گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

دانلود از سایت ریاضی سرا

جبر و احتمال

فصل ۲

www.riazisara.ir

تئوری مجموعه‌ها:

مجموعه از مفاهیم اولیه است و تعریف نمی‌شود، اما برای توضیح آن می‌توان گفت: اجتماعی (دسته‌ای) از اشیاء معین (مشخص) و متمایز

مثال: مجموعه $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}\}$ **چند عضو دارد؟**

حل: اعضای مجموعه a و $\{a\}$ و $\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ می‌باشد یعنی ۳ عضو دارد.

گزاره‌نما:

گزاره‌نما عبارتی است شامل نمادی مانند x که هر گاه هر عضو مانند a، $a\in A$ (A مجموعه‌ای دلخواه) را به جای x قرار دهیم، جمله حاصل یا به وضوح درست باشد یا به وضوح نادرست. اگر چنین باشد، می‌گوئیم که این گزاره نما برای مجموعه A معتبر است.

مثال: کدام گزاره نما برای مجموعه دانشجویان معتبر است؟

۱) درس‌خوان بودن ۲) روشنفکر بودن ۳) متأهل بودن ٤) متعهد بودن

حل:

باید گزاره‌نما به‌وضوح صحیح یا غلط باشد. جمله‌ی x متأهل است دارای ارزش مشخص صحیح یا غلط برای تمام افراد است. اما گزینه‌های دیگر نسبی و سلیقه‌ای است.

ویژگی‌های مجموعه:

۱ـ تکرار اعضای مجموعه، مجموعه را تغییر نمی‌دهد. مثلاً: $\{a,b,c\}=\{a,b,c,c\}$

۲ـ جابجایی اعضای مجموعه، مجموعه را تغییر نمی‌دهد. $\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$

تعلق (عضویت):

اگر شیئ x عضوی از مجموعه A باشد، می‌نویسیم: $x\in A$ و از طرف دیگر اگر x عضوی از A نباشد می‌نویسیم $x\notin A$.

دقت کنید که این عضو عیناً باید در مجموعه A وجود داشته باشد.

مثال: در مورد مجموعه $A=\{۲,\{۲\},\{۳,۵\}\}$ **کدام درست و کدام نادرست است؟**

۱) $۲\in A$ ۲) $\{۲\}\in A$ ۳) $\{۳\}\notin A$

٤) $\{۵\}\in A$ ۵) $\{\{۲\}\}\in A$ ٦) $\{۲,\{۲\},\{۳,۵\}\}\in A$

حل: ۱ و ۲ و ۳ درست و ٤ و ۵ و ٦ نادرست است.

مجموعه تهی:

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را با ϕ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $\{\phi\}$ نمایش مجموعه تهی نیست. بلکه یک مجموعه تک عضوی است که ϕ عضو آن است.

مثال: مجموعه $A=\{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\ \},\phi\},\{\phi\},\phi\}$ **چند عضو دارد؟**

حل: چون $\varnothing=\{\ \}$ و $\{\{\ \}\}=\{\varnothing\}$ و تکرار تأثیری در مجموعه ندارد پس $\{\{\ \},\varnothing\}=\{\{\ \}\}=\{\varnothing\}$ لذا در واقع ۲ عضو دارد.

زیر مجموعه بودن (جزئیت):

مجموعه B را زیر مجموعه A گوئیم، هر گاه هر عضو متعلق به مجموعه B، متعلق به مجموعه A، باشد، به عبارت دیگر: $B\subseteq A \Leftrightarrow (\forall x; x\in B\Rightarrow x\in A)$ و اگر عضوی در مجموعه B باشد که در مجموعه A نباشد می‌نویسیم $B\not\subseteq A$

مثال: در مورد مجموعه $A=\{۲,\{۳\},\{۴,۵\}\}$ کدام درست و کدام نادرست است؟

۱) $\{۲\}\subseteq A$ ۲) $\{۳\}\subseteq A$ ۳) $\{۲,۳\}\subseteq A$

٤) $\{\phi\}\subseteq A$ ۵) $\{\{۲\}\}\subseteq A$ ٦) $\{\{۳\}\}\subseteq A$

حل: ۱ و ٦ درست و ۲ و ۳ و ٤ و ۵ نادرست است.

مثال: اگر $A=\{۲\}$ ، $B=\{۲,\{۲\}\}$ و $C=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B\subset C$ ۲) $A\subset B$ ۳) $A\in B$ ٤) $B\in C$

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$A=\{۲\}\quad,\quad B=\{۲,\{۲\}\}\quad,\quad C=\{۲,\{۲,\{۲\}\}\}$

می‌توان گفت $A\subset B$ و همچنین $A\in B$ $(A\in C)$ و نیز $B\in C$ ولی B زیر مجموعه‌ی C نیست زیرا $۲\notin C$.

مجموعه مرجع:

در نظریه مجموعه‌ها، همه مجموعه‌های مورد بررسی زیر مجموعه یک مجموعه به نام مجموعه مرجع می‌باشند و با حرف M یا U نمایش داده می‌شود.

نکات:

۱ـ مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای می‌باشد و هر مجموعه ای زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع است. همچنین هر مجموعه ای زیر مجموعه‌ی خودش نیز می‌باشد. $A\subseteq A,\phi\subseteq A,A\subseteq U$

۲ـ اگر A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند و داشته باشیم: $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$

۳ـ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی از رابطه $\binom{n}{r}$ به دست می‌آید.

نتیجه ۱: یک‌مجموعه n عضوی دارای $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+۱}+...+\binom{n}{n}$ زیرمجموعه‌حداقل k عضوی است.

نتیجه ۲: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی حاوی k عضو معین از رابطه $\binom{n-k}{r-k}$ به دست می‌آید.

نتیجه ۳: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی فاقد k عضو معین از رابطه $\binom{n-k}{r}$ به دست می‌آید.

٤ـ تعدادزیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی از رابطه ۲^n بدست می‌آید.

نتیجه: تعداد زیرمجموعه‌های حاوی(یا فاقد) k عضو معین برای یک مجموعه n عضوی از رابطه: ۲^{n-k} بدست می‌آید.

مثال: اگر دو عضو از اعضای مجموعه A را حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه‌های آن ۳۸٤ واحد کم می‌شود، A چند عضو دارد؟

حل:

$$۲^n=۲^{n-۲}+۳۸۴\rightarrow ۲^{n-۲}(۲^۲-۱)=۳۸۴\rightarrow ۲^{n-۲}=۱۲۸=۲^۷\rightarrow n=۹$$

مثال: در مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی A که شامل همه اعداد فرد اول یک رقمی می‌باشد، برابر چند است؟

حل:

اعداد فرد اول یک رقمی $=\{۳,۵,۷\}$

زیرمجموعه‌های ۵ عضوی شامل اعداد فرد اول یک رقمی: $\binom{۹-۳}{۵-۳}=\binom{۶}{۲}=۱۵$

مثال: مجموعه‌ی $k=\{۱,۲,۳,...,۷\}$ چند زیرمجموعه حداقل ۳ عضوی دارد؟

حل:

$$\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۴}+\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۷}=۲^{۷}-\binom{۷}{۰}-\binom{۷}{۱}-\binom{۷}{۲}=۱۲۸-۱-۷-۲۱=۹۹$$

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}, B=\{۲,۳,۴,۵\}$ چند زیر مجموعه مانند X در رابطه $(A\cap B)\subseteq X\subseteq(A\cup B)$ صدق می‌کند؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l}A\cap B=\{۲,۳,۴\}\\ A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}\end{array}\right\}\Rightarrow X=\{۲,۳,۴,-,-\}$$

x باید حتماً ۲ و ۳ و ٤ را داشته باشد و در مورد داشتن ۱ و ۵ مختار است که هر کدام می‌توانند باشند یا نباشند یعنی هر کدام ۲ حالت دارند، لذا $۲\times۲=۴$ مجموعه در این رابطه صدق می‌کند.

زیرمجموعه‌های محض (سره ـ خاص):

هرگاه $A\subseteq B$ و $A\neq B$ باشد، A را زیر مجموعه (سره) B می‌گوییم و گاهی با نماد $A\subset B$ نمایش می‌دهیم.

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های محض یک مجموعه n عضوی برابر است با: $۲^{n}-۱$

تذکر: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه نامتناهی تعریف نشده است.

مثال: اگر $A=\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ باشد، مجموعه‌ی $A-\{A\}$ چند زیرمجموعه‌ی سره‌ی غیرتهی دارد؟

۱) ۲ ۲) ٦ ۳) ۷ ٤) ١٤

حل: گزینه ٤ پاسخ است.

A و $\{A\}$ هیچ عنصر مشترکی ندارند، بنابراین $A-\{A\}=A$.

تعداد زیرمجموعه‌های سره (محض) برابر است با $۲^{n}-۱$ و اگر زیرمجموعه‌ی تهی را از آن‌ها حذف کنیم، تعدادشان $۲^{n}-۲$ می‌شود. با توجه به این‌که مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی ٤ عضوی است، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سره‌ی غیرتهی برابر $۲^{۴}-۲=۱۴$ است.

دو مجموعه مساوی:

دو مجموعه A و B مساویند هر گاه هر عضو A در B و هر عضو B در A باشد، به عبارت دیگر:

$$(A\subseteq B, B\subseteq A)\Leftrightarrow A=B$$

تعداد اعضای دو مجموعه مساوی با هم برابر است.

نکته: اگر $A\subseteq\phi$ باشد، آنگاه $A=\phi$ و اگر $M\subseteq A$ باشد، آنگاه $A=M$ (M مجموعه مرجع)

مثال: اگر دو مجموعه $A=\{۱,x+۱,y-۲\}, B=\{۰,x,y\}$ با هم برابر باشند، در این صورت x,y کدامند؟

حل:

دو حالت امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases}x=۱\\ y=x+۱=۲\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}y=۱\\ x=y-۲=-۱\end{cases}$$

دو مجموعه نامساوی:

دو مجموعه A و B را نامساوی گویند، هرگاه لااقل یک عضو در مجموعه A باشد که متعلق به مجموعه B نباشد یا لااقل یک عضو در مجموعه B باشد که متعلق به مجموعه A نباشد و آن را نماد $A \neq B$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه توانی:

مجموعه همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه را مجموعه توانی آن مجموعه می‌نامیم. مجموعه توانی مجموعه‌ی A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. یعنی $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$ برای مثال اگر $A = \{۰,۱\}$ باشد، در این‌صورت $P(A) = \{\{۱\},\{۰\},\{۱,۰\},\phi\}$

نکات:

۱- اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، $P(A)$ دارای ۲^n عضو و $۲^{۲^n}$ زیرمجموعه می‌باشد.

۲ـ اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند و $A \subseteq B$ آنگاه $P(A) \subseteq P(B)$ و بالعکس.

۳ـ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ یعنی تساوی $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ لزوماً برقرار نیست.

مثال: اگر A یک‌مجموعه ٤ عضوی‌باشد، مجموعه‌زیرمجموعه‌های A چندزیرمجموعه دارد؟

حل:

$|P(A)| = ۲^۴ = ۱۶ \rightarrow P(A)$ **تعداد زیرمجموعه‌های** $= ۲^{۱۶}$

مثال: هر عضو کدامیک از مجموعه‌های زیر عضوی از مجموعه‌ی توانی همان مجموعه نیز می‌باشد؟

۱) $\{\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\}$ ۲) $\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$ ۳) $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}\}$ ٤) $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}$

حل:

در واقع سوال به دنباله مجموعه‌ای است که هر عضو آن زیرمجموعه آن نیز باشد. که در گزینه ٤ چنین اتفاقی افتاده است.

$\varnothing \subseteq A$

$\{\varnothing\} \subseteq A$

$\{\{\varnothing\}\} \subseteq A$

باید توجه داشته باشید غیر از این الگو، الگوی $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ نیز دارای این ویژگی می‌باشد.

مثال: اگر $A = \{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ **مجموعه‌ی** $P(A) - A$ **چند عضو دارد؟**

حل:

$$P(A) = \{\{a\},\{\{a\}\},\{\{\{a\}\}\},\{a,\{a\}\},\{a,\{\{a\}\}\},\{\{a\},\{\{a\}\}\},\varnothing,A\}$$

تنها ۲ عضو $\{a\}$ و $\{\{a\}\}$ مشترکند. پس $P(A) - A$ ٦ عضو دارد.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود (متناهی) باشد، یا تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعه را متناهی می‌گوییم. (مجموعه تهی را نیز مجموعه‌ای متناهی در نظر می‌گیریم.) مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها محدود نیست را مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم.

مثال: اگر n عددی طبیعی باشد، کدامیک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $\{n \mid n^۳ > n^۲\}$ ۲) $\{n \mid n^۲ > ۲^n\}$ ۳) $\{n \mid ۲^n > n^۳\}$ ٤) هیچکدام

حل: تنها عضو مجموعه‌ی گزینه‌ی ۲، $n = ۳$ است چون $۳^۲ > ۲^۳$ و برای $n \geq ۵$ همواره: $۲^n > n^۲$ است.

گزینه‌ی ٤ برای $n \geq ۱۰$ همواره صحیح است. لذا مجموعه های ۱ و ۳ نامتناهی و ۲ متناهی است.

جبر مجموعه‌ها:

اجتماع دو مجموعه:

اجتماع مجموعه‌های A و B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود، عبارتست از مجموعه تمام عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق داشته باشند. به عبارت دیگر:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

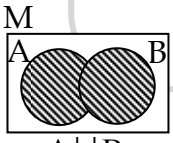
اشتراک دو مجموعه:

اشتراک مجموعه‌های A و B که با $A \cap B$ نشان داده می‌شود، عبارتست از مجموعه تمام اعضایی که هم متعلق به مجموعه A و هم متعلق به مجموعه B هستند. به عبارت دیگر:

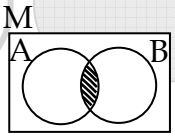
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

نمودار وِن: راهی ساده و آموزنده برای نمایش روابط بین مجموعه‌ها، بکار بردن نموداری مشهور به نمودار وِن می‌باشد. در این روش مجموعه مرجع را با یک مستطیل و بقیه مجموعه‌ها را با اشکال هندسی مانند دایره رسم کرده و روابط مورد نظر را با زدن هاشور نمایش می‌دهند.

لذا داریم:



$A \cup B$



$A \cap B$

دو مجموعه جدا از هم:

دو مجموعه‌ای را جدا از هم گویند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند یعنی: $A \cap B = \phi$

تعمیم اجتماع و اشتراک:

n مجموعه دلخواه $A_1, \dots, A_n$ را در نظر می‌گیریم:

۱) اجتماع این مجموعه‌ها را با نماد $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ نشان‌می‌دهیم‌وداریم: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

۲) اشتراک این مجموعه‌ها را با نماد $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ نشان‌می‌دهیم‌وداریم: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

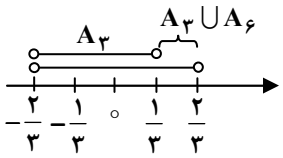
مثال: اگر $A_n = \left\{x \mid x \in IR, \frac{1}{n} < x \le 2\right\}$ باشد، $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ کدام است؟

حل:

$$A_1 = (1,2], A_2 = \left(\frac{1}{2},2\right], A_3 = \left(\frac{1}{3},2\right], \dots \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0,2] \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (1,2]$$

مثال: اگر $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعه‌ی $(A_3 \cup A_6) - A_3$ برابر کدام بازه است؟

حل:



$$(A_3 \cup A_6) - A_3 = \left[\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right] - \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

مثال: اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \le m \le 8-i\}$، مجموعه‌ی $\bigcup_{i=1}^{8} A_i - \bigcap_{i=1}^{8} A_i$ چند عضو دارد؟

حل:

$$A_1 = \{-1, 0, \dots, 7\}$$
$$A_2 = \{-2, 0, \dots 6\}$$
$$\vdots$$
$$A_8 = \{-8, -7, \dots, 0\}$$
$$\bigcup_{i=1}^{8} A_i = \{-8, \dots, 7\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{8} A_i = \{-1, 0\}$$

لذا $\bigcup_{i=1}^{8} A_i - \bigcap_{i=1}^{8} A_i$ ، $16 - 2 = 14$ عضو دارد.

مثال: اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \ge -n, 2^m \le n\}, n \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه مجموعه‌ی $A_4 \cap A_3$ چند زیرمجموعه دارد؟

حل:

$$A_3 = \{x \mid x \ge -3, 2^x \le 3\} = \{1, 0, -1, -2, -3\} \quad , \quad A_4 = \{x \mid x \ge -4, 2^x \le 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$\rightarrow A_3 \cap A_4 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

که چون $A_3 \cap A_4$، ۵ عضو دارد. پس $2^5 = 32$ زیر مجموعه خواهد داشت.

خواص اجتماع و اشتراک:

۱) $\begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{cases}$

۲) $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

۳) $\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subseteq B \cup D \\ A \cap C \subseteq B \cap D \end{cases}$

نتیجه ۱:

$$\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \cup C \\ A \subseteq B \cap C \end{cases}$$

نتیجه ۲:

$$\left.\begin{matrix} A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \subseteq C \\ A \cap B \subseteq C \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} A = B \\ C = D \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \cup C = B \cup D \\ A \cap C = B \cap D \end{cases}$$

نتیجه ۳:

$$\begin{cases} A \cup B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \wedge B = \phi \\ A \cap B = U = M \Leftrightarrow A = U \wedge B = U \end{cases}$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

٤) $\begin{cases} A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \end{cases}$

٥) $A\subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A\cap B=A \\ A\cup B=B \end{cases}$

نتیجه:

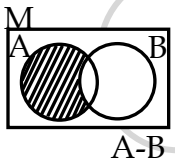
$\begin{cases} A\cup\phi=A \\ A\cap\phi=\phi \end{cases}$ $\begin{cases} A\cup U=U \\ A\cap U=A \end{cases}$ $\begin{cases} A\cup A=A \\ A\cap A=A \end{cases}$

٦) $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$

٧) $\begin{cases} A\cup(A\cap B)=A \\ A\cap(A\cup B)=A \end{cases}$ (قوانین جذب)

تفاضل دو مجموعه:

تفاضل مجموعه‌های A و B مجموعه عضوهایی است که به A تعلق دارند ولی به B تعلق ندارند و با $A-B$ نمایش داده می‌شود، به عبارت دیگر:



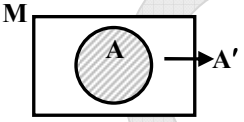
$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$

لذا داریم:

$$A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$$

متمم یک مجموعه:

اگر A زیر مجموعه‌ی B باشد، متمم مجموعه A نسبت به مجموعه‌ی B عبارت است از:



$B-A$

اگر A زیر مجموعه‌ی U باشد، تفاضل مجموعه مرجع (U) و مجموعه A را با A' نمایش می‌دهیم.

$$A'=U-A=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

نکات:

۱) داریم: $A-B=A\cap B'$

$A-M=\phi$ $\phi-A=\phi$ $(A')'=A$ $A-B\subseteq A$ $A\cap A'=\phi$

قوانین شبه جذب (هم‌پوشانی)

$\begin{cases} (A\cup B)'=A'\cap B' \\ (A\cap B)'=A'\cup B' \end{cases}$ قوانین دمورگان: $\begin{cases} A\cup(A'\cap B)=A\cup B \\ A\cap(A'\cup B)=A\cap B \end{cases}$

۲) مجموعه‌های A-B و B-A و $A\cap B$ دو به دو جدا از هم می‌باشند.

۳) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند $(A\cap B=\phi)$ آن‌گاه:

$\begin{cases} A-B=A \\ B-A=B \end{cases}$

٤) عمل تفاضل بر روی اجتماع و اشتراک فقط از راست شرکت پذیر است:

$$\begin{cases} (A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C) \\ (A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C) \\ (A-B)-C=(A-C)-(B-C) \end{cases}$$

۵) عمل تفاضل بر روی اجتماع و اشتراک از سمت چپ عمل را عکس می‌کند:

$$\begin{cases} A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C) \\ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C) \end{cases}$$

۶) فقط عمل اشتراک بر تفاضل توزیع پذیر است و اجتماع بر تفاضل در حالت کلی توزیع پذیر نیست.

$$\begin{cases} A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C) \\ A\cup(B-C)\overset{?}{=}(A\cup B)-(A\cup C) \end{cases}$$

۷) داریم: $A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\phi$

۸) اگر $A\subseteq B$ باشد، آن گاه $B'\subseteq A'$

حالت خاص: اگر $\mathbf{A=B}$ آن گاه $A'=B'$

۹) داریم: $\left.\begin{matrix} A=B \\ C=D \end{matrix}\right\} \Rightarrow A-C=B-D$

۱۰) اگر $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ آن گاه: $\mathbf{X=\phi}$ و اگر $A\subseteq X$ و $A'\subseteq X$ آن گاه $X=M$ است.

حالت خاص: اگر $\mathbf{A'\subseteq A}$ آن گاه $\mathbf{A=U}$ و اگر $\mathbf{A\subseteq A'}$ آن گاه: $\mathbf{A=\phi}$

۱۱) اگر $\mathbf{A\cap B=\phi}$ آن‌گاه: $\mathbf{A\subseteq B'\ ,B\subseteq A'}$. اگر $\mathbf{A\cup B=U}$ آن‌گاه: $\mathbf{A'\subseteq B, B'\subseteq A}$.

حالت خاص: اگر $\mathbf{A\cup B=U}$ و $\mathbf{A\cap B=\phi}$ آن‌گاه: $\mathbf{B=A'}$ و $\mathbf{A=B'}$.

۱۲) تساوی $\mathbf{(A-B)-C=A-(B-C)}$ لزوماً برقرار نمی‌باشد. (شرط برقراری آن است که $\mathbf{A\cap C=\phi}$)

۱۳) در حالت کلی $\mathbf{A-B\neq B-A}$، اما اگر $\mathbf{A-B=B-A}$ آن گاه: $\mathbf{A=B}$

مثال: حاصل عبارات زیر را حتی الامکان ساده کنید:

الف) $(A\cup B'\cup C')\cap((B\cap C)\cup A)$

$$(A\cup(B\cap C)')\cap(A\cup(B\cap C))=A\cup[(B\cap C)'\cap(B\cap C)]=A\cup\varnothing=A$$

ب) $\left[(A\cup B)'\cap C'\right]\cup(A\cup C)'$

$$[A'\cap B'\cap C']\cup(A'\cap C')\xrightarrow{X=A'\cap C'}X\cup[X\cap B']\overset{\text{جذب}}{=}X=A'\cap C'$$

ج) $(A\cap B)\cup(A'\cap B)\cup(A\cap B')\cup(A'\cap B')$

$$((A\cup A')\cap B)\cup((A\cup A')\cap B')=(U\cap B)\cup(U\cap B')=B\cup B'=U$$

د) $(A\cup B)\cap(A'\cup B)\cap(A\cup B')\cap(A'\cup B')$

$$((A\cap A')\cup B)\cap((A\cap A')\cup B')=(\varnothing\cup B)\cap(\varnothing\cup B')=B\cap B'=\varnothing$$

ه) $[(A\cap B)\cap(A'\cup B)]\cap[(A\cup(A-B))]$

$$\left(A\cap\underbrace{B\cap(B\cup A')}_{\text{جذب}}\right)\cap(A)=(A\cap B)\cap A=A\cap B$$

مثال: متمم مجموعه‌ی $\mathbf{(B-A)'-A}$، نسبت به مجموعه‌ی جهانی کدام است؟

۱) $\mathbf{A\cup B}$ ۲) $\mathbf{A\cap B}$ ۳) $\mathbf{A}$ ۴) B

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$$X=(B-A)'-A=(B-A)'\cap A'=((B-A)\cup A)'=(A\cup B)'\Rightarrow X'=A\cup B$$

مثال: متمم مجموعه‌ی $C\cup A'\cup B'$، نسبت به مجموعه‌ی جهانی، با کدام مجموعه برابر نیست؟

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)$ ۳) $A\cap(B-C)$ ٤) $(A\cap B)-C$

حل: گزینه ۲ پاسخ است.

متمم مجموعه‌ی داده شده را کمی ساده‌تر می‌نویسیم، سپس با اعمال قوانین جبر مجموعه‌ها به گزینه‌هایی‌که برابر با آن هستند، می‌رسیم:

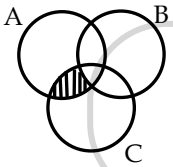
$$[C\cup A'\cup B']' = [C\cup(A\cap B)']' = C'\cap(A\cap B) = A\cap B\cap C'$$

$A\cap B\cap C' = (A\cap B)-C \Rightarrow$ گزینه‌ی (٤) برابر با مجموعه‌ی داده شده است.

$A\cap B\cap C' = A\cap(B\cap C') = A\cap(B-C) \Rightarrow$ گزینه‌ی (۳) برابر با مجموعه‌ی داده شده است.

$A\cap(B\cap C') = A\cap(B-C) \xrightarrow[\text{اشتراک بر روی تفاضل}]{\text{خاصیت توزیع پذیری}} (A\cap B)-(A\cap C) \Rightarrow$ گزینه‌ی (۱) برابر با مجموعه‌ی داده شده است.

بنابراین مجموعه‌ی گزینه‌ی (۲) با مجموعه‌ی داده شده برابر نیست.



مثال: قسمت هاشورخورده در نمودار ون شکل زیر کدام است؟

۱) $A-(B\cap C)$ ۲) $A\cap(C-B)$

۳) $A\cap(B-C)$ ٤) $(A\cap C)-B'$

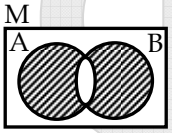
حل: ناحیه هاشورخورده $(A\cap C)-B$ یا $A\cap(C-B)$ می‌باشد.

تفاضل متقارن دو مجموعه:

تفاضل متقارن دو مجموعه A و B مجموعه اعضایی است که متعلق به A یا متعلق به B است ولی به اشتراک دو مجموعه تعلق ندارد و آن را با $A\Delta B$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$A\Delta B = \{x \mid x\in A \vee x\in B \wedge x\notin A\cap B\}$$

داریم:



$$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)$$

نکات و خواص:

۱) $A\Delta B = B\Delta A$ (جابجایی)

۲) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (شرکت پذیری)

۳) اگر $A\Delta B=A\Delta C$ آن گاه $B=C$ و بالعکس.

٤) (توزیع پذیری اشتراک روی تفاضل متقارن) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

۵) $(A\Delta B)-C = (A-C)\Delta(B-C)$

٦) داریم:

$$A\Delta B = A'\Delta B'$$
$$(A\Delta B)' = A'\Delta B = A\Delta B'$$

۸) داریم:

$$A\Delta B = U \Leftrightarrow B = A'$$
$$A\Delta B = \phi \Leftrightarrow B = A$$
$$A\Delta B = A \Leftrightarrow B = \phi$$
$$A\Delta B = A' \Leftrightarrow B = U$$
$$A\Delta B = B-A \Leftrightarrow A\subseteq B$$
$$A\Delta B = A\cup B \Leftrightarrow A\cap B = \phi$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

مثال: حاصل عبارات $A\cap(B\Delta A')$ و $(A\Delta B)-A'$ و $(A-B)\Delta(B-A)$ و $(A-B)\Delta A$ و $(A-B)\Delta B$ **برابر کدام است؟**

حل:

(۱) $A\cap(B\Delta A')=(A\cap B)\Delta(A\cap A')=(A\cap B)\Delta\phi=A\cap B$

(۲) $(A\Delta B)-A'=(A\Delta B)\cap A=(A\cap A)\Delta(B\cap A)=A\Delta(A\cap B)\xlongequal{(A\cap B)\subseteq A}A-(A\cap B)=A-B$

(۳) $(A-B)\Delta(B-A)\xlongequal{(A-B)\cap(B-A)=\phi}(A-B)\cup(B-A)=A\Delta B$

(۴) $(A-B)\Delta A\xlongequal{(A-B)\subseteq A}A-(A-B)=A\cap B$

(۵) $(A-B)\Delta B\overset{(A-B)\cap B=\varnothing}{=}A\cup B$

روش شماره‌گذاری:

قضیه: اگر $A\cap B=\phi, A=B$ آنگاه $A=B=\phi$

با استفاده از قضیه فوق هر گاه یک تساوی از مجموعه‌ها داشته باشیم می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

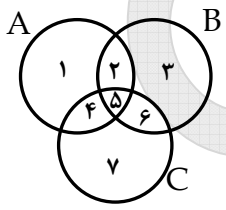
۱ـ ابتدا هر دو طرف تساوی را بصورت اجتماع مجموعه‌های جدا از هم می‌نویسیم.

۲ـ مجموعه‌های مساوی را از طرفین حذف می‌کنیم.

۳ـ مجموعه‌های باقیمانده رامساوی تهی قرارمی‌دهیم و رابطه مورد نظر رابدست می‌آوریم.

در روش شماره‌گذاری ابتدا به هر مجموعه شکلی دلخواه نسبت می‌دهیم و سپس به هر یک از مجموعه‌های از هم جدا عددی را نسبت می‌دهیم و بوسیله این اعداد رابطه‌های موجود را بازنویسی می‌کنیم و سپس مانند بالا عمل می‌کنیم.

مثال: اگر $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ **آنگاه کدامیک صحیح است؟**



(۱ $A\subseteq C$

(۲ $C\subseteq A$

(۳ $A=C$

(۴ $C=\phi$

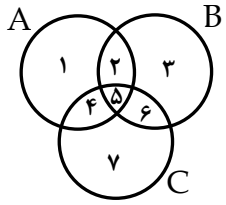
حل: گزینه ۲ پاسخ است

$$\left.\begin{array}{l}(A\cap B)\cup C=۲\cup۵\cup۴\cup۶\cup۷\\ A\cap(B\cup C)=۲\cup۴\cup۵\end{array}\right\}\Rightarrow ۲\cup۵\cup۴\cup۶\cup۷=۲\cup۴\cup۵\Rightarrow ۶=۷=\varnothing\Rightarrow C=۴\cup۵\subseteq A$$

مثال: اگر $A\cap B\cap C=(A\Delta B)\Delta C$ **کدامیک درست است؟**

(۱ $B=C$ (۲ $A=A\cap B\cap C$ (۳ $C\subseteq A\cup B$ (۴ $A=\phi$

حل: تفاضل متقارن ۲ مجموعه، قسمت مشترک را حذف کرده و مابقی دو مجموعه را نگه می‌دارد.



$$\left.\begin{array}{l}A\cap B\cap C=۵\\ (A\Delta B)=۱\cup۴\cup۳\cup۶\\ (A\Delta B)\Delta C=۱\cup۳\cup۷\cup۵\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$۵=۱\cup۳\cup۷\cup۵\rightarrow ۱=۳=۷=\varnothing$$

$$\left.\begin{array}{l}A\cup B=۴\cup۲\cup۶\cup۵\\ C=۴\cup۶\cup۵\end{array}\right\}\Rightarrow C\subseteq A\cup B$$

عدد اصلی یک مجموعه، اصل شمول و عدم شمول

عدد اصلی یک مجموعه:

تعداد اعضای مجموعه متناهی A را عدد اصلی آن مجموعه گویند و با $n(A)$ یا $|A|$ (کاردینال A) نمایش می‌دهند.

ویژگیهای عدد اصلی مجموعه‌ها:

درمورد مجموعه‌های متناهی داریم:

اصل شمول:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

اصل عدم شمول: ($\bar{A}$ همان A' به معنای متمم مجموعه A است.)

$$|\bar{A}|=|U|-|A|=|S|-|A|$$
$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=|\overline{A_1\cup A_2}|=|S|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|$$
$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-(|A_1\cap A_2\cap A_3|)$$

اصل شمول و عدم شمول:

$$|A\cap\bar{B}|=|A-B|=|A|-|A\cap B|$$
$$|A\cap B\cap\bar{C}|=|(A\cap B)-C|=|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$$
$$|A\cap\overline{(B\cap C)}|=|A|-|A\cap B\cap C|$$
$$|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|A-(B\cup C)|=|A|-|A\cap(B\cup C)|=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$|A\Delta B|=|A\cup B|-|A\cap B|=|A-B|+|B-A|=|A|+|B|-2|A\cap B|$$

مثال: اگر $n(A\Delta B)=16$ و $n(A\cup B)=20$ آن گاه $n(A)$ کدام است اگر $n(A)$ و $n(B)$ با هم برابر باشند؟

حل:

$$\left.\begin{array}{r}|A\Delta B|=|A-B|+|B-A|=|A|-|A\cap B|+|B|-|A\cap B|=|A|+|B|-2|A\cap B|=16\\ |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=20\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}|A\cap B|=4\\ |A|+|B|=24\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow |A|=|B|=12$$

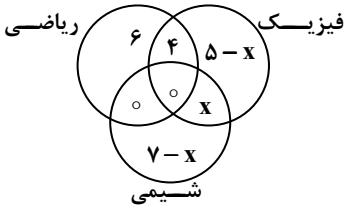
مثال: اگر $n(A)=5$, $n(B)=7$ و $A\cup B=\{x\mid x\in Z, x^2<20\}$ عدد اصلی مجموعه $A\cap B$ برابر کدام است؟

حل:

$$A\cup B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$$
$$|A|=5\ ,\ |B|=7\ ,\ |A\cup B|=9$$
$$\rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=5+7-|A\cap B|=9\rightarrow |A\cap B|=3$$

مثال: از یک گروه ۲۰ نفری دبیران یک دبیرستان ۱۰ نفر ریاضی، ۹ نفر فیزیک و ۷ نفر شیمی تدریس می‌کنند. در صورتیکه بدانیم ٤ نفر از دبیران فیزیک و ریاضی تدریس می‌کنند و هیچ کدام از دبیران ریاضی درس شیمی نمی‌دهند، در این دبیرستان چند نفر فقط فیزیک تدریس می‌کنند؟

حل:

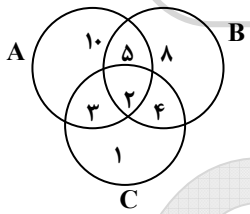


از درونی‌ترین مجموعه شروع به پر کردن می‌کنیم و قسمت مجهول را x می‌گیریم و بقیه داده‌ها را به تفکیک وارد می‌کنیم.

$$۶+۴+(۵-x)+x+(۷-x)=۲۰ \Rightarrow x=۲ \rightarrow \text{فقط فیزیک}=۵-x=۳$$

مثال: در مدرسه ای با ۳۳ دانش اموز، هر کسی عضو حداقل یکی از سه گروه C,B,A است اگر B دارای ۱۹ عضو، C دارای ده عضو و تعداد افرادی که عضو B و C هستند شش نفر، و ده نفر فقط عضو A بوده ودو نفر عضو سه گروه بوده و پنج دانش آموز عضو دو گروه C و A باشند، و هفت نفر عضو گروه A وB، چند دانش آموز هستند که عضو گروه B یا C هستند، ولی عضو گروه A نیستند؟

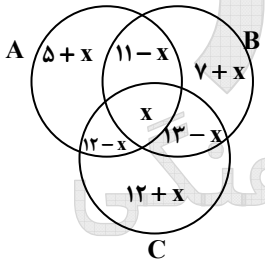
حل:



$$|(B\cup C)-A|=۱+۴+۸=۱۳$$

مثال: در یک نظرخواهی از دانش آموزان یک کلاس ۷۸ نفری، معلوم شده است که ۲۸ نفربه تیم A، ۳۱ نفر به تیم B،۳۷ نفر به تیم C، ۱۱ نفر به هر دو تیم A,B، ۱۳ نفر به هردو تیم C,B و ۱۲ نفر به هر دوتیم C,A علاقمندند. اگر ۱۲ نفر به هیچ تیمی علاقه نداشته باشند، چند نفر دقیقا به دوتیم علاقمندند؟

حل:



$$۵+۱۱+۱۲+۷+۱۳+۱۲+x=۶۶ \Rightarrow x=۶$$

$$\text{افرادی که دقیقاً به دو تیم علاقمندند.}=(۱۱-x)+(۱۳-x)+(۱۲-x)=۱۸$$

مثال: تعداد اعداد دو رقمی که مضرب ۷ هستند ولی مضرب ۵ نیستند، کدام است؟

حل:

$$A=\{\text{مضارب } ۷\}$$

$$B=\{\text{مضارب } ۵\}$$

$$A\cap B=\{\text{مضارب } ۳۵\}$$

$$|A\cap B'|=|A-B|=|A|-|A\cap B|=\left(\left[\frac{۹۹}{۷}\right]-\left[\frac{۹}{۷}\right]\right)-\left(\left[\frac{۹۹}{۳۵}\right]-\left[\frac{۹}{۳۵}\right]\right)=۱۳-۲=۱۱$$

مثال: از بین مجموعه اعداد ۱,۲,۳,...,۱۰۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر بوده ولی بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟

حل:

$A = \{\text{مضارب } ۲\}$

$B = \{\text{مضارب } ۳\}$

$C = \{\text{مضارب } ۵\}$

$$|A \cap B' \cap C'| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = \left[\frac{۱۰۰۰}{۲}\right] - \left(\left[\frac{۱۰۰۰}{۶}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۱۰}\right] - \left[\frac{۱۰۰۰}{۳۰}\right]\right) = ۲۶۷$$

مثال: چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۷۳ که نسبت به ۲۷۳ اول باشد، وجود دارد؟

حل:

$۲۷۳ = ۷ \times ۱۳ \times ۳$

$A = \{\text{مضارب } ۳\}$ $B = \{\text{مضارب } ۱۳\}$ $C = \{\text{مضارب } ۷\}$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = ۲۷۳ - \left[\frac{۲۷۳}{۳}\right] - \left[\frac{۲۷۳}{۱۳}\right] - \left[\frac{۲۷۳}{۷}\right] + \left[\frac{۲۷۳}{۳۹}\right] + \left[\frac{۲۷۳}{۲۱}\right] + \left[\frac{۲۷۳}{۹۱}\right] - \left[\frac{۲۷۳}{۲۷۳}\right] = ۱۴۴$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ضرب دکارتی

زوج مرتب:

هردوشیئی تشکیل یک زوج می‌دهند، اگر در یک زوج ترتیب در نظر گرفته شود می‌گوییم یک زوج مرتب داریم. بنابراین زوج مرتب را با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم. a را مؤلفه اوّل یا مختص اوّل و b را مؤلفه دوم یا مختص دوم زوج می‌گوییم.

تساوی زوج‌های مرتب:

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) مساوی هستند اگر و تنها اگر مؤلفه‌های اول زوجها با هم و مؤلفه‌های دوم آنها با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$(a,b)=(c,d)\Rightarrow a=c, b=d$$

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه:

حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ی A در مجموعه B عبارتست از مجموعه زوجهای مرتبی که مختص اول آنها متعلق به مجموعه A و مختص دوم آنها متعلق به مجموعه B می‌باشد به عبارت دیگر: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$

باید توجه داشت که در حالت کلی $A\times B\neq B\times A$ یعنی ضرب دکارتی دارای خاصیت جابجایی نیست.

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{٤,٥\}$ باشد، $A\times B$ و $B\times A$ کدامست؟

حل:

$$A\times B=\{(۱,۴),(۱,۵),(۲,۴),(۲,۵),(۳,۴),(۳,۵)\}$$
$$B\times A=\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳)\}$$

تذکر: حاصل ضرب دکارتی مجموعه A در خودش یعنی $A\times A$ را به صورت $A^۲$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$A^۲=\{(x,y)\mid x,y\in A\}$$

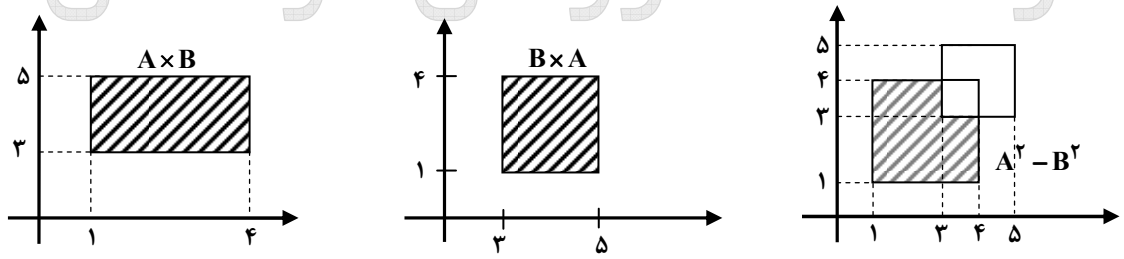
لذا صفحه‌ی مختصات دکارتی را می‌توان به صورت $IR^۲=IR\times IR=\{(x,y)\mid x,y\in IR\}$ تعریف کرد.

نمودار ضرب دکارتی:

چون حاصل ضرب دکارتی از زوجهای مرتب تشکیل می‌شود، اگر مؤلفه‌ی اول و دوم از مجموعه‌ی اعداد حقیقی انتخاب شوند، می‌توان هر زوج مرتب ر ا بر روی صفحه‌ی مختصات دکارتی $(IR^۲)$ نمایش داد. به این ترتیب که مؤ لفه‌ی اول آن را ازمحور x ها وموئلفه‌ی دوم آنرا از محور y ها انتخاب می‌کنیم.

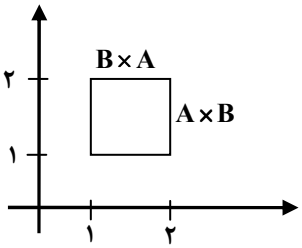
مثال: اگر $A=\{x\mid x\in R, x\in[۱,٤]\}$ و $B=\{x\mid x\in R, x\in[۳,٥]\}$ نمودار $A\times B$ و $B\times A$ و $A^۲-B^۲$ را رسم کنید.

حل:



مثال: اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=[۱,۲]$ آنگاه نمودار $(A\times B)\cup(B\times A)$ چگونه است؟

حل:



نکات و قضایا:

۱) داریم:

$$A\times B=\phi \quad \Leftrightarrow \quad A=\phi \vee B=\phi$$
$$A\times\phi=\phi\times A=\phi \qquad \phi\times\phi=\phi$$

نتیجه:

$$A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=B\vee A=\phi\vee B=\phi$$

۲) ضرب دکارتی بر روی اعمال $\Delta,-,\cup,\cap$ توزیع پذیر است.

$$\begin{cases} A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C) \\ (A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C) \\ (A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C) \\ (A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C) \\ (A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)\end{cases}$$

۳) داریم:

$$(A\times B)'=(A'\times B)\cup(A\times B')\cup(A'\times B')$$

٤) اگر D,C,B,A نا تهی باشند:

$$\left.\begin{matrix} A\subseteq B \\ C\subseteq D\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times D$$

نتایج:

الف)اگر $A\subseteq B$ و C نا تهی باشد آن گاه: $A\times C\subseteq B\times C$ و $C\times A\subseteq C\times B$

ب) اگر D,C,B,A نا تهی باشند:

$$\left.\begin{matrix} A=B \\ C=D\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow A\times C=B\times D$$

۵) اگر $A\times C=B\times C$ و یا $C\times A=C\times B$ و C ناتهی باشد آن‌گاه: $A=B$ (حذف‌پذیری)

٦) داریم:

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$$

نتیجه:

$$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)^{۲}=(A\times A)\cap(B\times B)=A^{۲}\cap B^{۲}$$

۷) داریم:

$$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$$

☜ مثال: حاصل عبارات زیر برابر کدام است؟

الف) $\left[\left((A\times B)-(A\times(B\cap C)\right)\cap(A\times C)\right]$

$$= A\times\left((B-(B\cap C))\cap C\right)=A\times\varnothing=\varnothing$$

ب) $\left[(A\cup B)\times C\right]\cap\left[A\times(B\cup C)\right]$

$$=\left[(A\cup B)\cap A\right]\times\left[C\cap(B\cup C)\right] \overset{\text{جذب}}{=} A\times C$$

ج) $(A'\times U)'$

$$=\left((A')'\times U\right)\cup(A'\times U')\cup\left((A')'\times U'\right)=(A\times U)\cup(A'\times\varnothing)\cup(A\times\varnothing)=A\times U$$

مثال: اگر $A\times(B-C)=A\times(C-B)$ باشد آن گاه ثابت کنید: $A\times B=A\times C$

حل:

$$A\times(B-C)=A\times(C-B)\rightarrow B-C=C-B\rightarrow B=C\rightarrow A\times B=A\times C$$

مثال: اگر D,C,B,A چهار مجموعه نا تهی بوده $A\times C\subseteq B\times D$ باشد آن‌گاه تعداد زیر مجموعه‌های $A-B$ کدام است؟

حل:

$$A\times C\subseteq B\times D\rightarrow\begin{cases}A\subseteq B\rightarrow A-B=\phi\\ C\subseteq D\end{cases}$$

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی تهی $2^0=1$ است.

مثال: اگر $A\times B=B\times A, B=\{X+Y,1\}, A=\{5,X-Y\}$ باشد $X+2Y$ کدام است؟

حل:

$$A\times B=B\times A\xrightarrow{A,B\neq\varnothing}A=B\rightarrow\begin{cases}x+y=5\\ x-y=1\end{cases}\rightarrow x=3\ ,\ y=2$$

مثال: اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی و $(A\times B)\subset(B\times A)$، آن‌گاه $A\Delta B$ برابر کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) A ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$$(A\times B)\subseteq(B\times A)\Rightarrow\begin{cases}A\subseteq B\\ B\subseteq A\end{cases}\Rightarrow A=B\Rightarrow A\Delta B=A\Delta A=\varnothing$$

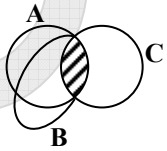
مثال: اگر A و B و C سه مجموعه‌ی غیرتهی باشند، از کدام تساوی الزاماً $A=B$ نتیجه می‌شود؟

۱) $A\times C=B\times C$ ۲) $A\cap C=B\cap C$ ۳) $A\cup C=B\cup C$ ۴) $A\times(B-C)=(A-C)\times B$

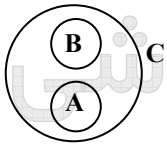
حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$$A\times C=B\times C\xrightarrow{C\neq\varnothing}A=B$$

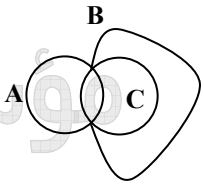
$$A\cap C=B\cap C\xrightarrow{\text{ممکن است}}A\neq B$$



$$A\cup C=B\cup C\xrightarrow{\text{ممکن است}}A\neq B$$



$$A\times(B-C)=(A-C)\times B\Rightarrow$$



$$(A\times B)-(A\times C)=(A\times B)-(C\times B)$$

(مثلاً B تهی باشد و A زیر مجموعه‌ی غیرتهی C باشد.)

اگر $A-B=A-C$ لزوماً $B=C$ نیست. پس لزوماً $A\times C=C\times B$ نیست.

ویژگی‌های عدد اصلی ضرب دکارتی ۲ مجموعه:

هر گاه مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد در اینصورت هر کدام از مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ دارای $m\times n$ عضو می‌باشند.

$$n(A\times B)=n(B\times A)=mn$$

نکات:

الف) $n((A\times B)\cap(B\times A))=[n(A\cap B)]^{۲}$

ب) $n((A\times B)\cup(B\times A))=۲n(A).n(B)-[n(A\cap B)]^{۲}$

ج) $n((A\times B)-(B\times A))=n(A\times B)-n((A\times B)\cap(B\times A))=n(A)n(B)-[n(A\cap B)]^{۲}$

نتیجه:

$$n(B^{۲}-A^{۲})=(n(B))^{۲}-[n(A\cap B)]^{۲}$$

مثال: اگر مجموعه A دارای ٦٤ زیر مجموعه و مجموعه‌ی B دارای ۱۰ زیر مجموعه دو عضوی باشد. حاصل ضرب دکارتی A در B دارای چند عضو خواهد بود؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} ۲^{n}=۶۴\rightarrow n=۶\Rightarrow |A|=۶ \\ \binom{n}{۲}=۱۰\rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}=۱۰\rightarrow n=۵\Rightarrow |B|=۵ \end{array}\right\}\Rightarrow |A\times B|=|A||B|=۶\times ۵=۳۰$$

مثال: اگر {٤ و ۳ و ۲ و ۱} = A و {٥ و ٤ و ۳} = B باشد، تعداد عضوهای $(A\times B)\cup(B\times A)$ کدام است؟

حل:

$$|(A\times B)\cup(B\times A)|=۲|A||B|-|A\cap B|^{۲}=۲\times ۳\times ۴-۲^{۲}=۲۰$$

مثال: اگر $A=\{K+۲\,|\,K\in Z,-۱\le K\le ۲\}$ و $B=\{K-۱\,|\,K\in N,K^{۲}\le ۹\}$ آنگاه $B^{۲}-A^{۲}$ چند زیر مجموعه دارد؟

حل:

$$B=\{۰,۱,۲\}\qquad A=\{۱,۲,۳,۴\}$$

$$|B^{۲}-A^{۲}|=|B^{۲}|-|B^{۲}\cap A^{۲}|=|B|^{۲}-|(B\cap A)^{۲}|=|B|^{۲}-|B\cap A|^{۲}=۳^{۲}-۲^{۲}=۵$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

رابطه:

هرگاه دو مجموعه A و B داده شده باشند، هر زیر مجموعه‌ای از $A\times B$ به نام یک رابطه از A در B خوانده می‌شود.
در صورتیکه R رابطه از A در A باشد، یعنی $R\subseteq A\times A$ در این صورت می‌گوییم رابطه R در A تعریف شده است.
در صورتی که R یک رابطه از A در B باشد و داشته باشیم $(a,b)\in R$ در این صورت می‌نویسیم: aRb و می‌گوییم a با b به وسیله رابطه R مربوطند. واضح است که aRb با bRa تفاوت دارد. در صورتی که $(a,b)\notin R$ می‌نویسیم: $a\not R b$

مثال: اگر $B=\{a,b\}, A=\{۱,۲,۳\}$ رابطه ای پنج عضوی از A در B را بنویسید.

حل:

$$A\times B=\{(۱,a),(۲,a),(۳,a),(۱,b),(۲,b),(۳,b)\}$$

رابطه‌های تک‌عضوی عبارتند از:

$$R_۱=\{(۱,a)\}\quad R_۲=\{(۲,a)\}\quad R_۳=\{(۳,a)\}$$
$$R_۴=\{(۱,b)\}\quad R_۵=\{(۲,b)\}\quad R_۶=\{(۳,b)\}$$

مثال: رابطه R روی $A=\{-۳,-۲,۱,۲,۳\}$ به صورت زیر تعریف شده است: $\forall a,b\in A: aRb\Leftrightarrow a^۲+b=۶$ اعضای رابطه‌ی R را تعیین کنید.

حل: R دارای این ٤ عضو است:

$$(-۲)^۲+۲=۶\rightarrow(-۲,۲)\in R$$
$$(+۲)^۲+۲=۶\rightarrow(۲,۲)\in R$$
$$(-۳)^۲-۳=۶\rightarrow(-۳,-۳)\in R$$
$$(+۳)^۲-۳=۶\rightarrow(۳,-۳)\in R$$

مثال: اگر R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ به‌صورت $aRb\Leftrightarrow|۳b-a|<۴$ تعریف شده باشد، رابطه‌ی R چند عضو دارد؟

حل:

$$aRb\Rightarrow|۳b-a|<۴$$
$$b=۳:|۳\times۳-۶|<۴\rightarrow(۳,۶)\in R$$
$$b=۲:|۳\times۲-۶|<۴\ \ldots\ |۳\times۲-۳|<۴\rightarrow$$
$$(۲,۶)\in R\qquad(۲,۵)\in R$$
$$(۲,۴)\in R\qquad(۲,۳)\in R$$

$$b=۱:|۳\times۱-۶|<۴\qquad(۱,۶)\in R$$
$$|۳\times۱-۵|<۴\qquad(۱,۵)\in R$$
$$|۳\times۱-۴|<۴\qquad(۱,۴)\in R$$
$$|۳\times۱-۳|<۴\qquad(۱,۳)\in R$$
$$|۳\times۱-۲|<۴\qquad(۱,۲)\in R$$
$$|۳\times۱-۱|<۴\qquad(۱,۱)\in R$$

رابطه همانی:

مجموعه نا تهی A مفروض است، رابطه I_A را همانی گوییم هر گاه: $I_A=\{(x,x)|\ x\in A\}$ لذا اگر مجموعه A دارای n عضو باشد رابطه I_A نیز n عضو دارد.

اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم در رابطه‌ها:

اجتماع و اشتراک و تفاضل دو رابطه به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$R_1 \cup R_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in R_1 \vee (x,y) \in R_2\}$$
$$R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in R_1 \wedge (x,y) \in R_2\}$$
$$R_1 - R_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in R_1 \wedge (x,y) \notin R_2\}$$

متمم یک رابطه به این ترتیب تعریف می‌شود: $\overline{R} = R' = \{(x,y) \mid (x,y) \notin R\}$

رابطه وارون (معکوس):

وارون رابطه R را که رابطه‌ای از A در B می‌باشد با R^{-1} نمایش داده و مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$$

به عبارت ساده‌تر برای نوشتن وارون R کافی است در هر کدام از زوجهای مرتب R جای مختص اول و دوم را عوض کنیم. واضح است که: $D_{R^{-1}} = R_R$ (دامنه) (برد) $D_R = R_{R^{-1}}$ (دامنه) (برد)

مثال: رابطه $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 6\}$ رابطه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد صحیح می‌باشد، مجموع مولفه‌های اول R^{-1} کدام است؟

حل:

$R : N \to Z$

$1^2 + 1^2 < 6 \qquad 1^2 + (-2)^2 < 6$

$1^2 + 2^2 < 6 \qquad 1^2 + (-1)^2 < 6$

$\to R = \{(1,1), (1,2), (1,-2), (1,-1)\}$

مؤلفه‌های اول R^{-1} همان مؤلفه‌های دوم R است. $\leftarrow 1+2-2-1=0$

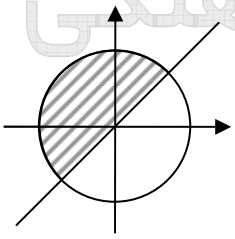
نمودار رابطه‌ها:

برای رسم نمودار یک رابطه می‌توان از صفحات مختصات بهره گرفت. برای رسم نمودار رابطه R که $R \subseteq A \times B$ در صفحات مختصات روی محور افقی عضوهای مجموعه A و روی محور عمودی عضوهای مجموعه B را در نظر می‌گیریم.

سپس زوجهای مرتب موجود در رابطه را در صفحه مختصات معین می‌کنیم.

مثال: نمودار رابطه: $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, y \ge x\}$ که روی R تعریف شده است، کدام است؟

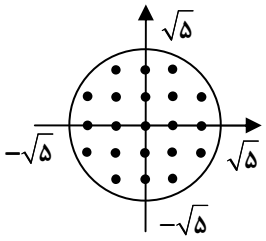
حل:



مثال: رابطه $R = \{(x,y) \mid x, y \in Z, x^2 + y^2 \le 5\}$ دارای چند عضو است؟

حل:

در هر ربع دایره ۳ نقطه و روی هر محور ۲ نقطه قرار دارد.

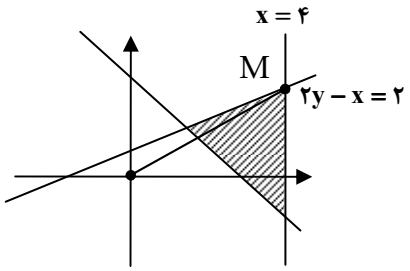


$3 \times 4 + 4 \times 2 + 1 = 21$

مبدأ

مثال: اگر $S=\{(x.y)|\ ۲y-x\le ۲, x+y\ge ۳\}$ و $A=\{(x,y)|\ x\le ٤\}$ زیر مجموعه‌هایی از $R^۲$ باشند و $B=A\cap S$، فاصله دورترین نقطه ناحیه B تا مبداء مختصات کدام است؟

حل:

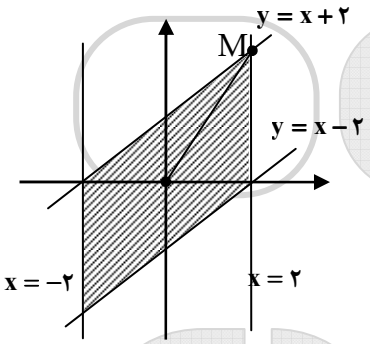


M دورترین نقطه صفحه از مبدأ است. چون هم طول و هم عرضش ماکزیمم است.

$$|OM|=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

مثال: اگر $S=\{(x,y)|\ |y-x|\le ۲, |x|\le ۲\}$ زیر مجموعه‌ای از $R^۲$ باشد، فاصله دورترین نقطه مجموعه نقاط S از مبداء مختصات کدام است؟

حل:



$$|OM|=\sqrt{۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

M دورترین نقطه صفحه است. چون هم طول و هم عرضش ماکزیمم است.

خواص رابطه‌ها:

۱) خاصیت انعکاسی (بازتابی):

هرگاه رابطه R در مجموعه A تعریف شده باشد، به طوری که هر عضو A به وسیله رابطه R با خودش مربوط شود، می‌گوییم رابطه R در مجموعه A دارای خاصیت بازتابی یا انعکاسی می‌باشد. به عبارت دیگر برای اینکه رابطه R که در A تعریف شده است دارای خاصیت بازتابی باشد:

$$\forall a\in A:(a,a)\in R$$
$$\forall a\in A: aRa$$

مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,٤\}$ دارای خاصیت بازتابی است؟

$R_۱=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۴),(۴,۱),(۴,۴)\}\rightarrow$ بازتابی هست چون تمام (x,x) ها را دارد.

$R_۲=\{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴)\}\rightarrow$ چون زوج $(۳,۳)$ را ندارد، بازتابی نیست.

مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌هایی که تعریف می‌شوند، دارای خاصیت بازتابی اند؟

الف) $\forall x,y\in IR: xRy\Leftrightarrow x\le y$

$xRx\rightarrow x\le x\rightarrow$ بازتابی است.

ب) $d\,R\,d'\Leftrightarrow d\perp d'$

$dRd\rightarrow d\not\perp d\rightarrow$ پس بازتابی نیست.

ج) $ARB\Leftrightarrow A\subseteq B$

$ARA\rightarrow A\subseteq A\rightarrow$ بازتابی است.

د) $aRb\Leftrightarrow a+b>۰$

$aRa\rightarrow ۲a>۰\rightarrow a>۰\rightarrow$ پس همواره برقرار نیست فقط برای $a>۰$ برقرار است.

هـ) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$

$(x,y)R(x,y) \rightarrow xy = xy \rightarrow$ بازتابی است.

و) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{t}$

$(x,y)R(x,y) \rightarrow \frac{x}{x} = \frac{y}{y} \rightarrow$ این رابطه برای $x = ۰$ و $y = ۰$ برقرار نیست.

۲) خاصیت تقارنی:

هرگاه رابطه R در مجموعه A تعریف شده باشد، گوییم R دارای خاصیت تقارنی است، هرگاه به ازاء هر a و b متعلق بـه A داشـته باشیم:

$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ یا $aRb \Rightarrow bRa$

نتیجه: رابطه R روی مجموعه A تقارنی نیست، هرگاه زوج مرتبی مانند (a,b)، متعلق بـه R موجـود باشـد ولـی زوج مرتـب (b,a) متعلق به رابطه R نباشد.

مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,٤\}$ دارای خاصیت تقارنی است؟

$R_۱ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۴),(۴,۱),(۴,۴)\} \rightarrow$ تقارنی دارد

$R_۲ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴),(۱,۳)\} \rightarrow$ چون $(۳,۱)$ ندارد، تقارنی ندارد

مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌هایی که تعریف می‌شوند، دارای خاصیت تقارنی‌اند؟

الف) $\forall x,y \in IR : xRy \Leftrightarrow x \le y$

$xRy \rightarrow x \le y \not\Rightarrow y \le x \rightarrow y\not R x \rightarrow$ تقارنی ندارد.

ب) $d\,R\,d' \Leftrightarrow d \parallel d'$

$dRd' \rightarrow d \parallel d' \rightarrow d' \parallel d \rightarrow d'Rd$ تقارنی دارد.

ج) $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$

$ARB \rightarrow A \subseteq B \rightarrow B \subseteq A \rightarrow B\not R A \rightarrow$ تقارنی ندارد.

د) $aRb \Leftrightarrow$ x برادر y است

اگر x برادر y باشد، ممکن است y خواهر x باشد. پس تقارنی ندارد.

ه) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$

$(x,y)R(z,t) \rightarrow xy = zt \rightarrow zt = xy \rightarrow (z,t)R(x,y)$

ز) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x + z = y + t$

$(x,y)R(z,t) \rightarrow x+z = y+t \rightarrow z+x = t+y \rightarrow (z,t)R(x,y)$

مثال: رابطه R روی مجموعه اعداد حقیقی به صورت: $xRy \Leftrightarrow ax + by = c$ تعریف شده است، در چه صورت متقارن است؟

$xRy \rightarrow ax + by = c$

$yRx \rightarrow ay + bx = c$

اگـر بخـواهیم هـم xRy هـم yRx برقـرار باشـد بایـد $ax + by = ay + bx = c$ باشـد پـس: $a(x-y) = b(x-y)$ لـذا $(a-b)(x-y) = ۰$ حال اگر بخواهد این رابطه همواره برقرار باشد نباید به x و y ربط داشته باشد پس $a = b$ است.

۳) خاصیت تراگذری یا تعدی یا ترایایی:

هرگاه R رابطه‌ای در A باشد، به طوری که برای هر a و b و c متعلق به A داشته باشیم: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ در این صورت رابطه R دارای خاصیت تراگذاری است. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ یا $\forall a,b,c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

نتیجه: رابطه R روی مجموعه A تراگذاری نیست، هرگاه حداقل دو زوج مرتب مانند (a,b) و (b,c) متعلق به R، موجود باشند ولی زوج مرتب (a,c) در رابطه R وجود نداشته باشد. $(a,b,c \in A)$

همچنین اگر $(a,b) \in R$ ولی b مؤلفه اول هیچ زوجی نباشد، خاصیت تراگذری تحت تأثیر این زوج قرار نمی گیرد.

مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,٤\}$ دارای خاصیت تراگذری است؟

$R_۱ = \{(۲,۲),(۳,۳),(۱,٤),(٤,۱),(٤,٤)\}$ — **چون (۴,۱),(۱,۴) دارد. (۱,۱) هم باید باشد.**

$R_۲ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱),(۳,٤),(٤,۳),(٤,٤),(۱,۳)\}$ — **چون (۱,۳) و (۳,۴) هست، (۱,۴) هم باید باشد.**

$R_۳ = \{(۱,۲)\}$ — **تراگذاری دارد**

$R_٤ = \{(۱,۲),(۱,۳)\}$ — **تراگذاری دارد**

مثال: کدام‌یک از روابط زیر روی مجموعه‌هایی که تعریف می‌شوند، دارای خاصیت تراگذری‌اند؟

الف) $\forall x,y \in IR : xRy \Leftrightarrow x \le y$

$$\left.\begin{array}{l} xRy \to x \le y \\ yRz \to y \le z \end{array}\right\} \to x \le z \to xRz$$

ب) $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$

$$\left.\begin{array}{l} ARB \to A \subseteq B \\ BRC \to B \subseteq C \end{array}\right\} \to A \subseteq C \to ARC$$

ج) aRb ⇔ a برادر b است

$$\left.\begin{array}{l} aRb \to \text{a برادر b است} \\ bRc \to \text{b برادر c است} \end{array}\right\} \to$$ a برادر c است.

د) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y)R(z,t) \to xy = zt \\ (z,t)R(w,v) \to zt = wv \end{array}\right\} \to xy = wv \to (x,y)R(w,v)$$

ه) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x + z = y + t$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y)R(z,t) \to x+z = y+t \\ (z,t)R(w,v) \to z+w = t+v \end{array}\right\} \to x + ۲z + w = y + ۲t + v$$

نمی‌توان نتیجه گرفت: $x + w = y + v$ پس تراگذاری ندارد.

ز) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x - z = ۵(y - t)$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y)R(z,t) \to x - z = ۵(y-t) \\ (z,t)R(w,v) \to z - w = ۵(t-v) \end{array}\right\} \Rightarrow x - w = ۵(y-v) \to (x,y)R(w,v) \to$$ تراگذاری دارد

۴) خاصیت ضد تقارنی یا پادتقارنی: هرگاه R یک رابطه روی مجموعه A باشد، این رابطه دارای خاصیت پادتقارنی است، هرگاه:

$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$ یا $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

نتیجه: اگر زوج مرتبی مانند (a,b) متعلق به R موجود باشد در حالیکه زوج مرتب (b,a) هم متعلق به R هست، رابطه R روی مجموعه A پادمتقارن نیست.

تذکر: یک رابطه می‌تواند هم تقارنی و هم پادتقارنی باشد یا تقارنی باشد ولی پادتقارنی نباشد یا تقارنی نباشد ولی پادتقارنی باشد، یا تقارنی نباشد و پادتقارنی هم نباشد.

مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,٤\}$ دارای خاصیت پاد تقارنی است؟

$R_۱ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(٤,٤)\}$ **پاد تقارنی دارد**

$R_۲ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۳,٤),(٤,۳),(٤,٤),(۱,۳)\}$ **(۴,۳),(۳,۴) با هم هست پادتقارنی ندارد.**

$R_۳ = \{(۱,۲)\}$ **پادتقارنی دارد.**

$R_٤ = \{(۱,۲),(۱,۳)\}$ **پادتقارنی دارد.**

نکات مربوط به خواص رابطه‌ها:

۱) **رابطه تهی** روی مجموعه غیر تهی A دارای خاصیت بازتابی نیست ولی تقارنی و پادتقارنی و تراگذاری می‌باشد. ولی رابطه تهی روی مجموعه تهی A دارای همه خواص رابطه می‌باشد.

۲) تمام رابطه‌هایی که به صورت $R = B^۲$ روی مجموعه B تعریف شود، همواره خواص بازتابی، تقارنی، و تراگذاری را داراست. (اگر B تهی یا تک عضوی باشد پادمتقارن نیز می‌باشد.)

۳) هر رابطه تک عضوی که روی مجموعه A تعریف شده باشد، دارای خاصیت تراگذاری و پادتقارنی می‌باشد.

٤) اگر رابطه R روی مجموعه A تعریف شده باشد و ارتباطی بین زوجهای مرتب آن برقرار نباشد، (هیچ مولفه دومی به عنوان مولفه اول یک زوج مرتب دیگر به کار نرفته باشد.)، دارای خواص پادتقارنی و تراگذاری می‌باشد.

۵) هر رابطه‌ای که هم متقارن و هم پادمتقارن باشد یا تهی است یا عناصری به فرم (a,a) را داراست.

نتیجه: اگر رابطه‌ای دارای خواص تقارنی و پادتقارنی باشد، لزوماً تراگذاری هم خواهد بود.

٦) هر زیر مجموعه یک رابطه پادمتقارن، خود رابطه‌ای پادمتقارن است، اما در مورد بقیه خواص این مطلب لزوماً برقرار نمی‌باشد.

۷) اگر $R_۱$ و $R_۲$ دو رابطه روی مجموعه A باشند، داریم:

الف) اگر $R_۱$ و $R_۲$ هر دو خاصیت بازتابی داشته باشند، در این صورت $R_۱ \cup R_۲, R_۱ \cap R_۲$ نیز بازتابی‌اند، اما $R_۱ - R_۲$ دارای خاصیت بازتابی نیست.

ب) اگر $R_۱$ و $R_۲$ هر دو خاصیت تقارنی داشته باشند، در این صورت $R_۱ - R_۲, R_۱ \cup R_۲, R_۱ \cap R_۲$ نیز دارای خاصیت تقارنی می‌باشند.

ج) اگر $R_۱$ و $R_۲$ هر دو خاصیت تراگذاری داشته باشند، در این صورت $R_۱ \cap R_۲$ نیز دارای خاصیت تراگذاری می‌باشند، اما لزومی ندارد که $R_۱ - R_۲ , R_۱ \cup R_۲$ تراگذاری باشند.

د) اگر $R_۱$ و $R_۲$ هر دو خاصیت پادتقارنی داشته باشند، در این صورت $R_۱ - R_۲, R_۱ \cap R_۲$ نیز دارای خاصیت پادتقارنی می‌باشند، اما لزومی ندارد که $R_۱ \cup R_۲$ پادمتقارن باشد.

مثال: در مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ رابطه R را با حداقل اعضا چنان بنویسید:

الف) که فقط خاصیت بازتابی داشته باشد.

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۳),(۲,۱)\}$

این جزء تخریب‌کننده همزمان سه خاصیت تقارنی، پادتقارنی و تراگذری می‌باشد.

ب) که فقط خاصیت تقارنی داشته باشد:

$R = \{(۱,۲),(۲,۱)\}$

ج) که فقط خاصیت تعدی داشته باشد:

$R = \{(۱,۲),(۲,۱),(۱,۱),(۲,۲),(۳,۴)\}$

د) که فقط خاصیت پادتقارنی داشته باشد:

$R = \{(۱,۲),(۲,۳)\}$

هـ) که فقط خاصیت تقارنی و بازتابی داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$

و) که فقط خاصیت پادتقارنی و بازتابی داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۳)\}$

ز) که فقط خاصیت تراگذری و بازتابی داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴)\}$

ح) که فقط خاصیت تقارنی و تراگذری داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱)\}$

ط) که فقط خاصیت تقارنی و پادتقارنی داشته باشد:

اگر رابطه‌ای هم تقارنی هم پادتقارنی باشد، حتماً تراگذری هم هست چون فقط زوج مرتب‌هایی به صورت (x,x) را می‌تواند اختیار کند. لذا امکان آن که فقط ۲ خاصیت فوق را داشته باشیم وجود ندارد.

ی) که فقط خاصیت پادتقارنی و تراگذری داشته باشد:

$R = \{(۱,۲)\}$

ک) که فقط خاصیت تقارنی و بازتابی و تراگذری داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۱)\}$

ل) که فقط خاصیت تقارنی و بازتابی و پادتقارنی داشته باشد:

اگر رابطه‌ای هم تقارنی هم پادتقارنی باشد حتماً تراگذری هم هست.

م) که فقط خاصیت پادتقارنی و بازتابی و تراگذری داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲)\}$

ن) که فقط خاصیت تقارنی و پادتقارنی و تراگذاری داشته باشد:

$R = \{\ \}$

س) که هر ٤ خاصیت را داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵)\}$

ق) که هیچ خاصیتی را نداشته باشد:

$R = \{(۱,۲),(۲,۳),(۲,۱)\}$

رابطه هم ارزی:

هرگاه رابطه R روی مجموعه A تعریف شده باشد و دارای سه خاصیت بازتابی و تقارنی و تراگذاری (تعدی) باشد، در این صورت می‌گوییم رابطه R یک رابطه هم ارزی روی A است.

دسته‌های هم ارزی:

هر رابطه هم ارزی روی یک مجموعه‌ی A آن مجموعه را به زیر مجموعه‌های مجزا که هر یک از آن‌ها را دسته یا کلاس هم ارزی می‌نامند، تقسیم می‌کند. دسته هم ارزی a را تحت رابطه R با علامتهای a/R یا $[a]_R$ و به صورت خلاصه $[a]$ نمایش می‌دهیم. a را نماینده دسته می‌گوییم و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم. $[a] = \{x \mid xRa\}$

به طور کلی دسته هم ارزی هر رابطه هم ارزی روی مجموعه اعداد صحیح (یا زیر مجموعه‌ای از آن) را با **کوچکترین عدد غیر منفی آن دسته**، مشخص می‌کنند. هر دسته هم ارزی تولید شده توسط عضوی مانند a که $a \in A$، زیر مجموعه‌ای از مجموعه A می‌باشد.

یعنی: $[a] \subseteq A$

نکته: اگر b عضو دلخواهی از مجموعه A باشد و $b \in [a]$ آن گاه:

$$(a \in A)[a]=[b]$$

به بیان دیگر در صورتی که رابطه R روی مجموعه A، یک رابطه هم ارزی باشد، اگر aRb آن گاه $[a] = [b]$ و بالعکس $(a,b \in A)$

مثال: در روابط زیر کلاسهای هم ارزی را مشخص کنید.

$$R_۱ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,٤),(٤,۱),(٤,٤)\}$$

$$R_۲ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱),(۳,٤),(٤,۳),(٤,٤),(۳,۳)\}$$

$$R_۳ = \{(x,y) \mid x,y \in Z \ , \ ۳ \mid x-y\}$$

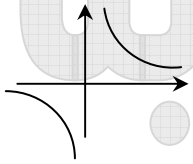
اگر $۳|x-y$ باشد یعنی $x-y=۳q$ اگر بخواهد این اتفاق بیافتد باید x و y دارای باقیمانده یکسانی در تقسیم بر ۳ باشد پس این رابطه Z را براساس باقیمانده تقسیم بر ۳ به سه کلاس $[۰]$ و $[۱]$ و $[۲]$ تقسیم می‌کند.

نکته: اگر رابطه از $IR^۲$ به $IR^۲$ تعریف شده باشد، کلاسهای هم ارزی دارای نمایش هندسی می‌باشند.

مثال: در روابط زیر نمودارکلاس $[(۳,٤)]$ را رسم کنید.

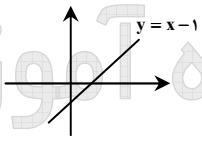
$$\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$$

$$(x,y)R(۳,۴) \to xy = ۱۲ \to y = \frac{۱۲}{x}$$



$$\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x+z = y+t$$

$$(x,y)R(۳,۴) \to x+۳ = y+۴ \to y = x-۱$$



مثال: اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی و B مجموعه‌ی اعداد اول دو رقمی کم‌تر از ۵۰ باشند، رابطه‌ای به‌صورت $(x,y)R(a,b) \Leftrightarrow x=a$ بر روی مجموعه‌ی $A \times B$ تعریف شده است. این رابطه مجموعه‌ی $A \times B$ را به چند دسته‌ی هم‌ارزی تقسیم می‌کند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ٤) فاقد هم‌ارزی

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

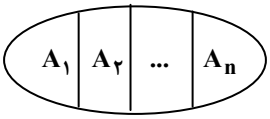
رابطه‌ی مورد نظر هر سه ویژگی بازتابی، تقارنی و تعدی را دارد، پس هم‌ارزی است.

با توجه به تعریف رابطه، نتیجه می‌گیریم که فقط زوج مرتب‌هایی با هم رابطه دارند که مؤلفه‌ی اول مساوی داشته باشند، یعنی فقط عناصری در یک دسته‌ی هم‌ارزی قرار می‌گیرند که مؤلفه‌ی اول آن‌ها مساوی باشد و چون مؤلفه‌های اول از مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی انتخاب می‌شود، نتیجه می‌گیریم که ۹ دسته‌ی هم‌ارزی داریم.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

افراز یک مجموعه:

اگر A یک مجموعه غیر تهی باشد، گوییم A به n زیر مجموعه A_1 و A_2 و... و A_n افراز شده است اگر:



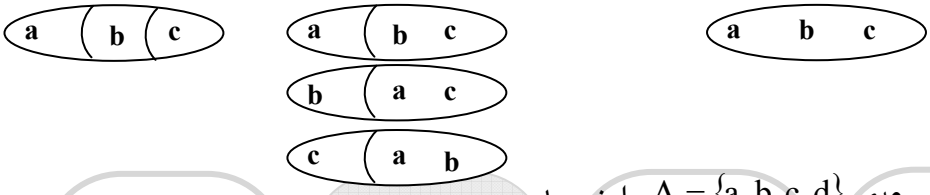
۱) $\forall i \in N(1 \le i \le n) A_i = \varnothing$

۲) $\forall i, j \in N, i \ne j(1 \le i, j \le n) A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

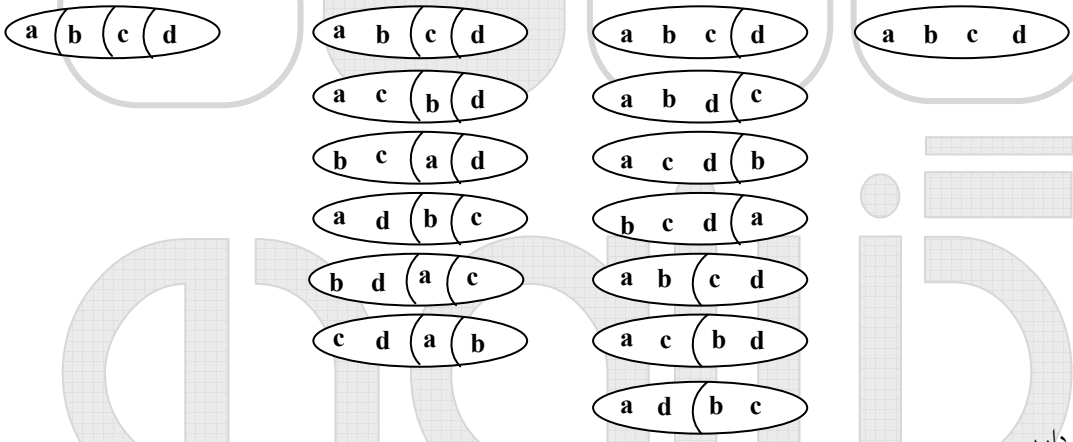
مثال: تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:



مثال: تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ را بنویسید.

حل:



جمعاً ۱۵ افراز داریم.

خاصیت مهم رابطه‌ی هم ارزی:

اگر رابطه‌ای هر سه خاصیت بازتابی و تقارنی و تراگذری را داشته باشد، دارای این ویژگی خواهد بود که مجموعه‌ای که روی آن تعریف شده است را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند.

این دسته‌ها دارای این ویژگی می‌باشد که هر عضو در آن با بقیه اعضا رابطه دارد و بین این عضو و اعضای دسته‌های دیگر هیچ ارتباطی وجود ندارد.

هر رابطه هم‌ارزی مجموعه تعریفش را به صورتی منحصر به‌فرد به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند.

با داشتن رابطه هم‌ارزی می‌توان افراز متناظر با آن را به‌دست آورد. و بالعکس اگر $T = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ یک افراز مجموعه نا تهی A باشد، رابطه هم ارزی متناظر با افراز T برابر است با:

$$R = A_1^2 \cup A_2^2 \cup \cdots \cup A_n^2 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^2$$

یعنی برای یافتن رابطه متناظر با افراز یک مجموعه، فرض می‌کنیم، مجموعه T شامل تمام کلاسهای هم ارزی مجموعه A می‌باشد، اگر بخواهیم رابطه هم ارزی متناظر با این افراز را به دست آوریم، کافی است حاصل ضرب دکارتی هر یک از مجموعه‌های افراز کننده در خودش را بیابیم. (چون هر عضو با کلیه اعضا رابطه دارد پس باید تمام زوج مرتب‌های ممکن را تولید کنیم.) در این صورت اجتماع مجموعه‌های به دست آمده همان رابطه هم ارزی مورد نظر روی مجموعه A می‌باشد.

نکته:

$$n(R) = n(A_1)^2 + n(A_2)^2 + \cdots + n(A_n)^2$$

نتیجه: بین رابطه‌های هم ارزی روی یک مجموعه A و افرازهای A یک تناظر یک به یک وجود دارد. لذا برای شمردن تعداد روابط هم ارزی قابل تعریف روی یک مجموعه، کافی است تعداد افرازهای ممکن آنرا بشماریم.پس تعداد رابطه‌های هم ارزی روی مجموعه A برابر تعداد افرازهای مجموعه A است. مجموعه ۱ عضوی ۱ افراز، ۲ عضوی ۲ افراز، ۳ عضوی ۵ افراز و ٤ عضوی ۱۵ افراز دارد.

هرگاه صحبت از رابطه هم‌ارزی به میان بیاید، افراز متناظر با رابطه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

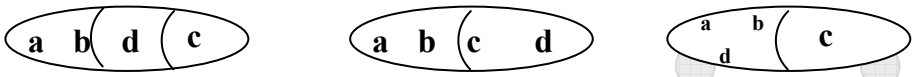
مثال: تعداد روابط هم ارزی قابل تعریف روی $A = \{a,b,c,d\}$ با شرط‌های زیر را بیابید.

الف) aRb　　**ب)** $[c] \neq [a], a \in [b]$

حل:

الف) چون a و b در یک دسته هم‌ارزی قرار دارند، پس آنها را طناب‌پیچ می‌کنیم. حال روی این مجموعه جدید ۳ عضوی ($\{ab,c,d\}$)، ۵ افراز داریم، لذا ۵ رابطه هم‌ارزی می‌توانیم بنویسیم:

ب) a,b باید در یک دسته باشند و a,c نباید در یک دسته باشند، این کار به ۳ صورت زیر امکان‌پذیر است:

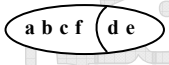


مثال: اگر $R = \{(a,b),(b,c),(d,e),(f,f)\}$ روی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ تعریف شده باشد، حداقل و حداکثر چند عضو به این مجموعه اضافه کنیم، تا هم ارزی گردد؟

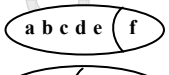
حل: چون **b R c, a R b** این سه عضو هم کلاسند پس آن‌ها را طناب‌پیچ می‌کنیم. به همین دلیل e,d را هم طناب‌پیچ می‌کنیم.

حال این سه عضو را به ۵ صورت می‌توانیم افراز کنیم.

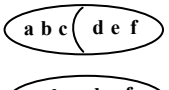
$\longrightarrow$ تعداد اعضا $= 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$



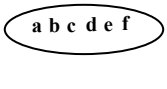
$\longrightarrow$ تعداد اعضا $= 4^2 + 2^2 = 20$



$\longrightarrow$ تعداد اعضا $= 5^2 + 1^2 = 26$



$\longrightarrow$ تعداد اعضا $= 3^2 + 3^2 = 18$



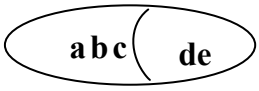
$\longrightarrow$ تعداد اعضا $= 6^2 = 36$

چون رابطه داده شده دارای ٤ عضو است، پس حداقل ۱۰ (برای ١٤ عضوی شدن) و حداکثر ۳۲ (برای ٣٦ عضوی شدن) عضو باید اضافه کنیم.

نکته: همیشه کمترین تعداد اعضای یک رابطه‌ی هم ارزی متناظر با بیشترین تعداد کلاس و بیشترین تعداد اعضای یک رابطه‌ی هم ارزی متناظر با کمترین تعداد کلاس می‌باشد.

مثال: رابطه‌ی هم ارزی R در مجموعه‌ی ۵ عضوی A، ۲ کلاس هم ارزی پدید آورده به طوریکه یکی از این کلاس‌ها $\{a,b,c\}$ و کلاس دیگر $\{d,e\}$ است. این رابطه چند زیر مجموعه دارد که خود روابطی هم ارزی باشند؟

حل:



اصولاً شمارش روابط هم‌ارزی به به معنای شمارش تعداد افرازها است.

قسمت ۳ عضوی خود دارای ۵ افراز و قسمت ۲ عضوی خود دارای ۲ افراز است. پس جمعاً $۲\times۵=۱۰$ افراز داریم که زیرمجموعه‌ی افراز فوق باشد.

مثال: بر روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان نوشت که هر یک از آن‌ها دارای ۱۱ زوج مرتب باشند؟

حل: باید افرازی را بنویسیم که ۱۱ زوج مرتب تولید کند و این افراز به‌صورت زیر است:

$\rightarrow$ تعداد اعضا $= ۳^۲+۱^۲+۱^۲=۱۱$

لذا $\binom{۵}{۳}=۱۰$ افراز به این صورت داریم.

مؤسسه آموزشی فرهنگی