WWW.RIAZISARA.IR

دنباله و سری

۲-۳: سری

مقدمه: نماد $\sum$ «سیگما» را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

بدیهی است این نماد ویژگی‌هایی هم داشته باشد که برخی از آن‌ها به شرح زیر است: (اثبات این قوانین به سادگی با نوشتن مجموع‌ها امکان‌پذیر است)

$$1)\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m-1} x_i$$

$$2)\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1+k}^{n+k} x_{i-k} = \sum_{i=1-k}^{n-k} x_{i+k}$$

$$3)\sum_{i=1}^{n} (x_i + ky_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad k \in R$$

با توجه به این ویژگی می‌توان دو سیگما را از هم تفکیک کرد و یک عدد ثابت را از سیگما بیرون کشید.

$$4)\sum_{i=m}^{n} k = \underbrace{k}_{m} + \underbrace{k}_{m+1} + \dots + \underbrace{k}_{n} = k(n-m+1)$$

دقت کنید که تعداد اعداد صحیح متوالی بین دو عدد صحیح n و m که $m < n$ (همراه با خود این دو عدد) برابر است با: $n-m+1$

$$5)\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{n-i+1}$$

➢ **تذکر:** در ویژگی‌های فوق، ویژگی‌های نسبتاً بدیهی (۳) و (۴) از بقیه مهم‌تر هستند و بارها از آن‌ها در حل مسائل استفاده می‌کنیم.

❍ **مسأله‌ی (۱):** اگر $A = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i+3}$، حاصل $\sum_{i=1}^{10} \frac{i-13}{14-i}$ برحسب A کدام است؟

حل: اگر فرض کنیم $B = \sum_{i=1}^{10} \frac{i-13}{14-i}$، آن‌گاه داریم:

$$B = \sum_{i=1}^{10} \frac{i-14+1}{14-i} = \sum_{i=1}^{10} (-1 + \frac{1}{14-i}) = -10 + \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{14-i} = -10 + \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{14-(11-i)} = -10 + \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{3+i} = A - 10$$

➢ **تذکر:** اگر استفاده از ویژگی‌های سیگما برای‌تان مشکل است، نوشتن مجموع‌ها نیز به سادگی شما را به جواب می‌رساند. مثلاً در این جا می‌دانیم: $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{13}$ و می‌خواهیم $B = \frac{-12}{13} + \frac{-11}{12} + \dots + \frac{-3}{4}$ را بیابیم. داریم:

$$B = \frac{-13+1}{13} + \frac{-12+1}{12} + \dots + \frac{-4+1}{4} = (\overbrace{-1-1-\dots-1}^{10}) + (\frac{1}{13} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{4}) = -10 + A$$

تست (۱): حاصل جمع ۱۰۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی $\{n-3[\frac{n}{3}]\}$ چقدر است؟

۱) ۳۳ ۲) ۹۶ ۳) ۹۹ ۴) ۱۰۰

حل: جمله‌ی عمومی دنباله را به‌صورت $a_n = 3(\frac{n}{3}-[\frac{n}{3}])$ می‌توان نوشت. بنابراین $a_{n+3} = a_n$ (به ویژگی‌های جزءصحیح مراجعه کنید).

پس جملات دنباله، ۳ تا ۳ تا تکرار می‌شوند. بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = (a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{97}+a_{98}+a_{99})+a_{100}$$

$$=(a_1+a_2+a_3)+(a_1+a_2+a_3)+\cdots+(a_1+a_2+a_3)+a_1 = 33(a_1+a_2+a_3)+a_1 = 33(1+2+0)+1=100$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۴ است.

تعریف سری:

برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ دنباله‌ی دیگری به نام $\{S_n\}$ تعریف می‌کنیم که:

$$S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$$

S_n را مجموع جزئی جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ و دنباله‌ی $\{S_n\}$ را سری می‌نامیم. حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ را نیز (در صورت وجود) مجموع سری می‌نامیم، به عبارتی:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

اگر $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ برابر عدد S شود (یعنی $\{S_n\}$ به عددی مانند S همگرا شود)، می‌گوییم سری به S همگراست. و اگر حاصل آن عددی چون S نشود، می‌گوییم سری واگراست.

تذکر: در مجموع $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$، به a_k جمله‌ی عمومی سری می‌گویند.

قضیه: **همگرایی سری:** شرط لازم برای همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ آن است که: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

به عبارتی اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، قطعاً داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$؛ ولی ممکن است داشته باشیم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$، اما سری همگرا نباشد.

نتیجه: اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$، آن‌گاه سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ قطعاً واگرا است.

تست (۲): $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا با جملات مثبت است. اگر سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2-1}{2a_n^2+5}$ همگرا باشد، $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2a_n+5}{a_{n+1}}$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۷ ۴) $\frac{7}{3}$

حل: از همگرایی سری طبق قضیه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2-1}{2a_n^2+5}=0$، پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm 1$، که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ غیر قابل قبول است (زیرا $a_n > 0$). از این رو

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+5}{a_{n+1}} = \frac{2+5}{1} = 7$$

پاسخ گزینه‌ی ۳ درست است.

تست (۳): دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{2^n + 2^{2n+1}}{3^n + 4^n}$ و سری $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ چه وضعیتی دارند؟ (آزاد - ۸۵)

۱) دنباله واگرا، سری همگرا ۲) هر دو همگرا ۳) دنباله همگرا، سری واگرا ٤) هر دو واگرا

حل: وقتی $n \to \infty$، می‌توانیم از 2^n و 3^n در مقابل 4^n در صورت و مخرج کسر a_n صرف‌نظر کنیم. پس:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \times 2}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \times 4^n}{4^n} = 2 \to \text{همگرا } \{a_n\}$$

چون $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مسأله‌ی (۲): حاصل هر یک از سری‌های زیر را بیابید.

الف) $\sum_{k=1}^{\infty} [\frac{100}{2^k}]$ **ب)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi n!}{6})$

حل: الف) برای $k \geq 7$ داریم: $2^k > 100$، بنابراین جمله‌ی عمومی سری صفر می‌شود. پس کافی است ۶ جمله‌ی اول را با هم جمع کنیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\frac{100}{2^k}] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

ب) می‌دانیم برای هر $k \in Z$ داریم: $\sin(k\pi) = 0$، و $\frac{n!}{6}$ برای $n \geq 3$ یک عدد صحیح است، بنابراین تنها ۲ جمله‌ی اول غیر صفر می‌شوند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi n!}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

نتیجه: در سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ اگر جمله‌ی عمومی سری از جمله‌ای به بعد صفر مطلق باشد، آن‌گاه سری حتماً همگراست.

مسأله‌ی (۳): نشان دهید سری‌های زیر واگرایند.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$ **ب)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

حل: الف) این سری شرط لازم برای همگرایی را ندارد زیرا $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$

ب) در این سری شرط لازم برای همگرایی وجود دارد زیرا $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، اما واگرا است، زیرا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \ldots > \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ یک سری واگراست و می‌توانیم مجموع‌های جزئی آن را از هر عددی بزرگ‌تر کنیم (چرا؟)، بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ نیز واگرا است، زیرا برای هر عدد دلخواه، با انتخاب تعداد مناسبی از جملات، می‌توانیم مجموع جزئی را از آن عدد بزرگ‌تر کنیم.

به جز سری‌های خاص، در این کتاب به طور ویژه بر محاسبه‌ی مقدار دو دسته سری تمرکز می‌کنیم: سری‌های هندسی و سری‌های تلسکوپی. در ادامه با این سری‌ها آشنا می‌شویم.

سری هندسی:

تعریف: هر سری به صورت زیر را یک سری هندسی می‌نامیم. در این سری جملات، یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت r تشکیل می‌دهند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

مثال: ۱- در سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2}$، داریم: $r=3$ و $a=\frac{3}{2}$، زیرا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2}=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}+\frac{27}{2}+\cdots$$

۲- در سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}}{2}$، داریم: $r=\frac{1}{3}$ و $a=\frac{3}{2}$، زیرا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^2\times(3^{-1})^n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{2}\times(\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\times(\frac{1}{3})^{n-1}$$

نتیجه: همان‌طور که مشاهده می‌کنید همواره با جایگذاری $n=1$، به راحتی می‌توانید a را به دست آورید و برای تشخیص r، کافی است جملاتی را درنظر بگیرید که در آن‌ها توان n حضور دارد.

مثال: در سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-3}\times 2^{2n+1}}{3^{-n+1}}$**، داریم:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-3}\times 2^{2n+1}}{3^{-n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-3}\times 2\times 5^n\times 4^n}{3\times(3^{-1})^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^3\times 3}\times(5\times 4\times 3)^n$$

پس $r=60$ و $a=\frac{2}{5^3\times 3}\times 5\times 4\times 3=\frac{8}{25}$

قضیه: **سری هندسی** $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ **در صورتی همگرا است که** $|r|<1$**، و در این صورت:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}=\frac{\text{جمله‌ی اول}}{1-(\text{قدر نسبت})}$$

نتیجه: اگر $|r|<1$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty}r^n=\frac{r}{1-r}$

مسأله‌ی (۴): **حدود x چه باشد تا سری** $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x+1}{x-2})^{n+1}$ **همگرا باشد؟**

حل: چون $r=\frac{x+1}{x-2}$، این سری هندسی به شرطی همگراست که داشته باشیم:

$$|\frac{x+1}{x-2}|<1\Rightarrow|x+1|<|x-2|\Rightarrow x^2+2x+1<x^2-4x+4\Rightarrow x<\frac{1}{2}$$

مسأله‌ی (۵): **حدود x چه باشد تا سری** $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5}{2x-1})^{1-2k}$ **یک سری همگرا باشد؟**

حل: دقت کنید که $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5}{2x-1})^{1-2k}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2x-1}{5})^{2k-1}$. در این حالت شرط همگرایی $0<|\frac{2x-1}{5}|<1$ است. شرط $0<|\frac{2x-1}{5}|$ برای آن است که عبارت $2x-1$ صفر نشود.

$$|2x-1|<5\Rightarrow -5<2x-1<5\Rightarrow -2<x<3\xrightarrow{x\neq\frac{1}{2}}x\in(-2,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},3)$$

تست (۴): **حدود x کدام باشد تا سری** $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin 2x)^{2n-1}$ **یک سری همگرا باشد؟** $(k\in Z)$

۱) $x\neq k\frac{\pi}{2}$ ۲) $x\neq k\pi$ ۳) $x\neq\frac{k\pi}{4}$ ۴) $x\neq k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

حل: چون $r=(\sin 2x)^2$، شرط $|r|<1$ معادل $|\sin 2x|<1$ است و چون همواره $-1\le\sin 2x\le 1$، داریم:

$$\sin 2x\neq\pm 1\Rightarrow 2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۴ است.

مسأله‌ی (۶): حاصل هر یک از سری‌های زیر را بیابید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{3-n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{3^{n+1}}$ پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-3^{n-2}}{2^{2n-1}}$

ت) $\sum_{n=1}^{\infty} (2+\sqrt{3})^n (7-4\sqrt{3})^n$ ث) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n\pi)}{3^n}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sin(\frac{n\pi}{2})}{2^{n+1}}$

حل: الف)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{3-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} 8\times(\tfrac{1}{2})^n = 8\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{1}{2})^n = 8\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

ب)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2}\times 2^n}{3\times 3^n} = \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{2}{3})^n = \frac{1}{12}\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}$$

پ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-3^{n-2}}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{2^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\times 2^n}{\frac{1}{2}\times 4^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{9}\times 3^n}{\frac{1}{2}\times 4^n} = 4\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{1}{2})^n - \frac{2}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{3}{4})^n$$

$$= 4\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}\times\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 4-\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

ت)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2+\sqrt{3})^n(7-4\sqrt{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty}(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n}_{1}(2-\sqrt{3})^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{3})^n = \frac{2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ث)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(n\pi)}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-\tfrac{1}{3})^n = 2\times\frac{\frac{-1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$$

ج) می‌دانیم:

$$\begin{cases} n=2k \Rightarrow \sin\frac{n\pi}{2} = \sin k\pi = 0 \\ n=2k-1 \Rightarrow \sin\frac{n\pi}{2} = \sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = \sin(k\pi-\frac{\pi}{2}) = -\cos k\pi = -(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{cases}$$

بنابراین در مجموع، جملات با n زوج حذف می‌شوند و باید تنها جملات با n فرد را جمع کنیم. داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sin\frac{n\pi}{2}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^n} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-(-1)^k}{4^k\times\frac{1}{2}} = -3\sum_{k=1}^{\infty}(-\tfrac{1}{4})^k = -3\times\frac{-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

تست (۵): هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{3n+2}\times a^{1-2n})$ همگرا به ۹۶ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۳

حل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^{3n+2}\times a^{1-2n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+2}}{a^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}\times 4}{(a^2)^n\times a^{-1}} = 4a\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{8}{a^2})^n$$

اولاً باید $a^2 > 8$، زیرا طبق فرض سری همگراست. ثانیاً حاصل سری را به کمک همگرایی سری هندسی پیدا می‌کنیم:

$$4a\times\frac{\frac{8}{a^2}}{1-\frac{8}{a^2}} = 96 \Rightarrow 4a\times\frac{8}{a^2-8} = 96 \Rightarrow \frac{a}{a^2-8} = 3 \Rightarrow 3a^2-a-24 = 0 \Rightarrow a_1 = 3\ ,\ a_2 = -\frac{8}{3} \xrightarrow{a^2>8} a = 3$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۴ است.

مسأله‌ی (۷): حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ را به دست آورید.

حل: این سری یک سری هندسی نیست، اما قابل تبدیل به مجموعی از سری‌های هندسی است. برای حل آن چند روش ارائه می‌دهیم.

روش اول: سری را به صورت مجموعی از سری‌های هندسی می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots..$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\\&+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\&+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\\&+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\\&+\ldots\ldots.\end{aligned}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که هر ستون از اعداد زیر هم، یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ را مشخص می‌کند. یعنی ابتدا در ستون اول $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$، سپس در ستون دوم $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ و الی آخر. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

روش دوم: حاصل سری را S می‌نامیم و با استفاده از ویژگی‌های «سیگما» معادله‌ای برای S به‌دست می‌آوریم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\Rightarrow S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n})=\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n})+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\Rightarrow S=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

(عبارت $\frac{n}{2^n}$ به ازای $n=0$ برابر صفر می‌شود، پس می‌توانیم سیگمای اول را از عدد یک آغاز کنیم). حال داریم:

$$S=\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\Rightarrow S=\frac{1}{2}S+1\Rightarrow S=2$$

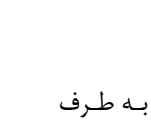
روش سوم: با شرط $|x|<1$ داریم: $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$، ابتدا از طرفین مشتق می‌گیریم و سپس آن‌ها را در x ضرب می‌کنیم:

$$1+2x+3x^2+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}\xrightarrow{\times x}x+2x^2+3x^3+\ldots=\frac{x}{(1-x)^2}$$

بنابراین با شرط $|x|<1$، داریم: $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$، حال با جایگذاری $x=\frac{1}{2}$ در این فرمول به دست می‌آوریم: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2\Rightarrow S=2$

تمرین: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ را با روشی مانند مثال قبل بیابید. «جواب نهایی: ٦»

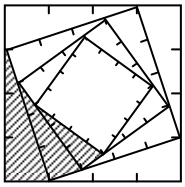
مسأله‌ی (۸): توپی را از ارتفاع h متری به شکل قائم رها می‌کنیم، پس از برخورد به زمین تا $\frac{3}{4}$ ارتفاع اولیه بالا می‌آید. این عمل بارها و بارها تکرار می‌شود، تا بعد از طی ٤٢ متر متوقف می‌شود. ارتفاع اولیه چقدر بوده است؟



حل: فرض سؤال را به‌صورت معادله‌ی زیر می‌توانیم بیان کنیم: $h+\frac{3}{4}h+\frac{3}{4}h+(\frac{3}{4})^2h+(\frac{3}{4})^2h+\ldots=42$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید به جز مسیر اولیه هر مسیر ۲ مرتبه محاسبه می‌شود، یکی به طرف بالا و همان اندازه به طرف پایین. حال با اضافه کردن h به دو طرف تساوی فوق داریم:

$$2(h+\frac{3}{4}h+(\frac{3}{4})^2h+\ldots)=42+h\Rightarrow 2h(\frac{1}{1-\frac{3}{4}})=42+h\Rightarrow 8h=42+h\Rightarrow h=6$$



تست (۶): در مربع به ضلع ۸ هر ضلع آن را به ٤ قسمت تقسیم می‌کنیم و مربع جدیدی مطابق شکل به وجود می‌آوریم و یکی از مثلث‌های گوشه‌ها را رنگ می‌کنیم. این عمل را مرتباً تکرار می‌کنیم. حد مجموع مساحت قسمت رنگ‌شده چقدر است؟

۱) ٦٤ **۲) ۳۲**

۳) ۱٦ **٤) ٤۸**

حل: راه اول: اندازه‌ی ضلع مربع دوم برابر است با $a_۲ = \sqrt{۶^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۱۰}$، حال دقت کنید که به دلیل تشابه، طول اضلاع (و هم‌چنین مساحت) مربع‌های متوالی یک دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌دهند، که می‌توانیم قدرنسبت آن‌ها را به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{قدرنسبت دنباله‌ی اضلاع} = \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۸} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow \text{قدرنسبت دنباله‌ی مساحت‌ها} = \frac{۱۰}{۱۶} \\ \text{مساحت بزرگ‌ترین مثلث} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{۶}{۱ - \frac{۱۰}{۱۶}} = ۱۶$$

مساحت قسمت رنگ‌شده برابر ۱۶ است.

راه دوم: به لحاظ تقارنی که در شکل داریم، مساحت قسمت رنگ‌شده $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع اولیه است، زیرا اگر از چهار گوشه تمام مثلث‌ها را رنگ کنیم آن‌گاه تمام مربع بزرگ رنگ خواهد شد، پس

$$S = \frac{۱}{۴} \times ۸ \times ۸ = \frac{۶۴}{۴} = ۱۶$$

گزینه‌ی ۳ درست است.

تمرین: اگر وسط اضلاع یک ٦ ضلعی منتظم به ضلع ٦ را به هم وصل کنیم تا ٦ ضلعی منتظم دیگری به دست آید و این عمل را مرتباً تکرارکنیم و هر بار فقط یکی از ٦ مثلث کناری را رنگ بزنیم، حد مجموع مساحت رنگ شده چقدر است؟

جواب نهایی: $۹\sqrt{۳}$

کسر مولد اعشاری:

اگر α یک عدد اعشاری متناوب باشد، می‌توانیم متناظر با آن یک سری هندسی بنویسیم و حد همگرایی سری هندسی را بیابیم تا کسر متناظر با آن به دست آید.

مسأله‌ی (۹): کسر متناظر با هر یک از اعداد اعشاری زیر را بیابید.

الف) $۳/\overline{۵۱}$

ب) $۰/\overline{۱۲۵}$

حل: الف) متناظر عدد، یک سری هندسی می‌نویسیم:

$$۳/\overline{۵۱} = ۳ + \frac{۵۱}{۱۰۰} + \frac{۵۱}{۱۰۰۰۰} + \ldots = ۳ + \frac{۵۱}{۱۰۰}(۱ + \frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰۰۰} + \ldots) = ۳ + \frac{۵۱}{۱۰۰} \times \frac{۱}{\frac{۹۹}{۱۰۰}} = \frac{۳۴۸}{۹۹} = \frac{۱۱۶}{۳۳}$$

ب) متناظر عدد، یک سری هندسی می‌نویسیم:

$$۰/\overline{۱۲۵} = ۰/۱ + \frac{۲۵}{۱۰۰۰} + \frac{۲۵}{۱۰۰۰۰۰} + \ldots = ۰/۱ + \frac{۲۵}{۱۰۰۰}(۱ + \frac{۱}{۱۰۰} + \ldots) = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۲۵}{۱۰۰۰} \times \frac{۱}{\frac{۹۹}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۲۵}{۹۹۰} = \frac{۱۲۴}{۹۹۰} = \frac{۶۲}{۴۹۵}$$

تمرین: سری هندسی متناظر با $a/b\overline{c}$**، و کسر متناظر با آن را بنویسید. جواب نهایی:** $\frac{\overline{abc} - \overline{ab}}{۹۰}$

تست (۷): اگر $a = ۰/۴\overline{۹}$ **و** $b = ۱/\overline{۹}$**، حاصل** $[۴a] + [۲b]$ **چقدر است؟**

۱) ۳ **۲) ٤** **۳) ۵** **٤) ٦**

حل: از فرض $a = ۰/۴\overline{۹}$، مانند مسأله‌ی (۹) به دست می‌آوریم: $a = \frac{۱}{۲}$ و از فرض $b = ۱/\overline{۹}$، نتیجه می‌گیریم $b = ۲$، پس:

$$[۴a] + [۲b] = ۲ + ۴ = ۶$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۴ است.

نکته: اگر $A = /a_1a_2.....a_k\,\overline{b_1b_2.....b_m}$، آن‌گاه $A = \dfrac{\overline{a_1a_2.....b_m} - \overline{a_1a_2....a_k}}{\underbrace{99...9}_{m\text{ تا}}\underbrace{00...0}_{k}}$

مثال: اگر $A = 2/351\overline{7}$، آن‌گاه $A = \dfrac{23517 - 2351}{9000}$

یا اگر $B = 25/0\overline{12}$، آن‌گاه $B = \dfrac{25012 - 250}{990}$

WWW.RIAZISARA.IR

سری تلسکوپی

ابتدا ویژگی ادغام (قاعده‌ی تلسکوپی) را معرفی می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{k}(a_{n+1}-a_n) = (\cancel{a_2}-a_1)+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+(\cancel{a_4}-\cancel{a_3})+\cdots+(a_{k+1}-\cancel{a_k}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{k}(a_{n+1}-a_n) = a_{k+1}-a_1$$

مسأله‌ی (۱۰): چه تعداد از جملات دنباله‌ی $\{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\}$ را جمع کنیم تا حاصل ۹ شود؟

حل: فرض کنیم مجموع k جمله‌ی اول برابر ۹ باشد، بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 9 \Rightarrow \sum_{n=1}^{k}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 9$$

اگر قرار دهیم $a_n = \sqrt{n}$، آن‌گاه $a_{n+1} = \sqrt{n+1}$. و در نتیجه می‌توانیم از قاعده‌ی تلسکوپی استفاده کنیم. داریم:

$$\sum_{n=1}^{k}(a_{n+1}-a_n) = a_{k+1}-a_1 \Rightarrow \sqrt{k+1}-1 = 9 \Rightarrow \sqrt{k+1} = 10 \Rightarrow k = 99$$

یعنی اگر ۹۹ جمله از دنباله را جمع کنیم حاصل ۹ می‌شود.

نکته: **یافتن سری با استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی: با استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی می‌توانیم بنویسیم:**

$$\sum_{n=1}^{k}(a_{n+1}-a_n) = a_{k+1}-a_1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{k\to\infty}(a_{k+1}-a_1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}a_n - a_1$$

یعنی اگر $\lim_{n\to\infty}a_n = L$، آن‌گاه سری همگرا به $L - a_1$ می‌باشد و اگر $\lim_{n\to\infty}a_n$ موجود نباشد، سری واگرا است.

مثال ۱- در سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+5}{7n+3}-\frac{2n+7}{7n+10})$، اگر قرار دهیم $a_n = \frac{2n+5}{7n+3}$، آن‌گاه خواهیم داشت: $a_{n+1} = \frac{2n+7}{7n+10}$ (چرا؟)، بنابراین:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+5}{7n+3}-\frac{2n+7}{7n+10}) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty}a_n$$

$$a_1 = \frac{7}{10} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{7n+3} = \frac{2}{7} \Rightarrow S = \frac{7}{10}-\frac{2}{7} = \frac{29}{70}$$

۲- در سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1})$، نمی‌توانیم از قاعده‌ی تلسکوپی استفاده کنیم، زیرا اگر $a_n = \frac{1}{n}$، آن‌گاه $a_{n+1} \neq \frac{2}{n+1}$.

تست (۸): مجموع سری $\sum_{n=3}^{\infty}(\frac{1}{n^2+2n}-\frac{1}{n^2+4n+3})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{1}{8}$

حل: چون $(n+1)^2+2(n+1) = n^2+4n+3$، پس اگر قرار دهیم $a_n = \frac{1}{n^2+2n}$، سری به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(\frac{1}{n^2+2n}-\frac{1}{n^2+4n+3}) = \sum_{n=3}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_3 - a_4 + a_4 - a_5 + \cdots$$

$$= a_3 - \lim_{n\to\infty}a_n = \frac{1}{15} - \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+2n}) = \frac{1}{15} - 0 = \frac{1}{15}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مسأله‌ی (۱۱): حاصل هر یک از سری‌های زیر را بیابید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$ **ب)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ **پ)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

حل: الف) می‌دانیم $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$، بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_{n+1}})=2(a_1-\lim_{n\to\infty}a_n)=2$$

ب) مانند قسمت (الف) سعی می‌کنیم جمله‌ی عمومی سری را به صورت تفاضل دو کسر بنویسیم. مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم و سعی می‌کنیم در صورت کسر تفاضل دو عامل را ایجاد کنیم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{a_{n+1}})=\frac{1}{2}(a_1-\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{1}{2}$$

پ) جمله‌ی عمومی سری را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!})=\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{a_{n+1}})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

ت) جمله‌ی عمومی سری را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})=a_1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1-0=1$$

تست (۹): مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ **۲)** $\frac{1}{3}$ **۳)** $\frac{1}{2}$ **۴)** $\frac{2}{3}$

حل: داریم:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+3)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3})$$

ولی ظاهراً نمی‌توانیم از قاعده‌ی تلسکوپی استفاده کنیم. زیرا اگر قرار دهیم $a_k=\frac{1}{2k-1}$، آن‌گاه $a_{k+1}=\frac{1}{2k+1}$ و $a_{k+2}=\frac{1}{2k+3}$ و به جای $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})$ با $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+2})$ مواجه‌ایم. اما می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$S=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+2})=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1}+a_{k+1}-a_{k+2})=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_{k+2})$$

به این ترتیب به دو سری تلسکوپی رسیده‌ایم. داریم:

$$S=\frac{1}{4}(a_1-\lim_{n\to\infty}a_n)+\frac{1}{4}(a_2-\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{1}{4}(a_1+a_2)=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$$

پس گزینه‌ی (۲) درست است.

با روشی مثل تست قبل می‌توانیم نکته‌ی زیر را به‌دست آوریم:

نکته: **اگر** $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ **، آن‌گاه** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+2})$ **برابر است با:** $(a_1 + a_2) - 2\lim_{n\to\infty} a_n = (a_1 + a_2) - 2L$

به همین ترتیب: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+k}) = (a_1 + a_2 + ... + a_k) - kL$

مسأله‌ی (۱۲): حاصل هر یک از سری‌های زیر را بیابید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)(2n+5)}$ * **ب)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(n^2+n-4)}{(n+1)!}$ * **پ)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log(\frac{n}{n+2})$

حل: الف) جمله‌ی عمومی سری را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{4}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+5)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{2n+5}}_{a_{n+3}}) = \frac{2}{3}(a_1 + a_2 + a_3 - 3\lim_{n\to\infty} a_n)$$

$$= \frac{2}{3}(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}) = \frac{2}{3}(\frac{15+5+3}{15}) = \frac{46}{45}$$

ب) جمله‌ی عمومی سری را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(n^2+n-4)}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2^{n-1}(n^2+n)}{(n+1)!} - \frac{2^{n-1}\times 4}{(n+1)!}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}}_{a_n} - \underbrace{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}_{a_{n+2}}) = 1 + 2 - 2\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 3$$

یادآوری: سرعت رشد $(n-1)!$ از 2^{n-1} بیش‌تر است و بنابراین مقدار حد آخر برابر صفر می‌شود.

پ) جمله‌ی عمومی سری را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\frac{n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\log n - \log(n+2)) = \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{(-1)^n \log n}_{a_n} - \underbrace{(-1)^{n+2}\log(n+2)}_{a_{n+2}})$$

در این‌جا از نکته‌ی ذکر شده نمی‌توانیم استفاده کنیم، زیرا $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \log n = \infty$. اما می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم، ابتدا مجموع جزئی را تشکیل دهید:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_{k+2}) = a_1 - a_{n+1} + a_2 - a_{n+2} = a_1 + a_2 - (a_{n+1} + a_{n+2})$$

بنابراین:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+2}) = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 - \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2})$$

$$\Rightarrow S = -\log 1 + \log 2 - \lim_{n\to\infty}((-1)^{n+1}\log(n+1) + (-1)^{n+2}\log(n+2)) = \log 2 - \underbrace{\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\log(\frac{n+1}{n+2})}_{0} = \log 2$$

دقت کنید که $\lim_{n\to\infty}\log(\frac{n+1}{n+2}) = 0$ و $(-1)^{n+1}$ یک دنباله‌ی کران‌دار است.

تست (۱۰): سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}$ **به چه عددی همگرا است؟**

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) ۱-

حل: بعد از تجزیه‌ی مخرج کسر جمله‌ی عمومی، سعی می‌کنیم در صورت عوامل آن‌را ایجاد کنیم تا کسر تفکیک شود:

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4n}{4n^2-1} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1+2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1})$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{2n-1} + \frac{(-1)^n}{2n+1}) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{(-1)^n}{2n-1}}_{a_n} - \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}_{a_{n+1}}) = \frac{1}{4}(\frac{-1}{1} - \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}) = -\frac{1}{4}$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۲ است.

تست (۱۱): حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{12}$

حل: روش حل این گونه سری‌ها به شرح زیر است. ابتدا مخرج را به ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم و عوامل را ازکم به زیاد مرتب می‌کنیم، سپس اختلاف کم‌ترین و بیش‌ترین عامل را پیدا می‌کنیم و آن‌را در سیگما ضرب و تقسیم می‌کنیم و به کمک قاعده‌ی تلسکوپی حاصل را مانند مثال‌های قبل به دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}}_{a_{n+1}}\Big)=\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1\times 3}\Big)=\frac{1}{12}$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۴ است.

بحثی کوتاه درباره‌ی انواع دیگر سری:

همواره نمی‌توانیم سری‌ها را به هندسی یا تلسکوپی تبدیل کنیم تا همگرایی یا واگرایی آن‌ها مشخص شود. درباره‌ی همگرایی و واگرایی سری‌ها قضیه‌های متفاوتی در ریاضیات عالی اثبات شده است، که در این بخش تنها به «آزمون مقایسه» اشاره می‌کنیم که در کتاب درسی نیز مطرح شده است.

قضیه (آزمون مقایسه): برای دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$، اگر برای هر $n\in N$ داشته باشیم: $a_n>0$، $b_n>0$ و $a_n\le b_n$، آن‌گاه:

۱- اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نیز واگرا است.

۲- اگر $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگرا است.

در حالت اول $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود و چون $a_n<b_n$، همین امر برای $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نیز اتفاق می‌افتد. به همین ترتیب حالت دوم را می توانیم توجیه کنیم.

➢ **تذکر:** البته لازم نیست شرط $a_n\le b_n$ برای هر n برقرار باشد، کافی است نشان دهیم: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

مثال: در مسأله‌های ابتدای بخش نشان داده‌ایم که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$، پس چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ واگرا است (زیرا $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\neq 0$)، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ نیز واگرا است. در واقع نکته‌ی زیر قابل بیان است:

نکته: **سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یک سری واگرا است.**

مسأله‌ی (۱۳): **نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ واگرا است.**

حل: برای استفاده از آزمون مقایسه، نشان می‌دهیم جمله‌ی عمومی سری اول از جمله‌ی عمومی یک سری همگرا کوچک‌تر است.

$$\forall n\ge 2:\ n^2>n(n-1)\Rightarrow\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n(n-1)}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)$$

چون سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ همگرا است، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (یا معادلاً $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$) نیز طبق آزمون مقایسه همگرا می‌باشد.

برای نشان دادن واگرایی سری دوم از نامساوی $\sqrt{n}\le n$ داریم: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است، نتیجه می‌گیریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ نیز واگرا است.

حالت کلی مسأله‌ی قبل را در نکته‌ی زیر بیان کرده‌ایم:

نکته: **سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (که p - سری نامیده می‌شود) برای $p>1$ همگرا و برای $p\le 1$ واگرا است. به راحتی می‌توان نشان داد که همین شرط برای $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^p}$ برقرار است (a عددی ثابت).**

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ یک سری همگرا است $(p=\frac{3}{2})$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ یک سری واگرا می‌باشد $(p=\frac{1}{2})$.

تست (۱۲): در مورد سری‌های $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$، $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+1)+(\sqrt{n}+3)}$ و $S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)(n^2+3)}$ کدام درست است؟

۱) S_1 و S_3 همگرا و S_2 واگرا است. **۲) هر سه همگرا هستند.**

۳) S_1 همگرا و S_2 و S_3 واگرا هستند. **۴) S_1 و S_2 همگرا و S_3 واگرا است.**

حل: اولاً S_1 یک سری تلسکوپی است و همگرا می‌باشد. برای S_2 و S_3 داریم:

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+1)+(\sqrt{n}+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}+4}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6\sqrt{n}}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[\text{واگرا}]{\text{سری } -p,\,p=\frac{1}{2}}\text{واگرا } S_2$$

$$S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)(n^2+3)}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\xrightarrow[\text{همگرا}]{\text{سری } -p,\,p=4}\text{همگرا } S_3$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

➢ **تذکر:** برای بررسی همگرایی یا واگرایی یک سری می‌توانید از جملات هم‌ارز سری به جای جمله‌ی عمومی آن استفاده کنید. مثلاً در تست قبل به جای S_2 می‌توانیم واگرایی یا همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ را بررسی کنیم، یا به‌جای S_1، واگرایی یا همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را.

مسأله‌ی (۱۴): واگرایی یا همگرایی سری‌های $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{3n^2-1}$ و $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{5n^2\sqrt{n}-2}$ را تعیین کنید.

حل: طبق تذکر قبل به جای S_1 می‌توانیم واگرایی یا همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{3n^2}$ را بررسی کنیم. که چون $\frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است، S_1 نیز واگرا می‌باشد.

به همین ترتیب برای S_2، سری زیر را بررسی می‌کنیم: $S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{5n^2\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\xrightarrow[p>1]{\text{سری } -p,\,p=\frac{3}{2}}\text{همگرا } S_3 \Rightarrow \text{همگرا } S_2$

با استفاده از مسأله‌ی قبل نکته‌ی زیر قابل بیان است:

نکته: **در سری‌های کسری مانند $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^k+bn^{k-1}+\cdots}{a'n^m+b'n^{m-1}+\cdots}$، در صورتی سری همگرا است که $m-k>1$.**

مسأله‌ی (۱۵): a چه عددی باشد تا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2a-1)n+3}{(2n+1)^2}$ همگرا باشد؟

حل: چون درجه‌ی صورت باید بیش از یک درجه از درجه‌ی مخرج کم‌تر باشد، باید $2a-1=0$، پس $a=\frac{1}{2}$.

تست‌ها و مسائل جمع بندی سری

مسأله‌ی (۱۶): به فرض آن که $A=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، حاصل $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3-2n^2}$ را برحسب A به دست آورید.

حل:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2(n-2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-(n-2)}{n^2(n-2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n(n-2)}-\frac{1}{2}A$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n-2}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{n}}_{a_{n+2}})-\frac{1}{2}A=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2})-\frac{A}{2}=\frac{3}{8}-\frac{A}{2}$$

تست (۱۳): اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{6n-2}+\frac{b}{9n+6})$ همگرا به ۲ باشد، $2a-b$ چقدر است؟

۱) ٤ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲- ٤) ۱٦-

حل: سری را به‌صورت روبه‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{6n-2}+\frac{b}{9n+6})=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\frac{a}{2}}{3n-1}+\frac{\frac{b}{3}}{3n+2})$$

برای برقراری قاعده‌ی تلسکوپی باید $\frac{a}{2}=\frac{-b}{3}$ و با این شرط داریم:

$$\frac{a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2})=\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{a}{4}\Rightarrow\frac{a}{4}=2\Rightarrow a=8\Rightarrow b=-12\Rightarrow 2a-b=16+12=28$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۲ است.

➢ **تذکر:** دقت کنید که اگر شرط $\frac{a}{2}=\frac{-b}{3}$ برقرار نبود، می‌توانستید سری را به جمع یک سری تلسکوپی و یک سری واگرا تجزیه کنید، که در آن صورت سری اصلی نیز واگرا بود.

تست (۱۴): اگر $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ و $S_2=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}$، حاصل S_1-S_2 چقدر است؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ٤) **واگراست.**

حل: عبارت S_1-S_2 را می‌توانیم به‌صورت یک سری تلسکوپی بنویسیم:

$$S_1-S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{n+3}}_{a_{n+2}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{6}$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۱ است.

تست (۱۵): با فرض $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$، حاصل $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ برحسب e کدام است؟

۱) $2e-3$ ۲) $2e-1$ ۳) $2e-2$ ٤) $2e+1$

حل: جمله‌ی عمومی سری دوم را تفکیک می‌کنیم تا سری اول از داخل آن خارج شود:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=(e-1)+(e-2)=2e-3$$

پاسخ درست گزینه‌ی ۱ است.

➢ **تذکر:** حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ همواره عدد e است. این عدد e، همان عدد نپر است که در بخش دنباله‌ها دیدیم به صورت $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ نیز به دست می‌آید.

WWW.RIAZISARA.IR

WWW.RIAZISARA.IR

فصل ۲

سری

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $0 < x < 1$، آن‌گاه جواب معادله‌ی $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۲- سری $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n+1}$ به ازای چه مقدار a، به عدد ۲ همگرا است؟

۱) $\pm\sqrt{3} - 1$ ۲) $2 - \sqrt{3}$ ۳) $-(\sqrt{3} + 1)$ ۴) $\sqrt{3} - 1$

۳- مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k - 2^k}{10^k}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۴- حاصل $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{2^k \times 3^k}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۵- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (3^{1-2n} \times 2^{n-1})$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{21}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{7}$

۶- اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{3^{2k-1}}$ به عدد $\frac{3}{4}$ همگرا باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2n} \times 3^{2-n})$ ...

۱) همگراست به $\frac{2}{3}$ ۲) همگراست به $\frac{4}{3}$ ۳) همگراست به ۱ ۴) واگراست

۸- حاصل سری $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۹- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\log 2)^n$ به کدام عدد همگرا است؟

۱) $\log(\frac{2}{5})$ ۲) $\log_5 2$ ۳) $\log(\frac{5}{2})$ ۴) واگراست.

۱۰- اگر $|x|<1$ و $x \neq 0$، حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x^2+x}$ ۲) $\frac{-1}{x^2+x}$ ۳) $\frac{1}{x^2-x}$ ۴) $\frac{1}{x-x^2}$

۱۱- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3\sqrt{3}}, \ldots$ باشد و $\lim_{n\to+\infty} S_n = 3$، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}-3$ ۲) $3-\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}-1$ ۴) $3+\sqrt{3}$

۱۲- در یک سری هندسی، هر جمله با حد مجموع جملات پس از خود برابر است. قدر نسبت سری چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۳- حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{k-1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}+2$ ۲) $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ ۳) $3\sqrt{2}+1$ ۴) $3\frac{\sqrt{2}}{2}+2$

۱۴- مقدار سری $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k+4^k}{4^k+8^k}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۲

۱۵- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله باشد، $S_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$: $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{2^n}$، سری $\{S_n\}$ به چه مقداری همگراست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۶- حاصل $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}-\frac{1}{729}+\cdots$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{27}$ ۲) $\frac{12}{26}$ ۳) $\frac{11}{26}$ ۴) $\frac{11}{27}$

۱۷- سری $\frac{1}{3}+\frac{(2x-3)}{3^2}+\frac{(2x-3)^2}{3^3}+\cdots$ با چه شرطی همگرا است؟

۱) $\frac{3}{2}<x<2$ ۲) $x \in R$ ۳) $0<x<1$ ۴) $0<x<3$

۱۸- به ازای چه محدوده‌ای از x، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n \times x^{2n-1})$ همگرا است؟

۱) $|x|<\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $|x|<\sqrt{3}$ ۳) $|x|<3$ ۴) $|x|\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۹- به ازای چه مقادیری از x، سری $\sum_{n=0}^{\infty}(\tan x)^n$ همگراست؟

۱) $0<x<1$ ۲) $-1<x<\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}<x<3$ ۴) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$

۲۰- به ازای چه مقادیر r، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+\frac{1}{r^n})$ همگرا است؟

۱) $0<r<1$ ۲) $|r|<1$ ۳) $|r|>1$ ۴) هیچ‌مقدار

۲۱- در کدام حالت لزوماً سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{b^n+1}{a^n}$ همگرا است؟

۱) $|a|>1$ ۲) $|a|<1$ ۳) $1<|a|<|b|$ ۴) $|b|<1<|a|$

۲۲- شرط همگرایی سری $\sum_{n=۳}^{\infty}(\log_{۲}[x])^{n-۲}$ آن است که:

۱) $۰ < x < ۲$ ۲) $۰ \le x < ۳$ ۳) $۱ \le x < ۲$ ۴) $۰ < x \le ۲$

۲۳- عدد $۰/\overline{۱۲}$ را به صورت کدام سری می‌توان بیان کرد؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}(۰/۱۲)^{-n}$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱۲)^{-n}$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱۲}{۱۰^{۲n}}$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}(۰/۱۲)^{n}$

۲۴- اگر $a_n = ۱/\underbrace{۱۰...۱}_{n\ \text{بار}}$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱۰}{۹}$ ۳) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۴}{۱۳}$

۲۵- اگر کسر مولد $۰/۵\overline{ba}$ برابر $\frac{۵۲}{۹۹}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۶- کسر متعارفی مساوی عدد اعشاری $۱/\overline{۳۹}$ به صورت $\frac{p}{q}$ است که p و q دو عدد طبیعی نسبت به هم اول‌اند. مجموع ارقام q کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۷- اگر کسر $\frac{b}{۱۱}$ مولد عدد اعشاری $۰/\overline{۷a}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲۸- اگر $a_n = \begin{cases} ۳^{۱-n} & n\ \text{زوج} \\ \frac{۱}{۲^{n+۱}} & n\ \text{فرد} \end{cases}$، حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲۴}$

۲۹- حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{\cos(\frac{n\pi}{۲})}{۲}\right)^{n}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۰- سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(n!\frac{\pi}{۴})}{۲^{n}}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۲}}{۸}$ ۲) $\frac{۱+۲\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱+\sqrt{۲}}{۴}$

* ۳۱- حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos(n!\frac{\pi}{۳})}{۴^{n}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۸۴}$

* ۳۲- حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^{۲[\frac{n}{۲}]}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۲

۳۳- اوساط اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ را به هم وصل کرده، تا یک مثلث جدید در وسط مثلث اولیه به وجود آید. سپس در مثلث جدید این عمل را به دفعات تکرار می‌کنیم. حد مجموع مساحت‌های مثلث‌های به وجود آمده (شامل مثلث اولیه) چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۳٤- مربعی به ضلع a مفروض است. وسط‌های اضلاع مربع را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی پدید آید و این عمل را مرتباً تکرار می‌کنیم. حد مجموع محیط مربع‌ها (شامل مربع اولیه) کدام است؟

۱) $۲a(۱+\sqrt{۲})$ ۲) $۲a(۲+\sqrt{۲})$ ۳) $۴a(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۴a(۲+\sqrt{۲})$

۳۵- موجی بر روی نیم‌دایره‌ها بالای یک محور با قطر اولیه‌ی ۱ واحد حرکت می‌کند. هر بار که این موج به محور برخورد کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازه‌ی محیط این نیم‌دایره‌های متوالی، دنباله‌ای از اعداد حقیقی است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۱) ۲π ۲) ۳π ۳) $\frac{۳}{۲}\pi$ ۴) $\frac{۵}{۲}\pi$

۳٦- حاصل سری $\frac{۱}{۷\times۱۲}+\frac{۱}{۱۲\times۱۷}+\frac{۱}{۱۷\times۲۲}+\frac{۱}{۲۲\times۲۷}+\cdots$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱}{۴۰}$

۳۷- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول از دنباله‌ی اعداد $\frac{۱}{۱۲},\frac{۱}{۲۰},\frac{۱}{۳۰},\frac{۱}{۴۲},\cdots$ باشد، دنباله‌ی $\{S_n\}$ به کدام عدد همگرا است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۸- حاصل سری $\sum_{k=۴}^{\infty}\frac{۱}{(k-۲)(k-۳)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۹- مجموع $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۸}{n^۲+n}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱

٤۰- اگر $S_۲=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۲)(n+۳)}$ و $S_۱=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}$، آن‌گاه حاصل $S_۱-S_۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

٤۱- حاصل $\sum_{n=۱}^{۱۰۰}\log(\frac{n+۲}{n+۱})$ کدام است؟

۱) $\log ۳۴$ ۲) $\log ۴۱$ ۳) $\log ۵۱$ ۴) $\log ۶۱$

٤۲- چه تعداد از جملات دنباله‌ی $\{\log_۲(\frac{n+۲}{n+۱})\}$ را از ابتدا جمع کنیم، تا حاصل برابر ۵ شود؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۴ ۳) ۶۲ ۴) ۶۰

٤۳- سری $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{k+۱}+\sqrt{k}}$ ... .

۱) همگرا به صفر است. ۲) همگرا به ۱ است. ۳) همگرا به ۲ است. ۴) واگرا است.

٤٤- حاصل سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^۲+n}}$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۲}$ ۲) $۱-\sqrt{۲}$ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

MMM.BIAZISAURA.IR

۴۵- مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{4}$

۴۶- حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+4)}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۷- حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{25}{48}$ ۴) $\frac{27}{48}$

۴۸- اگر $S_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-1)(3k+5)}$ و $S_2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}$، مقدار $\frac{S_1}{S_2}$ کدام است؟

۱) $\frac{21}{40}$ ۲) $\frac{7}{20}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۴۹- اگر $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+3)})$ و $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{1}{n(n+2)})$، حاصل S_1-S_2 کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۵۰- حاصل سری $\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{k^2-k}-\frac{1}{k^2+k})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) واگرا است.

۵۱- حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\tan^{-1}(n-1)-\tan^{-1}(n+1))$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) $-\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۵۲- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2})$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{4}$

۵۳- حاصل سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2+n-2^n}{2^n(n^2+n)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{12}$

۵۴- حاصل سری $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2+k-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{18}$ ۲) $\frac{11}{6}$ ۳) $\frac{5}{18}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۵۵- حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(k+2)}{(k^2+3k)(k^2+5k+4)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۶- حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})}{\cos(\frac{1}{n})\cos(\frac{1}{n+1})}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\tan 1$ ۴) واگراست

۵۷- حاصل $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}(\frac{2k+1}{k(k+1)})$ کدام است؟

۱) واگراست. ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۵۸- سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}$ به کدام عدد همگرا است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۵۹- حاصل $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8k}{(4k^2-1)^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $\frac{9}{10}$ ۴) واگرا است.

۶۰- مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۶۱- حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty}\log(1-\frac{1}{n^2})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\log 2$ ۳) $-\log 2$ ۴) $\log(\frac{2}{3})$

۶۲- حاصل سری $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^3-k}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

* ۶۳- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}(\frac{1}{1+n+n^2})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

* ۶۴- سری $\sum_{k=2}^{\infty}(\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}+\sqrt{k-1})$ به چه عددی همگرا است؟

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{2}$ ۳) $1-\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{2}$

۶۵- حاصل سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{\binom{n}{3}}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۶- اگر $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی صعودی و بی‌کران باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ ... .

۱) به a_1 همگراست. ۲) واگراست. ۳) به a_n همگراست. ۴) به صفر همگراست.

۶۷- اگر $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی صعودی و بی‌کران باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$ ... .

۱) به $\frac{1}{a_1}$ همگراست. ۲) واگراست. ۳) به صفر همگراست. ۴) به یکهمگراست.

* ۶۸- اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا از اعداد حقیقی مثبت باشد، مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty}\log(\frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2})$ کدام است؟

۱) $\log(\frac{a_1}{a_1+a_2})$ ۲) $\log(\frac{a_1}{a_2})$ ۳) $\log(\frac{a_2}{a_1})$ ۴) $\log(1+\frac{a_1}{a_2})$

۶۹- اگر مجموع جزئی یک دنباله $S_n=\frac{n}{n+1}$ باشد، جمله‌ی عمومی دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{n+1}$ ۲) $\frac{n-1}{n}$ ۳) $\frac{1}{n(n+1)}$ ۴) $\frac{n-1}{n+1}$

۷۰- اگر $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}S_n$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۷۱- سری $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{8}{k^3})$ ... .

۱) به ۱ همگراست. ۲) به صفر همگراست. ۳) به ۵- همگراست. ۴) واگراست.

۷۲- اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$، حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n^2-1)^2}{3a_n^2+2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ∞

۷۳- سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2-4a_n+4}{a_n^2+1}$ و دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا هستند. حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_{n+2}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) $\frac{5}{4}$

۷۴- اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا باشد و تمام جملات آن در یک همسایگی صفر به شعاع ۴ قرار گیرند و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_nb_n\}$ چگونه است؟

۱) واگرا ۲) یکنوا ۳) همگرا به ۴ ۴) همگرا به صفر

۷۵- دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به عدد L است و سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا می‌باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $|L|<1$ ۲) $L\neq 0$ ۳) L هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. ۴) L وجود ندارد.

۷۶- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{10}{n}]$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷ ۴) ۲۹

۷۷- حاصل $\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{k-5}{k+2}]$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) صفر ۳) ۲- ۴) واگراست.

WWW.BIAZISARI.IR

۷۸- حاصل سری $\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\frac{۳}{۴!}+\cdots$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) واگرا است.

۷۹- اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = ۲$، حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n+۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲+a_۱$ ۳) $۲-a_۱$ ۴) واگرا است.

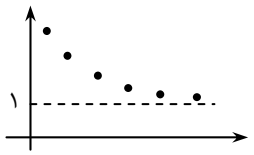
۸۰- اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به عدد L همگرا باشد $(a_n \neq ۰)$، آن‌گاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{k}{a_n}$ ... .

۱) به عدد k همگرا است. ۲) به عدد $\frac{k}{L}$ همگرا است. ۳) به عدد صفر همگرا است. ۴) واگرا است.

۸۱- حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n+۱}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) بزرگ‌تر از یک ۲) کوچک‌تر از یک ۳) بین یک و دو ۴) واگرا است.

۸۲- اگر نمودار دنباله‌ی $\{a_n\}$ مانند شکل مقابل باشد، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ چگونه است؟



۱) نزولی و واگرا ۲) نزولی و همگرا
۳) صعودی و همگرا ۴) صعودی و واگرا

۸۳- سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+۲}{۳+n^a}$ به ازای کدام مقدار a همگرا است؟

۱) $a>۱$ ۲) $a>۲$ ۳) $۰<a<۱$ ۴) $a \geq ۳$

۸۴- به ازای چه مقدار a سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (۱-\frac{an+۱}{n+۲})$ همگرا است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) هیچ‌مقدار

۸۵- اگر a و b اعداد طبیعی باشند و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{(۲a^۲+۳a-۵)n+۱}{(n+۱)^۲}+\frac{(b-۲)^n}{۲^n})$ همگرا باشد، $a-b$ کدام مقدار نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۲-

۸۶- تحت کدام شرایط سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (x^n - x^{n-۱})$ همگرا است؟ $(x \neq ۰)$

۱) $|x|<۱$ ۲) $|x|>۱$ ۳) $|x|<۱$ یا $x=۱$ ۴) $|x| \leq ۱$

۸۷- سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{n^۲+۱}$ ... .

۱) همگرا به ۱ است. ۲) همگرا به صفر است. ۳) همگرا به $\frac{۱}{۴}$ است. ۴) واگرا است.

۸۸- اگر $a_n = \frac{۱-n^۲}{n^۲}+(-۱)^n \cos(n\pi)$، دنباله‌ی $\{a_n\}$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ چگونه‌اند؟

۱) همگرا - همگرا ۲) همگرا - واگرا ۳) واگرا - همگرا ۴) واگرا - واگرا

۸۹- کدام یک از سری‌های زیر همگرا است؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} (۱+(-۱)^n)$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \cos(\frac{۱}{n})$ ۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \cos(n\pi)$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^n$

۹۰- کدام یک از سری‌های زیر همگرا است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3n}-\frac{1}{4n})$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n})$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

۹۱- کدام سری همگرا است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{5^n+n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{10n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n}$ ۴) هیچ‌کدام

۹۲- سری‌های $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ چگونه‌اند؟

۱) همگرا – همگرا ۲) همگرا – واگرا ۳) واگرا – همگرا ۴) واگرا – واگرا

۹۳- کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ هم واگراست.

۲) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ هم همگراست.

۳) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ همگراست.

۴) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ واگراست.

۹۴- سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\sin n}{n\sqrt{n}}$ کدام خاصیت زیر را دارد؟

۱) برای هر $k\in R$ همگرا است.

۲) برای هر $k\in R$ واگرا است.

۳) فقط برای $k<1$ همگرا است.

۴) فقط برای $|k|<1$ همگرا است.

۹۵- اگر $\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)=k$، مقدار $\sum_{n=1}^{10}(n^2+1)$ بر حسب k کدام است؟

۱) $k+45$ ۲) k ۳) $k+10$ ۴) $k-45$

۹۶- اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$، آن‌گاه حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳

* ۹۷- اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=A$، حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ بر حسب A کدام است؟

۱) $A-1$ ۲) $A+1$ ۳) $-2A-1$ ۴) $1-2A$

* ۹۸- اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=A$، آن‌گاه حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ کدام است؟

۱) A ۲) $\frac{3}{4}A$ ۳) $\frac{4}{3}A$ ۴) $\frac{A}{2}$

۹۹- مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k}-2^{2k}}{(12)^k}$ کدام است؟ **(سراسری - ۸۵)**

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

۱۰۰- اگر $S_1=2$ و $S_n=S_{n-1}+(\frac{2}{3})^{n-1}$، $(n>1)$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}S_n$ کدام است؟ **(سراسری - ۸۶)**

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۱۰۱- اگر $a_n=\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}$ و $b_n=\frac{(-1)^n}{2n-1}$، حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ کدام است؟ **(سراسری - ۸۸)**

۱) صفر ۲) $\frac{1}{37}$ ۳) $\frac{1}{21}$ ۴) $\frac{2}{21}$

۱۰۲- اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=a$ ، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ کدام است؟ (سراسری - ۸۹)

۱) $\frac{-a+1}{2}$ ۲) $\frac{a-1}{2}$ ۳) $-\frac{a}{2}$ ۴) $\frac{a}{2}$

۱۰۳- مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8^k-5^{k+1}}{10^k}$ کدام است؟ (سراسری- ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۰۴- اگر $\sum_{k=2}^{100}\log(1-\frac{1}{k^2})=\log A$ ، عدد A کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۵)

۱) ۰/۵۰۲۵ ۲) ۰/۵۰۵ ۳) ۰/۵۱۲۵ ۴) ۰/۵۲۵

۱۰۵- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول از سری $\sum_{k=1}^{\infty}\log(\frac{k^2+3k}{k^2+3k+2})$ باشد، S_{99} برابر لگاریتم کدام عدد است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۶)

۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۳۳ ۳) ۰/۳۴ ۴) ۰/۳۵

۱۰۶- مجموع ۲۴ جمله‌ی اول از سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ برابر کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۷)

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹

۱۰۷- اگر $a_n=\frac{1-2+3-4+...-2n}{2n+\sqrt{n^2+1}}$ ، سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ چگونه است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۸)

۱) همگرا به $-\frac{1}{4}$ ۲) همگرا به $-\frac{1}{3}$ ۳) همگرا به $\frac{1}{4}$ ۴) واگرا

۱۰۸- مجموع جملات سری به صورت $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+...$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۹)

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۰۹- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\log(\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4})$ کدام است؟ (آزاد - ۸۵)

۱) $\log 8$ ۲) $-1+\log(\frac{2}{3})$ ۳) واگرا ۴) $\log(\frac{2}{3})$

۱۱۰- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{(4n+1)(4n+5)}-\frac{1}{3^n})$ چقدر است؟ (آزاد - ۸۵)

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $-\frac{2}{5}$

* ۱۱۱- دنباله‌ی $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ کدام است؟ (آزاد - ۸۶)

۱) هر دو همگرا هستند.
۲) هر دو واگرا هستند.
۳) دنباله همگرا و سری واگرا است.
۴) دنباله واگرا و سری همگرا است.

۱۱۲- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos(\frac{n\pi}{2})(-\frac{1}{2})^n)$ کدام است؟ (آزاد - ۸۶)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۱۳- اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{a^n}$ همگرا باشد، کدام سری قطعاً همگرا است؟ (آزاد - ۸۶)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{n^a}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^{100}}{a^n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{a^n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{2^n+n^{100}}$

۱۱۴- حاصل $S=\frac{1}{3\times7}+\frac{1}{5\times9}+\frac{1}{7\times11}+\cdots$ کدام است؟ (آزاد - ۸۸)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{30}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{2}{15}$

۱۱۵- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n+5}{n+2}](\frac{2}{3})^n$ کدام است؟ (آزاد - ۸۸)

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

۱۱۶- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}+6^n}{10^n+15^n}$ کدام است؟ (آزاد - ۸۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) ۲

۱۱۷- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{(3n+1)(3n+7)}{(3n+4)^2}$ کدام است؟ (آزاد - ۸۸)

۱) $\log 4$ ۲) $\log 28$ ۳) $\log\frac{4}{7}$ ۴) $\log 40$

۱۱۸- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{(n+1)^2}-\frac{5}{(n+2)^2})$ کدام است؟ (آزاد- ۸۹)

۱) $\frac{11}{4}$ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۲

۱۱۹- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{3})^n$ کدام است؟ (آزاد- ۸۹)

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{10}$

۱۲۰- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^{n+2}}{6^n+6^{n+1}}$ کدام است؟ (آزاد- ۹۰)

۱) $-\frac{1}{7}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{3}{7}$ ۴) $-\frac{2}{7}$

۱۲۱- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n(n+2)(n+4)}-\frac{1}{n(n+2)})$ کدام است؟ (آزاد- ۹۰)

۱) $-\frac{7}{24}$ ۲) $-\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{7}{12}$

WWW.RIAZISARA.IR

WWW.RIAZISARA.IR

سری

فصل ۲

پاسخ‌های تشریحی

A **۱- گزینه‌ی (۲)** عبارت سمت چپ معادله یک سری هندسی است:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\Rightarrow\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{معادله}}x=1-x\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

A **۲- گزینه‌ی (۴)** برای همگرایی سری باید $|a|<1$. با این فرض داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^{n+1}=a\sum_{n=1}^{\infty}a^n=a\times\frac{a}{1-a}\Rightarrow\frac{a^2}{1-a}=2\Rightarrow a^2+2a-2=0\Rightarrow a=-1\pm\sqrt{3}\xrightarrow{|a|<1}a=\sqrt{3}-1$$

A **۳- گزینه‌ی (۳)** سری را به تفاضل دو سری هندسی تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k-2^k}{10^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5}{10})^k-\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{10})^k=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{5}{10}}-\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{2}{10}}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

B **۴- گزینه‌ی (۱)** با توجه به $\cos k\pi=(-1)^k$، سری به یک سری هندسی تبدیل می‌شود:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{2^k\times3^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k\times3^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{6})^k=\frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}}=-\frac{1}{7}$$

B **۵- گزینه‌ی (۱)** با یک سری هندسی مواجه‌ایم که باید آن‌را به صورتی استاندارد بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{1-2n}\times2^{n-1}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{2n}}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{9})^n=\frac{3}{2}\times\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{3}{7}$$

B **۶- گزینه‌ی (۳)** با یک سری هندسی مواجه‌ایم که باید آن‌را به صورتی استاندارد بنویسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{3^{2k-1}}=\frac{a}{3^{-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}=3a\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{9})^k=3a\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3a}{8}\Rightarrow\frac{3a}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow a=2$$

B **۷- گزینه‌ی (۴)** با یک سری هندسی مواجه‌ایم که باید آن‌را به صورتی استاندارد بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^{2n}\times3^{2-n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n}\times3^2=9\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{3})^n\xrightarrow{\frac{4}{3}>1}$$ سری واگراست.

B **۸- گزینه‌ی (۳)** با یک سری هندسی مواجه‌ایم که باید آن‌را به صورتی استاندارد بنویسیم:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{2}{3})^k=\frac{1}{2}\times\frac{(\frac{2}{3})^2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

B **۹- گزینه‌ی (۲)** چون $0<\log2<1$، سری همگرا است و داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\log2)^n=\frac{\log2}{1-\log2}=\frac{\log2}{\log10-\log2}=\frac{\log2}{\log(\frac{10}{2})}=\frac{\log2}{\log5}=\log_5 2$$

B **۱۰- گزینه‌ی (۲)** با یک سری هندسی مواجه‌ایم که باید آن‌را به صورتی استاندارد بنویسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\times(-x^{-1})=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=-\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+x}=\frac{-1}{x^2+x}$$

A **۱۱- گزینه‌ی (۱)** قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است، پس:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{a}{\sqrt{3}-1}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{3}-1}=3\Rightarrow a=3(\sqrt{3}-1)=3\sqrt{3}-3$$

B **۱۲- گزینه‌ی (۱)** اگر یک جمله‌ی سری a باشد، جملات بعد آن عبارت‌اند از aq، aq^2 و ... ، بنابراین:

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}aq^n\Rightarrow a=a\sum_{n=1}^{\infty}q^n=a\frac{q}{1-q}\xrightarrow{a\neq 0}\frac{q}{1-q}=1\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

B **۱۳- گزینه‌ی (۴)** جمله‌ی عمومی سری را ساده‌تر می‌کنیم تا با یک سری هندسی استاندارد روبه‌رو باشیم:

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{k-1}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{k-2}=1\times(\sqrt{2}-1)^{k-2}$$

$$\Rightarrow S=\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{2}-1)^{k-2}=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\times\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{2}-1)^k=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\times\frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1}=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})}=\frac{1}{3\sqrt{2}-4}=3\frac{\sqrt{2}}{2}+2$$

B **۱۴- گزینه‌ی (۲)** با فاکتورگیری از عامل‌های 2^k و 4^k در صورت و مخرج هر کسر، به یک سری هندسی می‌رسیم:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k+4^k}{4^k+8^k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k(1+2^k)}{4^k(1+2^k)}=\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{2}{4})^k=\frac{\frac{4}{16}}{1-\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}$$

C **۱۵- گزینه‌ی (۴)** با نوشتن چند جمله‌ی ابتدایی $\{S_n\}$ فرم کلی آن را به‌دست می‌آوریم:

$$S_1=1$$

$$S_2=S_1+\frac{1}{2^2}=1+\frac{1}{2^2}$$

$$S_3=S_2+\frac{1}{2^3}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\Rightarrow S_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

C **۱۶- گزینه‌ی (۳)** با نوشتن هر جمله‌ی منفی مانند $-\frac{1}{27}$ به‌صورت $\frac{1}{27}-\frac{2}{27}$، می‌توانیم سری را به‌صورت تفاضل دو سری هندسی بنویسیم:

$$S=(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots)-(\frac{2}{27}+\frac{2}{729}+\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{27^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-2\times\frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{27}}=\frac{1}{2}-\frac{2}{26}=\frac{11}{26}$$

A **۱۷- گزینه‌ی (۴)** قدر نسبت دنباله‌ی هندسی برابر است با $\frac{2x-3}{3}$، بنابراین شرط همگرایی عبارت است از:

$$|\frac{2x-3}{3}|<1\Rightarrow|2x-3|<3\Rightarrow-3<2x-3<3\Rightarrow 0<2x<6\Rightarrow 0<x<3$$

B **۱۸- گزینه‌ی (۱)** با توجه به آن‌که سری را می‌توانیم به صورت $x^{-1}\times\sum_{n=1}^{\infty}(3x^2)^n$ بنویسیم (برای $x\neq 0$)، برای همگرایی باید داشته باشیم:

$$|3x^2|<1\Rightarrow 3x^2<1\Rightarrow x^2<\frac{1}{3}\Rightarrow|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow|x|<\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad x\neq 0$$

برای $x=0$ نیز به وضوح سری همگراست (همه‌ی جملات آن صفر می‌شود)، پس گزینه‌ی (۱) محدوده‌ی موردنظر را مشخص می‌کند.

B **۱۹- گزینه‌ی (۳)** باید $|\tan x|<1$، پس باید $-1<\tan x<1$. با توجه به دایره‌ی مثلثاتی یا نمودار $y=\tan x$، این شرط برای $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ (در محدوده‌ی $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{3\pi}{2}$) رخ می‌دهد (و در حالت کلی باید به دو سر محدوده‌ها $2k\pi$ اضافه شود). چون $\pi>3$، گزینه‌ی ۳ محدوده‌ی مناسبی را مشخص می‌کند.

A **۲۰- گزینه‌ی (۴)** سری $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ به ازای $|r|<1$ همگرا است و سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{r})^n$ به ازای $|\frac{1}{r}|<1$ (یا معادلاً $|r|>1$). بنابراین سری اصلی که از جمع این دو سری تشکیل شده، هیچ‌گاه همگرا نیست.

B **۲۱- گزینه‌ی (۴)** سری موردنظر را می‌توانیم به‌صورت جمع دو سری بنویسیم:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{b^n+1}{a^n}=\sum_{n=3}^{\infty}(\frac{b}{a})^n+\sum_{n=3}^{\infty}(\frac{1}{a})^n$$

برای آن‌که هر دو سری همگرا باشد، باید $|\frac{1}{a}|<1$ و $|\frac{b}{a}|<1$. پس: $|a|>1$ و $|b|<|a|$، که در گزینه‌ی (۴) این دو شرط برقرار است.

B **۲۲- گزینه‌ی (۳)** با یک سری هندسی مواجه‌ایم که برای همگرا بودن آن باید $-1<q<1$:

$$-1<\log_2[x]<1\Rightarrow \log_2(\frac{1}{2})<\log_2[x]<\log_2 2\Rightarrow \frac{1}{2}<[x]<2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow 1\le x<2$$

B **۲۳- گزینه‌ی(۳)** عدد موردنظر را به این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$0/\overline{12}=0/12+0/0012+0/000012+\cdots=\frac{12}{100}+\frac{12}{(100)^2}+\frac{12}{(100)^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{10^{2n}}$$

A **۲۴- گزینه‌ی(۲)** از فرض نتیجه می‌گیریم $\lim_{n\to\infty}a_n=1/\overline{6}$، که طبق نکات درس: $1/\overline{6}=\frac{11-1}{9}=\frac{10}{9}$.

B **۲۵- گزینه‌ی(۱)** طبق نکات بخش آموزش داریم:

$$0/5\overline{ba}=\frac{\overline{5ba}-5}{990}\Rightarrow\frac{\overline{5ba}-5}{990}=\frac{52}{99}\Rightarrow\overline{5ba}-5=520\Rightarrow\overline{5ba}=525\Rightarrow a=5\ ,\ b=2\Rightarrow a+b=7$$

A **۲۶- گزینه‌ی(۳)** طبق نکات بخش آموزش داریم: $1/\overline{39}=\frac{139-1}{99}=\frac{46}{33}$. پس $p=46$ و $q=33$.

B **۲۷- گزینه‌ی(۳)** طبق نکات بخش آموزش داریم:

$$0/\overline{7a}=\frac{\overline{7a}-0}{99}\Rightarrow\frac{\overline{7a}}{99}=\frac{b}{11}\Rightarrow\overline{7a}=9b$$

پس عدد دورقمی $\overline{7a}$، مضرب ۹ است، بنابراین $\overline{7a}=72$ و داریم: $a=2$ و $b=8$.

C **۲۸- گزینه‌ی(۳)** هر سری را می‌توانیم به‌صورت جمع دو سری (شامل جملات زوج و جملات فرد سری اول) بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}3^{1-2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k-1+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{9^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}$$

$$=3\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{8}+\frac{1}{3}=\frac{9+8}{24}=\frac{17}{24}$$

C **۲۹- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم: $\cos(\frac{n\pi}{2})=0$ (برای nهای فرد) و $\cos(\frac{n\pi}{2})=\pm1$ (برای nهای زوج). بنابراین جملات با n فرد در سری حذف می‌شوند و در جملات با n زوج، چون با توانی زوج سروکار داریم، مهم نیست $\cos(\frac{n\pi}{2})=1$ یا $\cos(\frac{n\pi}{2})=-1$. در هر حال می‌توانیم به جای آن ۱ قرار دهیم. بنابراین:

$$n=2k\to S=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^k=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

C **۳۰- گزینه‌ی(۲)** چون برای هر عدد صحیح k، داریم: $\sin(k\pi)=0$، بنابراین از جمله‌ی چهارم به بعد همه‌ی جملات مجموع برابر صفر می‌شوند، زیرا $n!$ مضرب ۴ می‌شود (برای $n\ge4$)، و $k=\frac{n!}{4}$ یک عدد صحیح خواهد شد. درنتیجه:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!\frac{\pi}{4})}{2^n}=\sum_{n=1}^{3}\frac{\sin(n!\frac{\pi}{4})}{2^n}=\frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{2}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{4}+\frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1+2\sqrt{2}}{8}$$

D **۳۱- گزینه‌ی (۲)** از جمله‌ی سوم مجموع به بعد (برای $n \geq ۳$)، عدد $n!$ مضرب ۶ می‌شود، بنابراین $\cos(n!\frac{\pi}{۳})$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\cos(۶k \times \frac{\pi}{۳}) = \cos(۲k\pi) = ۱$$

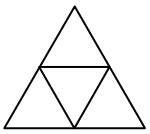
بنابراین سری از جمله‌ی سوم به بعد، به یک سری هندسی تبدیل می‌شود:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos(n!\frac{\pi}{۳})}{۴^n} = \sum_{n=۱}^{۲} \frac{\cos(n!\frac{\pi}{۳})}{۴^n} + \sum_{n=۳}^{\infty} \frac{\cos(n!\frac{\pi}{۳})}{۴^n} = \frac{\cos(\frac{\pi}{۳})}{۴} + \frac{\cos(\frac{۲\pi}{۳})}{۱۶} + \sum_{n=۳}^{\infty} (\frac{۱}{۴})^n = \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۳۲} + \frac{(\frac{۱}{۴})^۳}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۳}{۳۲} + \frac{۱}{۴۸} = \frac{۱۱}{۹۶}$$

D **۳۲- گزینه‌ی(۱)** با توجه به وجود $[\frac{n}{۲}]$، باید سری را به دو سری برای nهای زوج و nهای فرد تفکیک کنیم:

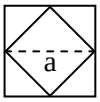
$$\left.\begin{array}{l} n = ۲k \Rightarrow ۲^{۲[\frac{n}{۲}]} = ۲^{۲k} \\ n = ۲k-۱ \Rightarrow ۲^{۲[\frac{n}{۲}]} = ۲^{۲[\frac{۲k-۱}{۲}]} = ۲^{۲(k-۱)} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^{۲[\frac{n}{۲}]}} = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^{۲k}} + \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^{۲(k-۱)}} = \frac{\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}} + \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳} = \frac{۵}{۳}$$

B **۳۳- گزینه‌ی (۴)** وقتی وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنیم، مثلث جدید با نسبت $\frac{۱}{۲}$ با مثلث قبلی متشابه است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها (یا همان قدر نسبت دنباله) برابر $(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$ می‌شود. بنابراین:



مساحت اولین مثلث: $a_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۲^۲ = \sqrt{۳}$, $q = \frac{۱}{۴} \Rightarrow$ حد مجموع $S = \frac{a_۱}{۱-q} = \frac{\sqrt{۳}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

C **۳۴- گزینه‌ی (۴)** چون قطر مربع جدید همان a است، و قطر مربع اولیه $a\sqrt{۲}$، نسبت تشابه دو مربع $\frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است.



بنابراین نسبت محیط‌ها (یا همان قدر نسبت دنباله‌ی هندسی) نیز $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ می‌باشد. داریم:

$$q = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ , \ a_۱ = ۴a \quad (\text{محیط اولین مربع}) \Rightarrow S = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \frac{a_۱}{۱-q} = \frac{۴a}{۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \frac{۴a\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱} = ۴a\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱) = ۴a(۲+\sqrt{۲})$$

C **۳۵- گزینه‌ی (۴)** در هر مرحله چون ۲۰ درصد از قطر (و به تبع آن شعاع) کاسته می‌شود، داریم: $r_{n+۱} = r_n - \frac{۲۰}{۱۰۰} r_n = \frac{۴}{۵} r_n$

$$S = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲}(۲\pi r_n) = \pi \sum_{n=۱}^{\infty} r_n = \pi(\frac{۱}{۲} + \frac{۴}{۵} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۱}{۲} + \cdots) = \pi \times \frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۴}{۵}} = \frac{۵}{۲}\pi$$

A **۳۶- گزینه‌ی (۲)** هر جمله‌ی سری را می‌توانیم به‌صورت تفاضل دو کسر بنویسیم:

$$S = \frac{۱}{۵}(\frac{۱۲-۷}{۷\times۱۲} + \frac{۱۷-۱۲}{۱۲\times۱۷} + \frac{۲۲-۱۷}{۱۷\times۲۲} + \cdots) = \frac{۱}{۵}(\frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۷} + \frac{۱}{۱۷} - \frac{۱}{۲۲} + \cdots) = \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۳۵}$$

A **۳۷- گزینه‌ی (۳)** هر جمله‌ی سری را می‌توانیم به‌صورت تفاضل دو کسر بنویسیم:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۳۰} + \cdots = \frac{۱}{۳\times۴} + \frac{۱}{۴\times۵} + \frac{۱}{۵\times۶} + \cdots = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \cdots = \frac{۱}{۳}$$

A **۳۸- گزینه‌ی (۳)** هر جمله‌ی سری را می‌توانیم به‌صورت تفاضل دو کسر بنویسیم:

$$S = \sum_{k=۴}^{\infty} \frac{۱}{(k-۲)(k-۳)} = \sum_{k=۴}^{\infty} (\underbrace{\frac{۱}{k-۳}}_{a_k} - \underbrace{\frac{۱}{k-۲}}_{a_{k+۱}}) = a_۴ - \lim_{n\to\infty} a_n = ۱ - ۰ = ۱$$

A **۳۹- گزینه‌ی (۲)** با بیرون کشیدن عدد ۸ از داخل مجموع، می‌توانیم هر جمله را به‌صورت تفاضل دو کسر بنویسیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۸}{n^۲+n} = ۸\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} = ۸\sum_{n=۲}^{\infty} (\underbrace{\frac{۱}{n}}_{a_n} - \underbrace{\frac{۱}{n+۱}}_{a_{n+۱}}) = ۸(a_۲ - \lim_{n\to\infty} a_n) = ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۴$$

B **۴۰- گزینه‌ی(۱)** **راه اول:** حاصل S_1 و S_2 را با استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{a_{n+1}}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \\ S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{n+3}}_{a_{n+1}}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 - S_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

راه دوم: با نوشتن دو مجموع متوجه می‌شویم که جملات یکسانی در هر دو وجود دارند که در تفاضل ساده می‌شوند.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2\times 3} + \cancel{\frac{1}{3\times 4}} + \cancel{\frac{1}{4\times 5}} + \cdots \\ S_2 &= \cancel{\frac{1}{3\times 4}} + \cancel{\frac{1}{4\times 5}} + \cancel{\frac{1}{5\times 6}} + \cdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 - S_2 = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$$

B **۴۱- گزینه‌ی (۳)** با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو لگاریتم می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{100}\log(\frac{n+2}{n+1}) = \sum_{n=1}^{100}(\underbrace{\log(n+2)}_{a_{n+1}} - \underbrace{\log(n+1)}_{a_n}) = a_{101} - a_1 = \log 102 - \log 2 = \log(\frac{102}{2}) = \log 51$$

B **۴۲- گزینه‌ی(۳)** فرض کنیم مجموع جملات اول تا nاُم دنباله برابر ۵ باشد، در این صورت داریم:

$$5 = \sum_{k=1}^{n}\log_2(\frac{k+2}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\log_2(k+2)}_{a_{k+1}} - \underbrace{\log_2(k+1)}_{a_k} = a_{n+1} - a_1 = \log_2(n+2) - \log_2 2 = \log_2(\frac{n+2}{2})$$

$$\Rightarrow \log_2(\frac{n+2}{2}) = 5 \Rightarrow \frac{n+2}{2} = 2^5 = 32 \Rightarrow n+2 = 64 \Rightarrow n = 62$$

A **۴۳- گزینه‌ی (۴)** با گویا کردن مخرج، هر جمله‌ی مجموع را می‌توانیم به‌صورت تفاضل دو کسر بنویسیم:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \Rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\sqrt{k+1}}_{a_{k+1}} - \underbrace{\sqrt{k}}_{a_k}) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1 = \infty \to \text{سری واگرا}$$

A **۴۴- گزینه‌ی (۴)** هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{a_{n+1}} \Rightarrow S = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_2 - \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

B **۴۵- گزینه‌ی (۳)** هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{k^2}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}}_{a_{k+1}}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0 = 1$$

B **۴۶- گزینه‌ی (۱)** با ایجاد عوامل مخرج در صورت کسر، هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+4)} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+4)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+4)} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{3n-2}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{3n+4}}_{a_{n+2}})$$

$$= \frac{1}{6}(a_0 + a_1 - 2\lim_{n\to\infty} a_n) = \frac{1}{6}(-\frac{1}{2}+1-0) = \frac{1}{12}$$

B **۴۷- گزینه‌ی (۳)** با ایجاد عوامل مخرج در صورت کسر، هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)-n}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{n+4}}_{a_{n+4}})$$

$$= \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 4\lim_{n\to\infty} a_n) = \frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0) = \frac{25}{48}$$

WWW.RIAZISARA.IR

B **۴۸- گزینه‌ی (۲)** در هر سری، تفاضل عوامل مخرج کسرها را در صورت کسرها ایجاد می‌کنیم تا هر جمله به تفاضل دو کسر تبدیل شود:

$$S_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-1)(3k+5)}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3k+5)-(3k-1)}{(3k-1)(3k+5)}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{3k-1}}_{a_k}-\underbrace{\frac{1}{3k+5}}_{a_{k+2}})$$

$$=\frac{1}{6}(a_1+a_2-2\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{1}{6}(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-0)=\frac{7}{60}$$

$$S_2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+3)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{2k-1}}_{a_k}-\underbrace{\frac{1}{2k+3}}_{a_{k+2}})$$

$$=\frac{1}{4}(a_1+a_2-2\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{3}-0)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{7}{20}$$

B **۴۹- گزینه‌ی (۳)** ابتدا جملات هر مجموع را می‌نویسیم:

$$S_1=(\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots)+(\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots)$$

$$S_2=(\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots)+(\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots)$$

در تفاضل S_1-S_2 جملات مشترک حذف می‌شوند و به‌دست می‌آوریم: $S_1-S_2=\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{1\times3}=-\frac{1}{6}$

B **۵۰- گزینه‌ی(۲)** اگر قرار دهیم $a_k=\frac{1}{k^2-k}$، آن‌گاه $a_{k+1}=\frac{1}{(k+1)^2-(k+1)}=\frac{1}{k^2+k}$، بنابراین:

$$S=\sum_{k=2}^{\infty}(a_k-a_{k+1})=a_2-\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4-2}-0=\frac{1}{2}$$

B **۵۱- گزینه‌ی (۳)** اگر قرار دهیم $a_n=\tan^{-1}(n-1)$، سری به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\tan^{-1}(n-1)}_{a_n}-\underbrace{\tan^{-1}(n+1)}_{a_{n+2}})=a_1+a_2-2\lim_{n\to\infty}a_n=\tan^{-1}0+\tan^{-1}1-2\times\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$$

B **۵۲- گزینه‌ی(۴)** سری را به مجموع دو سری تلسکوپی تبدیل می‌کنیم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{(n+2)^2}}_{a_{n+1}}-\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{a_n})+\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}-\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{b_{n+1}})=(\lim_{n\to\infty}a_n-a_1)+(b_1-\lim_{n\to\infty}b_n)=0-\frac{1}{4}+1-0=\frac{3}{4}$$

B **۵۳- گزینه‌ی (۴)** سری موردنظر قابل تفکیک به یک سری هندسی و یک سری تلسکوپی است. زیرا:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2+n-2^n}{2^n(n^2+n)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}-\sum_{n=3}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{4}-(\frac{1}{3}-0)=-\frac{1}{12}$$

B **۵۴- گزینه‌ی (۱)** مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم، سپس هر جمله را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2+k-2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)(k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k+2)-(k-1)}{(k-1)(k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{k-1}}_{a_k}-\underbrace{\frac{1}{k+2}}_{a_{k+3}})$$

$$=\frac{1}{3}(a_2+a_3+a_4-3\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0)=\frac{11}{18}$$

C **۵۵- گزینه‌ی (۲)** با ایجاد عوامل مخرج در صورت کسر، هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(k+2)}{(k^2+3k)(k^2+5k+4)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k^2+5k+4)-(k^2+3k)}{(k^2+3k)(k^2+5k+4)}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^2+3k}-\frac{1}{k^2+5k+4})$$

چون $(k+1)^2+3(k+1)=k^2+5k+4$، پس با جای‌گذاری $a_k=\frac{1}{k^2+3k}$ می‌توانیم سری فوق را به صورت زیر بنویسیم:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$$

B **۵۶- گزینه‌ی (۳)** با استفاده از اتحادهای مثلثاتی صورت کسر را باز می‌کنیم تا پس از تفکیک، هر جمله به شکل تفاضل دو کسر نوشته شود:

$$\frac{\sin(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})}{\cos(\frac{1}{n})\cos(\frac{1}{n+1})}=\frac{\sin(\frac{1}{n})\cos(\frac{1}{n+1})-\cos(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n+1})}{\cos(\frac{1}{n})\cos(\frac{1}{n+1})}=\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\cos(\frac{1}{n})}-\frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\cos(\frac{1}{n+1})}=\tan(\frac{1}{n})-\tan(\frac{1}{n+1})$$

$$a_n=\tan(\frac{1}{n})\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n=\tan 1-\tan(0)=\tan 1$$

C **۵۷- گزینه‌ی (۴)** صورت هر کسر را می‌توانیم به‌صورت مجموعی از عوامل مخرج بنویسیم:

$$S=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}(\frac{k+(k+1)}{k(k+1)})=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})=\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{(-1)^{k+1}}{k+1})$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}(\underbrace{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}_{a_k}-\underbrace{\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}}_{a_{k+1}})=a_2-\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}$$

C **۵۸- گزینه‌ی (۲)** مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم، سپس هر جمله را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1+2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^n}{2n-1})$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{(-1)^n}{2n-1}}_{a_n}-\underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}_{a_{n+1}})=\frac{1}{4}(a_1-\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{1}{4}\times\frac{-1}{1}=-\frac{1}{4}$$

C **۵۹- گزینه‌ی(۱)** مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم، سپس هر جمله را به‌صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)^2-(2k-1)^2}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{(2k-1)^2}}_{a_k}-\underbrace{\frac{1}{(2k+1)^2}}_{a_{k+1}})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

B **۶۰- گزینه‌ی(۱)** صورت هر کسر را به صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عامل مخرج می‌نویسیم تا کسر تفکیک شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{a_{n+1}})=\frac{1}{2}(a_1-\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0)=\frac{1}{4}$$

C **۶۱- گزینه‌ی (۳)** با استفاده از ویژگی $\log(\frac{a}{b})=\log a-\log b$، هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو عبارت می‌نویسیم:

$$\log(1-\frac{1}{n^2})=\log(\frac{n^2-1}{n^2})=\log(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n})=\underbrace{\log(\frac{n-1}{n})}_{a_n}-\underbrace{\log(\frac{n}{n+1})}_{a_{n+1}}$$

$$\Rightarrow S=\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_2-\lim_{n\to\infty}a_n=\log(\frac{1}{2})-\log 1=\log(\frac{1}{2})=-\log 2$$

C **۶۲- گزینه‌ی(۲)** مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم، سپس صورت هر کسر را به صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عامل مخرج می‌نویسیم:

$$\frac{1}{k^3-k}=\frac{1}{k(k-1)(k+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{(k+1)-(k-1)}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}(\underbrace{\frac{1}{(k-1)k}}_{a_k}-\underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{a_{k+1}})$$

$$\Rightarrow S=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}(a_k-a_{k+1})=\frac{1}{2}(a_2-\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

D **۶۳- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم برای $\alpha,\beta>0$ داریم: $\tan^{-1}\alpha-\tan^{-1}\beta=\tan^{-1}(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta})$، بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}(\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)})=\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\tan^{-1}(n+1)}_{a_{n+1}}-\underbrace{\tan^{-1}(n)}_{a_n})=\lim_{n\to\infty}\tan^{-1}(n)-\tan^{-1}1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

D **۶۴- گزینه‌ی (۲)** ابتدا مجموع جزئی را تشکیل می‌دهیم:

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}+\sqrt{k-1})=\sum_{k=2}^{n}(\underbrace{\sqrt{k+1}}_{a_{k+1}}-\underbrace{\sqrt{k}}_{a_k})+\sum_{k=2}^{n}(\underbrace{\sqrt{k-1}}_{b_k}-\underbrace{\sqrt{k}}_{b_{k+1}})$$

$$=(a_{n+1}-a_2)+(b_2-b_{n+1})=\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+1-\sqrt{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+1-\sqrt{2}=0+1-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}$$

C **۶۵- گزینه‌ی (۲)** مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم، سپس صورت هر کسر را به‌صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عامل مخرج می‌نویسیم:

$$\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Rightarrow S=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{12}{n(n-1)(n-2)}=6\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-(n-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

$$=6\sum_{n=3}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{(n-1)(n-2)}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{a_{n+1}})=6(a_3-\lim_{n\to\infty}a_n)=6\times\frac{1}{2\times1}=3$$

B **۶۶- گزینه‌ی(۲)** چون $\{a_n\}$ صعودی و بی‌کران است، پس: $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ و داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-a_1=\infty\to \text{سری واگرا}$$

B **۶۷- گزینه‌ی (۱)** چون دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و بی‌کران است، پس $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$. بنابراین $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ و داریم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{a_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}$$

D **۶۸- گزینه‌ی (۲)** با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو لگاریتم می‌نویسیم:

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\log(\frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n^2})=\sum_{n=2}^{\infty}\log(\frac{a_{n+1}}{a_n}\times\frac{a_{n-1}}{a_n})=\sum_{n=2}^{\infty}(\underbrace{\log(\frac{a_{n+1}}{a_n})}_{b_{n+1}}-\underbrace{\log(\frac{a_n}{a_{n-1}})}_{b_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n-b_2=\lim_{n\to\infty}\log(\frac{a_n}{a_{n-1}})-\log(\frac{a_2}{a_1})\xrightarrow{\lim_{n\to\infty}a_n=L}S=\log(\frac{L}{L})-\log(\frac{a_2}{a_1})=-\log(\frac{a_2}{a_1})=\log(\frac{a_1}{a_2})$$

B **۶۹- گزینه‌ی(۳)** می‌دانیم: $a_n=S_n-S_{n-1}$، بنابراین:

$$a_n=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{(n-1)+1}=\frac{n^2-(n-1)(n+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

C **۷۰- گزینه‌ی(۲)** در عبارت $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$، متغیر عبارت داخل مجموع k است، پس می‌توانیم $\frac{1}{n^2}$ را از سیگما خارج کنیم:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2n^2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

A **۷۱- گزینه‌ی (۴)** چون $a_n=1-\frac{8}{n^3}$ و $\lim_{n\to\infty}a_n=1\neq0$، سری واگرا است.

A **۷۲- گزینه‌ی(۲)** از همگرایی سری نتیجه می‌گیریم $\lim_{n\to\infty}a_n=0$، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n^2-1)^2}{3a_n^2+2}=\frac{(0-1)^2}{3\times0+2}=\frac{1}{2}$$

B **۷۳- گزینه‌ی (۲)** اگر $\lim_{n\to\infty}a_n=L$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=L$، حال از همگرایی سری نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-4a_n+4}{a_n^2+1}=0\Rightarrow L^2-4L+4=0\Rightarrow(L-2)^2=0\Rightarrow L=2\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{2\times2}{2}=2$$

B **۷۴- گزینه‌ی (۴)** چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا است، داریم: $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. حال از این که $\{a_n\}$ کران‌دار است و $\{b_n\}$ همگرا به صفر، نتیجه می‌گیریم حاصل‌ضرب آن‌ها نیز (یعنی $\{a_nb_n\}$) همگرا به صفر است.

B **۷۵- گزینه‌ی (۳)** اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آن‌گاه: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، ولی عکس آن درست نیست. بنابراین L هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

برای مثال $a_n = \frac{1}{n}$، مثال نقضی برای گزینه‌های (۲) و (۴) است.

B **۷۶- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم مقدار $[\frac{10}{n}]$ برای $n > 10$ برابر صفر است، زیرا در این صورت $0 < \frac{10}{n} < 1$، بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{10}{n}] = \sum_{n=1}^{10}[\frac{10}{n}] = 10+5+3+2+2+1+1+1+1+1 = 27$$

C **۷۷- گزینه‌ی (۱)** برای $k > 5$، داریم: $0 < k-5 < k+2$، بنابراین: $0 < \frac{k-5}{k+2} < 1$ و درنتیجه: $[\frac{k-5}{k+2}] = 0$. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{k-5}{k+2}] = \sum_{k=1}^{5}[\frac{k-5}{k+2}] = [\frac{-4}{3}]+[\frac{-3}{4}]+[\frac{-2}{5}]+[\frac{-1}{6}]+[\frac{0}{7}] = -2-1-1-1 = -5$$

C **۷۸- گزینه‌ی (۱)** سری را به‌صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{a_{n+1}}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

A **۷۹- گزینه‌ی (۳)** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $a_1 + a_2 + \ldots = 2$، حال داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = a_2 + a_3 + \cdots = (a_1 + a_2 + \cdots) - a_1 = 2 - a_1$$

B **۸۰- گزینه‌ی(۴)** از همگرایی سری اول نتیجه می‌گیریم: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، پس اگر $b_n = \frac{k}{a_n}$، آن‌گاه: $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا است.

B **۸۱- گزینه‌ی (۲)** حاصل سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ را می‌دانیم. بنابراین می‌توانیم سری موردنظر را با این سری مقایسه کنیم:

$$2^n + 1 > 2^n \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1} < \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1} < 1$$

B **۸۲- گزینه‌ی(۴)** اولاً چون $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ ، سری واگرا است. ثانیاً چون $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$، و می‌دانیم: $a_{n+1} > 0$، پس $S_{n+1} > S_n$، در نتیجه سری صعودی است.

A **۸۳- گزینه‌ی (۲)** طبق نکات بخش آموزش، باید تفاضل درجه‌ی صورت از مخرج، از ۱ بیش‌تر باشد. یعنی: $a - 1 > 1 \Rightarrow a > 2$

B **۸۴- گزینه‌ی (۴)** اولاً باید $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، یعنی:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{an+1}{n+2}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{an+1}{n+2} = 1 \Rightarrow a = 1$$

ولی به ازای $a = 1$، سری به صورت $\sum_{n=1}\frac{1}{n+2}$ قابل بازنویسی است که چون جملات آن با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ هم‌ارزند، سری واگرا می‌باشد. پس $a = 1$ قابل قبول نیست.

C **۸۵- گزینه‌ی (۱)** سری موردنظر را به‌صورت جمع دو سری می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(2a^2+3a-5)n+1}{(n+1)^2}+\frac{(b-2)^n}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2a^2+3a-5)n+1}{(n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(b-2)^n}{2^n}$$

شرط همگرایی برای سری اول آن است که تفاضل درجه‌ی صورت از مخرج از ۱ بیش‌تر باشد، بنابراین:

$$2a^2+3a-5 = 0 \Rightarrow (a-1)(2a+5) = 0 \Rightarrow a = 1\ ,\ a = -\frac{5}{2} \xrightarrow{a\in N} a = 1$$

هم‌چنین شرط همگرایی برای سری دوم آن است که قدرنسبت سری هندسی عددی بین ۱ و ۱- باشد، بنابراین:

$$|\frac{b-2}{2}| < 1 \Rightarrow -2 < b-2 < 2 \Rightarrow 0 < b < 4 \xrightarrow{b\in N} b = 1,2,3 \xrightarrow{a=1} a-b = 0,-1,-2$$

B **۸۶- گزینه‌ی (۳)** **راه اول:** با فاکتورگیری عامل x^{n-1} در هر جمله‌ی سری، به یک سری هندسی می‌رسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1) = (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

با یک سری هندسی مواجه‌ایم که با شرط $|x|<1$ همگرا است. از طرفی اگر $x=1$، سری اولیه به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ درمی‌آید، که بازهم همگراست.

راه دوم: می‌توانیم سری را یک سری تلسکوپی در نظر بگیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{x^n}_{a_{n+1}} - \underbrace{x^{n-1}}_{a_n}) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1 = \lim_{n\to\infty} x^{n-1} - 1$$

در صورتی حاصل سری عددی حقیقی است که حد بالا وجود داشته باشد. می‌دانیم برای $-1 < x \le 1$، دنباله‌ی $\{x^{n-1}\}$ همگرا است، پس پاسخ تست نیز $-1 < x \le 1$ می‌شود.

A **۸۷- گزینه‌ی (۴)** برای تشخیص همگرایی می‌توانیم از جملات هم‌ارز دنباله استفاده کنیم، یعنی چون $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$، همگرایی سری موردنظر مانند همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ است، که سری اخیر یک سری واگرا می‌باشد.

B **۸۸- گزینه‌ی (۱)** می‌دانیم همواره $\cos(n\pi) = (-1)^n$، بنابراین:

$$a_n = \frac{1-n^2}{n^2} + (-1)^{2n} = \frac{1-n^2}{n^2} + 1 = \frac{1}{n^2}$$

پس دنباله همگرا به صفر است. هم‌چنین سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ یک p- سری با $p>1$ می‌باشد و همگرا است.

B **۸۹- گزینه‌ی (۴)** در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) شرط $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ برقرار نیست. ولی گزینه‌ی (۴) یک سری هندسی با قدرنسبت $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ را معرفی می‌کند که چون $-1 < \sqrt{2}-\sqrt{3} < 1$، یک سری همگرا است.

B **۹۰- گزینه‌ی (۳)** سری گزینه‌ی (۱)، یک p- سری (برای $p=\frac{1}{2}$) را مشخص می‌کند، که چون $p \le 1$، واگرا است. سری دوم به صورت $\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ قابل بازنویسی است که به وضوح واگرا می‌باشد. هم‌چنین در گزینه‌ی (۴)، داریم: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ که نشان می‌دهد سری واگرا است. در گزینه‌ی (۳)، سری قابل بازنویسی به صورت تفاضل دو سری هندسی است $(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n - \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n)$، بنابراین همگرا است.

B **۹۱- گزینه‌ی (۱)** برای تشخیص همگرایی به جای جملات سری می‌توانیم هم‌ارز آن‌ها را قرار دهیم، پس وضعیت همگرایی سری گزینه‌ی (۱) مانند وضعیت همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n}$ است که سری اخیر یک سری هندسی همگرا را بیان می‌کند. در گزینه‌ی (۲) و (۳) شرط $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ برقرار نیست، بنابراین واگرا هستند.

C **۹۲- گزینه‌ی (۴)** برای تشخیص همگرایی یا واگرایی هر دو سری از آزمون مقایسه استفاده می‌کنیم:

$$\forall n \ge 2 : \log n < n \Rightarrow \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{واگرا } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n} \quad \text{واگرا}$$

$$\forall n \ge 10 : \log n \ge 1 \Rightarrow \frac{\log n}{n} \ge \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{واگرا } \sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n}} \sum_{n=10}^{\infty}\frac{\log n}{n} \text{ واگرا } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n} \quad \text{واگرا}$$

C **۹۳- گزینه‌ی (۴)** برای گزینه‌ی (۱) می‌توان مثال نقض $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را آورد که خود واگراست، ولی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ یک p - سری با $p>1$ است و همگرا می‌باشد. برای گزینه‌ی (۲)، مثال نقض زیر را می‌توانیم ارائه کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+(n+1))}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1})$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید به یک سری تلسکوپی همگرا رسیده‌ایم. اما $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ واگرا است، زیرا اختلاف درجه‌ی صورت و مخرج ۱ واحد است، حال آن که باید بیش‌تر از ۱ واحد باشد.

برای گزینه‌ی (۳) می‌توانیم مثال نقض $\sum_{n=1}^{\infty} n$ را بزنیم که خود واگراست و در عین حال $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ نیز واگراست. ولی گزینه‌ی (۴) درست است، زیرا اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، و بنابراین $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \infty$ ، در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ واگرا است.

C **۹۴- گزینه‌ی (۱)** از آزمون مقایسه استفاده می‌کنیم.

$$|\sin n| \le 1 \Rightarrow |k\sin n| \le |k| \Rightarrow \left|\frac{k\sin n}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{|k|}{n\sqrt{n}}$$

می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|k|}{n\sqrt{n}}$ ، یک p − سری با $p > 1$ (در واقع $p = \frac{3}{2}$) را مشخص می‌کند و همگرا است، بنابراین طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{k\sin n}{n\sqrt{n}}\right|$ نیز همگرا است و درنتیجه سری اصلی نیز همگرا می‌باشد.

B **۹۵- گزینه‌ی (۴)** از مجموع اول مقدار $\sum_{n=1}^{10} n^2$ را برحسب k به‌دست می‌آوریم و در مجموع دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{10}(n^2+n) = k \Rightarrow \sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n = k \Rightarrow \sum_{n=1}^{10} n^2 + (1+\cdots+10) = k \Rightarrow \sum_{n=1}^{10} n^2 = k - \frac{10\times 11}{2} = k - 55$$

$$\sum_{n=1}^{10}(n^2+1) = \sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} 1 = (k-55) + 10 = k - 45$$

B **۹۶- گزینه‌ی (۴)** با استفاده از ویژگی‌های سیگما، سری موردنظر را به مجموع دو سری تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2\times 2 - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

D **۹۷- گزینه‌ی (۳)** با استفاده از ویژگی‌های سیگما، سری موردنظر را به مجموع دو سری مرتبط با سری اول تبدیل می‌کنیم:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -A - (A - a_1) \xrightarrow{a_1=-1} S = -2A - 1$$

D **۹۸- گزینه‌ی (۲)** سری A را به مجموع دو سری شامل جملات زوج و فرد سری اول تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots = \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right) \\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right) = \frac{1}{4}A \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}A$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}A$$

A **۹۹- گزینه‌ی (۲)** با تفکیک هر کسر، سری را به مجموع دو سری هندسی تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k}-2^{2k}}{12^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{12^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{12^k} = \frac{\frac{9}{12}}{1-\frac{9}{12}} - \frac{\frac{4}{12}}{1-\frac{4}{12}} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

C **۱۰۰- گزینه‌ی (۲)** سعی می‌کنیم نظم جمله‌های دنباله را کشف کنیم:

$$S_۲ = S_۱ + (\frac{۲}{۳}) = ۲ + \frac{۲}{۳}$$

$$S_۳ = S_۲ + (\frac{۲}{۳})^۲ = ۲ + \frac{۲}{۳} + (\frac{۲}{۳})^۲$$

با روندی مشابه بالا برای $n \geq ۲$، به دست می‌آوریم:

$$S_n = ۲ + (\frac{۲}{۳}) + (\frac{۲}{۳})^۲ + \cdots + (\frac{۲}{۳})^{n-۱}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = ۲ + \sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۲}{۳})^k = ۲ + \frac{\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}} = ۲ + ۲ = ۴$$

B **۱۰۱- گزینه‌ی(۱)** برای nهای زوج $(n = ۲k)$ داریم: $\sin(\frac{n\pi}{۲}) = \sin(k\pi) = ۰$ و برای nهای فرد $(n = ۲k-۱)$ داریم:

$$\sin(\frac{n\pi}{۲}) = \sin(k\pi - \frac{\pi}{۲}) = -\cos(k\pi) = -(-۱)^k = (-۱)^{k+۱}$$

بنابراین در مجموع $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ تنها باید جملات فرد را حساب کنیم. داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n = \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k+۱}}{۲k-۱} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲n-۱} = (\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \cdots) + (-\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} + \cdots) = ۰$$

B **۱۰۲- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم مقدار $\cos\frac{n\pi}{۲}$ برای مقادیر فرد n برابر صفر و برای مقادیر زوج n یکی در میان ± ۱ می‌شود. حال داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\cos\frac{n\pi}{۲} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۸} - \ldots = -\frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \ldots) = -\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n} = -\frac{a}{۲}$$

A **۱۰۳- گزینه‌ی (۲)** با تفکیک هر کسر، سری را به مجموع دو سری هندسی تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۸^k - ۵^{k+۱}}{۱۰^k} = \sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۸}{۱۰})^k - \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۵^k \times ۵}{۱۰^k} = \sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۴}{۵})^k - ۵\sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^k = \frac{\frac{۴}{۵}}{۱-\frac{۴}{۵}} - ۵ \times \frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}} = -۱$$

C **۱۰۴- گزینه‌ی (۲)** با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو لگاریتم می‌نویسیم:

$$\sum_{k=۲}^{۱۰۰}\log(۱-\frac{۱}{k^۲}) = \sum_{k=۲}^{۱۰۰}\log(\frac{k^۲-۱}{k^۲}) = \sum_{k=۲}^{۱۰۰}\log(\frac{(k-۱)(k+۱)}{k\times k}) = \sum_{k=۲}^{۱۰۰}\underbrace{\log(\frac{k-۱}{k})}_{a_k} - \underbrace{\log(\frac{k}{k+۱})}_{a_{k+۱}}$$

$$= (a_۲ - a_{۱۰۱}) = \log(\frac{۱}{۲}) - \log(\frac{۱۰۰}{۱۰۱}) = \log(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰۱}{۱۰۰}) = \log(\frac{۵۰۵}{۱۰۰۰})$$

با مقایسه‌ی نتیجه‌ی بالا با فرض مسأله نتیجه می‌گیریم $A = ۰/۵۰۵$.

C **۱۰۵- گزینه‌ی (۳)** با تجزیه‌ی عبارات داخل لگاریتم، هر جمله را به‌صورت تفاضل دو لگاریتم می‌نویسیم:

$$S_{۹۹} = \sum_{k=۱}^{۹۹}\log(\frac{k(k+۳)}{(k+۱)(k+۲)}) = \sum_{k=۱}^{۹۹}\underbrace{\log(\frac{k}{k+۱})}_{a_k} - \underbrace{\log(\frac{k+۲}{k+۳})}_{a_{k+۲}}$$

$$= \sum_{k=۱}^{۹۹}(a_k - a_{k+۱}) + \sum_{k=۱}^{۹۹}(a_{k+۱} - a_{k+۲}) = (a_۱ - a_{۱۰۰}) + (a_۲ - a_{۱۰۱})$$

$$= \log(\frac{۱}{۲}) - \log(\frac{۱۰۰}{۱۰۱}) + \log(\frac{۲}{۳}) - \log(\frac{۱۰۱}{۱۰۲}) = \log(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰۱}{۱۰۰}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۰۲}{۱۰۱}) = \log(\frac{۳۴}{۱۰۰})$$

A **۱۰۶- گزینه‌ی (۲)** با تجزیه‌ی مخرج کسر، هر جمله را به‌صورت تفاضل دوکسر می‌نویسیم:

$$S_{۲۴} = \sum_{n=۱}^{۲۴}\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}\times\sqrt{n}} = \sum_{n=۱}^{۲۴}\underbrace{\frac{۱}{\sqrt{n}}}_{a_n} - \underbrace{\frac{۱}{\sqrt{n+۱}}}_{a_{n+۱}} = a_۱ - a_{۲۵} = \frac{۱}{\sqrt{۱}} - \frac{۱}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

B **۱۰۷- گزینه‌ی (۴)** صورت کسر a_n را می‌توانیم به‌صورت $(۱-۲)+(۳-۴)+...+(۲n-۱-۲n)$ بنویسیم که هر پرانتز برابر ۱- است، پس $a_n=\frac{-n}{۲n+\sqrt{n^۲+۱}}$، بنابراین $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{۲n+n}=-\frac{۱}{۳}$. چون $\lim_{n\to\infty} a_n\neq ۰$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا است.

C **۱۰۸- گزینه‌ی (۲)** در این مجموع مخرج هر کسر از یک مربع کامل ۱ واحد کم‌تر است. بنابراین می‌توانیم سری را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-۱}=\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)(n+۱)}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(n+۱)-(n-۱)}{(n-۱)(n+۱)}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۲}^{\infty}(\underbrace{\frac{۱}{n-۱}}_{a_n}-\underbrace{\frac{۱}{n+۱}}_{a_{n+۲}})$$

$$=\frac{۱}{۲}(a_۲+a_۳-۲\lim_{n\to\infty}a_n)=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۱}{۲}-۰)=\frac{۳}{۴}$$

C **۱۰۹- گزینه‌ی (۴)** صورت و مخرج هر کسر را تجزیه می‌کنیم، سپس با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، هر جمله را به تفاضل دو لگاریتم تبدیل می‌کنیم:

$$S=\sum_{n=۱}^{\infty}\log(\frac{(n+۱)(n+۳)}{(n+۲)^۲})=\sum_{n=۱}^{\infty}\log(\frac{n+۱}{n+۲}\times\frac{n+۳}{n+۲})=\sum_{n=۱}^{\infty}\underbrace{\log(\frac{n+۱}{n+۲})}_{a_n}-\underbrace{\log(\frac{n+۲}{n+۳})}_{a_{n+۱}}$$

$$=a_۱-\lim_{n\to\infty}a_n=\log(\frac{۲}{۳})-\log ۱=\log(\frac{۲}{۳})$$

B **۱۱۰- گزینه‌ی(۴)** سری را می‌توانیم به‌صورت تفاضل یک سری تلسکوپی و یک سری هندسی بنویسیم:

$$S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{(۴n+۱)(۴n+۵)}-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۳^n}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۴n+۵)-(۴n+۱)}{(۴n+۱)(۴n+۵)}-\frac{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(\underbrace{\frac{۱}{۴n+۱}}_{a_n}-\underbrace{\frac{۱}{۴n+۵}}_{a_{n+۱}})-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}(a_۱-\lim_{n\to\infty}a_n)-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۲}{۵}$$

D **۱۱۱- گزینه‌ی (۱)** دنباله به وضوح به عدد صفر همگرا است. برای اثبات همگرایی سری داریم: $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n}=-۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}+...$

می‌دانیم برای هر عدد طبیعی k داریم:

$$\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}=\frac{۱}{k(k+۱)}<\frac{۱}{k^۲}\Rightarrow -۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}+...<-۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\frac{۱}{۶^۲}+...$$

چون سری $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}$ همگرا است، پس سری $-۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\frac{۱}{۶^۲}+...$ نیز همگرا است، بنابراین طبق آزمون مقایسه سری اولیه نیز همگرا است.

C **۱۱۲- گزینه‌ی(۲)** اگر n عددی فرد باشد داریم: $\cos(\frac{n\pi}{۲})=۰$، و جملات با n فرد از مجموع حذف می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم $n=۲k$ و مجموع را به ازای $k=۱$ تا ... به دست می‌آوریم:

$$\text{جواب}=\sum_{k=۱}^{\infty}\cos(k\pi)(-\frac{۱}{۲})^{۲k}=\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k(\frac{۱}{۴})^k=\sum_{k=۱}^{\infty}(-\frac{۱}{۴})^k=\frac{-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۵}$$

C **۱۱۳- گزینه‌ی (۲)** برای بررسی همگرایی سری می توانیم از جملات هم‌ارز جمله‌ی عمومی آن استفاده کنیم. بنابراین همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳^n+۴^n}{a^n}$ معادل همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۴}{a})^n$ است، که به شرط $|a|>۴$ رخ می‌دهد. در گزینه‌ی (۲)، چون سرعت رشد $n^{۱۰۰}$ از ۳^n کم‌تر است، همگرایی سری معادل همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۳}{a})^n$ است که با شرط $|a|>۴$ قطعاً همگرا می‌باشد. گزینه‌های دیگر با استدلالی مشابه رد می‌شوند.

C **۱۱۴- گزینه‌ی (۴)** سری را به صورت جمع دو سری تلسکوپی می‌توانیم بنویسیم:

$$S=(\frac{۱}{۳\times۷}+\frac{۱}{۷\times۱۱}+\cdots)+(\frac{۱}{۵\times۹}+\frac{۱}{۹\times۱۳}+\cdots)=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۱۱}+\cdots)+\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۳}+\cdots)=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵})=\frac{۲}{۱۵}$$

C **۱۱۵- گزینه‌ی (۱)** با توجه به آن‌که $\frac{n+5}{n+2}=1+\frac{3}{n+2}$، برای $n\ge 2$ داریم:

$$[\frac{n+5}{n+2}]=1+[\frac{3}{n+2}]=1+0=1\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n+5}{n+2}](\frac{2}{3})^n=2\times\frac{2}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{2}{3})^n=\frac{4}{3}+\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{8}{3}$$

B **۱۱۶- گزینه‌ی (۱)** با ساده کردن جمله‌ی عمومی سری، به یک سری هندسی می‌رسیم:

$$\frac{2^{2n}+6^n}{10^n+15^n}=\frac{2^n(2^n+3^n)}{5^n(2^n+3^n)}=(\frac{2}{5})^n\Rightarrow \text{جواب سری}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}$$

B **۱۱۷- گزینه‌ی (۳)** با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاضل دو لگاریتم می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(\frac{3n+1}{3n+4}\times\frac{3n+7}{3n+4})=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\log(\frac{3n+1}{3n+4})}_{a_n}-\underbrace{\log(\frac{3n+4}{3n+7})}_{a_{n+1}}=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n=\log\frac{4}{7}-\log 1=\log\frac{4}{7}$$

C **۱۱۸- گزینه‌ی (۲)** چون $5-2=3$، می‌توانیم کسر وسطی را به‌صورت تفاضل دو کسر بنویسیم که هر کدام با یکی از کسرهای دیگر یک سری تلسکوپی را تشکیل بدهند:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n^2}+\frac{5-2}{(n+1)^2}-\frac{5}{(n+2)^2})=\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{a_n}-\underbrace{\frac{2}{(n+1)^2}}_{a_{n+1}})+\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{5}{(n+1)^2}}_{b_n}-\underbrace{\frac{5}{(n+2)^2}}_{b_{n+1}})$$

$$=a_1-\lim_{n\to\infty}a_n+b_1-\lim_{n\to\infty}b_n=2-0+\frac{5}{4}-0=\frac{13}{4}$$

C **۱۱۹- گزینه‌ی(۴)** می‌دانیم اگر $n=2k$، آن‌گاه $\sin(\frac{n\pi}{2})=0$. هم‌چنین برای $n=2k-1$ داریم:

$$\sin(\frac{n\pi}{2})=\sin(k\pi-\frac{\pi}{2})=-\cos(k\pi)=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$$

به این ترتیب در سری موردنظر فقط باید جملات فرد $(n=2k-1)$ را در نظر بگیریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{(-1)^{k+1}}{3})^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{2k-1}}=\frac{-1}{3^{-1}}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{-1}{3^2})^k=-3\sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{9})^k=-3\times\frac{\frac{-1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{3}{10}$$

C **۱۲۰- گزینه‌ی (۱)** مخرج هر کسر را می‌توانیم به‌صورت $6^n(1+6)=7\times 6^n$ بنویسیم، بنابراین سری به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^{n+2}}{6^n}=\frac{1}{7}(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{6})^n-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{6})^n\times 2^2)=\frac{1}{7}(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n-4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n)=\frac{1}{7}(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-4\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}})=-\frac{1}{7}$$

C **۱۲۱- گزینه‌ی(۱)** هر جمله‌ی مجموع را می‌توانیم به‌صورت زیر ساده کنیم:

$$\frac{4}{n(n+2)(n+4)}-\frac{1}{n(n+2)}=\frac{4-(n+4)}{n(n+2)(n+4)}=-\frac{n}{n(n+2)(n+4)}=\frac{-1}{(n+2)(n+4)}$$

پس حاصل سری زیر را می‌خواهیم:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)-(n+2)}{(n+2)(n+4)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{a_n}-\underbrace{\frac{1}{n+4}}_{a_{n+2}})$$

$$=-\frac{1}{2}(a_1+a_2-2\lim_{n\to\infty}a_n)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=-\frac{7}{24}$$

سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR