گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

سایت ریاضی سرا

هندسه ۱

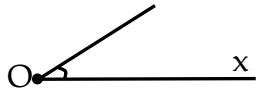
(فصل‌های ۱ و ۲)

www.riazisara.ir

زاویه، مثلث

زاویه:

زاویه، جزئی از صفحه است که دو نیم خط با مبدأ مشترک و مجموعه‌ی نقاط محدود به دو نیم خط مزبور را شامل باشد.



هر یک از دو نیم خط Oy, Ox را یک "ضلع" و نقطه O، مبدأ مشترک آنها "رأس زاویه" نام دارد.

زاویه را با واحدهای مختلف مانند درجه، گراد و رادیان نمایش می‌دهند که رابطه‌ی زیر را با هم دارند:

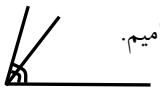
$$\frac{deg}{۱۸۰} = \frac{grad}{۲۰۰} = \frac{rad}{\pi}$$

تعاریف:

☆ دو زاویه را **متمم** یکدیگر گویند، هرگاه مجموع اندازه‌های آنها ۹۰° باشد.

☆ دو زاویه را **مکمّل** یکدیگر گویند، هرگاه مجموع اندازه‌های آنها ۱۸۰° باشد.

☆ دو زاویه را که در رأس و یک ضلع مشترک و دوضلع غیر مشترک آنها در طرفین ضلع مشترک واقع باشند، **مجاور** می‌نامیم.

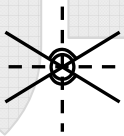


☆ دو زاویه را که هم مجاور و هم مکمل باشند، **مجانب** گوییم.

☆ خطی که از رأس زاویه گذشته و زاویه را نصف کند **نیمساز** زاویه نامیده می‌شود.

☆ دو زاویه که رأس مشترک داشته باشند و اضلاع آنها دو به دو بر امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشند، **متقابل به رأس** نام دارد.

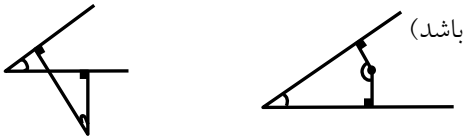
قضایا و خواص:



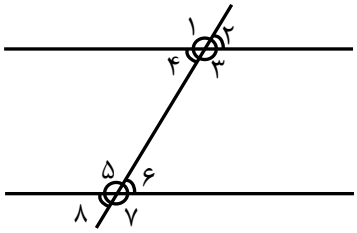
۱- دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند و نیمسازهایشان بر یک خط مستقیم قرار دارند.

۲- اگر اضلاع دو زاویه، نظیر به نظیر با یکدیگر موازی باشند، دو زاویه یا مساوی یکدیگر هستند یا مکمل یکدیگر.

۳- اگر اضلاع دو زاویه، نظیر به نظیر بر یکدیگر عمود باشند، دو زاویه مساویند (اگر رأس زاویه‌ی دوم خارج از زاویه‌ی اول یا روی یکی از اضلاع آن باشد) و یا مکمل یکدیگرند. (اگر رأس زاویه دوم داخل زاویه اول باشد)



٤- اگر دو خط موازی توسط یک خط مورب قطع شوند، ۸ زاویه پدید می‌آید که یا مساوی و یا مکمل یکدیگر می‌باشند.



$\hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷}$

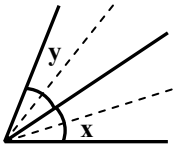
$\hat{۲} = \hat{٤} = \hat{٦} = \hat{۸}$

$\hat{٤} + \hat{۵} = ۱۸۰^\circ$

$\hat{۳} + \hat{٦} = ۱۸۰^\circ$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

مثال: تفاضل دو زاویه مجاور ۱۰ درجه است. اگر زاویه بین نیمسازهای آنها $\frac{۳}{۴}$ زاویه بزرگتر باشد، اندازه زاویه کوچکتر کدام است؟



حل: اگر زاویه‌ی بزرگ‌تر را x و کوچک‌تر را y فرض کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=۱۰ \\ \frac{x}{۲}+\frac{y}{۲}=\frac{۳}{۴}x \rightarrow x+y=\frac{۳}{۲}x \rightarrow \frac{x}{۲}-y=۰ \end{array}\right\} \rightarrow ۲y-y=۱۰ \rightarrow y=۱۰$$

مثال: مجموع دو زاویه ۷۵° است. مجموع مکمل‌های آنها چند درجه است؟

حل:

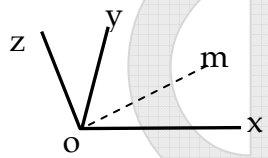
$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=۷۵^\circ$$
$$(۱۸۰^\circ-\hat{\alpha})+(۱۸۰^\circ-\hat{\beta})=۳۶۰^\circ-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})=۳۶۰^\circ-۷۵^\circ=۲۸۵^\circ$$

مثال: دو زاویه B,A متمم یکدیگر می‌باشند. اندازه زاویه A برابر $\frac{٤}{۹}$ اندازه مکمل زاویه B است. اندازه زاویه A چند درجه است؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ \\ \hat{A}=\frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ-\hat{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\left(۱۸۰^\circ-\frac{۹}{۴}\hat{A}\right)=۹۰^\circ \Rightarrow \frac{۵}{۴}\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۷۲^\circ$$

مثال: زاویه xoy و نیمساز آن om را در نظر می‌گیریم و نیم خط oz را به دلخواه در خارج زاویه رسم می‌کنیم، زاویه moz برابر کدام است؟



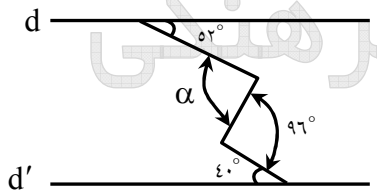
۱) $\frac{x\hat{o}y}{۲}$ ۲) $\frac{x\hat{o}z+y\hat{o}z}{۲}$

۳) $\frac{x\hat{o}z-y\hat{o}z}{۲}$ ٤) $\frac{m\hat{o}z+x\hat{o}z}{۲}$

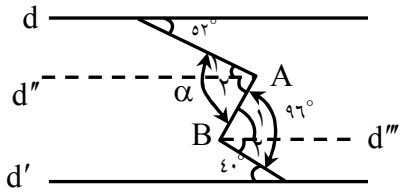
حل:

$$\left.\begin{array}{l} m\hat{o}z=x\hat{o}z-x\hat{o}m \\ m\hat{o}z=y\hat{o}z+y\hat{o}m \end{array}\right\} \xrightarrow{x\hat{o}m=y\hat{o}m} m\hat{o}z=\frac{x\hat{o}z+y\hat{o}z}{۲}$$

مثال: در شکل مقابل دو خط d',d موازیند. زاویه α کدام است؟



حل:



$$\left.\begin{array}{l} d' \parallel d''' \Rightarrow \hat{B}_۲=۴۰^\circ \\ d'' \parallel d''' \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{B}_۱=۹۶^\circ-۴۰^\circ=۵۶^\circ \\ d \parallel d'' \Rightarrow \hat{A}_۱=۵۲^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=۵۶^\circ+۵۲^\circ=۱۰۸^\circ$$

مثلث:

اگر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط مستقیم را دو به دو با سه پاره خط به هم وصل کنیم، شکل حاصل را **"مثلث"** می‌نامند.

الف) تعاریف، قضایا و اصول کلّی، خواص اضلاع و زوایا:

۱- حالات همنهشتی (تساوی) دو مثلث:

قضیه: دو مثلث در حالتهای زیر با هم همنهشت (مساوی) اند:

۱- تساوی دو ضلع و زاویه بین دو ضلع (ض ز ض)

۲- تساوی دو زاویه و ضلع بین دو زاویه (ز ض ز)

۳- تساوی سه ضلع (ض ض ض)

۴- تساوی دو ضلع و زاویه مقابل به ضلع بزرگتر.

حالات همنهشتی مثلثهای خاص:

الف) دو **مثلث قائم‌الزاویه** در حالات زیر همنهشت اند:

۱- تساوی وتر و یک ضلع (حالت ۴).

۲- تساوی وتر و یک زاویه حاده (حالت ۲).

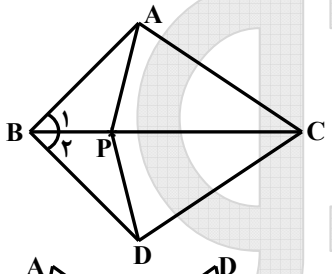
۳- تساوی دو ضلع زاویه‌ی قائمه (حالت ۱).

ب) دو مثلث **متساوی الساقین** در حالت تساوی یک ضلع و یک زاویه‌ی متناظر همنهشت اند:

ج) دو مثلث **متساوی الاضلاع** در حالت تساوی یک ضلع همنهشت اند:

مثال: اگر P نقطه‌ای دلخواه روی BC باشد و $AB = BD, AC = CD$ ، ثابت کنید: $AP = PD$

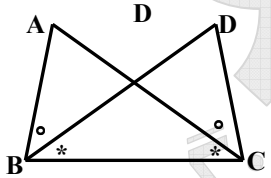
حل:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ AB = BD \\ BP \text{ مشترک}\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABP} = \overset{\Delta}{BPD} \Rightarrow AP = PD$$

$$\overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{BCD} \rightarrow \text{ض ض ض}$$

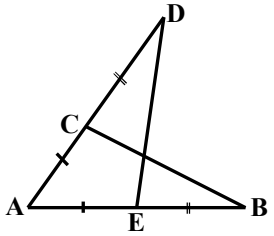
مثال: در شکل مقابل ثابت کنید: $AB = CD$



حل:

$$\left.\begin{array}{l}B = C \\ BC \\ * = * \text{ مشترک}\end{array}\right\} \overset{\text{ز ض ز}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{BCD} \rightarrow AB = CD$$

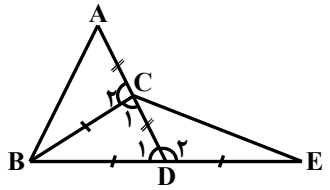
مثال: در شکل روبه‌رو ثابت کنید: $BC = DE$



حل:

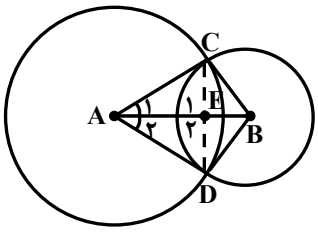
$$\left.\begin{array}{l}AE = AC \\ AD = AB \\ A \text{ مشترک}\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} ABC = ADE \rightarrow DE = BC$$

مثال: ثابت کنید $AB = CE$ و $\hat{C} = \hat{D}$:



حل:

$$\left.\begin{array}{l}BD = BC \rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \rightarrow \hat{C}_2 = \hat{D}_2 \\ AC = CD \\ BC = DE\end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} ABC = CDE \rightarrow AB = CE$$



مثال: دو دایره به مراکز A و B یکدیگر را در C و D قطع می‌کنند. ثابت کنید:

الف) $A\hat{C}B = A\hat{D}B$

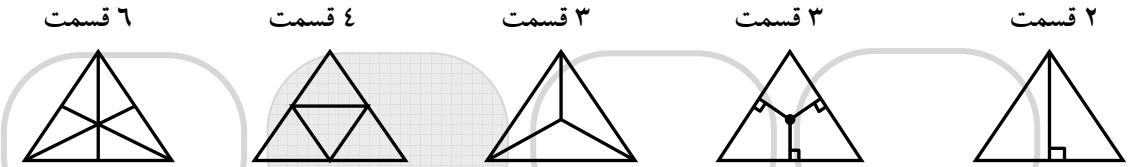
ب) AB عمود منصف CD است.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \\ BC = BD \\ AB = AB \end{array}\right\} \overset{\text{ض ض ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{ADB} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AE = AE \\ AC = AD \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACE} = \overset{\Delta}{ADE} \rightarrow CE = ED \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90^\circ$$

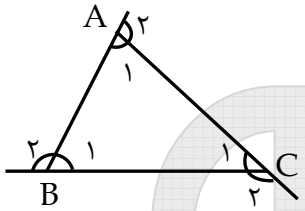
مثال: ناحیه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ۲ و ۳ و ٤ و ٦ قسمت همنهشت تقسیم کنید.

حل:



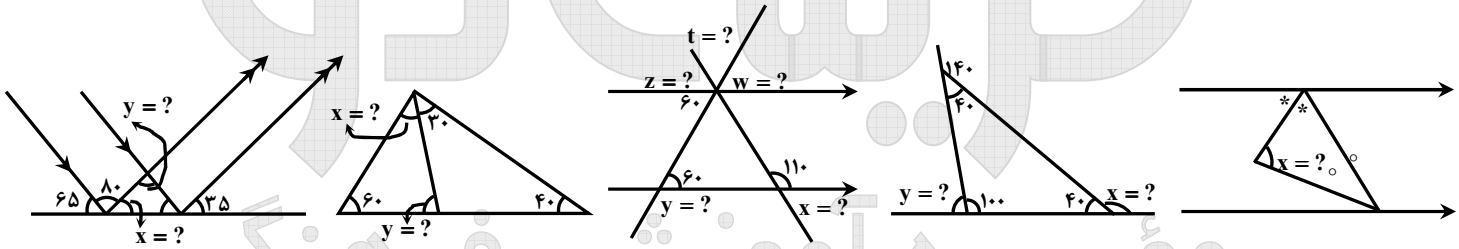
۲- روابط زوایای مثلث:

قضیه: مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° و مجموع زوایای خارجی آن 360° است و هر زاویه‌ی خارجی با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش برابر است.

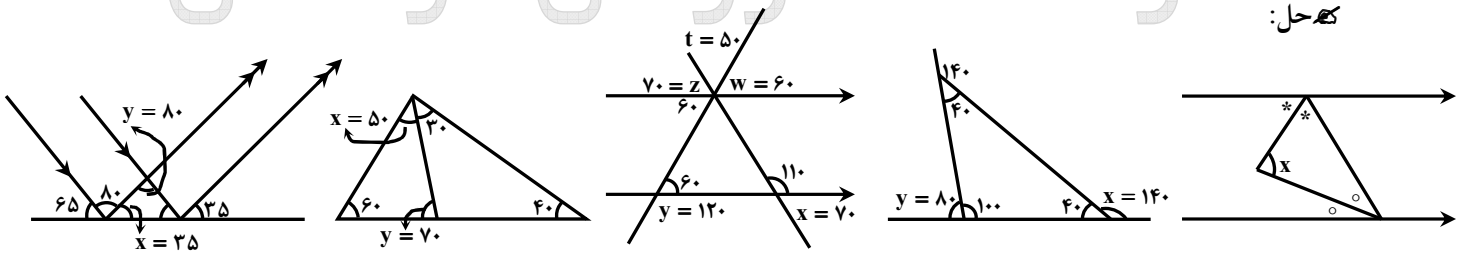


$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$$
$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 360^\circ$$
$$\hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$$

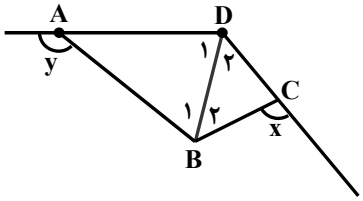
مثال: در شکل‌های زیر زوایای مجهول را به‌دست آورید.



حل:



مثال: در شکل زیر ثابت کنید: $\hat{x} + \hat{y} = \hat{B} + \hat{D}$



حل:

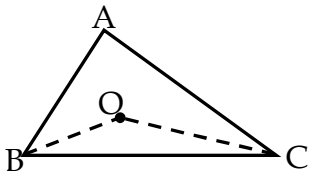
$$\left.\begin{array}{ll} y = \hat{D}_1 + \hat{B}_1 & \text{زاویه خارجی} \\ x = \hat{D}_2 + \hat{B}_2 & \text{زاویه خارجی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{x} + \hat{y} = \hat{B} + \hat{D}$$

مثال: زاویه‌های مثلّثی متناسب با اعداد ۸ , ۵ , ۲ می‌باشند.اندازه‌ی کوچکترین زاویه‌ی خارجی این مثلّث چند درجه است؟

حل: وقتی می‌گویند سه عدد با سه عدد دیگر متناسبند، یعنی نسبت تقسیم دوبه‌دوی آن‌ها مقدار یکسانی است:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۵}=\frac{z}{۸}=k \rightarrow ۲k+۵x+۸k=۱۸۰ \rightarrow k=\frac{۱۸۰}{۱۵}=۱۲$$

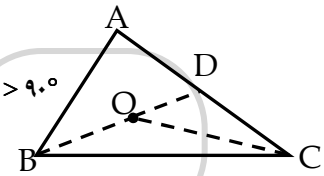
مثال: در داخل مثلث ABC نقطه‌ی دلخواه O را به دو رأس C,B وصل می‌کنیم. اگر $\hat{C}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ باشد کدام رابطه صحیح است؟



۱) $۳۰^\circ < B\hat{O}C < ۹۰^\circ$ ۲) $۹۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۵۰^\circ$

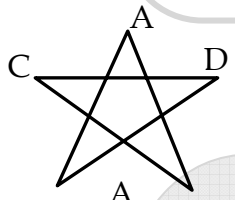
۳) $۱۲۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۸۰^\circ$ ۴) $۹۰^\circ < B\hat{O}C < ۱۸۰^\circ$

حل: همواره زاویه‌ی خارجی از هر زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با خودش بزرگ‌تر است.

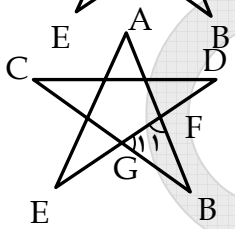


$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_۱>\hat{A} \text{ (زاویه خارجی)}\\ B\hat{O}C>\hat{D}_۱ \text{ (زاویه خارجی)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}B\hat{O}C>\hat{A}=۹۰^\circ\\ B\hat{O}C+O\hat{B}C+O\hat{C}B=۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}C<۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow ۱۸۰^\circ > B\hat{O}C > ۹۰^\circ$$

مثال: در شکل مقابل مجموع زوایای $\hat{E},\hat{D},\hat{C},\hat{B},\hat{A}$ کدام است؟



حل:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{E}+\hat{F}=۱۸۰^\circ\\ \hat{C}+\hat{G}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}+\hat{F}+\hat{G}+\hat{E}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$$

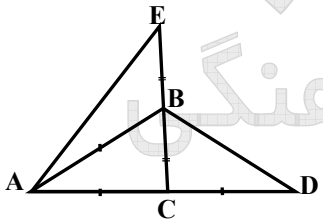
$$\hat{B}+۱۸۰^\circ-\hat{F}+۱۸۰^\circ-\hat{G}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{F}+\hat{G}-۱۸۰^\circ \Rightarrow$$

$$\hat{A}+\hat{C}+\left(\hat{B}+۱۸۰^\circ\right)+\hat{E}+\hat{D}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}=۱۸۰^\circ$$

راه ۲:

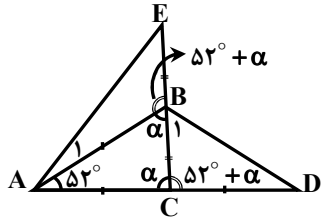
$$\left.\begin{array}{l}\hat{F}_۱=\hat{A}+\hat{E}\\ \hat{G}_۱=\hat{C}+\hat{D}\\ \hat{F}_۱+\hat{G}_۱+\hat{B}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{E}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$$

مثال: در شکل مقابل زاویه‌ی $B\hat{A}C=۵۲^\circ$، مجموع دو زاویه‌ی D و E چند درجه است؟



حل:

دو مثلث ABE و BCD طبق برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین با هم برابرند. پس $\hat{E}=\hat{B}_۱$ و $\hat{A}_۱=\hat{D}$ می‌باشد. حال داریم:



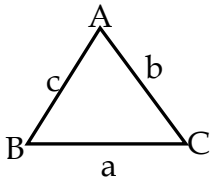
$$\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A}=۵۲^\circ \Rightarrow ۲\alpha=۱۸۰^\circ-۵۲^\circ=۱۲۸^\circ \Rightarrow \alpha=۶۴^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D}+\hat{E}=\hat{D}+\hat{B}_۱=A\hat{C}B=\alpha=۶۴^\circ$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۳- روابط طولی در مثلث:

الف) شرط وجود مثلث:



قضیه: در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از قدر مطلق تفاضل آنها بزرگتر است.

$$|a-b| < c < a+b$$
$$|a-c| < b < c+a$$
$$|b-c| < a < b+c$$

پس شرط لازم و کافی برای آن که سه عدد مثبت c, b, a، طول اضلاع یک مثلث باشند، آن است که هر سه نامساوی $c < a+b, b < a+c, a < b+c$ برقرار باشند. **ضمن آن که اگر c بزرگترین ضلع مثلث باشد، شرط لازم و کافی برای وجود مثلث آنست که:** $c < a+b$

مثال: اگر a و b و c اضلاع مثلث ABC و $a \geq b \geq c$ باشد، آن گاه نشان دهید:

(محیط) $\frac{1}{3} \leq$ کوچک‌ترین ضلع مثلث $(c) > 0$ **(محیط) $\frac{1}{2} <$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث $(a) \leq$ (محیط) $\frac{1}{3}$**

حل:

a بزرگ‌ترین ضلع است: (محیط) $\left.\begin{matrix} a \geq b \\ a \geq c \end{matrix}\right\} \to 2a \geq b+c \to 3a \geq a+b+c = \text{محیط} \to a \geq \frac{1}{3}$ (محیط)

قضیه‌ی وجود مثلث: (محیط) $a < b+c \to 2a < a+b+c = \text{محیط} \to a < \frac{1}{2}$ (محیط)

c کوچک‌ترین ضلع است: (محیط) $\left.\begin{matrix} c \leq a \\ c \leq b \end{matrix}\right\} \to 2c \leq a+b \to 3c \leq a+b+c \to c \leq \frac{1}{3}$ (محیط)

مثال: سه پاره خط به طولهای $4x-4, x+7, 6x$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{11}{9} < x < 3$ ۲) $\frac{5}{3} < x < 3$ ۳) $2 < x < 3$ ۴) $\frac{11}{9} < x < 4$

حل: با نوشتن سه حالت شرط وجود مثلث داریم:

$$\left.\begin{matrix} 4x-4 < x+7+6x \to 3x > -11 \to x > -\frac{11}{3} \\ x+7 < 6x+4x-4 \to 9x > 11 \to x > \frac{11}{9} \\ 6x < 4x-4+x+7 \to x < 3 \end{matrix}\right\} \overset{\cap}{\Rightarrow} \frac{11}{9} < x < 3$$

مثال: با کدام سه طول داده شده می‌توان مثلث ساخت؟ (b, a مثبت اند)

۱) $a+b+1, b, a$ ۲) $a+b, b+1, a+1$

۳) $2a^2+3a+1, (a+1)^2, a^2$ ۴) $3a, 2a, a-2$

حل: باید اعداد در شرط وجود مثلث صدق کنند.

۱) $a+b+1 > a+b$ غ ق ق

۲) $a+b < a+b+2$, $2a+b+1 > b+1$, $2b+a+1 > a+1 \Rightarrow$ شرایط وجود مثلث را دارد پس قابل قبول است

۳) $2a^2+3a+1 > (a+1)^2+a^2$ غ ق ق

۴) $3a > 2a+(a-2)$ غ ق ق

مثال: تعداد مثلثهایی که اندازه‌های اضلاع آنها سه عدد طبیعی متوالی‌اند، کدام است؟

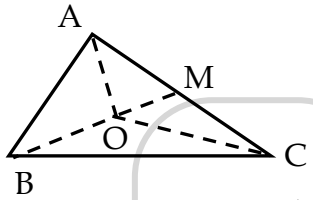
حل: قضیه‌ی وجود مثلث را می‌نویسیم:

$$n+۲<(n+۱)+n \rightarrow n>۱$$

برای $n>۱$ این نامساوی همواره برقرار است، در نتیجه بی‌شمار جواب داریم.

مثال: در مثلث ABC طول اضلاع برابر ۱۲,۸,۶ می‌باشد. اگر BC بزرگترین ضلع مثلث و نقطه‌ی O یک نقطه دلخواه داخل مثلث باشد، در این صورت کمترین و بیشترین مقدار $OB+OC$ کدام است؟

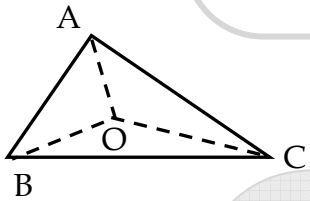
حل: قضیه‌ی وجود مثلث را در مثلث‌های داده شده می‌نویسیم.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta AMB: OB+OM<AB+AM\\ \Delta OMC: OC<MC+OM\end{array}\right\}\Rightarrow OB+OC<AB+AM+MC=AB+AC$$

$$BC<OB+OC<AB+AC\Rightarrow ۱۲<OB+OC<۱۴$$

مثال: اگر ۲p محیط مثلث ABC باشد و O نقطه دلخواهی واقع در درون مثلث باشد کدام حکم صحیح است؟



۱) $p<OA+OB+OC<۲p$

۲) $\frac{p}{2}<OA+OB+OC<p$

۳) $p<OA+OB+OC<\frac{۳p}{۲}$

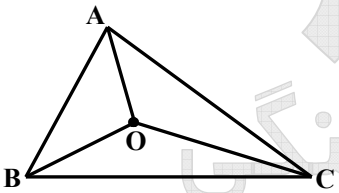
۴) $\frac{p}{۲}<OA+OB+OC<۲p$

حل: با نوشتن قضیه‌ی وجود مثلث در مثلث‌های ایجاد شده داریم:

$$\left.\begin{array}{l}BC<OB+OC<AB+AC\\ AB<OA+OB<AC+BC\\ AC<OA+OC<AB+BC\end{array}\right\}\Rightarrow AC+AB+BC<۲(OA+OB+OC)<۲(AB+BC+AC)\Rightarrow$$

$$۲p<۲(OA++OB+OC)<۴p\Rightarrow p<OA+OB+OC<۲p$$

مثال: در مثلثی به طول اضلاع $۳-\sqrt{۲}$,۳ و $۲+\sqrt{۲}$ واحد، نقطه‌ی M داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطه‌ی M از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟



۱) $۵-\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

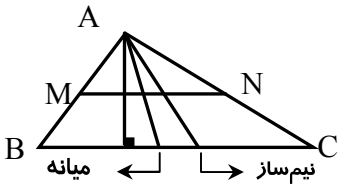
در هر مثلث دل‌خواه طبق حل سوال فوق داریم: $\frac{۱}{۲}(\text{محیط})<OA+OB+OC<(\text{محیط})$

در این سوال:

$$\frac{۱}{۲}\left(۸+\sqrt{۲}-\sqrt{۲}\right)<OA+OB+OC<\left(۸+\sqrt{۲}-\sqrt{۲}\right)$$

$$۴<OA+OB+OC<۸$$

پس تنها جواب قابل قبول $۴\sqrt{۲}$ است که بین ٤ و ۸ قرار دارد.



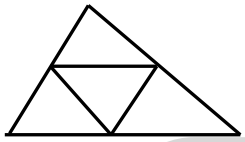
ب) قضیه پاره خط واصل بین وسط دو ضلع مثلث:

پاره‌خطی که وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

$$MN \parallel BC \quad , \quad MN = \frac{۱}{۲}BC$$

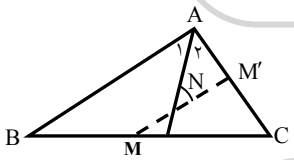
این پاره خط ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر رأس A را نیز نصف می‌کند. بطور کلی پاره خط MN، مکان هندسی وسطهای کلیه پاره خطهایی است که یک سر آن نقطه A و سر دیگر آن روی پاره خط BC است.

قضیه‌ی عکس: اگر از وسط ضلع مثلثی خطی موازی ضلعی دیگر رسم کنیم، ضلع سوم را نصف می‌کند و اندازه پاره خط حاصل نصف ضلع سوم مثلث خواهد بود.



نکته: با وصل کردن اوساط اضلاع هر مثلث به هم، مثلث به چهار مثلث همنهشت (و در نتیجه هم‌مساحت) افراز می‌شود.

مثال: در مثلث ABC اگر $AB = ۱۲$ و $AC = ۸$ و از نقطه M وسط ضلع BC خطی موازی با AB رسم کنیم تا نیمساز داخلی زاویه A را در نقطه N قطع کند اندازه MN کدام است؟



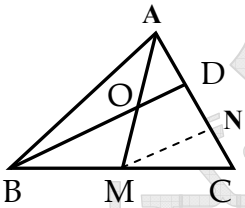
حل: چون M وسط BC است، پس **M′** نیز وسط AC می‌باشد، لذا:

$$MM' = \frac{۱}{۲}AB = ۶$$

$$MM' \parallel AB \Rightarrow N = \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow AM' = NM' = ۴ \Rightarrow MN = ۶ - ۴ = ۲$$

مثال: در مثلث ABC، AM میانه وارد بر BC و نقطه O وسط AM است. اگر امتداد OB ضلع AC را در D قطع کند و $OB = ۶$ باشد، OD برابر با کدام است؟

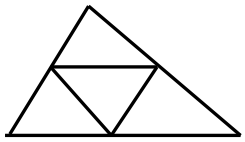
حل: با استفاده از قضیه‌ی گفته شده اگر از M خطی به موازات BD رسم کنیم ، خواهیم داشت:



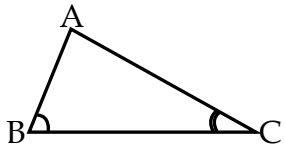
$$\left.\begin{array}{l} \text{وسط } M \rightarrow MN = \frac{۱}{۲}BD \\ \text{وسط } O \rightarrow OD = \frac{۱}{۲}MN \end{array}\right\} \rightarrow OD = \frac{۱}{۴}BD \rightarrow OD = \frac{۱}{۳}BO = \frac{۱}{۳} \times ۶ = ۲$$

مثال: یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های همنهشت است؟

حل: با توجه به این‌که اضلاع مثلث جدید نصف اضلاع مثلث اولیه‌اند، لذا: چون اضلاع نصف شده‌اند محیط اولیه ۲ برابر محیط ثانویه است.



۴- روابط بین اضلاع وزوایا:



الف) قضیه تناظر اضلاع با زوایا: در هر مثلث، زاویه بزرگتر متناظر به ضلع بزرگتر است و بالعکس:

$$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

مثال: اگر BC بزرگترین ضلع مثلث ABC باشد، برای زاویه $\hat{A}$ کدام حکم همواره درست است؟

۱) منفرجه است. ۲) حاده است. ۳) قائمه است. ٤) بزرگتر از ۶۰° است.

حل: با استفاده از قضیه‌ی تناظر اضلاع با زوایا:

$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C}$$

$$\Rightarrow ۲\hat{A} > \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} \Rightarrow ۳\hat{A} > ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} > ۶۰^\circ$$

$$BC > AC \Rightarrow \hat{A} > \hat{B}$$

مثال: اگر یکی از زوایای مثلث با اضلاع غیر مساوی، برابر ۶۰° باشد ضلع مقابل به آن زاویه:

۱) کوچکترین ضلع مثلث است. ۲) بزرگترین ضلع مثلث است.

۳) ضلع متوسط مثلث است. ٤) با این اطلاعات قابل تعیین نیست.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = ۶۰^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۲۰^\circ$$

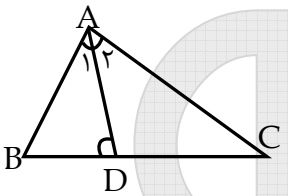
با توجه به صورت سؤال $\hat{B} \neq \hat{C}$. پس یکی از این دو زاویه بزرگتر از ۶۰° و دیگری کوچکتر از ۶۰° است.

فرض می‌کنیم $\hat{C} < ۶۰^\circ, \hat{B} > ۶۰^\circ$ پس $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B} \Rightarrow c < a < b$ پس ضلع روبرو به زاویه‌ی ۶۰° ضلع متوسط این مثلث است.

مثال: در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{A}$ ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. کدام نامساوی زیر همواره درست است؟

۱) $AB > BD$ ۲) $DA > DB$ ۳) $AB > AD$ ٤) $DB > DA$

حل: همواره زاویه‌ی خارجی از دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است:



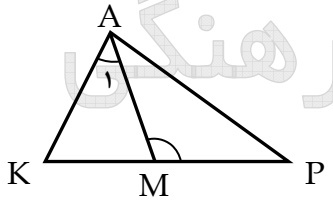
$$\left.\begin{array}{l}\hat{D} = \hat{A}_۲ + \hat{C} \Rightarrow \hat{D} > \hat{A}_۲ \\ \hat{A}_۲ = \hat{A}_۱\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D} > \hat{A}_۱ \Rightarrow AB > BD$$

مثال: در مثلث PAK نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد. اگر $AM = AK$ کدام همواره درست است؟

۱) $AM > PM$ ۲) $AK > MK$

۳) $AP > MK$ ٤) $AP > AK$

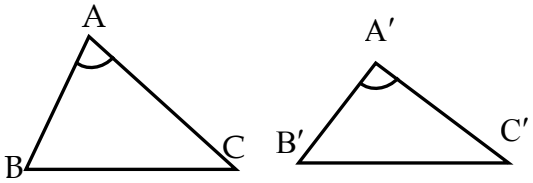
حل: همواره زاویه‌ی خارجی از دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است:



$$\left.\begin{array}{l}M > P \text{ زاویه خارجی} \\ AM = AK\end{array}\right\} \rightarrow R = M > P) \rightarrow AP > AK$$

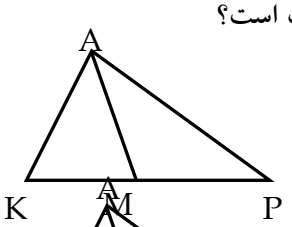
ب) قضیه لولا یا قیچی: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، و زاویه بین این دو ضلع از مثلث اول بزرگتر از زاویه‌ی بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم از مثلث دوم است. و اگر کوچکتر باشد، ضلع سوم کوچکتر است.

عکس قضیه لولا: عکس قضیه فوق نیز برقرار است: اگر $B'C' > BC$ و دو ضلع دیگر مثلث برابر باشند، آنگاه $\hat{A}' > \hat{A}$.



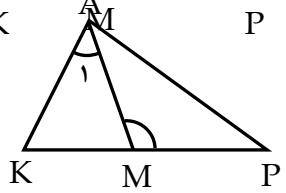
$$\hat{A}' > \hat{A} \Leftrightarrow B'C' > BC$$

مثال: در مثلث PAK نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد. اگر PM = AK کدام همواره درست است؟



۱) AM > PM
۲) AK > MK
۳) AP > MK
۴) AP > PK

حل:



$$\left.\begin{array}{l} MP = AK \\ AM = AM \\ M > A_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه لولا}} AP > MK$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ب) مساحت مثلث:

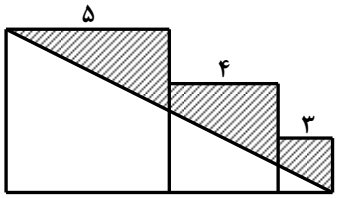
مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}ah_a=\frac{۱}{۲}bh_b=\frac{۱}{۲}ch_c \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

نتیجه: بین مثلثهایی که دو ضلع ثابت دارند، مساحت مثلثی ماکزیمم است که قائم‌الزاویه باشد.

قضیه هرون: اگر p نصف محیط مثلث باشد، مساحت مثلث از رابطه روبه‌رو محاسبه می‌گردد $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

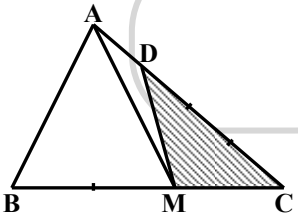
مثال: در شکل زیر ۳ مربع به اضلاع ۳، ٤، ۵ کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت قسمت هاشورخورده چقدر است؟



حل:

$$S=(۲۵+۱۶+۹)-(\frac{۱۲\times ۵}{۲})=۲۰$$

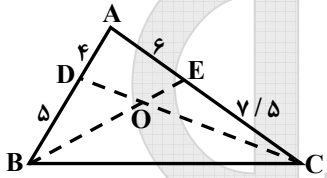
مثال: اگر $BM=۲MC$ و $DC=۳AD$ حاصل $\frac{S_{MDC}}{S_{ABC}}$ چقدر است ؟



حل:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۳}\\ \frac{S_{MCD}}{S_{AMC}}=\frac{۳}{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{S_{MCD}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۴}$$

مثال: در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت OCE کدام است؟

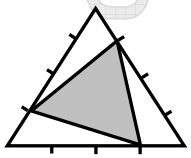


حل:

چون دو مثلث **DBC** و **BEC** دارای قاعده‌های برابر و ارتفاعهای برابرند با حذف مثلث مشترک **BOC** خواهیم داشت:

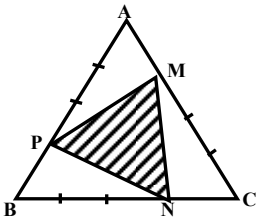
$$S_{\Delta_{DBC}}=S_{\Delta_{EBC}}\Rightarrow S_{\Delta_{OBD}}=S_{\Delta_{OCE}}\Rightarrow \frac{S_{\Delta_{OBD}}}{S_{\Delta_{OCE}}}=۱$$

مثال: هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع، به نسبت‌های ۱ و ۳ تقسیم شده است. مساحت مثلث سایه‌زده چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



حل:

چون اضلاع مثلث به نسبت‌های یکسان تقسیم شده‌اند. مثلث هاشور خورده هم متساوی الاضلاع است که البته این موضوع با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها نیز قابل تحقیق است.



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a\times a\times \sin ۶۰=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{MCN}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}a\times\frac{۱}{۴}a\times\sin ۶۰=\frac{۳}{۱۶}S_{ABC}$$

$$\rightarrow S_{MNP}=S_{ABC}-۳S_{MNP}=(۱-۳\times\frac{۳}{۱۶})S_{ABC}=\frac{۷}{۱۶}S_{ABC}$$

مثال: در مثلثی به اضلاع ۵، ٦ و ۷، طول ارتفاع وارد بر ضلع به طول ٦ کدام است؟

حل:

$$2p = 18 \Rightarrow p = 9$$

با استفاده از فرمول هرون:

$$s = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9\times4\times3\times2} = 6\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2}\times6\times h = 6\sqrt{6} \Rightarrow h = 2\sqrt{6}$$

مثال: اگر یک راس مثلثی مرکز دایره‌ای به شعاع ٦ و دو راس دیگرش روی این دایره باشند، بیشترین مساحت این مثلث کدام است؟

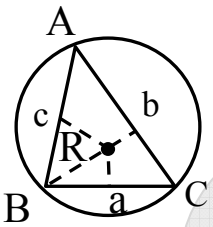
حل:

$$S = \frac{1}{2}R\times R\,\mathrm{Sin}\theta = \frac{1}{2}6\times6\,\mathrm{Sin}\theta = 18\,\mathrm{Sin}\theta$$

ماکزیمم مساحت هنگامی است که $\mathrm{Sin}\,\theta = 1$ باشد پس $S_{max} = 18$

چ) قضیه‌ی سینوس‌ها و کسینوس‌ها:

دو رابطه بسیار مهم زیر در مثلث برقرارند:



رابطه سینوس‌ها شعاع دایره محیطی: R

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

رابطه کسینوس‌ها

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

مثال: در مثلثی داریم $a \neq b = c$ و $a = 6$ ، اگر شعاع دایره محیطی این مثلث $2\sqrt{3}$ باشد، اندازه b کدام است؟

حل: با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R = 4\sqrt{3} \Rightarrow \frac{6}{\sin A} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow$ چون $a = b$ می‌شود غیر قابل قبول است

یا

$$\hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow 2b\cos30^\circ = 6 \Rightarrow b = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

مثال: اگر در مثلثی رابطه $b^3 + c^3 = a^2(b+c)$ برقرار باشد، مقدار زاویه $\hat{A}$ کدام است؟

حل:

$$b^3 + c^3 = a^2(b+c) \Rightarrow a^2 = \frac{(b^2+c^2-bc)(b+c)}{(b+c)} = b^2 + c^2 - bc$$

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها و مقایسه‌ی آن با رابطه‌ی گفته شده:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - bc \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cos A = 1 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

د) قضیه‌ی فیثاغورس:

در هر مثلث ΔABC داریم:

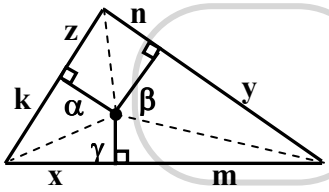
$$\hat{A} > ۹۰ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$$
$$\hat{A} = ۹۰ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$
$$\hat{A} < ۹۰ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$$

قضیه فیثاغورس:

که مورد اول و سوم هم بر اساس قضیه‌ی کسینوسها و هم براساس قضیه‌ی لولا قابل اثبات است .

نکته: اعداد فیثاغورسی معروف عبارتند از:

(۳,۴,۵) – (۵,۱۲,۱۳) – (۷,۲۴,۲۵) – (۸,۱۵,۱۷) – (۹,۴۰,۴۱) – (۱۲,۳۵,۳۷) – (۲۰,۲۱,۲۹)



مثال: اگر از یک نقطه دلخواه داخل مثلث، سه عمود بر اضلاع رسم کنیم. نشان دهید بین قطعات حاصل رابطه زیر برقرار است:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = m^۲ + n^۲ + k^۲$$

حل: با نوشتن قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که وترشان مشترک است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^۲ + z^۲ = \beta^۲ + n^۲ \\ \alpha^۲ + k^۲ = x^۲ + \gamma^۲ \\ \beta^۲ + y^۲ = \gamma^۲ + m^۲ \end{array}\right\} \rightarrow m^۲ + n^۲ + k^۲ + (\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲) = x^۲ + y^۲ + z^۲ + (\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲)$$

$$\rightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ = m^۲ + n^۲ + k^۲$$

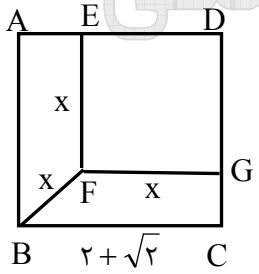
مثال: در مثلث ΔABC اگر $\hat{A} < ۹۰^\circ, c = ۱۲, b = ۵$ باشد، برای ضلع a کدام گزاره درست است؟

۱) $۱۳ < a < ۱۷$ ۲) $۷ < a < ۱۳$ ۳) $۷ < a < ۱۷$ ۴) $a < ۱۳$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} A < ۹۰ \Rightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ < ۱۶۹ \Rightarrow a < ۱۳ \\ |b - c| < a < b + c \Rightarrow ۷ < a < ۱۷ \end{array}\right\} \Rightarrow ۷ < a < ۱۳$$

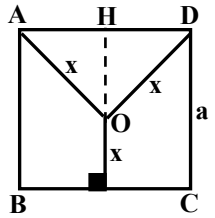
مثال: در شکل زیر ABCD و EFGD مربع هستند. مساحت مربع EFGD کدام است؟



حل: اگر قطر مربع ABCD را یک‌بار بر اساس قطر مربع EDGF و بار دیگر با توجه به ضلع بنویسیم، خواهیم داشت:

$$x + x\sqrt{۲} = (۲ + \sqrt{۲})\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} + ۲$$
$$x(۱ + \sqrt{۲}) = ۲(\sqrt{۲} + ۱) \rightarrow x = ۲$$
$$\rightarrow S_{EFDG} = x^۲ = ۴$$

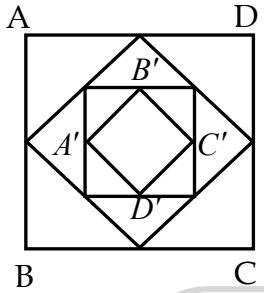
نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به ساق a، وتر $a\sqrt{۲}$ است.



مثال: در شکل مقابل ABCD مربع به ضلع a است. $\frac{x}{a}$ برابر با کدام است؟

حل: با نوشتن قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AOH، داریم:

$$(a-x)^2+(\frac{a}{2})^2=x^2 \to x^2+a^2-2ax+\frac{a^2}{4}=x^2 \to 2ax=\frac{5a^2}{4} \to x=\frac{5a}{8} \to \frac{x}{a}=\frac{5}{8}$$



مثال: در شکل زیر راسهای هر مربع اوساط اضلاع مربع دیگر است. اگر ضلع مربع ABCD برابر با ۸ باشد، ضلع مربع $A'B'C'D'$ برابر با کدام است؟

حل: چون وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی به ساق a، $a\sqrt{2}$ است، لذا چون ضلع نصف می‌شود ضلع مربع جدید $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر ضلع مربع قبلی است.

$$\to 8\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^3=8(\frac{2\sqrt{2}}{8})=2\sqrt{2}$$

مثال: اگر در مثلثی رابطه $a^n=b^n+c^n$ برقرار باشد، $(n>2)$ آن گاه کدام صحیح است؟

۱) $\hat{A}>90^\circ$ ۲) $60^\circ<\hat{A}<90^\circ$ ۳) $\hat{A}<60^\circ$ ۴) $\hat{A}<45^\circ$

حل:

$$a^n=b^n+c^n \to a^n>b^n \to a>b \to \frac{b}{a}<1$$

$$a^n>c^n \to a>c \to \frac{c}{a}<1$$

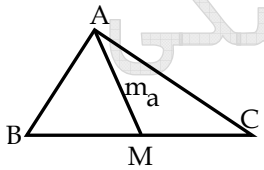
چون A بزرگ‌ترین ضلع است و قبلاً گفتیم، زاویه‌ی مقابل به بزرگ‌ترین ضلع مثلث حتماً بزرگ‌تر از ۶۰ است، پس $A>60$

$$a^2a^{n-2}=b^2b^{n-2}+c^2c^{n-2} \to a^2=b^2(\frac{b}{a})^{n-2}+c^2(\frac{c}{a})^{n-2}<b^2+c^2 \to A<90$$

۵) اجزای دیگر مثلث:

۱) میانه:

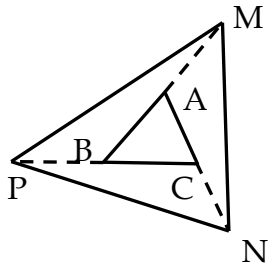
پاره خطی که یک سر آن رأس مثلث و سر دیگرش وسط ضلع مقابل آن رأس باشد، میانه‌ی نظیر آن رأس از مثلث نامیده می‌شود.



نکات:

۱- هر میانه‌ی مثلث مساحت آن را نصف می‌کند.یا به تعبیر دیگر، میانه مثلث را بـه دو مثلـث معادل تقسیم می‌کند.

مثال: هر یک از اضلاع مثلث ABC را به اندازه‌ی خودش در یک جهت امتداد می‌دهیم تا مثلث MNP حاصل شود. مساحت آن مثلث چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

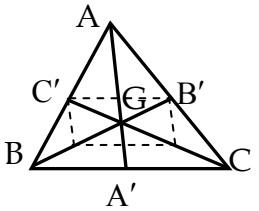


حل: اگر از C به M و از B به N و از A به P وصل کنیم، این خطوط در مثلث‌هایی که قرار دارند میانه‌اند، لذا مساحت را نصف می‌کنند، پس داریم:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACM}=S_{\Delta MCN}$$
$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABP}=S_{\Delta MAP} \Rightarrow S_{\Delta MNP}=7S_{\Delta ABC}$$
$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCN}=S_{\Delta PBN}$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۲- سه میانه‌ی مثلث از یک نقطه می‌گذرند (همرسند) و در آن نقطه یکدیگر را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کنند. این نقطه مرکز ثقل مثلث نیز می‌باشد.

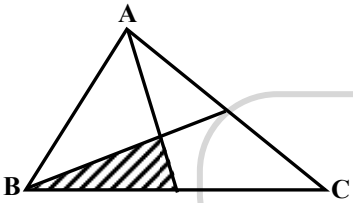


$$\frac{GA'}{GA}=\frac{GB'}{GB}=\frac{GC'}{GC}=\frac{۱}{۲}$$

مثال: اگر دو میانه مثلثی $m_b=۱۲, m_a=۹$ باشد ، اندازه ضلع a کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۲۲

حل: گزینه ۳ پاسخ است .

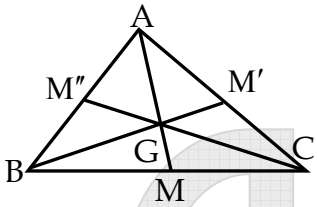


چون میانه‌ها یکدیگر را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کنند $\frac{۲}{۳}m_b$ و $\frac{۱}{۳}m_a$ و $\frac{a}{۲}$ خود یک مثلث می‌سازند که باید در شرایط قضیه وجود مثلث صدق کند.

پس داریم:

$$|۸-۳|<\frac{a}{۲}<۸+۳\rightarrow ۱۰<a<۲۲$$

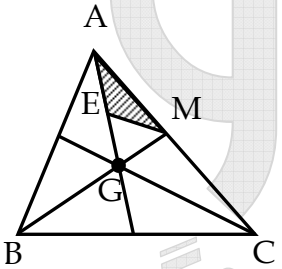
۳- سه میانه‌ی هر مثلث آن مثلث، را به شش مثلث هم‌مساحت (معادل) تقسیم می‌کنند.



$$S_{\Delta GBC}=S_{\Delta GAC}=S_{\Delta AGB}=\frac{۱}{۳}S_{\Delta ABC}$$

$$S_{\Delta AGM'}=S_{\Delta GM'C}=S_{\Delta GCM}=S_{\Delta MGB}=S_{\Delta BGM''}=S_{\Delta M''GA}=\frac{۱}{۶}S_{\Delta ABC}$$

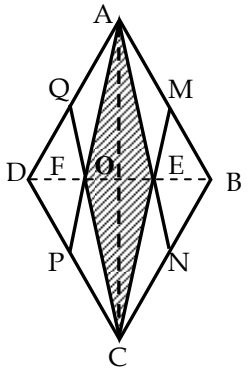
مثال: در مثلث ABC نقطه G مرکز ثقل و نقطه E وسط AG می‌باشد. مساحت مثلث AME چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



حل: در مثلث **AGM**، **G** مرکز ثقل و **EM** میانه است. لذا:

$$\left.\begin{array}{l}S_{\Delta AME}=\frac{۱}{۲}S_{\Delta AGM}\\ S_{\Delta AGM}=\frac{۱}{۶}S_{\Delta ABC}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\Delta AME}=\frac{۱}{۱۲}S_{\Delta ABC}$$

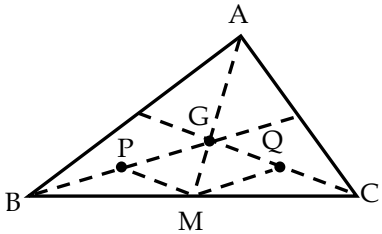
مثال: در چهار ضلعی ABCD، Q, P, N, M وسطهای اضلاع می باشند. مساحت چهارضلعی AFCE چه کسری از مساحت چهارضلعی ABCD است؟



حل: اگر قطر AC را رسم کنیم، دو مثلث تشکیل می‌شود که CM و AN و CQ و AP میانه‌های آن هستند، لذا با توجه به خاصیت گفته شده داریم:

$$\left.\begin{array}{l}S_{\Delta AEC}=\frac{۱}{۳}S_{\Delta ACB}\\ S_{\Delta AFC}=\frac{۱}{۳}S_{\Delta ADC}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{AFCE}=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$$

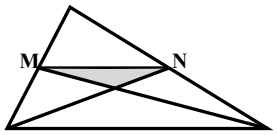
مثال: در شکل مقابل G مرکز مثلث، P وسط BG و Q وسط CG است. مساحت چهارضلعی MPGQ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



حل:

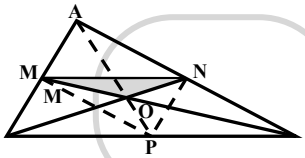
$$S_{PGQM} = S_{PGM} + S_{GQM} = \frac{S}{۱۲} + \frac{S}{۱۲} = \frac{S}{۶}$$

مثال: در شکل مقابل نقاط M و N وسط دو ضلع است. مساحت بزرگ‌ترین مثلث، چند برابر مساحت مثلث سایه‌زده است؟



حل:

می‌دانیم در هر مثلث با رسم سه میانه، ٦ مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود. هم‌چنین در هر مثلث با وصل کردن وسط اضلاع، ٤ مثلث هم‌نهشت و در نتیجه هم مساحت ایجاد می‌شود.



$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{۱}{۴} S_{\overset{\Delta}{ABC}} \quad , S_{\overset{\Delta}{MNO}} = \frac{۲}{۶} S_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{۱}{۱۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

٤- در مثلث ABC اگر AM میانه‌ی نظیر ضلع BC باشد، همواره داریم:

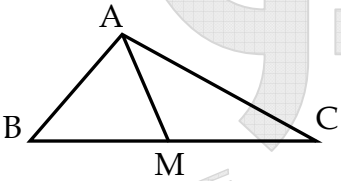
$$\hat{A} < ۹۰^\circ \Rightarrow AM > \frac{BC}{۲}$$

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow AM = \frac{BC}{۲}$$

(میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است.)

$$\hat{A} > ۹۰^\circ \Rightarrow AM < \frac{BC}{۲}$$

٥- در مثلث ΔABC داریم:



$$m_a^۲ = \frac{۱}{۲}(b^۲ + c^۲ - \frac{a^۲}{۲}) \text{ یا } AB^۲ + AC^۲ = ۲AM^۲ + \frac{BC^۲}{۲}$$

مثال: طول میانه‌ی AM در مثلثی که اضلاع آن $BC = ٤, AC = ۳, AB = ۲$ می‌باشند کدام است؟

حل:

$$AB^۲ + AC^۲ = \frac{BC^۲}{۲} + ۲AM^۲ \Rightarrow ۲^۲ + ۳^۳ = \frac{۴^۲}{۲} + ۲AM^۲ \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{۴+۹-۸}{۲}} = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

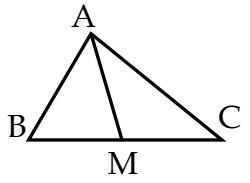
٦- در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور به آن کوچکتر است. اگر m_a اندازه‌ی میانه‌ی نظیر رأس A از مثلث ABC باشد، داریم:

$$\frac{|b-c|}{۲} < m_a < \frac{b+c}{۲}$$

و می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{۳}{۴}(\text{محیط}) < m_a + m_b + m_c < \text{محیط} \text{ یا } \frac{۳}{٤}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$$

مثال: در مثلث ABC اگر طول اضلاع ۱۴,۱۰,۶ باشد و BC بزرگترین ضلع مثلث باشد، کدام رابطه در مورد میانه AM صحیح است؟



۱) $۳ < AM < ۸$ ۲) $۶ < AM < ۱۰$

۳) $۳ < AM < ۷$ ۴) $۷ < AM < ۱۰$

حل: تمام نامساوی‌هایی که در مورد میانه‌ی AM امکان‌پذیر است را نوشته و سپس اشتراک می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{|AB-AC|}{۲} < AM < \frac{AB+AC}{۲} \Rightarrow ۲ < AM < ۸ \\ |AB-BM| < AM < AB+BM \Rightarrow ۱ < AM < ۱۳ \\ |AC-CM| < AM < AC+CM \Rightarrow ۳ < AM < ۱۷ \\ ۱۴^۲ > ۱۰^۲ + ۶^۲ \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ \Rightarrow AM < \frac{BC}{۲} \Rightarrow AM < \frac{۱۴}{۲} = ۷ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳ < AM < ۷$$

مثال: در مثلثی به اندازه‌ی اضلاع $۵, ۷, a \geq ۸$، کدام عدد برای مجموع اندازه‌های سه میانه، مورد قبول است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۹ ۴) ۲۴

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا با توجه به نامساوی مثلثی محدوده‌ی a را تعیین می‌کنیم.

$a \geq ۸ \Rightarrow ۸ \leq a < ۱۲$ طبق فرض و $۷-۵ < a < ۷+۵ \Rightarrow ۲ < a < ۱۲$

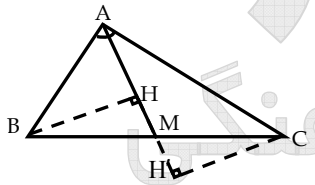
مجموع طول سه میانه‌ی هر مثلث بین محیط و سه چهارم محیط است:

$$\frac{۳}{۴}\text{محیط} < m_a + m_b + m_c < \text{محیط}، ۸+۵+۷ \leq \text{محیط} < ۱۲+۵+۷ \Rightarrow ۲۰ \leq \text{محیط} < ۲۴$$

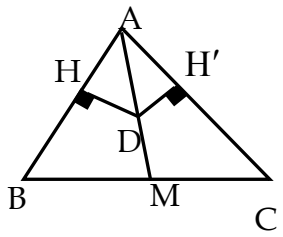
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}(۲۰) < m_a + m_b + m_c < ۲۴ \Rightarrow ۱۵ < m_a + m_b + m_c < ۲۴$$

بین گزینه‌ها ۱۹ قابل قبول است.

۷- در هر مثلث، هر میانه از مجموع دو میانه دیگر کوچکتر است. لذا میانه‌های یک مثلث، خود مثلث دیگری می‌سازند که مساحتش $\frac{۳}{۴}$ مساحت مثلث اولیه است. یعنی مساحت مثلثی با ۳ ضلع m_a، m_b و m_c برابر $\frac{۳}{۴}$ مساحت مثلث بنا شده بر a و b و c خواهد بود.



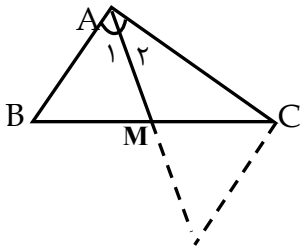
۸- دو رأس هر مثلث، از میانه‌ی نظیر رأس سوم به یک فاصله‌اند و به عکس اگر دو رأس مثلث از خطی که از رأس سوم می‌گذرد به یک فاصله باشند، آن خط میانه است. (آن خط نباید با ضلع سوم موازی باشد.)



$$\text{میانه } AM \Leftrightarrow BH = CH'$$

نسبت فاصله‌های هر نقطه‌ی میانه از دو ضلع مجاور آن، برابر است با عکس نسبت آن دو ضلع:

$$\frac{DH}{DH'} = \frac{AC}{AB}$$

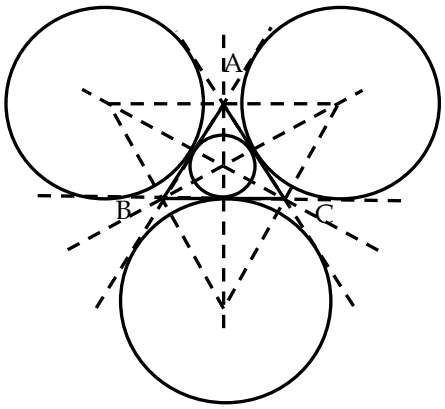


۱۰- میانه نظیر هر رأس با ضلع بزرگتر آن، زاویه کوچکتری می‌سازد.

$$AC > AB \Rightarrow \hat{A}_۱ > \hat{A}_۲$$

۱۱- در هر مثلث، کوچکترین میانه، نظیر بزرگترین ضلع و بزرگترین میانه، نظیر کوچکترین ضلع است.

۲) نیمساز:



پاره‌خطی که به یک رأس از مثلث و ضلع مقابل آن محدود است و زاویه آن رأس را نصف می‌کند، نیمساز مثلث نامیده می‌شود. هر مثلث دارای سه نیمساز داخلی و سه نیمساز خارجی است. سه نیمساز داخلی از یک نقطه می‌گذرند که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و لذا می‌توان دایره ای بر سه ضلع مثلث مماس کرد که آن نقطه(محل تلاقی ۳ نیمساز داخلی) مرکز آن دایره می‌باشد. این دایره، **دایره‌ی محاطی داخلی** مثلث نام دارد.

نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه سوم نیز از یک نقطه می‌گذرند که آن نقطه نیز از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و لذا می‌توان دایره ای بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس کرد که آن نقطه(محل تلاقی نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه سوم) مرکز آن دایره می‌باشد. این دایره، **دایره محاطی خارجی** مثلث نام دارد. هر مثلث سه دایره‌ی محاطی خارجی دارد.

مثال: سه خط دوبه‌دو متقاطع در یک صفحه مفروضند. چند نقطه در این صفحه می‌توان یافت که از هر سه خط مزبور به یک فاصله باشند؟

حل:

سه خط یک مثلث می‌سازند و سه مرکز دایره محاطی خارجی و یک مرکز دایره محاطی داخلی از سه ضلع به یک فاصله‌اند، پس ٤ نقطه جواب است.

مثال: محل تلاقی کدام دسته خط از دسته خطهای زیر همواره داخل مثلث است؟

۱) میانه‌ها و نیمسازهای داخلی
۲) ارتفاع‌ها و میانه‌ها
۳) ارتفاع‌ها و عمود منصف‌ها
٤) عمود منصف‌ها و نیمسازها

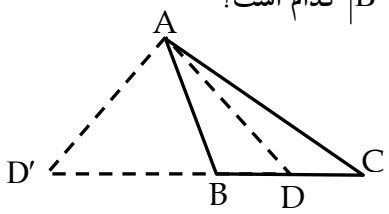
حل:

تنها میانه‌ها و نیمسازهای داخلی تمام نقاطشان داخل مثلث می‌باشد، لذا محل تلاقیشان نیز داخل مثلث می‌باشد.

نکات:

۱- نیمساز زاویه‌ی داخلی هر رأس مثلث بر نیمساز زاویه‌ی خارجی همان رأس عمود است.

مثال: در مثلث ABC، اگر طول نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A برابر باشند، $\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$ کدام است؟

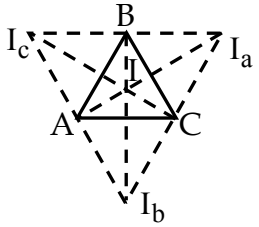


حل:

با توجه به نکته فوق $A=۹۰^\circ$ و داریم $AD'=AD$ در نتیجه $D'=D=۴۵^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=۱۸۰-۴۵-\dfrac{\hat{A}}{۲}\\ \hat{C}=۴۵-\dfrac{\hat{A}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \left|\hat{B}-\hat{C}\right|=۹۰$$

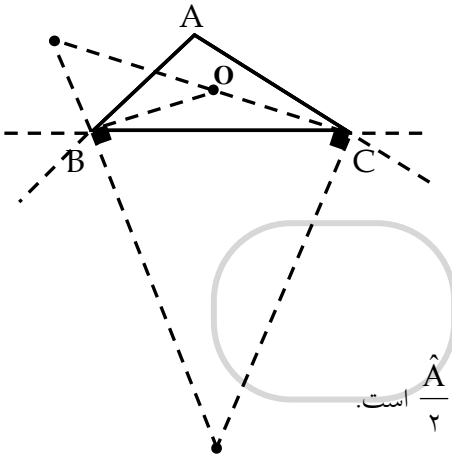
مثال: هرگاه I مرکز دایره محاطی داخلی و I_a, I_b, I_c مراکز دوایر محاطی خارجی مثلث ABC باشند، در مثلثی که رئوسش I_a, I_b, I_c می‌باشد، I کدام است؟



۱) مرکز ثقل
۲) مرکز دایره محاطی داخلی
۳) مرکز تلاقی سه ارتفاع
٤) مرکز دایره محیطی

حل:

چون IC نیمساز داخلی و I_bI_a نیمساز خارجی رأس C است، لذا بر هم عمودند و به دلیل مشابه I_aA و I_bB نیز ارتفاعند و I محل تلاقی ارتفاعها است.

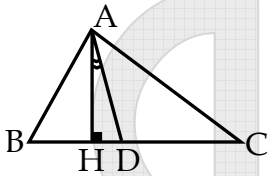


۲- زاویه بین دو نیمساز داخلی زوایای C, B در مثلث ABC مساوی $۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$ است.

۳- زاویه بین دو نیمساز خارجی زوایای C, B در مثلث ABC مساوی $۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$ است.

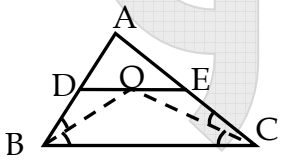
٤- زاویه بین نیمساز داخلی زاویه‌ی C و نیمساز خارجی زاویه‌ی B در مثلث ABC مساوی $\frac{\hat{A}}{۲}$ است.

۵- در هر مثلث زاویه بین ارتفاع و نیمساز هر رأس برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل زاویه‌های دو رأس دیگر.



$$H\hat{A}D = \frac{۱}{۲}\left|\hat{B} - \hat{C}\right|$$

٦- هر گاه از نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای داخلی دو رأس یک مثلث، خطی موازی با ضلع واقع بین آن دو رأس رسم کنیم تا دو ضلع دیگر مثلث را قطع کند پاره خط پدید آمده برابر است با مجموع بخشهای ایجاد شده روی دو ضلع مثلث که مجاور با دو رأس اولیه هستند.

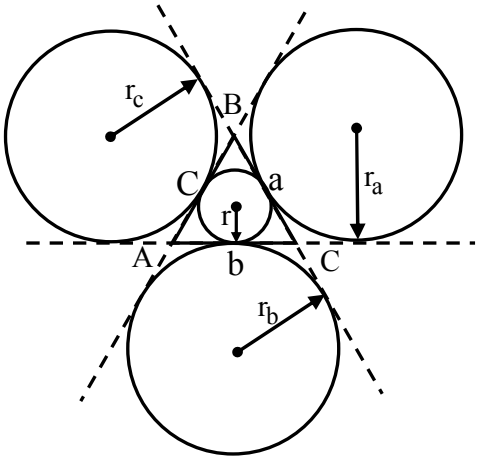


$$DE = DB + EC$$

۷- اگر r شعاع دایره محاطی داخلی و r_a, r_b, r_c شعاع دوایر محاطی خارجی مثلث باشد روابط زیر برقرار است:

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$
$$r_b = \frac{S}{p-b}$$
$$r_c = \frac{S}{p-c}$$
$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}$$

$$r = \frac{S}{p} \qquad (۲p = a+b+c)$$



مثال: اگر ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۸cm باشد، شعاع دایره محاطی درونی مثلث چند سانتی‌متر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی فوق:

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=۱۸\Rightarrow a=\frac{۳۶}{\sqrt{۳}}\Rightarrow S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{۳a}{۲}}=\frac{a}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}=۶cm$$

مثال: مساحت مثلثی ۱۳ برابر محیط آن است. شعاع دایره‌ی محاطی درونی مثلث کدام است؟

حل:

$$s=۱۳\times ۲p\Rightarrow s=۲۶p\Rightarrow r=\frac{s}{p}=۲۶$$

مثال: در مثلث ABC، که طول اضلاع عبارتند از $c=۱۳, b=۱۲, a=۵$ در این صورت اندازه‌ی شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع BC کدام است؟

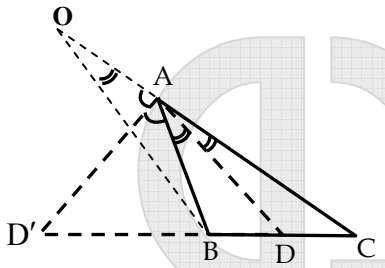
حل:

$$s=\frac{۱}{۲}\times(۵\times ۱۲)=۳۰$$

$$r_a=\frac{s}{p-a}=\frac{۳۰}{۱۵-۵}=۳$$

۸- نیمساز داخلی و خارجی نظیر هر زاویه مثلث، ضلع مقابل آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.

همچنین طول نیمساز داخلی و نیمساز خارجی نیز با توجه به روابط زیر محاسبه می‌شوند:

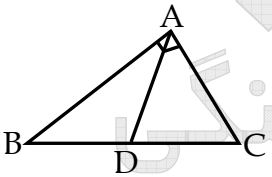


$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{D'B}{D'C}$$

$$AD^{۲}=AB\times AC-DB\times DC$$

$$AD'^{۲}=D'B\times D'C-AB\times AC$$

مثال: در مثلث ABC می‌دانیم $AB=۶$، $AC=٤$. اگر نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه D قطع کند و $BD=۳$ باشد، طول BC کدام است؟

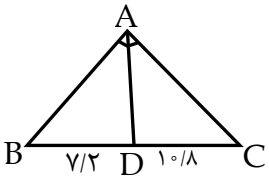


حل: نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند. لذا داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{۶}{۴}\overset{BD=۳}{\Rightarrow} DC=۲\Rightarrow BC=۳+۲=۵$$

مثال: محیط مثلثی ٤۳ و اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز یک زاویه درونی بر روی ضلع مقابل پدید می‌آورد ۷/۲ و ۱۰/۸ است. اندازه کوچکترین ضلع مثلث کدام است؟

حل: نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند. لذا داریم:



$$\left.\begin{array}{l} a=۷/۲+۱۰/۸=۱۸\Rightarrow b+c=۴۳-۱۸=۲۵ \\ \frac{b}{c}=\frac{۱۰/۸}{۷/۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}c \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۳}{۲}c+c=۲۵\Rightarrow c=۱۰$$

مثال: اگر فرض شود در مثلثی مجذور طول نیمساز داخلی زاویه A برابر حاصل ضرب اضلاع آن زاویه است، استنباط چگونه است؟

۱) $A < ۹۰^\circ$ ۲) $A = ۹۰^\circ$ ۳) $A > ۹۰^\circ$ ٤) نادرستی فرض

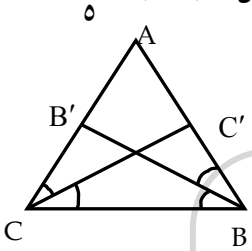
حل: اگر رابطه‌ی بین طول نیمساز با طول اضلاع و قطعاتی که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را بنویسیم، داریم:

$$AD^۲ = AB \times AC - BD \times DC = AB \times AC \rightarrow BD \times DC = ۰!$$

که امکان پذیر نمی‌باشد.

مثال: در مثلث ABC، AB>BC>AC و محیط آن ٤۳ است. اگر نیمسازهای داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ ضلع مقابل را به نسبت $\frac{٦}{٥}$ و $\frac{۲}{۳}$ تقسیم کرده باشند، اندازه BC کدام است؟

۱

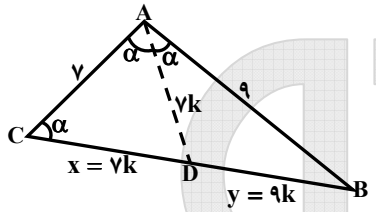


حل: نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} BB': \frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{۶}{۵} \rightarrow BC = \frac{۵}{۶}AB \\ CC': \frac{AC'}{BC'} = \frac{AC}{BC} = \frac{۲}{۳} \rightarrow BC = \frac{۳}{۲}AC \end{array}\right\} \rightarrow AB + BC + AC = ۴۳ \rightarrow \frac{۶}{۵}BC + \frac{۲}{۳}BC + BC = ۴۳ \rightarrow BC = ۱۵$$

مثال: در مثلث ABC داریم: $AB = ۹$ و $AC = ۷$ و $\hat{A} = ۲\hat{C}$. اندازه‌ی BC کدام است؟

حل:



اگر نیمساز زاویه‌ی A را رسم کنیم و قطعات ایجاد شده بر ضلع BC به ترتیب x و y باشند، آن گاه چون نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می‌کند، خواهیم داشت $x = ۷k$ و $y = ۹k$. از طرفی چون مثلث ADC متساوی الساقین است، پس $AD = CD$ خواهد شد.

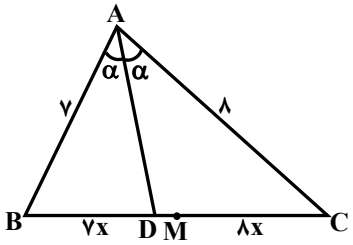
همچنین می‌دانیم اگر AD نیمساز زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

$$AD^۲ = AC.AB - CD.DB \Rightarrow (۷k)^۲ = ۷ \times ۹ - (۷k) \times (۹k) \Rightarrow ۴۹k^۲ + ۶۳k^۲ = ۶۳$$

$$\Rightarrow ۱۱۲k^۲ = ۶۳ \Rightarrow k^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow k = \frac{۳}{۴} \Rightarrow BC = x + y = ۱۶k = ۱۶(\frac{۳}{۴}) = ۱۲$$

مثال: در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگ‌تر چقدر است؟

حل:



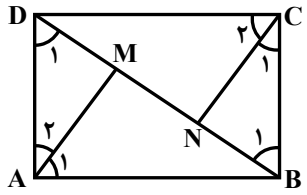
توجه کنید که زاویه‌ی بزرگتر، مقابل به ضلع بزرگتر است. حال با توجه به این که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری خود تقسیم می‌کند، پس $BD = ۷x$ و $DC = ۸x$ می‌باشد و در نتیجه:

$$۷x + ۸x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{۲۸}{۵} \\ DC = \frac{۳۲}{۵} \end{cases}$$

و از طرفی $BM = MC = ۶$ می‌باشد، پس: $MD = BM - BD = ۶ - \frac{۲۸}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$

مثال: در مستطیلی به ابعاد ٤ و ۳ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کند. اندازه‌ی MN چه‌قدر است؟

حل:



$$(\hat{D}_۱ = \hat{B}_۱\ ,\ \hat{C}_۱ = \hat{A}_۲\ ,\ AD = BC)$$

$$\overset{\triangle}{ADM} = \overset{\triangle}{CNB} \rightarrow DM = BN$$

می‌دانیم نیمساز ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند، پس:

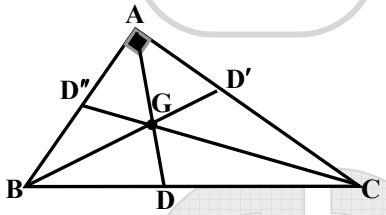
$$\frac{DM}{MB} = \frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۴} \rightarrow \frac{DM}{DM+MB} = \frac{۳}{۳+۴} = \frac{۳}{۷} \rightarrow$$

$$DM = \frac{۳}{۷}DB = \frac{۳}{۷}\times ۵ = \frac{۱۵}{۷} = NB \rightarrow$$

$$MN = ۵ - ۲\times\frac{۱۵}{۷} = ۵ - \frac{۳۰}{۷} = \frac{۵}{۷}$$

مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ٤ واحد است. فاصله‌ی دورترین رأس این مثلث از نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

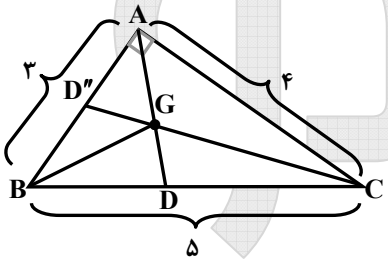
حل:



در هر مثلث بلندترین نیمساز نظیر کوتاه ترین ضلع است. چون می‌دانیم:

$$AD^۲ = AB\times AC - BD\times CD$$

لذا هر چه AB و AC بزرگتر و BD و CD کوچکتر شود، طول AD بزرگتر خواهد بود. ضمن آن که می‌دانیم نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند.



$$\frac{D''A}{D''B} = \frac{۴}{۵} \rightarrow \begin{matrix} D''A = ۴K \\ D''B = ۵K \end{matrix} \rightarrow ۴K + ۵K = ۳ \rightarrow K = \frac{۱}{۳}$$

$$\rightarrow D''A = \frac{۴}{۳} \rightarrow CD'' = \sqrt{AD''^۲ + AC^۲} = \sqrt{\left(\frac{۴}{۳}\right)^۲ + ۴^۲} = \sqrt{\frac{۱۶}{۹} + ۱۶} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۱۰}$$

اما:

$$\frac{DG}{GC} = \frac{DB}{BC} = \frac{\frac{۵}{۳}}{۵} = \frac{۱}{۳} \rightarrow \frac{DG+GC}{GC} = \frac{۳+۱}{۳} = \frac{۴}{۳} \rightarrow GC = \frac{۳}{۴}DC = \frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۳}\sqrt{۱۰} = \sqrt{۱۰}$$

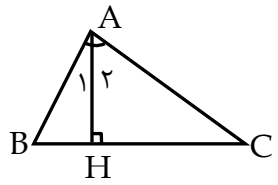
۹- مجموع سه نیمساز هر مثلث همواره از محیط کوچک‌تر است و از نصف محیط بزرگ‌تر است.

نصف محیط $< d_a + d_b + d_c <$ محیط

۳) ارتفاع:

پاره خطی که یک سر آن رأس مثلث و سر دیگرش روی ضلع مقابل و بر آن ضلع عمود باشد، ارتفاع نظیر آن رأس مثلث نامیده می‌شود.

نکات:



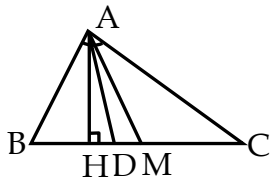
۱- ارتفاع نظیر هر رأس در مثلث با ضلع کوچکتر، زاویه کمتری می‌سازد.

$$AB < AC \Rightarrow \hat{A}_۱ < \hat{A}_۲$$

مثال: در مثلث ABC، AC > AB، AM میانه، AD نیمساز و AH ارتفاع می‌باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟

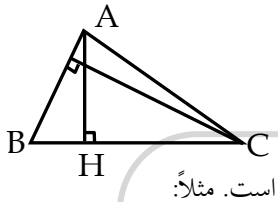
۱) AM بین AD و AH قرار دارد.
۲) AD بین AM و AH قرار دارد.
۳) AH بین AD و AM قرار دارد.
٤) بسته به شکل مثلث هر سه حالت ممکن است.

حل: با استفاده از قضیه‌ی تناظر بین اضلاع و زوایا داریم:



$AC > AB \Rightarrow M\hat{A}C < M\hat{A}B \Rightarrow$ نیمساز درون زاویه MAB است $\Rightarrow AD < AM$

$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow B\hat{A}H < H\hat{A}C \Rightarrow AH < AD$



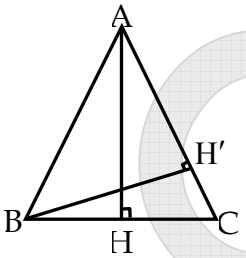
۲- در هر مثلث، نسبت اندازه‌ی هر دو ضلع برابر است با نسبت عکس ارتفاعهای نظیر آن دو ضلع.

$$\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}$$

نتیجه: کلیه‌ی روابطی که در مورد اضلاع مثلث برقرار است، در مورد عکس ارتفاعهای مثلث نیز بر قرار است. مثلاً:

$$|b-c| < a < b+c \Rightarrow \left|\frac{۱}{h_b} - \frac{۱}{h_c}\right| < \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$$

مثال: اگر طول اضلاع مثلثی ۲، ۳ و ۳ سانتیمتر باشد طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چقدر است؟



حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس:

$$AH = \sqrt{۳^۲ - \left(\frac{۲}{۲}\right)^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

با استفاده از تساوی مساحت‌ها از دو رابطه:

$$AH \times BC = BH' \times AC \Rightarrow BH' = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۲}{۳} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

مثال: اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $\frac{a}{b} = \frac{h_a}{h_b}$ آنگاه مثلث ABC چگونه مثلثی است؟

۱) قائم الزاویه
۲) متساوی الاضلاع
۳) متساوی الساقین
٤) نامشخص

حل: با توجه به تساوی مساحت‌ها:

$$ah_a = bh_b \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{a}{b} \rightarrow a = b$$

۲- اگر همه‌ی زوایای مثلثی حادّه باشند،کلیه‌ی ارتفاعهای مثلث داخل ان قرار می‌گیرند. امّا اگر مثلثی یک زاویه‌ی منفرجه داشته باشد، ارتفاعهای نظیر آن راس بر امتداد اضلاع وارد می‌شوند. در مثلث قائم الزاویه هم ۲ تا از ارتفاعها بر اضلاع منطبقند.

مثال: اگر در مثلث ABC زاویه $A = ۹۲^\circ$ باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) نقطه تلاقی سه میانه خارج مثلث است.
۲) نقطه تلاقی سه نیمساز خارج مثلث است.
۳) نقطه تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است.
٤) نقطه تلاقی سه ارتفاع روی ضلع BC می‌باشد.

حل: اگر در مثلثی یک زاویه منفرجه باشد، ارتفاعهای نظیر اضلاع زاویه منفرجه در خارج مثلث بر امتداد آن اضلاع وارد می‌شوند.

۳- سه ارتفاع مثلث همرسند.

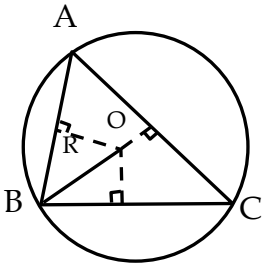
٤- مجموع سه ارتفاع هر مثلث نیز همواره از محیط کوچک‌تر است و از نصف محیط بزرگ‌تر است.

نصف محیط $< h_a + h_b + h_c <$ محیط

۴) عمود منصف‌های مثلث:

خطی که در وسط هر ضلع مثلث بر آن عمود است، عمود منصف مثلث نامیده می‌شود. مثلث دارای سه عمودمنصف است که از یک نقطه می‌گذرند که از سه رأس مثلث به یک فاصله است. لذا می‌توان از این سه نقطه یک دایره عبور داد که مرکز آن محلّ تلاقی سه عمودمنصف مثلث می‌باشد. این نقطه **مرکز دایره‌ی محیطی** مثلث است.

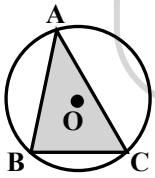
نکات:



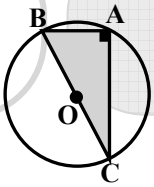
۱- شعاع دایره‌ی محیطی مثلثی به اضلاع a و b و c و مساحت S برابر است با:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

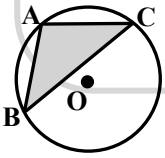
۲- در مثلث حاده‌الزاویه سه عمود منصف در درون مثلث همرسند. در مثلث قائم الزاویه سه عمود منصف در روی وتر همرسند و در مثلث منفرجه‌الزاویه سه عمود منصف بیرون مثلث همرسند.



ABC حاده الزاویه



ABC قائم الزاویه



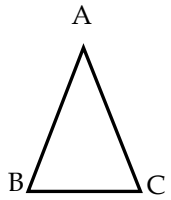
ABC منفرجه الزاویه

مؤسسه آموزشی فرهنگی

و) خواص مثلث‌های خاص:

۱) مثلث متساوی‌الساقین:

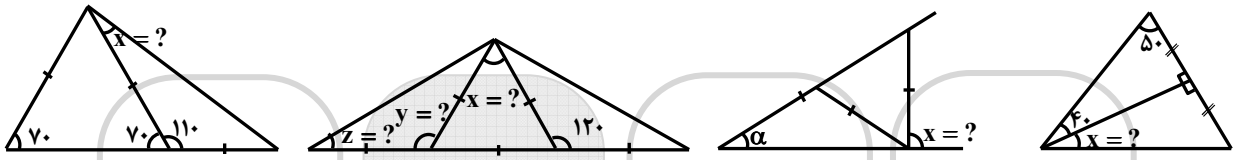
مثلثی که دو ضلع برابر دارد متساوی الساقین نام دارد.



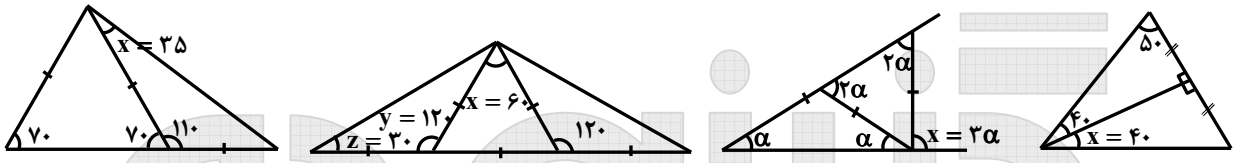
نکات:

۱- در هر مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با هم مساویند و به عکس اگر دو زاویه مثلثی مساوی باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

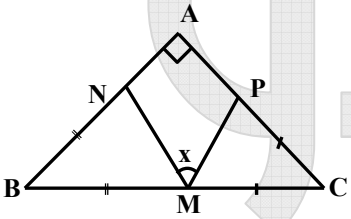
مثال: در شکل‌های زیر متغیرها را بیابید.



حل:با توجه به تساوی زوایای نظیر ساق در مثلث متساوی الساقین داریم:

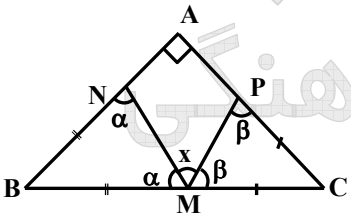


مثال: در این شکل x کدام است؟



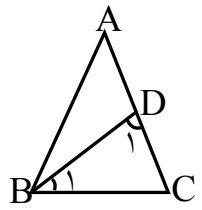
حل:

با توجه به تساوی زوایای نظیر ساق در مثلث متساوی الساقین داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=x+90^\circ\\ \alpha+\beta+x=180\end{array}\right\}\Rightarrow x+90+x=180^\circ \rightarrow x=45^\circ$$

مثال: اگر در مثلث متساوی الساقین ABC طول نیمساز داخلی $\hat{B}$ برابر طول قاعده BC باشد، زاویه A کدام است؟



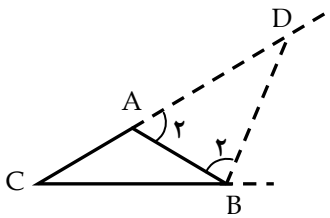
حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=180^\circ-2\hat{C}\\ BD=BC\Rightarrow \hat{C}=\hat{D}_1\Rightarrow \hat{B}_1=180^\circ-2\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}_1$$

$$\hat{A}+2\hat{B}=180^\circ\Rightarrow \hat{A}+4\hat{B}_1=180^\circ\Rightarrow \hat{A}+4\hat{A}=180^\circ\Rightarrow 5\hat{A}=180^\circ\Rightarrow \hat{A}=36^\circ$$

مثال: یکی از زاویه‌های مثلث متساوی الساقین برابر ۱۰۰° است. نیمساز خارجی یکی از زوایا ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

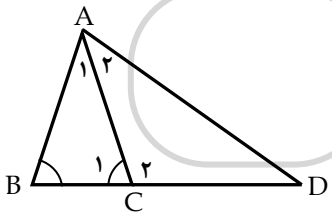


$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=۴۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ\\ \hat{B}_۲=\frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ-۴۰^\circ)=۷۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_۲+\hat{A}_۲=۷۰^\circ+۸۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

$$\hat{D}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}_۲+\hat{A}_۲)=۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ=۳۰^\circ$$

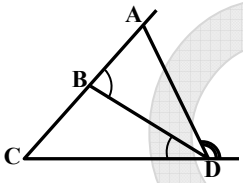
مثال: در مثلّث متساوی السّاقین ABC (AB=AC, $A=۳۲^\circ$) قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. زاویه‌ی ADC چقدر است؟



حل: با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین داریم:

$$B=C_۱=۷۴\Rightarrow C_۲=۱۸۰-۷۴=۱۰۶\Rightarrow ADC=\frac{۱۸۰-۱۰۶}{۲}=۳۷$$

مثال:اگر در شکل زیر $BC=BD=AD$ باشد و $C=۲۰^\circ$ باشد، زاویه‌ی $\hat{D}$ چند درجه است؟



حل: همان‌طور که در یکی از مسائل قبل در حالت کلی نیز اثبات شد، داریم:

$$\hat{D}_۱=\hat{C}=۲۰\rightarrow \hat{B}_۱=۴۰\rightarrow A=۴۰\rightarrow D=A+C=۶۰$$

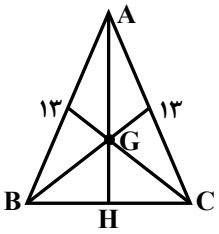
۲- در هر مثلث متساوی‌الساقین میانه‌های وارد بر ساقها با هم و ارتفاعات وارد بر ساقها با هم مساوی هستند و نیمسازهای زوایای مقابل به ساقها نیز با هم مساوی هستند، عکس این مطالب نیز درست است.

۳- در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه رأس و ارتفاع و میانه و عمود منصف وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند و بالعکس.

مثال: در مثلثی به طول اضلاع ۱۳ و ۱۳ و ۱۰ واحد، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از دورترین رأس آن کدام است؟

حل:

در مثلث متساوی‌الاضلاع، محل تقاطع میانه‌ها روی ارتفاع وارد بر قاعده قرار دارد.



$$AH=\sqrt{۱۳^۲-۵^۲}=۱۲$$

چون میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند داریم:

$$AG=\frac{۲}{۳}AH=۸$$

$$GH=\frac{۱}{۳}AH=۴$$

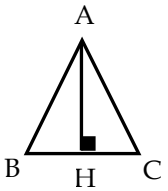
لذا بر اساس رابطه فیثاغورث داریم:

$$GH^۲+HC^۲=GC^۲\rightarrow ۴^۲+۵^۲=GC^۲\Rightarrow GC=\sqrt{۴۱}$$

که چون $۶<\sqrt{۴۱}<۷$ است پس A دورترین رأس محسوب می‌شود:

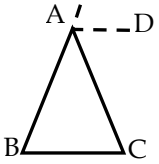
$$AG=۸$$

البته می‌دانیم میانه وارد بر کوچک‌ترین ضلع، بزرگ‌ترین میانه است.



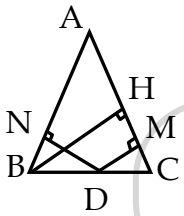
۴- مساحت مثلث متساوی‌الساقین با قاعده‌ی a و ساق b مساوی است با:

$$\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$$



۵- هر گاه در مثلث ABC نیمساز خارجی رأس A با ضلع BC موازی باشد، AB = AC است و بالعکس.

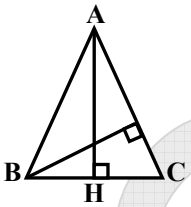
$$AD \parallel BC \Leftrightarrow AB = AC$$



۶- مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق آن.

$$DM + DN = BH$$

مثال: درمثلّثی به اضلاع ۵ , ۵ , ۶ واحد نقطه‌ی M ضلع بزرگتررا به نسبت ۱, ۳ تقسیم کرده است.مجموع فواصل M از دو ساق این مثلّث کدام است؟

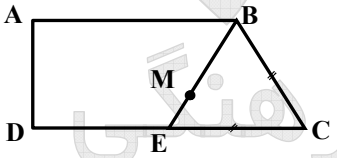


حل:

مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق آن. با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس و روابط بین ارتفاع‌ها و اضلاع داریم:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \rightarrow \frac{4\times 6}{2} = \frac{h\times 5}{2} \rightarrow h = 4/8$$

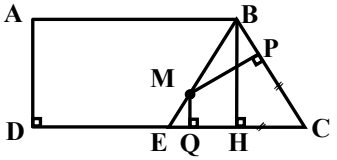
مثال: در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است و CB = CE. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو خط CB و CE برابر کدام است؟



۱) DE ۲) BC

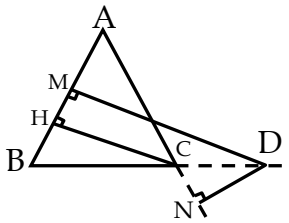
۳) BE ۴) AD

حل: گزینه ۴ پاسخ است.



مثلث CBE متساوی‌الساقین است. در هر مثلث متساوی‌الساقین فاصله‌ی یک نقطه روی قاعده از دو ساق همواره برابر با ارتفاع وارد بر ساق است. ارتفاع وارد بر ساق در مثلث CBE همان ارتفاع ذوزنقه است. چون ذوزنقه، قائم‌الزاویه می‌باشد، پس ارتفاع آن برابر با ضلع AD است. با توجه به این توضیح داریم:

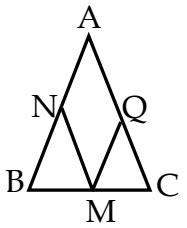
$$MP + MQ = \text{ارتفاع وارد بر ساق} = BH = AD$$



۷- قدرمطلق تفاضل فواصل هر نقطه واقع بر امتداد قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر است با اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق مثلث.

$$CH = |DM - DN|$$

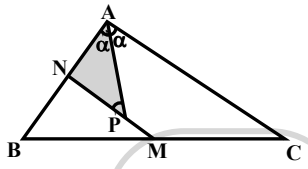
۸- هرگاه از نقطه M واقع بر قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، دو خط به موازات ساقها رسم کنیم تا ساق AB را در N و ساق AC را در Q قطع کند. چهارضلعی ANMQ متوازی‌الاضلاع است و محیط آن برابر است با مجموع دو ساق مثلث ABC و در حالت خاص اگر M وسط BC باشد ANMQ لوزی خواهد بود.



$$AN + NM + MQ + QA = AB + AC = ۲AB$$

۹- در مثلث متساوی‌الساقین اگر BC قاعده باشد، آنگاه $\frac{BC}{۲} < AB, AC$ است.

۱۰- اگر از یک نقطه روی نیمساز خطی به موازات یکی از دو ضلع زاویه رسم شود، مثلث به وجود آمده متساوی الساقین است.



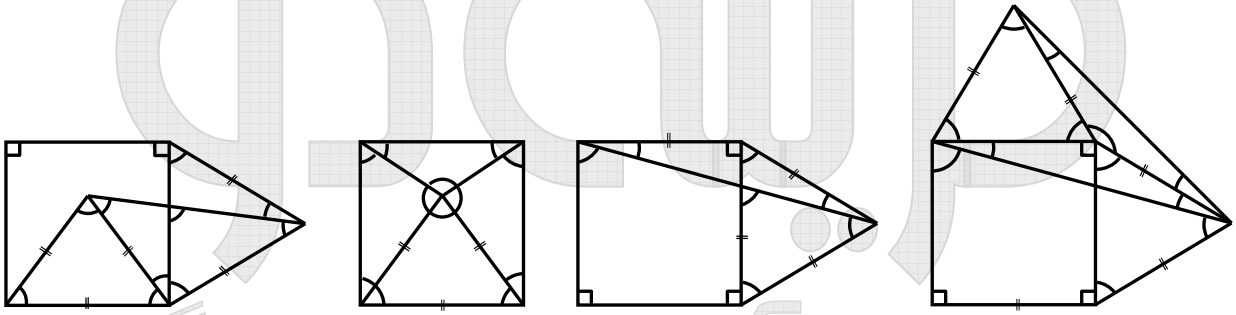
۲) مثلث متساوی‌الاضلاع:

مثلثی که ۳ ضلع برابر داشته باشد ، متساوی‌الاضلاع نام دارد.

نکات:

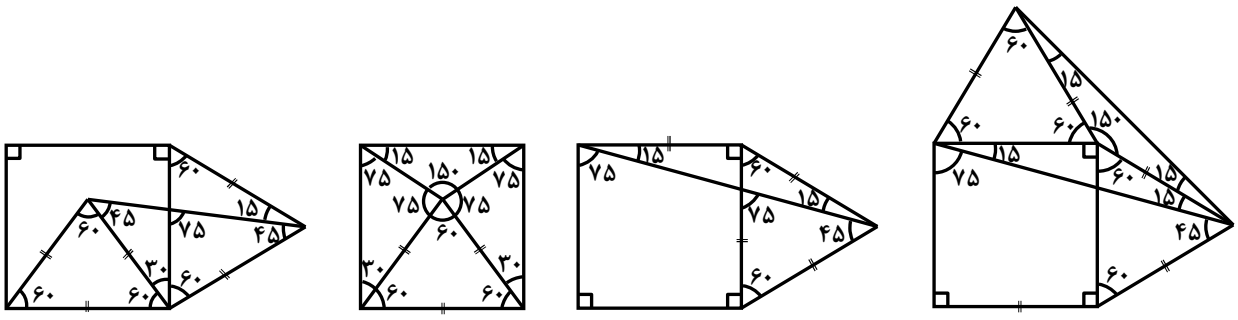
۱- تمام زوایای مثلث متساوی الاضلاع ۶۰° است . لذا تمام ویژگیهای مثلث متساوی‌الساقین درباره مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است. به اضافه آنکه در مثلث متساوی‌الاضلاع، محل برخورد ارتفاعها، میانه‌ها، نیمسازها و عمود منصفها بر هم منطبق‌اند.

مثال: در شکل‌های زیر یک ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع بر یک ضلع مربع منطبق است. کلیه زوایا را به‌دست آورید.



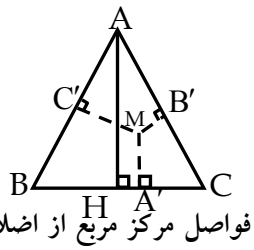
حل:

با توجه به زوایای مربع و مثلث متساوی الاضلاع و خواص مثلث متساوی الساقین می‌توانیم تمام زوایا را به دست آوریم .



۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، اگر طول هر ضلع برابر با a باشد اندازه ارتفاع نظیر هر رأس برابر است با $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و مساحت مثلث $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ می‌باشد.

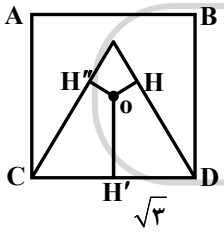
۳- هرگاه M نقطه‌ای واقع در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد. آنگاه مجموع فاصله‌های M از سه ضلع برابر است با ارتفاع نظیر یکی از رأسهای مثلث.



$$MB' + MC' + MA' = AH$$

مثال: در داخل یک مربع به ضلع $\sqrt{3}$، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\sqrt{3}$ رسم می‌کنیم. مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟

حل:



چون مرکز مربع، داخل مثلث است و می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از اضلاع مثلث، برابر ارتفاع است پس:

$$OH + OH' + OH'' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

مثال: در مثلث متساوی الاضلاع ABC مجموع فواصل نقطه M از سه ضلع برابر یک می‌باشد. بین مساحت (S) و محیط (2p) مثلث کدام رابطه صحیح است؟

۱) $2S = p$ ۲) $S = 2p$ ۳) $S = p$ ۴) $3S = p$

حل:

می‌دانیم در مثلث متساوی الاضلاع مجموع فواصل هر نقطه دلخواه از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است. پس:

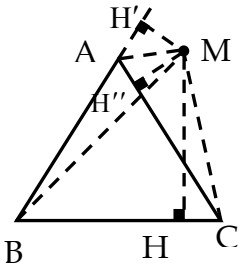
$$a\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2p = 3a = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow p = \sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{1}{p} \text{ یا } 3S = p$$

که در این سؤال $3S = p$ مورد نظر بوده است.

مثال: در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الاضلاع به ضلع a می باشد. $MH + MH' - MH''$ برابر چیست ؟

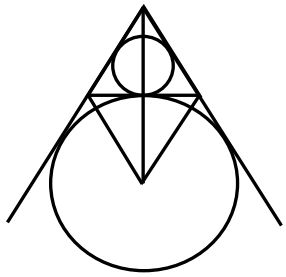


حل: از M بر اضلاع یا امتداد آن‌ها عمود رسم می‌کنیم .

و سپس مساحت ABC را برحسب مثلث‌های ایجاد شده می‌نویسیم:

$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{MBC} - S_{AMC} = \frac{MH' \times a}{2} + \frac{MH \times a}{2} - \frac{MH'' \times a}{2} = \frac{a}{2}(MH + MH' - MH'')$$

$$\rightarrow MH + MH' - MH'' = \frac{2S}{a} = \frac{\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = h$$



٤- در مثلث متساوی الاضلاع شعاع دایره محاطی داخلی برابر $r=\frac{h}{۳}=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ و شعاع دایره محاطی خارجی $r_a=r_b=r_c=h=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و شعاع دایره محیطی $R=\frac{۲h}{۳}=\frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ می‌باشد.

مثال: اگر اندازه شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاعی ٦ باشد، اندازه یکی از شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی آن کدام است؟

حل: با توجه به نکته‌ی فوق:

$$\frac{۲}{۳}h=۶\rightarrow r_a=h=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

۵- بین همه مثلثهای با محیط ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مساحت و بین همه‌ی مثلثهای با مساحت ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای کمترین محیط است.

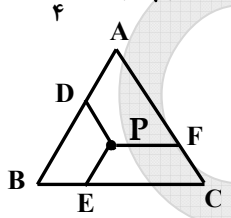
مثال: محیط مثلثی ۳٦ است. حداکثر مساحت آن کدام است؟

حل:

با توجه به نکته بالا در صورتی ماکزیمم مساحت را خواهیم داشت که مثلث متساوی الاضلاع باشد. پس:

$$۲p=۳a=۳۶\Rightarrow a=۱۲$$

$$s=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=۳۶\sqrt{۳}$$



۶- اگر از یک نقطه دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، خطوطی موازی اضلاع رسم کنیم. خواهیم داشت:

$$PD+PF+PE=a$$

۳) مثلث قائم‌الزاویه:

مثلثی که یک زاویه قائمه داشته باشد، قائم‌الزاویه نام دارد.

نکات:

۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است و بر عکس اگر در مثلثی میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آن مثلث در رأس روبه‌رو به آن ضلع قائم الزاویه است.

مثال: در مثلثی یکی از زوایا ۳۰° و تفاضل دو زاویه دیگر نیز ۳۰° می‌باشد. در صورتی که طول بزرگترین ضلع این مثلث ۸ باشد، طول میانه وارد بر این ضلع کدام است؟

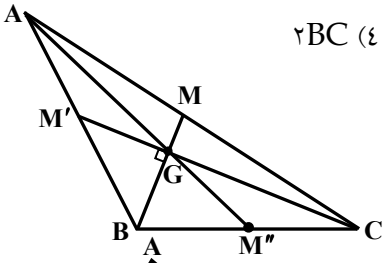
حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{A}+\hat{C}=۱۵۰^\circ\\ \hat{A}-\hat{C}=۳۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{C}=۶۰^\circ\qquad\hat{A}=۹۰^\circ$$

لذا مثلث ABC قائم الزاویه است و بزرگترین ضلع آن وتر آن است و می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است، لذا:

$$AM=\frac{BC}{۲}=۴$$

مثال: اگر در مثلث ABC میانه‌های اضلاع AB و AC بر هم عمود باشند، میانه BC برابر با کدام است؟

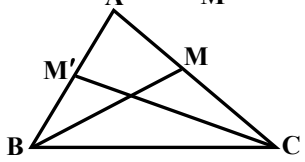


۱) $\frac{۲}{۳}BC$ ۲) $\frac{۳}{۲}BC$ ۳) BC ۴) $۲BC$

حل:

$$GM'' = \frac{۱}{۲}BC \rightarrow AM'' = \frac{۳}{۲}BC$$

در مثلث قائم الزاویه $(A = ۹۰^\circ)$:

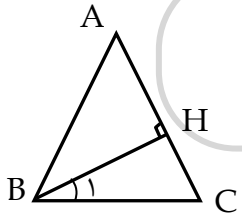


$$m_b^۲ + m_c^۲ = ۵m_a^۲ = \frac{۵}{۴}a^۲$$

۲- در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۳۰° نصف وتر است و بالعکس.

مثال: در یک مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر یک ساق نصف آن ساق است. زاویه بین این ارتفاع و ضلع BC کدام است؟

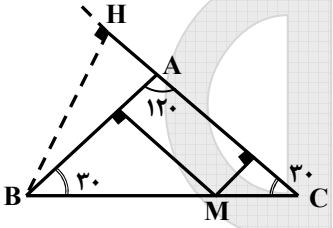
حل:



$$BH = \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۲}AB \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۹۰ - ۷۵ = ۱۵^\circ$$

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC، زاویه راس ۱۲۰° و قاعده آن ۱۲ سانتیمتر است. مجموع فواصل یک نقطه روی قاعده مثلث از دو ساق آن برابر با کدام است؟

حل:



مجموع فواصل یک نقطه روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق:

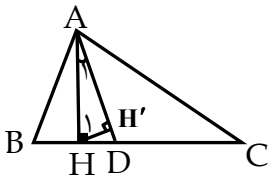
$$BH = \frac{۱}{۲}BC = ۶$$

۴- اگر در مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است.

مثال: در مثلث ABC می‌دانیم: $\hat{B} - \hat{C} = ۳۰^\circ$ می‌باشد، در این صورت فاصله‌ی نقطه H پای ارتفاع AH از نیمساز AD کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}AH$ ۲) $\frac{۱}{۴}AD$ ۳) $\frac{۱}{۳}AD$ ۴) $\frac{۱}{۸}BC$

حل: زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

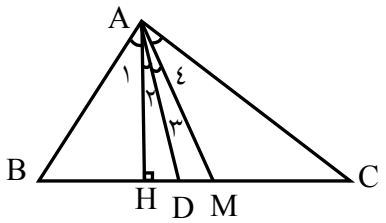


$$H\hat{A}D = \frac{۱}{۲}\left|\hat{B} - \hat{C}\right| = \frac{۱}{۲} \times ۳۰^\circ = ۱۵^\circ$$

$$HAD = \frac{B - C}{۲} = ۱۵ \rightarrow HH' = \frac{۱}{۴}AH$$

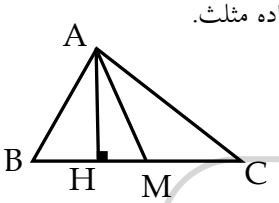
فاصله‌ی **H** از نیمساز **AD** (ارتفاع مثلث **AHD**) $\frac{۱}{۴}$ وتر مثلث (**AD**) است.

۵- در مثلث قائم الزاویه ABC، پاره‌خطهای AH، AD و AM به ترتیب ارتفاع، نیمساز و میانه‌ی وارد بر وتر BC هستند، در اینصورت روابط زیر برقرارند:



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_4 = \hat{C}$$
$$\hat{A}_2 = \hat{A}_3$$
$$\hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = \hat{B}$$

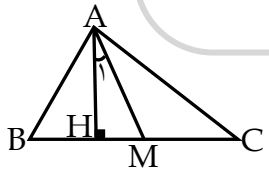
٦- در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر برابر است با قدر مطلق تفاضل دو زاویه حاده مثلث.



$$H\hat{A}M = \left|\hat{B} - \hat{C}\right|$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه ای، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر ۲٦° است. کوچکترین زاویه مثلث چند درجه است؟

حل: زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

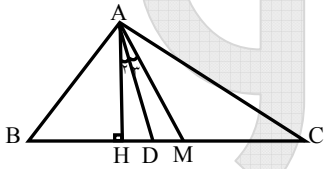


$$\left|\hat{B} - \hat{C}\right| = ۲۶^\circ \overset{\hat{B}>\hat{C}}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} \hat{B} - \hat{C} = ۲۶^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲\hat{C} = ۹۰ - ۲۶ \Rightarrow \hat{C} = ۳۲^\circ$$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه ABC $\left(\hat{A} = ۹۰^\circ\right)$، اندازه زاویه بین نیمساز و میانه نظیر رأس A کدام است؟

۱) $\left|\hat{B} - \hat{C}\right|$ ۲) $\frac{۱}{۲}\left|\hat{B} - \hat{C}\right|$ ۳) $\frac{۱}{۲}\left|\hat{B} - ۲\hat{C}\right|$ ٤) $\frac{۱}{٤}\left|\hat{B} - \hat{C}\right|$

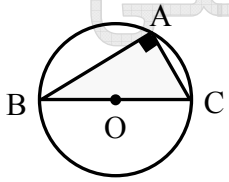
حل: زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:



$$H\hat{A}D = \frac{۱}{۲}\left|\hat{B} - \hat{C}\right|$$

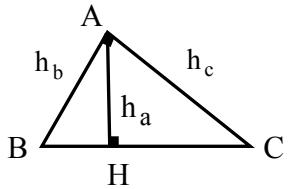
در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{A}_2 = \hat{A}_3$ لذا $D\hat{A}M = \frac{۱}{۲}\left|\hat{B} - \hat{C}\right|$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایره محیطی مثلث وسط وتر است و اندازه‌ی وتر مثلث برابر است با قطر دایره‌ی محیطی.



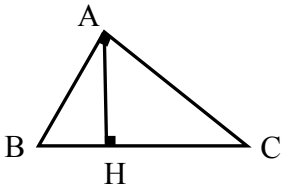
$$BC = ۲R$$

۸- در مثلث قائم‌الزاویه $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ اگر h_c, h_b, h_a به ترتیب اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر ضلع‌های AB, AC, BC باشند، آنگاه:



$$\frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲} = \frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{h_b^۲} + \frac{۱}{h_c^۲}$$

۹- اگر در یک مثلث قائم الزاویه ،ارتفاع نظیر وتر رسم شود، سه مثلث متشابه بوجود می‌آید:



$$ABH \sim ACH \sim ABC$$

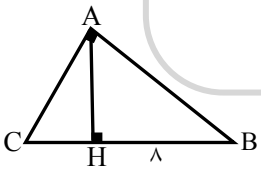
لذا در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AB^{۲} = BH \times BC$$
$$AC^{۲} = CH \times BC$$
$$AH^{۲} = BH \times CH$$

یعنی هر ضلع واسط هندسی بین طول تصور آن ضلع بر وتر و طول وتر مثلث می‌باشد. همچنین ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی دو قطعه‌ای است که آن ارتفاع بر روی وتر جدا می‌کند. (طریقه رسم میانگین هندسی)

تذکر: این روابط معکوس پذیر نمی‌باشند یعنی از برقرار بودن هر یک از روابط فوق در یک مثلث نمی‌توان نتیجه گرفت مثلث قائم الزاویه است.

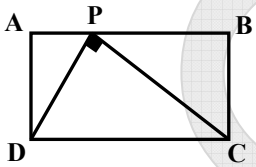
مثال: مطابق شکل مقابل طول پاره خط BH برابر ۸ می‌باشد. در صورتی که وتر BC برابر ۱۰ باشد، ارتفاع وارد بر وتر BC و طول ضلع AB به ترتیب برابر کدامست ؟



حل: با توجه به روابط گفته شده:

$$\left.\begin{array}{l} BC = ۱۰ \\ BH = ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow CH = ۲ \qquad AH^{۲} = BH \times CH = ۸ \times ۲ = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴$$

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow AB^{۲} = ۸ \times ۱۰ = ۸۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۵ \times ۱۶} \Rightarrow AB = ۴\sqrt{۵}$$

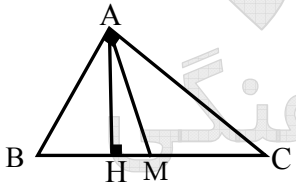


مثال:در مستطیل شکل مقابل $۳AP = BP = ۹, P = ۹۰^{\circ}$ طول DP کدامست؟

حل: اگر از P به CD عمود کنیم، قطعاتی که ارتفاع روی CD ایجاد می‌کند با AP و PB برابر است. لذا:

$$DP^{۲} = AP \times AB = ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \rightarrow DP = ۶$$

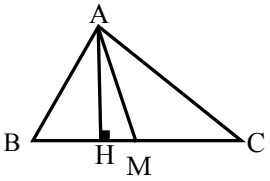
مثال: در مثلث ABC ($A = ۹۰$) ارتفاع AH ومیانه‌ی AM را رسم می‌کنیم.اگر HB و HC به ترتیب ٤ و۹ واحد باشند، مساحت مثلّث AMH کدام است؟



حل: با توجه به روابط گفته شده:

$$\left.\begin{array}{l} AH^{۲} = BH \times CH = ۴ \times ۹ \rightarrow AH = ۶ \\ \left.\begin{array}{l} BM = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵ \\ BH = ۴ \end{array}\right\} \rightarrow HM = ۶۵ \end{array}\right\} \rightarrow S = \frac{۲/۵ \times ۶}{۲} = ۷/۵$$

مثال: در یک مثلّث قائم الزّاویه اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب ۳, $۲\sqrt{۲}$ است. اندازه‌ی ضلع متوسّط این مثلّث کدام است؟



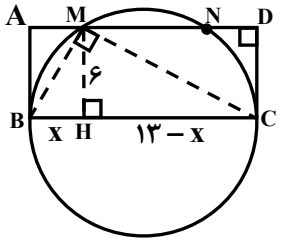
حل: با توجه به روابط گفته شده:

$$AM = ۳ \rightarrow BC = ۶$$

$$HM = \sqrt{AM^{۲} - AH^{۲}} = \sqrt{۹ - ۸} = ۱ \rightarrow BH = ۲, CH = ۴ \rightarrow AC^{۲} = CH \times BC = ۴ \times ۶ \rightarrow AC = ۲\sqrt{۶}$$

مثال: در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ٦ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه‌ی M و N قطع می‌کند. فاصله‌ی این دو نقطه چند واحد است؟

حل:



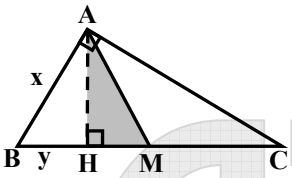
مثلث MBC در رأس M قائمه است چون BC قطر دایره است و زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر، ۹۰° است. حال در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده بر وتر است. بنابراین:

$$۶^۲ = x(۱۳-x) \Rightarrow x^۲ - ۱۳x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = ۹ \end{cases}$$

بنابراین قطعه‌ی کوچکتر یعنی $BH = ۴$ می‌باشد و در نتیجه $AM = ۴$ و به همین ترتیب $ND = ۴$. در نتیجه $MN = ۱۳ - (۴+۴) = ۵$.

مثال: در مثلث ABC، $AC = \frac{\sqrt{۵}}{۲} AB$ ، $\hat{A} = ۹۰$ و ارتفاع AH و میانه‌ی AM رسم شده‌اند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

حل:



ارتفاع AH در هر دو مثلث ABC و AHM مشترک است، بنابراین کافیست نسبت قاعده‌ها را حساب کنیم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = \frac{BC}{MH} \quad (*)$$

با فرض $AB = x$ و $BH = y$ داریم:

$$AB = x \ , \ AC = \frac{\sqrt{۵}}{۲}x \xrightarrow[\text{مثلث ABC}]{\text{قضیه فیثاغورس در}} BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = x^۲ + (\frac{\sqrt{۵}}{۲}x)^۲ = \frac{۹}{۴}x^۲$$

$$\Rightarrow BC = \frac{۳}{۲} \times x \xrightarrow[\text{مثلث ABC}]{\text{میانه AM}} BM = \frac{۳}{۴}x$$

می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویه‌ی قائمه، واسطه‌ی هندسی بین وتر و تصویر همان ضلع روی وتر است، پس:

$$AB^۲ = BC.BH \Rightarrow x^۲ = y \times \frac{۳}{۲}x \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x \Rightarrow MH = \frac{۳}{۴}x - \frac{۲}{۳}x = \frac{۱}{۱۲}x \Rightarrow \frac{BC}{MH} = \frac{\frac{۳}{۲}x}{\frac{۱}{۱۲}x} = ۱۸$$

براساس رابطه‌ی (*)، می‌توان گفت که مساحت مثلث ABC، ۱۸ برابر مساحت مثلث AMH است.

۱۰- در مثلث قائم‌الزاویه $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ اگر c, b, a طول اضلاع و $۲p$ محیط آن باشد، مساحت آن برابر است با:

$$S = p(p-a) = (p-b)(p-c)$$