



ریاضی ۲ فصل ۶

سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

ماتریس:

آرایی مستطیلی از اعداد را ماتریس می‌نامند. ماتریس را می‌توان با معرفی اعضای آن که درایه نامیده می‌شوند، یا به وسیله جمله عمومی آن نمایش داد.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

\swarrow تعداد سطرها \searrow تعداد ستون‌ها \swarrow درایه \searrow مرتبه یا رتبه ماتریس

$1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$

مثال: اگر $a_{ij} = i + j^2$ باشد و $A_{3 \times 3}$ باشد، A را معین کنید.

✓ حل:

$$\begin{matrix} a_{11} = 3 & a_{12} = 6 & a_{13} = 11 \\ a_{21} = 5 & a_{22} = 8 & a_{23} = 13 \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

برخی ماتریس‌های پر کاربرد:

(۱) ماتریس مربعی: ماتریسی که در آن تعداد سطرها و ستون‌ها برابر است، در این حالت عناصر a_{ii} را قطر اصلی ماتریس می‌نامند.

(۲) ماتریس ستونی: اگر ماتریسی فقط از یک ستون تشکیل شده باشد، به آن ماتریس، ماتریس ستونی گفته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

(۳) ماتریس سطری: اگر ماتریسی فقط از یک سطر تشکیل شده باشد، به آن ماتریس، ماتریس سطری گفته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

(۴) ماتریس همانی: ماتریس مربعی که قطر اصلی آن ۱ و بقیه درایه‌های آن صفر باشد.

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

(۵) ماتریس صفر: ماتریس $m \times n$ ای که تمام درایه‌های آن صفر باشد.

تساوی دو ماتریس:

دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هر گاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم مساوی باشد.

$$[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

مثال: اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} 4y-1 & 2y \\ x+1 & -y \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2x-1 & x \\ 2y+1 & 1-x \end{bmatrix}$ برابر باشند، x و y کدامند؟

✓ حل:

$$4y - 1 = 2x - 1 \rightarrow x = 2y$$

$$2y = x \rightarrow x = 2y$$

$$\left. \begin{matrix} x+1 = 2y+1 \rightarrow x = 2y \\ -y = 1-x \rightarrow x-y = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2y - y = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2$$

جمع ماتریس‌ها و ضرب در اعداد مقیاسی :

اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، مجموع دو ماتریس، ماتریسی است هم‌مرتبه با آن دو و به صورت :

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

یعنی کافی است درایه‌ها را نظیر به نظیر جمع کنیم .

به ازای هر عدد حقیقی r ماتریس rA به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب در اعداد مقیاسی :

به ازای ماتریس‌های هم‌مرتبه A, B, C و عدد حقیقی r داریم:

۱) $A + (B + C) = (A + B) + C$ شرکت پذیری

۲) $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$ عضو بی اثر

۳) $A + (-A) = \bar{O}$ وجود عضو قرینه

۴) $A + B = B + A$ جابجایی

۵) $(rs)A = r(sA) = s(rA)$

۶) $r(A + B) = rA + rB$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس x را از معادله‌ی $2B + \frac{x}{2} = 3A$ به دست آورید.

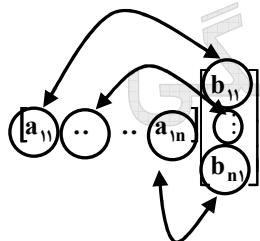
✓ حل :

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \frac{x}{2} = 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 4 & -10 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -5 & -6 & 11 \\ 4 & -19 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -10 & -12 & 22 \\ 8 & -38 & 48 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها :

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی به صورت زیر تعریف می‌شود.



$$[a_{11} \dots a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1}$$

در حالت ضرب یک ماتریس $m \times n$ در یک ماتریس $n \times p$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C = [c_{ij}]_{m \times p} = A_{m \times n} B_{n \times p} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

منظور از c_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام AB است.

نکته: برای آن که ماتریس $A \times B$ قابل تعریف باشد لازم است تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد. در این صورت مؤلفه سطر i ام و ستون j ام ماتریس حاصلضرب از ضرب سطر i ام ماتریس A در ستون j ام ماتریس B حاصل می‌گردد.

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد ، $C = AB$ ، C_{23} کدامست؟

کحل : برای یافتن سطر دوم و ستون سوم حاصل ضرب ، کافی است سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم.

$$C_{23} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 20 + 2 = 22$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد ، حاصل $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدامست؟

کحل :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $(A \times B) - (B \times A)$ کدامست؟

کحل :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A \times B - B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال : اگر $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل $a + b - c - d$ کدامست؟

کحل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix} \rightarrow d = 1 \quad c = 2 \quad b = 3 \quad a = 4 \rightarrow a + b - c - d = 4$$

مثال : اگر داشته باشیم : $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

کحل :

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3+a \\ 3+2b+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow a-3=1 \rightarrow a=4 \\ a+2b+3 &= 1 \xrightarrow{a=4} b=-3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+b=1$$

مثال : با فرض آنکه $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مقدار $x - y$ کدام است ؟

کحل :

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -y+4 \\ y+2x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow -y+4=-1 \rightarrow y=5 \\ y+2x+2 &= 1 \xrightarrow{y=5} x=-3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x-y=-8$$

مثال: ریشه‌های معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \bar{O}$ کدام است؟

حل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -x & 2x \\ -1 & 1 & x \\ x & -8x & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x+2x^2 & -1-x-16x^2 \\ 1+x+2x^2 & -1-x-16x^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+x+2x^2 & -1-x-16x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = 2+2x+4x^2-1-x-16x^2 = 0$$

$$\rightarrow -12x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow (-3x+1)(4x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

خواص ضرب ماتریس‌ها:

اگر $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$, $C_{p \times q}$ باشد آنگاه

۱) $A(BC) = (AB)C$ شرکت پذیری

۲) $A(B+C) = AB+AC$ $(A+B)C = AC+BC$ توزیع پذیری یا پخش

۳) $A(rB) = (rA)B = r(AB)$

۴) $A_{m \times n} I_n = I_m A_{m \times n} = A$ عضو بی اثر ضرب ماتریسی

در فاکتورگیری عبارات ماتریسی هیچگاه اعداد را به تنهایی نمی‌نویسیم بلکه حاصلضرب آن عدد در ماتریس همانی با مرتبه مناسب را می‌نویسیم.

$$A^2 + 2A \neq A(A+2)$$

$$A^2 + 2A = A(A+2I)$$

تذکر: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت حذف‌پذیری ندارد (حتی اگر $A \neq \bar{O}$ باشد) مگر آن که A وارون‌پذیر باشد، یعنی:

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

تذکر: حاصلضرب دو ماتریس غیر صفر می‌تواند صفر شود.

مثلاً:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & b \\ -b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}_{2 \times 2}$$

لذا حاصلضرب دو ماتریس برابر صفر باشد لزومی ندارد یکی از آنها برابر صفر باشد.

ماتریس‌های تعویض‌پذیر یا جابه‌جا شونده:

ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نمی‌باشد. دو ماتریس A و B را تعویض‌پذیر (جابه‌جا شونده) گویند هر

$$AB = BA$$

در حالت کلی اتحادها در مورد ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشند مگر آن که ماتریس‌ها دارای این خاصیت باشند که ضرب آنها دارای خاصیت جابجایی باشد.

مثال: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ مفروض باشند، $a+b$ کدام است در صورتیکه B, A تعویض پذیر باشد؟
 کحل:

$$AB = BA \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2a-15 & 2b-35 \\ 5a+6 & 5b+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+5b & -5a+2b \\ 6+35 & -15+14 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5a+6=41 \rightarrow a=7 \\ 5b+14=-1 \rightarrow b=-3 \end{cases} \rightarrow a+b=4$$

حال این دو عدد موجب برابری سطرهای اول نیز می شوند.

نکته: در حالت کلی ماتریس هایی به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ با هم خانواده های خودشان و ماتریس هایی به صورت $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ نیز با هم خانواده های خودشان تعویض پذیرند. هم چنین ماتریس همانی (I) در هر مرتبه با ماتریس های مربع هم مرتبه با خودش تعویض پذیر است.

توان های طبیعی یک ماتریس مربع:

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، توان های طبیعی آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^2 &= A \times A \\ A^3 &= A^2 \times A \\ &\vdots \\ A^{m+1} &= A^m \times A \end{aligned}$$

فواصل:

$$\begin{aligned} 1) A^m A^n &= A^n A^m = A^{m+n} \\ 2) (A^m)^n &= A^{mn} \\ 3) (\lambda A)^n &= \lambda^n A^n \quad \lambda \in R \\ 4) I^n &= I \end{aligned}$$

اما چون در ضرب ماتریس خاصیت جابه جایی لزوماً برقرار نمی باشد لذا تساوی $(AB)^n = A^n B^n$ لزوماً برقرار نیست.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ عنصر واقع در سطر دوم و ستون سوم A^3 کدام است؟

کحل:

برای به دست آوردن سطر دوم و ستون سوم A^3 ، ابتدا سطر دوم A^2 را با ضرب سطر دوم A در کلیه ی ستون های A به دست می آوریم.

$$A^2 \text{ سطر دوم} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

سطر ایجاد شده را در ستون سوم A ضرب می کنیم.

$$A^3 \text{ ستون سوم} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 3x$$

مثال: اگر $A^2 = 5A - 2I$ باشد، در این صورت A^4 بر حسب A کدامست؟

✓ حل:

$$A^3 = A^2 \cdot A = (5A - 2I)A = 5A^2 - 2A = 5(5A - 2I) - 2A = 25A - 10I - 2A = 23A - 10I$$

$$A^4 = A^3 A = (23A - 10I)A = 23A^2 - 10A = 23(5A - 2I) - 10A = 115A - 46I - 10A = 105A - 46I$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس A^7 کدامست؟

✓ حل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^6 = (-I)^3 = -I^3 = -I \rightarrow A^7 = -A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و رابطه $A^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A^0 \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد، حاصل $b+c$ کدامست؟

✓ حل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \rightarrow A^6 = (A^2)^3 = I^3 = I \Rightarrow A^6 = A^6 A = I A = A$$

$$\rightarrow I \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -c = 1 \\ -d = 6 \\ -a = 2 \\ -b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ d = -6 \\ a = -2 \\ b = -4 \end{cases} \rightarrow b+c = -5$$

مثال: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^2 - A$ کدامست؟

✓ حل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

مثال: هرگاه داشته باشیم $A^2 = xA + yI$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، قدرمطلق تفاضل اعداد x, y برابر کدام است؟

✓ حل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 2x \\ 3x & 4x+y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ 2x=10 \rightarrow x=5 \\ 3x=15 \end{cases} \Rightarrow y=2$$

که این x و y باعث برقراری تساوی $4x+y=22$ نیز می‌شوند، پس این تساوی قابل قبول است.

$$|x-y|=3$$

دترمینان:

دترمینان یک ماتریس 2×2 به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ آن گاه دترمینان ماتریس $A \times B$ چقدر است؟

✓ حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -10 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow |AB| = 7 \times 14 - (6)(-10) = 98 + 60 = 158$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} m & -1 \\ -2 & m+1 \end{bmatrix}$ و $|A| + 2 = |A - I|$ باشد، m کدام است؟

✓ حل:

$$A - I = \begin{bmatrix} m & -1 \\ -2 & m+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 & -1 \\ -2 & m \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} |A - I| &= m(m-1) - 2 = m^2 - m - 2 \\ |A| + 2 &= m(m+1) - 2 + 2 = m^2 + m \end{aligned} \right\} \Rightarrow m^2 - m - 2 = m^2 + m \rightarrow 2m = -2 \rightarrow m = -1$$

مثال: اگر $|A| \neq 0$ ، دترمینان ماتریس $A_{2 \times 2}$ باشد، آن گاه دترمینان ماتریس $\frac{2}{|A|} A$ کدام است؟

✓ حل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\frac{2}{|A|} A = \begin{bmatrix} \frac{2}{|A|} a_{11} & \frac{2}{|A|} a_{12} \\ \frac{2}{|A|} a_{21} & \frac{2}{|A|} a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \left| \frac{2}{|A|} A \right| = \frac{4}{|A|^2} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \frac{4}{|A|^2} \times |A| = \frac{4}{|A|}$$

نکته: با توجه به همین مسأله می‌توان در حالت کلی برای ماتریس‌های 2×2 گفت:

$$|\lambda A_{2 \times 2}| = \lambda^2 |A_{2 \times 2}| \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ماتریس وارون یا ماتریس معکوس:

اگر به ازای ماتریس مربعی A ، ماتریس منحصر به فرد B وجود داشته باشد به گونه‌ای که $AB = BA = I$ آنگاه B را معکوس ماتریس A نامیده و با A^{-1} نمایش می‌دهند. توجه کنید که A^{-1} عضو معکوس ضرب ماتریس می‌باشد، اما $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$. لذا $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

قضیه: معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته: شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری ماتریس A آن است که $|A| \neq 0$.

نکات و خواص:

$$1) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$2) (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \quad \lambda \neq 0$$

$$3) (A^{-1})^{-1} = A$$

توجه: رابطه $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ لزوماً برقرار نمی‌باشد.

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ با چه شرطی وارون پذیر است؟

کحل:

شرط وارون پذیری ماتریس این است که: $|A| \neq 0$

$$\rightarrow |A| = (a+1)(a+2) - 2 = a^2 + 3a + 2 - 2 \neq 0 \rightarrow a(a+3) \neq 0 \rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ، حاصل ab کدام است؟

کحل:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$a = -1$$

$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

چون $AA^{-1} = I$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 2-4b \\ 0 & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow a = -1$$

$$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

مثال: اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A کدامست؟

✓ حل:

$$(A^{-1})^{-1} = A \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{12+21} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{6}{33} & -\frac{3}{33} \\ \frac{7}{33} & \frac{2}{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left(\frac{1}{33}\right)^2 (6 \times 2 + 21) = \frac{1}{33}$$

نکته: جالب است بدانید در حالت کلی $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ است.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A - A^{-1}$ کدام ماتریس است؟

✓ حل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 8 - 7 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A| = -1$ ، A^{-1} کدامست؟

✓ حل:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس $(AB)^{-1}$ کدامست؟

✓ حل:

$$(AB)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: می‌توانستیم از رابطه $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ نیز بهره بگیریم.

مثال: اگر $2A + I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $2A^{-1}$ چقدر است؟

✓ حل:

$$2A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3.5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |2A^{-1}| = 2$$

مثال: با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ مقدار a کدام باشد تا دترمینان ماتریس A^{-1} برابر ۲ باشد؟

✓ حل:

$$A^{-1} = \frac{1}{a+2} \begin{bmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{(a+2)^2} (a+2) = \frac{1}{a+2} = 2 \Rightarrow a+2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

نکته: می توان از رابطه ی $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ نیز بهره گرفت:

$$\frac{1}{2} = a + 2 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ باشد عنصر واقع بر سطر دوم و ستون اول در وارون ماتریس $2A$ کدام عدد است؟

✓ حل:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow (2A)^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1 & -0/5 \end{bmatrix}$$

نکته: می توان از رابطه ی $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ نیز بهره گرفت:

$$(2A)^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1 & -0/5 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه جواب معادله ی $AX = B$ کدام است؟

✓ حل:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow IX = X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(A^2)^{-1}$ کدام است؟

✓ حل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{49-48} \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow |(A^2)^{-1}| = 49-48=1$$

مثال: اگر A یک ماتریس 2×2 معکوس پذیر باشد و در رابطه $A^2 = 3A + I$ صدق کند، دترمینان ماتریس $A - A^{-1}$ کدام است؟

✓ حل:

$$A^2 = 3A + I \Rightarrow A(A - 3I) = I$$

چون معکوس یک ماتریس در صورت وجود منحصر بفرد است، لذا ماتریس $A - 3I$ معکوس ماتریس A است که با ضرب کردن

$$A \text{ در آن حاصل برابر } I \text{ شده است، لذا: } A^{-1} = (A - 3I)$$

پس:

$$A - A^{-1} = A - (A - 3I) = 3I \rightarrow |A - A^{-1}| = |3I| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

کاربرد های ماتریس:

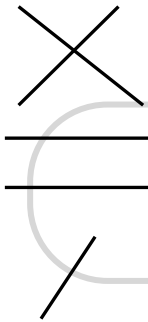
دستگاه دو معادله دو مجهول :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

بیان ماتریسی دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت زیر است :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

تعبیر هندسی دستگاه فوق معادله ی دو خط در صفحه است لذا :



(۱) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow$ دو خط متقاطعند \Leftarrow دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

(۲) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ دو خط موازی اند \Leftarrow دستگاه جواب ندارد.

(۳) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ دو خط منطبق اند \Leftarrow دستگاه بی شمار جواب دارد.

به بیان دیگر: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ دستگاه جواب ندارد (یا بی شمار جواب دارد)

مثال : دستگاه $\begin{cases} mx + 2y = 4 \\ (1-m)x + 3y = 5 \end{cases}$ با چه شرطی برای m فقط یک جواب دارد؟

✓ حل :

$$\frac{m}{1-m} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow 3m \neq 2 - 2m \Rightarrow 5m \neq 2 \Rightarrow m \neq \frac{2}{5}$$

مثال : اگر دستگاه $\begin{cases} (2m-1)x - y = 1 \\ -5x + (n-2)y = 2 \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد ، مقدار $n-m$ چقدر است؟

✓ حل :

$$\left. \begin{aligned} \frac{2m-1}{-5} = \frac{-1}{n-2} = \frac{1}{2} &\Rightarrow 2m = -\frac{2}{2} \rightarrow m = -\frac{3}{4} \\ n-2 = -2 &\rightarrow n = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow n-m = \frac{3}{4}$$

مثال : به ازای چه مقدار از m ، دستگاه معادلات زیر فاقد جواب (مبهم) می شود ؟

$$\begin{cases} (m-1)x - 3y = 2m+2 \\ -x + (m+1)y = m \end{cases}$$

✓ حل :

$$\frac{m-1}{-1} = \frac{-3}{m+1} \neq \frac{2m+2}{m} \Rightarrow m^2 - 1 = 3 \rightarrow m^2 = 4 \rightarrow m = \pm 2$$

$$\begin{cases} m = 2 \rightarrow \frac{-3}{2+1} \neq \frac{2+2}{2} \rightarrow m = 2 \quad \text{قابل قبول است} \\ m = -2 \rightarrow \frac{-3}{-2+1} \neq \frac{-2+2}{-2} \rightarrow m = -2 \quad \text{قابل قبول است} \end{cases}$$

مثال : به ازای چند مقدار برای m دستگاه $\begin{cases} (m+1)x - 2y = m^2 - 2 \\ (m-3)y + 3x = -1 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

حل :

$$\frac{m+1}{3} = \frac{-2}{m-3} \neq \frac{m^2-2}{-1}$$

$$m^2 - 2m - 3 = -6$$

$$m^2 - 2m + 3 = 0$$

این معادله جواب ندارد ($\Delta < 0$)، یعنی دو خط همواره متقاطعند و این دستگاه هرگز فاقد جواب نیست.

روش‌های حل دستگاه دو معادله دو مجهولی (در صورت وجود جواب منمصر به فرد) :

(۱) روش حذفی :

برای حل دستگاه دو معادله دو مجهول می‌توان یکی از متغیرها را بین دو معادله حذف نمود که در این صورت جواب‌های

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{دستگاه}$$

به صورت زیر در می‌آید:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

این روش به دستور کرامر مشهور است.

(۲) روش ماتریس وارون :

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

مثال : جواب‌های دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ را بدست آورید.

حل :

روش اول: (روش حذفی) دو دستگاه را از هم کم می‌کنیم:

$$4y = 4 \rightarrow y = 1 \rightarrow 2x - 1 = 1 \rightarrow x = 1$$

روش دوم: (روش کرامر)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

روش سوم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال : در دستگاه $\begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ y^2 + xy = 10 \end{cases}$ مقدار مثبت x کدام است؟

✓ حل :

$$\begin{cases} x(x+y) = 6 \\ y(y+x) = 10 \end{cases} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{6}{10} \rightarrow y = \frac{5}{3}x \rightarrow x^2 + x(\frac{5}{3}x) = 6 \Rightarrow 3x^2 + 5x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

مثال : مقدار x از دستگاه معادلات $\begin{cases} \frac{xy}{2x+y} = \frac{5}{3} \\ \frac{xy}{y-x} = -\frac{5}{7} \end{cases}$ کدام است؟

✓ حل :

$$\frac{\frac{xy}{2x+y}}{\frac{xy}{y-x}} = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{7}} = -\frac{7}{3} \rightarrow \frac{y-x}{2x+y} = -\frac{7}{3} \Rightarrow 3y - 3x = -14x - 7y \Rightarrow 10y = -11x \rightarrow y = -\frac{11}{10}x$$

$$\frac{x(-\frac{11}{10}x)}{2x - \frac{11}{10}x} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{-\frac{11}{10}x^2}{\frac{9}{10}x} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = -\frac{9 \times 5}{3 \times 11} = -\frac{15}{11}$$

خزینة دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی