گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

سایت ریاضی سرا

هندسه ۱

ادامه‌ی فصل ۲

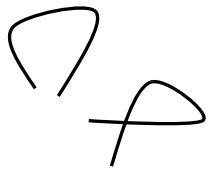
و فصل ۳

www.riazisara.ir

چند ضلعی‌ها:

تعاریف:

خم مسطح:



خم مسطح مجموعه‌ای از نقطه‌ها است که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم.
خط‌ها، نیم‌خط‌ها، پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها، همه‌ی خمهای مسطح هستند.

خم ساده:

یک خم ساده، یک خم مسطح است که هیچیک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. به عبارت دیگر خم ساده خمی است که از هر نقطه روی آن حداکثر ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

خم بسته:

اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود. به عبارت دیگر خم بسته خمی است که از هر نقطه روی آن حداقل ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

خم ساده بسته:

اگر نقطه‌های انتهایی یک خم ساده بر هم منطبق باشند، آن خم ساده بسته نامیده می‌شودبه عبارت دیگر خم ساده بسته، خمی است که از هر نقطه روی آن دقیقاً ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

جمع بندی:

- خم مسطح
  - ساده
    - بسته: دایره، مربع، لوزی...
    - باز: زاویه، پاره خط، نیم خط...
  - غیر ساده
    - بسته: علامتهایی مانند ∞,...
    - باز: علامتهایی مانند α,...

قضیه خم جردن:

هر خم ساده‌ی بسته C، صفحه را به سه زیرمجموعه جدا از هم، درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

ناحیه‌ی محدب و غیر محدب:

اجتماع یک خم ساده بسته با درون آن یک ناحیه نامیده می‌شود. ناحیه‌های یک صفحه به دو دسته محدب و غیر محدب طبقه‌بندی می‌شود.یک ناحیه محدب (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) محدب است، اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً درون ناحیه قرار گیرد.

در غیر این صورت اگر حداقل دو نقطه در ناحیه وجود داشته باشند به طوری که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند، کاملاً درون ناحیه قرار نگیرد، آن ناحیه غیر محدب خوانده می‌شود.

چند ضلعی:

چند ضلعی یک خم ساده بسته است که از اجتماع حداقل ۳ پاره خط تشکیل شده است. به طوری که پاره خط‌ها هم صفحه باشند و هیچ سه رأس متوالی آن روی یک خط قرار نگرفته باشند.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

چند ضلعی محدب:

هرگاه مجموعه نقاط درونی یک چند ضلعی یک مجموعه محدب باشد، چند ضلعی را محدب گوییم.

شرط لازم و کافی برای آن که یک چند ضلعی، محدب باشد آن است که تمام زاویه‌هایش از ۱۸۰° کمتر باشد.

مثال: ناحیه محدود به یک چندضلعی در کدام حالت ممکن است، یک مجموعه محدب نباشد؟

۱) تمام نقاط پاره خطی که دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل کند، عضو آن مجموعه باشد.

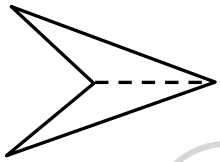
۲) هر زاویه داخلی آن کمتر از ۱۸۰° باشد.

۳) سایر رأسها در یک طرف هر خطی قرار دارند که بر ضلع آن منطبق است.

٤) یک قطر آن را به دو مجموعه محدب تقسیم کند.

حل: گزینه ٤ پاسخ است.

مثال نقض برای این موضوع شکل مقابل است:



چند ضلعی منتظم:

یک چند ضلعی منتظم است هرگاه همه اضلاع آن با هم و همه‌ی زاویه‌هایش نیز با هم مساوی باشند. هر چند ضلعی منتظم قابل محیط شدن بر یک دایره و محاط شدن در یک دایره است. یک چند ضلعی منتظم، محدب نیز هست.

نکات و خواص چندضلعی های محدب:

۱- از هر رأس n ضلعی محدب $(n-۳)$ قطر می‌گذرد.

۲- تعداد قطرهای n ضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

مثال: اگر یک ۱۰۰ ضلعی محدب را به ۱۰۱ ضلعی محدب تبدیل کنیم، چه مقدار به اقطار اضافه خواهد شد؟

حل:

$$\frac{۱۰۱(۱۰۱-۳)}{۲}-\frac{۱۰۰(۱۰۰-۳)}{۲}=۹۹$$

به طور کلی اگر یک n ضلعی به $(n+۱)$ ضلعی تبدیل شود، $(n-۱)$ قطر به اقطار آن اضافه می‌شود.

مثال: در کدام چند ضلعی تعداد قطرها سه واحد بیشتر از تعداد ضلعها است؟

حل:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}-n=۳ \Rightarrow n^۲-۵n-۶=۰ \Rightarrow n=۶$$

۳- مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب مساوی $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.

مثال: در یک چندضلعی محدب، مجموع همه زوایای داخلی، به‌جز یکی از آنها برابر ۲۵۷۰ درجه است. اندازه‌ی آن یک زاویه چقدر است؟

حل:

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ - x = ۲۵۷۰^\circ = ۱۴\times ۱۸۰ + ۵۰ \Rightarrow ۵۰+\hat{x}=۱۸۰k \Rightarrow \hat{x}=۱۸۰k-۵۰$$

چون چندضلعی محدب است، $۰<\hat{x}<۱۸۰^\circ$ لذا تنها x قابل قبول $x=۱۳۰^\circ$ است.

نتیجه: هر زاویه n ضلعی منتظم مساوی $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}=۱۸۰-\frac{۳۶۰}{n}$ است.

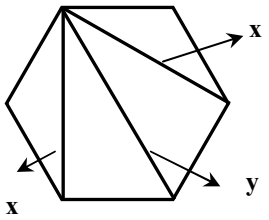
مثال: اندازه زاویه‌ی یک n ضلعی منتظم ۱۵۰° است. n کدام است؟

حل:

$$۱۸۰-\frac{۳۶۰}{n}=۱۵۰ \Rightarrow \frac{۳۶۰}{n}=۳۰ \Rightarrow n=۱۲$$

مثال: در شش ضلعی منتظم به ضلع a، طول اقطار را به دست آورید.

حل:



قطر کوچک را با قضیه کسینوسها و قطر بزرگ را با قضیه فیثاغورث به دست می آوریم.

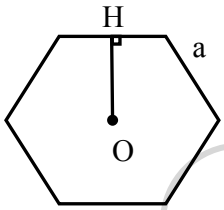
$$x^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120 = 3a^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}a$$

$$y^2 = x^2 + a^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow y = 2a$$

۴- مجموع زوایای داخلی و خارجی یک n ضلعی محدب $180n$ می‌باشد. لذا جمع زوایای خارجی n ضلعی محدب مساوی 360° است،

نتیجه ۱: هر زاویه خارجی n ضلعی منتظم $\frac{360}{n}$ است.

نتیجه ۲: هر n ضلعی **حداکثر ۳ زاویه حاده داخلی** دارد.

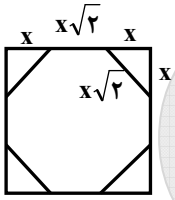


۵- مساحت n ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $\frac{n}{2}\times a\times OH$

لذا مساحت n ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $S = \frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}$

حالت خاص مهم: مساحت ٦ ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

مثال:در شکل مقابل مساحت مربّع ۲ واحد مربّع است.مساحت هشت ضلعی منتظم کدام است؟



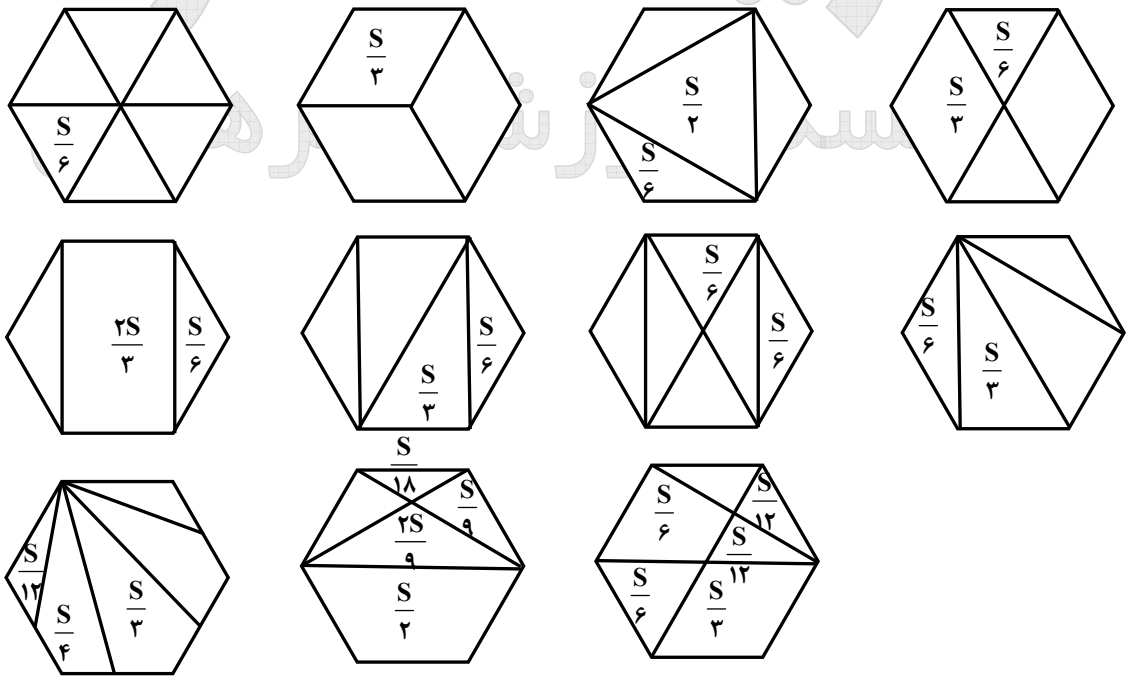
حل:

$$S = 2 \rightarrow 2x + x\sqrt{2} = \sqrt{2} \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{2}-1$$

$$S_8 = 8\times(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times x\sqrt{2}) = 4x = 4(\sqrt{2}-1)$$

مثال: مساحت هر یک از نواحی بوجود آمده بوسیله اقطار را در شش ضلعی‌های زیر بر حسب S بیابید.

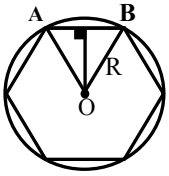
حل:



حالات خاص:

الف) مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R مساوی است با: $S_n = nS_{\Delta AOB} = n \times \frac{1}{2} R^2 \sin\frac{360}{n}$

و محیط آن برابر است با: $P_n = 2nR\sin\frac{180}{n}$



مثال: مساحت هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R برابر کدام است؟

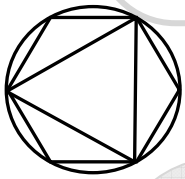
حل:

$$S = 4R^2 \sin\frac{360}{8} = 2\sqrt{2}R^2$$

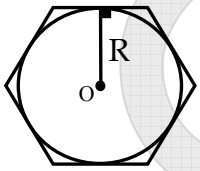
مثال: اگر در یک دایره مساحت مثلث متساوی الاضلاع محاطی برابر با ۱۲ باشد، مساحت شش ضلعی منتظم محاط در آن کدام است؟

حل:

همان‌گونه که در مثال فوق معلوم شد مساحت شش ضلعی دو برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع است. پس مساحت شش ضلعی برابر ۲۴ است.



ب) مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $S_n = nR^2 \tan\frac{180}{n}$ و محیط آن برابر است با $P_n = 2nR\tan\frac{180}{n}$ است.

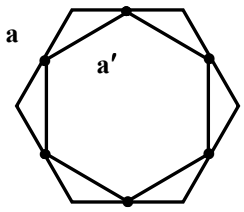


مثال: مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R برابر کدام است؟

حل:

$$S = 6R^2 \tan\frac{180}{6} = 2\sqrt{3}R^2$$

۶- اگر اوساط اضلاع یک n ضلعی منتظم را بهم وصل کنیم، یک n ضلعی منتظم کوچکتر حاصل می‌شود که اضلاع و محیط و تمامی اجزای طولی آن $\cos\frac{\pi}{n}$ برابر n ضلعی منتظم اولیه است. و مساحت آن $\cos^2\frac{\pi}{n}$ مساحت اولیه است.



$$a' = a\cos\frac{\pi}{n}$$

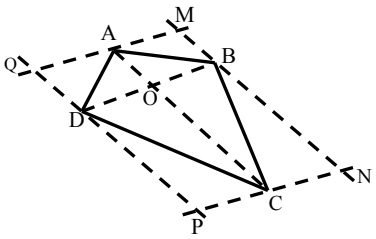
$$S' = S\cos^2\frac{\pi}{n}$$

۷- در بین چند ضلعی‌ها با محیط ثابت، چند ضلعی‌های منتظم بیشترین مساحت را دارند..

چهارضلعی‌ها:

پس از مثلث، چهارضلعی، ساده‌ترین نوع چندضلعی‌ها می‌باشد. برخی از چهارضلعی‌ها به سبب روابطی که بین اجـزای آنهـا وجـود دارد، اهمیت بیشتری دارند. در این قسمت انواع و خواص آنها را بررسی می‌کنیم.

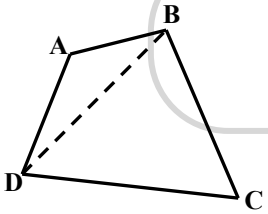
نکات:



۱- مساحت چهار ضلعی محدبی به اقطار a و b و زاویه‌ی بین دو قطر θ برابر است با:

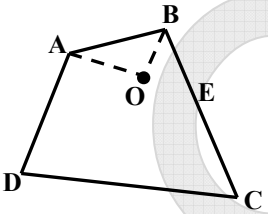
$$S = \frac{۱}{۲} ab\sin\theta$$

۲- چند نامساوی در چهار ضلعی‌های محدب:



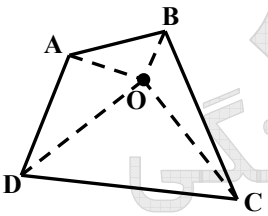
الف) هر ضلع دلخواه چهار ضلعی محدب همواره از مجموع سه ضلع دیگر ان کوچکتر است:

$$DC < AB + AD + BC$$



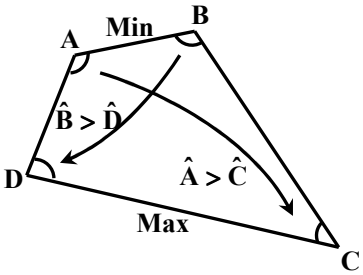
ب) اگر **O** نقطه دلخواه درون چهار ضلعی محدب ABCD باشد، آن گاه مجموع فواصل آن تا دو سر یک ضلع، از آن ضلع بزرگ تر و از مجموع سه ضلع دیگر کوچکتر است:

$$AB < OA + OB < BC + DC + AD$$



ج) مجموع فواصل هر نقطه داخل چهار ضلعی محدب، از رئوس آن از نصف محیط بزرگ‌تر و از ۱/۵ برابر محیط کوچک‌تر است. که اگر محیط چهار ضلعی را با **۲P** نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}(\text{محیط}) = P < OA + OB + OC + OD < \frac{۳}{۲}(\text{محیط}) = ۳P$$

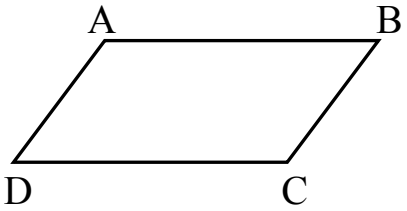


د) زوایای مجاور به کوچکترین ضلع چهار ضلعی محدب به طور ضربدری از زوایای مجاور به بزرگ‌ترین ضلع بزرگ ترند.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

انواع چهارضلعی:

متوازی‌الاضلاع:



تعریف: متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی‌ای است که اضلاع آن دوبه‌دو موازی یکدیگرند. مانند متوازی‌الاضلاع ABCD در شکل که در آن AB||CD و AD||BC است.

متوازی‌الاضلاع علاوه بر خواص عمومی چهارضلعی‌ها دارای خواصی است که با قضایای زیر بیان می‌شوند:

۱- در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی یکدیگرند.

۲- در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل، متساوی و زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند.

۳- در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

قضایای عکس:

۱- اگر در یک چهار ضلعی اضلاع مقابل دوبه‌دو متساوی باشند چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲- اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل دوبه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۳- اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

٤- اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۵- اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال: کدامیک از چهارضلعی‌های زیر یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟

۱) چهارضلعی ای که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.

۲) چهارضلعی ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

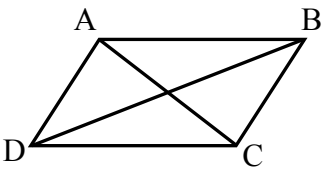
۳) چهارضلعی ای که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد.

٤) چهارضلعی ای که زوایای روبه‌رویش مساوی باشند.

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

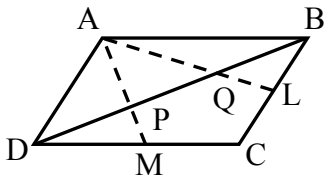
ذوزنقه‌ی متساوی الساقین نیز دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی دارد. بقیه گزینه‌ها خصوصیات متوازی الاضلاع را بیان می‌کنند.

نکات:



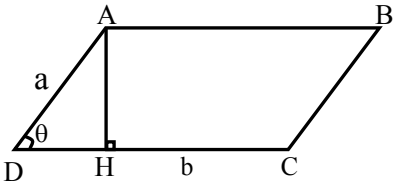
۱- در هر متوازی الاضلاع، مجموع مربعات قطرها برابر است با مجموع مربعات اضلاع

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$



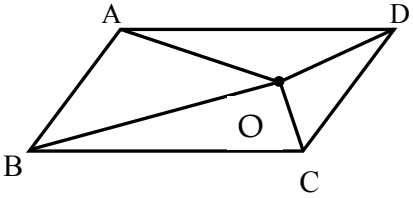
۲- در هر متوازی الاضلاع پاره خط‌هایی که یک رأس را به وسطهای دو ضلع غیر مجاور آن وصل می‌کنند، قطر مقابل به آن رأس را به سه بخش مساوی با هم تقسیم می‌کنند.

$$\begin{cases} BL = CL \\ DM = CM \end{cases} \Rightarrow DP = PQ = BQ$$



۳- مساحت متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب ارتفاع نظیر یک ضلع در آن ضلع همچنین اگر طول و عرض متوازی الاضلاعی b,a و زاویه بین آنها θ باشد، داریم:

$$S = ab\sin\theta$$



٤- در هر متوازی الاضلاع اگر O یک نقطه‌ی دلخواه داخل متوازی الاضلاع باشد، داریم:

$$S_{AOB} + S_{COD} = S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

مثال: از نقطه دلخواه O داخل متوازی الاضلاع ABCD به مساحت ۲۵۰ به رئوس پاره خطهایی وصل می کنیم. اگر مساحت مثلث OAB برابر ۷۰ باشد، مساحت مثلث OCD کدامست؟

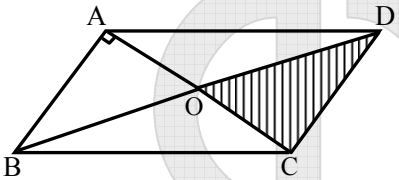
حل:

$$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{۲۵۰}{۲} = ۱۲۵ \rightarrow S_{OCD} = ۵۵$$

۵- قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند.

مثال: در متوازی الاضلاع مقابل قطر AC عمود بر ساق AB و $AB = ۵, AC = ٦$ است. مساحت قسمت‌هاشور زده شده در شکل کدام است؟

حل:



قطر هر متوازی الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند، لذا:

$$\Delta ABC = \Delta ADC, \Delta ABD = \Delta BCD \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

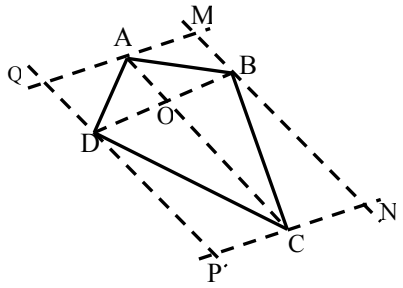
اقطار متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند، لذا:

$$DO = OB \Rightarrow \text{است } \Delta BCD \text{ میانه مثلث } CO \Rightarrow S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COD}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow S_{\Delta COD} = \frac{۱}{۲}S_{\Delta BCD} = \frac{۱}{۴}S_{ABCD} \\ S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۶ = ۱۵ \Rightarrow S_{ABCD} = ۳۰ \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\Delta COD} = \frac{۱}{۴}\times ۳۰ = ۷/۵$$

مثال: از چهار رأس یک چهارضلعی، خطهایی موازی قطرها رسم می‌کنیم. از تلاقی این خطوط، یک چهارضلعی حاصل می شود. نسبت مساحت چهارضلعی اوّل به مساحت چهارضلعی حاصل شده، کدام است؟

حل: هر چهارضلعی که اضلاع روبرویش دوبه‌دو موازی باشند، متوازی‌الاضلاع می‌باشد. قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند. لذا:

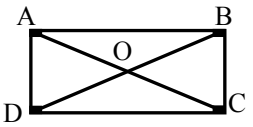


$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AO \parallel MB \\ BO \parallel AM \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOB = \Delta AMB \\ \left.\begin{array}{l} BN \parallel OC \\ BO \parallel NC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BOC = \Delta BNC \\ \left.\begin{array}{l} AO \parallel QD \\ AQ \parallel OD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOD = \Delta AQD \\ \left.\begin{array}{l} OC \parallel DP \\ CP \parallel OD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OCD = \Delta CDP \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}S_{MNPQ}$$

مستطیل:

تعریف: مستطیل چهارضلعی‌ای است که زاویه‌های آن قائمه‌اند. اگر زاویه‌های چهارضلعی قائمه باشند، اضلاع آن دوبه‌دو موازی یکدیگرند. پس مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که زاویه‌هایش قائمه‌اند. اگر یک زاویه از متوازی‌الاضلاعی قائمه باشد، سه زاویه دیگر آن نیز قائمه‌اند. پس می‌توان گفت: مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه قائمه داشته باشد.

مستطیل همه خواص یک متوازی‌الاضلاع را دارد، ضمناً داری خاصیت مهمی است که با قضیه زیر بیان می‌شود:



در هر مستطیل قطرها مساوی یکدیگرند.

قضیه عکس:

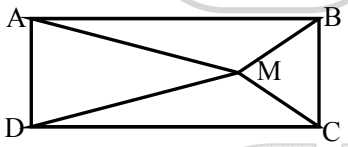
متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن متساوی باشند، مستطیل است.

مثال: تساوی قطرهای یک چهارضلعی برای مستطیل بودن آن چه شرطی است؟

۱) شرط لازم ۲) شرط کافی ۳) شرط لازم و کافی ٤) نه شرط لازم و نه شرط کافی

حل:

اگر چهار ضلعی مستطیل باشد، قطرهای آن مساویند، پس تساوی قطرها شرط لازم است.



نکته: برای هر نقطه در داخل مستطیل $ABCD$ داریم:

$$MA^۲ + MC^۲ = MB^۲ + MD^۲$$

مثال: فاصله نقطه P واقع در داخل مستطیل $ABCD$ از رئوس C,B,A به ترتیب ۱۰، ۳ و ٤ است. فاصله نقطه P از D چقدر است؟

۱) $\sqrt{۷۵}$ ۲) $\sqrt{۹۵}$ ۳) $\sqrt{۱۰۳}$ ٤) $\sqrt{۱۰۷}$

حل:

$$MA^۲ + MC^۲ = MB^۲ + MD^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ + ۴^۲ = ۳^۲ + MC^۲ \Rightarrow MC^۲ = ۱۰۷ \Rightarrow MC = \sqrt{۱۰۷}$$

لوزی:

تعریف: لوزی چهارضلعی‌ای است که چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند. می‌توان ثابت کرد که اضلاع لوزی دوبه‌دو متوازیند. بنابر این لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع مجاور آن مساوی یکدیگر است.

لوزی همه خواص متوازی‌الاضلاع را دارد و علاوه بر آنها دارای خاصیت دیگری است که با قضیه زیر بیان می‌شود:

در لوزی قطرها بر هم عمودند و زاویه‌ها را نصف می‌کنند.

قضایای عکس:

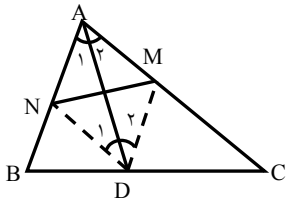
۱- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود باشد، لوزی است.

۲- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش نیمساز زاویه‌ها باشد، لوزی است.

مثال: در مثلث ΔABC از نقطه D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن دو را در نقاط N,M قطع کند. MN و AD نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) فقط عمود بر هم ۲) فقط منصف هم ۳) زاویه بین آنها مکمل A ٤) عمود منصف هم

حل: گزینه ٤ صحیح است.



موازی- مورب

$$ND // AM \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{D}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1 \Rightarrow AN = ND$$

$$MD // AN \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{D}_2 = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{A}_2 \Rightarrow AM = MD$$

لذا چون اضلاع چهار ضلعی **ANDM** دوبه‌دو موازیند، لذا چهار ضلعی متوازی الاضلاع است، و چون اضلاع مجاور مساویند. لذا چهارضلعی لوزی است. و در لوزی اقطار عمود بر هم و منصف هم هستند لذا خطوط **NM, AD** عمود منصف هم هستند. به طور کلی در هر متوازی‌الاضلاع که قطرها نیمساز زوایا باشند، متوازی‌الاضلاع لوزی خواهد بود.

مربع:

تعریف: مربع چهارضلعی‌ای است که زاویه‌هایش قائمه و چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند. با توجه به آنچه ذکر شد از قائمه بودن زاویه‌ها می‌توان نتیجه گرفت که مربع نوع خاصی مستطیل و نوع خاصی متوازی‌الاضلاع است و از تساوی چهار ضلع نیز نتیجه می‌گیریم که مربع نوعی لوزی است. بنابر این مربع همه خواص متوازی‌الاضلاع و مستطیل و لوزی را دارد و با توجه به قضایای عکس می‌توان گفت:

۱- مستطیلی که قطرهای آن عمود بر یکدیگر باشد، مربع است.

۲- مستطیلی که قطرهای آن زاویه‌هایش را نصف کند، مربع است.

۳- لوزی که زاویه‌های آن متساوی باشد، مربع است.

٤- لوزی که قطرهای آن متساوی باشد، مربع است.

مثال: کدام گزینه یک مربع را مشخص می‌کند؟

۱) لوزی ای که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد.
۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشد.
۳) متوازی الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشد.
٤) ذوزنقه ای که دو زاویه قائمه داشته باشد.

حل:

اگر دو قطر یک مستطیل بر هم عمود باشند، اضلاع مجاورش نیز با هم مساویند، لذا مربع است. اما مثال نقض برای گزینه (۱) لوزی ای است که یک زاویه ۶۰° داشته باشد و برای گزینه (۳)، مستطیل و برای گزینه (٤) ذوزنقه قائم الزاویه است.

مثال: کدام گزینه صحیح است؟

۱) مربع لوزی ای است، که اقطارش مساویند.
۲) هر چهارضلعی که اقطارش بر هم عمود باشد، مربع است.
۳) هر متوازی الاضلاع که اقطارش بر هم عمود باشد، مربع است.
٤) هر ذوزنقه که یک زاویه قائمه داشته باشد، مربع است.

حل:

اگر اقطار یک لوزی با هم مساوی باشند، اضلاعش نیز بر هم عمودند. برای گزینه های (۲) و (۳)، مثال نقض لوزی و برای گزینه (٤)، مثال نقض ذوزنقه قائم الزاویه است.

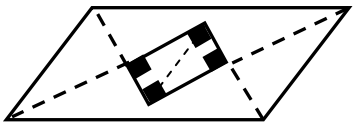
مثال: در مربعی مجموع یک ضلع و قطر برابر با $2+\sqrt{8}$ می‌باشد. مساحت مربع چقدر است؟

حل:

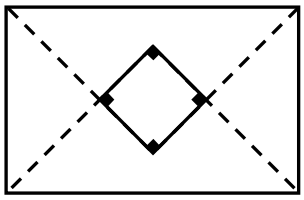
$$a + a\sqrt{2} = 2 + \sqrt{8} = 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow S = a^2 = 4$$

موسسه آموزشی فرهنگی

نکات تکمیلی متوازی الاضلاع، مستطیل، لوزی، مربع:



۱- از برخورد نیمسازهای داخلی هر متوازی الاضلاع یک مستطیل ایجاد می‌شود. اگر طول و عرض متوازی الاضلاع b,a و یکی از زوایای آن برابر α باشد، مستطیلی با اضلاع $|a-b|\sin\frac{\alpha}{۲},|a-b|\cos\frac{\alpha}{۲}$ ایجاد می‌شود. و از برخورد نیمسازهای خارجی آن متوازی الاضلاع نیز مستطیل دیگری به اضلاع $|a+b|\sin\frac{\alpha}{۲},|a+b|\cos\frac{\alpha}{۲}$ ایجاد می‌شود.



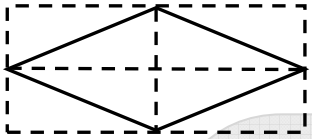
از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل یک مربع ایجاد می‌شود. اگر طول و عرض مستطیل b,a باشد، هر ضلع این مربع برابر است با:

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{۲}}$$

و از برخورد نیمسازهای خارجی این مستطیل نیز مربع دیگری ایجاد می‌شود که ضلع آن برابر است با:

$$\frac{a+b}{\sqrt{۲}}$$

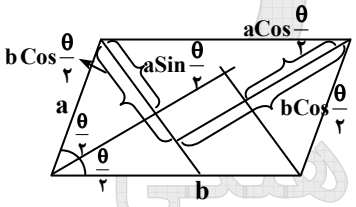
نیمسازهای داخلی مربع در یک نقطه همرسند و نیمسازهای خارجی مربعی به ضلع a یک مربع به ضلع $a\sqrt{۲}$ می سازد.



نیمسازهای داخلی هر لوزی در یک نقطه همرسند و نیمسازهای خارجی یک لوزی به ضلع a و زاویه ای برابر α، مستطیلی با طول و عرض $۲a\sin\frac{\alpha}{۲},۲a\cos\frac{\alpha}{۲}$ می‌سازد.

مثال: در یک متوازی‌الاضلاع، طول اضلاع ۵ و ۹ واحد و یک زاویه ٦۰ درجه است. مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیم‌سازهای داخلی این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

حل:



از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع مستطیلی با اضلاع $|a-b|\sin\frac{\theta}{۲}$ و $|a-b|\cos\frac{\theta}{۲}$ به دست می‌آید.

$$S=|a-b|\cos\frac{\theta}{۲}\times|a-b|\sin\frac{\theta}{۲}=|a-b|^۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}$$

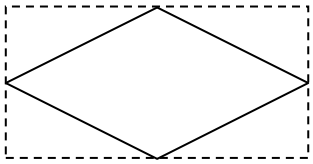
$$\rightarrow S=\frac{۱}{۲}|a-b|^۲\sin\theta=\frac{۱}{۲}|۹-۵|^۲\sin۶۰=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱۶=۴\sqrt{۳}$$

مثال: از برخورد نیمسازهای خارجی یک مستطیل به ابعاد ٦ و ٤ یک چهارضلعی پدید می‌آید. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

حل: از برخورد نیمسازهای خارجی یک مستطیل به طول a و عرض b، مربعی به ضلع $\frac{a+b}{\sqrt{۲}}$ حاصل می‌شود.

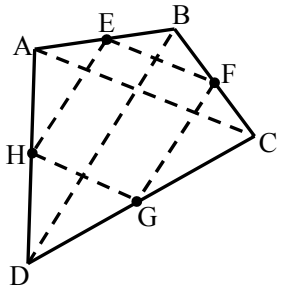
$$\Rightarrow S=\left(\frac{۴+۶}{\sqrt{۲}}\right)^۲=\frac{۱۰۰}{۲}=۵۰$$

مثال: در یک لوزی با زاویه ۶۰° و ضلع $۶\sqrt{۳}$، اندازه طول مستطیل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای خارجی آن کدام است؟

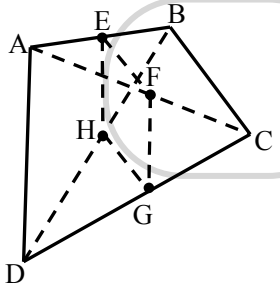


حل: از برخورد نیمسازهای خارجی یک لوزی به ضلع **a** و یکی از زوایای **θ**، مستطیلی با طول $۲a\cos\frac{\theta}{۲}$ و عرض $۲a\sin\frac{\theta}{۲}$ ایجاد می‌شود. لذا:

$$\text{طول مستطیل} = ۲a\cos\frac{\theta}{۲} = ۲\times۶\sqrt{۳}\cos\frac{۶۰}{۲} = ۱۸$$



۲- اگر اوساط اضلاع یک چهارضلعی دلخواه را به ترتیب به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک متوازی الاضلاع است که مساحتش نصف مساحت چهارضلعی مورد نظر و محیطش برابر مجموع اقطار چهارضلعی است.



در حالت خاص اوساط اضلاع یک مستطیل رئوس یک لوزی و اوساط اضلاع یک لوزی، رئوس یک مستطیل است. همچنین اوساط اضلاع یک مربع نیز، رئوس یک مربع می‌باشد. همچنین وسطهای هر دو ضلع مقابل یک چهار ضلعی و وسطهای قطرهای آن نیز رأسهای یک متوازی الاضلاعند (به شرط اینکه قطرها یکدیگر را نصف نکنند)

مثال: در کدام چهارضلعی اوساط اضلاع، رأسهای یک لوزی می باشد؟

۱) دو ضلع مجاور چهار ضلعی متساوی باشند.
۲) دو ضلع مجاور چهار ضلعی بر هم عمود باشند.
۳) دو قطر چهارضلعی بر هم عمود باشند.
٤) دو قطر چهارضلعی متساوی باشند.

حل:

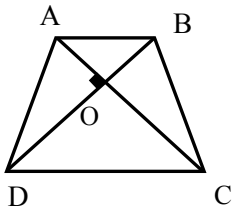
پاره‌خط‌هایی که وسطهای ضلعهای چهارضلعی را به هم وصل می کنند، موازی قطر چهارضلعی و نصف آن هستند. بنابر این اگر، قطرهای چهارضلعی مساوی باشند، چهارضلعی حاصل لوزی است.

مثال: وسطهای ضلعهای یک چهارضلعی، رأسهای مربعی به ضلع ۸ می‌باشد. مساحت چهارضلعی کدام است؟

حل:

$$S_{\text{مربع}} = ۸^۲ = ۶۴ \Rightarrow S' = ۲\times۶۴ = ۱۲۸$$

مثال: اگر در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، قطرها بر هم عمود باشند، وسطهای اضلاع راسهای کدام چهارضلعی‌اند؟

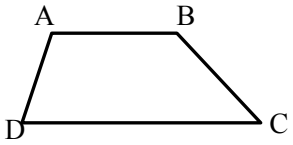


۱) مستطیل
۲) لوزی
۳) مربع
٤) متوازی الاضلاع

حل:

چون اضلاع متوازی الاضلاع حاصل از وصل کردن اوساط اضلاع بهم، موازی قطرهای چهار ضلعی اولیه و نصف طول قطر متناظرشان هستند و در اینجا قطرها بر هم عمودند، پس متوازی الاضلاع حاصل مستطیل است. و چون در ذوزنقه‌ی متساوی الساقین قطرها مساویند پس مستطیل حاصل مربع است.

ذوزنقه:



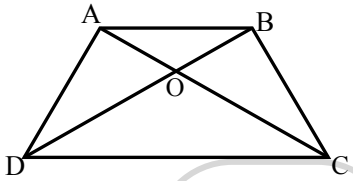
تعریف: ذوزنقـه چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.

در ذوزنقه هر یک از دو ضلع متوازی را یک قاعده و هر یک از دو ضلع ناموازی را یک ساق می‌گوییم.

در ذوزنقه دو زاویه مجاور به هر ساق مکمل یکدیگرند.

ذوزنقه انواع گوناگون دارد که هر یک از آنها بر حسب وضع ساقها نسبت به دو قاعده یا وضع خود دو ساق مشخص می‌شود.

ذوزنقه متساوی الساقین:



ذوزنقه متساوی‌الساقین آن است که دو ساق آن متساوی باشند.

قضیه: در ذوزنقه متساوی‌الساقین:

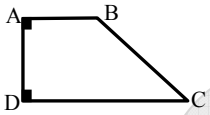
۱- دو زاویه مجاور به هر قاعده با یکدیگر متساویند.

۲- دو قطر با یکدیگر متساویند.

قضیه عکس:

هر ذوزنقه که دو زاویه مجاور به یک قاعده آن، یا دو قطر آن، متساوی باشند، متساوی‌الساقین است.

ذوزنقه قائم‌الزاویه:



ذوزنقه قائم‌الزاویه آن است که یکی از ساقهای آن بر دو قاعده عمود باشد در شکل مقابـل ذوزنقـه ABCD قائم الزاویه است که در آن CD و AB بر AD عمودند.

مثال: کدام گزینه درست نیست؟

۱) متوازی الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود باشند، لوزی است.

۲) ذوزنقه ای که دو قطرش برابر باشند، متساوی الساقین است.

۳) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشند، مربع است.

٤) هر چهارضلعی که دو ضلعش برابر باشند، ذوزنقه است.

حل:

مثال نقض گزینه (٤) متوازی الاضلاع است.

مثال: در یک چهارضلعی دو قطر برابر و دو ضلع روبرو مساویند. الزاماً کدام گزاره در مورد این چهارضلعی درست است؟

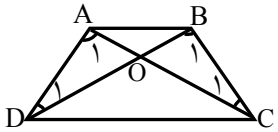
۱) دو قطر عمود بر یکدیگر می‌باشند.

۲) دو قطر با یک نسبت متقاطعند.

۳) دو زاویه مقابل مساویند.

٤) تفاضل دو زاویه مقابل، ۹۰° است.

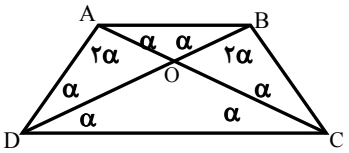
حل:



$$\left.\begin{array}{l} AD = BC : \text{ذوزنقه متساوی‌الساقین} \\ BD = AC : \text{ذوزنقه متساوی‌الساقین} \\ DC = DC : \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC = \Delta BCD \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADO = \Delta BOC \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

دلیلی برای اثبات گزینه های دیگر در دسترس نیست.

مثال: در یک ذوزنقه متساوی الساقین، ساقها با قاعده کوچک و قطرها با قاعده بزرگ مساویند. یکی از زاویه های این ذوزنقه برابر با کدام است؟



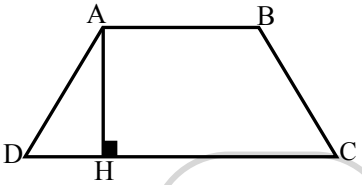
۱) ۶۰° ۲) ۷۲°

۳) ۸۰° ۴) ۴۵°

حل:

$$\alpha + ۲\alpha + ۲\alpha = ۱۸۰ \rightarrow \alpha = ۳۶^\circ \rightarrow A = B = ۱۰۸^\circ \,,\, C = D = ۷۲^\circ$$

نکات:

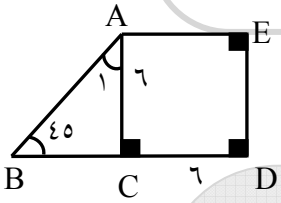


۱- مساحت ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب نصف ارتفاع در مجموع دو قاعده:

$$S = \frac{۱}{۲} AH \times (AB + CD)$$

مثال: یک زاویه ذوزنقه قائم الزاویه ای ۴۵° است. اگر ارتفاع و قاعده کوچک ذوزنقه هر دو ٦cm باشند، مساحت ذوزنقه چند سانتی‌متر مربع است؟

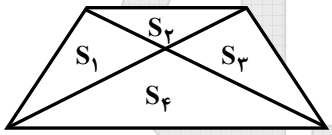
حل:



$$\hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B} = ۴۵^\circ \Rightarrow AC = BC \Rightarrow BC = ۶$$

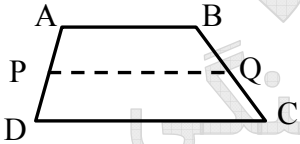
$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}(۶ + ۱۲) \times ۶ = ۵۴$$

۲- اگر در ذوزنقه دو قطر را رسم کنیم، مساحت مثلث‌های متکی بر دو ساق با هم برابر است و مساحت هر کدام از این مثلث‌های متکی بر ساق، واسطه هندسی بین مساحتهای مثلث‌های متکی بر قاعده‌هاست.



$$\left.\begin{array}{l} S_۱ = S_۳ \\ S_۱ S_۳ = S_٤ S_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow S_۱ = S_۳ = \sqrt{S_۲ S_٤}$$

۳- پاره خطی که وسطهای ساقهای یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی با دو قاعده آن و برابر با نصف مجموع دو قاعده است.



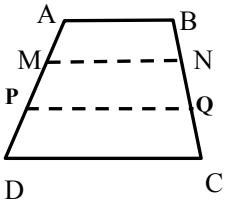
$$PQ \parallel AB \parallel CD$$

$$PQ = \frac{AB + CD}{۲}$$

در حالت کلی اگر $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} = \frac{m}{n}$ خواهیم داشت: $PQ = \frac{nAB + mCD}{n + m}$

مثال: در ذوزنقه ABCD اگر $AB = ٤$ و $CD = ۸$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{۱}{۳}$ باشد، آن گاه MN کدام است؟

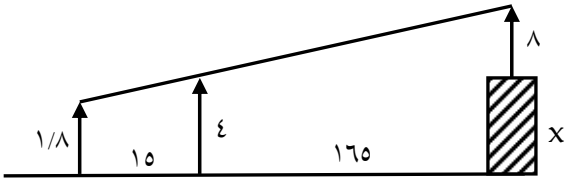
حل:



$$\left.\begin{array}{l} MN = \frac{AB + PQ}{۲} \\ PQ = \frac{MN + DC}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow MN = \frac{AB + \frac{MN + DC}{۲}}{۲} \Rightarrow$$

$$MN = \frac{۲AB + MN + DC}{۴} \Rightarrow \frac{۳MN}{۴} = \frac{۲AB + CD}{۴} \Rightarrow MN = \frac{۲AB + CD}{۳} = \frac{۸ + ۸}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

مثال: در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ٤ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟



حل:

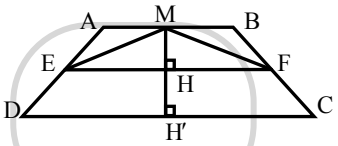
طبق رابطه در حالت کلی داریم:

$$۴=\frac{۱۶۵\times ۱/۸+۱۵\times(۸+x)}{۱۵+۱۶۵}$$

پس $x=۲۰/۲$

مثال: در ذوزنقه ABCD نقطه M وسط AB، E وسط AD و F وسط BC است. مساحت ذوزنقه، چند برابر مساحت مثلث MEF است؟

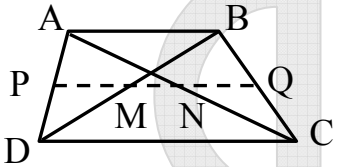
حل:



$$EF=\frac{AB+CD}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta MEF}=\frac{۱}{۲}MH\times EF=\frac{۱}{۲}MH\times\left(\frac{AB+CD}{۲}\right) \\ \left.\begin{array}{l} S_{ABCD}=MH'\times\left(\frac{AB+CD}{۲}\right) \\ MH'=۲MH \end{array}\right\}\Rightarrow S_{ABCD}=MH\times(AB+CD) \end{array}\right\}\Rightarrow S_{ABCD}=۴S_{\Delta MEF}$$

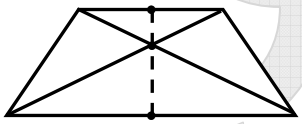
٤ - اگر در ذوزنقه ABCD، P وسط AD و Q وسط BC باشد و نیز قطرهای AC و BD را رسم کرده باشیم، آنگاه:



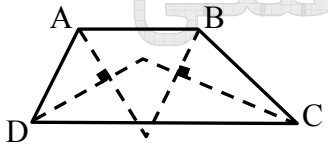
$$PM=QN$$

$$MN=\frac{CD-AB}{۲}$$

۵- در ذوزنقه خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند. از محل تلاقی قطرها می‌گذرد.



٦- از برخورد نیمسازهای زوایای یک ذوزنقه، یک چهار ضلعی محاطی حاصل می‌شود. در حالت خاص از برخورد نیمسازهای یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین یک چهارضلعی محیطی و محاطی حاصل می‌شود.



مؤسسه آموزشی فرهنگی

قضیه‌ی تالس، تشابه:

نسبت و تناسب

خواص نسبت‌های مساوی:

ترکیب و تفضیل در مخرج: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$

ترکیب و تفضیل در صورت: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=k$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{\alpha a\pm\beta c}{\alpha b\pm\beta d}$$

مثال: اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار عبارت $\frac{۲a+۲b}{a+۲b}$ کدام است؟

حل:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{a+b}{a+۲b}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{۲a+۲b}{a+۲b}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

مثال: اگر داشته باشیم $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}$، به جای y,x چه اعدادی می‌تواند نوشته شود تا تناسب $\frac{a+b+c}{x}=\frac{a}{y}$ برقرار باشد؟

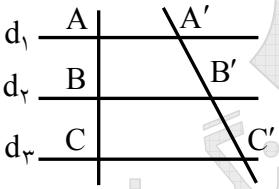
۱) $x=۳,y=۱۵$ ۲) $x=۳,y=۳$ ۳) $x=۷,y=۳$ ۴) $x=۱۵,y=۳$

حل:

$$\frac{a+b+c}{۳+۵+۷}=\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}\Rightarrow\frac{a+b+c}{۱۵}=\frac{a}{۳}$$

قضیه‌ی تالس و نتایج آن

قضیه‌ی دسته خطوط موازی با فواصل مساوی:



قضیه: اگر چند خط موازی یک خط را قطع کنند و بر آن پاره‌خط‌های متساوی پدید آورند، بر هر خط دیگری که آنها را قطع کند، پاره‌خط‌های متساوی پدید خواهد آورد.

$$\left.\begin{array}{l}d_۱\parallel d_۲\parallel d_۳\\ AB=BC=\cdots\end{array}\right\}\Rightarrow A'B'=B'C'=\cdots$$

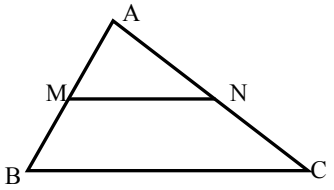
نتیجه ۱: در هر صفحه خط‌های موازی که بر یک خط، پاره خط‌های متساوی پدید می‌آورند دوبه‌دو به طور متوالی متساوی‌الفاصله‌اند.

نتیجه ۲: در هر صفحه خط‌های موازی که دوبه‌دو و به طور متوالی به یک فاصله باشند، بر هر خط که آنها را قطع کند پاره خط‌های متساوی پدید خواهند آورد.

تذکر: عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست یعنی اگر چند خط روی دو خط، پاره خط‌های متناسب پدید آورند، لزوماً موازی نیستند.

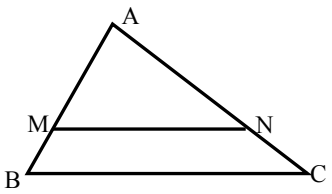
قضیه‌ی تالس و عکس آن:

قضیه: خطی که موازی یک ضلع مثلث رسم شود بر دو ضلع دیگر یا بر امتداد آن‌ها، پاره‌خط‌های متناظر پدید می‌آورد که با اضلاع متناظر از آن مثلث متناسبند. بر عکس اگر خطی دو ضلع مثلث یا امتداد آنها را قطع کند و بر آن دو ضلع پاره‌خط‌های متناظر با دو ضلع مزبور پدید آورد، با ضلع سوم مثلث موازی خواهد.



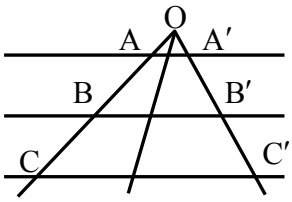
$$MN\parallel BC\Leftrightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

نتیجه ۱: خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، با دو ضلع دیگر یا با امتدادهای آن‌ها مثلثی پدید می‌آورد که ضلعهای آن نظیر به نظیر با اضلاع مثلث مزبور متناسبند.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

نتیجه ۲: پاره خط‌هایی که چند خط متوازی بر دو خط همرس پدید می‌آورند، نظیر به نظیر متناسبند و در هر صفحه خط‌های نامتوازی که چند خط متوازی را قطع کنند و توسط خطوط موازی بر آنها پاره خط‌های نظیر به نظیر متناسب پدید آید، همرسند.

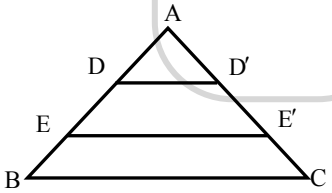


$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = ...$$

$$\Rightarrow AC\ ,A'C'\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots$$ همرسند

مثال: در شکل روبرو $BC = ۸$ ، $AD = DE = EB$ و $DD' \parallel EE' \parallel BC$ می‌باشد. $DD' + EE'$ کدام است؟

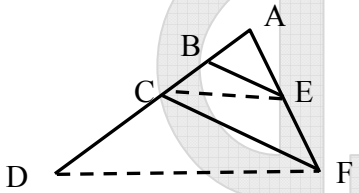
حل:



$$\left.\begin{array}{l} DD' \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DD'}{BC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow DD' = \frac{۸}{۳} \\ EE' \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EE'}{BC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow EE' = \frac{۱۶}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow DD' + EE' = ۸$$

مثال: در شکل مقابل $CE \parallel DF$, $BE \parallel CF$ و $AB = ۵$ و $BC = ۳$ ، آنگاه اندازه CD کدام است؟

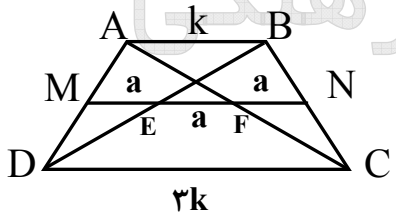
حل:



$$\left.\begin{array}{l} BE \parallel CF \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AF}{EF} \\ CE \parallel DF \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{۵}{۳} = \frac{۵+۳}{CD} \Rightarrow CD = ۴/۸$$

مثال: در یک ذوزنقه قاعده بزرگ سه برابر قاعده کوچک است. پاره‌خطی موازی با قاعده و محدود به ساقها توسط قطرها به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. این پاره‌خط ساقها را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

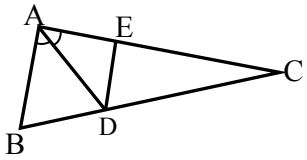
حل:



$$\Delta ADC : MF \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MF}{DC} = \frac{۲a}{۳k}$$
$$\Delta ADB : MF \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{AD} = \frac{ME}{AB} = \frac{a}{k} \Rightarrow \frac{AM}{DM} = \frac{۲}{۳}$$

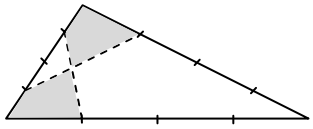
مثال: در شکل مقابل $۵AB = ۳AC = ۶۰$ و AD نیمساز زاویه A است $DE \parallel AB$ اندازه‌ی EC کدام است؟

حل:



$$ED \parallel AB \rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{۲۰}{۱۲} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{EC}{۲۰ - EC} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow EC = ۱۲/۵$$

مثال: در شکل مقابل هر ضلع مثلث به ٤ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهار ضلعی سایه‌زده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



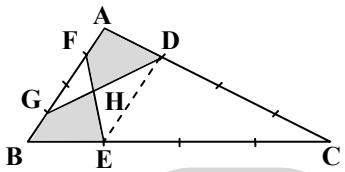
۱) هم‌مساحت

۲) هم‌محیط

۳) همنهشت

٤) متشابه

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

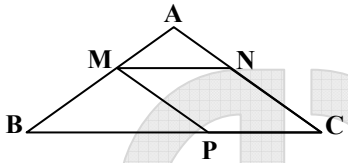


با توجه به این‌که $\frac{AD}{AC}=\frac{BE}{BC}=\frac{۱}{۴}$، نتیجه می‌گیریم که DE موازی AB می‌باشد. بنابراین نقاط E و D از خط AB به یک فاصله‌اند و چون $BF=AG=\frac{۳}{۴}AB$، در نتیجه دو مثلث ADG و FEB هم مساحت هستند؛ زیرا قاعده و ارتفاع مساوی دارند. حال اگر از هر دو مثلث مساحت GFH را کم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$S_{BGHE}=S_{AFHD}$$

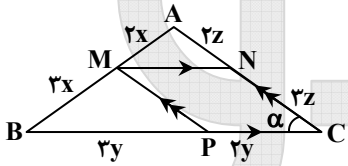
مثال: در شکل مقابل، $AM=\frac{۲}{۳}MB$ و چهارضلعی MNCP متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟

حل:



$$AM=\frac{۲}{۳}MB \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۳}$$

$$MP \parallel AC \xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PC}=\frac{۳}{۲}$$



$$\frac{S_{\text{متوازی الاضلاع}}}{S_{ABC}}=\frac{۲y\times ۳z\times \sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\times ۵y\times ۵z\times \sin\alpha}=\frac{۶}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۴۸}{۱۰۰}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ٤٨ درصد مساحت مثلث ABC است.

راه حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \Rightarrow AMN \simeq ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^۲=\left(\frac{۲}{۵}\right)^۲=\frac{۴}{۲۵} \\ MP \parallel AC \Rightarrow BMP \simeq ABC \Rightarrow \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}}=\left(\frac{BM}{AB}\right)^۲=\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲=\frac{۹}{۲۵} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{MNCP}=S_{ABC}-\frac{۴}{۲۵}S_{ABC}-\frac{۹}{۲۵}S_{ABC}=\frac{۱۲}{۲۵}S_{ABC}=٪۴۸S_{ABC}$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

شکل‌های متشابه:

در هندسه منحصراً وقتی از وجود تشابه بین دو شکل سخن می‌گوییم که از حیث ساختمان و همچنین از لحاظ اندازه‌ها بین اجزای دو شکل نسبتهای معین وجود داشته باشد. به عبارت دیگر یکی از شکل‌ها بزرگ و یا کوچک شده دیگری باشد. تساوی حالت خاصی از تشابه می‌باشد.

شکلهای متشابه دارای ویژگیهای یکسانی هستند. مثلاً دو چند ضلعی در صورتی متشابه هستند که بین اجزای آنها از لحاظ ساختمان، و توالی اضلاع تناظر یک به یک وجود داشته باشد و زاویه‌های متناظر آنها متساوی و پاره خط‌های متناظر به یک نسبت باشند. مثلاً دو مربع همواره متشابهند.

تعریف: دو n ضلعی متشابهند هرگاه زوایای متناظر آنها متساوی و اضلاع متناظر آنها متناسب باشند.

مثال: کدام دو چهار ضلعی متشابهند؟

۱) دو مستطیل
۲) دو متوازی الاضلاع که زوایای مساوی داشته باشند.
۳) دو لوزی که یک زاویه‌ی مساوی داشته باشند.
۴) دو ذوزنقه متساوی الساقین که زوایای مساوی داشته باشند.

حل:

اگر یک زاویه‌ی دو لوزی مساوی باشد، کلیه زوایای آنها مساوی است و اضلاع آنها نیز متناسبند.

مثال: در کدام حالت دو مستطیل متشابهند؟

۱) طول دو مستطیل برابر باشد.
۲) زاویه‌ی بین دو قطر برابر باشد.
۳) قطر دو مستطیل برابر باشد.
۴) همواره متشابهند.

حل:

اگر دو مستطیل بخواهند متشابه باشند، باید نسبت طول به عرض در آنها مقدار ثابتی باشد. اگر زاویه‌ی بین دو قطر دو مستطیل با هم برابر باشد، می‌توان ثابت کرد که نسبت طول به عرض در این دو مستطیل با هم برابر است. اما از برابری طول یا قطر دو مستطیل نمی‌توان نتیجه گرفت که نسبت طول به عرض در آنها مقدار ثابتی است.

حالات تشابه دو مثلث:

از آنچه از تعریف تشابه دو چند ضلعی ذکر شد، می‌توان نتیجه گرفت که: دو مثلث وقتی متشابهند که زاویه‌های آنها دوبه‌دو متساوی و ضلعهای روبه‌روی زاویه‌های متساوی متناسب باشند.

اما به سبب بعضی ویژگیهای مثلث، پاره‌ای از شرایط تشابه، از شرایط دیگر قابل نتیجه‌گیری می‌باشد. بنابراین تشابه دو مثلث را با شرایط کمتری می‌توان بررسی نمود.

قضیه: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر متساوی باشند، آن دو مثلث متشابهند.

قضیه: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه‌های بین آن اضلاع با یکدیگر متساوی باشند، آن دو مثلث متشابهند.

قضیه: اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد، آن دو مثلث متشابهند.

نکته: دو مثلث **قائم الزاویه** در حالات زیر نیز متشابهند:

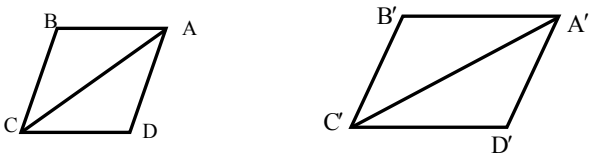
۱- اگر دو مثلث قائم الزاویه یک زاویه حاده برابر داشته باشند، متشابهند.

۲- اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.

۳- اگر وتر و ارتفاعهای نظیر، نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.

تشابه در چندضلعی‌ها:

برای اثبات گزاره‌های مربوط به تشابه، چندضلعی‌ها، آنها را با رسم قطرهای متناظر به چند مثلث تجزیه کرده و ویژگیهای چند ضلعی‌ها را از گزاره‌های مربوط به تشابه مثلث‌ها نتیجه می‌گیریم.



قضیه: در دو چندضلعی محدب متشابه قطرهایی که از رأسهای متناظر دو چند ضلعی رسم می‌شوند، چند ضلعی‌ها را به مثلث‌های متناظری که دوبه‌دو متشابه هستند تجزیه می‌کنند.

تناسب اجزا و مساحت‌های شکل‌های متشابه:

در دو شکل متشابه نسبت هر دو جزء طولی متناظر مقداری ثابت است که آن را نسبت تشابه آن دو شکل می‌نامند.

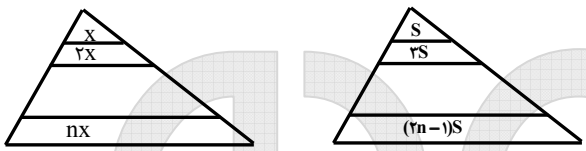
در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ همواره داریم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{h_a}{h_{a'}}=\frac{h_b}{h_{b'}}=\frac{h_c}{h_{c'}}=\frac{m_a}{m_{a'}}=\frac{m_b}{m_{b'}}=\frac{m_c}{m_{c'}}=\frac{d_a}{d_{a'}}=\frac{d_b}{d_{b'}}=\frac{d_c}{d_{c'}}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{۲p}{۲p'}=k$$

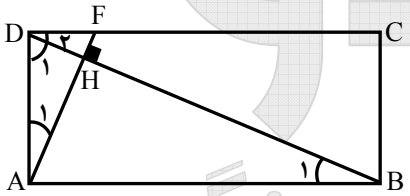
$$\frac{S}{S'}=k^{۲}$$

نسبت تشابه: k شعاع دایره محاطی: r شعاع دایره محیطی: R ارتفاع: h نیمساز: d میانه: m

نکته: اگر پاره‌خط‌های موازی هم، دو ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنند، طول پاره‌خط‌های موازی تصاعد عددی با قدر نسبت x و مساحت ناحیه‌های افراز شده تصاعد عددی با قدر نسبت ۲ می‌سازند.



مثال: در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. F نقطه‌ای است روی ضلع DC به طوری که $AF \perp BD$. اگر $AB = ۳AD$ باشد، DC چند برابر DF است؟



حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\\ \left.\begin{array}{l}\hat{B}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{A}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}_۱\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABH\sim\Delta ADH\Rightarrow \frac{AH}{DH}=\frac{AB}{AD}=\frac{BH}{AH}=۳\Rightarrow \left.\begin{array}{l}AH=۳DH\\ BH=۳AH\end{array}\right\}\Rightarrow BH=۹DH$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_۳=\hat{H}_۲\\ AB//DC\Rightarrow \hat{D}_۲=\hat{B}_۱\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABH\sim\Delta DHF\Rightarrow \frac{BH}{DH}=\frac{AH}{FH}=\frac{AB}{DF}=۹\Rightarrow AB=۹DF\overset{AB=CD}{\Rightarrow} CD=۹DF$$

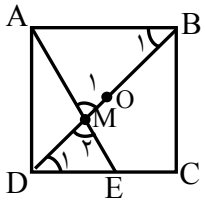
مثال: مثلثی به اضلاع ۳، ۵ و ۷ با مثلثی به اضلاع ۵، x و y متشابه است. اگر $x>۵$ و $y>۵$ باشد، $x+y$ کدام است؟

حل:

چون $x>۵$ و $y>۵$ است، لذا ۵ کوچکترین ضلع مثلث است. لذا داریم:

$$\frac{x}{۷}=\frac{y}{۵}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow y=\frac{۲۵}{۳},x=\frac{۳۵}{۳}\Rightarrow x+y=\frac{۶۰}{۳}=۲۰$$

مثال: در یک مربع به ضلع $4\sqrt{2}$ پاره‌خطی که رأس **A** را به نقطه‌ی **E** وسط ضلع **CD** متصل می‌کند، قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصله نقطه M از وسط مربع کدام است؟

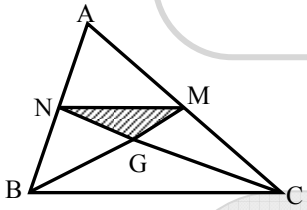


حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_1=\hat{M}_2\\ AB\parallel CD\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABM\sim\Delta DME\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{MD}{MB}=\dfrac{1}{2}\\ DB=4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=8\end{array}\right\}\Rightarrow MD=\frac{1}{3}DB=\frac{8}{3}\Rightarrow MO=DO-MD=\frac{8}{2}-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

مثال: در مثلث ABC، نسبت مساحت مثلثی که یک رأس آن مرکز ثقل و دو رأس دیگرش وسط اضلاع AB و AC باشند به مساحت مثلث ABC کدام است؟

حل:



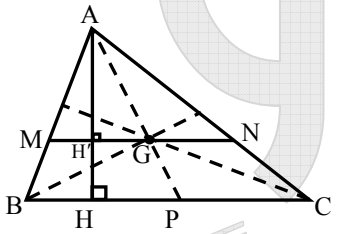
$$\Delta GMN\sim\Delta GBC\Rightarrow\frac{S_{\Delta GMN}}{S_{\Delta GBC}}=\left(\frac{MN}{BC}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$S_{\Delta GBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta GMN}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{12}S_{\Delta ABC}$$

مثال: از نقطه G محل تلاقی سه میانه مثلث ABC خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا دو ضلع دیگر را در نقاط M و N قطع کند، نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟

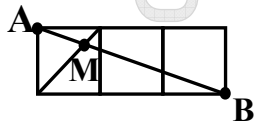
حل:



$$\frac{MN}{BC}=\frac{AH'}{AH}=\frac{AG}{AP}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

مثال: در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند، فاصله **MA** چند برابر $\sqrt{10}$ است؟

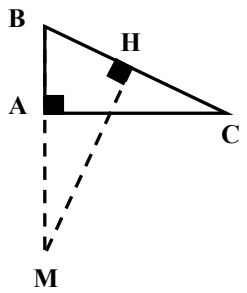
حل:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{1}{3}\to\frac{AM}{AM+MB}=\frac{1}{4}\to\frac{AM}{AB}=\frac{1}{4}\to AM=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{4}\sqrt{10}$$

مثال: اندازه‌ی دو ضلع قائم ازمثلّث قائم الزّاویه ای ۲ , ٦ واحد است.عمود منصّف وترامتداد ضلع کوچکتر را در **M** قطع می‌کند. فاصله‌ی **M** از نزدیکترین رأس این مثلّث چند واحد است؟

حل:

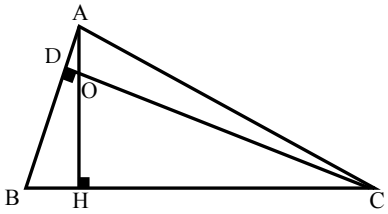


$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{A}=\hat{H}=90^\circ\end{array}\right\}\to ABC\approx BMH\to\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{BM}$$

$$\to\frac{2}{\frac{\sqrt{40}}{2}}=\frac{\sqrt{40}}{2+AM}\to 2+AM=10\to AM=8$$

مثال: در شکل مقابل AH و CD دو ارتفاع مثلّث ABC هستند. اگر $\frac{۱}{۳}OH = AD = ۵DO = ۱۲$ باشد، طول HC کدام است؟

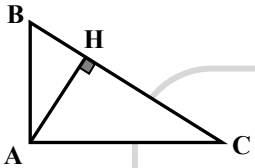
حل:



$$ADO \approx OHC \rightarrow \frac{DO}{OH} = \frac{AD}{HC} \rightarrow \frac{\frac{۱۲}{۵}}{۳۶} = \frac{۱۲}{HC} \rightarrow HC = ۱۸۰$$

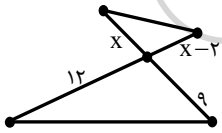
مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC ($A = ۹۰^\circ$)، $AC = ۲AB$ و ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟

حل:



$$ABH \approx AHC \rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \left(\frac{BH}{CH}\right)^۲ = \left(\frac{AB}{AC}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \rightarrow S_{ABC} = ۵S_{ABH}$$

مثال: در شکل مقابل دو مثلث متشابهند. نسبت مساحت آن دو مثلث کدام است؟

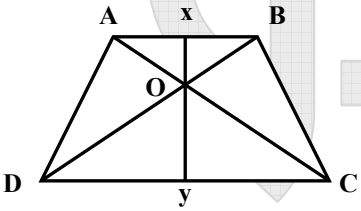


حل: چون در شکل دو ضلع غیر موازی کشیده شده پس: $\frac{x-۲}{۹} = \frac{x}{۱۲} \rightarrow x = ۸$

لذا: $\frac{S}{S'} = \left(\frac{x-۲}{۹}\right)^۲ = \frac{۴}{۹}$

مثال: اندازه‌ی دو قاعده‌ی یک ذوزنقه ٦ و ۹ واحد و طول پاره خطی که دو نقطه‌ی وسط قاعده ها را بهم متصل می‌کند، برابر۱۲ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو قطر این ذوزنقه از وسط قاعده‌ی کوچکتر چقدر است؟

حل:



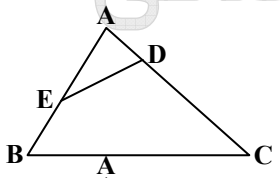
خط واصل بین وسط دو قاعده حتماً از وسط دو قطر می گذرد.

مثلث OxA با OyC متشابه است پس $\frac{Ax}{yC} = \frac{Ox}{Oy}$

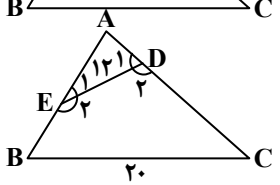
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴/۵} = \frac{Ox}{Oy} = \frac{Ox}{۱۲ - Ox} \Rightarrow Ox = ۴/۸$$

مثال: در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هم‌اند. اگر $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$، آن‌گاه مساحت چهارضلعی BCDE چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

حل: دو مثلث $\overset{\Delta}{AED}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابه‌اند زیرا:



$$\begin{cases} \hat{C} + \hat{E}_۲ = ۱۸۰ & \text{فرض} \\ \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۱۸۰ & \text{از طرفی} \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}_۱$$



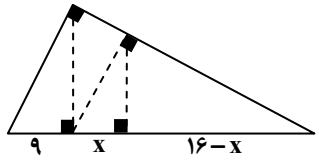
و

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D}_۲ = ۱۸۰ & \text{فرض} \\ \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۸۰ & \text{از طرفی} \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_۱$$

پس دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $k = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$ است پس:

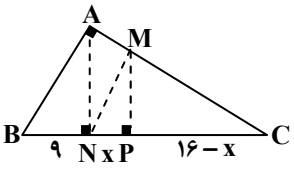
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AED}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}} - S_{\overset{\Delta}{AED}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۲۵-۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{EDCB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۱۶}{۲۵} = ۰/۶۴$$

مثال: در شکل مقابل ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟



حل:

از آن‌جا که MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می‌باشند، با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel AB \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{۱۶}{۹}$$

$$\overset{\Delta}{ACN}: MP \parallel AN \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{۱۶-x}{x}$$

چون نسبت $\frac{CM}{MA}$ در هر دو تناسب وجود دارد به راحتی نتیجه می‌گیریم که $\frac{CN}{NB} = \frac{CP}{PN}$ است، یعنی:

$$\frac{۱۶}{۹} = \frac{۱۶-x}{x} \Rightarrow ۱۶x = ۱۴۴ - ۹x \Rightarrow ۲۵x = ۱۴۴ \Rightarrow x = \frac{۱۴۴}{۲۵} = \frac{۵۷۶}{۱۰۰} = ۵/۷۶$$

مثال: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل:

می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو مثلث است. اگر نسبت تشابه دو مثلث را K در نظر بگیریم، چون نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع (یا همان نسبت تشابه) است، داریم:

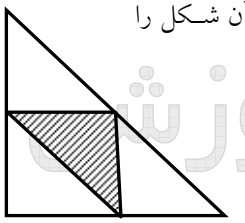
$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{۲}{۳} \times \text{نسبت اضلاع} \Rightarrow k^۲ = \frac{۲}{۳}k \xrightarrow[(k\neq ۰)]{\div k} k = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{نسبت تشابه مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر}\ k' = \frac{۱}{k} = \frac{۳}{۲}$$

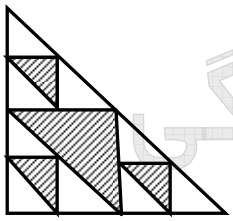
حال با داشتن نسبت تشابه دو مثلث (یعنی $k' = \frac{۳}{۲}$)، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}} = k'^۲ = (\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

شکل‌های خود متشابه:

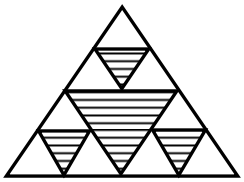
اگر قسمتی از یک شکل با کل آن شکل متشابه باشد، آن شکل را خود متشابه گوییم. برای مثال شکل زیر خود متشابه است:





نکات:

۱) اگر اوساط اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع را بهم وصل کرده، سپس مثلث وسطی را حذف کنیم (هاشور بزنیم) و با سه مثلث باقی مانده همین کار را ادامه دهیم به شکل حاصل **مثلث سرپینسکی** گفته می‌شود.



تعداد مثلث‌های باقی‌مانده ۳^n (n تعداد تکرار) و مساحت باقی‌مانده $\left(\frac{۳}{٤}\right)^n$ برابر مساحت اولیه است.

اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، مجموع مساحت‌های باقیمانده مساوی $S = \frac{۱}{۱-\frac{۳}{٤}} = ٤$ خواهد بود.

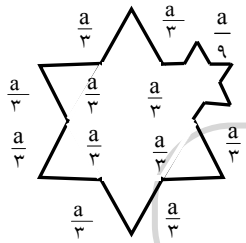
۲) اگر پاره خط AB را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم و روی پاره خط وسطی مثلث متساوی الاضلاعی بنا کنیم، سپس پاره خط وسطی را حذف کنیم و این کار را ادامه دهیم، تعداد پاره خط‌های باقیمانده در هر مرحله ۴^n و اندازه هر پاره خط $\frac{a}{۳^n}$ خواهد بود.

مجموع اندازه پاره خط‌ها نیز برابر $\left(\frac{۴}{۳}\right)^n \times a$ می باشد.

۳) اگر روند فوق را روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a انجام دهیم شکلی بنام **برف دانه کخ** حاصل می‌شود. تعداد پاره‌خط‌های باقیمانده در مرحله n ام برابر $۴^n \times ۳$ و اندازه هر پاره خط $\frac{a}{۳^n}$ و محیط شکل حاصل $\left(\frac{۴}{۳}\right)^n \times ۳a$ می‌باشد.

با میل کردن n به سمت بی‌نهایت، محیط برف دانه کخ علیرغم آن‌که مسافتی محدود دارد، به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد.

اشکال خود متشابه، بنیان‌گذار اشکال جدیدی در هندسه به نام **فراکتال** می‌باشند.



☜ مثال: مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۳۲ سانتی‌متر مفروض است. اوساط اضلاع مثلث را به هم وصل می‌کنیم و مثلث وسط را حذف می‌نماییم. برای سه مثلث باقیمانده نیز همین عمل را انجام داده و آنقدر به ترسیم ادامه می‌دهیم تا به مثلث‌هایی به ضلع ۱ برسیم. تعداد مثلث‌های باقیمانده کدام است؟

✍حل:

در هر مرحله طول ضلع نصف می‌شود، لذا: $\left(\frac{۱}{۲}\right)^n = \left(\frac{۱}{۳۲}\right) \Rightarrow x = ۵$

یعنی در مرحله پنجم قرار داریم و تعداد مثلث‌های باقیمانده برابر است با: $۳^n = ۳^۵ = ۲۴۳$

مؤسسه آموزشی فرهنگی