z$ بر بخشی از صفحهٔ $2x+2y+z=2$ که در $\frac{1}{8}$ اوّل فضا واقع است.

جواب $=2$

نکته: مساحت رویهٔ S را می‌توان با محاسبهٔ انتگرال زیر بدست آورد:

$$\text{مساحت } S=\iint_S 1\,dS=\iint \frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}\cdot dA$$

مثال: مطلوب است مساحت رویه‌ای که صفحهٔ $z=2$ از سهمی‌وار $x^2+y^2-z=0$ جدا می‌کند:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z \qquad \nabla F=2xi+2yj-k \rightarrow |\nabla F|=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

$$p=\vec{k} \rightarrow |\nabla F\cdot p|=|-1\times 1|=1$$

$$S=\iint \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{1}\,dx\,dy \xrightarrow{\text{قطبی}} S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}\sqrt{(4r^2+1)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}}d\theta=\frac{13\pi}{3}$$

مثال: مطلوب است مساحت رویه‌ای که $y=0$ از سهمی‌گون $x^2+y+z^2=1$ جدا می‌کند.

$$F=x^2+y+z^2-1 \rightarrow \nabla F=2xi+j+2zk \rightarrow |\nabla F|=\sqrt{4(x^2+y^2)+1}$$

$p=j \rightarrow$ بردار عمود بر صفحهٔ xz $(y=0)$

$$|\nabla F\cdot p|=|1\times 1|=1$$

$$S=\iint_D \frac{|\nabla F|}{|\nabla F\cdot p|}\,dA=\iint_{x^2+z^2=1}\frac{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}{1}\,dA \xlongequal{\text{قطبی}} \int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{(4r^2+1)^3}}{12}\Big|_{r=0}^{r=1}d\theta=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

امام علی (ع): نخستین پایهٔ ایمان بردباری است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مطلوب است مساحت عرق چینی که مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2$ جدا می‌کند.

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2 \rightarrow \nabla F=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k} \longrightarrow |\nabla F|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{قطع}} x^2+y^2=1$$

$P=k \rightarrow |\nabla F\cdot P|=2z$

تصویر روی صفحهٔ xy

$$S=\iint_D \frac{|\nabla F|}{|\nabla F\cdot P|}\,dA=\iint_D \frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z}\,dA=\iint_D \frac{2\sqrt{x^2+y^2+x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,dA=\iint_D \sqrt{2}\,dA$$

$$\Rightarrow S=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta=\sqrt{2}\,\pi$$

تمرین: مطلوب است مساحت بخشی از رویهٔ $x^2-2\ln x+\sqrt{15}\,y-z=0$ که بالای مربع $D: -1\leq y\leq 1,\ 1\leq x\leq 2$ واقع در صفحهٔ xy قرار دارد.

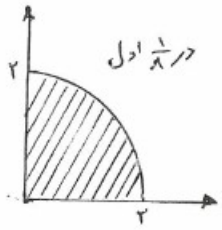
جواب $=3+2\ln 2$

مثال: مساحت رویهٔ $z=4-x^2-y^2$ را که محدود به ناحیهٔ $\frac{1}{8}$ اوّل فضاست محاسبه کنید.

$$G=z+x^2+y^2-4=0 \qquad \nabla G=2x\,i+2y\,j+k \longrightarrow |\nabla G|=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

$|\nabla G\cdot P|=1 \qquad z=4-x^2-y^2 \xrightarrow{z=0} x^2+y^2=4 \qquad P=k \rightarrow$ تصویر رویه در صفحهٔ xy است.

$$S=\iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta=\frac{13}{12}\pi$$



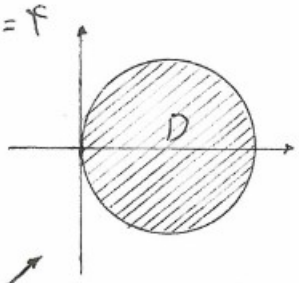
امام علی (ع): هرگاه در طلب چیزی برآمدی، بلندهمت باش.

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: مساحت ناحیهٔ بریده شده از نیم کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ و $z\geq 0$ توسط استوانهٔ $x^2+y^2=2x$ را حساب کنید.

$$F=x^2+y^2+z^2-4=0 \rightarrow \nabla F=2xi+2yj+2zk \qquad |\nabla F|=4$$



$$|\nabla F\cdot\vec{p}|=2z \quad , \quad p=k \rightarrow$$ تصویر مساحت مورد نظر در صفحهٔ xy

$$S=\iint_D 1\,dS=\iint_D \frac{4}{2z}\,dA=\iint_D \frac{2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\,dA \xrightarrow{\text{قطبی}} (x-1)^2+y^2=1 \rightarrow r^2-2r\cos\theta=0 \begin{cases} r=0 \\ r=2\cos\theta \end{cases}$$

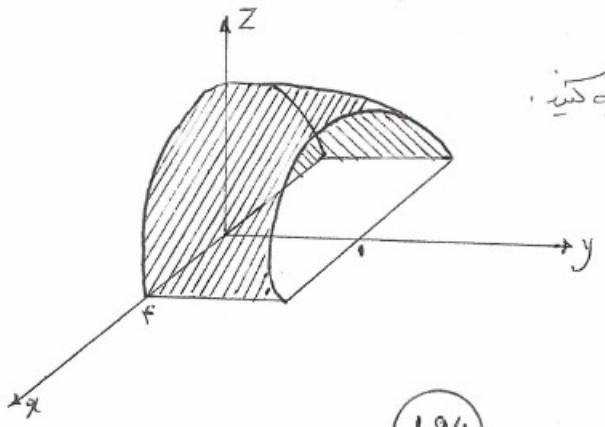
$$S=\iint_{D^*}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \frac{2r\,dr\,d\theta}{\sqrt{4-r^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2\sqrt{4-r^2}\,\Big]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2\left(\sqrt{4-4\cos^2\theta}-\sqrt{4}\right)d\theta=$$

$$=-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|\,d\theta+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin\theta\,d\theta+4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta+4\pi=$$

$$4\cos\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-4\cos\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+4\pi=4(+1-0)-4(0-1)+4\pi=8+4\pi$$

تمرین: مطلوب است مساحت قسمتی از سطح کره به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=16$ که از محل برخورد با سهمی‌گون $z=16-x^2+y^2$ حاصل میشود و در خارج از آن واقع است.

تمرین: انتگرال رویه‌ای $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+4}$ را بر روی رویهٔ بریده شده از استوانهٔ $x^2+4z=16$ توسط صفحات $y=0$ ، $y=1$ و $z=0$ را محاسبه کنید.



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تعیین شار به کمک انتگرال رویه‌ای :

شار برون سوی F گذرنده از سطح S از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\text{شار} = \iint_S (F\cdot n)\,d\delta$$

اگر S به سمت برون جهت‌دار شده باشد و دارای معادلهٔ $G(x,y,z)=0$ باشد می‌توان فرض کرد :

$$\text{شار} = \iint_S (F\cdot n)\frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot P|}\,dA \qquad n=\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

برای محاسبهٔ شار F گذرنده از سطح S کافیست ابتدا از سطح S مقدار $G(x,y,z)=0$ را مشخص کنیم سپس حاصل $n=\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$ را حساب کرده و $F\cdot n$ را محاسبه کنیم. سایهٔ جسم بردار P را نیز مشخص کرده و حاصل انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

مثال : مطلوب است شار میدان برداری $F(x,y,z)=zx\,i+zy\,j+z^2k$ گذرنده از بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ واقع در $\frac{1}{8}$ اوّل فضا و در جهتی که از مبدأ دور می‌شود.

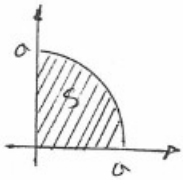
$$G=x^2+y^2+z^2-a^2 \rightarrow n=\frac{\nabla G}{|\nabla G|}=\frac{2xi+2yj+2zk}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{2xi+2yj+2zk}{\sqrt{4a^2}}=\frac{xi+yj+zk}{a}$$

$$d\delta=\frac{|\nabla G|\,dA}{|\nabla G\cdot P|}=\frac{\sqrt{4a^2}}{|2z\times 1|}\,dA=\frac{a}{z}\,dA$$

$$F=zxi+zyj+z^2k \Rightarrow F\cdot n=(zx)\left(\frac{x}{a}\right)+(zy)\left(\frac{y}{a}\right)+(z^2)\left(\frac{z}{a}\right)=\frac{z}{a}(x^2+y^2+z^2)=za$$

$$\text{شار}=\iint_S F\cdot n\,d\delta=\iint_S (za)\frac{a}{z}\,dA=\iint_S a^2\,dA \overset{\text{قطبی}}{=\!=} a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\,dr\,d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2}{2}\Big|_0^a d\theta=$$

$$=\frac{a^4}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{a^4\pi}{4}$$



حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : مثال قبلی را برای $F(x,y,z)=\dfrac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ حل کنید .

$$F=\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{a^2}}=\frac{x}{a}i+\frac{y}{a}j+\frac{z}{a}k$$

$$F\cdot n=\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{y}{a}\right)\left(\frac{y}{a}\right)+\left(\frac{z}{a}\right)\left(\frac{z}{a}\right)=\frac{x^2+z^2+y^2}{a^2}=1$$

$$\text{شار}=\iint_S F\cdot n\,dS=\iint_S 1\times\frac{a}{z}\,dA=\iint\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy\overset{\text{قطبی}}{=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r=a}d\theta=a^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{2}$$

تمرین : مثال قبلی را بر $F=yi-xj+k$ نیز حل کنید : جواب $=\frac{\pi}{4}a^2$

مثال : مطلوب است محاسبه شار برون سوی میدان $F(x,y,z)=4xi+4yj+2k$ گذرنده از رویه ای که صفحه $z=1$ را از پائین سهمی وار $z=x^2+y^2$ جدا می کند .

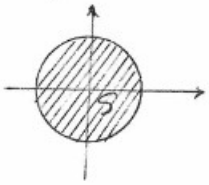
$$G=x^2+y^2-z\rightarrow\nabla G=2xi+2yj-k\rightarrow n=\frac{\nabla G}{|\nabla G|}=\frac{2xi+2yj-k}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}$$

$$dS=\frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot P|}dA=\frac{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}{|-1\times1|}dA=\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA$$

$$F\cdot n=\frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\left(8x^2+8y^2-2\right)$$

$$\text{شار}=\iint_S F\cdot n\,dS=\iint_S(8x^2+8y^2-2)\,dA\Rightarrow z=1,\ x^2+y^2=1\Rightarrow\iint_S(8z-2)\,dA\overset{z=1}{=\!=}6\iint_S dA=$$

$$=6\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta=6\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta=3\times2\pi=6\pi$$



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : مطلوب است شار برون سوی میدان $F = xy\,i + 2z\,j + xz\,k$ از میان رویه مکعبی که صفحات

$x=1$ و $y=1$ و $z=1$ را در $\frac{1}{8}$ اوّل فضا جدا می کند .

جواب $\Rightarrow$ شار $= \frac{3}{2}$

تعریف دیورژانس : دیورژانس میدان برداری F به صورت زیر است : $F = M i + N j + P k$

$$div(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

قضیهٔ دیورژانس : فرض کنید S یک سطح بسته باشد که ناحیه R را در برمی گیرد ، فرض کنید $F = Mi + Nj + Pk$

یک میدان برداری باشد . اگر n قائم برون سوی S باشد ، آنگاه :

$$\text{شار} = \underbrace{\iint_S F \cdot n \, d\sigma}_{\text{شار برون سو}} = \underbrace{\iiint_R (\nabla \cdot F)\, dv}_{\text{انتگرال دیورژانس}} = \iiint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dv$$

نکته : زمانی که شار برون سوی را از ما خواستند و S سطح بسته بود از این قضیه استفاده می کنیم .

فرانکلین : هیچ وقت به گمان اینکه وقت دارید ننشینید ، زیرا در عمل خواهید دید که همیشه وقت کم و کوتاه است .

رومن رولان : شکست ، انرژی خفته ها را بیدار می کند .

حسن پور

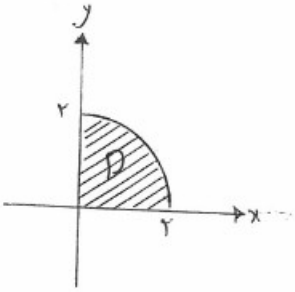
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال : با استفاده از قضیهٔ دیورژانس شار برون سوی گذرنده از مرز ناحیهٔ D را بیابید .

* ناحیه D : ناحیه ای که استوانهٔ $x^2+y^2=4$ و صفحهٔ $z=4$ را از $\frac{1}{8}$ اوّل فضا جدا می کند.

الف) $F(x,y,z)=(6x^2+2xy)i+(2y+x^2z)j+4x^2y^2k$

$$\nabla\cdot F=12x+2y+2+0=12x+2y+2$$



$$\text{شار}=\iiint \nabla F\cdot dv=\iiint_{x^2+y^2=4}\int_0^4 (12x+2y+2)\,dz\,dx\,dy$$

$$\text{شار}=\iint_D z(12x+2y+2)\Big|_{z=0}^{z=4}\,dx\,dy$$

$$\text{شار}=\iint_D 4(12x+2y+2)\,dx\,dy \overset{\text{قطبی}}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 4(12r\cos\theta+2r\sin\theta+2)\,r\,dr\,d\theta$$

ب) $F(x,y,z)=\dfrac{xi+yj+zk}{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad D: 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$

$$\nabla\cdot F=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\text{شار}=\iiint_R \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dv \xrightarrow{\text{کروی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 \frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho\sin\varphi\Big|_{\rho=1}^{\rho=2}\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{2\pi}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\,d\theta=4\pi$$

اچ لاسکی : نشانهٔ مهارت ، دانستن بیشترها در مورد کوچکترین هاست .

مونتسکیو : انسان همانند رودخانه است ، هرچه عمیق تر باشد ، آرام تر است .

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال: با فرض اینکه $F = xi + yj + zk$ و S سطح بستهٔ قسمت بالایی کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ باشد، درستی قضیهٔ دیورانس را بررسی کنید.

حل به روش مستقیم: $\iint_S F \cdot n \, d\sigma =$

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \rightarrow \begin{cases} \nabla G = 2xi + 2yj + 2zk \\ |\nabla G| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2a \end{cases}$$

$$n = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{x}{a} i + \frac{y}{a} j + \frac{z}{a} k$$

$$F \cdot n = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla G| \, dA}{|\nabla G \cdot P|} = \frac{2a \cdot dA}{|2z \times 1|} = \frac{a}{z} dA$$

تصویر در صفحهٔ xy

$$\text{شار} = \iint_S (F \cdot n) d\sigma = \iint_S \frac{a^2 dA}{z} = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r \, dr \, d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a^3$$

روش دیورانس: $\text{شار} = \iiint_R (\operatorname{div} F) dv = 3 \underbrace{\iiint_R dv}_{\text{حجم نیمکره‌ای به شعاع } a} = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi a^3 = 2\pi a^3$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = \nabla \cdot F = 1 + 1 + 1 = 3$$

فرانسیس بیکن: آنچه مردم را دانشمند می‌کند مطالبی نیست که یاد می‌گیرد بلکه چیزهایی است که می‌فهمد.

آنری مارلو: زندگی ارزش دارد، ولی هیچ چیز هم ارزش زندگی را ندارد.

نقشین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین : با استفاده از قضیه دیورانس شار برون سوی F گذرنده از مرز ناحیه D را تعیین کنید .

الف :
$$\begin{cases} F = (5x^3 + 12xy^3)i + (y^3 - e^y \sin z)j + (5z^3 + e^y \cos z)k \\ D: \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \end{cases}$$
جواب $= 12\pi(4\sqrt{2} - 1)$

ب :
$$\begin{cases} F = x^2 i + y^2 j + z^2 k \\ D: \ z = \pm 1 \ , \ y = \pm 1 \ , \ x = \pm 1 \end{cases}$$
مکعب ←

جواب $= 0$

ج :
$$\begin{cases} F = x^2 i + xz j + zk \\ D: \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$
جواب $= \frac{32\pi}{3}$

مثال : شار برون سوی نیروی F گذرنده از سطح بستهٔ S را بیابید .

$$S = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \ , \ -1 \leq z \leq 2\}$$

$$F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)i + (2 \arctan \frac{y}{x})j + z\sqrt{x^2 + y^2}\,k$$

$$\operatorname{div} F = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 2 \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iint_S F \cdot n \, d\sigma \overset{\text{div}}{=} \iiint_R \left(\frac{4x}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dv \overset{\text{استوانه‌ای}}{=} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-1}^{2} \left(\frac{4r\cos\theta}{r^2} + r \right) r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} (4\cos\theta + r^2) \, dr \, d\theta = (2\sqrt{2} - 1) 2\pi$$

جایی در ذهنت به خاطر بسپار که "از انگشت خداوند زیبا چیز هست" .

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

مسائل تکمیلی قضیهٔ گرین و دیورژانس :

(۱) حاصل انتگرال $\oint_C (x^3+2y)\,dx + (4x-3y^2)\,dy$ را روی خم C (یعنی : $\frac{x^2}{4}+y^2=1$) بیابید .

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \longrightarrow \frac{x}{2}=\cos t \qquad \longrightarrow \frac{y}{1}=\sin t \qquad 0\leq t\leq 2\pi \Rightarrow \begin{cases} x=2\cos t \longrightarrow dx=-2\sin t\,dt \\ y=\sin t \longrightarrow dy=\cos t\,dt \end{cases}$$

$$=\int_0^{2\pi} (8\cos^3 t+2\sin t)(-2\sin t\,dt)+(8\cos t-3\sin^2 t)\cos t\,dt$$

$$=-16\int_0^{2\pi}\sin t\cos^3 t\,dt-4\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt+8\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt-3\int_0^{2\pi}\cos t\sin^2 t\,dt=$$

$$=\cancel{4\cos^4 t\Big|_0^{2\pi}}-2\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt+4\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt-\cancel{\sin^3 t\Big|_0^{2\pi}}=$$

$$=-2t+\sin 2t+4t+2\sin 2t\Big|_0^{2\pi}=4\pi$$

---

(۲) شار برون سوی $F=x^3\hat{i}+y^3\hat{j}+z^3\hat{k}$ گذرنده از سطح کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را بیابید .

$$\operatorname{div} F=3(x^2+y^2+z^2)=3a^2$$

$$\text{شار برونسوی}=\iint_S F\cdot n\,d\sigma \overset{\text{div}}{=} \iiint_R \operatorname{div} F\,dv \xlongequal{\text{مختصات کروی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} 3a^2\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=3a^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta=-a^5\int_0^{2\pi}\cos\varphi\Big|_0^{\pi}d\theta=2a^5\theta\Big|_0^{2\pi}=4a^5\pi$$

حسن پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

(۳) شار برونسوی $F(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$ گذرنده از مرز ناحیهٔ D بصورت :

$1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ را محاسبه کنید :

$$\operatorname{div} F=\frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\text{شار برونسوی}=\iint_S F\cdot n\cdot d\sigma \overset{\text{div}}{=\!=} \iiint_R \operatorname{div} F\cdot dv \xrightarrow{\text{تبدیل به مختصات کروی}}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}\frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\cos\varphi\Big|_0^{\pi}d\theta=4\pi$$

---

(۴) فرض کنید R ناحیهٔ بین دو مخروط $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ و $z=\sqrt{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2}$ و کره $x^2+y^2+z^2=1$ واقع باشد با فرض $\operatorname{div} F=e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ شار برونسوی میدان F را بیابید.

$$z>0\to z^2=3x^2+3y^2\to \frac{r^2\cos^2\varphi}{3}=r^2\sin^2\varphi\to \tan\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z>0\to z^2=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2\to 3r^2\cos^2\varphi=r^2\sin^2\varphi\longrightarrow \begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{6}\\ \varphi=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

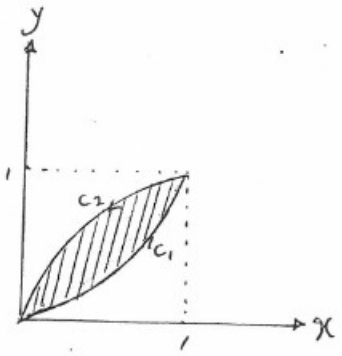
$$\text{شار برونسوی}\overset{\text{div}}{=\!=}\iiint_R e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 e^{\rho}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=$$

$$\xrightarrow{\text{جزء به جزء}}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\,(\rho^2e^{\rho}-2\rho e^{\rho}+2e^{\rho})\Big|_0^1 d\varphi\, d\theta=$$

$$=(e-2)\int_0^{2\pi}-\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3}d\theta=-(e-2)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\theta\Big|_0^{2\pi}=(2-e)(1-\sqrt{3})\pi$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) درستی صورت مماسی قضیهٔ گرین را برای میدان $F = 6xy\,\hat{i} + 3x^2\,\hat{j}$ و ناحیهٔ محدود به خم‌های $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ تحقیق کنید.



حل به روش مستقیم $\rightarrow c_1 : y = x^2 \rightarrow \begin{cases} x = t \rightarrow dx = dt \\ y = t^2 \rightarrow dy = 2t\,dt \\ M = 6t^3 \\ N = 3t^2 \end{cases} \quad 0<t<1$

$$F \text{ گردش } = \oint M\,dx + N\,dy = \int_0^1 6t^3\,dt + 6t^3\,dt = 3$$

$$c_2 : y = \sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} y = t \longrightarrow dy = dt \\ x = t^2 \longrightarrow dx = 2t\,dt \\ M = 6t^3 \\ N = 3t^4 \end{cases} \quad 0<t<1$$

$$F \text{ گردش } = \int_0^1 12t^4\,dt + 3t^4\,dt = 3 \xrightarrow{\text{جهت برگرداندن}} -3$$

$$F \text{ گردش } = \int_{c_1} + \int_{c_2} = 3 - 3 = 0$$

حل به روش گرین : $F \text{ گردش } = \iint_D (6x - 6x)\,dA = 0$

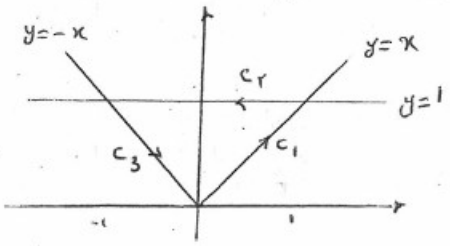
شکسپیر : دنیا فانتزیک تماشاخانه است، هر کسی دل خود را بازی می‌کند و پنهان می‌شود.

دشوارترین قدم نهمان قدم اوّل است.

حسین پور

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) درستی صورت قائم قضیه گرین را برای میدان برداری $F = x^2\hat{i} + y\hat{j}$ و ناحیه مثلثی D که از پایین به $y=|x|$ و از بالا به خط $y=1$ محدود و C مرز آن است را تحقیق کنید.



For c_1 : $y=x$

$$\begin{cases} x=t \longrightarrow dx=dt \\ y=t \longrightarrow dy=dt \\ M=t^2 \\ N=t \end{cases} \qquad 0<t<1$$

$$F_{\text{شار}} = \oint_{c_1} M\,dy - N\,dx = \int_0^1 t^2 dt - t\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}$$

For c_2 : $y=1$

$$\begin{cases} y=1 \longrightarrow dy=0 \\ x=t \longrightarrow dx=dt \\ M=t^2 \\ N=1 \end{cases} \qquad -1<t<1$$

$$F_{\text{شار}} = \int_{-1}^{1} t^2 \times 0 - dt = -2 \overset{\text{درجهت برگردان}}{=\!=\!=} +2$$

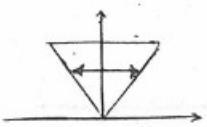
For c_3 : $y=-x$

$$\begin{cases} x=t \longrightarrow dx=dt \\ y=-t \longrightarrow dy=-dt \\ M=t^2 \\ N=-t \end{cases}$$

$$F_{\text{شار}} = \int_{-1}^{0} -t^2 dt + t\,dt = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-5}{6}$$

$$F = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} = 1$$

حل به روش گرین ← $\text{شار} = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_{-y}^{y} (2x+1)\,dx\,dy = \int_0^1 x^2 + x \Big|_{-y}^{y} dy = 1$



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا