گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

هندسه ۱

(فصل ۴)

سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

شکل‌های فضایی:

چند وجهی:

بخشی از فضا که از همه طرف به صفحه محدود است، شکلی پدید می‌آورد که به آن چند وجهی می‌گویند. هر کدام از این چند ضلعی‌ها یک وجه، ضلع‌های این وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌های این وجه‌ها رأس‌های چند وجهی نامیده می‌شود.

چند وجهی‌های منتظم:

بخشی از فضا که از همه طرف به چند ضلعی‌های منتظم متساوی که هر یک از آن‌ها در هر ضلع با یکی از اضلاع چند ضلعی دیگری از همین نوع مشترک باشند، چندوجهی‌های منتظم نامیده می‌شود.

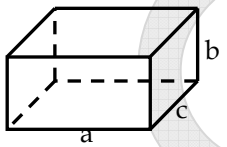
مکعب مستطیل:

مکعب مستطیل یک شش وجهی است که همه وجه‌های آن مستطیل هستند. وجه‌های روبرو در مکعب مستطیل موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یالهای آن بر وجه‌ها عمود هستند. مکعب‌مستطیل ۸ رأس و ۱۲ یال دارد. در مکعب‌مستطیل به دو رأس که در یک وجه قرار ندارند رأسهای متقابل گفته می‌شود. در هر مکعب مستطیل، پاره‌خطی که دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کند، قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود و پاره‌خطی که دو رأس غیر مجاور در یک وجه را بهم وصل می‌کند، قطر وجه نامیده می‌شود.

نکات:

۱) اگر طول اضلاع یک مکعب مستطیل c, b, a باشند، طول قطر مکعب از رابطه‌ی $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ بدست می‌آید.

۲) مکعب مستطیل دارای ٤ قطر متساوی است که در یک نقطه همرسند و این نقطه از همه‌ی رئوس به یک فاصله است (اقطار منصف همدیگرند) و لذا مکعب مستطیل قابل محاط شدن در یک کره است.



۳) حجم مکعب مستطیلی به ارتفاع a و طول b و عرض c، برابر abc و مساحت جانبی آن $2a(b+c)$ و مساحت کل آن $2(ab+ac+bc)$ است.

٤) با وصل کردن همه‌ی رأسهای مکعب مستطیل به یکدیگر $\binom{8}{2}=28$ پاره خط حاصل می‌شود، که شامل ۱۲ یال و ۱۲ قطر وجه جانبی و ٤ قطر است.

۵) هر یال مکعب مستطیل با ٤ یال موازی، و بر ۸ یال دیگر عمود است. (٤ یال متقاطع و ٤ یال متنافر)

مکعب:

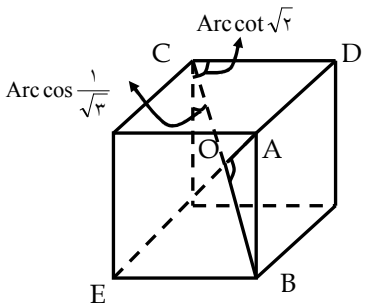
مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن با هم برابر باشند، مکعب نامیده می‌شود یا شش‌وجهی منتظمی که همه‌ی وجوه آن مربعهای متساوی باشند، مکعب نامیده می‌شود.

نکات:

۱) حجم مکعبی که طول یال آن a باشد برابر a^3 و مساحت جانبی آن $4a^2$ و مساحت کل آن $6a^2$ است.

۲) مکعب دارای ٤ قطر متساوی به اندازه‌ی $a\sqrt{3}$ است که در یک نقطه همرسند. فاصله‌ی این نقطه از همه‌ی رئوس (شعاع کره‌ی محیطی مکعب) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و فاصله‌ی آن از همه‌ی وجوه $\frac{a}{2}$ (شعاع کره‌ی محاطی مکعب) است.

۳) هر قطر مکعب با همه‌ی یالهای آن زوایای متساوی می‌سازند که برابر است با: $\operatorname{Arc}\tan\sqrt{2}$ (یا $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{\sqrt{3}}$)، و زاویه‌ی بین هر قطر با یک وجه جانبی برابر $\operatorname{Arc}\cot\sqrt{2}$ است. لذا تصویر هر یال روی قطر متناظرش $\frac{1}{\sqrt{3}}$ طول یال است.



٤) زاویه‌ی بین دو قطر مکعب $\text{Arc}\cos\frac{۱}{۳}$ (یا $\text{Arc}\tan ۲\sqrt{۲}$) است.

زیرا:

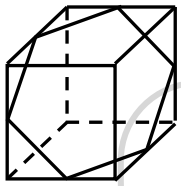
$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ - ۲OA.OB\cos\theta$$

$$\Rightarrow a^۲ = \left(\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ - ۲\left(\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \theta = \text{Arc}\cos\frac{۱}{۳}$$

لذا اندازه‌ی تصویر هر قطر روی قطر متناظرش $\frac{۱}{۳}$ طول قطر است. $\left(A'O = AO\text{Cos}\frac{۱}{۳}\right)$

۵) هر قطر وجه جانبی در مکعب $a\sqrt{۲}$ است و لذا مساحت صفحه‌ی قطری مکعب (صفحه‌ی شامل دو قطر مکعب) $a^۲\sqrt{۲}$ است.

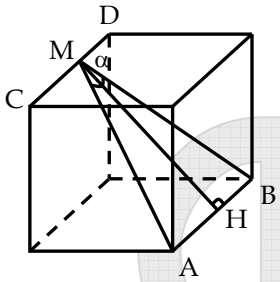


٦) اگر از وسط قطر صفحه‌ای بر قطر عمود کنیم، مقطع آن با مکعب یک شش ضلعی منتظم است.

۷) هر مکعب ۹ صفحه‌ی تقارن و ۱۳ محور تقارن دارد.

مثال: در مکعب شکل مقابل M وسط یال CD است. زاویه‌ی $A\hat{M}B$ کدام است؟

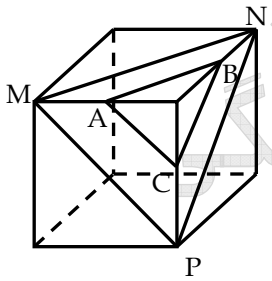
حل:



$$\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{\frac{a}{۲}}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\tan\alpha = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{\alpha}{۲}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱-\frac{۲}{۱۶}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۷} \Rightarrow \alpha = \text{Arc}\tan\frac{۴\sqrt{۲}}{۷}$$

مثال: اگر بر وسط‌های سه یال گذرا بر یک رأس مکعب، یک صفحه بگذرانیم مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟



۱) مثلث قائم الزاویه

۲) مثلث متساوی‌الساقین قائم الزاویه

۳) مثلث متساوی الساقین

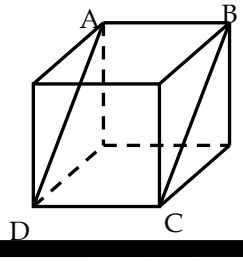
٤) مثلث متساوی الاضلاع

حل: گزینه ٤ صحیح است.

اگر ضلع مکعب را a بگیریم داریم $MN = MP = PN = a\sqrt{۲}$ و بر اساس قضیه‌ی خط واصل بین اوساط اضلاع مثلث داریم:

$$AB = \frac{MN}{۲} = BC = AC$$

مثال: در مکعب شکل مقابل مساحت چهارضلعی ABCD برابر $۳\sqrt{۲}$ است. سطح کل مکعب چند سانتی‌متر مربع است؟



حل:

$$a^۲\sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲ = ۳ \Rightarrow S = ۶a^۲ = ۱۸$$

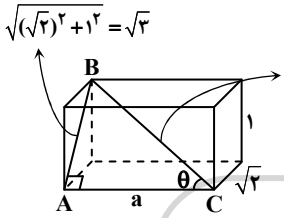
مثال: کره‌ای به شعاع ۳ در مکعبی محاط شده است. قطر مکعب کدام است؟

حل:

چون کره در مکعب محاط شده است، لذا $R = \frac{a}{۲}$ و از آنجا $a = ۲R$، لذا: $a = ۲R = ۲\times۳ = ۶ \Rightarrow d = a\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳}$

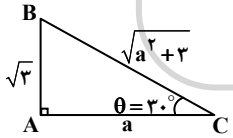
مثال: می‌خواهیم مکعب مستطیلی به ابعاد a و $\sqrt{۲}$ و ۱ را چنان بسازیم که زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال آن به طول a واحد، برابر ۳۰ درجه باشد. a برابر کدام عدد انتخاب شود؟

حل:



قطر مکعب مستطیل $L = \sqrt{a^۲+\sqrt{۲}^۲+۱^۲} = \sqrt{a^۲+۲+۱} = \sqrt{a^۲+۳}$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی **ABC**، می‌دانیم زاویه‌ی بین قطر مکعب مستطیل و یال **a**، برابر **۳۰°** است. پس داریم:

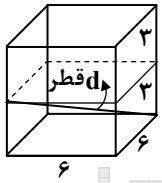


$$\tan\theta = \tan ۳۰^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = ۳$$

مثال: دو مکعب مستطیل یکسان به طور کامل در یک مکعب به طول یال ٦ واحد جای گرفته‌اند. طول قطر هر یک از این دو مکعب مستطیل کدام است؟

حل:

مکعبی به طول یال ٦ واحد را در نظر می‌گیریم. برای این که در داخل این مکعب، دو مکعب مستطیل یکسان به‌طور کامل جا بگیرد، می‌توانیم صفحه‌ای را دقیقاً از وسط ارتفاع این مکعب عبور دهیم. با انجام این کار، مکعب به دو مکعب مستطیل یکسان تقسیم می‌شود که قاعده‌ی این دو مکعب مستطیل با قاعده‌ی مکعب یکسان بوده و تنها ارتفاع آن دو، نصف ارتفاع مکعب است. بنابراین ابعاد این دو مکعب مستطیل یکسان برابر ۳ و ٦ و ٦ واحد می‌باشد.



از طرفی می‌دانیم اگر اندازه‌های یال‌های مکعب مستطیل **a** و **b** و **c** باشند، قطر این مکعب مستطیل برابر با $\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ خواهد بود. بنابراین:

$$d = \sqrt{a^۲+b^۲+c^۲} = \sqrt{۶^۲+۶^۲+۳^۲} = \sqrt{۸۱} = ۹$$

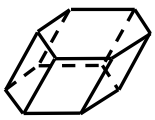
منشور:

منشور یک چند وجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند.

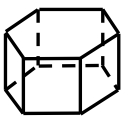
دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، قاعده‌های منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی‌الاضلاع هستند، وجه‌های جانبی و یالهایی از منشور که محل تلاقی وجه‌های جانبی منشور هستند یالهای جانبی نامیده می‌شوند که همگی با هم موازیند.

ارتفاع منشور پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را بهم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.

اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک منشور قائم و اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌ها عمود نباشند، آن را منشور مایل می‌نامند.

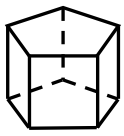


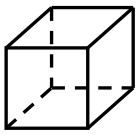
منشور مایل

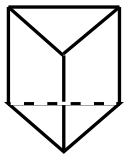


منشور قائم

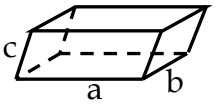
منشور را بر اساس شکل چند ضلعی‌های قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند، مثلاً اگر قاعده‌های یک منشور مثلث باشند، آن را منشور مثلثی می‌نامند. به این ترتیب مکعب مستطیل یک منشور چهارضلعی قائم است.


منشور پنج‌ضلعی


منشور چهارضلعی


منشور مثلثی

اگر قاعده‌های یک منشور دو متوازی‌الاضلاع همنهشت باشند، به آن متوازی‌السطوح گفته می‌شود.



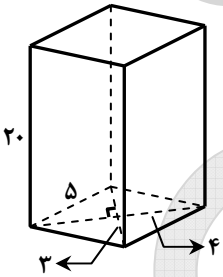
مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را مساحت جانبی (مساحت رویه‌ای که اطراف منشور را تشکیل می‌دهد) و مجموع مساحت‌های جانبی و مساحت دو قاعده منشور، مساحت کل آن نامیده می‌شود.

قضیه: مساحت جانبی منشور قائم برابر است با محیط قاعده ضرب در طول یال جانبی منشور.

نکته: حجم منشوری با ارتفاع h و مساحت قاعده s برابر است با: $V = sh$

مثال: سطح کل منشور قائم که قاعده‌اش لوزی به اقطار ۶ و ۸ و ارتفاعش مساوی محیط قاعده آن باشد، برابر کدام است؟

حل:



چون قاعده لوزی است و اقطار لوزی بر هم عمودند، لذا ضلع قاعده برابر است با: $\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2} = 5$

و لذا محیط قاعده برابر است با: $4\times 5 = 20$

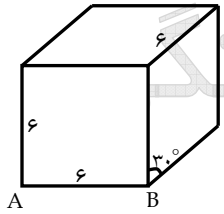
لذا سطح کل این منشور برابر است با: $S = 2\left(\frac{6\times 8}{2}\right)+4(5\times 20) = 448$

منشور منتظم:

منشور قائمی که قاعده‌های آن دو چند ضلعی منتظم باشند، منشور منتظم نامیده می‌شود.

مثال: قاعده‌ی یک منشور مربعی به ضلع ۶ و یک وجه جانبی آن نیز مربع است. اگر یکی از وجوه جانبی دیگر لوزی به زاویه ۳۰° باشد، حجم این منشور کدام است؟

حل:

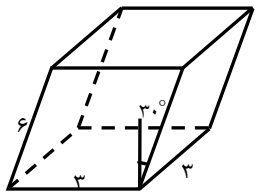


یال **AB** بر وجه لوزی شکل عمود است، می‌توان **AB** را ارتفاع و لوزی را قاعده منشور اختیار کرد.

$V =$ مساحت لوزی $\times AB$ طول $= (6\times 6\sin 30^\circ)\times 6 = 108$

مثال: حجم منشور مربع القاعده‌ی مایلی که طول ضلع قاعده‌ی آن ۳ و طول یال مایل آن ۶ باشد و همچنین زاویه‌ای که وجه مایل با خط عمودی می‌سازد ۳۰° باشد، برابر است با:

حل:

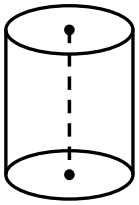


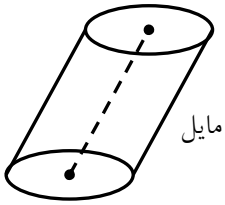
$V = (3)^2\times 6\cos 30^\circ = 27\sqrt{3}$

استوانه:

استوانه شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چندضلعی، دو دایره‌ی همنهشت هستند. از نظر مفهومی وقتی تعداد اضلاع قاعده‌ی یک منشور منتظم به سمت بی‌نهایت میل کند، منشور به استوانه تبدیل می‌شود.

اگر محور استوانه یعنی پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، بر قاعده عمود باشد، استوانه را قائم و در غیر این‌صورت آن را مایل می‌نامند.





از دوران یک مستطیل حول یکی از اضلاعش، یک استوانه قائم پدید می‌آید.

تذکر: در استوانه قائم، محور استوانه همان ارتفاع استوانه است.

همانند منشور، مساحت رویه‌ای (سطحی) که اطراف استوانه را تشکیل می‌دهد، مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده، مساحت کل نامیده می‌شود.

نکته:مساحت جانبی استوانه‌ی قائمی به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر است با: $۲\pi Rh$ و مساحت کل آن برابر است با:

$$۲\pi R^۲ + ۲\pi Rh$$

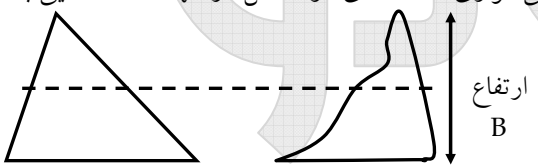
مثال: حجم استوانه دواری به ارتفاع ۳ برابر با: ۱۲πاست. مساحت سطح جانبی آن کدام است؟

حل:

$$V = \pi r^۲ h = \pi r^۲ \times ۳ = ۱۲\pi \Rightarrow r^۲ = ۴ \Rightarrow r = ۲ \Rightarrow \text{سطح جانبی} = ۲\pi rh = ۲\pi \times ۲ \times ۳ = ۱۲\pi$$

اصل کاوالیری درباره‌ی مساحت‌ها:

فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند، اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آنها قطعه‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کند، مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

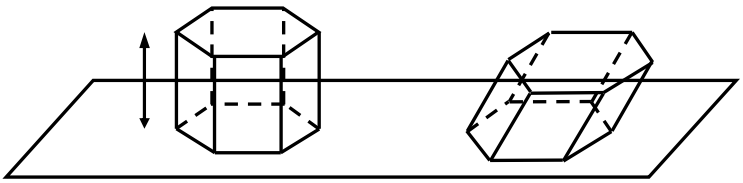


تذکر: از اصل کاوالیری برابر بودن قاعده‌ها و ارتفاعها نیز نتیجه می‌شود.

اصل کاوالیری درباره حجم‌ها:

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل دارای مساحت‌های برابر باشند، آنگاه حجم این دو شکل برابر است.

مثلاً اگر قاعده‌های دو منشور در یک صفحه قرار گرفته و مساحت سطح مقطع‌هایی که از برخورد هر صفحه‌ای موازی با این صفحه حاصل می‌شود، برابر باشند، آنگاه نتیجه می‌گیریم، حجم این دو منشور برابر است. لذا طبق اصل کاوالیری، اگر مساحت قاعده‌های دو منشور هم ارتفاع برابر باشند، حجم آن‌ها برابر خواهند بود.



$$V = V'$$

مثال: حجم استوانه‌ای که قطر قاعده‌ی آن ٤ سانتی‌متر است، با منشور مربع‌القاعده‌ای برابر است. اگر ارتفاع هر دو ٦ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع چقدر است؟ $(\pi = ۳/۱٤)$

حل:

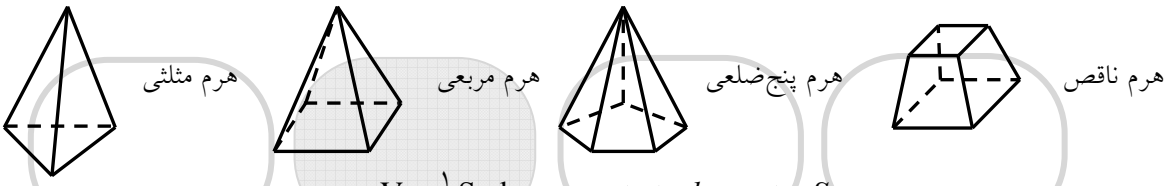
طبق اصل کاوالیری، چون حجم و ارتفاع هر دو با هم برابر است لذا باید مساحت قاعده‌هایشان نیز با هم برابر باشد.

مساحت مربع = مساحت دایره = $\pi(۲)^۲ = ۴\pi = ۱۲/۵۶$

هرم:

هرم یک چندوجهی است که همه وجوه آن به جز یکی در یک رأس مشترکند.

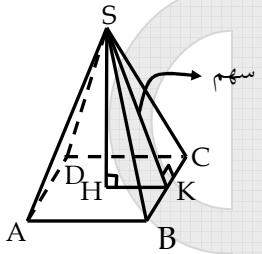
وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد، قاعده‌ی هرم و وجه‌های دیگر، وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند. وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند. ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.



نکته: حجم هرمی با مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{۱}{۳}S \times h$

هرم منتظم:

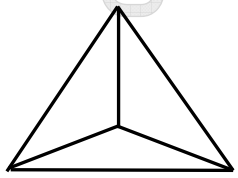
اگر قاعده‌ی یک هرم چند ضلعی منتظم باشد و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را منتظم می‌نامند. وجوه جانبی هرم منتظم، مثلثهای متساوی‌الساقین متساوی هستند. ارتفاع یکی از این مثلثها را سهم هرم منتظم می‌نامند. (برای هرم غیر منتظم سهم تعریف نمی‌شود.)



سهم = $\sqrt{SH^۲ + HK^۲} = \sqrt{SB^۲ - BK^۲}$

نکاتی در مورد چهاروجهی منتظم (هرم مثلث القاعده‌ی منتظم):

همه‌ی وجه‌های چهار وجهی منتظم مثلث متساوی الاضلاع هستند. اگر اندازه‌ی هر یال چهار وجهی منتظم a باشد، احکام زیر در مورد آن صحیح است.

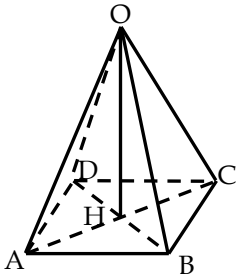


۱) چهاروجهی دارای چهار ارتفاع مساوی به اندازه‌ی $\frac{a\sqrt{٦}}{۳}$ است، که از یک نقطه می گذرند.

۲) حجم این چهار وجهی $\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲}$ است و مساحت جانبی آن $\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{٤}$ و مساحت کل آن $a^۲\sqrt{۳}$ است.

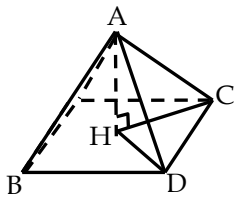
مثال: حجم هرم منتظم مربع القاعده‌ای که ضلع قاعده‌ی آن $۳\sqrt{۲}$ و طول هر یال جانبی آن ۵ است، کدام است؟

حل:



$BD = ۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} \quad , \quad HB = \frac{۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲} = ۳$

$OH^۲ = OB^۲ - HB^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow OH = ۴ \Rightarrow V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳}(۳\sqrt{۲})^۲ \times ۴ = ۲۴$



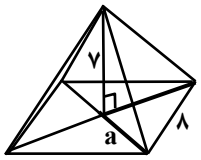
مثال: در یک هرم منتظم مربع القاعده، طول ارتفاع برابر نصف قطر قاعده‌ی آن است. زاویه‌ی رأس مثلث‌های جانبی چند درجه است؟

حل:

$$AH = HC = HD \Rightarrow AC = CD = AD \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

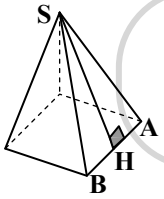
مثال: ارتفاع هرم مربع القاعده‌ی منتظمی ۷ سانتی‌متر و یک ضلع قاعده‌اش ۸ سانتی‌متر است. یال هرم چند سانتی‌متر است؟

حل:

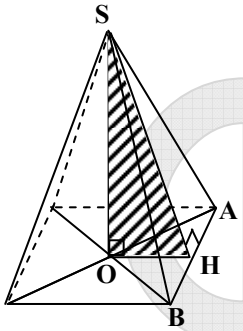


$$a\sqrt{۲} = ۸ \Rightarrow a = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow \text{یال} = \sqrt{۷^۲ + (۴\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۴۹ + ۳۲} = \sqrt{۸۱} = ۹^{cm}$$

مثال: در هرم مربعی منتظم زیر، $SA = \sqrt{۳۴}$ و $SH = ۵$. حجم این هرم کدام است؟



حل:



$$SA = \sqrt{۳۴}\ ,\ SH = ۵$$

$$\overset{\Delta}{SAH} : AH^۲ = SA^۲ - SH^۲ = ۳۴ - ۲۵ = ۹ \Rightarrow AH = ۳$$

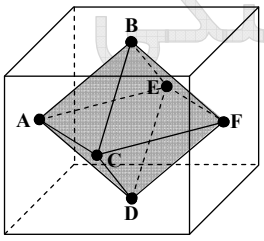
$$\Rightarrow OH = ۳, AB = ۶$$

$$\overset{\Delta}{SOH} : SO^۲ = SH^۲ - OH^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow SO = ۴$$

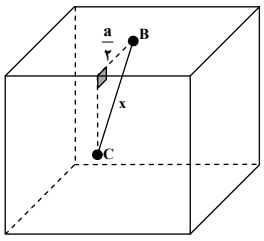
$$\text{حجم هرم}\ V = \frac{۱}{۳}(\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}) = \frac{۱}{۳}(۶)^۲ \times ۴ = ۴۸$$

مثال: در یک مکعب، مرکز تقارن هر وجه جانبی آن، رأس‌های یک هشت وجهی منتظم‌اند. حجم این هشت وجهی منتظم، چند برابر حجم مکعب است؟ (هشت وجهی منتظم: دو هرم چهار وجهی منتظم در قاعده مشترک)

حل:



همان طور که در شکل ملاحظه می‌کنید، دو هرم ABCDE و FBCDE از قاعده به هم چسبیده‌اند و یک ۸ وجهی منتظم را به وجود آورده‌اند که اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده‌ی BCDE در هر کدام از این هرم‌ها نصف طول ضلع مکعب یعنی $\frac{a}{۲}$ است. امّا برای پیدا کردن حجم هرم باید مساحت قاعده را نیز پیدا کنیم که با توجه به شکل زیر، هر یک از اضلاع مربع قاعده با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به دست می‌آید:



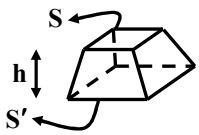
$$x^۲ = \frac{a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۲}$$

و چون هشت وجهی ایجاد شده منتظم است. پس همه‌ی یال‌های آن با هم برابرند، در نتیجه:

$$V_{\text{وجهی}} = ۲V_{ABCDE} = ۲(\frac{۱}{۳}Sh) = \frac{۲}{۳}(x^۲)(\frac{a}{۲}) = \frac{۲}{۳}(\frac{a^۲}{۲})(\frac{a}{۲}) = \frac{a^۳}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{هشت وجهی}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{۱}{۶}$$

هرم ناقص منتظم:



هرم ناقصی که دو قاعده‌اش دو چند ضلعی منتظم و پاره خط واصل بین مراکز دو قاعده، ارتفاع آن باشد، هرم ناقص منتظم نامیده می‌شود. وجوه جانبی هرم ناقص منتظم، ذوزنقه‌های متساوی الساقین متساوی هستند و ارتفاع یکی از این ذوزنقه‌ها، سهم هرم ناقص منتظم نامیده می‌شود.

اگر V حجم و S',S مساحت دو قاعده و h ارتفاع یک هرم ناقص باشد، همواره برای هر نوع هرم ناقص داریم:

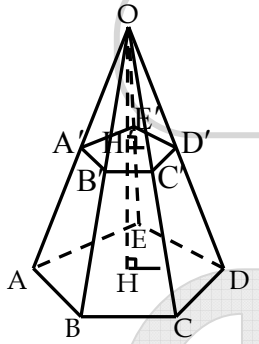
$$V=\frac{۱}{۳}h\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)$$

چند نکته در مورد هرم:

۱) قضیه: مقطع هرم با هر صفحه‌ی موازی با قاعده، یک چند ضلعی است که با قاعده متشابه است.

$$A'B'C'D'E' \sim ABCDE$$

۲) قضیه: نسبت مساحت مقطع موازی با قاعده‌ی هرم به مساحت قاعده‌ی هرم برابر است با مربع نسبت فواصل رأس هرم از آن مقطع و قاعده.



اگر هرم با حجم V و سطح قاعده‌ی S را با صفحه‌ای به موازات قاعده قطع کنیم و سطح مقطع بدست آمده S' و حجم متناظر با آن V' باشد داریم:

$$\frac{S'}{S}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^{۲}$$

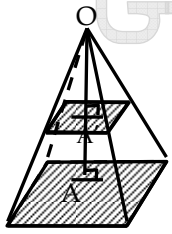
$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}\right)^{۳}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^{۳}$$

مثال: هرمی با حجم V را با صفحه‌ای موازی قاعده که از وسط ارتفاع نظیر قاعده‌ی هرم می گذرد، قطع می‌کنیم. حجم هرم ناقص برابر است با:

حل:

$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\Rightarrow V'=\frac{۱}{۸}V\Rightarrow \text{حجم هرم ناقص}=V-V'=\frac{۷}{۸}V$$

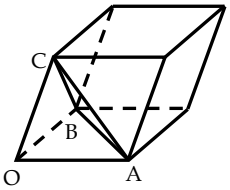
مثال: اگر دو سطح قاعده‌ی یک هرم ناقص به ترتیب ۲۷ و ۱۸ سانتی‌متر مربع و ارتفاع هرم اصلی، ۱۲ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی قاعده‌ی کوچکتر از رأس هرم چند سانتی‌متر است؟



حل:

$$\frac{OA'}{۱۲}=\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲۷}}\Rightarrow OA'=۴\sqrt{۶}$$

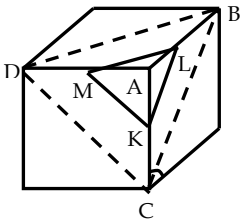
۳) حجم هرمی که طول سه یال همرس آن c,b,a باشد، $\frac{۱}{۶}$ حجم متوازی‌السطوحی است که سه یال همرس آن c,b,a باشد.



$$V_{OABC}=\frac{۱}{۶}\ \text{حجم متوازی السطوح}$$

مثال: در مکعب شکل مقابل M, L, K وسطهای سه یال هستند. حجم هرم $AMLK$ چه کسری از حجم است؟

حل:



$$V_{ABCD} = \frac{۱}{۳} \times S_{ABD} \times h = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} S_{\text{مربع}} = \frac{۱}{۶} \text{ حجم کل}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_{AMLK}}{V_{ABCD}} = \left(\dfrac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}\right)^{۳} \\ ML = \dfrac{۱}{۲} BD \Rightarrow S_{\Delta MLK} = \dfrac{۱}{۴} S_{\Delta ABCD} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_{AMLK}}{V_{ABCD}} = \frac{۱}{۸}$$

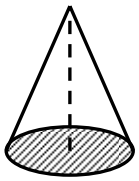
$$\Rightarrow V_{AMLK} = \frac{۱}{۸} V_{ABCD} = \frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{۶} \text{ حجم کل}\right) = \frac{۱}{۴۸} \text{ حجم کل}$$

مخروط:

مخروط شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به جای چند ضلعی، دایره است. از نظر مفهومی اگر تعداد اضلاع قاعده‌ی یک هرم منتظم به سمت بی‌نهایت میل کند، هرم به مخروط تبدیل می‌شود.

پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره‌ی قاعده وصل می کند، محور قاعده نام دارد. اگر محور بر قاعده عمود باشد، مخروط قائم و در غیر اینصورت مایل نامیده می‌شود.

از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع قائمش یک مخروط قائم پدید می‌آید. وتر مثلث اصطلاحاً مولد این مخروط قائم است.

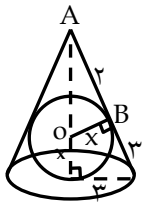


نکته: حجم مخروطی با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$

و مساحت جانبی مخروط قائم با مولدی به طول L برابر است با: $\pi r L =$ مولد × محیط قاعده $\times \frac{۱}{۲} = S$

مثال: در مخروط دواری که شعاع قاعده‌اش ۳ و ارتفاعش ٤ است، کره‌ای محاط کرده‌ایم. شعاع این کره کدام است؟

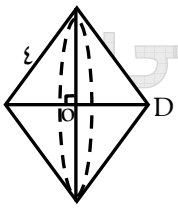
حل:



در مثلث قائم الزاویه ΔOAB: $OA^{۲} = OB^{۲} + AB^{۲} \Rightarrow (۴ - x)^{۲} = x^{۲} + ۴ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

مثال: مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ٤ را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

حل:

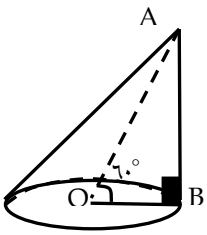


می‌توان فرض کرد دو مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌هایشان (ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع) دوران کرده و دو مخروط به وجود آورده‌اند.

$$a = ۴ \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳} = AO, CO = \frac{a}{۲} = ۲ \Rightarrow V = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi\left(۲\sqrt{۳}\right)^{۲} \times ۲ = ۱۶\pi$$

مثال: در شکل مقابل $A\hat{O}B = ٦۰^{\circ}$ است. اگر $OA = ٤\sqrt{۳}$ باشد، حجم مخروط کدام است؟

حل:

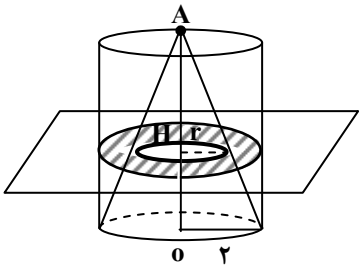


$$OA = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow h = AB = OA \sin ۶۰^{\circ} = ۴\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶ \quad , \quad r = OB = OA \cos ۶۰^{\circ} = ۲\sqrt{۳}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{۱}{۳}\pi\left(۲\sqrt{۳}\right)^{۲} \times ۶ = ۲۴\pi$$

مثال: از داخل یک استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده‌ی ۲ واحد، بزرگ‌ترین مخروط ممکن را خارج کرده‌اند. شکلی که از استوانه باقی‌مانده را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۱ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

حل:



$$\frac{AH}{AO}=\frac{r}{۲}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{r}{۲}\Rightarrow r=\frac{۸}{۵}$$

$$S_{\text{مقطع}}=\pi(۲)^۲-\pi(\frac{۸}{۵})^۲=$$

$$۴\pi-\frac{۶۴}{۲۵}\pi=\frac{۳۶\pi}{۲۵}=۱/۴۴\pi$$

مخروط ناقص قائم:

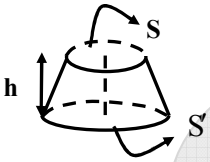
از دوران ذوزنقه قائم الزاویه حول ساق قائمش، مخروط ناقص قائم پدید می‌آید، ساق مایل ذوزنقه، مولد، ساق قائم، ارتفاع و قاعده‌های ذوزنقه شعاعهای قاعده‌های مخروط ناقص قائم می‌باشند.

نکته: حجم هر نوع مخروط ناقص قائم با سطح قاعده‌های S',S و ارتفاع h برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}h(S+S'+\sqrt{SS'})$$

مثال: در مخروط ناقص قائمی، هرم ناقص شش پهلویی محاط می‌کنیم. نسبت حجم‌های آنها کدام است؟

حل:



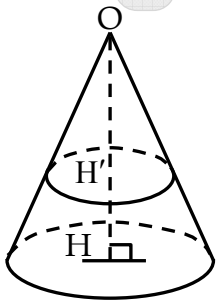
اگر شعاع‌های قاعده‌های مخروط ناقص را R',R و ارتفاع آن را h بگیریم:

مساحت شش ضلعی محاط در دایره‌ای به شعاع R $=۶R\times\frac{R\cos ۳۰^\circ}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}R^۲$

حجم مخروط ناقص $=V$ و حجم هرم ناقص $=V'$

$$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{۱}{۳}h(S+S'+\sqrt{SS'})}{\frac{۱}{۳}h(S_۱+S_۱'+\sqrt{S_۱S_۱'})}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}R^۲+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}R'^۲+\frac{۳\sqrt{۳}RR'}{۲}}{\pi R^۲+\pi R'^۲+\pi RR'}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}$$

نکته: نسبت مساحت هر مقطع موازی با قاعده‌ی مخروط به مساحت قاعده‌ی آن برابر است با مربع نسبت فاصله‌های رأس مخروط از آن مقطع و قاعده‌ی مخروط.



اگر مخروط با حجم V و سطح قاعده‌ی S را با صفحه‌ای به موازات قاعده قطع کنیم، به طوری‌که سطح مقطع بدست آمده S' باشد، داریم:

$$\frac{S'}{S}=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^۲$$

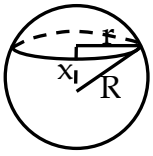
$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}\right)^۳=\left(\frac{OH'}{OH}\right)^۳$$

کره:

کره مکان هندسی نقاطی از فضا است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت را شعاع کره می‌نامند.

هر پاره‌خطی که دو سر آن روی کره باشد را وتر کره می نامند و وتری که از مرکز کره بگذرد را قطر کره می‌نامند.

کره یک سطح دوار است که از دوران یک نیم دایره حول قطرش پدید می‌آید. مقطع هر صفحه با کره یک دایره است. اگر فاصله‌ی مرکز کره از صفحه x باشد و شعاع کره R، شعاع دایره مقطع برابر است با: $r=\sqrt{R^2-x^2}$

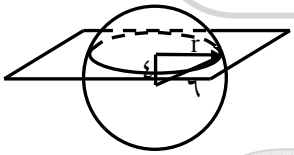


نکته ۱: مکان هندسی نقاطی از فضا که از هر یک از آنها پاره‌خط ثابت AB به زاویه قائمه دیده شود، کره‌ای به قطر AB است.

نکته ۲: حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

و مساحت آن برابر است با: $S=4\pi R^2$

مثال: کره‌ای به شعاع ۶ واحد بر صفحه‌ای مماس است. مساحت مقطع آن با صفحه‌ای به فاصله ۲ واحد از صفحه مماس چقدر است؟

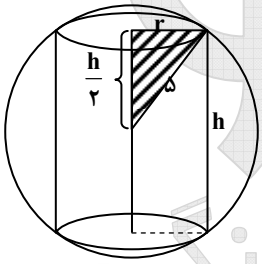


حل:

$$S=\pi r^2=\pi(6^2-4^2)=20\pi$$

مثال: در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه‌ای قائم با سطح جانبی 48π محاط شده است. بیشینه حجم این استوانه چه‌قدر است؟

حل:



شعاع کره $R=5$

سطح جانبی استوانه $S=2\pi r\times h=48\pi\Rightarrow rh=24\Rightarrow h=\frac{24}{r}$

در مثلث هاشور خورده: $25=\frac{h^2}{4}+r^2$

$$\xrightarrow[25=\frac{h^2}{4}+r^2]{h=\frac{24}{r}} 25=\frac{(\frac{24}{r})^2}{4}+r^2\Rightarrow 25=\frac{(24)^2}{4r^2}+r^2$$

$$\Rightarrow 25=\frac{144}{r^2}+r^2\Rightarrow 25r^2=144+r^4\Rightarrow (r^2)^2-25r^2+144=0\Rightarrow r^2=t$$

$$t^2-25t+144=0\left\langle\begin{matrix}t=9\\t=16\end{matrix}\right.\Rightarrow\begin{cases}r^2=9,h=8\Rightarrow V=\pi r^2h=\pi\times9\times8=72\pi\\r^2=16,h=6\Rightarrow V=\pi r^2h=\pi\times16\times6=96\pi\end{cases}$$