



گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

سایت ریاضی سرا

ریاضی ۲

(فصل های ۲ و ۳)

www.riazisara.ir

تابع:

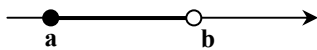
بازه (فاصله):

$[a, b]$ را بازه‌ی بسته از a تا b می‌نامند و a و b را ابتدا و انتهای بازه می‌نامند و داریم:

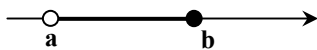


$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ را بازه‌هایی نیم‌باز می‌نامند.

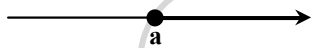


$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

بازه‌های $[a, +\infty)$ و $(-\infty, a]$ را نیز بازه‌های نیم‌باز می‌نامند.

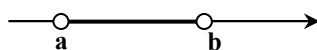


$$[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$

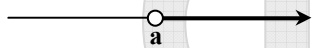
بازه‌ی (a, b) را بازه‌ی باز می‌نامیم.



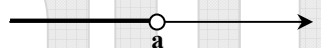
$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

بازه‌های (a, ∞) و $(-\infty, a)$ را نیز بازه‌های باز می‌نامند.

$$(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$$



تابع:

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود.

بیان (زوج مرتب):

اگر یک رابطه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج متمایزی در آن دارای مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متمایز نباشند.
(دو زوج (a, b) و (c, d) مساوی هستند هرگاه $a = b$ و $c = d$ ، در غیر این صورت آن‌ها را متمایز می‌نامیم.)

مثال: اگر بدانیم رابطه‌ی زیر یک تابع است، مقادیر a و b کدام‌اند؟

$$\{(a-1, 2), (5, a-2), (a-2, b+3), (3, 5), (5, 3)\}$$

حل:

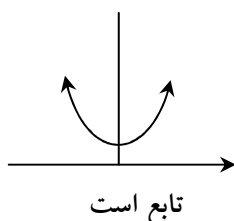
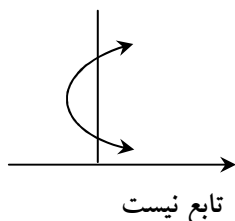
هیچ دو زوج مرتبی نباید شامل مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متمایز باشند.

$$(5, a-2) = (5, 3) \Rightarrow a-2=3 \Rightarrow a=5$$

$$(a-2, b+3) = (3, b+3) = (3, 5) \Rightarrow b+3=5 \Rightarrow b=2$$

بیان نموداری:

اگر نمودار یک رابطه داده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



بیان تابع با نمودار ون:

از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد:

(الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

(ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا اصلاً پیکانی وارد نشود.

مثال: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ در حالت کلی از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی چند تابع قابل تعریف است؟

حل:

عضو a سه انتخاب دارد که به یکی از آن‌ها متصل شود. به همین ترتیب عضو b, c, d لذا تعداد توابع قابل تعریف $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ تابع است. (چون اعضای دامنه مستقل از همدی و بنابر اصل ضرب حالات انتخابشان در هم ضرب می‌شود). در حالت کلی از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی، n^m تابع قابل تعریف است.

دامنه و برد:

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های تشکیل دهنده‌ی یک تابع را دامنه و مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل دهنده‌ی یک تابع را برد تابع می‌نامند.

اگر f تابعی از A به B باشد، دامنه‌ی آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان B باشد. مجموعه‌ی B را هم دامنه یا مقصد تابع f می‌نامند.

برد یک تابع زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه‌ی آن است و ممکن است مساوی هم‌دامنه نیز بشود.

به‌طور کلی اگر f تابعی از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B باشد، می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$

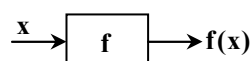
موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را صرفاً با ارائه ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود. در این موارد طبق

قرارداد، دامنه‌ی تابع بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که ضابطه‌ی ارائه شده روی آن مجموعه تعریف شده است. دامنه‌ی تابع f

را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می‌دهند.

مقدار تابع در یک نقطه، نمایش جبری (ضابطه‌ی) تابع:

چون تابع تناظری است بین دو مجموعه که مجموعه‌ی اول دامنه و مجموعه‌ی دوم برد نامیده می‌شود به قسمی که هر عضو از دامنه دقیقاً با یک عضو از برد نظیر می‌شود، لذا تابع را می‌توان به‌عنوان یک ماشین در نظر گرفت که با دریافت هر عضو



از دامنه، عضوی منحصر به فرد از برد را به‌عنوان خروجی به ما می‌دهد.

مثلاً تابع $f = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$ را در نظر بگیرید:

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_f = \{5, 10, 15, 20\}$$

حال می‌توان نوشت:

$$f(1) = 5$$

$$f(2) = 10$$

$$f(3) = 15$$

$$f(4) = 20$$

گاهی اوقات یک تابع را می‌توان برحسب یک عبارت جبری از یک متغیر نمایش داد. این‌گونه نمایش تابع را نمایش جبری یا ضابطه‌ی تابع می‌نامند.

مثلاً برای تابع فوق‌الذکر، ضابطه‌ی تابع عبارتست از: $f(x) = 5x$

در هر تابع سه ویژگی زیر اهمیت دارد:

۱- دامنه

۲- هم‌دامنه

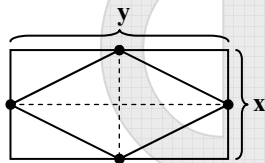
۳- دستور یا قانونی که نحوه‌ی ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد که این دستور هنگامی که در قالب عبارت جبری بیان می‌شود، ضابطه‌ی جبری نام دارد.

اگر ضابطه‌ی تابع $y = f(x)$ باشد، شرط آن که ضابطه‌ای، ضابطه‌ی تابع باشد آن است که:

$$\text{اگر } x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

مثال: در مستطیلی با عرض x و محیط ۴۰ یک لوزی به‌گونه‌ای محاط شده است که هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به‌عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.

حل: اگر عرض مستطیل را y در نظر بگیریم:



$$\text{محیط} = 2(y + x) = 40 \rightarrow y = 20 - x$$

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{x \times y}{2} = \frac{x(20 - x)}{2} = 10x - \frac{x^2}{2}$$

مثال: اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به‌عنوان تابعی از عدد کوچک‌تر بیان کنید.

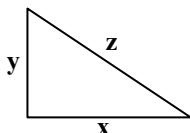
حل: x : عدد کوچک‌تر y : عدد بزرگ‌تر

$$y - x = 12 \Rightarrow f = x, y = x(12 + x) = 12x + x^2$$

مثال: مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۵ سانتی‌متر مربع است. طول وتر این مثلث را به‌عنوان تابعی از یک ضلع آن به‌دست آورید.

حل:

x : ضلع



$$S = \frac{xy}{2} = 25 \Rightarrow xy = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{x}$$

$$\text{وتر } z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{50}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^4 + 2500}}{|x|} = x > 0 \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 2500}}{x}$$

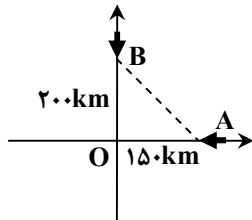
مثال: دو هواپیما مانند شکل در دو مسیر عمود بر هم در ارتفاع یکسان، با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت هستند.

یک هواپیما ۱۵۰ کیلومتر و هواپیمای دیگر ۲۰۰ کیلومتر از نقطه‌ی O فاصله دارند.

اگر مبدأ زمان را همین شکل فرض کنیم، فاصله‌ی بین دو هواپیما را به عنوان تابعی از زمان به دست آورید.

ثانیاً نشان دهید این دو هواپیما هرگز به هم برخورد نمی‌کنند.

حل:



$$900 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15 \frac{\text{km}}{\text{min}}$$

$$x = x_0 + v_x t = 150 - 15t$$

$$y = y_0 + v_y t = 200 - 15t$$

هواپیمای A در لحظه‌ی $t=10$ از مبدأ عبور می‌کند و هواپیمای B در لحظه‌ی $t=20$ از

مبدأ عبور می‌کند، لذا این دو هواپیما هرگز به هم برخورد نمی‌کنند.

معادلات و توابع:

معادلاتی که دارای ۲ متغیر مانند X و Y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. برخی از این روابط، ضابطه‌ی تابعی را معلوم می‌کنند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله ارائه می‌شوند اما توجه داشته باشید این طور نیست که یک معادله‌ی دو متغیره

بر حسب X و Y حتماً ضابطه‌ی یک تابع را نشان بدهد.

در هر صورت باید اثبات شود که $x_1 = x_2$ بود، $f(x_1) = f(x_2)$ است.

مثال: در کدام یک از معادلات زیر Y تابعی از X است؟

الف) $x^2 + y = 1$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

هر X یک Y تولید می‌کند.

ب) $y^2 - x = 1$

$$y^2 = x + 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x+1}$$

هر X که می‌دهیم، دو Y تولید می‌کند.

ج) $x^2 + y^2 = 25$

$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

هر X که می‌دهیم دو Y تولید می‌کند.

د) $x = |y| + 1$

$$|y| = x - 1 \Rightarrow y = \pm(x-1)$$

هر X که می‌دهیم، دو Y تولید می‌کند.

هـ) $y^2 = x^2$

$$y = \pm x$$

هر X که می‌دهیم، دو Y تولید می‌کند.

و) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

این رابطه تنها از یک نقطه تشکیل شده است، لذا تابع است.

$$ج) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = 0$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} = 0 \Rightarrow (x+y)^2 = 0 \Rightarrow y = -x$$

چون برای هر x یک y تولید می‌کند، تابع است

راه دوم: می‌دانیم:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} \geq 2 & a > 0 \\ a + \frac{1}{a} \leq -2 & a < 0 \end{cases}$$

که تساوی برای $a = \pm 1$ رخ می‌دهد، لذا:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \Rightarrow \frac{x}{y} = -1 \Rightarrow y = -x$$

توابع فاص و مل نامعادل:

تابع چند جمله‌ای: توابعی به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ را تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند.

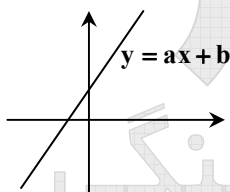
$$(\forall i; a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

تابع خطی: هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود که حالت خاصی از تابع چند جمله‌ای است.

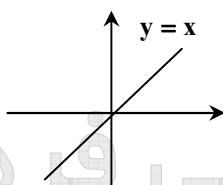
تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را تابع همانی می‌نامند. $(f(x) = x)$

تابع ثابت: تابع ثابت، تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است $(f(x) = c)$

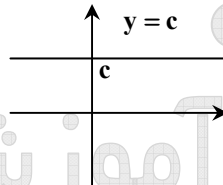
تابع قدرمطلق: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهند.



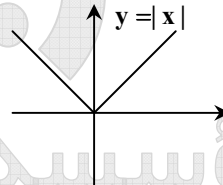
تابع خطی



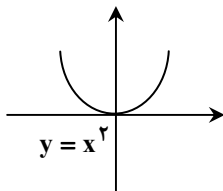
تابع همانی



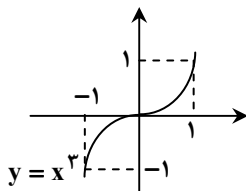
تابع ثابت



تابع قدرمطلق



چند جمله‌ای درجه ۲



چند جمله‌ای درجه ۳

رسم نمودار تابع:

انتقال نمودار تابع:

رسم یک تابع به کمک تابعی دیگر را انتقال نمودار تابع می‌نامند. با داشتن نمودار $y = f(x)$ ، نمودارهای $y = f(x) + a$ و

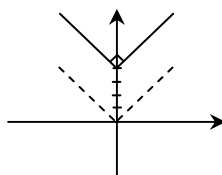
$y = f(x + a)$ را می‌توان رسم کرد.

مثال: به کمک نمودار تابع $y = |x|$ نمودارهای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.

الف) $y = |x| + 4$

$D = \mathbb{R}$

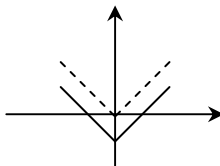
$R_f = [4, \infty]$



ب) $y = |x| - 1$

$D = \mathbb{R}$

$R_f = [-1, \infty]$

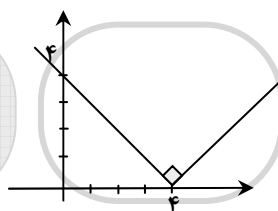


اگر $a > 0$ باشد، نمودار به بالا و اگر $a < 0$ باشد، نمودار به پایین حرکت می‌کند.

ج) $y = |x - 4|$

$D = \mathbb{R}$

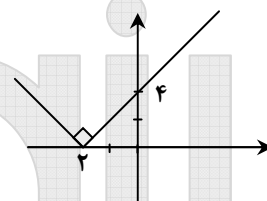
$R = [0, +\infty)$



د) $y = |x + 2|$

$D = \mathbb{R}$

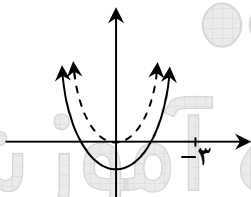
$R = [0, +\infty)$



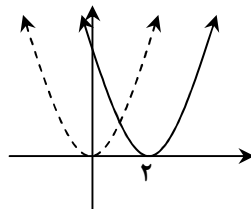
اگر $a > 0$ باشد نمودار به سمت چپ و اگر $a < 0$ باشد نمودار به سمت راست حرکت می‌کند.

مثال: به کمک نمودار $y = x^2$ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

هـ) $y = x^2 - 3$

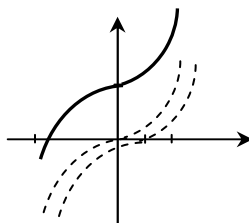


و) $y = (x - 2)^2$

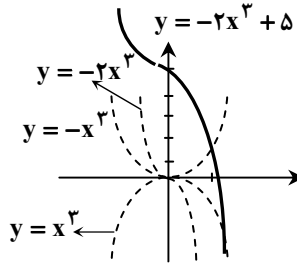


مثال: نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $y = x^3$ رسم کنید.

ز) $y = (x - 1)^3 + 2$



ح) $y = -2x^3 + 5$



(رسم نمودار $y = af(x)$:

نمودار تابع $y = af(x)$ به کمک $y = f(x)$ به صورت زیر به دست می آید:

الف) اگر $a > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a کشیده می شود. (انبساط عمودی)

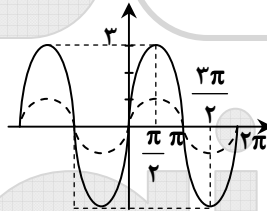
ب) اگر $0 < a < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a جمع می شود. (انقباض عمودی)

ج) اگر $a < 0$ ابتدا نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود، سپس با ضریب $|a|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

نکته: $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع نسبت به محور x ها است.

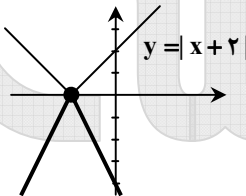
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 3\sin x$

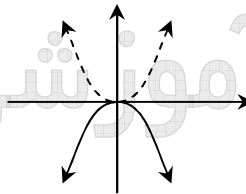


ب) $y = -2|x + 2|$

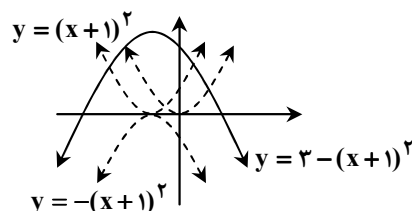
دهانه جمع و قرینه می شود.



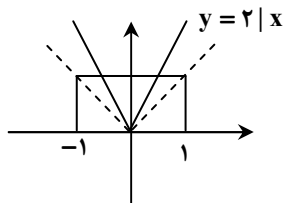
ج) $y = -x^2$



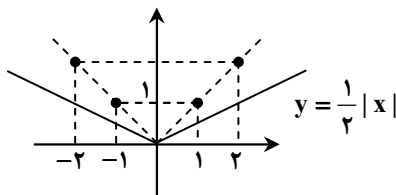
د) $y = -(x+1)^2 + 3$



هـ) $y = 2|x|$



و) $y = \frac{1}{2} |x|$



(رسم نمودار $y = f(ax)$)

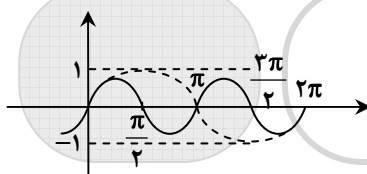
اگر $a > 0$ نمودار $y = f(ax)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد.

در حالتی که $a > 1$ نمودار $y = f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{1}{a}$ و در حالتی که $a < 1$ نمودار منبسط با ضریب $\frac{1}{a}$ خواهد شد.

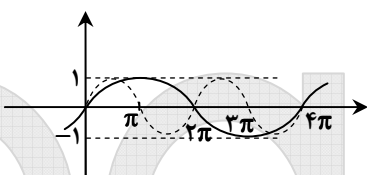
نکته: نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

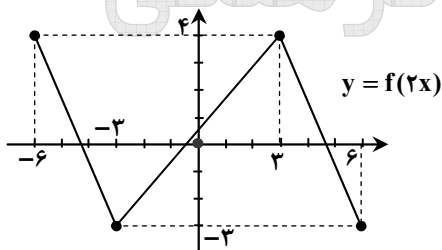
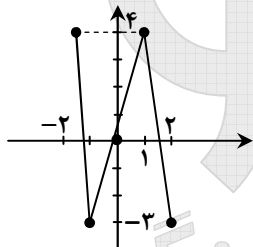
الف) $y = \sin 2x$



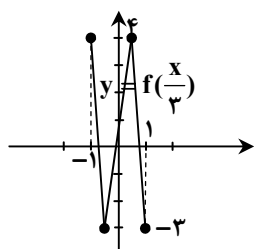
ب) $y = \sin \frac{x}{2}$



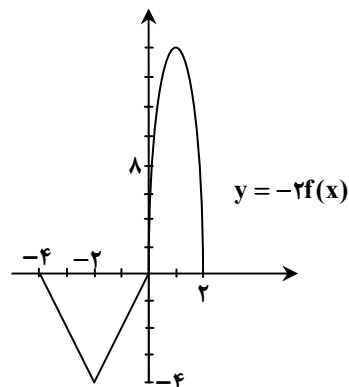
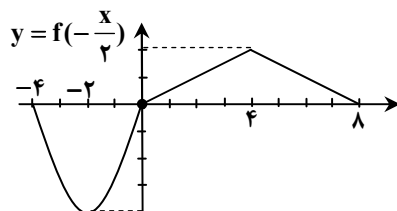
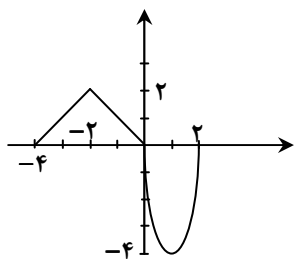
مثال: اگر نمودار $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $y = f(2x)$ و $y = f(\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



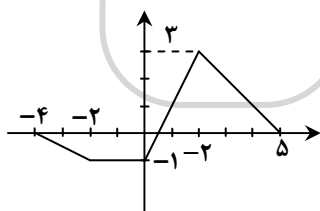
اتفاقی که قبلاً در نقطه‌ی $x = 2$ برای تابع $y = f(x)$ رخ می‌داد، این بار در $x = 1$ رخ می‌دهد.



مثال: اگر نمودار $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $y = f(-\frac{x}{2})$ و $y = -2f(x)$ را رسم کنید.



مثال: نمودار $f(x)$ در شکل زیر داده شده است. دامنه و برد توابع داده شده را معلوم و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

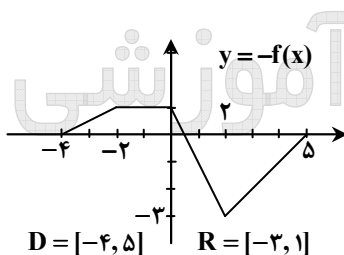
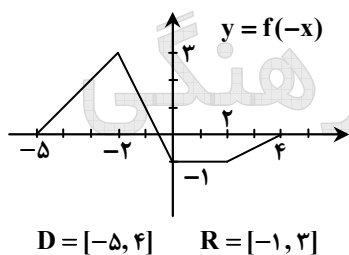
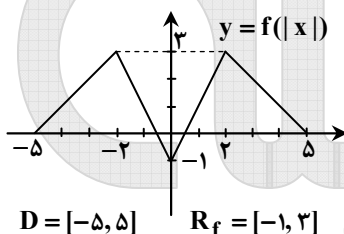
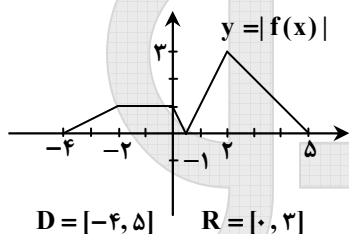


الف) $y = |f(x)|$

ب) $y = f(|x|)$

ج) $y = f(-x)$

د) $y = -f(x)$



توابع گویا:

برخی توابع را می‌توان به کمک یک عبارت گویا (یعنی یک کسر) نمایش داد. مثلاً:

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-\sqrt{x} + 7}$$

باید توجه داشت، توابع گویا در ریشه‌های مخرجشان تعریف نشده‌اند، یعنی باید ریشه‌های مخرج را از دامنه حذف نمود.

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{(x-1)}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

$$D = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

ب) $f(x) = \tan(2x+1)$

توجه کنید که $\tan x$ و $\cot x$ توابع کسری محسوب می‌شوند.

دامنه‌ی $\tan x$ برابر است با:

$$D_f = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$$

$$2x+1 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\}$$

ج) $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}}}$

$$D_f = x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

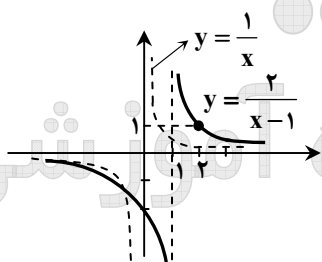
$$1 - \frac{1}{x-1} \neq 0 \rightarrow \frac{1}{x-1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}} \neq 0 \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}} \neq 1 \rightarrow 1 - \frac{1}{x-1} \neq 1$$

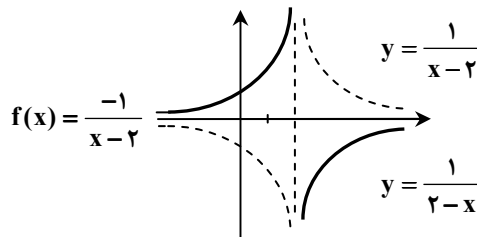
$$\frac{1}{x-1} \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

مثال: با توجه به نمودار $f(x) = \frac{1}{x}$ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

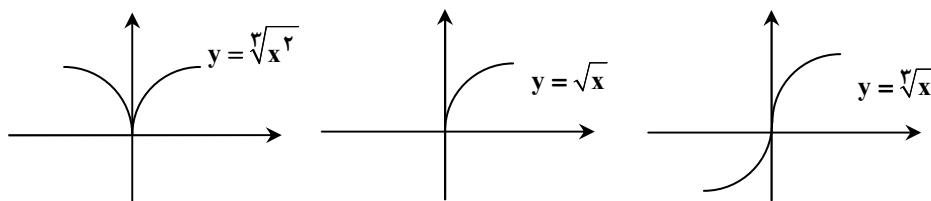


ب) $f(x) = \frac{-1}{2-x}$



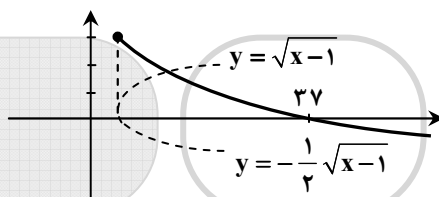
توابع رادیکالی:

توابعی به صورت $y = \sqrt[n]{x^m}$ را توابع رادیکالی می‌نامند. مثلاً:

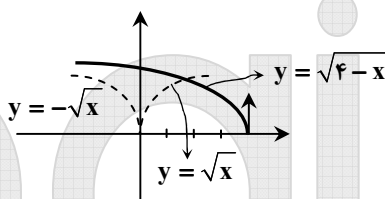


باید توجه داشت توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، مقادیر منفی را نمی‌پذیرند. یعنی دامنه‌ی تعریفشان ورودی‌های مثبت است. مثال: نمودار توابع زیر را با استفاده از نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x-1} + 3$



ب) $y = \sqrt{4-x}$



مثال: اگر دامنه‌ی تعریف $f(x) = \sqrt{(m-1)x^2 - 2mx + 4}$ برابر \mathbb{R} باشد، مقدار m کدام است؟

حل: باید زیر رادیکال همواره مثبت باشد، پس $\Delta < 0$ ، $a > 0$ ، لذا:

$$m-1 > 0 \Rightarrow m > 1$$

$$\Delta = 4m^2 - 16(m-1) < 0 \rightarrow m^2 - 4(m-1) < 0 \rightarrow (m-2)^2 < 0$$

که این اتفاق امکان‌ناپذیر است، پس هیچ مقداری برای m با این ویژگی یافت نمی‌شود.

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$

	۱	۳
$\frac{x-1}{x-3}$	-	+
$\frac{x-3}{x-1}$	-	-
$\frac{x-1}{x-3}$	+	-

$$D_1 = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$$

$$D_1 \cap D_2 = (0, 1]$$

$$D_2 = (0, 2]$$

	۰	۲
$\frac{2-x}{x}$	+	+
$\frac{x}{2-x}$	-	+
$\frac{2-x}{x}$	-	+

$$ب) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4-x^2}}$$

	-۲	۱	۲	
$m-1$	-	-	+	+
$4-x^2$	-	+	+	-
$\frac{x-1}{4-x^2}$	+	-	+	-

$$D = (-\infty, -2) \cup [1, 2)$$

$$ج) f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4x-4x^2-1}}$$

$$D = \sqrt{\frac{(x-2)}{-(2x-1)^2}} = \frac{1}{|2x-1|} \sqrt{2-x}$$

$$D = (-\infty, 2] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$د) f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$$

$$1+|x| \geq 1 \quad 1-|x| \geq 0 \rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

مثال: برد توابع زیر را حساب کنید.

$$الف) f(x) = \sqrt{x-4}$$

برد تابع $f(x) = \sqrt{x}$ برابر $[0, +\infty)$ است. لذا در تابع فوق فقط دامنه تغییر کرده و با تغییر دامنه برد تحت تأثیر قرار نمی گیرد.

$$R_f = [0, \infty)$$

$$ب) f(x) = \sqrt{2-x}$$

در این تابع نیز فقط دامنه تحت تأثیر قرار گرفته، لذا: $R_f = [0, +\infty)$

$$f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$$

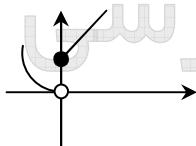
$$\sqrt{x+1} \geq 0 \rightarrow -\sqrt{x+1} \leq 0 \Rightarrow 3 - \sqrt{x+1} \leq 3 \Rightarrow f(x) \leq 3 \Rightarrow R_f = (-\infty, 3]$$

توابع چند ضابطه ای:

توابعی که بخش های مختلف دامنه ای آن با ضابطه های مختلف تعریف می شوند، چند ضابطه ای نامیده می شوند.

مثلاً:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$



یا تابع $f(x) = |x|$ که در حقیقت عبارتست از:

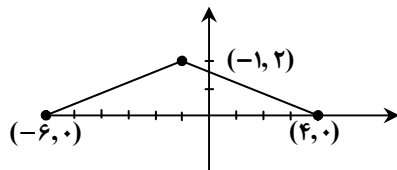
$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

یا:

$$f(x) = |x+1| + |x-1| = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -2x & x \leq -1 \end{cases}$$

مثال: نمودار تابعی به شکل زیر است. ضابطه‌ی آن را بیابید.

کحل:



$$-6 \leq x \leq -1: y - 0 = \frac{2-0}{-1-(-6)}(x+6) \Rightarrow y = \frac{2}{5}(x+6)$$

$$-1 \leq x \leq 4: y - 2 = \frac{2-0}{-1-4}(x-4) \Rightarrow y = \frac{-2}{5}(x-4)$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+6) & -6 \leq x \leq -1 \\ \frac{-2}{5}(x-4) & -1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

مثال: تابع f با مختصات زیر را رسم کرده و ضابطه‌ی آن را بنویسید.

$$f(-5) = -2, f(2) = 3 \quad (1)$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad (2)$$

(3) f در بازه‌ی $[0, 2]$ ثابت است.

(4) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن را نسبت می‌دهد.

(5) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور x ها را در نقطه‌ی ۳- قطع می‌کند.

کحل:

$$\left. \begin{array}{l} f(-3) = 0 \\ f(-5) = -2 \end{array} \right\} \text{تابع خطی است} \Rightarrow y - 0 = \frac{-2-0}{-5+3}(x+3) = \frac{-2}{-2}(x+3) \Rightarrow y = x+3 \quad x < 0$$

$$0 \leq x \leq 2: f(x) = f(2) = 3$$

$$2 < x: f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+3 & x < 0 \end{cases}$$

تساوی دو تابع:

دو تابع وقتی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها دقیقاً بر هم منطبق باشد. به عبارت دیگر هیچ نقطه‌ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد، ولی روی دیگری واقع نباشد.

اگر دو تابع به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که مجموعه‌های زوج‌های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

دو تابع f و g را مساوی نامیم، هرگاه:

الف) دامنه‌ی f و دامنه‌ی g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه‌ی مشترک: $f(x) = g(x)$

مثال: کدام یک از جفت تابع‌های زیر برابرند؟

$$\text{الف)} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} \\ y(x) = x-1 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

با این‌که ضابطه‌شان یکسان است، اما دامنه‌های متفاوتی دارند. لذا برابر نیستند.

$$ب) \begin{cases} f(x) = \log x^2 \\ g(x) = 2 \log x \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R}^+$$

لذا دو تابع برابر نیستند.

$$\log x^2 = 2 \log |x| \quad \text{دقت کنید:}$$

$$ج) \begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \\ g(x) = \cos^2 x \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad D_g = \mathbb{R}$$

لذا دو تابع برابر نیستند.

$$د) \begin{cases} f(x) = [x - [x]] \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$0 \leq x - [x] < 1$ پس $[x - [x]] = 0$ لذا دو تابع برابرند چون دامنه‌شان نیز یکسان است.

$$هـ) f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1+x^2}} \times \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2 \times (1 - \sqrt{1+x^2})}{1 - (1+x^2)} = \frac{x^2 \times (1 - \sqrt{1+x^2})}{-x^2} = \sqrt{1+x^2} - 1$$

چون دامنه‌ی هر دو تابع \mathbb{R} است، پس این دو تابع با هم برابرند.

اعمال جبری روی توابع:

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، توابع زیر روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده‌اند و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (0, 7), (3, -4), (4, -3)\}$ و $g(x) = \{(-2, 1), (1, 4), (0, 1), (3, 0)\}$ باشد، $f \pm g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را

حساب کنید.

حل:

$$D_f \cap D_g = \{1, 0, 3\}$$

$$f + g = \{(1, 6), (0, 8), (3, -4)\}$$

$$f - g = \{(1, -2), (0, 6), (3, -4)\}$$

$$f \cdot g = \{(1, 8), (0, 7), (3, 0)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{1}{2}), (0, 7)\}$$

دقت کنید چون $(3, 0) \in g$ است در $\frac{f}{g}$ زوجی با عضو ابتدای ۳ وجود نخواهد داشت.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ، توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه‌ی آن‌ها به دست آورید.

کحل:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = [-2, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} - \{3\} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \cap D_g = [-2, +\infty) - \{3\}$$

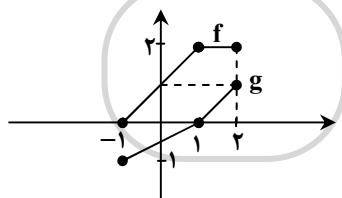
$$f+g = \sqrt{x+2} + \frac{x+1}{x-3}$$

$$f-g = \sqrt{x+2} - \frac{x+1}{x-3}$$

$$f \cdot g = \sqrt{x+2} \times \frac{x+1}{x-3}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+2}}{\frac{x+1}{x-3}} = \frac{(x-3)\sqrt{x+2}}{x+1}$$

$$D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = [-2, +\infty) - \{-1, 3\}$$



مثال: نمودار f و g در شکل زیر رسم شده است.

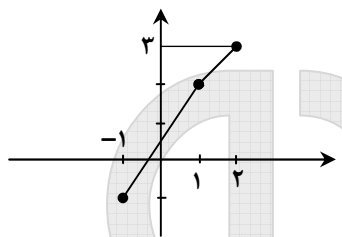
الف) $f+g$ را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای f و g بیابید.

سپس $f+g$ را مستقیماً رسم کنید.

کحل:

الف)

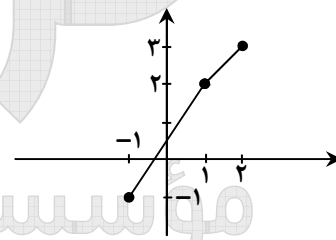


ب) اگر معادله‌ی خط‌هایی که f و g را تشکیل می‌دهند بنویسیم، خواهیم داشت:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x+1+\frac{x-1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 2+x-1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ x+1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



مثال: فرض کنید $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی با ضابطه‌ی $g(n) = 2n$ باشد. اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و تابع $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به صورت

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$$

تعریف شود، توابع $2f+g$ و $\frac{2f}{g}$ و $\frac{1}{f}$ را محاسبه کنید.

کحل:

ابتدا دامنه‌ی مشترک را در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\} \\ f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\} \end{array} \right\} \Rightarrow 2f+g = \{(1, 6), (2, 10), (3, 16), (4, 22)\}$$

$$2f+g = \{(1, 6), (2, 10), (3, 16), (4, 22)\}$$

$$\frac{2f}{g} = \{(1, \frac{3}{2}), (2, \frac{9}{4}), (3, \frac{15}{6}), (4, \frac{21}{8})\}$$

$$\frac{1}{f} = \{(1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{3}), (3, \frac{1}{5}), (4, \frac{1}{7})\}$$

ترکیب توابع:

فرض کنید f و g دو تابع باشند که برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی f باشد، در این صورت $f \circ g$ تابعی است که دامنه‌ی آن همان دامنه‌ی g است و برای هر مقدار x در این دامنه داریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

برای دو تابع f و g ممکن است که برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی f نباشد، در این صورت $f \circ g$ تابعی است که دامنه‌ی آن تمام دامنه‌ی g نخواهد بود. برای آن که $f(g(x))$ معنادار باشد لازم است که هم $x \in D_g$ باشد و هم $g(x) \in D_f$. بنابراین دامنه‌ی $f \circ g$ در حالت کلی به شکل زیر است:

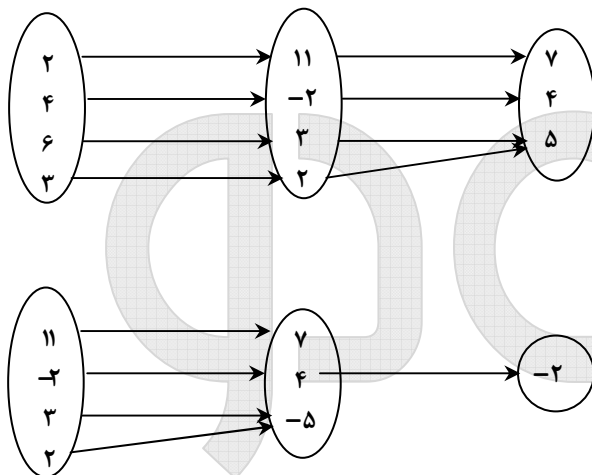
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال: اگر $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید و با نمودار ون نمایش دهید.

حلول:

$$f \circ g = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\}$$

$$g \circ f = \{(-2, -2)\}$$



عضو دیگری در برد f با دامنه‌ی f مشترک نیست.

مثال: برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ ، تابع $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ و دامنه‌ی آن را محاسبه کنید.

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

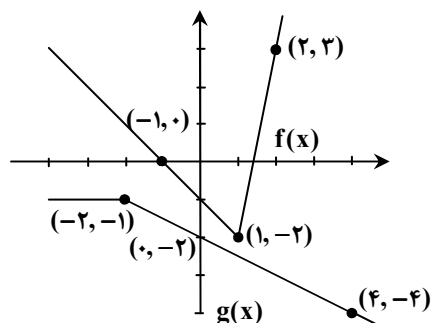
$$D_f : \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\frac{4}{x} \neq 3 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3} \Rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$$

$$D_f : \mathbb{R} - \{3\}$$

$$g \circ f(x) = \frac{4}{\frac{1}{x-3}} = 4(x-3) \Rightarrow D_{g \circ f} : \mathbb{R} - \{3\}$$

مثال: با توجه به نمودارهای f و g ، $g \circ f(-5)$ ، $f \circ g(-\frac{1}{4})$ و $f \circ f(7)$ را به دست آورید.



ابتدا ضابطه‌های f و g که هر یک از دو تابع خطی تشکیل شده‌اند را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} y = \frac{2}{-2}(x+1) & x < 1 \\ y + 2 = \frac{5}{1}(x-1) & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -(x+1) & x < 1 \\ 5x - 7 & x \geq 1 \end{cases}$$

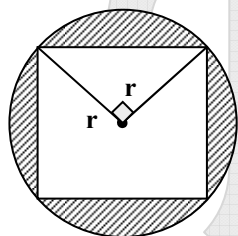
$$g(x) = \begin{cases} -1 & x < -2 \\ y + 1 = \frac{1}{-2}(x+2) & x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & x < -2 \\ -\frac{x}{2} - 2 & x \geq -2 \end{cases}$$

$$g \circ f(-5) = g(4) = -4$$

$$f \circ g(-\frac{1}{4}) = f(-\frac{7}{4}) = \frac{3}{4}$$

$$f \circ f(7) = f(28) = 133$$

مثال: یک فونداسیون بتنی استوانه‌ای شکل به عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوئیل مکعب مستطیل شک استفاده می‌شود:



الف) ضلع مخزن را به صورت تابعی از شعاع قاعده‌ی استوانه بنویسید.

ب) مساحت پایه دایره‌ای شکل را به عنوان تابعی از شعاع قاعده و تابعی از ضلع مربع بنویسید.

$$x = r\sqrt{2}$$

$$S = \pi r^2 = \pi(r\sqrt{2})^2 = 2\pi r^2$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $f(f(\frac{3}{4}))$ را به دست آورید.

$$p(\frac{3}{4}) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$f(\frac{3}{4}) = 2 \times \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

مثال: توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مفروضند. دامنه‌ی تعریف $(f+2g) \circ f$ را یک بار با به دست آوردن ضابطه و بار دیگر بدون به دست آوردن ضابطه به دست آورید.

$$(f+2g)(x) = \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{x}$$

$$(f+2g) \circ f = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} + 2\sqrt{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{x^2} + 2\sqrt[4]{1-x^2} = |x^2| + 2\sqrt[4]{1-x^2} = x^2 + 2\sqrt[4]{1-x^2}$$

$$\Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad D_{(f+2g) \circ f} = [-1, 1]$$

مستقیم:

$$D_f : -1 \leq x \leq 1$$

$$D_{f+2g} : 0 \leq x \leq 1$$

اما چون f به عنوان ورودی وارد $f+2g$ می شود، همواره $f \geq 0$ است و برای $-1 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq \sqrt{1-x^2}$ است که در دامنه‌ی $f+2g$ قرار می گیرد، لذا:

$$D_{(f+2g) \circ f} = D_f = [-1, 1]$$

مثال: اگر f تابعی خطی باشد، در هر کدام از حالت‌های زیر f را به دست آورید.

الف) $f(f(x)) = 4x + 3$

$$f(x) = ax + b \rightarrow f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 4x + 3 \Rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

$$ab + b = 3 \Rightarrow b(a + 1) = 3 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 & a = 2 \\ b = -3 & a = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \text{ یا } f(x) = -2x - 3$$

ب) $f(1-x) = 5x + 1$

$$f(x) = ax + b \rightarrow f(1-x) = a(1-x) + b = -ax + a + b = 5x + 1 \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 6 \Rightarrow f(x) = -5x + 6$$

ج) $f(2x+3) = 3x-2$

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(2x+3) = a(2x+3) + b = 3x-2 \Rightarrow 2ax + 3a + b = 3x-2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$3a + b = -2 \Rightarrow b + \frac{9}{2} = -2 \Rightarrow b = -\frac{9}{2} - 2 = -\frac{13}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

مثال: اگر دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ ، مجموعه‌ی $[3, 9]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = 2f(\frac{x}{2} + 5)$ کدام است؟

هر ورودی‌ای به $f(x)$ باید بین ۳ تا ۹ باشد، لذا:

$$3 \leq \frac{x}{2} + 5 \leq 9 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} \leq 8 \Rightarrow 4 \leq x \leq 16$$

مثال: اگر $D_f = [4, 10]$ و $D_g = [-2, 2]$ باشند، دامنه‌ی تابع $2f(2x) - g(\frac{x}{2})$ کدام است؟

$$4 \leq 2x \leq 10 \Rightarrow 2 \leq x \leq 5$$

$$-2 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

چون جمع و تفریق توابع در داخل دامنه‌ی مشترکشان انجام می‌پذیرد، دامنه‌ها را با هم اشتراک می‌گیریم.

$$D = [2, 4]$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ باشد، برد تابع $y = f(\frac{x}{3})$ چیست؟

چون $D_f = \mathbb{R}$ است و $\frac{x}{3}$ نیز تمام مقادیر حقیقی را می‌پذیرد لذا برد $f(\frac{x}{3})$ با برد $f(x)$ یکسان است.

$$\text{حال چون همواره } x^2 \leq x^2 + 1 \text{ است پس: } 0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \text{ لذا } 0 \leq \frac{2x^2}{x^2+1} < 2$$

$$\text{لذا: } 0 \leq f(x) < 2 \text{ پس } 0 \leq f(\frac{x}{3}) < 2$$

مثال: با فرض آن که $f(x-2) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $f(x+1)$ کدام است؟

$$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{f(x-2)} = [-1, 1] \Rightarrow -3 \leq x-2 \leq -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_{f(x)} = [-3, -1] \Rightarrow -3 \leq x+1 \leq -1 \Rightarrow -4 \leq x \leq -2 \Rightarrow D_{f(x+1)} = [-4, -2]$$

مثال: در توابع زیر $f \circ f$ را محاسبه کنید.

الف) $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$

$$f \circ f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$$

ب) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$f \circ f = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x}$$

ج) $f = \{(1, 2), (2, 2), (1, -1)\}$

$$f \circ f = \{ \}$$

چون مؤلفه‌ی دوم هیچ زوجی برابر مؤلفه‌ی اول زوج دیگری نمی‌باشد.

دو مسئله پرکاربرد:

دیدیم با داشتن $g(x)$ و $f(x)$ می‌توان $f \circ g(x)$ یا همان $f(g(x))$ را به دست آورد.

حال به دو مسئله‌ی زیر توجه کنید:

الف) با داشتن $f(x)$ و $f(g(x))$ از ما بخواهند $g(x)$ را به دست آوریم:

در این حالت در تابع $f(x)$ به جای x ها، $g(x)$ قرار می‌دهیم و در نهایت عبارت را متحد با $f(g(x))$ قرار می‌دهیم. از این جا $g(x)$ به دست می‌آید.

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $f(g(x)) = x^4 - 1$ باشد، $g(x)$ چه تابعی است؟

$$f(g(x)) = (g(x))^2 + 2(g(x)) = x^4 - 1 \Rightarrow g^2(x) + 2g(x) + 1 = (g(x) + 1)^2 = x^4$$

$$\Rightarrow g(x) + 1 = \sqrt{x^4} = x^2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 1$$

ب) با داشتن $g(x)$ و $f(g(x))$ از ما بخواهند $f(x)$ را به دست آوریم:

در این حالت راه استاندارد، آن است که $g(x) = t$ فرض شود و در تابع $(t, f(g(x)))$ جایگذاری شود.

راه بهتر آن است که سعی کنیم در تابع $(f(g(x)), g(x))$ را بازسازی کنیم. و $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ به دست آوریم.

مثال: اگر $f(g(x)) = 4x^2 + 4x + 7$ و $g(x) = 2x + 1$ ، $f(x)$ را بیابید.

راه ۱:

$$g(x) = 2x + 1 = t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{t-1}{2}\right) + 7 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 7$$

$$= t^2 - 1 + 7 = t^2 + 6 \Rightarrow f(x) = x^2 + 6$$

مثال: اگر $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

$$f(g(x)) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \Rightarrow f(g(x)) = g^2(x) + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

مسئله گسترده $f(x)$:

گاهی اوقات عبارتی که در آن $f(x)$ بر حسب دو تابع مانند $u(x)$ و $v(x)$ بیان شده است را به ما می‌دهند و $f(x)$ را می‌خواهند. در این صورت باید کاری کرد که $u(x)$ به $v(x)$ تبدیل شود و بالعکس و سپس دو معادله دو مجهول حاصل را حل کرد.

مثال: از عبارات زیر $f(x)$ را به دست آورید:

الف) $f(x) - 2f(-x) = 2x^3$

$$\left. \begin{aligned} f(x) - 2f(-x) &= 2x^3 \\ x = -x : f(-x) - 2f(x) &= -2x^3 \rightarrow 2f(-x) - 4f(x) = -4x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2f(x) = -2x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^3}{2}$$

ب) $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \quad x \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) &= 3x \rightarrow 4f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 6x \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) &= \frac{3}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2f(x) = 6x + \frac{3}{x} = \frac{6x^2 + 3}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{6x^2 + 3}{2x}$$

ج) $2f(\sin x) + f(\cos x) = \cos^2 x$

$$2f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2f(\cos x) + f(\sin x) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2f(\sin x) + f(\cos x) = \cos^2 x$$

$$\left. \begin{aligned} 2f(\cos x) + f(\sin x) &= \sin^2 x \rightarrow 4f(\cos x) + 2f(\sin x) = 2\sin^2 x \\ 2f(\sin x) + f(\cos x) &= \cos^2 x \end{aligned} \right\}$$

$$4f(\cos x) = 2\sin^2 x - \cos^2 x = 2(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x$$

$$4f(\cos x) = 3 - 4\cos^2 x \Rightarrow f(\cos x) = \frac{1}{4}(3 - 4\cos^2 x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(3 - 4x^2)$$

توابع زوج و فرد:

تابع f را زوج نامیم هرگاه:

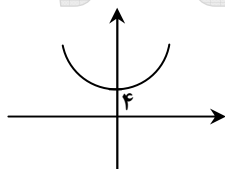
الف) دامنه‌ی آن متقارن باشد، یعنی اگر $x \in D_f$ است آن گاه $-x \in D_f$ باشد.

ب) برای هر $x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$

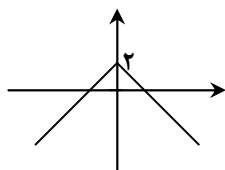
نمودار توابع زوج نسبت به محور y ها قرینه است.

مثلاً توابع زیر زوجند:

$$f(x) = x^2 + 4$$



$$f(x) = 2 - |x|$$



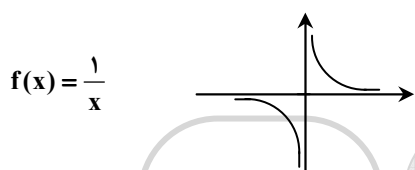
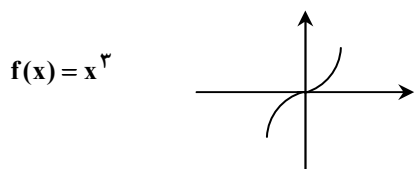
تابع f را فرد نامیم هرگاه:

الف) دامنه‌ی آن متقارن باشد.

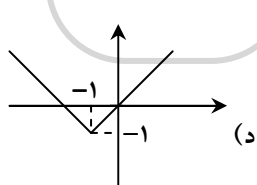
ب) برای هر $f(-x) = -f(x) : x \in D_f$

نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

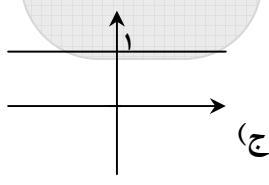
مثلاً توابع زیر فردند:



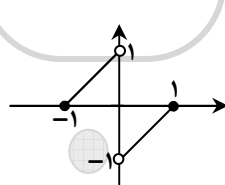
مثال: از روی نمودار تعیین کنید کدام یک از توابع زیر زوجند و کدام یک فردند؟



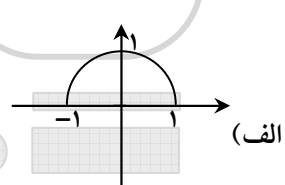
نه زوج است نه فرد



زوج است.



فرد است.



زوج است.

مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید:

الف) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$

$f(-x) = -x\sqrt{5-x^2} = -f(x) \rightarrow f(x)$ فرد است.

ج) $f(x) = |x|$

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \rightarrow f(x)$ زوج است.

ج) $f(x) = 2x + \sin x$

$f(-x) = 2(-x) + \sin(-x) = -2x - \sin x = -f(x) \rightarrow f(x)$ فرد است

د) $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$f(-x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} = -f(x) \Rightarrow f$ فرد است.

مثال: زوج یا فرد بودن توابع f و g را در زیر تعیین کنید.

$f = \{(-2, 5), (-1, 4), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$

$f(-2) = f(2) = 5$

$f(-1) = f(1) = 4$

$f(0) = 3$

f زوج است.

$$g = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 0), (1, -2), (2, -1)\}$$

$$f(-2) = -f(2) = 1$$

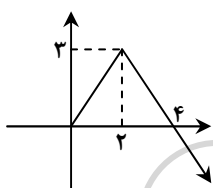
$$f(-1) = -f(1) = 2$$

$$f(0) = 0$$

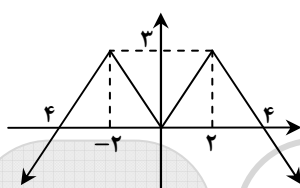
f فرد است.

مثال: اگر تابع $y = f(x)$ در قسمت $x \geq 0$ به شکل زیر باشد، $f(x)$ را برای $x < 0$ به گونه ای تعیین کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

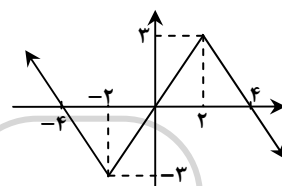
بار دیگر $f(x)$ را برای $x < 0$ به گونه ای تعیین کنید که $f(x)$ نمایش دهنده تابع فرد باشد.



: حالتی که f زوج باشد



: حالتی که f زوج باشد



مثال: اگر f یک تابع زوج و غیر ثابت باشد، تعیین کنید در هر یک از حالات زیر آیا g زوج است یا فرد است؟ یا نه زوج است نه فرد؟

الف) $g(x) = -f(x)$

g زوج است. $g(-x) = -f(-x) = f(x) = g(x)$

ب) $g(x) = f(-\Delta x)$

g زوج است. $g(-x) = f(\Delta x) = f(-\Delta x) = g(x)$

ج) $g(x) = f(x) + 3$

g زوج است. $g(-x) = f(-x) + 3 = f(x) + 3 = g(x)$

د) $g(x) = -f(x - 3)$

$g(-x) = -f(-x - 3) = -f(x + 3)$

چون $g(-x)$ ارتباطی با $g(x)$ ندارد، $g(x)$ نه فرد است نه زوج است.

نکات توابع زوج و فرد:
 ۱- داریم: (به صورت ستونی بخوانید)

	↓	↓	↓	↓
f	زوج	زوج	فرد	فرد
g	زوج	فرد	زوج	فرد
$f \pm g$	زوج	؟	؟	فرد
$f.g$	زوج	فرد	فرد	زوج
$\frac{f}{g}$ $g \neq 0$	زوج	فرد	فرد	زوج
fog	زوج	زوج	زوج	فرد

۲- اگر تابع f تابعی با دامنه‌ی متقارن باشد تابع $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ تابعی همواره زوج است و تابع $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ تابعی همواره فرد است.

و چون داریم: $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ پس هر تابع فرد را می‌توان به صورت جمع یک تابع فرد و یک تابع زوج نوشت.

مثال: تابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2} - 1$ را به صورت جمع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

$$\text{جزء زوج: } \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{(x^3 + 2x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2} - 1) + (-x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2} - 1)}{2} = 2x^2 + \sqrt{1-x^2} - 1$$

$$\text{جزء فرد: } \frac{f(x)-f(-x)}{2} = x^3 - \frac{1}{x}$$

نتیجه: در چند جمله‌ای‌ها، جملات با درجه‌ی فرد اجزای فرد تابع و جملات با درجه‌ی زوج، اجزای زوج تابع‌اند.

مثال: اگر تابع $f(x) = x^2 + (a+2)x^2 - \frac{1}{x}$ تابعی فرد باشد. a کدام است؟

باید جمله درجه زوج نداشته باشیم، پس: $a = -2$

۳- تنها تابعی که هم زوج است و هم فرد تابع ثابت: $f(x) = 0$ است. زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

مثال: تابع $f(x) = \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right]$ از لحاظ زوج یا فرد بودن چگونه است؟

چون همواره صورت کسر از مخرج کسر کوچک‌تر است لذا: $0 < \frac{x^2}{x^2+1} < 1$ است. پس $\left[\frac{x^2}{x^2+1} \right] = 0$ است. لذا این تابع هم زوج و هم فرد است.

تابع صعودی، تابع نزولی:

تابع $f(x)$ را صعودی نامیم، هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه که $x_1 < x_2$ بود، $f(x_1) \leq f(x_2)$ باشد و اگر $f(x_1) < f(x_2)$ باشد، تابع را صعودی اکید می‌نامیم.

تابع $f(x)$ را نزولی نامیم، هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه که $x_1 < x_2$ ، $f(x_1) \geq f(x_2)$ باشد.

و اگر $f(x_1) > f(x_2)$

باشد، تابع را نزولی

اکید می‌نامیم.

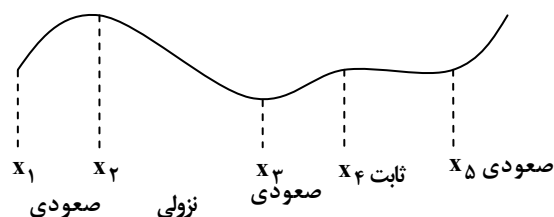


صعودی

صعودی اکید

نزولی

نزولی اکید



x_1

x_2

صعودی

نزولی

x_3

صعودی

x_4

ثابت

x_5

صعودی

یادآوری می‌کنیم تابع $f(x)$ را ثابت می‌نامیم هرگاه برای هر دو

عضو x_1 و x_2 از دامنه‌ی f داشته باشیم: $f(x_1) = f(x_2)$. ثابت

ثابت هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. البته توابع

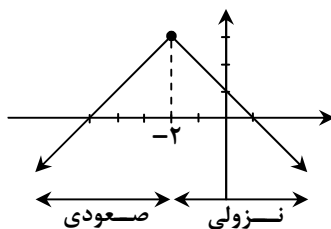
می‌توانند در قسمتی از دامنه‌ی شان صعودی و در قسمت دیگری

نزولی باشند، مانند تابع زیر که صعودی یا نزولی نیست اما در

قسمتی از دامنه صعودی و در قسمت نزولی است.

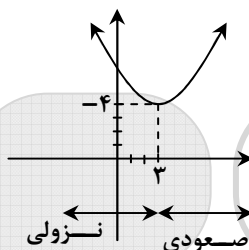
مثال: با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید هر کدام در دامنه‌شان در کدام قسمت صعودی و در کدام قسمت نزولی و در کدام قسمت ثابتند؟

الف) $f(x) = -|x+2|+3$



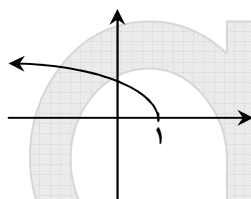
نه صعودی نه نزولی

ب) $f(x) = x^2 - 6x + 10$



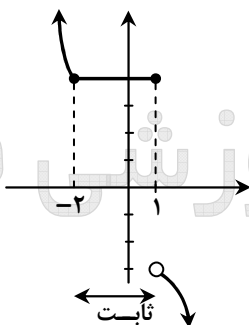
نه صعودی نه نزولی

$f(x) = \sqrt{1-x}$



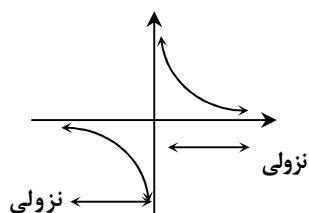
تابع نزولی اکید است

د) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$



تابع نزولی است

هـ) $f(x) = \frac{1}{x}$



تابع نه صعودی است نه نزولی

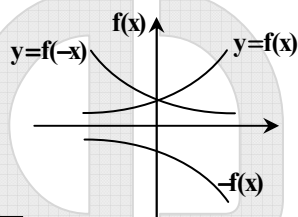
نکته: داریم: (ستونی بخوانید)

	↓	↓	↓	↓
f	صعود ی	صعود ی	نزولی	نزولی
g	صعود ی	نزولی	صعود ی	نزولی
f ∘ g	صعود ی	نزولی	نزولی	صعود ی

اثبات:

$$\begin{aligned}
 x_2 > x_1 &\xrightarrow{\text{g صعودی}} g(x_2) \geq g(x_1) \begin{cases} \text{f نزولی: } f(g(x_2)) \leq f(g(x_1)) \text{ fog نزولی} \\ \text{f صعودی: } f(g(x_2)) \geq f(g(x_1)) \text{ fog صعودی} \end{cases} \\
 x_2 > x_1 &\xrightarrow{\text{g نزولی}} g(x_2) \leq g(x_1) \begin{cases} \text{f صعودی: } f(g(x_2)) \leq f(g(x_1)) \text{ fog نزولی} \\ \text{f نزولی: } f(g(x_2)) \geq f(g(x_1)) \text{ fog صعودی} \end{cases}
 \end{aligned}$$

نکته: تابع $-f(x)$ و $f(-x)$ از لحاظ صعودی یا نزولی بودن برخلاف $f(x)$ است. (یعنی اگر $f(x)$ صعودی باشد، $f(-x)$ و $-f(x)$ نزولی است.)



مثال: صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید.

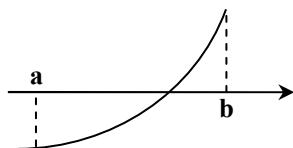
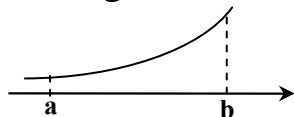
الف) $y = \sqrt{2-3x}$

تابع $f(x) = 2-3x$ نزولی است و تابع $g = \sqrt{x}$ صعودی است در نتیجه $g \circ f$ نزولی است.

ب) $y = \cos^{-1}(2x-1)$

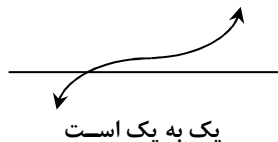
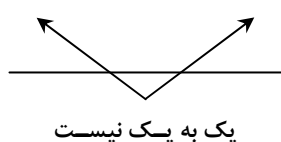
تابع $f(x) = 2x-1$ صعودی و تابع $g(x) = \cos^{-1}(x)$ نزولی است در نتیجه $g \circ f$ نزولی است.

نکته: اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، در این بازه حداکثر یکبار محور x ها را قطع می‌کند.



تابع یک به یک:

تابع تعریف شده بین دو مجموعه یک به یک است هرگاه به هر عضو مجموعه دوم بیش از یک عضو از مجموعه اول نظیر نشود. لذا در یک تابع یک به یک هر عضو برد تصویر تنها یک عضو از دامنه است. به طور کلی یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



از لحاظ ریاضی می توان گفت تابع f یک به یک است هرگاه:

$$x_1, x_2 \in D_f \quad \text{اگر} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

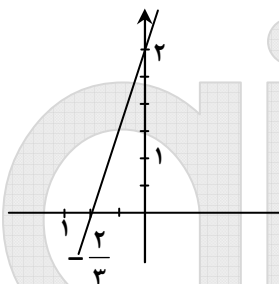
یا می توان گفت:

$$\text{اگر} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک بودن را هم می توان با توجه به نمودار و هم می توان با توجه به شرط بالا تحقیق کرد.

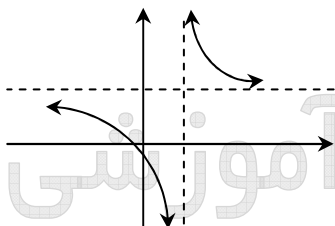
مثال: ثابت کنید توابع زیر یک به یک اند.

الف) $f(x) = 3x + 2$



اثبات جبری: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

ب) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

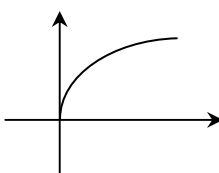


هر خط موازی محور x ها تابع را در یک نقطه قطع می کند.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1$$

$$\Rightarrow -2x_1 + x_2 = -2x_2 + x_1 \Rightarrow 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ج) $f(x) = \sqrt{x}$

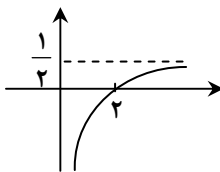


هر خط موازی محور x ها تابع را در یک نقطه قطع می کند.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2} \quad x \geq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$



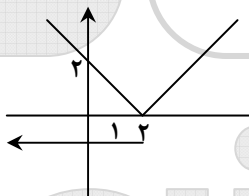
هر خط موازی محور x ها تابع را در یک نقطه قطع می کند.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{2}{x_1^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x_2^2} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

گاهی اوقات توابعی روی همه دامنه‌ی شان یک به یک نیستند. اما با کوچک کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم.

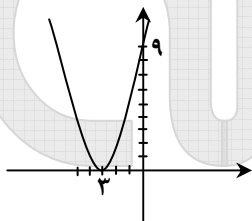
مثال: با محدود کردن دامنه‌ی هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x - 2|$



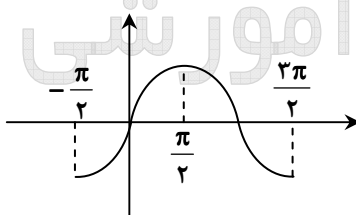
روی بازه‌های $(-\infty, 2]$ و $[2, +\infty)$ جداگانه یک به یک است.

ب) $y = (x + 3)^2$



روی بازه‌های $(-\infty, -3]$ و $[-3, +\infty)$ جداگانه یک به یک است.

ج) $y = \sin x$ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$



روی بازه‌های $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ جداگانه یک به یک است.

وارون یک رابطه

اگر در یک رابطه جای مؤلفه‌های اول و دوم هر یک از زوج‌های مرتب را عوض کنیم، وارون رابطه‌ی R به دست می آید.

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \}$$

مثلاً اگر $R = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4) \}$ باشد، آن گاه:

$$R^{-1} = \{ (2, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 1) \}$$

نکات:

۱- دامنه R برد R^{-1} و برد R دامنه R^{-1} است.

۲- در حالتی که رابطه به صورت یک نمودار نمایش داده شده باشد، با پیدا کردن قرینه هر نقطه از نمودار نسبت به خط $y = x$ (نیم‌ساز ربع اول و سوم)، نمودار وارون آن به دست می‌آید.

تابع معکوس یا تابع وارون:

اگر وارون تابعی مانند f ، خود یک تابع باشد، آن را «تابع وارون» f^{-1} می‌نامیم (تابع معکوس). در این صورت f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامند. تابع وارون f را با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم. توجه کنید که f^{-1} یک نماد است و نباید آن را با

$\frac{1}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(a) = b$ آن‌گاه: $f^{-1}(b) = a$ برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینه کنیم. تعریف زوج مرتبی f^{-1} به صورت زیر است:

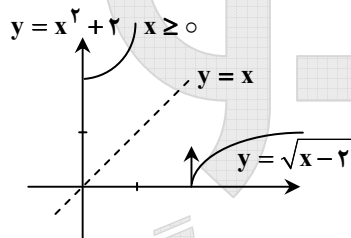
$$f^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in f \}$$

شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری f آن است که f یک‌به‌یک باشد.

یافتن ضابطه تابع وارون:

برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع وارون‌پذیر مانند f در معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

مثال: ضابطه‌ی وارون توابع زیر را بیابید.



الف) $f(x) = \sqrt{x-2}$

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

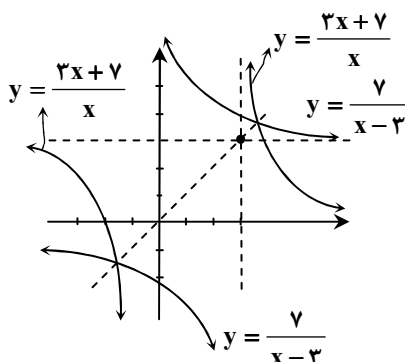
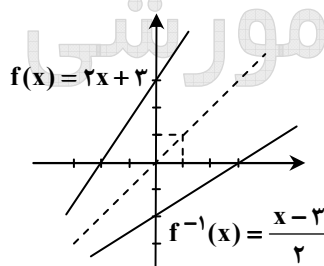
$$y = \sqrt{x-2} \xrightarrow{y \geq 0} x-2 = y^2 \Rightarrow x = 2 + y^2 = f^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

ب) $f(x) = 2x + 3$

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} = f^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$



ج) $f(x) = \frac{3x+7}{x-3}$

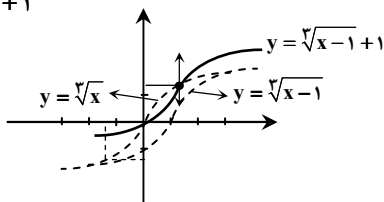
$$y = \frac{3x+7}{x-3} \Rightarrow yx - 3y = 3x + 7$$

$$\Rightarrow 3y = yx - 7$$

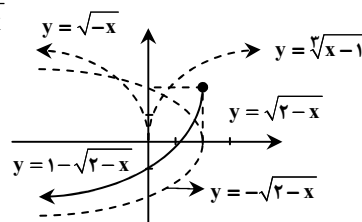
$$x = \frac{3y+7}{y} = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+7}{x}$$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = \sqrt[3]{x-1} + 1$



ب) $y = 1 - \sqrt{2-x}$



مثال: ثابت کنید که تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ روی دامنه $[0, 1]$ یک به یک است و وارون آن را به دست آورید.

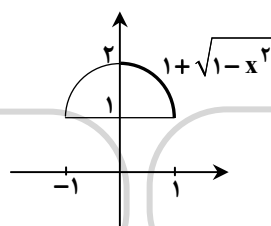
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \sqrt{1-x_1^2} = 1 + \sqrt{1-x_2^2} \Rightarrow 1-x_1^2 = 1-x_2^2 \Rightarrow -x_1^2 = -x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{x_1, x_2 \geq 0} x_1 = x_2 \rightarrow f \text{ یک به یک است.}$$

$$y = 1 + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = y-1 \Rightarrow 1-x^2 = (y-1)^2$$

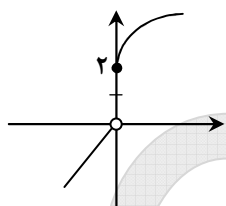
$$\Rightarrow x^2 = 1 - (y-1)^2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{1 - (y-1)^2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{2y - y^2} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{2x - x^2}$$



مثال: در مورد وارون پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \sqrt{x+2} & x \geq 0 \end{cases}$ تحقیق کنید و در صورت

وارون پذیری، وارون آن را بیابید.



برای وارون پذیری توابع چند ضابطه‌ای اولاً تک تک ضوابط باید یک به یک باشند. ثانیاً برد ضابطه‌های مختلف نباید با هم اشتراک داشته باشند.

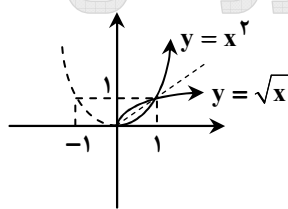
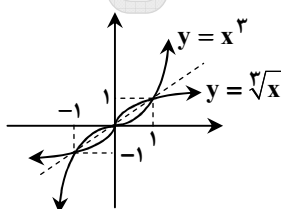
این دو موضوع در مورد تابع فوق‌الذکر هر دو صادقند.

لذا معکوس تک تک ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم. البته دقت کنید دامنه‌ی f^{-1} همان برد f است.

$$\begin{cases} y = x \rightarrow x = y \rightarrow f^{-1}(x) = x & x < 0 \\ y = \sqrt{x+2} \rightarrow \sqrt{x} = y-2 \xrightarrow{y \geq 2} x = (y-2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ (x-2)^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

مثال: نمودار توابع $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ را به کمک نمودار $y = x^2$ و $y = x^3$ رسم کنید.



چون $y = \sqrt{x}$ وارون تابع $y = x^2$ (برای

$x > 0$) و $y = \sqrt[3]{x}$ وارون تابع $y = x^3$

است، خواهیم داشت:

مثال: نشان دهید وارون تابع $y = \frac{ax+b}{x-a}$ بر خودش منطبق است.

$$y = \frac{ax+b}{x-a} \Rightarrow xy - ay = ax + b \Rightarrow x(y-a) = ay + b$$

$$\Rightarrow x = \frac{ay+b}{y-a} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{ay+b}{y-a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x-a}$$

نکته: در حالت کلی در صورتی که در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ ، $a = -d$ باشد، وارون f بر خودش منطبق است. (از لحاظ

نمودار مرکز تقارن منحنی روی خط $y = x$ قرار گرفته است.)

مثال: تابع $f(x) = ax + b$ ، $a \neq 0$ داده شده است. همه مقادیر a و b را به ازای آن‌ها: $f^{-1}(x) = f(x)$ باشد، را بیابید.

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

$$\Rightarrow ax + b = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \quad \left. \begin{array}{l} \text{برای آن که دو عبارت متحد باشند،} \\ \text{باید ضرایب یکسان داشته باشند.} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \pm 1 \\ b = -\frac{b}{a} \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

یعنی اگر وارون یک تابع خطی بخواهد بر خود تابع منطبق باشد، باید این خط بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد.

مثال: اگر $y = m_1x + h_1$ و $y = m_2x + h_2$ معادله‌ی دو خط باشد که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید:

$$m_1 m_2 = 1$$

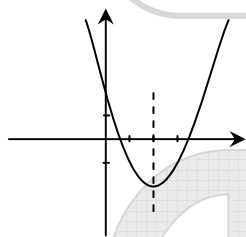
در واقع یکی از این دو خط وارون دیگری است:

$$y = m_1x + h_1 \Rightarrow x = \frac{y-h_1}{m_1} = \frac{1}{m_1}y - \frac{h_1}{m_1} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{m_1}y - \frac{h_1}{m_1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{m_1}x - \frac{h_1}{m_1} \quad \text{باید دو عبارت متحد باشند.} \quad m_2x + h_2 \Rightarrow \frac{1}{m_1} = m_2 \Rightarrow m_1 m_2 = 1 - \frac{h_1}{m_1} = h_2$$

مثال: تابع $y = x^2 - 4x + 2$ را به دو جزء یک به یک تفکیک کنید و در هر بخش

معکوس آن را جداگانه بیابید.



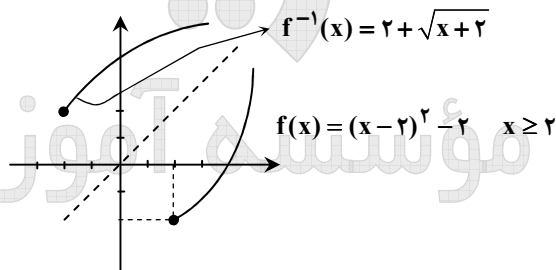
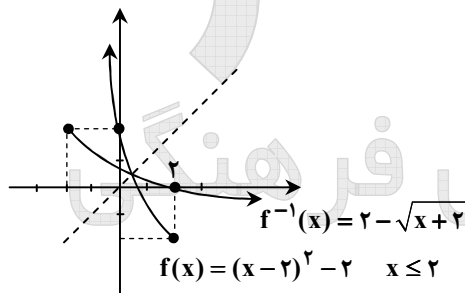
$$y = (x-2)^2 - 2$$

برای $x \geq 2$ و $x \leq 2$ تابع یک به یک است و خواهیم داشت:

$$(x-2)^2 = y+2 \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{y+2}$$

$$x \geq 2 \rightarrow x-2 \geq 0 \xrightarrow{\sqrt{y+2} \geq 0} x-2 = \sqrt{y+2} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y+2}$$

$$x \leq 2 \rightarrow x-2 \leq 0 \xrightarrow{-\sqrt{y+2} \leq 0} x-2 = -\sqrt{y+2} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y+2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+2}$$



نکات وارون یک تابع:

۱- اگر f^{-1} وارون f باشد، داریم:

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

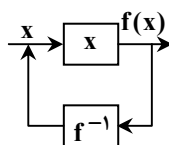
$$R_f = D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$x \in D_f$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$x \in D_{f^{-1}}$$



۲- داریم:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x) \quad ۳$$

۴- وارون یک تابع صعودی تابعی صعودی و وارون یک تابع نزولی، تابعی نزولی است.

مثال: اگر $f = \{(1, 3), (2, 4)\}$ باشد، f^{-1} را به دست آورید، سپس $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ را نیز بیابید. آیا این دو تابع همواره برابرند؟

$$f^{-1} = \{(3, 1), (4, 2)\}$$

$$f^{-1} \circ f = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

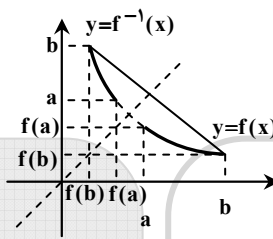
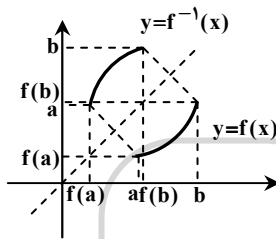
$$f \circ f^{-1} = \{(3, 3), (4, 4)\}$$

$$D_f = \{1, 2\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{3, 4\}$$

دقت می کنید که هر دو تابع نسبت به دامنه تعریفشان همانی اند، اما با هم برابر نیستند.

۵- اگر $f(x)$ روی $[a, b]$ نزولی باشد. $f^{-1}(x)$ روی $[f(b), f(a)]$ نزولی است.



راه حل کلی یافتن برد توابع معکوس پذیر:

همان طور که گفتیم برای هر تابع و معکوس آن همواره:

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

یعنی همواره برد یک تابع معکوس پذیر برابر است با دامنه ی تابع معکوس آن.

از این راه حل در مورد توابع غیر یک به یک نیز می توان گاهی بهره برد، البته با در نظر گرفتن این دقت که معکوس آن ممکن است تابع نباشد.

البته در مورد توابعی که نامساوی هایی در مورد آن ها می دانیم می توانیم از آن نامساوی ها نیز استفاده کنیم (مانند توابع مثلثاتی یا براکتی).

مثال: برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

$$\Rightarrow x^2 y + y = x^2 \Rightarrow x^2 (y - 1) + y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{1 - y}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \xrightarrow{\text{دامنه ی } f^{-1} \text{ را تعیین می کنیم}} \frac{y}{1 - y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1 - y} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1 \Rightarrow R = [0, 1)$$

ب) $y = x^2 - 2x$

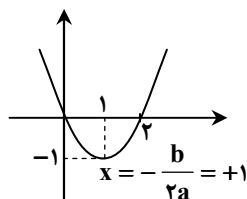
$$(x - 1)^2 = y + 1 \Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{y + 1} \xrightarrow{\text{دامنه ی } f^{-1} \text{ را تعیین می کنیم}} y + 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq -1 \Rightarrow R = [-1, +\infty)$$

راه دوم:

$$y = (x - 1)^2 - 1$$

می دانیم همواره $x^2 \geq 0$ است پس: $y = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$

راه سوم:



ج) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

$$yx = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

حال دامنه‌ی تابع فوق را می‌یابیم:

پس: $\begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq -2 \end{cases}$

راه دوم: نکته: داریم:

$$x + \frac{1}{x} : \begin{cases} \geq 2 & x > 0 \\ \leq -2 & x < 0 \end{cases}$$

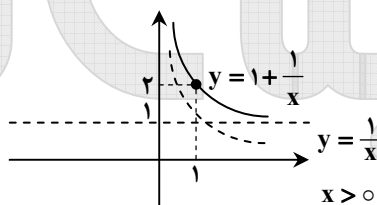
مثال: ثابت کنید $f(x) = \frac{|x| + 1}{|x|}$ زوج است و با استفاده از آن برد تابع را به دست آورید.

f تابعی زوج است:

$$f(-x) = \frac{|-x| + 1}{|-x|} = \frac{|x| + 1}{|x|} = f(x)$$

لذا کافی است برد را برای $x > 0$ به دست آوریم، چون برد قسمت $x < 0$ همان برد $x \geq 0$ است. (به جهت تقارن تابع نسبت به محور y ها)

$$x > 0 : f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$



برد تابع برای $x > 0$ ، $R = (1, +\infty)$ است. پس برد کامل تابع همین است.

البته راه اصلی پیدا کردن برد تابع آن است که دامنه‌ی تابع معکوس تابع $y = f(x)$ را به دست آوریم:

$$y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{x} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1}{y-1} \xrightarrow{\frac{1}{y-1} > 0} f^{-1}(y) = \frac{1}{y-1} > 0 \rightarrow y > 1$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید برد f همان دامنه‌ی f^{-1} است. که یافتن دامنه‌ی f^{-1} نهایتاً منجر به یافتن محدوده‌ی تغییرات y می‌شود.

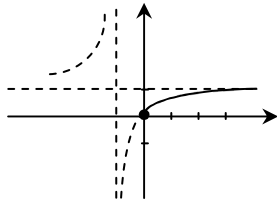
$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f(-x) = \log(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \stackrel{\text{ضرب در مزدوج}}{=} \log\left(\frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = \log\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= \log(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-1} = -\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \text{ فرد است. } f(x)$$

مثال: ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ تابعی فرد است و با استفاده از آن برد f را بیابید.

$$f(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = \frac{-x}{|x|+1} = -f(x) \rightarrow f(x) \text{ فرد است.}$$



اگر برد $f(x)$ در قسمت $x \geq 0$ را بیابیم. برد تابع در قسمت $x < 0$ قرینه برد تابع در $x \geq 0$ است.

$$x \geq 0: y = \frac{x}{x+1}$$

$$R = [0, 1)$$

حالا برای $x < 0$ ، $-1 < y \leq 0$ است. لذا برد تابع $-1 < y < 1$ است.

راه ۲: چون صورت همواره از مخرج کوچکتر است، پس $0 \leq \frac{x}{x+1} < 1$ است.

حالا برای $x < 0$ ، $-1 < y \leq 0$ است. لذا برد تابع $-1 < y < 1$ است.

راه ۳:

$$y = \frac{x}{x+1} \quad x \geq 0$$

$$\Rightarrow yx + y = x \Rightarrow x(y-1) = -y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \geq 0 \Rightarrow \frac{y}{1-y} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1$$

		0	1
y	-	+	+
1-y	+	+	-
y	-	+	-
1-y	-	+	-

تعریف نشده

حالا برای $x < 0$ ، $-1 < y \leq 0$ است. لذا برد تابع $-1 < y < 1$ است.

توابع متناوب:

حرکاتی که الگوی خاصی را تکرار می کنند، حرکت متناوب می نامند.

تابع f را متناوب می نامند، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$(x, x+T \in D_f) \quad f(x+T) = f(x)$$

کوچکترین عدد T با خاصیت بالا را دوره ی تناوب می نامند.

نکات: مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱- دوره تناوب توابع $f(x) = \cos(ax+b)$ ، $f(x) = \sin(ax+b)$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

و دوره تناوب توابع $f(x) = \cot(ax+b)$ ، $f(x) = \tan(ax+b)$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

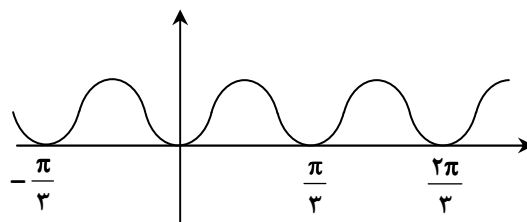
۲- دوره تناوب توابع: $f(x) = \cos^2 ax$ ، $f(x) = \sin^2 ax$ ، $f(x) = |\cos ax|$ ، $f(x) = |\sin ax|$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

۳- دوره تناوب تابع $f(x) = n(x) - [nx]$ برابر $T = \frac{1}{n}$ است.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را به دست آورده و آن ها را رسم کنید.

الف) $f(x) = \sin^2 3x$

$$T = \frac{\pi}{3}$$

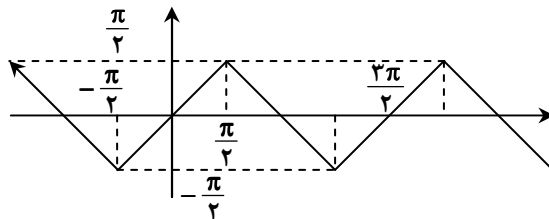


ب) $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$

$T = 2\pi$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}(\sin x) = x \leq \frac{\pi}{2}$

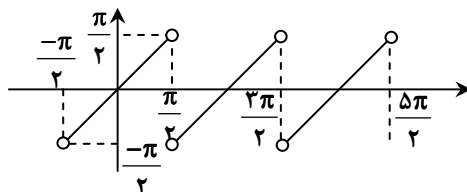
$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}(\sin x) = x - \pi \leq \frac{\pi}{2}$



ج) $f(x) = \tan^{-1}(\tan x)$

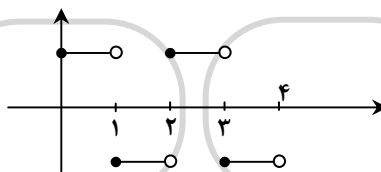
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\infty < \tan x < \infty \rightarrow -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}(\tan x) = x < \frac{\pi}{2}$

$T = \pi$



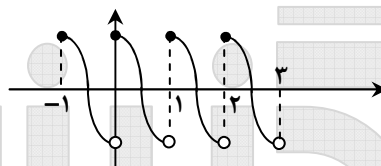
د) $f(x) = (-1)^{[x]}$

$T = 2$



هـ) $f(x) = \cos \pi(x - [x])$

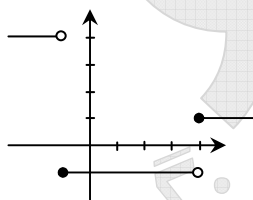
$T = 1$



توابع پله‌ای:

هر تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها تابع ثابت باشد، یک تابع پله‌ای می‌نامند.

مثال: تابع پله‌ای $f(x) = \begin{cases} 5 & x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 4 \\ 2 & 4 \leq x \end{cases}$ را رسم کنید.



تابع جزء صحیح:

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیش‌تر نیست (یعنی یا مساوی با آن است یا کوچک‌تر از آن است). جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می‌شود.

نکات:

۱- همواره داریم:

$[x] \leq x < [x] + 1$

یا

$x - 1 < [x] \leq x$

از این جا نتیجه می‌شود: $0 \leq x - [x] < 1$

۲- اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$[x+k] = [x] + k$$

۳-

$$[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$$

$$[3x] = [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$$

⋮

$$[nx] = [x] + [x + \frac{1}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}]$$

اثبات: برای نمونه اولین رابطه را اثبات می‌کنیم.

اگر α جزء اعشاری عدد باشد:

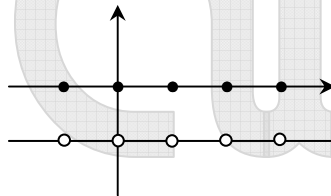
$$x = [x] + \alpha \quad 0 \leq \alpha < 1$$

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \rightarrow [2x] = [2([x] + \alpha)] = 2[x] + [2\alpha] = 2[x] + \begin{matrix} 0 \\ 0 \leq 2\alpha < 1 \end{matrix} = 2[x] \\ \frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \rightarrow [2x] = [2([x] + \alpha)] = 2[x] + [2\alpha] = 2[x] + 1 \\ 1 \leq 2\alpha < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \rightarrow [x] + [x + \frac{1}{2}] = 2[x] \\ \frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \rightarrow [x] + [x + \frac{1}{2}] = 2[x] + 1 \end{cases}$$

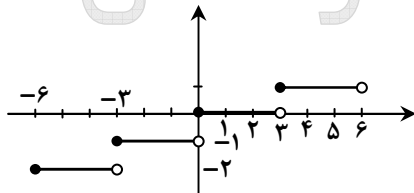
۴-

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

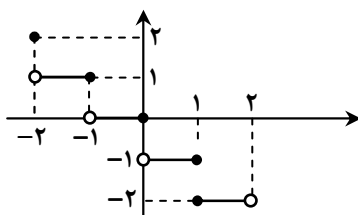


نتیجه:

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -1 - [x] & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

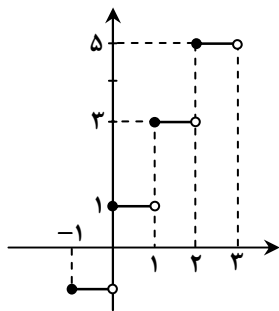


$$f(x) = \left[\frac{x}{3} \right] \quad [-6, 6]$$



$$f(x) = [-x] \quad [-2, 2]$$

مثال: نمودار توابع زیر را در بازه‌های خواسته شده به دست آورید.



$$f(x) = 2[x] + 1$$

$$[-1, 3]$$

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{1 - [3 - \sqrt{x}]}$

$$1 - [3 - \sqrt{x}] = 1 - 3 - [-\sqrt{x}] \geq 0 \Rightarrow [-\sqrt{x}] \leq -2 \Rightarrow -\sqrt{x} < -1 \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1$$

ب) $f(x) = \frac{x}{[x] + [-x]}$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس دامنه‌ی این تابع عبارت است از: $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{x - [x]}{x^2 + x + 1}}$

$$x^2 + x + 1: \Delta = 1 - 4 < 0 \rightarrow \text{مخرج همواره مثبت است}$$

$$f(x) = \frac{1}{||x||}, \quad ||x|| \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \\ |x| \geq 2 \Rightarrow x \leq -2 \\ |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases} \quad D = (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, \infty)$$

مثال: برد تابع $f(x) = \sqrt{x - 9[\frac{x}{9}]}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$f(x) = \frac{1}{||x|| - 1}$$

$$x - 9[\frac{x}{9}] = 9(\frac{x}{9} - [\frac{x}{9}])$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{9} - [\frac{x}{9}] < 1 \Rightarrow 0 \leq x - 9[\frac{x}{9}] < 9$$

$$\Rightarrow 0 \leq 9(\frac{x}{9} - [\frac{x}{9}]) < 9 \Rightarrow 0 \leq x - 9[\frac{x}{9}] < 9$$

مثال: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $[\frac{x}{3}] = \frac{x}{3}$

چون براکت عدد صحیح است، لذا: $\frac{x}{3} = k \in \mathbb{Z}$ پس: $x = 3k$ لذا:

$$[\frac{3k}{3}] = k \Rightarrow \frac{3k}{3} - 1 < [\frac{3k}{3}] \leq \frac{3k}{3} \Rightarrow \frac{3k - 3}{3} \leq k \leq \frac{3k}{3} \Rightarrow 3k - 3 \leq 3k \leq 3k$$

$$\Rightarrow -3 \leq k \leq 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, -1, -2, -3 \Rightarrow x = 0, -3, -6, -9$$

ب) $[x] - [-x] = 7$

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x] - (-[x]) = 7 & x \in \mathbb{Z} \\ [x] - (-[x] - 1) = 7 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x] = \frac{7}{2} \Rightarrow \text{غیرممکن} \\ [x] = 3 \Rightarrow 3 < x < 4 \end{cases}$$

ج) $[\frac{x+2}{x}] = 2$

$$[1 + \frac{2}{x}] = 2 \Rightarrow 1 + [\frac{2}{x}] = 2 \Rightarrow [\frac{2}{x}] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{2}{x} < 2 \Rightarrow 1 < x \leq 2$$

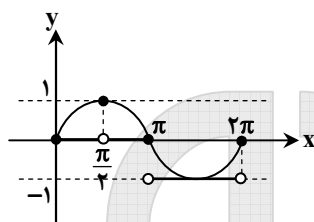
رسم تابع $y = f([x])$ و $y = [f(x)]$

رسم $y = [f(x)]$

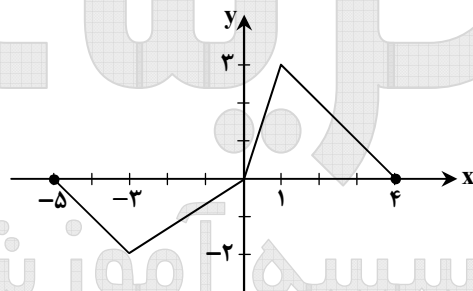
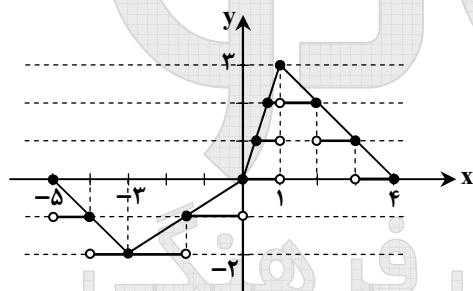
برای رسم $y = [f(x)]$ خطوط $y = k \in \mathbb{Z}$ را به موازات محور x ها رسم می کنیم و سپس در نقاط تقاطع با منحنی قسمتی که بین دو خط محور شده است را روی خط پایینی تصویر می کنیم.

در نواحی ای که تابع صعودی است، ابتدای بازه ها را تو پر رسم می کنیم، و در نواحی ای که تابع نزولی است، انتهای بازه ها را تو پر رسم می کنیم.

مثال: نمودار $y = [\sin x]$ را رسم کنید. (در یک دوره تناوب)



مثال: اگر f به شکل زیر باشد، $y = [f(x)]$ را رسم کنید.



رسم $y = f([x])$

برای رسم $y = f([x])$ خطوط $x = k \in \mathbb{Z}$ را رسم کرده و از ابتدای نقطه‌ی تقاطع هر خط با منحنی پاره‌خطی به طول ۱ واحد به سمت راست رسم می کنیم. همواره نقاط ابتدای بازه ها تو پر خواهند بود (یعنی نقاط سمت چپ تو پرند).

مثال: اگر نمودار $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، $y = f([x])$ را رسم کنید.

