



سایت ریاضی سرا

فهرست کلی مطالب

جزوه کمک آموزشی گام اول
ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۹۱

صفحه

عنوان

۲ * مقدمه

۱ * هندسه

۴ چندضلعی ها

۱۵ چهارضلعی ها

۲۷ تشابه

۴۴ اشکال فضایی

www.riazisara.ir

مقدمه

جزوه‌ای که پیش روی شماست دربرگیرنده‌ی تست‌های برگزیده‌ی نیمه‌ی دوم کتاب هندسه ۱ می‌باشد. برای استفاده‌ی بهتر از این جزوه، لازم است به تذکرات زیر توجه فرمایید:

۱- با توجه به این‌که رویکرد اصلی مؤسسه‌ی آموزشی فرهنگی گزینه دو در اختیار قرار دادن محتواهای آموزشی مناسب‌تر به داوطلبان عزیز می‌باشد و همچنین برای استفاده‌ی بیش‌تر از آموزش‌های الکترونیک و وب سایت مؤسسه در ارائه خدمات و محتواهای آموزشی، بر آن شدیم ضمن غنی‌سازی مجموعه تست‌های آموزشی، جزواتی که تنها دربرگیرنده‌ی تست‌های آموزشی باشد و نکات و روش‌های حل مسائل را در قالب پاسخ‌های تشریحی بیان کرده باشد را در اختیار شما قرار دهیم و درس‌نامه‌های کمک آموزشی را برای استفاده‌ی بیش‌تر علاقمندان بر روی پایگاه اینترنتی مؤسسه به آدرس www.gozine2.ir قرار دهیم تا شما بتوانید با مراجعه به سایت، آن‌ها را از قسمت مربوط به طرح گام اول ۹۰ برداشت نمایید. بدین صورت می‌توانیم به هدف اصلی مان برسیم؛ یعنی تعداد تست‌های بیش‌تری را در این مجموعه به شما ارائه نماییم.

۲- از آن‌جا که مطالب موجود در فصل‌های ۱ و ۲ هندسه ۱ و فصل ۱ هندسه ۲ تا حدودی به هم مربوط و وابسته هستند، جداسازی فصلی مطالب کاری مشکل و غیرمنطقی می‌باشد، لذا بر آن شدیم که با تفکیک موضوعی مباحث، مطالب موجود در این فصول را منظم کرده و در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. این موضوعات مشترک و به هم پیوسته عبارتند از:

۱- زاویه و خواص مربوط

۲- مثلث، قضایای کلی، مساحت، اجزای فرعی مثلث، انواع مثلث‌های خاص

۳- چند ضلعی‌ها، چهار ضلعی‌ها و خواص مربوط

لذا در این قسمت‌ها بنا بر این بود که مطالب پراکنده را به‌صورت منسجم در اختیار شما عزیزان قرار دهیم.

بندهای ۱ و ۲ در جزوه‌ی قبلی و بند ۳ در این جزوه تقدیمتان می‌گردد. مطالبی در فصل ۱ هندسه ۲ که مختص به رشته‌ی ریاضی بوده و در هندسه ۱ اشاره‌ای به آن نشده است، متعاقباً در جزوه‌ی هندسه ۲ ارائه می‌شود.

۳- توصیه می‌کنیم بعد از گرفتن جزوه کمک آموزشی از پایگاه اینترنتی مؤسسه گزینه دو و مطالعه‌ی درس‌نامه‌ها یا دیدن DVDهای آموزشی به بررسی تست‌های مربوط به همان قسمت اقدام نمایید.

با آرزوی توفیق روزافزون شما
گروه ریاضی مؤسسه گزینه دو



گزیده

مؤسسه آموزشی فرهنگی

سایت ریاضی سرا

هندسه

www.riazisara.ir

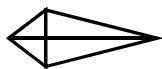
تست‌های طبقه‌بندی شده

خرد ضلعی!

۱- کدام یک از گزینه‌های زیر یک «خم مسطح» نیست؟



(۴)



(۳)

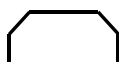


(۲)

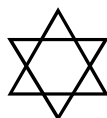


(۱)

۲- کدام یک شکل‌های زیر، یک خم ساده است؟



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۳- کدام یک از گزینه‌های زیر خم بسته محسوب نمی‌شود؟



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۴- کدام یک از گزینه‌های زیر بیان دقیق «ناحیه» است؟

(۲) نقاط روی یک خم ساده

(۱) نقاط درون یک چند ضلعی

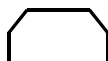
(۴) اجتماع یک خم ساده‌ی بسته با درون آن

(۳) نقاط درون و روی چند ضلعی

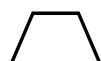
۵- کدام یک از گزینه‌های زیر معرف یک ناحیه‌ی غیر محدب است؟



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۶- مساحت لوزی به ضلع a که یک زاویه‌ی 60° دارد، چند برابر شش ضلعی منتظمی به ضلع a است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

۷- مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع $\sqrt{12}$ ، چند برابر طول کوچک‌ترین قطر این شش ضلعی است؟

$$3\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$12\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$6\sqrt{3} \quad (۱)$$

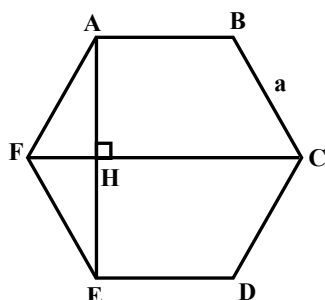
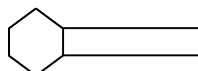
۸- درشش ضلعی منتظم به ضلع a حاصل $AE \times FH$ چقدر است؟

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$a^2 \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \quad (۴)$$

۹- بر روی ضلع مستطیلی شش ضلعی منتظم ساخته‌ایم. اگر مساحت شش ضلعی $\frac{1}{3}$ مساحت مستطیل باشد، طول مستطیل چند برابر عرض آن است؟

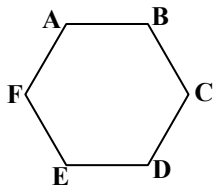
$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

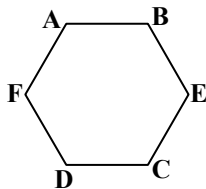
$$\frac{27\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

۱۰- در شش ضلعی منتظم شکل زیر، مساحت چهارضلعی ABDE چند برابر مساحت مثلث BCD است؟



- (۱) ۲
(۲) ۸
(۳) ۴
(۴) $2\sqrt{3}$

۱۱- در شش ضلعی منتظم به ضلع دو، مساحت چهارضلعی ABCD چقدر است؟

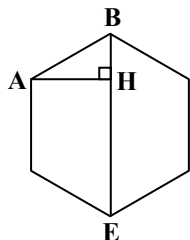


- (۱) $1+2\sqrt{3}$
(۲) $2\sqrt{3}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) $4\sqrt{3}$

۱۲- در شش ضلعی منتظم بزرگ ترین قطر چند برابر کوچک ترین قطر است؟

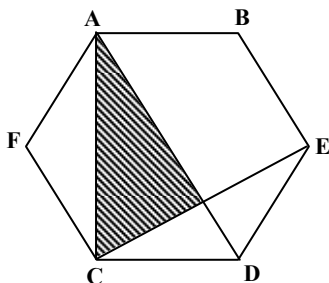
- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۱۳- در شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ مطابق شکل طول عمودی که از A بر قطر BE رسم می شود چقدر است؟



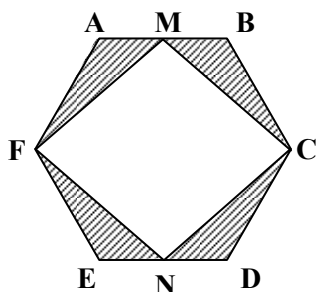
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) $2\sqrt{3}$
(۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۱۴- در شش ضلعی منتظم شکل روبه رو اگر طول کوچک ترین قطر $4\sqrt{3}$ باشد، مساحت ناحیه ی سایه خورده کدام است؟



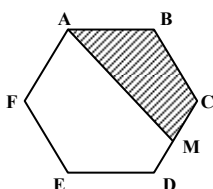
- (۱) $3\sqrt{3}$
(۲) $2\sqrt{3}$
(۳) $6\sqrt{3}$
(۴) $4\sqrt{3}$

۱۵- در شش ضلعی منتظم شکل زیر M و N وسط اضلاع هستند، مساحت سایه زده شده چه کسری از مساحت شش ضلعی است؟



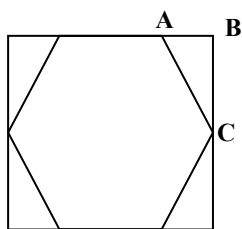
- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{2}{9}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{3}{8}$

۱۶- در شش ضلعی منتظم شکل روبه رو M وسط ضلع AB است، مساحت سایه زده شده چه کسری از مساحت شش ضلعی است؟



- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{10}$

۱۷- شش ضلعی منتظمی در مستطیلی محاط شده است، مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت شش ضلعی است؟



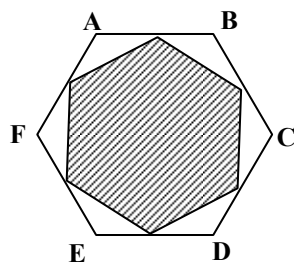
(۱) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{1}{24}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۴) $\frac{1}{12}$

۱۸- در شش ضلعی منتظمی اندازه‌ی قطر بزرگ برابر $4\sqrt{2}$ است. اگر وسط‌های اضلاع این شش ضلعی را به هم وصل کنیم، مساحت شش ضلعی به وجود آمده کدام است؟



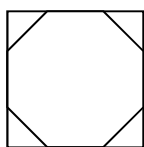
(۱) $6\sqrt{3}$

(۲) $8\sqrt{3}$

(۳) $12\sqrt{3}$

(۴) $9\sqrt{3}$

۱۹- در شکل مقابل مساحت مربع ۲ واحد است. مساحت هشت ضلعی منتظم کدام است؟



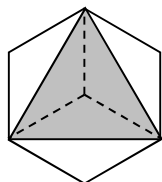
(۱) $4(\sqrt{2}-1)$

(۲) $4(2-\sqrt{2})$

(۳) $2(\sqrt{2}-1)$

(۴) $2(2-\sqrt{2})$

۲۰- اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم شکل مقابل ۴ واحد باشد، مساحت مثلث سایه‌زده چند واحد مربع است؟



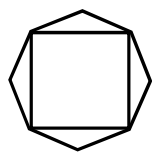
(۱) $12\sqrt{3}$

(۲) $16\sqrt{2}$

(۳) $16\sqrt{3}$

(۴) $18\sqrt{2}$

۲۱- در شکل زیر اگر طول ضلع مربع ۲ باشد، مساحت ۸ ضلعی منتظم کدام است؟



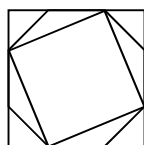
(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) ۴

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{2}+2$

۲۲- در شکل مقابل اندازه‌ی طول اضلاع هشت ضلعی منتظم ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟



(۱) $4(1+\sqrt{2})$

(۲) $4(2+\sqrt{2})$

(۳) $8(1+\sqrt{2})$

(۴) $8(2+\sqrt{2})$

۲۳- مساحت هشت ضلعی منتظم به ضلع $\sqrt{2}$ کدام است؟

(۴) $4+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $4+4\sqrt{2}$

(۲) $2+\sqrt{2}$

(۱) $1+\sqrt{2}$

۲۴- یک هشت ضلعی منتظم و یک ۱۲ ضلعی منتظم در دایره‌ای محاط شده اند، نسبت مساحت‌های آنها کدام است؟

(۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۲۵- اندازه‌ی بزرگ‌ترین قطر ۸ ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲ کدام است؟

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) ۲

(۲) ۴

(۱) $\sqrt{2}-1$

۲۶- وقتی تعداد ضلع‌های یک چند ضلعی از ۳ به n افزایش می‌یابد، مجموع زاویه‌های خارجی حاصل از امتداد متوالی اضلاع:

(۴) نمی‌توان پیش‌بینی کرد.

(۳) ثابت می‌ماند.

(۲) کاهش می‌یابد.

(۱) افزایش می‌یابد.

۲۷- در یک چند ضلعی محدب، دقیقاً سه عدد از زاویه‌های داخلی منفرجه‌اند. این چند ضلعی حداکثر چند ضلع می‌تواند داشته باشد؟

(۴) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۵

۲۸- اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی محدب، تصاعد حسابی می‌سازند. اگر کوچک‌ترین زاویه 100° و بزرگ‌ترین زاویه 140° باشد، تعداد

ضلع‌های چند ضلعی برابر است با:

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۸

(۱) ۶

۲۹- با بریدن مثلث‌های متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه، از گوشه‌های مربعی، یک هشت ضلعی منتظم تشکیل می‌شود، اگر طول هر ضلع مربع یک

واحد باشد، طول ساق هر یک از مثلث‌ها کدام است؟

(۴) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

(۱) $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

۳۰- اگر مساحت دایره‌ی محاط در یک شش ضلعی منتظم 100π باشد، آن گاه مساحت شش ضلعی برابر است با:

(۴) $200\sqrt{3}$

(۳) $200\sqrt{2}$

(۲) ۳۰۰

(۱) ۶۰۰

۳۱- اگر هشت ضلعی منتظمی درون دایره‌ای به شعاع R محاط شود، طول ضلع هشت ضلعی کدام است؟

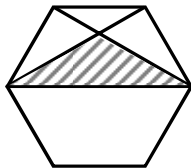
(۴) $\sqrt{2\sqrt{2}+2}R$

(۳) $\sqrt{2\sqrt{2}-2}R$

(۲) $\sqrt{2-\sqrt{2}}R$

(۱) $\sqrt{2+\sqrt{2}}R$

۳۲- در شش ضلعی منتظم شکل روبرو، به ضلع ۳ برخی از اقطار را رسم نموده‌ایم. مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده کدام است؟



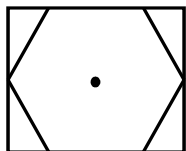
(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $3\sqrt{3}$

(۴) $4\sqrt{3}$

۳۳- در شکل مقابل طول ضلع شش ضلعی منتظم برابر $\sqrt{2}$ است مساحت مستطیل کدام است؟



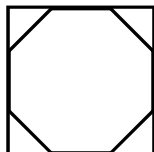
(۱) ۱۲

(۲) ۶

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $8\sqrt{3}$

۳۴- در شکل مقابل، اگر مساحت مربع $6+4\sqrt{2}$ باشد، مساحت هشت ضلعی منتظم کدام است؟



(۱) $2+4\sqrt{2}$

(۲) $6+2\sqrt{2}$

(۳) $8-2\sqrt{2}$

(۴) $4+4\sqrt{2}$

پاسخ‌های تشریحی

خند ضلعی ہا

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

تعریف خم: مجموعه‌ای از نقاط صفحه را که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم خم یا خم مسطح می‌گویند.

۲- گزینه ۴ پاسخ است.

خم ساده: خمی است که از هر نقطه روی آن حداکثر دو مسیر حرکت داشته باشیم.

خم بسته: خمی است که از هر نقطه روی آن حداقل دو مسیر حرکت داشته باشیم.

خم ساده بسته: خمی است که از هر نقطه روی آن دقیقاً دو مسیر حرکت داشته باشیم.

بنابر این: ۱- خم نیست

۲- بسته است ولی ساده نیست ۳- غیر ساده است.

۴- ساده‌ی بسته است

۳- گزینه ۴ پاسخ است.

گزینہ ہا را پررسی، می، کنیم:

۴- خم فیست

۳- خم غیر ساده بسته

۲- خم ساده بسته

۱- خم ساده بسته

۴- گزینه ۴ پاسخ است.

ناحیه: اجتماع نقاط یک خم ساده‌ی بسته با نقاط درون آن یک ناحیه نامیده می‌شود.

۵- گزینه ۴ پاسخ است.

ناحیه‌ی محدب: یک ناحیه را محدب گویند هرگاه پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن ناحیه را به هم

وصل می کند کاملاً درون ناحیه قرار گیرد.

۶- گزینه ۳ پاسخ است.

مساحت لوزی، به زاویه 60° و ضلع a ، ۲ برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a

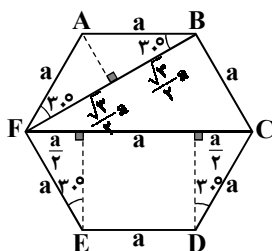
است. مساحت شش ضلعی، هم که ۶ برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a است،

بنابر این:

$$\frac{\text{مساحت لوزی}}{\text{مساحت شش ضلعی}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: در هر شش ضلعی منتظم به طول ضلع a ، داریم:



$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{FB (در شکل مقابل)} & \text{طول کوتاه ترین قطر} = \sqrt{3}a \\ \text{FC (در شکل مقابل)} & \text{طول بلندترین قطر} = 2a \\ \text{مساحت} & = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت}}{\text{طول کوتاه ترین قطر}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} a} = \frac{3}{2} a \stackrel{a=\sqrt{12}}{=} \frac{3}{2} \times \sqrt{12} = 3\sqrt{3}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ است.

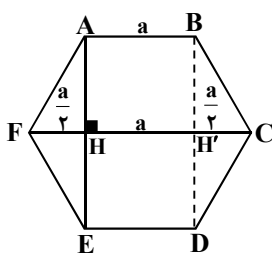
روش اول: کافی است قطر BD رسم کنیم در این صورت HH' با ضلع AB برابر است و چون

FC قطر بزرگ است و طول آن $2a$ است پس $FH = H'C = \frac{a}{2}$ خواهد شد AE هم که قطر

کوچک شش ضلعی است و طول آن $a\sqrt{3}$ است. پس:

$$AE \times FH = a\sqrt{r} \times \frac{a}{r} = \frac{a^2 \sqrt{r}}{r}$$

روش دوم:



$$AE \times FH = r S_{AFE} = r \left(\frac{1}{r} \times \frac{a}{r} \times a \sqrt{r} \right) = \frac{a^2 \sqrt{r}}{r}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

طول مستطیل را a و عرض آن را b در نظر می گیریم. داریم:

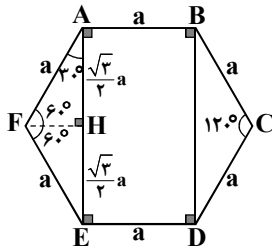
$$\begin{cases} S_{\text{(شش ضلعی)}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 \\ S_{\text{(مستطیل)}} = a \cdot b \end{cases}$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$S_{\text{(شش ضلعی)}} = \frac{1}{3} S_{\text{(مستطیل)}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = \frac{1}{3} a \cdot b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم را a در نظر بگیریم، مطابق شکل، داریم:

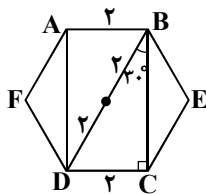


$$S_{ABDE} = AB \times AE = (a)(a\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}$$

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع، در سینوس زاویه ی بین آن دو ضلع، پس:

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \times CD \times \sin \hat{BCD} = \frac{1}{2} (a)(a)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow \frac{S_{ABDE}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = 4$$

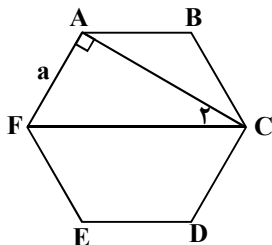
۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\triangle BCD : BC^2 = BD^2 - DC^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = BC \times DC = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\hat{B} = (n-2) \times \frac{180^\circ}{n} = (6-2) \times \frac{180^\circ}{6} = 120^\circ$$

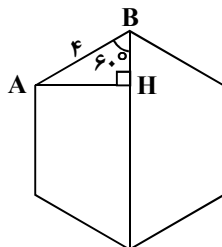
$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{FAC} = 90^\circ, \hat{C}_2 = 30^\circ$$

در مثلث قائم الزاویه ی FAC ضلع مقابل به زاویه ی 30° نصف وتر است. اگر این ضلع را $FA = a$ فرض کنیم، $FC = 2a$ در نتیجه:

$$AC^2 + AF^2 = FC^2 \Rightarrow AC^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{3}a$$

$$\frac{FC}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.



هر زاویه ی درونی شش ضلعی منتظم 120° است بنابراین زاویه ی B از مثلث ABH برابر 60° است.

$$\triangle ABH : \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AH}{4}$$

$$\Rightarrow AH = 4 \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

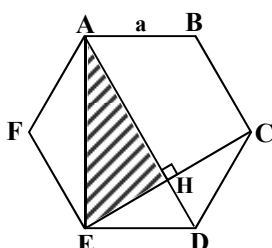
۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

قطر EC بر قطر AD عمود است و در ضمن $EH = \frac{1}{2}(\sqrt{3}a)$ و $AE = \sqrt{3}a$ بنابراین:

$$AH = \sqrt{3a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{3}{2}a \Rightarrow S_{\text{سایه}} = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}a)(\frac{3}{2}a) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8}$$

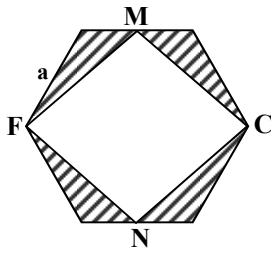
و چون $a = 4$ است پس:

$$S_{\text{سایه}} = 6\sqrt{3}$$



۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

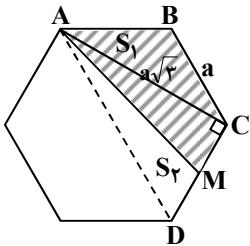
ابتدا باید مساحت لوزی FMCN را حساب کنیم:



$$S_{\text{لوزی}} = \frac{1}{2}(a\sqrt{3})(2a) = \sqrt{3}a^2$$

$$S_{\text{سایه}} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}a^2 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{S_{\text{سایه}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{4a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.



روش اول: S_2 خودش نصف مساحت $\triangle ACD$ است:

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} (a\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{6} S_{\text{کل}}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{\text{کل}} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} S_{\text{کل}}$$

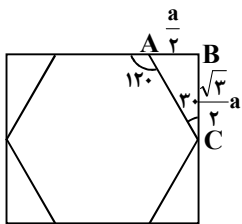
روش دوم: برای محاسبه S_2 ، به روش زیر نیز عمل می‌کنیم:

$$S_2 = \frac{1}{2} (DM)(AD) \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right) (2a) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{6} S_{\text{کل}}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{S_{\text{کل}}}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} S_{\text{کل}}$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر ضلع شش ضلعی را a در نظر بگیریم:



$$AB = \frac{a}{2}, \quad BC = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \\ S_{\text{شش ضلعی}} &= 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\text{شش ضلعی}}} = \frac{1}{12}$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: اگر وسط‌های اضلاع یک n ضلعی منتظم را به هم وصل کنیم یک n ضلعی منتظم کوچک‌تر حاصل می‌شود که اضلاع و محیط آن $\cos \frac{\pi}{n}$ ،

برابر n ضلعی اولیه مساحت آن $\cos^2 \frac{\pi}{n}$ برابر مساحت اولیه است یعنی:

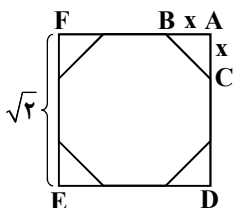
$$a' = a \cos \frac{\pi}{n}$$

$$S' = S \cos^2 \frac{\pi}{n}$$

بنابراین مساحت شش ضلعی کوچک‌تر از $\cos^2 \frac{\pi}{6}$ شش ضلعی اولیه است اما چون $2a = 4\sqrt{2}$ پس: $2a = 4\sqrt{2}$

$$S' = S \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} S = \frac{3}{4} \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) = 9\sqrt{3}$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.



$$S=2 \Rightarrow \text{طول هر ضلع مربع} = \sqrt{2}$$

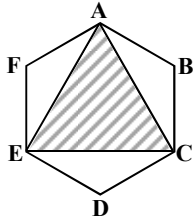
$$\triangle ABC : AB=AC=x \Rightarrow BC=x\sqrt{2}$$

$$x+x\sqrt{2}+x=\sqrt{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}=\sqrt{2}-1$$

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - 4S_{\triangle ABC} = 2 - 4 \times \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} = 2 - 2(3-2\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2}-1)$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

مطابق شکل داده شده توسط خطچین‌ها مساحت شش ضلعی منتظم به شش مثلث هم‌نهشت کوچک تقسیم‌بندی شده است و سه‌تای آن‌ها درون مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. پس نسبت مساحت سایه‌زده به مساحت شش ضلعی منتظم برابر است با:

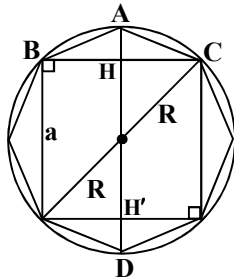


$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a = 6 \Rightarrow \text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } a = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 27\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت مثلث سایه‌زده} = \frac{1}{2} \times 27\sqrt{3} = 13.5\sqrt{3}$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

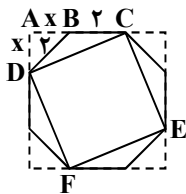


برای پیدا کردن مساحت ۸ ضلعی می‌توانیم دایره‌ی محیطی ۸ ضلعی منتظم را رسم کنیم تا از روی آن بتوانیم ارتفاع AH از مثلث ABC را پیدا کنیم:

$$a = 2 \Rightarrow 2R = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2AH + a = 2\sqrt{2} \Rightarrow AH = \sqrt{2} - 1$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow S_{\text{۸ ضلعی}} = S_{\text{مربع}} + 4S_{ABC} = 2^2 + 4(\sqrt{2} - 1) = 4\sqrt{2}$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.



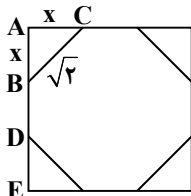
$$\text{مثلث قائم‌الزاویه } ABD : x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\text{مثلث قائم‌الزاویه } ACD : DC^2 = AC^2 + AD^2$$

$$\Rightarrow DC^2 = (x+2)^2 + x^2 = (\sqrt{2}+2)^2 + 2 = 8 + 4\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مربع DCEF} = DC^2 = 8 + 4\sqrt{2} = 4(2 + \sqrt{2})$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ است.

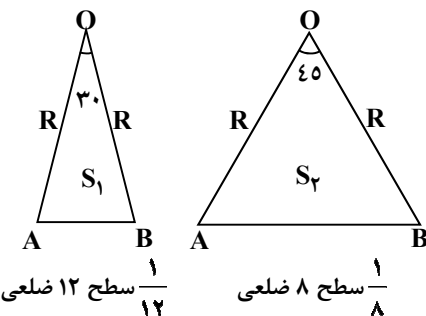


$$\triangle ABC : x^2 + x^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{طول ضلع مربع} = 2x + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = \text{مساحت مربع} - 4(\text{مساحت مثلث } ABC) = (2 + \sqrt{2})^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 4 + 4\sqrt{2}$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است.



همان‌طور که می‌دانید دیگر نیازی به رسم شکل دایره نیست فقط کافی است یکی از مثلث‌های متساوی‌الساقین را بیرون بکشیم و نگاه کنیم:

$$S_1 = \frac{1}{2} (R)(R) \sin 30^\circ \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} (R^2 \sin 45^\circ)}{\frac{1}{2} (R^2 \sin 30^\circ)} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

چون ۸ ضلعی تعداد اضلاعش زوج است پس بزرگ‌ترین قطر آن با قطر دایره یکسان است و هر n ضلعی دیگری که n زوج باشد به همین صورت است.

۲۶- گزینه ۳ پاسخ است.

مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی محدب همواره ثابت و برابر 2π است.

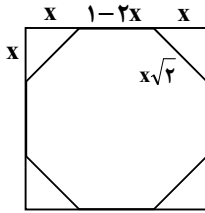
۲۷- گزینه ۲ پاسخ است.

هر زاویه‌ی حاده‌ی داخلی در چند ضلعی محدب به معنی یک زاویه‌ی منفرجه‌ی خارجی و هر زاویه‌ی منفرجه‌ی داخلی به معنی یک زاویه‌ی حاده‌ی خارجی است و از روی این جمله نتیجه گرفتیم که هر n ضلعی محدب حداکثر ۳ زاویه حاده‌ی داخلی دارد، پس اکنون که سه زاویه‌ی منفرجه‌ی داخلی دارد حداکثر می‌تواند ۶ ضلعی باشد.

۲۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow (n-2) \times 180 = \frac{n}{2}(100 + 140) \Rightarrow n = 6$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ است.



$$x\sqrt{2} = 1 - 2x \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 10 \Rightarrow 2R = 20$$

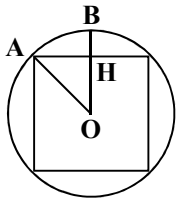
از طرفی قطر دایره با قطر کوچک شش ضلعی منتظم برابر است بنابراین:

$$a\sqrt{3} = 20 \Rightarrow a = \frac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = 6 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right) = 6 \times \frac{\frac{400}{3} \times \sqrt{3}}{4} = 200\sqrt{3}$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ است.

روش اول: ابتدا مربع محاطی دایره را در نظر می‌گیریم. چون OA نصف قطر مربع است، لذا مثلث OHA قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. لذا:

$$AH = OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



لذا:

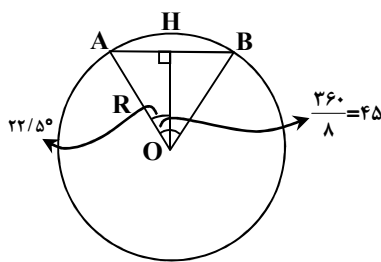
$$BH = R - OH = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)R \Rightarrow AB^2 = BH^2 + AH^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 R^2 + \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)R^2 = (2 - \sqrt{2})R^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2 - \sqrt{2}}R$$

روش دوم:

$$AH = R \sin 22/5^\circ$$

از طرفی می‌دانیم:



$$\sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 2(22/5^\circ)}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

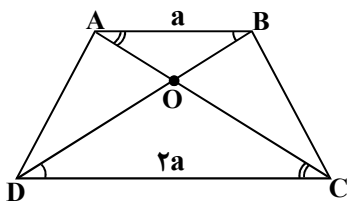
$$\Rightarrow AB = 2AH = 2R \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}R$$

روش سوم: قضیه کسینوس‌ها:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos 45^\circ = R^2 + R^2 - 2R^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = (2 - \sqrt{2})R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ است.

در شش ضلعی منتظم قطر بزرگ ۲a و قطرهای کوچک $\sqrt{3}a$ می‌باشد.



$$AB \parallel CD \rightarrow \triangle AOB \cong \triangle DOC$$

$$\rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

لذا:

$$\frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle AOB}} = \left(\frac{DC}{AB}\right)^2 = (2)^2 = 4$$

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{CO}{AO} = 2$$

$$\frac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{DO}{BO} = 2$$

مساحت $\triangle AOB : S'$

$$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle DOC} + S_{\triangle AOD} = \frac{S_{\text{کل}}}{2}$$

$$\Rightarrow S' + 2S' + 4S' + 2S' = 9S' = \frac{S_{\text{کل}}}{2} \Rightarrow S' = \frac{S_{\text{کل}}}{18} \Rightarrow S_{\triangle DOC} = 4S' = \frac{4}{18} S_{\text{کل}}$$

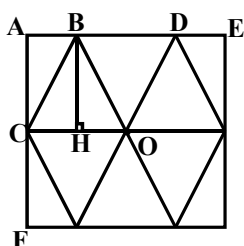
مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با:

$$S = 6 \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \rightarrow S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times (2)^2 = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{4}{18} S_{\text{کل}} = \frac{4}{18} \times \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۳۵ و ۵۲ و ۵۶ کتاب

چون شش ضلعی منتظم است مثلث OBC و مثلث‌های دیگر داخل شش ضلعی همگی متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{2}$ هستند بنابراین داریم:



$$\left. \begin{aligned} AE = 2OC = 2\sqrt{2} \\ AF = 2BH = 2 \times \left(\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{6} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = (2\sqrt{2})(\sqrt{6}) = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

توجه کنید در محاسبه بالا از اینکه ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است استفاده شده است.

راه حل دوم: با توجه به شکل مشخص می‌شود:

$$\text{مساحت مستطیل} = 4S_{\triangle ABC} + 6S_{\triangle OBC} = 4\left(\frac{1}{2}S_{\triangle OBC}\right) + 6S_{\triangle OBC} = 8S_{\triangle OBC} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{3}$$

در بالا از این حکم که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ است استفاده کرده‌ایم.

نکات:

۱- یک شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است.

۲- ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و مساحت آن برابر $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ است.

۳- مساحت مستطیل برابر حاصلضرب طول و عرض آن است.

۳۴- گزینه ۴ پاسخ است.

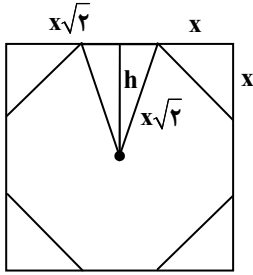
اگر ضلع مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین ایجاد شده را x در نظر بگیریم، ضلع هشت ضلعی منتظم بر حسب ضلع مثلث عبارتست از:

$$a = x + x\sqrt{2} + x = 2x + \sqrt{2}x = (2 + \sqrt{2})x$$

$$S_{\text{مربع}} = 6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2 = a^2 \Rightarrow a = 2 + \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})x$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{ضلع هشت ضلعی} = x\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

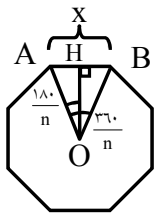
با تقسیم هشت ضلعی به ۸ مثلث متساوی الاضلاع، داریم:



$$S = 8 \times \frac{1}{2} \times h \times x\sqrt{2} = \frac{8}{2} \left(\frac{a}{2}\right) \times x\sqrt{2} = 2(2 + \sqrt{2}) \times \sqrt{2}$$

$$2 \times (2\sqrt{2} + 2) = 4(\sqrt{2} + 1) = 4\sqrt{2} + 4$$

نکته: یکی از راه‌های بدست آوردن مساحت n ضلعی منتظم، تقسیم آن به n مثلث متساوی الساقین و بدست آوردن مساحت این مثلث‌ها می‌باشد.



$$OA \cos \frac{180^\circ}{n} = OH \Rightarrow \frac{OH}{\cos(\frac{180^\circ}{n})} = OA \Rightarrow AH = OA \sin(\frac{180^\circ}{n})$$

$$\Rightarrow AH = \frac{OH}{\cos(\frac{180^\circ}{n})} \sin(\frac{180^\circ}{n}) = OH \tan(\frac{180^\circ}{n}) = \frac{x}{2} \Rightarrow OH = \frac{x}{2} \cot(\frac{180^\circ}{n})$$

$$\Rightarrow S = n \left(\frac{1}{2} OH \times AB \right) = n \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \cot(\frac{180^\circ}{n}) \right) x \right) = \frac{n}{4} x^2 \cot(\frac{180^\circ}{n})$$

چهار ضلعی ها

۱- در متوازی الاضلاع کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) خطی که وسط دو ضلع روبه رو را به هم وصل می کند، محور تقارن است.
 - (۲) زوایای مجاور مکمل اند.
 - (۳) مرکز تقارن نقطه‌ی تلاقی دو قطر است.
 - (۴) فاصله‌ی دو ضلع روبه رو ثابت است.
- ۲- کدام گزینه همواره درست است؟

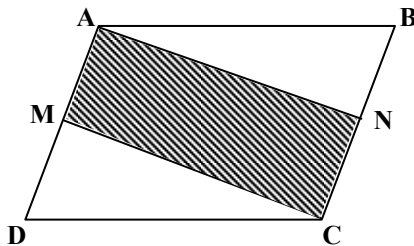
- (۱) اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، متوازی الاضلاع است.
 - (۲) اگر در یک چهارضلعی قطرها با یکدیگر برابر باشند، مستطیل است.
 - (۳) اگر در یک چهارضلعی قطرها بر هم عمود باشند، لوزی است.
 - (۴) اگر در یک چهارضلعی اضلاع برابر باشند، مربع است.
- ۳- کدام قضیه درست نیست؟

- (۱) متوازی الاضلاعی که قطرهاش بر هم عمود باشند، لوزی است.
 - (۲) دوزنقه‌ای که دو قطرش برابر باشند، متساوی الساقین است.
 - (۳) مستطیلی که قطرهاش بر هم عمود باشند، مربع است.
 - (۴) هر چهارضلعی که دو ضلعش برابر باشند، دوزنقه است.
- ۴- کدام گزینه مربع را مشخص می کند؟

- (۱) لوزی ای که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد.
 - (۲) مستطیلی که قطرهاش بر هم عمود باشند.
 - (۳) متوازی الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشند.
 - (۴) دوزنقه‌ای که دو زاویه‌ی قائمه داشته باشد.
- ۵- کدام یک از تعاریف زیر تعریف لوزی نیست؟

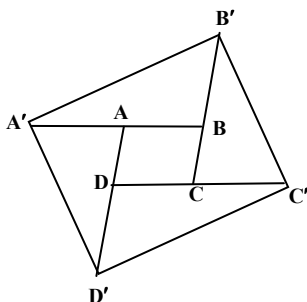
- (۱) متوازی الاضلاعی که اضلاعش با هم مساوی اند.
- (۲) متوازی الاضلاعی که اضلاعش با هم مساوی اند.
- (۳) متوازی الاضلاعی که اضلاعش با هم مساوی اند.
- (۴) متوازی الاضلاعی که قطرهاش منصف یکدیگرند.

۶- چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است و M و N وسط‌های اضلاع AD و BC هستند. سایه‌خورده چه کسری از مساحت متوازی الاضلاع ABCD است؟



- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

۷- اگر اضلاع یک متوازی الاضلاع را در یک جهت به اندازه‌ی خودشان امتداد دهیم، مساحت چهارضلعی حاصل چند برابر مساحت متوازی الاضلاع است؟



- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) ۷

۸- در چهارضلعی ABCD، قطرها یکدیگر را نصف می کنند و اندازه‌های دو ضلع مجاور آن ۴ و ۵ و یکی از زوایای چهار ضلعی 150° است، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر کوچک ترین ضلع کدام است؟

۴/۴

۳/۳

۵/۲

۲/۵ (۱)

۹- در یک لوزی، یکی از قطرهای دو برابر دیگری است، اگر مساحت لوزی S باشد، طول ضلع لوزی بر حسب S کدام است؟

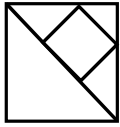
$$\frac{\sqrt{5}S}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}S \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}S \quad (۲)$$

$$\sqrt{S} \quad (۱)$$

۱۰- در شکل روبه رو هر دو چهارضلعی مربع اند، مساحت مربع بزرگ تر، چند برابر مساحت کوچک ترین مثلث است؟



$$12 \quad (۱)$$

$$16 \quad (۲)$$

$$18 \quad (۳)$$

$$24 \quad (۴)$$

۱۱- هر یک از رأس‌های یک مربع بر روی اضلاع مربع دیگری است. اگر نسبت مساحت این دو مربع $\frac{5}{8}$ باشد، رأس مربع کوچک ضلع مربع بزرگ را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

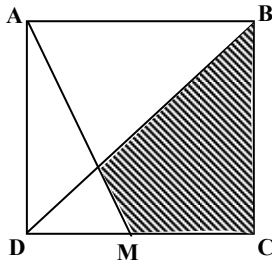
$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

۱۲- در مربع شکل روبه رو M وسط ضلع CD است. مساحت سایه‌خورده چه کسری از مساحت مربع ABCD است؟



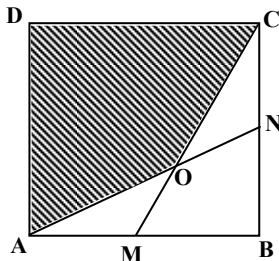
$$\frac{11}{24} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۴)$$

۱۳- در شکل زیر مربع ABCD و M و N وسط اضلاع AB و BC هستند، مساحت سایه زده شده، چه کسری از مساحت مربع است؟



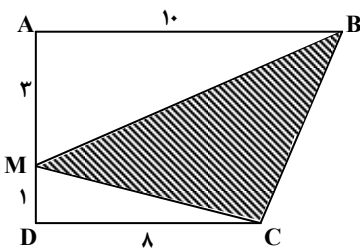
$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

۱۴- در شکل روبه رو ABCD دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است. مساحت سایه‌خورده کدام است؟



$$16 \quad (۱)$$

$$17 \quad (۲)$$

$$18 \quad (۳)$$

$$19 \quad (۴)$$

۱۵- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده‌ایم. در چهارضلعی حاصل طول یک ضلع برابر ۴ و یک زاویه 120° است. مساحت دوزنقه چقدر است؟

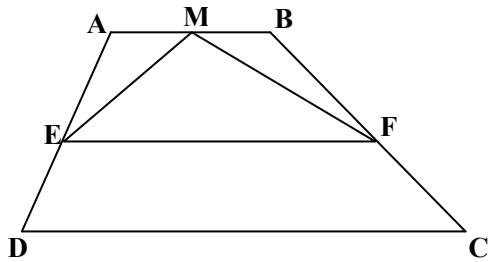
$$16\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$8\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۱)$$

۱۶- در دوزنقه‌ی ABCD نقطه‌ی M وسط ضلع AB، F وسط BC و E وسط AD است، مساحت دوزنقه‌ی ABCD چند برابر مساحت مثلث MEF است؟



است؟

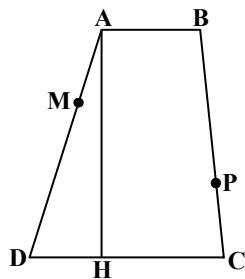
۴ (۱)

۲ (۲)

۸ (۳)

۶ (۴)

۱۷- در دوزنقه‌ی شکل زیر ارتفاع $AH = 9$ و $CD = 2AB = 6$ و $\frac{MD}{MA} = \frac{BP}{PC} = 2$ ، مساحت مثلث MBP چقدر است؟



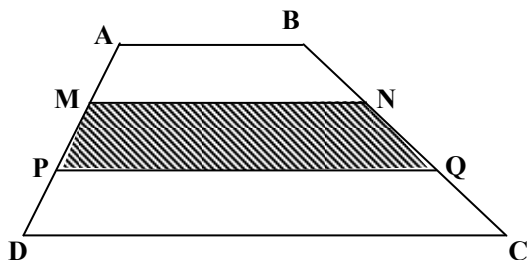
۶ (۱)

۱۲ (۲)

۳ (۳)

۱۸ (۴)

۱۸- در دوزنقه‌ی ABCD پاره خط‌های MN و PQ ساق‌های دوزنقه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده اند، مساحت سایه‌خورده چه کسری از مساحت دوزنقه‌ی ABCD است؟



$\frac{1}{3}$ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۴)

۱۹- در دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای نسبت دو قاعده برابر $\frac{2}{3}$ است. اگر وسط قاعده‌ی کوچک را به وسط ساق قائمه وصل کنیم، مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت دوزنقه‌ی اصلی است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{1}{9}$ (۲)

$\frac{1}{10}$ (۱)

۲۰- در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی به قاعده‌های ۱۲ و ۴ طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است. اوساط اضلاع را به هم وصل می کنیم، محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

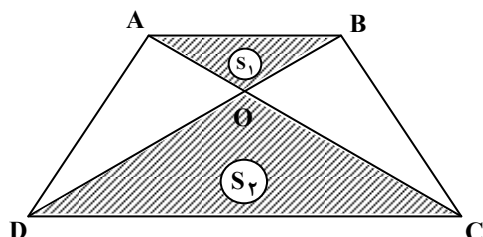
$8\sqrt{10}$ (۴)

$4\sqrt{10}$ (۳)

$8\sqrt{5}$ (۲)

$4\sqrt{5}$ (۱)

۲۱- در دوزنقه‌ی ABCD، محل تلاقی قطرها است. اگر $S_1 = 4$ و $S_2 = 9$ باشد، مساحت دوزنقه‌ی ABCD کدام است؟



۲۴ (۱)

۲۵ (۲)

۲۷ (۳)

۳۰ (۴)

۲۲- دو قطر یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه بر هم عمودند، اگر اندازه‌های دو قاعده ۴ و ۹ باشد، مساحت دوزنقه کدام است؟

۳۹ (۴)

۴۵ (۳)

۴۸ (۲)

۳۶ (۱)

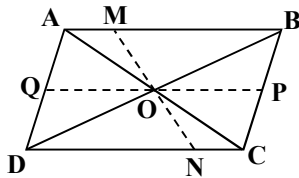
۲۳- اگر قطرهای یک چهارضلعی بر یکدیگر عمود باشند، چهارضلعی همواره مشمول در کدام رده‌ی کلی زیر است؟

(۳) دوزنقه‌ی متساوی الساقین (۴) هیچ کدام

(۲) مربع

(۱) لوزی

۲۴- نقطه O محل برخورد اقطار متوازی‌الاضلاع ABCD است. از O دو پاره خط MN و PQ به دلخواه رسم شده است. چهارضلعی MPNQ کدام است؟



(۱) لوزی

(۲) مستطیل

(۳) دوزنقه

(۴) متوازی‌الاضلاع

۲۵- اگر نقطه M یک نقطه‌ی دلخواه داخل متوازی‌الاضلاع ABCD باشد و مساحت مثلث AMD برابر ۹۰ باشد و مساحت متوازی‌الاضلاع ۲۸۰

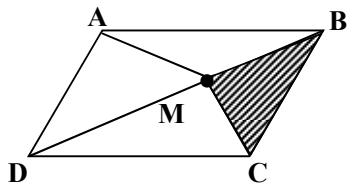
باشد، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟

۶۰ (۱)

۵۰ (۲)

۷۰ (۳)

۸۰ (۴)



۲۶- در دوزنقه‌ی ABCD ($AB \parallel CD$)، نقطه‌ی O محل تلاقی اقطار AC و BD است، اگر مساحت مثلث‌های AOB و COD به ترتیب برابر ۴ و ۹

باشد مساحت دوزنقه‌ی ABCD چقدر است؟

۳۶ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

۲۷- در دوزنقه‌ی ABCD اوساط اضلاع AB و CD را به هم وصل کرده‌ایم. اگر مساحت چهارضلعی MBCN دو برابر مساحت چهارضلعی AMND

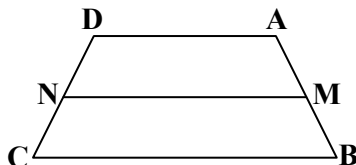
باشد، نسبت $\frac{BC}{AD}$ کدام است؟

۲ (۱)

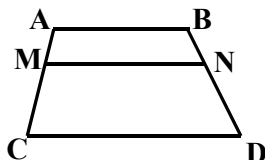
۳ (۲)

۵ (۳)

۴ (۴)



۲۸- در شکل زیر پاره‌خط‌های AB, MN, CD دو به دو موازی یکدیگرند، اگر طول‌های آن‌ها به ترتیب برابر ۴ و ۵ و ۹ باشد، نسبت $\frac{BN}{ND}$ کدام است؟

 $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴)

۲۹- در یک مستطیل وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم. نسبت مساحت مستطیل به مساحت شکل حاصل کدام است؟

۳ (۴)

 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

۲ (۲)

 $\sqrt{2}$ (۱)

۳۰- در یک مستطیل به اضلاع ۶ و ۸ اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم. محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

۵ (۴)

۴۰ (۳)

۱۰ (۲)

۲۰ (۱)

۳۱- اوساط یک چهارضلعی محدب را به هم وصل کرده‌ایم. این چهارضلعی الزاماً کدام است؟

(۴) متوازی‌الاضلاع

(۳) مربع

(۲) مستطیل

(۱) لوزی

۳۲- اوساط اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم. یکی از زوایای چهارضلعی حاصل 60° است. نسبت قطر مستطیل به ضلع بزرگ مستطیل چقدر است؟

(۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۳) ۲

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{3}$

۳۳- برای آن‌که از اتصال نقاط وسط اضلاع یک چهارضلعی، شکل حاصل یک مربع باشد، کدام شرط باید برقرار شود؟

(۱) چهارضلعی باید یک متوازی‌الاضلاع باشد. (۲) قطرها چهارضلعی باید بر هم عمود باشند.

(۳) قطرها چهارضلعی بر هم عمود و با هم مساوی باشند. (۴) چهارضلعی باید یک چهارضلعی محاطی باشد.

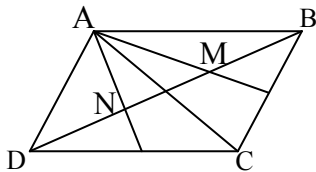
۳۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD از رأس A به وسط دو ضلع BC , CD وصل می‌کنیم تا این خطوط قطر BD را به ترتیب در M و N قطع کنند، اگر $AC = 4$, $BC = 3$, $DC = 5$ باشد، MN کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

(۴) $\frac{2\sqrt{13}}{3}$



۳۵- دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای بر دایره به شعاع ۴ محیط است. اگر اندازه‌ی یکی از ساق‌ها برابر ۱۲ باشد، مساحت دوزنقه کدام است؟

(۴) ۹۶

(۳) ۸۴

(۲) ۷۲

(۱) ۸۰

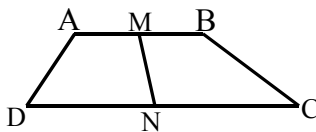
۳۶- در دوزنقه روبه‌رو $\hat{D} + \hat{C} = 90^\circ$ است. اگر M و N اوساط قاعده‌ها، $AB = 3$ و $DC = 5$ باشد، اندازه MN کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $1/5$

(۳) ۲

(۴) $2/5$



۳۷- در مثلث ABC، از نقطه‌ی D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن دو را در M و N قطع کند، MN و AD نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(۱) فقط عمود بر هم (۲) فقط منصف هم (۳) زاویه‌ی بین آن‌ها مکمل \hat{A} (۴) عمود منصف هم

پاسخ‌های تشریحی

چهار ضلعی

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

نکته: متوازی‌الاضلاع محور تقارن ندارد ولی محل تلاقی دو قطر آن مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع است.

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به تعاریف مربع و مستطیل و لوزی و دوزنقه و متوازی‌الاضلاع فقط گزینه‌ی ۱ همواره صحیح است.

۳- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر به جای کلمه‌ی برابر کلمه‌ی موازی به کار می‌رفت می‌توانست درست باشد.

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

۱- لوزی که یک قطرش (طبیعتاً قطر کوچک) با ضلع آن برابر باشد زاویه‌های آن 60° و 120° است و مربع نیست و از قرار گرفتن دو مثلث متساوی‌الاضلاع در کنار هم ایجاد می‌شود.

۲- مستطیلی که قطرهاش بر هم عمود باشند به یقین مربع است.

۳- متوازی‌الاضلاعی که دو قطر مساوی دارد به یقین یک مستطیل است ولی نمی‌توان گفت که الزاماً یک مربع است.

۴- دوزنقه‌ای که ۲ زاویه‌ی قائمه دارد یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است.

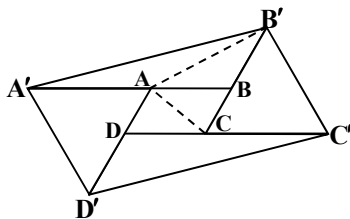
۵- گزینه ۳ پاسخ است.

در هر متوازی‌الاضلاع قطر‌ها منصف یکدیگرند و اختصاص به لوزی ندارد. لوزی چهارضلعی است که: اولاً قطرهاش منصف یکدیگرند و ثانیاً قطر‌ها بر هم عمودند و ثالثاً نیم‌ساز زوایای لوزی نیز می‌باشند.

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

قطر AC را رسم می‌کنیم و چون AN و CM به ترتیب میانه‌های $\triangle ABC$ و $\triangle ACD$ هستند پس مساحت‌های $\triangle ANC$ و $\triangle ACM$ هر کدام $\frac{1}{4}$ مساحت کل می‌باشند و در نتیجه مساحت قسمت‌هاشورخورده $\frac{1}{4}$ مساحت کل است.

۷- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle A'B'B \text{ میانه } B'A \\ \triangle A'B'C \text{ میانه } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_{\triangle A'B'B} = S_{\triangle A'AB'} = S_{\triangle ABC} \\ S_{\triangle A'B'C} = S_{\triangle ABC} \end{array} \right\}$$

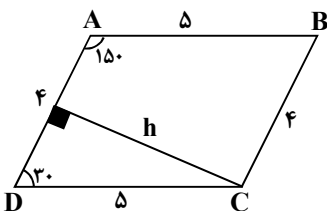
$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle A'B'B} \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = 5S_{ABCD}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ است.

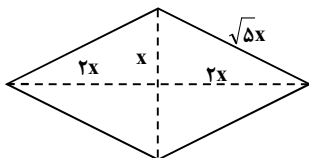
چون اقطار منصفند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 30° نصف وتر است.

$$h = \frac{5}{2} = 2.5$$

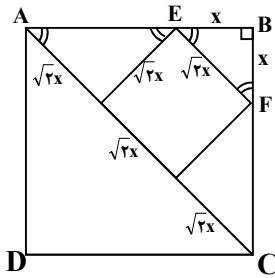


۹- گزینه ۴ پاسخ است.



$$S = \frac{2x \times 4x}{2} = 4x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{S}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}x = \frac{\sqrt{5S}}{2}$$

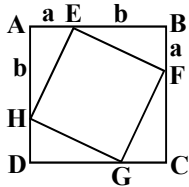


۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر ضلع مثلث کوچک تر را x فرض کنیم، داریم:

$$EF = \frac{1}{3}AC \Rightarrow S_{\triangle BEF} = \frac{1}{9}S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle BEF} = \frac{1}{18}S_{ABCD}$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.



$$ABCD \text{ مساحت مربع } S = AB^2 = (a+b)^2$$

$$EFGH \text{ مساحت مربع } S = EF^2 = a^2 + b^2$$

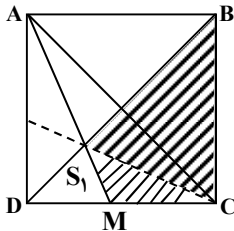
$$\frac{S'}{S} = \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow 8a^2 + 8b^2 = 5a^2 + 5b^2 + 10ab$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2) = 10ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{a}{b} = x \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3, \frac{1}{3}$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.

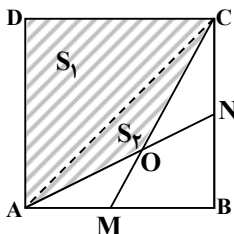
طبق قضیه میانه ها برای مساحت داریم:



$$S_1 = \frac{1}{6}S_{\triangle ACD} = \frac{1}{12}S_{\text{کل}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{سایه زده شده}} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{12}S = \frac{5}{12}S$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ است.



$$S_1 = \frac{1}{2}S$$

طبق نکات و قضایای میانه ها داریم:

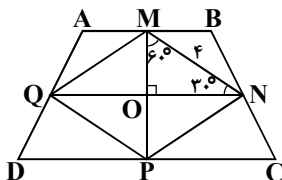
$$S_2 = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6}S$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{2}{3}S$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{کل}} &= \frac{1}{2}(18)(4) = 36 \\ S_{\triangle ABM} &= 15, S_{\triangle MCD} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\text{سایه}} = 36 - 4 - 15 = 17$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ است.



می دانیم اگر اوساط اضلاع هر چهارضلعی دلخواه را به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل متوازی الاضلاع خواهد بود. از طرفی چون قطرهای دوزنقه ای مفروض با هم برابرند پس چهارضلعی MNPQ لوزی است.

چون یک زاویه ی لوزی ۱۲۰° و طول یک ضلع آن MN = ۴ است، مطابق شکل در مثلث قائم الزاویه MNO زاویه ی M برابر ۶۰° و در نتیجه زاویه ی N برابر ۳۰° است و می دانیم

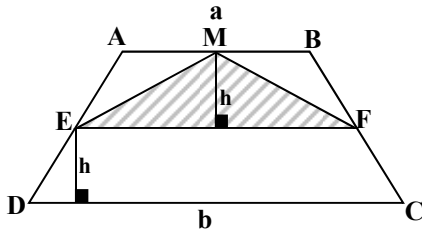
ضلع روبه رو به زاویه ی ۳۰° نصف وتر و ضلع مجاور به آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است. بنابراین:

$$ON = \frac{\sqrt{3}}{2}MN = 2\sqrt{3} \Rightarrow NQ = 4\sqrt{3} \text{ قطر بزرگ و } OM = \frac{1}{2}MN = 2 \Rightarrow MP = 4 \text{ قطر کوچک}$$

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2}(AB + DC) \times MP = NQ \times MP = 4\sqrt{3} \times 4 = 16\sqrt{3}$$

توجه دارید در دوزنقه پاره خطی که اوساط دو ساق را به هم وصل می کند برابر نصف مجموع دو قاعده است.

۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.



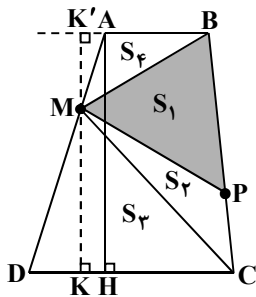
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MFE}} = \frac{\frac{1}{2}(bh)(a+b)}{\frac{1}{2}(h)(\frac{a+b}{2})} = 2$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

مساحت مثلث MBP را S_1 و مساحت مثلث MPC را S_2 در نظر می‌گیریم. می‌دانیم اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BP}{PC} = 2 \Rightarrow S_1 = 2S_2 \text{ یا } S_2 = \frac{1}{2}S_1$$

مساحت مثلث MCD را S_3 و ارتفاع آن را MK و همچنین مساحت مثلث MAB را S_4 و ارتفاع آن را MK' مطابق شکل در نظر می‌گیریم.



$$\frac{MK}{MK'} = \frac{MD}{MA} = 2 \Rightarrow MK = 2MK'$$

$$MK + MK' = 9 \Rightarrow MK' = 3, MK = 6$$

$$S_3 = \frac{1}{2}MK \times DC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

$$S_4 = \frac{1}{2}MK' \times AB = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

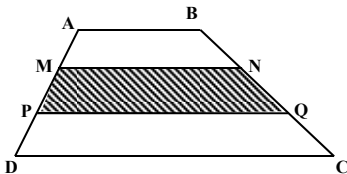
$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2}AH \times (AB + DC) = \frac{1}{2}(9)(3 + 6) = \frac{81}{2}$$

$$\text{مساحت دوزنقه} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow \frac{81}{2} = S_1 + \frac{1}{2}S_1 + 18 + \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}S_1 = 18 \Rightarrow S_1 = 12$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ است.

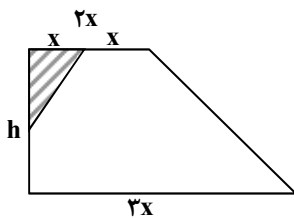
اگر $AB = a$ و $CD = b$ باشد آن‌گاه:

(و ارتفاع دوزنقه باشد)



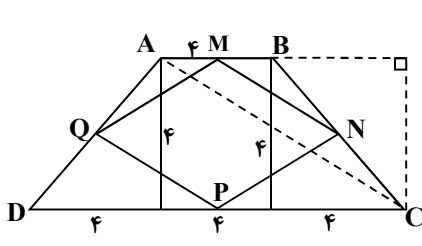
$$\left. \begin{aligned} MN &= \frac{2a+b}{3} \\ PQ &= \frac{a+2b}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{\text{مربع}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{h}{3})(\frac{2a+b+a+2b}{3})}{\frac{1}{2}(h)(a+b)} = \frac{1}{3}$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\frac{S_{\Delta}}{S_{\text{کل}}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{h}{2})(x)}{\frac{1}{2}(h)(\Delta x)} = \frac{1}{10}$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\left. \begin{aligned} \triangle ABC \text{ در } MN \parallel AC \\ BN = \frac{1}{2}BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AC, PQ = \frac{1}{2}AC$$

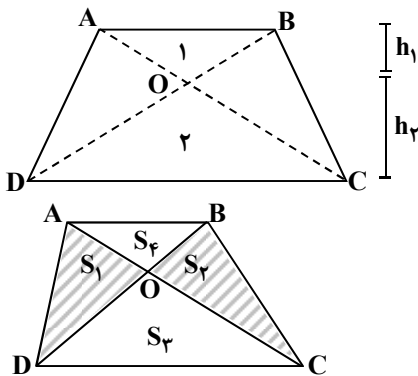
به طریق مشابه:

$$MQ = \frac{1}{2}BD, NP = \frac{1}{2}BD$$

$$\text{مجموع دو قطر دوزنقه} = 2AC = 2\sqrt{4^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ است.

روش اول:



$$S_1 = \frac{1}{2}(h_1)(AB) = 4 \Rightarrow (h_1)(AB) = 8$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(h_2)(CD) = 9 \Rightarrow (h_2)(CD) = 18$$

$$S_{کل} = \frac{1}{2}h(AB + CD)$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 2x \Rightarrow h_2 = 3x \\ AB = 2y \Rightarrow CD = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(\Delta x)(\Delta y) = \frac{25}{2}xy = \frac{25}{2}(2) = 25$$

$$h_1 \cdot AB = 8 \Rightarrow 2x \cdot 2y = 8 \Rightarrow xy = 2$$

روش دوم:

نکته:

$S_{ABD} = S_{ABC}$ (ارتفاعها و قاعده‌ها برابر)

$$\begin{aligned} -S_4 \\ \Rightarrow S_1 = S_2 \quad (1) \end{aligned}$$

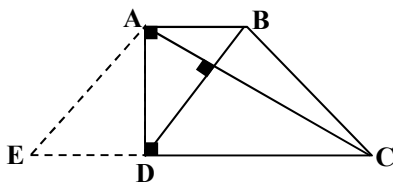
$$\left. \begin{array}{l} \frac{S_1}{S_2} = \frac{OD}{OB} = \frac{S_3}{S_4} \Rightarrow S_1 S_2 = S_3 S_4 \quad (2) \\ \Rightarrow S_1 = \sqrt{S_3 S_4} \quad (3) \end{array} \right\}$$

پس داریم:

$$S_1 = \sqrt{4 \times 9} = 6 \Rightarrow S = 4 + 9 + 2 \times 6 = 25$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ است.

این سؤال نیاز به رسم خط اضافه دارد و آن پاره خط AE است که باید از رأس A موازی BD رسم شود.



$$AD^2 = ED \times CD = AB \times CD$$

حالا معلوم است که AD واسطه‌ی هندسی است بین AB و CD

$$AD^2 = 4 \times 9 \Rightarrow AD = 6$$

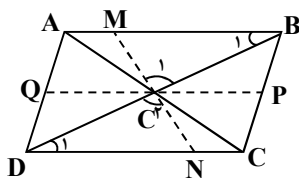
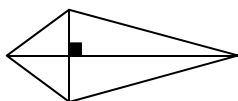
$$S = \frac{1}{2}(6)(12) = 36$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ است.

چهارضلعی‌های زیادی وجود دارند که در رده‌ی فوق قرار می‌گیرند. مثلاً کایت قطرهايش بر هم عمودند ولی نه لوزی است نه مربع و نه دوزنقه!

صفحه ۲۱ کتاب

۲۴- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ BO = OD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{موازی و مورب} \\ \text{متقابل به رأس} \\ \text{خواص متوازی الاضلاع} \end{array} \Rightarrow \widehat{MOB} = \widehat{NOD} \Rightarrow MO = NO$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{POB} = \widehat{QOD} \Rightarrow PO = QO \end{array} \right\} \Rightarrow MPNQ$$

متوازی الاضلاع است با قطرهای MN و PQ.

چهارضلعی که قطرهايش منصف یکدیگرند متوازی الاضلاع است.

$$MO = NO$$

$$PO = QO$$

\Rightarrow راه حل دیگر: نقطه O مرکز تقارن متوازی الاضلاع است پس MPNQ متوازی الاضلاع است.

نکته درسی: هرگاه متوازی الاضلاعی در متوازی الاضلاع دیگر محاط شود محل برخورد اقطارشان برهم منطبق خواهد بود (و بالعکس).

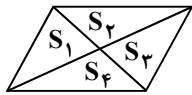
تشریح گزینه‌های نادرست:

گزینه ۲: ممکن است تصور شود $MN = PQ$ در این صورت این گزینه انتخاب شود.

گزینه ۳: ممکن است تصور شود فقط دو ضلع موازیند.

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

در هر متوازی اضلاع دلخواه داریم:



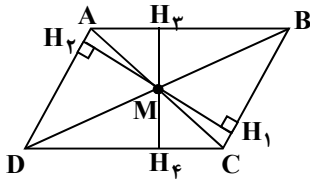
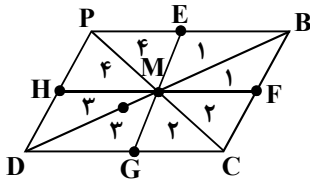
$$S_2 + S_4 = S_1 + S_3$$

زیرا اگر از M خطوطی بر موازات اضلاع متوازی اضلاع رسم کنیم خواهیم داشت:

$$S_{ADM} + S_{BCM} = S_{AMB} + S_{DMC}$$

$$S_{AMD} + S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 140 \Rightarrow S_{BMC} = 140 - 90 = 50$$

راه حل دیگر:



$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle AMD} &= \frac{MH_2 \times AD}{2} \\ S_{\triangle BMC} &= \frac{MH_1 \times BC}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BMC} = \frac{H_1 H_2 + BC}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = H_1 H_2 \times BC$$

$$S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BMC} = 140 \Rightarrow S_{\triangle BMC} = 50$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ است.

مثلث های AOB و COD متشابه اند بنابراین:

$$\left(\frac{AO}{CO} \right)^2 = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COD}} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{2}{3}$$

در مثلث ABC، O نقطه ای واقع بر AC است بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AO}{CO} \rightarrow \frac{4}{S_{\triangle BOC}} = \frac{2}{3} \rightarrow S_{\triangle BOC} = 6$$

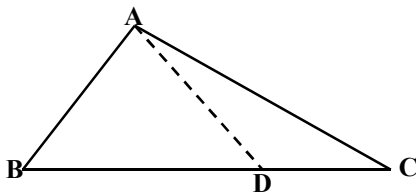
ضمناً در مثلث ACD، O نقطه ای واقع بر AC است بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{OA}{OC} \rightarrow \frac{S_{\triangle AOD}}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow S_{\triangle AOD} = 6$$

بنابراین مساحت کل چهار ضلعی برابر است با:

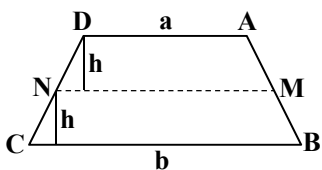
$$S_{ABCD} = 4 + 9 + 6 + 6 = 25$$

نکته درسی:



$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{CD} \text{ داریم: } \text{در شکل روبرو D نقطه ای دلخواهی واقع بر ضلع BC است.}$$

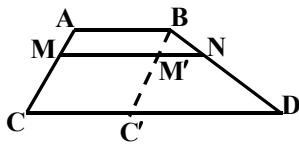
۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.



$$\begin{aligned} MN &= \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + b \right) \times \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + a \right) \times \frac{h}{2}} = 2 \\ \Rightarrow \frac{a+3b}{3a+b} &= 2 \Rightarrow 5a=b \Rightarrow \frac{b}{a} = 5 \end{aligned}$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ است.

از نقطه B خطی به موازات AC رسم می کنیم.



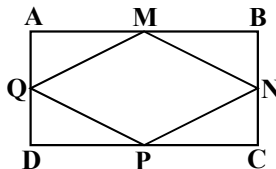
$$M'N = 5 - 4 = 1$$

$$C'D = 9 - 4 = 5$$

$$\frac{BN}{BD} = \frac{M'N}{C'D} \rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{BN}{ND} = \frac{1}{4}$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ است.

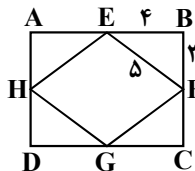
در شکل زیر وسط‌های اضلاع مستطیل ABCD را متوالیاً به هم وصل می کنیم. شکل حاصل یک لوزی است. در نتیجه اگر اضلاع مستطیل را a و b فرض کنیم، داریم:



$$S_{ABCD} = ab$$

$$S_{MNPQ} = \frac{\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ}}{2} = \frac{ab}{2} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{MNPQ}} = \frac{ab}{\frac{ab}{2}} = 2$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ است.

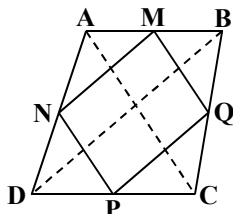


در مثلث EBF داریم: $EF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ، بنابراین طول هر ضلع لوزی EFGH برابر با ۵

واحد و محیط آن ۲۰ واحد است.

۳۱- گزینه ۴ پاسخ است.

از به هم وصل کردن اوساط اضلاع یک چهارضلعی همواره یک متوازی‌الاضلاع حاصل می گردد.



$$\left. \begin{array}{l} \text{M وسط AB} \\ \text{N وسط AD} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD : \frac{MN}{BD} = \frac{1}{2}, MN \parallel BD$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Q وسط BC} \\ \text{P وسط DC} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCD : \frac{PQ}{BD} = \frac{1}{2}, PQ \parallel BD$$

در نتیجه داریم $MN \parallel PQ$ و به همین ترتیب ثابت می شود $MQ \parallel PN$ ، پس چهارضلعی MQPN متوازی‌الاضلاع است.

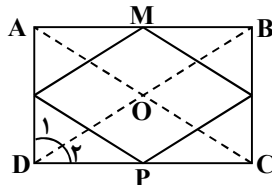
۳۲- گزینه ۴ پاسخ است.

چهارضلعی حاصل از وصل کردن اوساط یک چهارضلعی دلخواه، متوازی‌الاضلاع است. حال اگر اوساط یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل کنیم،

چون اقطار مستطیل با هم برابرند، در نتیجه اضلاع متوازی‌الاضلاع تشکیل شده داخلی نیز با هم برابرند، در نتیجه متوازی‌الاضلاع حاصل، لوزی

است. اگر یک زاویه‌ی لوزی 60° باشد، با توجه به موازی بودن خطوط، زاویه‌ی بین اقطار مستطیل نیز 60° است.

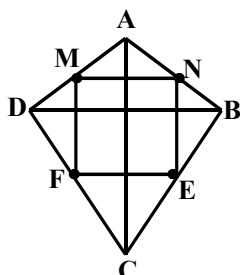
بنابراین:



$$\triangle AOD : \begin{cases} AO = OD \\ \hat{O} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{D}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 = 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.



$$\left. \begin{array}{l} \text{N وسط AB} \\ \text{E وسط BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} NE = \frac{AC}{2} \\ NE \parallel AC \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{N وسط AB} \\ \text{M وسط AD} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} MN = \frac{DB}{2} \\ MN \parallel BD \end{cases}$$

$$\begin{aligned} MN = NE &\longrightarrow AC = BD \\ MN \perp NE &\longrightarrow AC \perp BD \end{aligned}$$

تشابه

۱- اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد، $\frac{2a+4b}{3a+2b}$ کدام است؟

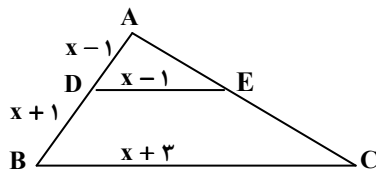
$\frac{4}{3}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲- در شکل روبه رو خط BC با خط DE موازی است، مقدار x کدام است؟



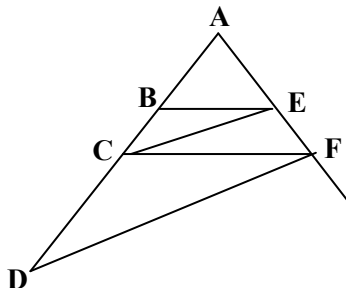
۲ (۱)

۲/۵ (۲)

۳ (۳)

۳/۵ (۴)

۳- در شکل روبه رو $CE \parallel DF$, $BE \parallel FC$ ، اگر $AB = 6$ و $BC = 3$ ، آن گاه اندازه CD کدام است؟



۴/۵ (۱)

۴/۸ (۲)

۵/۴ (۳)

۵/۶ (۴)

۴- در مثلث ABC ، میانه AM و نیم‌سازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم می‌کنیم. تا دو ضلع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کنند.

نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟

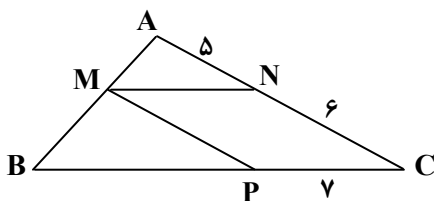
$\frac{AM}{BC}$ (۴)

$\frac{ME}{CE}$ (۳)

$\frac{ME}{MC}$ (۲)

$\frac{AD}{AB}$ (۱)

۵- در شکل روبه رو $MN \parallel BC$ و $MP \parallel AC$ است، اگر $AN = 5$ و $NC = 6$ و $PC = 7$ باشد، BP کدام است؟



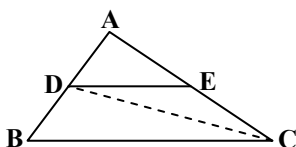
۶/۸ (۱)

۸/۴ (۲)

۸/۲ (۳)

۴/۸ (۴)

۶- در شکل مقابل $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ و $DE \parallel BC$ ، مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟



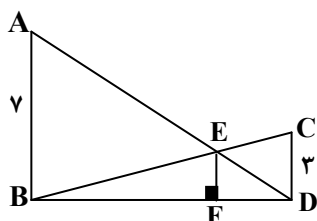
۷۰ (۱)

۷۵ (۲)

۷۸ (۳)

۸۴ (۴)

۷- با توجه به شکل روبه رو AB و CD موازی اند، اندازه EF کدام است؟



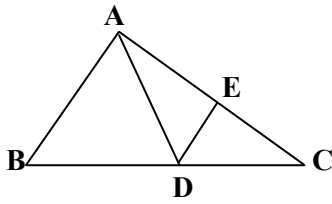
۱/۲ (۱)

۱/۵ (۲)

۲/۱ (۳)

۲/۴ (۴)

۸- در شکل روبه رو $AB = AC = ۲۰$ و AD نیمساز زاویه A است و $DE \parallel AB$ ، اندازه EC کدام است؟



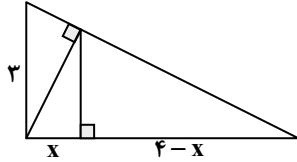
(۱) ۱۰

(۲) ۱۲/۵

(۳) ۱۳/۵

(۴) ۱۵

۹- در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟



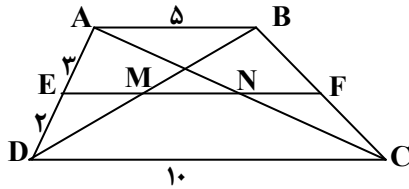
(۱) ۱/۴۴

(۲) ۱/۵۶

(۳) ۱/۶۴

(۴) ۱/۹۶

۱۰- در دوزنقه $ABCD$ ، $EF \parallel AB$ است، اندازه MN کدام است؟



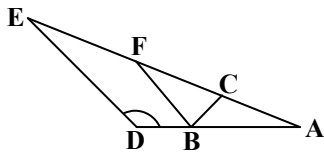
(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۳/۴

۱۱- در شکل مقابل اگر $\hat{C}_1 = \hat{D}_2$ ، $BF \parallel DE$ ، $AC = BD = ۲$ و $AB = ۳$ باشد، آن گاه $\frac{BC}{BF}$ کدام است؟



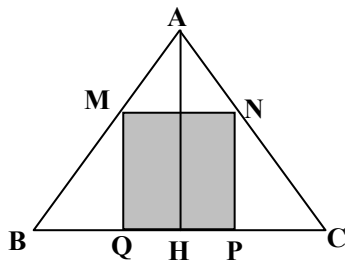
(۱) ۲/۳

(۲) ۳/۲

(۳) ۳/۴

(۴) ۱

۱۲- در مثلث ABC طول ارتفاع $AH = ۴$ و $BC = ۸$ است. مساحت مربع $MNPQ$ برابر است با:



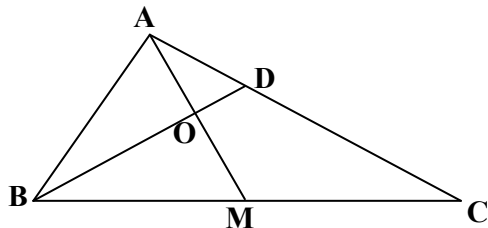
(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۲۳/۳

(۴) ۶۴/۹

۱۳- در شکل روبه رو O وسط میانه AM است، نسبت $\frac{AD}{DC}$ کدام است؟



(۱) ۱/۲

(۲) ۲/۳

(۳) ۳/۴

(۴) ۱/۳

۱۴- اوساط اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل می کنیم، یکی از زوایای چهارضلعی حاصل 60° است، نسبت قطر مستطیل به ضلع بزرگ تر آن چقدر است؟

(۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

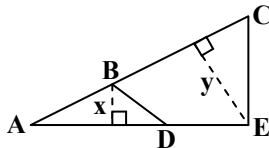
(۳) ۲

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{3}$

۱۵- اندازهی دو ضلع مقابل یک چهارضلعی برابرند، اوساط دو قطر و اوساط دو ضلع دیگر آن همواره رئوس کدام چهارضلعی است؟
(۱) دوزنقه‌ی متساوی الساقین (۲) چهارضلعی محاطی (۳) لوزی (۴) متوازی الاضلاع

۱۶- در شکل مقابل $AD=8$ ، $DE=4$ ، $AB=6$ و $BC=10$ ، نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟



(۲) $\frac{5}{9}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) دو لوزی که یک زاویه‌ی برابر داشته باشند.
(۴) دو مستطیل

۱۷- کدام دو شکل همواره متشابه نیستند؟

(۱) دو مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین

(۳) دو شش ضلعی منتظم

۱۸- کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) دو ضلعی منتظم متشابه‌اند.

(۳) دو لوزی متشابه‌اند.

(۲) دو مستطیل متشابه‌اند.

(۴) دو مثلث قائم الزاویه متشابه‌اند.

۱۹- کدام یک از گزینه‌های زیر غلط است؟

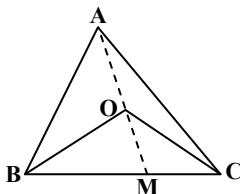
(۱) دو مستطیل که زوایای بین دو قطر آن‌ها مساوی باشند، متشابه‌اند.

(۲) دو مربع در هر حال متشابه‌اند.

(۳) دو مثلث متساوی الساقین که زاویه‌ی رأس برابر دارند، متشابه‌اند.

(۴) دو لوزی در هر حال متشابه‌اند.

۲۰- در شکل مقابل، مساحت مثلث‌های ABC و OBC را به ترتیب S و S' می‌نامیم. نسبت $\frac{OM}{AM}$ برابر کدام است؟



(۲) $(\frac{S'}{S})^2$

(۱) $\sqrt{\frac{S'}{S}}$

(۴) $\frac{S'}{S}$

(۳) $\frac{S-S'}{S}$

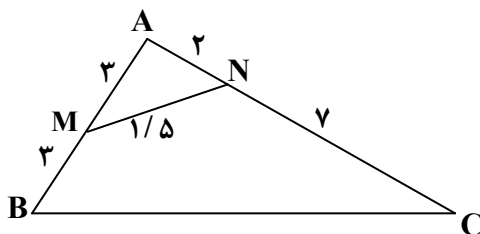
۲۱- در شکل روبه رو، مقدار BC کدام است؟

(۱) ۴

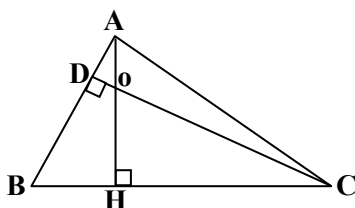
(۲) $\frac{3}{5}$

(۳) ۵

(۴) $\frac{4}{5}$



۲۲- در شکل مقابل AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند. اگر $OH=\frac{1}{3}AD=5$ باشد، طول HC کدام است؟



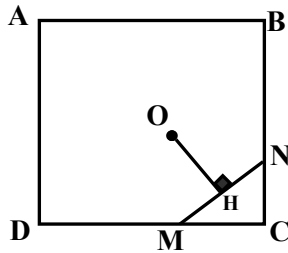
(۱) ۱۶۵

(۲) ۱۷۰

(۳) ۱۷۵

(۴) ۱۸۰

۲۳- در شکل روبه رو ABCD مربع است و $OH = MN = x$ می باشد، اگر ضلع مربع 20cm باشد، x کدام است؟



$$(1) \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) 5\sqrt{3}$$

$$(3) 4\sqrt{5}$$

$$(4) \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

۲۴- در یک مربع به ضلع $4\sqrt{2}$ ، خط واصل از رأس به وسط ضلع آن، قطر مربع را در M قطع می کند. فاصله ی نقطه ی M از وسط مربع کدام است؟

$$(4) 1$$

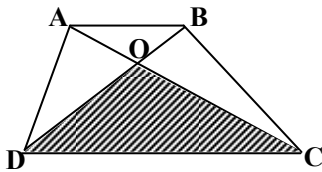
$$(3) \frac{3}{4}$$

$$(2) \frac{4}{3}$$

$$(1) \frac{5}{3}$$

۲۵- در شکل روبه رو ABCD دوزنقه است و قاعده ی بزرگ دو برابر قاعده ی کوچک است، آن گاه مساحت سایه زده شده چه کسری از مساحت

دوزنقه است؟



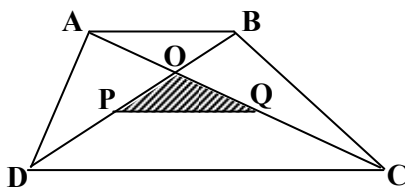
$$(2) \frac{1}{3}$$

$$(1) \frac{1}{9}$$

$$(4) \frac{4}{9}$$

$$(3) \frac{2}{9}$$

۲۶- در دوزنقه ی شکل روبه رو $OA = OQ = QC$ و $DC \parallel PQ$ می باشد، مساحت قسمت سایه زده شده چه کسری از مساحت دوزنقه ی ABCD است؟



$$(1) \frac{1}{9}$$

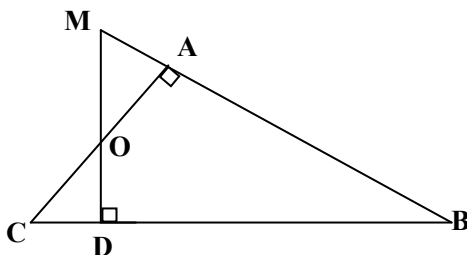
$$(2) \frac{2}{9}$$

$$(3) \frac{1}{8}$$

$$(4) \frac{1}{10}$$

۲۷- در مثلث قائم الزاویه ی ABC که $AC = 6$ و $AB = 8$ می باشد، از نقطه ی M بر امتداد ضلع AB، خطی عمود بر وتر BC رسم می کنیم تا آن

را در D قطع کند، اگر $AM = 2$ باشد، اندازه ی DC کدام است؟



$$(1) 4$$

$$(2) 3$$

$$(3) 2$$

$$(4) 1$$

۲۸- در مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۳ و ۴ فاصله محل تلاقی میانه ها (مرکز ثقل) از وتر کدام است؟

$$(4) \frac{1}{5}$$

$$(3) \frac{3}{5}$$

$$(2) \frac{4}{5}$$

$$(1) \frac{2}{5}$$

۲۹- در مثلث ABC داریم $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 50^\circ$ و ضلع $AB = 18$ ، در مثلث MNP داریم $\hat{N} = 60^\circ$ و $\hat{M} = 70^\circ$ ، اگر مساحت مثلث ABC، برابر

مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چقدر است؟

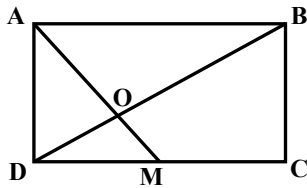
$$(4) 27$$

$$(3) 24$$

$$(2) 16$$

$$(1) 12$$

۳۰- در مستطیل شکل زیر $AB = 4$ و $BC = 3$ می باشد و M وسط ضلع DC است، OD کدام است؟



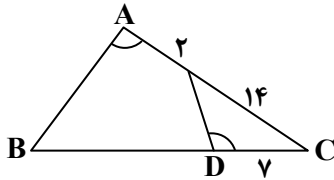
(۱) $\frac{5}{2}$

(۲) $\frac{5}{3}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{5}{4}$

۳۱- در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{D}$ ، طول BD چند واحد است؟



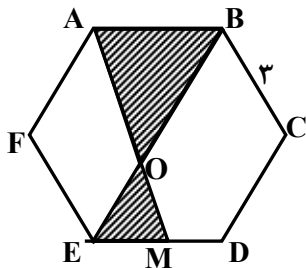
(۱) ۲۲

(۲) ۲۳

(۳) ۲۴

(۴) ۲۵

۳۲- در شش ضلعی منتظم شکل روبه رو اگر M وسط ضلع ED باشد، مساحت سایه زده شده، کدام است؟



(۱) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

(۲) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

۳۳- طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتی متر و طول کوچک ترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اولی، ۲۰ سانتی متر است. محیط مثلث دوم کدام است؟

(۱) ۹۰

(۲) ۹۲

(۳) ۹۳

(۴) ۹۵

۳۴- مستطیلی به مساحت ۲۴ با مستطیلی به ضلع ۳ و قطر ۵ متشابه است. قطر مستطیل اولی چقدر است؟

(۱) $5\sqrt{2}$

(۲) ۱۰

(۳) ۸

(۴) $6\sqrt{2}$

۳۵- مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ را، با رسم خطی موازی با یک ضلع آن، به یک مثلث و یک دوزنقه تقسیم می کنیم. اگر مساحت دوزنقه، نصف مساحت مثلث اولیه باشد، در دوزنقه طول خطی که وسط یک ساق را به وسط ساق دیگر وصل می کند، کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $2 + \sqrt{2}$

(۴) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۶- مثلث قائم الزاویه ای به وتر ۴ و ضلع ۲ با مثلث قائم الزاویه ای به وتر ۸ و ضلع x متشابه است. x کدام است؟

(۱) ۶

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $4\sqrt{3}$

۳۷- قاعده ای یک مثلث ۱۵ سانتی متر است، دو پاره خط موازی با قاعده، متکی بر دو ضلع دیگر رسم می کنیم و مثلث را به سه قسمت با مساحت های مساوی تقسیم می کنیم، طول پاره خط موازی و نزدیک تر به قاعده ای مثلث چند سانتی متر است؟

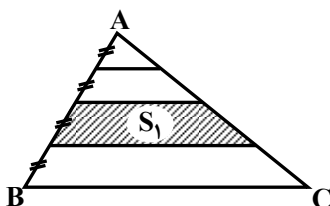
(۱) $5\sqrt{6}$

(۲) ۱۰

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $7/5$

۳۸- در شکل مقابل مساحت مثلث ABC برابر 32cm^2 است و خطوط رسم شده همگی موازی قاعده ای BC هستند و ضلع AC را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده اند، مساحت ناحیه ی سایه خورده کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

(۳) ۸

(۴) ۵

۳۹- مثلثی به اضلاع ۴، ۴ و ۵ با کدام مثلث متشابه است؟

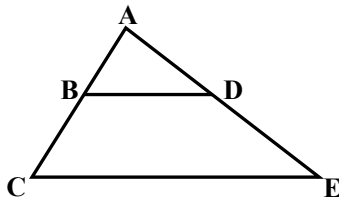
(۱) مثلثی به ارتفاع های ۲، ۲ و ۳

(۲) مثلثی به ارتفاع های ۱۶، ۱۶ و ۲۰

(۳) مثلثی به ارتفاع های ۲۰، ۲۰ و ۱۶

(۴) مثلثی به ارتفاع های ۵، ۵ و ۶

۴۰- در شکل مقابل $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} = \frac{2}{3}$. مساحت دوزنقه $BDEC$ چند برابر مساحت مثلث ABD است؟



$$\frac{21}{4} \quad (1)$$

$$\frac{25}{4} \quad (3)$$

۴۱- کدام گزینه بیانگر دو شکل متشابه نیست؟

(۲) دو مثلث متساوی الساقین که زاویه 30° داشته باشند

(۱) دو پنج ضلعی منتظم

(۴) دو لوزی که هر کدام یک زاویه 70° درجه دارند

(۳) دو مستطیل که نسبت طول به عرض آنها $\frac{1}{3}$ باشد

۴۲- از یک نقطه‌ی دل‌خواه داخل مثلث سه خط به موازات اضلاع رسم می‌کنیم. چند مثلث متشابه در شکل ایجاد می‌شود؟

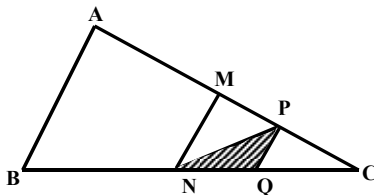
$$5 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

۴۳- در مثلث ABC مطابق شکل، M وسط AC و N وسط BC و P وسط MC و Q وسط NC است. مساحت مثلث NPQ چه کسری از مساحت $\triangle ABC$ است؟



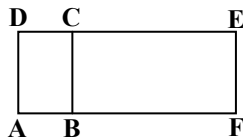
$$\frac{1}{16} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{3}{32} \quad (4)$$

$$\frac{1}{12} \quad (3)$$

۴۴- در شکل دو مستطیل $ABCD$ و $BCEF$ متشابه‌اند. اگر $AB=1$ و $AD=3$ باشد، مساحت $ADEF$ چند برابر $BCEF$ است؟



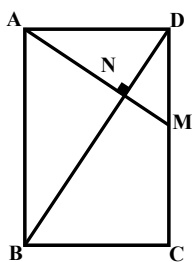
$$\frac{9}{8} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{10}{9} \quad (3)$$

۴۵- در مستطیل $ABCD$ که $AB=2BC$ و $AM \perp BD$ می‌باشد نقطه M ضلع مقابل را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟



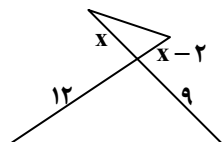
$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

۴۶- در شکل مقابل دو مثلث متشابه‌اند. نسبت مساحت آن دو مثلث کدام است؟



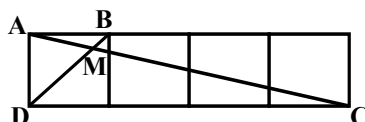
$$\frac{9}{16} \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

۴۷- در شکل مقابل چهار مربع به ضلع واحد کنار هم قرار دارند. طول MB کدام است؟

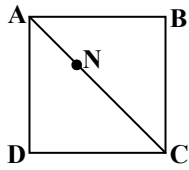


$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{16} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{5} \quad (3)$$



۴۸- در شکل ضلع مربع $AB=6$ و $\frac{NC}{NA}=\frac{3}{2}$ فاصله N از مرکز مربع کدام است؟

(۲) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

(۱) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$

(۴) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

(۳) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$

۴۹- اندازه دو ضلع قائم از مثلث قائم الزویه‌ای ۲ و ۸ است. عمود منصف وتر، ضلع بزرگتر را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. فاصله M تا رأس قائم مثلث کدام است؟

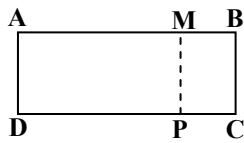
(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) $\frac{15}{4}$

(۱) $\frac{15}{7}$

۵۰- چند نقطه مانند M روی ضلع AB از مستطیل $ABCD$ وجود دارد که اگر از آن نقطه به CD عمود شود و نقطه‌ی P به دست آید، اگر $AB=10$ و $BC=4$ آن گاه دو مستطیل $ABCD$ و $MBCP$ متشابه باشند؟



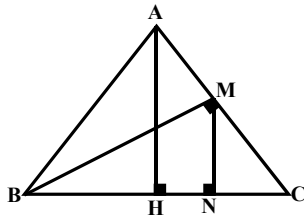
(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

۵۱- در شکل مقابل $AB=AC$ و $AH=3$ و $MN=2$ اندازه NC کدام است؟



(۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) $3\sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{2}$

۵۲- مثلث ABC که در آن زاویه‌های $\hat{A}=30^\circ$ و $\hat{B}=60^\circ$ و $S=20\sqrt{3}$ (مساحت مثلث) است با مثلث $A'B'C'$ که در آن $a'=\sqrt{10}$ (ضلع بزرگ‌تر) می‌باشد متشابه است. نسبت تشابه چقدر است؟

(۴) ۴

(۳) $\sqrt{2}$

(۲) ۸

(۱) ۲

۵۳- در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A}=2\hat{B}$ ، کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟ (ضلع b مقابل زاویه‌ی B است.)

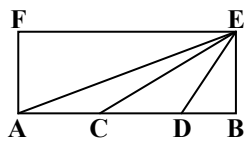
(۴) $a^2 - c^2 = bc$

(۳) $a^2 - b^2 = bc$

(۲) $b^2 = ac$

(۱) $a^2 = bc$

۵۴- طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. از رأس E سه خط به نقاط A و C و D مطابق شکل رسم می‌کنیم. در این صورت: ($AC=CD=DB$)



(۱) $\triangle EAF$ متشابه است با $\triangle EBD$

(۲) $\triangle EBD$ متشابه است با $\triangle EBC$

(۳) $\triangle AED$ متشابه است با $\triangle CDE$

(۴) $\triangle EFA$ متشابه است با $\triangle ECB$

پاسخ‌های تشریحی

تشریح

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$a = \frac{2}{3}b \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}b + 4b}{2b + 2b} = \frac{\frac{16}{3}b}{4b} = \frac{4}{3}$$

راه دوم: می‌توانیم $a = 2$ و $b = 3$ در نظر بگیریم و با عددگذاری حل کنیم.

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

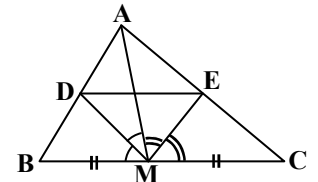
طبق تالس داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x-1}{2x} = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow x+3=2x \Rightarrow x=3$$

۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} BE \parallel CF : \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \\ CE \parallel FD : \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{9}{AD} \Rightarrow AD = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow CD = 4/5$$

۴- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\begin{array}{l} \triangle ABM \xrightarrow{\text{MD نیمساز است}} \frac{AD}{DB} = \frac{AM}{BM} \quad (1) \\ \triangle ACM \xrightarrow{\text{ME نیمساز است}} \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{CM} \quad (2) \\ BM = CM \xrightarrow{(1), (2)} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \end{array}$$

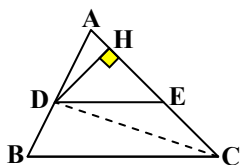
۵- گزینه ۲ پاسخ است.

MNCP متوازی‌الاضلاع است پس:

$$MN = PC = y$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{y}{y+BP} = \frac{5}{11} \Rightarrow BP + y = \frac{yy}{5} = 15/4 \Rightarrow BP = 8/4$$

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا توجه کنید که چون $DE \parallel BC$ ، پس طبق قضیه‌ی تالس:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$$

حال اگر از D، عمود DH را بر AC وارد کنیم، داریم:

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{\frac{1}{2}DH \times AE}{\frac{1}{2}DH \times EC} = \frac{AE}{EC} = \frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{7-3} = \frac{3}{4} = 75\%$$

۷- گزینه ۳ پاسخ است.

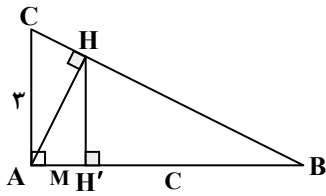
اگر EF را x در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel AB \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{FD}{FD+FB} \Rightarrow \frac{x}{y-x} = \frac{FD}{FB} \\ EF \parallel CD \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{FB}{FB+FD} \Rightarrow \frac{x}{3-x} = \frac{FB}{FD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y-x} = \frac{3-x}{x} \Rightarrow x^2 = (x-3)(x-7) \Rightarrow x = 2/1$$

۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{CD}{BD} \\ \text{نیمساز AD} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CE}{AE} = 3 \Rightarrow AC = 4AE = 20 \Rightarrow AE = 5 \Rightarrow CE = 15$$

۹- گزینه ۱ پاسخ است.



$$AB = AH' + H'B = x + (4 - x) = 4 \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{9 + 16} \Rightarrow BC = 5$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{16}{5}$$

$$HH' \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BH'}{AB} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{4-x}{4} = \frac{\frac{16}{5}}{5}$$

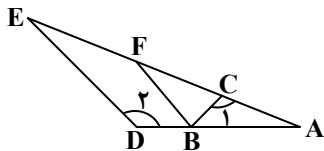
$$\Rightarrow \frac{4-x}{4} = \frac{16}{25} \Rightarrow 4-x = \frac{64}{25} \Rightarrow x = \frac{36}{25} = \frac{144}{100} = 1/44$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left. \begin{aligned} \frac{EN}{10} = \frac{2}{5} &\Rightarrow EN = 4 \\ \frac{EM}{5} = \frac{2}{5} &\Rightarrow EM = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow MN = 4 - 2 = 2$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left. \begin{aligned} BF \parallel DE \text{ و } AD \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{FBA} = \hat{D}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{D}_2 &\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \hat{FBA} = \hat{C}_1 \\ \hat{A} \text{ مشترک} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ABF$$

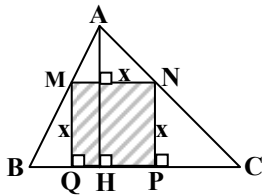


$$\frac{BC}{BF} = \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AB}$$

$$AC = 2, AB = 3 \Rightarrow \frac{BC}{BF} = \frac{2}{3}$$

حال، نسبت تشابه بین دو مثلث را می نویسیم.

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.

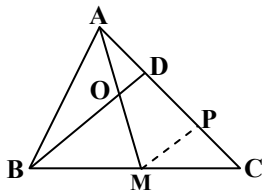


$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x}{BC} &= \frac{AM}{AB} \\ \frac{x}{AH} &= \frac{BM}{AB} \Rightarrow \frac{AH-x}{AH} = \frac{AB-BM}{AB} = \frac{AM}{AB} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{BC} = \frac{AH-x}{AH} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow x = \frac{8}{3} \rightarrow S = x^2 = \frac{64}{9}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ است.

مثل سؤال ۲۸۷، خط اضافه را رسم می کنیم (MP)



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{AD}{AP} = \frac{AO}{AM} = \frac{1}{2} &\Rightarrow AD = PD \\ \frac{CP}{CD} = \frac{CM}{BC} = \frac{1}{2} &\Rightarrow CP = DP \end{aligned} \right\} \Rightarrow AD = DP = PC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ است.

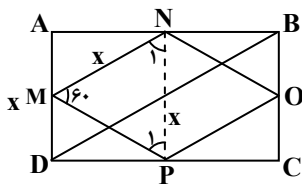
اولاً باید بدانید که شکل حاصل یک لوزی است، پس:

$$MN = MP \Rightarrow N_1 = P_1 = 60^\circ \Rightarrow MN = MP = NP = x$$

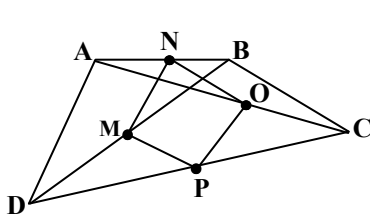
$$MN = x \Rightarrow BD = 2x \Rightarrow AB = \sqrt{3}x$$

فیثاغورس

$$\Rightarrow \frac{\text{قطر}}{\text{ضلع بزرگ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

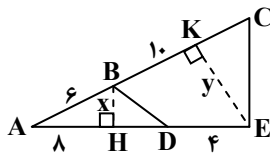


۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.



$$\left. \begin{array}{l} OP \parallel MN = \frac{1}{2} AD \\ MP \parallel ON = \frac{1}{2} BC \\ BC = AD \end{array} \right\} \Rightarrow \text{در } MNOP \text{ هر چهار ضلع با هم برابرند و در نتیجه یک لوزی است.}$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.

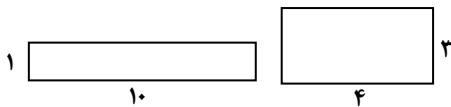


دو مثلث قائم الزاویه AHB و AKE متشابه‌اند زیرا زاویه A در هر دو مشترک است. حال نسبت اضلاع را بین این دو مثلث می‌نویسیم:

$$\frac{BH}{EK} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ است.

مثال نقض می‌آوریم:



۱۸- گزینه ۱ پاسخ است.

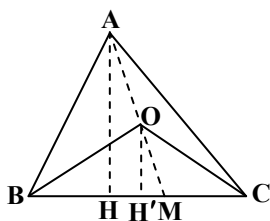
نکته: دو n ضلعی منتظم همواره متشابه‌اند.

۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

دو شکل زمانی متشابه‌اند که اضلاع نظیر به نظیر آن‌ها متناسب و زوایای نظیر به نظیر برابر داشته باشند.

۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

ارتفاع‌های AH و OH' را رسم می‌کنیم، داریم:



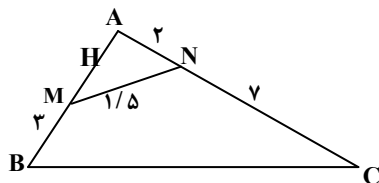
$$OH' \parallel AH \xrightarrow[\text{در مثلث AMH}]{\text{نتیجه قضیه تالس}} \frac{OM}{AM} = \frac{OH'}{AH} \quad (I)$$

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2} BC \times OH'}{\frac{1}{2} BC \times AH} = \frac{OH'}{AH} \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{S'}{S}$$

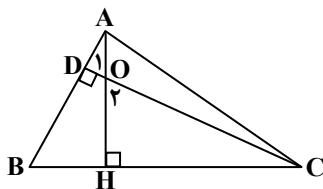
۲۱- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به اندازه‌های روی شکل داریم:



$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 4/5$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ است.

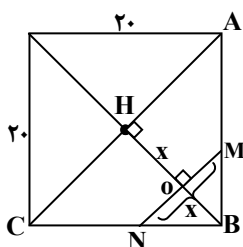


$$OD = \frac{12}{5} = 2/4, OH = 36, AD = 12$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ به رأس مقابل} \\ \hat{D} = \hat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAD \sim \triangle OHC \Rightarrow \frac{OD}{OH} = \frac{AD}{HC}$$

$$\Rightarrow \frac{2/4}{36} = \frac{12}{HC} \Rightarrow HC = \frac{12 \times 36}{2/4} = 180$$

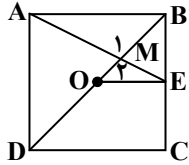
۲۳- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\triangle BMN \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BO}{BH} = \frac{MN}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{10\sqrt{2} - x}{10\sqrt{2}} = \frac{x}{20\sqrt{2}} \Rightarrow 20\sqrt{2} - 2x = x \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.

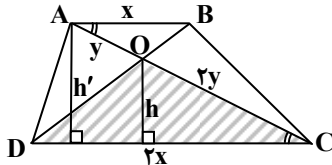


$$OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OM}{MB} = \frac{OE}{AB} \quad (I)$$

$$\triangle ABD : \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow BD^2 = AD^2 + AB^2 = 32 + 32 = 64 \Rightarrow BD = 8 \Rightarrow OB = \frac{1}{2} BD = 4$$

$$(I) \Rightarrow \frac{OM}{OB-OM} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} \Rightarrow \frac{OM}{4-OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2OM = 4-OM \Rightarrow 3OM = 4 \Rightarrow OM = \frac{4}{3}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ است.

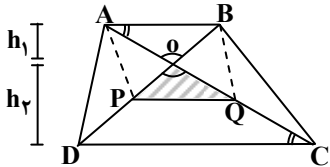


$$\triangle ABO \sim \triangle CDO \begin{cases} AB = x \Rightarrow CD = 2x \\ AO = y \Rightarrow CO = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{CO}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{3} h'$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle CDO}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} h' \cdot 2x}{\frac{1}{2} \cdot h' \cdot 3x} = \frac{4}{9}$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\triangle ABO \cong \triangle PQO \Rightarrow \text{پس هم مساحت نیز می باشند}$$

$$\triangle ABO \sim \triangle CDO, \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{1}{3}$$

نکات فوق فقط برای درک بهتر صورت سؤال و شکل مسأله هستند.

$$\left. \begin{array}{l} PQ \parallel CD \\ CO \text{ وسط } Q \end{array} \right\} \Rightarrow DO \text{ وسط } P$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{APD} = S_{APO} = S_{AOB} = S_{BOQ} = S_{BQC} = S_{POQ} \\ S_{POQ} = \frac{1}{6} S_{COD} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{POQ} = \frac{1}{9} S$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} BM = BC = 10 \\ \hat{B} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BDM \cong \triangle BAC \Rightarrow S_{\triangle BDM} = S_{\triangle BAC} \rightarrow \text{مساحت } AODB \text{ را از طرفین کم می کنیم}$$

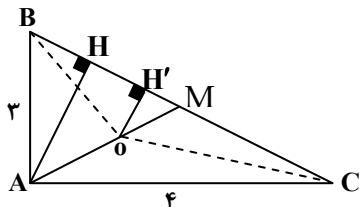
پس:

$$S_{\triangle ADM} = S_{\triangle DOC}$$

از طرفی طبق دو زاویه $\triangle AOM$ و $\triangle DOC$ متشابه هستند و چون مساحت هایشان با هم برابر است پس همنهشت نیز می باشند در نتیجه:

$$CD = AM = 2$$

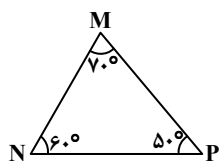
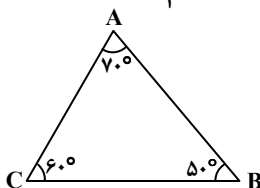
۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.



$$AH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{OM}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OH'}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow OH' = \frac{4}{5}$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\triangle ABC : \hat{A} = 70^\circ, \hat{B} = 50^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

$$\triangle MNP : \hat{M} = 70^\circ, \hat{N} = 60^\circ \Rightarrow \hat{P} = 50^\circ$$

بنابراین دو مثلث مفروض بنا بر تساوی زوایا متشابه اند.

$$\frac{S}{S'} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{AB^2}{MP^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{AB}{MP} = \frac{3}{2} \Rightarrow MP = \frac{2}{3} AB \Rightarrow MP = \frac{2}{3} \times 18 = 12$$

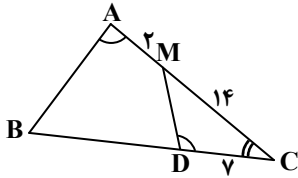
۳۰- گزینه ۲ پاسخ است.

دو مثلث $\triangle ABO$ و $\triangle DMO$ طبق دو زاویه متشابه‌اند پس:

$$\left. \begin{aligned} K = \frac{DM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow DO = \frac{1}{2} BO \\ (نسبت تشابه) \quad BC = 5 \text{ (فیثاغورس)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow DO = \frac{1}{3} BC = \frac{5}{3}$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ است.

دو مثلث ABC و MDC متشابه‌اند، زیرا بنا به فرض، $\hat{A} = \hat{D}$ و زاویه‌ی C در هر دو مثلث مشترک است بنابراین داریم:

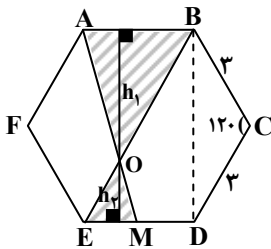


$$\frac{DC}{AC} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow \frac{7}{2+14} = \frac{14}{BC} \Rightarrow BC = 22$$

$$BD = BC - DC = 22 - 7 = 15$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به این که $\hat{C} = 120^\circ$:



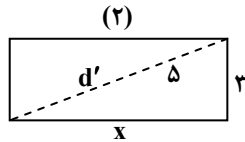
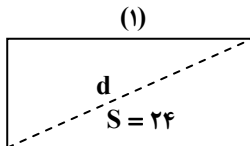
$$\left. \begin{aligned} BD = 2\sqrt{3} = h_1 + h_2 \\ \frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{EM} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_1 = 2\sqrt{3}, \quad h_2 = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(\sqrt{3}) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{20}{5} = \frac{x}{7} = \frac{y}{11} \Rightarrow x = 28, \quad y = 44 \Rightarrow \text{محیط مثلث دوم} = 92$$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ است.



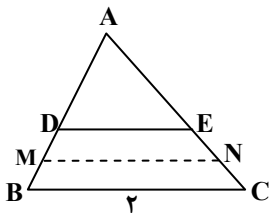
$$x^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow S' = 3 \times 4 = 12 \text{ مساحت مستطیل دومی}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{24}{12} = 2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{d^2}{d'^2} = 2 \Rightarrow d = d'\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به داده‌های مسأله داریم:

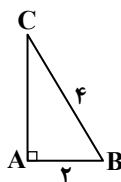
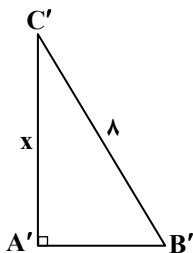


$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} = K^2 \Rightarrow \frac{DE}{BC} = K = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ BC = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow DE = \sqrt{2}$$

$$MN = \frac{BC + DE}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ است.

در دو مثلث متشابه، تمام اضلاع نظیر به نظیر، متناسبند. دقت کنید که وترها لزوماً با هم متناسبند. AB با $A'B'$ و AC با $A'C'$ متناسب هستند. حال اگر $A'B' = x$ و $AB = 2$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه:



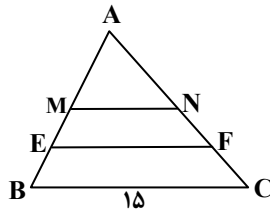
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 4$$

که در گزینه‌ها وجود ندارد. بنابراین باید $A'C'$ را x در نظر گرفت. حال داریم:

$$\triangle ABC : \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 16 = 4 + AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

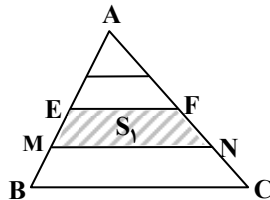
۳۷- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow EF = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 15 = 5\sqrt{6}$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\frac{EF}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle AEF} = 8$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{16} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = 18$$

$$\Rightarrow S_1 = S_{\triangle AMN} - S_{\triangle AEF} = 18 - 8 = 10$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ است.

می دانیم در هر مثلث $S = \frac{1}{2} a \cdot h$ پس $h = \frac{2S}{a}$ ، یعنی در هر مثلث طول هر ارتفاع، متناسب با معکوس طول ضلعی است که ارتفاع بر آن وارد می شود.

با توجه به توضیح بالا اگر طول اضلاع یک مثلث ۴، ۴ و ۵ باشد، ارتفاع های آن مثلث متناسب با $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ هستند.

از طرفی در دو مثلث متشابه، ارتفاع های نظیر، با هم متناسبند. با این توضیحات، گزینه ها را امتحان می کنیم:

گزینه ۱: $\frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{3}{5} \Rightarrow 8 = 8 = 15$ نادرست

گزینه ۲: $\frac{16}{1} = \frac{16}{1} = \frac{20}{5} \Rightarrow 64 = 64 = 100$ نادرست

گزینه ۳: $\frac{20}{1} = \frac{20}{1} = \frac{16}{5} \Rightarrow 80 = 80 = 80$ درست

گزینه ۴: $\frac{5}{1} = \frac{5}{1} = \frac{6}{5} \Rightarrow 20 = 20 = 30$ نادرست

۴۰- گزینه ۱ پاسخ است.

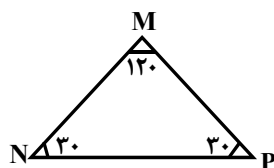
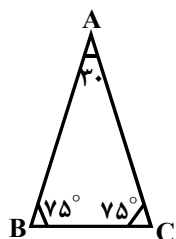
$$\frac{S_{BDEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3h \cdot 7x}{\frac{1}{2} \cdot 2h \cdot 2x} = \frac{21}{4}$$

با این فرض که: $BD = 2x$ و $CE = 5x$ و ارتفاع $ABD = 3h$

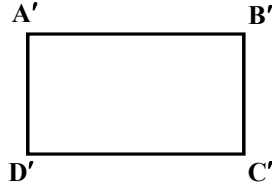
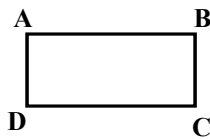
صفحات ۶۳ الی ۹۳ کتاب

۴۱- گزینه ۲ پاسخ است

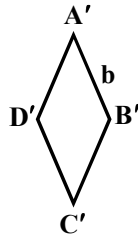
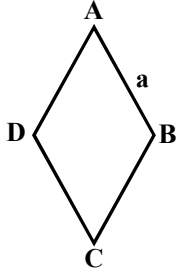
(۱) در دو مثلث مقابل $\hat{A} = 30^\circ$ و $\hat{P} = 30^\circ$ ولی دو مثلث متشابه نیستند.



(۲) همه n ضلعی های منتظم متشابه اند.



۳) زاویه‌ها برابرند و اضلاع متناسبند $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{AD'}$ پس متشابه‌اند.



$$\hat{A} = \hat{A}' = 70^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{C}' = 70^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' = 110^\circ = \hat{D} = \hat{D}' \quad (۴)$$

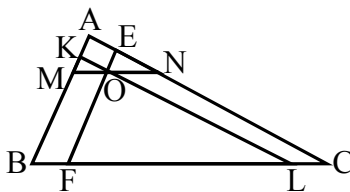
پس زاویه‌ها برابرند

از طرفی اضلاع متناسبند $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots \dots \frac{a}{b}$ پس متشابه‌اند.

تشریح گزینه‌های نادرست:

به علت دشواری انتخاب گزینه ۲ ممکن است گزینه‌های دیگر انتخاب شوند.

۴۲- گزینه ۲ پاسخ است.



از نقطه O در داخل مثلث خطوط MN, EF و KL را موازی اضلاع رسم کرده‌ایم. با توجه به

خطوط موازی و مورب و حالت سه زاویه مثلث‌های زیر همگی با هم متشابه‌اند.

$$\triangle ABC, \triangle AMN, \triangle BKL, \triangle EFC, \triangle MKO, \triangle EON, \triangle OFL$$

مشاهده می‌شود که هفت مثلث مشابه با هم وجود دارد.

۴۳- گزینه ۲ پاسخ است.

چون $PQ \parallel MN$ ، لذا دو مثلث MNC و PQC متشابه‌اند و چون $PC = MP$ است، پس نسبت تشابه $k = \frac{1}{2}$ می‌باشد. لذا:

$$\frac{S_{\triangle PQC}}{S_{\triangle MNC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

همچنین چون $MN \parallel AB$ و M و N وسط اضلاع اند، بدلیل مشابه:

$$\frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle PQC} = \frac{1}{4} S_{\triangle MNC} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{1}{16} S_{\triangle ABC}$$

۱) اگر دو مثلث متشابه باشند، تمام اجزای طولی آن دو مثلث با هم متشابه‌اند. اگر نسبت تشابه دو مثلث K باشد، نسبت مساحت‌های این دو مثلث k^2 می‌باشد.

۲) اگر وسط دو ضلع مثلث را به هم متصل کنیم، پاره خط حاصل موازی ضلع سوم و برابر نصف آن می‌باشد.

۳) میانه وارد بر هر ضلع، در مثلث، مساحت آن مثلث را به دو جز مساوی تقسیم می‌کند.

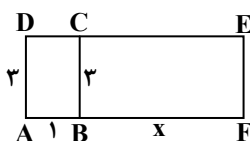
$$S_{\triangle PQN} = \frac{1}{8} S_{\triangle ABC} \quad \text{و از آنجا} \quad S_{\triangle PQN} = \frac{1}{2} S_{\triangle MNC} \quad \text{در نظر می‌گیرند و لذا} \quad S_{\triangle PQC} = S_{\triangle MNP}$$

به‌دست می‌آید.

گزینه (۴): گاهی اوقات دانش آموزان $S_{\triangle PQC}$ را با $S_{\triangle MNP}$ برابر گرفته، لذا خواهند داشت:

$$S_{\triangle PQN} = S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} S_{\triangle CMN}\right) = \frac{3}{8} S_{\triangle CMN} = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{4} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{3}{32} S_{\triangle ABC}$$

۴۴- گزینه ۳ پاسخ است.

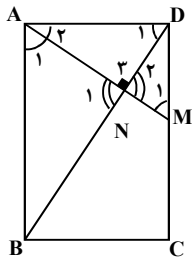


در دو مستطیل متشابه نسبت عرض‌ها برابر نسبت طول‌ها می‌باشد.

$$\square ABCD \sim \square BCEF \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 9$$

$$\Rightarrow AF = 10, AD = 3 \Rightarrow S_{ADEF} = 30, S_{BCEF} = 3 \times 9 = 27 \Rightarrow \frac{S_{ADEF}}{S_{BCEF}} = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ است.



چون دو مثلث ABN و DMN متشابهند ($\hat{M}_1 = \hat{A}_1$ و $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$) لذا $\frac{AB}{DM} = \frac{BN}{ND}$ از طرفی دو مثلث ABN و AND نیز متشابهند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{D}_1 = 90^\circ \\ \hat{N}_1 = \hat{N}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BN}{AN} = \frac{AN}{DN} \Rightarrow AN^2 = BN \cdot DN$$

چون مثلث ABD قائم الزاویه است لذا:

$$S = \frac{AD \times AB}{2} = \frac{AN \times BD}{2} \Rightarrow AD \times \sqrt{2} AD = AN \times (\sqrt{2} AD) \Rightarrow AN = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$$

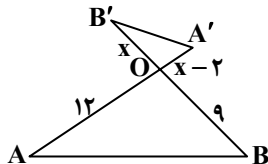
$$\Rightarrow AN^2 = \frac{2}{5} AD^2 = BN \cdot DN \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BN = \frac{4\sqrt{5}}{5} AD, DN = \frac{\sqrt{5}}{5} AD \\ BN + DN = \sqrt{5} AD \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{ND} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5} AD}{\frac{\sqrt{5}}{5} AD} = 4 \Rightarrow \frac{AB}{DM} = 4 = \frac{DC}{DM}$$

لذا: $CM = \frac{3}{4} CD$ و $DM = \frac{1}{4} CD$ و لذا: $\frac{DM}{CM} = \frac{1}{3}$ و ضلع مقابل به نسبت ۱ به ۳ تقسیم می شود.

گزینه (۲) اکثر کسانی که این تست را غلط زده اند به محض این که نسبت $\frac{DM}{DC}$ را برابر $\frac{1}{4}$ بدست آوردند، عجلانه این گزینه را انتخاب کرده اند و از یاد بردند که تست نسبت $\frac{DM}{MC}$ را مورد سوال قرار داده است.

۴۶- گزینه ۱ پاسخ است.



دقت کنید که اگر AB با $A'B'$ موازی بود، آن گاه OA با OA' و OB با OB' متناسب بود. در صورتی که مطابق شکل، این گونه نیست. حال اگر این اشتباه انجام شود، داریم:

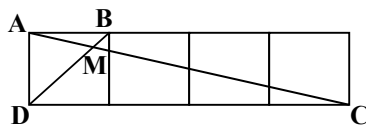
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow \frac{x-2}{12} = \frac{x}{9} \Rightarrow 9x-18=12x \Rightarrow 3x=-18 \Rightarrow x=-6$$

بنابراین داریم:

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA} \Rightarrow \frac{x-2}{9} = \frac{x}{12} \Rightarrow 12x-24=9x \Rightarrow 3x=24 \Rightarrow x=8 \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

در نتیجه، نسبت مساحت ها که مجذور نسبت تشابه است برابر $\frac{4}{9}$ خواهد بود.

۴۷- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۵۲ و ۷۹ و ۸۰ کتاب



$$BD = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

در مثلث قائم الزاویه ABD داریم:

دو مثلث AMB و DMC متشابه اند زیرا به جهت موازی بودن دو پاره خط AB و DC زوایای B و D با هم و زوایای A و C با هم در آن ها مساوی هستند، بنابراین داریم:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2MB = MD$$

$$DB = MB + MD \Rightarrow \sqrt{5} = MB + 2MB \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

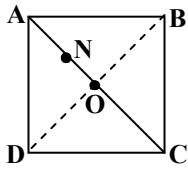
نکات:

۱- در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر برابر مجموع مربع های دو ضلع دیگر است.

۲- دو مثلث به حالت برابری دو زاویه متشابه می شوند.

۳- در مثلث های متشابه نسبت اضلاع متناظر (روبروی زوایای برابر) مساوی است.

۴۸- گزینه ۲ پاسخ است.



$$AB=6 \Rightarrow AC=6\sqrt{2} \Rightarrow OC=3\sqrt{2}$$

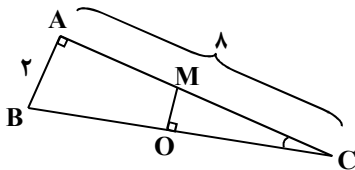
$$\frac{NC}{NA} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{NC}{6\sqrt{2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow NC = \frac{18\sqrt{2}}{5}$$

$$NO = NC - OC = \frac{18\sqrt{2}}{5} - 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

۴۹- گزینه ۲ پاسخ است. صفحه ۵۲ و ۷۹ و ۸۰ کتاب

نقطه O وسط وتر BC است. $BC^2 = 2^2 + 8^2 = 68$

دو مثلث قائم الزاویه OMC و ABC متشابه هستند زیرا زاویه‌ی حاده‌ی C در آن‌ها مشترک است، پس داریم:



$$\frac{MC}{BC} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{2}{8} \Rightarrow MC = \frac{BC^2}{16} = \frac{68}{16} = \frac{17}{4}$$

$$MA = 8 - \frac{17}{4} = \frac{32-17}{4} = \frac{15}{4}$$

نکته:

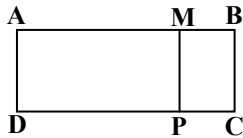
۱- اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

نتیجه: در دو مثلث قائم الزاویه چون یک زاویه قائمه برابر دارند اگر یک زاویه حاده آن با هم برابر باشند آنگاه دو مثلث متشابه‌اند.

۲- در هر مثلث قائمه الزاویه مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است.

۳- در مثلث‌های متشابه نسبت اضلاع متناظر (اضلاع روبرو به زاویه‌ی مساوی) با هم برابر است.

۵۰- گزینه ۲ پاسخ است.



دو مستطیل ABCD و MBP، در صورتی متشابه‌ند که اضلاع متناظر آن‌ها با هم متناسب باشند، پس:

$$\frac{MB}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{MB}{4} = \frac{4}{10} \Rightarrow MB = 1/6$$

یعنی دو مستطیل زمانی متشابه‌ند که نقطه‌ی M، روی AB و به فاصله‌ی ۱/۶ واحد از نقطه‌ی B قرار داشته باشد، بنابراین یک نقطه با شرایط مسأله وجود دارد.

البته توجه کنید که اگر M به فاصله‌ی ۱/۶ واحد از B، روی امتداد AB واقع شود نیز دو مستطیل ABCD و MBP متشابه خواهند بود، اما سؤال فقط تعداد نقاط روی AB را خواسته است.

۵۱- گزینه ۴ پاسخ است.

چون $AB = AC$ پس $BH = HC$ (چون $\hat{ABH} = \hat{ACH}$ و مثلث متساوی الساقین است)

از طرفی در مثلث قائم الزاویه BMC داریم: $MN^2 = CN \cdot BN = 2^2 = 4$

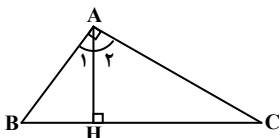
از طرفی چون مثلث‌های AHC و MNC متشابه‌ند داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{N} = \hat{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CH} = \frac{MN}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CN}{CH} = \frac{2}{3}$$

$$CH = \frac{1}{2} BC$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CN}{BC - CN} = \frac{1}{3-1} \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{1}{2} \Rightarrow CN(2CN) = 4 \Rightarrow CN = \sqrt{2}$$

$$CN \cdot BN = 4$$



(۱) در هر مثلث قائم الزاویه نکات زیر را داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 = \hat{C} \\ \hat{A}_2 = \hat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ACH \sim \triangle ABC$$

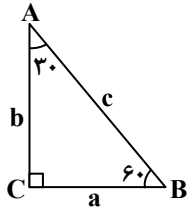
و از نوشتن نسبت‌های تشابه مثلث‌های دایره‌دو متشابه فوق داریم:

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

(۲) در مثلث متساوی الساقین ارتفاع نظیر قاعده بر نیمساز و عمود منصف و میانه منطبق است.
۵۲- گزینه ۴ پاسخ است.



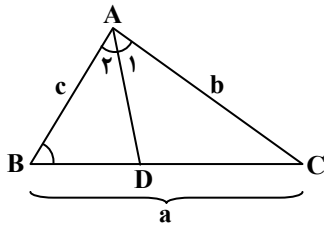
$$\hat{B} = 60^\circ, \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}c$$

$$\sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$S = \frac{1}{2}a \times b = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{8}c^2 = 20\sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 160 \Rightarrow c = 4\sqrt{10}$$

c وتر مثلث و بزرگ‌ترین ضلع آن است. بنابراین با بزرگ‌ترین ضلع مثلث A'B'C' یعنی $a' = \sqrt{10}$ متناسب است، بنابراین نسبت تشابه $\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 4$ است.



۵۳- گزینه ۳ پاسخ است.

مثلثی با ویژگی $\hat{A} = 2\hat{B}$ رسم کرده و در آن نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = 2\hat{B} \\ \hat{A} \text{ نیمساز AD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases}$$

ABC و DAC طبق حالت تساوی زاویه‌ها متشابه‌اند.

با نوشتن تناسب بین اجزای متناظر داریم:

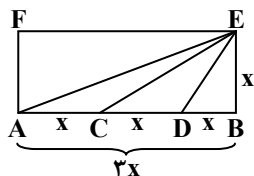
$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \quad (1)$$

از طرفی چون $\hat{B} = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ ، پس مثلث DAB متساوی الساقین است و $AD = BD$ ، پس می‌توانیم رابطه‌ی (۱) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\xrightarrow{(1)} \frac{AD}{c} = \frac{a - BD}{b} = \frac{b}{a} \xrightarrow{AD=BD} \frac{AD}{c} = \frac{a - AD}{b} = \frac{b}{a} \quad (I)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (I) \Rightarrow AD = \frac{bc}{a} \\ (II) \Rightarrow \frac{a - \frac{bc}{a}}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 - bc = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = bc \end{cases}$$

۵۴- گزینه ۳ پاسخ است.



$$AB = 3BE, AC = CD = DB \Rightarrow AC = CD = DB = BE = x$$

$$\triangle DBE : \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow DB^2 + BE^2 = DE^2 \Rightarrow DE^2 = 2x^2 \Rightarrow DE = \sqrt{2}x$$

$$\triangle CBE : \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow BC^2 + BE^2 = CE^2 \Rightarrow CE^2 = 5x^2 \Rightarrow CE = \sqrt{5}x$$

$$\triangle AEB : \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 + BE^2 = AE^2 \Rightarrow AE^2 = 10x^2 \Rightarrow AE = \sqrt{10}x$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{5}x} = \sqrt{2}, \frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2}, \frac{AD}{DE} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{DE}$$

در نتیجه، دو مثلث ADE و EDC به حالت تناسب سه ضلع با هم متشابه‌اند.

اشکال فضایی

۱- مساحت کل یک مکعب مستطیل برابر ۱۴۴ و مجموع اندازه‌ی همه‌ی یال‌ها برابر ۵۲ است، قطر مکعب مستطیل کدام است؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴)

۲- قاعده‌ی یک مکعب مستطیل، مربع است، اگر قطر قاعده و ارتفاع مکعب مستطیل هر دو $2\sqrt{2}$ باشد، سطح جانبی مکعب مستطیل کدام است؟

- ۱۸ (۱) $14\sqrt{2}$ (۲) ۲۰ (۳) $16\sqrt{2}$ (۴)

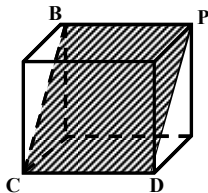
۳- هر ضلع مکعبی را ۵۰٪ افزایش می‌دهیم، درصد افزایش مساحت رویه‌ی مکعب برابر است با:

- ۵۰ (۱) ۱۲۵ (۲) ۳۰۰ (۳) ۷۵۰ (۴)

۴- یک استخر به شکل مکعب داریم که مساحت هر وجه آن بر حسب مترمربع $\sqrt{3}$ برابر قطر آن بر حسب متر است. اگر $22/5 \text{ m}^2$ آب را درون این استخر خالی کنیم، فاصله‌ی تخته‌ی دایوی که در ۲ متری بالای سطح زمین (استخر) نصب شده از سطح آب چقدر خواهد شد؟

- ۳ (۱) $2/5$ (۲) $3/5$ (۳) $3/2$ (۴)

۵- در مکعب شکل زیر، مساحت چهارضلعی ABCD برابر $3\sqrt{2}$ سانتی مترمربع است، سطح کل مکعب چند سانتی مترمربع است؟



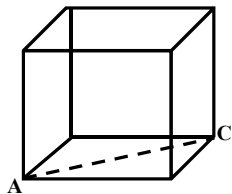
- ۱۲ (۱)

- ۱۶ (۲)

- ۱۸ (۳)

- ۲۴ (۴)

۶- در شکل روبه رو صفحه‌ی ماز بر AC (که از یال‌ها نگذرد) سطح مکعب را در کدام چهارضلعی قطع می‌کند؟



(۱) دوزنقه‌ی متساوی الساقین

(۲) لوزی

(۳) متوازی الاضلاع

(۴) مستطیل

۷- اندازه‌ی حجم مکعبی به سطح کل ۱۸ واحد مربع چقدر است؟

- ۲۷ (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) ۸ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

۸- اضلاع مکعب مستطیلی با اعداد ۱ و ۲ و ۲ متناسب‌اند. اگر حجم مکعب مستطیل ۸ باشد، طول قطر آن کدام است؟

- $4\sqrt{2}$ (۱) $9\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $9\sqrt{4}$ (۴)

۹- سطح مقطع یک مکعب به طول یال ۶ واحد با صفحه‌ی گذرنده بر انتهای سه یال آن که در یک رأس مشترک باشند، چند واحد مربع است؟

- ۱۸ (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) $18\sqrt{3}$ (۳) ۲۴ (۴)

۱۰- در یک مکعب مستطیل، قطرهای مستطیل‌های صفحات جانبی، $\sqrt{13}$ و $\sqrt{13}$ و $3\sqrt{2}$ است. قطر مکعب چقدر است؟

- $\sqrt{44}$ (۱) $\sqrt{32}$ (۲) ۸ (۳) $\sqrt{22}$ (۴)

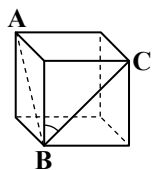
۱۱- شکل زیر یک مکعب است. زاویه‌ی \hat{ABC} چند درجه است؟

- ۳۰° (۱)

- ۴۵° (۲)

- ۶۰° (۳)

- ۹۰° (۴)



۱۲- سه رأس A و B و C از مکعبی را چنان انتخاب می‌کنیم که هر دو رأس آن از یک یال نباشد. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت یک وجه مکعب است؟

- $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۱) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

۱۳- طول یال‌های مکعب مستطیلی به ترتیب ۱ و $\sqrt{3}$ و ۲ واحد است. زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال بزرگ‌تر چند درجه است؟

(۴) ۹۰°

(۳) ۶۰°

(۲) ۴۵°

(۱) ۳۰°

۱۴- سطح کلی مکعبی به ضلع k با سطح کل مکعب مستطیلی به اضلاع a و $2a$ و $2a$ برابر است. قطر مکعب چند برابر قطر مکعب مستطیل است؟

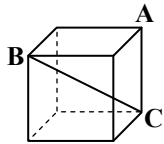
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۵- در مکعب شکل مقابل فاصله‌ی رأس A از قطر BC چند برابر یال مکعب است؟



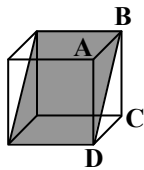
(۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۱) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۶- در مکعب شکل مقابل، زاویه‌ی صفحه‌ی قطری سایه‌زده با صفحه‌ی وجه $ABCD$ ، چند درجه است؟



(۱) ۳۰

(۲) ۴۵

(۳) ۶۰

(۴) ۹۰

۱۷- قاعده‌ی یک مکعب مستطیل، به شکل مربع است و ارتفاع آن برابر قطر این مربع است. زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال کوچک‌تر آن چند درجه است؟

(۴) ۶۰

(۳) ۴۵

(۲) ۳۰

(۱) ۱۵

۱۸- حجم منشور مربع القاعده‌ی مایلی که طول ضلع قاعده‌ی آن $\sqrt{3}$ و یکی از وجوه آن مربع و وجه دیگر آن لوزی به زاویه‌ی ۶۰° است، کدام است؟

(۴) $\frac{9}{2}$

(۳) $\frac{9}{4}$

(۲) $\frac{9}{5}$

(۱) $\frac{9}{7}$

۱۹- افزودن ۶ واحد به شعاع یک استوانه، سبب افزایش حجم آن به اندازه‌ی y واحد مکعب می‌شود، افزودن ۶ واحد به ارتفاع استوانه نیز سبب افزایش حجم آن به اندازه‌ی y واحد مکعب می‌شود، اگر ارتفاع اولیه ۲ باشد، آن گاه شعاع اولیه برابر است با:

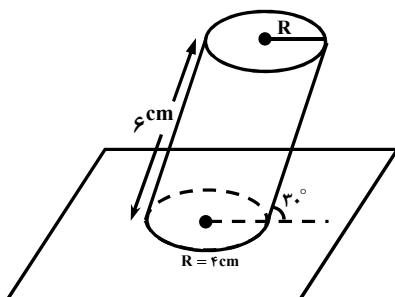
(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۲

۲۰- سطح جانبی استوانه‌ی مایل شکل زیر، از نظر عدد چند برابر حجم استوانه است؟



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{3}{8}$

۲۱- سطح کل منشوری که قاعده‌اش لوزی به اقطار ۶ و ۸ و ارتفاعش مساوی محیط قاعده‌ی آن باشد، برابر است با:

(۴) ۴۴۸

(۳) ۲۲۸

(۲) ۲۲۴

(۱) ۴۲۸

۲۲- مساحت جانبی منشور منتظمی که قاعده‌ی آن شش‌ضلعی منتظم بوده و بزرگ‌ترین قطر قاعده‌ی آن ۱۸ و یال جانبی منشور ۱۰ باشد، برابر است با:

(۴) ۵۶۰

(۳) ۵۲۰

(۲) ۵۰۰

(۱) ۵۴۰

۲۳- اگر شعاع قاعده‌ی استوانه‌ای دو برابر و ارتفاع آن $\frac{1}{4}$ برابر شود، حجم آن است.

(۴) تغییر نمی‌کند.

(۳) ۲ برابر می‌شود.

(۲) نصف می‌شود.

(۱) چهار برابر می‌شود.

۲۴- مساحت کل یک منشور قائم با قاعده‌ی مربع ۱۸۲ واحد سطح است. اگر مجموع ارتفاع و ضلع قاعده‌ی آن ۱۰ واحد باشد، ارتفاع منشور کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۳

۲۵- حجم منشور مربع القاعده‌ی مایلی که طول ضلع قاعده‌ی آن $\sqrt{3}$ و یکی از وجوه آن مربع و وجه دیگر آن لوزی به زاویه‌ی 60° است، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{7}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۲۶- در دو استوانه با حجم‌های مساوی، مساحت قاعده‌ی یکی چهار برابر قاعده‌ی دیگری است. نسبت سطح جانبی دو استوانه چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۷- در استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۳ حجم چند برابر مساحت جانبی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۲۸- مستطیلی به اضلاع $a, b, a > b$ را یک بار حول ضلع کوچک تر و یک بار حول ضلع بزرگ تر دوران می دهیم و دو استوانه حاصل می شود،

کدام گزینه در مورد دو استوانه صحیح است؟

- (۱) حجم برابر دارند. (۲) سطح کل برابر دارند. (۳) سطح جانبی برابر دارند. (۴) هیچ کدام از موارد

۲۹- اصل کاوالیری در مورد تساوی حجم دو جسم که قاعده‌ی آن‌ها در یک صفحه باشند، بر کدام مبنا قرار دارد؟

(۱) تساوی سطح مقطع حاصل از تقاطع هر صفحه‌ی موازی با یک صفحه با دو جسم

(۲) تساوی محیط مقطع حاصل از تقاطع هر صفحه‌ی موازی با یک صفحه با دو جسم

(۳) تساوی سطح مقطع حاصل از تقاطع هر صفحه‌ی دلخواه با دو جسم

(۴) تساوی محیط مقطع حاصل از تقاطع هر صفحه‌ی دلخواه با دو جسم

۳۰- یک مکعب مستطیل و یک استوانه در شرایط اصل کاوالیری صدق می کنند اگر اضلاع قاعده‌ی مکعب مستطیل برابر ۳ و ۱۲ باشد، شعاع قاعده‌ی

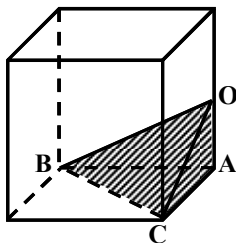
استوانه چه قدر است؟

- (۱) $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ (۲) $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ (۳) $\frac{36}{\pi}$ (۴) $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$

۳۱- در یک هرم منتظم با قاعده‌ی مربع، ارتفاع هر وجه جانبی ۱۳ و ارتفاع هرم ۱۲ واحد است، سطح کل هرم چند واحد مربع است؟

- (۱) ۲۸۵ (۲) ۳۲۰ (۳) ۳۲۵ (۴) ۳۶۰

۳۲- در شکل روبه رو، O وسط یال مکعب است، حجم هرم OABC چند برابر حجم مکعب است؟



- (۱) $\frac{1}{16}$

- (۲) $\frac{1}{12}$

- (۳) $\frac{1}{9}$

- (۴) $\frac{1}{8}$

۳۳- ارتفاع یک مخروط سه برابر شعاع قاعده‌ی آن است، اگر حجم مخروط 8π باشد، شعاع قاعده چه قدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

۳۴- از یک ورقه‌ی حلبی دایره‌ای به شعاع ۶ واحد، یک قطاع 120° می بریم و با آن یک قیف مخروطی می سازیم حجم این قیف تقریباً چه قدر

است؟ ($\pi \sim 3$)

- (۱) $18\sqrt{2}$ (۲) $24\sqrt{2}$ (۳) $8\sqrt{2}$ (۴) $\frac{16}{3}\sqrt{2}$

۳۵- مثلث ABC به اضلاع $AB = 4$ و $AC = 3$ و $BC = 5$ را حول ضلع BC و ضلع AC دوران می دهیم. نسبت حجم اولی به دومی چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۳۶- اگر سطح دو قاعده‌ی یک هرم ناقص به ترتیب ۲۷ و ۱۸ سانتی مترمربع و ارتفاع هرم اصلی ۱۲ سانتی متر باشد، فاصله‌ی قاعده‌ی کوچک تر از

رأس هرم چند سانتی متر است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{30}$

۳۷- استوانه‌ای که شعاع قاعده و ارتفاع آن به ترتیب ۲ و ۳ می باشد، درون مخروطی محاط است که شعاع قاعده‌ی آن ۴ است، حجم مخروط کدام است؟

- (۱) 16π (۲) 32π (۳) 36π (۴) 18π

۳۸- حجم مخروطی به مساحت قاعده‌ی ۱۰ و ارتفاع ۶ چند برابر حجم استوانه‌ای به مساحت قاعده‌ی ۵ و ارتفاع ۲ است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۳۹- در هرم منتظم مربع‌القاعده به ضلع قاعده‌ی $2\sqrt{3}$ ، ارتفاع هرم ۳ واحد است. سطح جانبی هرم کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{6}$ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) $16\sqrt{3}$

۴۰- در یک هرم منتظم با قاعده‌ی مربع، ارتفاع هر وجه جانبی ۱۳ و ارتفاع هرم ۱۲ واحد است. سطح کل هرم چند واحد مربع است؟

- (۱) ۲۸۵ (۲) ۳۲۰ (۳) ۳۲۵ (۴) ۳۶۰

۴۱- در یک هرم منتظم مربع‌القاعده، طول ارتفاع برابر نصف قطر قاعده‌ی آن است. زاویه‌ی رأس مثلث‌های جانبی چند درجه است؟

- (۱) ۹۰° (۲) ۶۰° (۳) ۴۵° (۴) ۳۰°

۴۲- در هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای به ضلع قاعده‌ی $2\sqrt{3}$ واحد، زاویه‌ی سطح هر وجه با قاعده‌ی آن ۶۰° است. حجم هرم چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۸

۴۳- صفحه‌ای موازی قاعده‌ی هرم ارتفاع آن را نصف می‌کند. حجم حاصل چه کسری از حجم اولیه است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۴۴- در کدام گزینه هرم مربع‌القاعده‌ی منتظم دارای حجم بیش‌تری است؟

- (۱) ارتفاع ۳ و ضلع قاعده‌ی ۱
(۲) ارتفاع ۲ و قطر قاعده‌ی $\sqrt{2}$
(۳) ارتفاع $\sqrt{3}$ و قطر قاعده‌ی $\sqrt{2}$
(۴) ارتفاع $\sqrt{3}$ و ضلع قاعده‌ی $\sqrt{3}$

۴۵- در شکل زیر $\angle AOB = 60^\circ$ است. اگر $OA = 4\sqrt{3}$ ، حجم مخروط کدام است؟



- (۱) 12π

- (۲) 16π

- (۳) 18π

- (۴) 24π

۴۶- در یک چهاروجهی منتظم، از وسط هر یال آن، صفحه‌ای موازی وجه مقابل می‌گذرانیم تا ۴ هرم کوچک‌تر، از چهاروجهی مفروض جدا کند. حجم

جسم باقی‌مانده، چند برابر حجم چهاروجهی اولیه است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۷- در یک استوانه سطح جانبی چهار برابر حجم استوانه است. شعاع قاعده‌ی این استوانه چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۴

۴۸- مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه‌ی قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا

شده کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) π (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) 2π

۴۹- در یک مخروط ارتفاع را سه برابر و شعاع قاعده را $\frac{1}{3}$ برابر می‌کنیم. حجم مخروط چند برابر می‌شود؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) تغییر نمی‌کند. (۴) ۹

۵۰- برای محاسبه‌ی حجم کره به طور مستقیم کدام روش به کار رفته است؟

- (۱) کاوالیری در مورد منحنی
(۲) کاوالیری در مورد سطح
(۳) کاوالیری در مورد حجم
(۴) تقسیم کره به شبه مخروط‌های بسیار زیاد

۵۱- یک توپ گلف به شعاع $\frac{1}{\pi}$ cm از نقطه‌ی A بر اثر ضربه‌ای دور خود می‌چرخد تا به نقطه‌ی B به فاصله‌ی ۸ متر از نقطه‌ی A برسد، این توپ در

طی مسیر چندبار دور خود می‌گردد؟

- (۱) ۲۰۰ بار (۲) ۴۰ بار (۳) ۴۰۰ بار (۴) ۱۰۰ بار

۵۲- حجم یک کره به شعاع a با حجم یک مخروط به شعاع قاعده‌ی $2a$ برابر است، طول ارتفاع مخروط کدام است؟

- (۱) a (۲) $2a$ (۳) $\frac{2}{3}a$ (۴) $\frac{3}{2}a$

۵۳- در داخل یک مکعب به طول یال a مخروطی با بیشترین حجم قرار می‌دهیم، حجم مخروط چند برابر حجم مکعب است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{12}$ (۴) $\frac{2\pi}{9}$

۵۴- یک استوانه به ارتفاع ۶ در کره‌ای به شعاع ۵ محاط شده است، نسبت حجم این کره به حجم استوانه کدام است؟

- (۱) $\frac{125}{24}$ (۲) $\frac{125}{36}$ (۳) $\frac{125}{72}$ (۴) $\frac{125}{96}$

۵۵- در مخروطی که طول مولد آن برابر قطر قاعده و مساوی ۶ است، کره‌ای محاط شده است، حجم کره کدام است؟

- (۱) $2\pi\sqrt{3}$ (۲) $3\pi\sqrt{3}$ (۳) $4\pi\sqrt{3}$ (۴) $6\pi\sqrt{3}$

۵۶- پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره با شعاع داخلی ۱۲ واحد را لبریز از آب کرده در داخل استوانه‌ای با همان شعاع قاعده می‌ریزیم. ارتفاع آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

- (۱) ۶ (۲) $7/5$ (۳) ۸ (۴) ۹

۵۷- مساحت کل مکعبی که در داخل کره‌ای محاط شده، چند برابر سطح کره‌ی محیطی است؟

- (۱) 2π (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (۴) $\frac{2}{\pi}$

۵۸- حجم کره‌ای به قطر $\frac{2}{\pi}$ از نظر عدد چند برابر سطح کره است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3\pi}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۵۹- حجم یک کره، $\sqrt{2}$ برابر حجم یک مخروط قائم است. اگر شعاع قاعده‌ی مخروط برابر شعاع کره باشد، فاصله‌ی رأس مخروط تا محیط قاعده‌ی آن، چند برابر شعاع قاعده است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۶۰- در داخل نیم‌کره‌ای به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگ‌ترین منشور قائم با قاعده‌ی مربع طوری ساخته شده است که قطر مربع برابر $\sqrt{3}$ است. حجم منشور کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\sqrt{6}$

پاسخ‌های تشریحی

انگال فضایی

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم که مساحت کلی مکعب مستطیل $S = 2(ab + ac + bc)$ است و نیز مکعب مستطیل دارای ۱۲ یال در سه نوع a و b و c است. پس مجموع همه‌ی یال‌ها می‌شود:

$$h = 4(a + b + c)$$

در نتیجه:

$$4(a + b + c) = 52 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 169$$

$$\Rightarrow 169 = a^2 + b^2 + c^2 + \underbrace{2(ab + ac + bc)}_{144} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$

۲- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر ضلع قاعده، a باشد داریم:

$$a\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 2$$

$$S = 6a^2 = 6(2^2) = 24$$

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر ضلع مکعب را a فرض کنیم، سطح اولیه برابر $S_1 = 6a^2$ خواهد بود اما اکنون ضلع ثانویه $a' = a + \frac{5}{10}a$ می‌باشد. بنابراین سطح کل ثانویه

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{15}{4}a^2 \text{ و در نتیجه افزایش سطح کل برابر است با: } S_2 = 6\left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{27a^2}{4}$$

$$P = \frac{\Delta S}{S_1} \times 100 = \frac{\frac{15}{4}a^2}{6a^2} \times 100 = 125\%$$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

فرض می‌کنیم ضلع مکعب a باشد در این صورت $a^2 = \sqrt{3}(\sqrt{3}a)$ یعنی $a = 3$ می‌شود. حال ارتفاع آب درون استخر را h در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$V = a \times a \times h \Rightarrow 22/5 = 9h \Rightarrow h = 2/5 \text{ m}$$

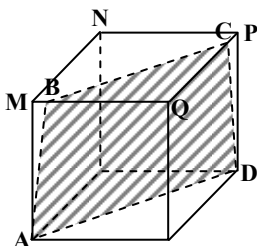
چون ارتفاع استخر ۳ بود، فاصله‌ی آب از لبه‌ی استخر $0/5$ و از تخته $2/5$ خواهد بود.

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است که طول قطر وجه آن $a\sqrt{2}$ و عرض آن ضلع مکعب یعنی a است. پس مساحت آن برابر است با $S = a^2\sqrt{2}$ در نتیجه:

$$a^2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow S_{\text{کل}} = 6a^2 = 18$$

۶- گزینه ۱ پاسخ است.



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید اگر صفحه‌ای مار از یال‌ها نگذرد دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین پدید می‌آید

ولی اگر از یال‌های AM و DP بگذرد، مستطیل می‌شود.

$$BC \parallel AD \Rightarrow ABCD \text{ دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین}$$

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$S = 6a^2 \Rightarrow 18 = 6a^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$V = a^3 = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر یک ضلع را a بنامیم، آن گاه دو ضلع دیگر $2a$ و $2a$ می باشند:

$$V = a(2a)(2a) = 8 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = \sqrt[3]{8}$$

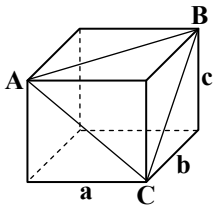
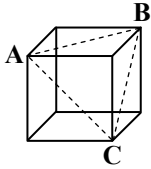
$$\text{طول قطر} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 3a \Rightarrow \text{طول قطر} = 3 \times \sqrt[3]{8} = 3\sqrt[3]{8}$$

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

سطح مقطع مورد نظر مثلث ABC است. طول هر ضلع مثلث مساوی قطر یک وجه مکعب است. $\text{قطر} = a\sqrt{2}$. هر وجه، پس $6\sqrt{2}$ = ضلع مثلث:

$$\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{2})^2 (\sqrt{3})}{4} = 18\sqrt{3}$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.



$$BC = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{13} \Rightarrow b^2 + c^2 = 13$$

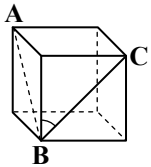
$$AC = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{13} \Rightarrow a^2 + c^2 = 13$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{18} \Rightarrow a^2 + b^2 = 18$$

از جمع سه رابطه داریم:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 44 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 22 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{22} \Rightarrow \text{قطر مکعب مستطیل} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{22}$$

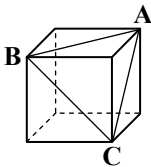
۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.



چون AB و AC و BC قطرهای وجوه هستند، پس با هم برابرند. ($a\sqrt{2}$ = قطر هر وجه مکعب) پس مثلث ABC متساوی الاضلاع است و هر زاویه ی آن 60° است.

۱۲- گزینه ۳ پاسخ است.

چون هر دو رأس دو سر یک یال نمی باشند، بنابراین شکل مسئله به صورت زیر است. مثلث ABC یک مثلث متساوی الاضلاع است و هر ضلع آن $a\sqrt{2}$ (قطر یک وجه) می باشد. از طرفی می دانیم مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع b برابر است با:

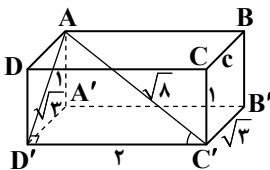


$$S = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{(a\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$S' = a^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

روش اول:



$$\text{طول قطر مکعب} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4 + 3 + 1} = \sqrt{8}$$

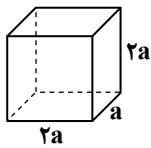
$$\text{قطر وجه جانبی } AD' = \sqrt{3 + 1} = 2$$

با توجه به شکل معلوم می شود: $AD' = D'C' = 2$ ، در نتیجه این مثلث متساوی الساقین است و چون رابطه ی فیثاغورس در آن برقرار است، پس قائم الزاویه نیز هست.

$$\left. \begin{aligned} AC'^2 &= D'C'^2 + D'A'^2 \\ (\sqrt{8})^2 &= 4 + 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D}' = 90^\circ \Rightarrow \hat{C}' = 45^\circ$$

روش دوم: چون $D'C'$ بر صفحه ی $ADD'A'$ عمود است، پس بر جميع خطوط صفحه عمود است، لذا $D'C'$ عمود بر AD' است.

۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.



سطح کل هر مکعب به طول k برابر است با $S = 6k^2$ و سطح کل مکعب مستطیل با ابعاد داده شده در شکل زیر عبارت است از:

$$S = 2(2a \times a) + 2(2a \times a) + 2(2a \times 2a) = 16a^2$$

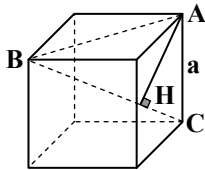
$$6k^2 = 16a^2 \Rightarrow 3k^2 = 8a^2 \Rightarrow \sqrt{3}k = 2\sqrt{2}a$$

از طرفی قطر مکعب به ضلع k برابر است با: $d = \sqrt{3}k$ و در مکعب مستطیل قطر برابر است با:

$$d' = \sqrt{(2a)^2 + a^2 + (2a)^2} = \sqrt{9a^2} = 3a \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{\sqrt{3}k}{3a} = \frac{2\sqrt{2}a}{3a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر اندازه‌ی یال مکعب را a فرض کنیم، داریم:



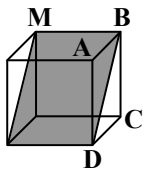
$$AB = a\sqrt{2} \text{ قطر هر وجه}$$

$$d = BC = a\sqrt{3} \text{ قطر مکعب}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) داریم:

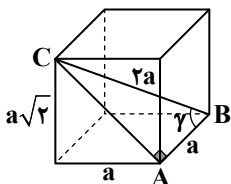
$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow a\sqrt{2} \times a = AH \times a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ است.



یال MB بر صفحه‌ی وجه $ABCD$ عمود است، زیرا بر دو یال متقاطع آن AB و BC عمود است. بنابراین صفحه‌ی قطری که از MB می‌گذرد بر وجه $ABCD$ عمود است. توجه دارید دو صفحه را عمود بر هم می‌نامند هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد که بر صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

۱۷- گزینه ۴ پاسخ است.



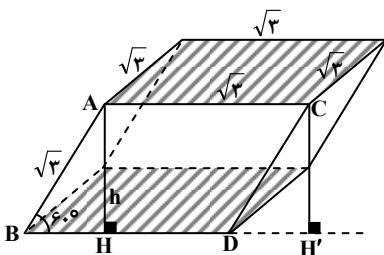
طول اضلاع قاعده را a در نظر می‌گیریم که در این صورت طول قطر قاعده $a\sqrt{2}$ می‌شود. پس طول یال‌های جانبی که همان ارتفاع‌های مکعب مستطیل هستند، طبق فرض سؤال، برابر $a\sqrt{2}$ است. مطابق شکل داریم:

$$BC = \sqrt{a^2 + a^2 + (a\sqrt{2})^2} = 2a$$

$$\triangle ABC \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} \cos \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 60^\circ$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

فقط نیاز به ارتفاع داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{3}{2}$$

$$V = S \cdot h = (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر شعاع اولیه را R فرض کنیم چون ارتفاع اولیه برابر ۲ است خواهیم داشت:

$$\pi(R+6)^2 \times 2 = \pi R^2 (6+2) \Rightarrow R = 6$$

و V هم پارامتر اضافی بود.

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا حجم آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3$$

$$V = \pi(4^2)(3) = 48\pi$$

محاسبه‌ی سطح جانبی چگونه است؟

سطح جانبی استوانه یا منشور از رابطه‌ی محیط \times ارتفاع به دست نمی‌آید چون وقتی استوانه قائم است با برش آن در امتداد محور استوانه و پهن کردن آن یک مستطیل به دست می‌آید. ولی اگر مایل باشد با برش آن در امتداد محور استوانه و پهن کردن آن یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که یک ضلع آن ۶ و ضلع دیگر آن محیط قاعده یعنی $2\pi(4)$ و زاویه‌ی بین دو ضلع هم 30° است. لذا خواهیم داشت:

$$S = 6 \times 8\pi \times \sin 30^\circ = 24\pi$$

$$\frac{S}{V} = \frac{1}{2}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ است.

سطح دو قاعده + سطح جانبی = سطح کل منشور

ارتفاع \times محیط قاعده = S جانبی

چون اقطار لوزی بر هم عمودند، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHB ، $AB = 5$ می‌شود. پس:

$$\text{محیط قاعده} = 4 \times 5 = 20$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

$$S = 20 \times 20 + 24 \times 2 = 400 + 48 = 448$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ است.

نکته: در شش ضلعی منتظم، شعاع دایره‌ی محیطی با ضلع شش ضلعی برابر است. $R = a$

$$\text{ضلع شش ضلعی} = a = 9 \Rightarrow 2a = 18 = \text{قطر}$$

$$S = 6(9) \times 10 = 540$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\frac{\text{حجم در حالت اول}}{\text{حجم در حالت دوم}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 h}{\pi (2R)^2 \left(\frac{h}{4}\right)} = \frac{\pi R^2 h}{\pi R^2 h} = 1 \Rightarrow V_1 = V_2$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است.

چون منشور قائم می‌باشد، پس ارتفاع منشور با یال قائم آن برابر است ($b = h$). با توجه به شکل مساحت کل به دست می‌آید.

$$S = 2a^2 + 4ab \Rightarrow 182 = 2a^2 + 4ah \Rightarrow 91 = a^2 + 2ah \quad (1)$$

$$a + h = 10 \text{ پس } h = 10 - a \text{ در رابطه‌ی (۱) مقدار می‌گذاریم:}$$

$$91 = a^2 + 2a(10 - a) \Rightarrow a^2 - 20a + 91 = 0 \Rightarrow (a - 7)(a - 13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ a = 7 \end{cases}$$

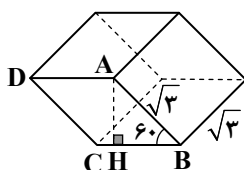
$a = 13$ قابل قبول نمی‌باشد. زیرا مجموع a و b مساوی ۱۰ است.

$$h = 10 - a \Rightarrow h = 10 - 7 = 3$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ است.

ارتفاع \times سطح قاعده = حجم منشور قائم یا مایل

در منشور موردنظر قاعده مربع است و $ABCD$ یک لوزی به زاویه‌ی 60° می‌باشد. با توجه به مثلث ABH می‌توان ارتفاع را پیدا کرد:



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

$$S = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$\text{حجم منشور} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$V = \pi R^2 h$$

ارتفاع \times محیط قاعده $= 2\pi R h =$ سطح جانبی

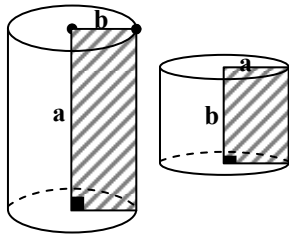
$$\pi R^2 = 4\pi R'^2 \Rightarrow R = 2R'$$

$$V = V' \Rightarrow \pi (2R')^2 h = \pi R'^2 h' \Rightarrow h' = 4h$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\pi R h}{2\pi R' h'} = \frac{2\pi (2R') h}{2\pi R' \times 4h} = \frac{1}{2}$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{cases} V = \pi r^2 h \\ S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h \end{cases} \Rightarrow \frac{V}{S_{\text{جانبی}}} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi r h} = \frac{r}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



$$S = 2\pi b \times a \text{ (الف)}$$

$$S_{\text{کل}} = 2\pi b \times a + 2\pi b^2$$

$$V = \pi b^2 a$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر مستطیل حول a دوران کند، a ارتفاع و b شعاع قاعده خواهد شد و اگر حول ضلع b دوران کند، b ارتفاع و a شعاع قاعده خواهد شد. لذا در هر دو حالت محاسبات لازم را انجام می‌دهیم:

$$S = 2\pi a \times b \text{ (ب)}$$

$$S_{\text{کل}} = 2\pi a \times b + 2\pi a^2$$

$$V = \pi a^2 b$$

پس مساحت جانبی برابر دارند.

۲۹- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر دو جسم بر روی یک صفحه‌ی P قرار گرفته باشند، به‌طوری‌که هر صفحه به موازات صفحه‌ی P این اجسام را قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل مساوی باشند، در این صورت حجم‌های این اجسام برابرند.

۳۰- گزینه ۱ پاسخ است.

* وقتی دو شکل فضایی در اصل کاوالیری صدق می‌کنند، دارای ارتفاع‌ها و سطح مقطع‌های مساوی هستند. لذا باید:

$$\pi R^2 = ab \Rightarrow \pi R^2 = 12 \times 2 \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ است.

طبق شکل سؤال قبل: $AB = 13$ و $AH = 12$ و $BH = 5$

که البته اگر a ضلع قاعده باشد داریم: $\frac{a}{2} = 5 \Rightarrow a = 10$

$$S_{\text{کل هرم}} = 4 \left(\frac{13 \times 10}{2} \right) + 10^2 = 260 + 100 = 360$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ است.

اضلاع قاعده‌ی هرم $AB = a$ و $AC = a$ است. پس مساحت قاعده برابر است با $S = \frac{1}{2} a^2$ و ارتفاع هرم هم $OA = \frac{a}{2}$ پس:

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a^2 \right) \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{a^3}{12}$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر شعاع قاعده R و ارتفاع را h فرض کنیم طبق فرض سؤال $h = 3R$ است. لذا خواهیم داشت:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow 8\pi = \frac{1}{3} \pi R^2 (3R) \Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$L = 2\pi \times 6 \times \frac{120}{360} = 4\pi \Rightarrow 2\pi r = 4\pi \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{26 - 4} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi \times (2)^2 \times 4\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ است.

از دوران مثلث قائم الزاویه حول وتر، دو مخروط از قاعده به هم چسبیده پدید می آید که مجموع ارتفاع آن‌ها برابر وتر است. بنابراین خواهیم داشت:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2$$

$$\frac{r_1=r_2=h_a}{h_1+h_2=a} \rightarrow V = \frac{1}{3} \pi h_a^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3} \pi a h_a^2 \xrightarrow{h_a=\frac{bc}{a}} V = \frac{1}{3} \pi a \frac{(bc)^2}{a^2} = \frac{1}{3} \pi \frac{(bc)^2}{a}$$

حال اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، AC ارتفاع و AB شعاع مخروط به دست آمده خواهد بود. یعنی:

$$V' = \frac{1}{3} \pi c^2 b \Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{\frac{b^2 c^2}{bc^2}}{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a} = \frac{2}{5}$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ است.

* مساحت دو مقطع با نسبت مربع ارتفاعات متناسبند:

$$\frac{27}{18} = \left(\frac{12}{x}\right)^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{6}$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ است.

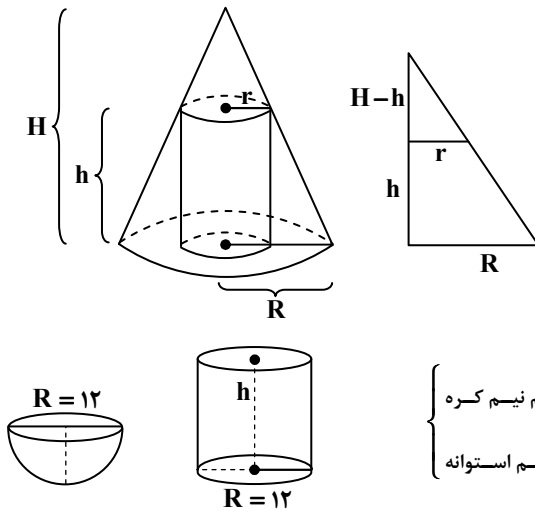
اگر شعاع قاعده و ارتفاع مخروط را R و H و شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را r و h فرض کنیم آن‌گاه بنابر تالس داریم:

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{H-3}{H} \Rightarrow H = 6$$

لذا حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi (4)^2 = 32\pi$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.



$$\begin{cases} \text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{2}{3} \pi (12)^3 \\ \text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi (12)^2 \times h \end{cases}$$

چون حجم آب یکسان می باشد، پس:

$$\frac{2}{3} \pi (12)^3 = \pi (12)^2 \times h \Rightarrow h = 8$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ است.

چون رئوس مکعب بر سطح کره قرار دارند، پس اندازه‌ی قطر مکعب برابر قطر دایره است.

$$a\sqrt{3} = 2R \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ شعاع کره‌ی محیطی}$$

$$\text{سطح کره} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3\pi a^2$$

$$\text{سطح کل مکعب} = 6a^2$$

$$\frac{S_{\text{مکعب}}}{S_{\text{کره}}} = \frac{6a^2}{3\pi a^2} = \frac{2}{\pi}$$

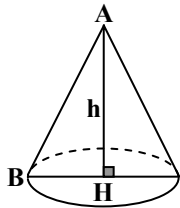
۴۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{cases} \text{حجم کره } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{سطح کره } S = 4\pi R^2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi} \Rightarrow R = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{\pi})^3}{4\pi(\frac{1}{\pi})^2} = \frac{1}{3\pi}$$

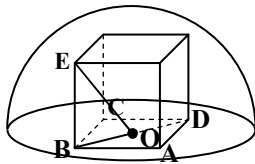
۴۱- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\begin{cases} \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = 2\sqrt{2}R$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow AB^2 = 8R^2 + R^2 \Rightarrow AB^2 = 9R^2 \Rightarrow AB = 3R$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ است.



مطابق شکل طول BO برابر نصف طول قطر مربع ABCD است، پس $BO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، همچنین

طول OE برابر شعاع نیم کره است، پس $OE = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. از طرفی چون منشور قائم است،

پس $EB \perp BO$ و بنابراین مثلث BEO در رأس B، قائم الزاویه است و با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$EB^2 = OE^2 - BO^2 = (\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3 - \frac{2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow EB = \frac{3}{2}$$

چون منشور قائم است، پس می‌توانیم EB را ارتفاع آن در نظر بگیریم.

با در نظر گرفتن EB به عنوان ارتفاع، می‌توانیم مربع ABCD را قاعده‌ی منشور در نظر بگیریم، مساحت هر مربع به قطر d برابر $S = \frac{d^2}{2}$ است

$$S_{ABCD} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (چرا؟). پس } \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \text{حجم منشور} : V = S_{ABCD} \cdot EB = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

۴۳- گزینه ۳ پاسخ است.

(سطح قاعده) \times ارتفاع $= \frac{1}{3}$ حجم مخروط

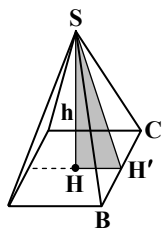
ارتفاع \times سطح قاعده = حجم استوانه

$$\frac{\text{حجم مخروط}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{\frac{1}{3}(10) \times 6}{5 \times 2} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 60 \Rightarrow \text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = 60 \Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}(60) = 20$$

۴۴- گزینه ۳ پاسخ است.

در مثلث قائم الزاویه SHH' داریم:



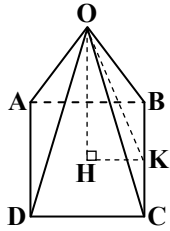
$$HH' = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$SH' = \sqrt{h^2 + HH'^2} = \sqrt{3^2 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 4(S_{\triangle SBC}) \Rightarrow S = 4(2\sqrt{3}) \times \frac{2\sqrt{3}}{2} = 24$$

۴۵- گزینه ۴ پاسخ است.

در مثلث قائم الزاویه OHK رابطه‌ی زیر برقرار است:



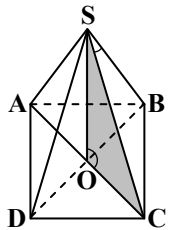
$$OH^2 + HK^2 = OK^2 \Rightarrow (12)^2 + HK^2 = (13)^2$$

$$HK^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow HK = 5 \Rightarrow AB = 10$$

مساحت مثلث OBC + مساحت مربع = سطح کل هرم

$$= AB^2 + 4 \left(\frac{OK \times BC}{2} \right) = 10^2 + 4 \left(\frac{13 \times 10}{2} \right) = 100 + 260 = 360$$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ است.



a = ضلع قاعده

$$\text{قطر قاعده} = a\sqrt{2}$$

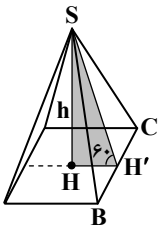
$$SO = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{نصف قطر قاعده}$$

مثلث SOC قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است:

$$SC = \sqrt{OS^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = a$$

۴۷- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر از نقطه‌ی H' یک خط مانند SH' بر یال AB عمود شود و در قاعده‌ی هرم HH' بر یال AB عمود شود، آن‌گاه زاویه‌ی $HH'S$ مسطحه فرجه است:



$$HH' = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{در مثلث قائم الزاویه‌ی } SHH' \text{ داریم:}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{SH}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{SH}{\sqrt{3}} \Rightarrow SH = 3 \quad \text{ارتفاع هرم}$$

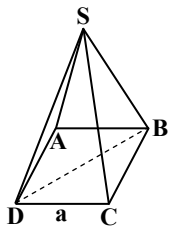
$$V = \frac{1}{3} (2\sqrt{3})^2 \times 3 = 12$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر صفحه‌ای موازی قاعده‌ی هرم رسم شود، نسبت حجم‌های دو هرم ایجاد شده برابر با مکعب نسبت ارتفاع‌های آن‌ها است:

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'} \right)^3 \Rightarrow \frac{V}{V'} = (2)^3 = 8 \Rightarrow V' = \frac{1}{8} V$$

۴۹- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\text{ارتفاع} \times (\text{سطح قاعده}) = \frac{1}{3} \text{حجم هرم}$$

$$\text{قطر مربع} = a\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 1$$

در گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) ضلع قاعده مساوی ۱ می‌باشد، پس آن‌که ارتفاع بیش‌تری دارد حجم بیش‌تری دارد. یعنی بین گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) گزینه‌ی (۱) حجم بیش‌تری دارد. اکنون آن را با گزینه‌ی (۴) مقایسه می‌کنیم.

$$V_1 = \frac{1}{3} (3)(1) = 1$$

حجم هرم گزینه‌ی (۱)

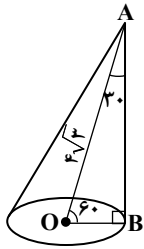
$$V_4 = \frac{1}{3} (\sqrt{3})^2 \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

حجم هرم گزینه‌ی (۴)

بنابراین گزینه‌ی (۴) دارای حجم بیش‌تری است.

۵۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\text{ارتفاع} \times (\text{سطح قاعده}) = \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط قائم یا مایل}$$



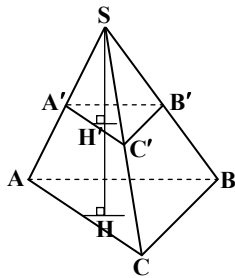
در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه 60° مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است:

$$AB = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6 \quad \text{ارتفاع مخروط:}$$

$$OB = R = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \text{ضلع مقابل به زاویه } 30^\circ:$$

$$V = \frac{1}{3} [\pi (2\sqrt{3})^2] \times 6 = 24\pi$$

۵۱- گزینه ۴ پاسخ است.



اگر از وسط یال SA که آن را A' نامیده‌ایم صفحه‌ای به موازات قاعده‌ی ABC رسم کنیم، این صفحه از وسط یال‌های SB و SC (نقاط B' و C') می‌گذرد. با استفاده از قضیه‌ی تالس در سه مثلث SAB، SBC و SAC، نتیجه می‌شود که هر یک از اضلاع مثلث $A'B'C'$ ، نصف اضلاع نظیر در مثلث ABC است، پس مساحت

$$\text{مثلث } A'B'C', \frac{1}{4} \text{ مساحت مثلث ABC است.}$$

داریم:

$$\frac{V(S-A'B'C')}{V(S-ABC)} = \frac{\frac{1}{3} SH' \times S_{A'B'C'}}{\frac{1}{3} SH \times S_{ABC}} = \frac{SH'}{SH} \times \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

با نظیر استدلال بالا، می‌توان گفت با رسم صفحاتی موازی قاعده‌ها، چهار هرم جدید ایجاد می‌شود که حجم هر یک $\frac{1}{8}$ حجم هرم $S-ABC$

است، پس حجم قسمت باقی‌مانده، برابر است با:

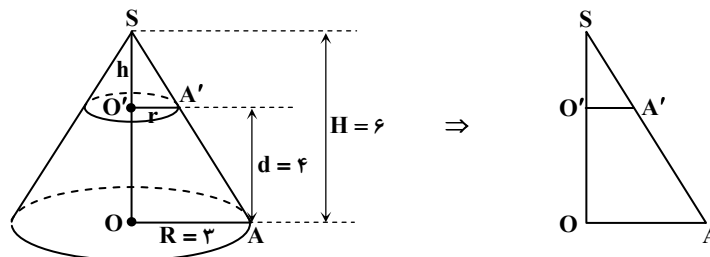
$$V_{S-ABC} - 4 \times \frac{1}{8} V_{S-ABC} = \frac{1}{2} V_{S-ABC}$$

۵۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\text{حجم} = \pi R^2 h = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = 2\pi R h \quad \text{و}$$

$$2\pi R h = 4\pi R^2 h \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

۵۳- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\text{ارتفاع مخروط جدا شده: } h = SO' = SO - OO' = 6 - 4 = 2$$

$$O'A' \parallel OA \Rightarrow \frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{H} \Rightarrow \frac{r}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow r = 1$$

$$\text{حجم مخروط جدا شده: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (1)^2 (2) = \frac{2\pi}{3}$$

۵۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \\ V' = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{3} R\right)^2 (3h) = \frac{1}{9} \pi R^2 h \end{cases} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{9} \pi R^2 h}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ برابر می شود.}$$

۵۵- گزینه ۴ پاسخ است.

به طور مستقیم با استفاده از تقسیم کره به شبه هرم های بسیار زیاد که قاعده ی آن ها روی سطح کره بوده و رأس همگی آن ها در مرکز کره قرار دارند، محاسبه می شود.

۵۶- گزینه ۲ پاسخ است.

توپ در هر دور به اندازه ی محیط دایره ی عظیمه ی خود (کره ی خود) دور خود می گردد و در واقع مسیری که توپ پس از n دور چرخش طی می کند برابر است با: $2\pi R \cdot n$ لذا داریم:

$$2\pi R n = 800 \text{ Cm} \Rightarrow 2\pi \left(\frac{1}{\pi}\right) n = 800 \Rightarrow n = 40$$

۵۷- گزینه ۱ پاسخ است.

ارتفاع مخروط را h در نظر می گیریم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{1}{3} \pi (2a)^2 h \Rightarrow h = a$$

۵۸- گزینه ۳ پاسخ است.

هنگامی حجم مخروط به بیشترین مقدار خود می رسد که درون مکعب محاط شود یعنی:

$$\begin{cases} h = a \\ r = \frac{a}{2} \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

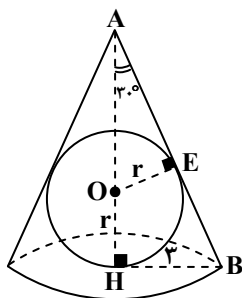
$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 (a) = \frac{\pi}{12} a^3$$

۵۹- گزینه ۳ پاسخ است.

با استفاده از فیثاغورس خواهیم داشت: $r = 4$ لذا:

$$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{استوانه}}} = \frac{\frac{4}{3} \pi \times 5^3}{\pi (4)^2 \times 6} = \frac{125}{72}$$

۶۰- گزینه ۳ پاسخ است.



با توجه به این که در مثلث $\triangle AHB$ داریم: $AB = 6$ و $HB = 3$ پس زاویه ی $\hat{A}_1 = 30^\circ$

است. در نتیجه $OA = 2r$ خواهد شد و در مثلث $\triangle AHB$ فیثاغورس را می نویسیم تا r به دست آید:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow 6^2 = 9r^2 + 9 \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{3})^3 = 4\pi\sqrt{3}$$

