



سایت ریاضی سرا

صفحه	عنوان
۲.....	* مقدمه
	* ریاضی ۲
۴.....	فصل پنجم: مثلثات
۲۱.....	فصل ششم: ماتریس
۳۲.....	فصل هفتم: ترکیبیات
	* آمار و مدل سازی
۴۲.....	فصل ششم: شاخص های مرکزی
۵۱.....	فصل هفتم: شاخص های پراکندگی

فهرست کلی مطالب

جزوه کمک آموزشی گام اول
ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۹۱

www.riazisara.ir

مقدمه

جزوه‌ای که پیش روی شماست دربرگیرنده‌ی تست‌های برگزیده‌ی نیمه‌ی دوم کتاب‌های ریاضی ۲ و آمار و مدل‌سازی می‌باشد. برای استفاده‌ی بهتر از این جزوه، لازم است به تذکرات زیر توجه فرمایید:

۱- با توجه به این‌که رویکرد اصلی مؤسسه‌ی آموزشی فرهنگی گزینه دو در اختیار قرار دادن محتواهای آموزشی مناسب‌تر به داوطلبان عزیز می‌باشد و همچنین برای استفاده‌ی بیش‌تر از آموزش‌های الکترونیک و وب‌سایت مؤسسه در ارائه خدمات و محتواهای آموزشی، بر آن شدیم ضمن غنی‌سازی مجموعه تست‌های آموزشی، جزواتی که تنها دربرگیرنده‌ی تست‌های آموزشی باشد و نکات و روش‌های حل مسائل را در قالب پاسخ‌های تشریحی بیان کرده باشد را در اختیار شما قرار دهیم و درس‌نامه‌های کمک‌آموزشی را برای استفاده‌ی بیش‌تر علاقمندان بر روی پایگاه اینترنتی مؤسسه به آدرس www.gozine2.ir قرار دهیم تا شما بتوانید با مراجعه به سایت، آن‌ها را از قسمت مربوط به طرح گام اول ۹۰ برداشت نمایید. بدین صورت می‌توانیم به هدف اصلی‌مان برسیم؛ یعنی تعداد تست‌های بیش‌تری را در این مجموعه به شما ارائه نماییم.

۲- با توجه به تغییر محتوای کتاب ریاضی ۲ از سال تحصیلی ۸۹-۸۸ و نیاز داوطلبان به داشتن جزوه‌ای نسبتاً کامل و جامع از این کتاب، بر آن شدیم تا محتوای درس‌نامه‌ی آن از حد خلاصه درس فراتر رفته و عمده مطالب درسی را با حل مثال پوشش دهد. از همین رو جزوه‌ای که در پایگاه اینترنتی گزینه دو برای درس ریاضی ۲ در اختیار شما قرار می‌گیرد، جزوه‌ای است جامع دربرگیرنده‌ی عمده مطالب و نکات که برای استفاده بهتر از تست‌های پیش رو توصیه می‌شود این جزوه را حتماً به دقت مطالعه نمایید.

۳- از آن‌جا که مطالب موجود در برخی فصل‌های کتاب ریاضی ۲ با مطالب مطرح شده در کتاب حسابان قرابت موضوعی دارند و نظر به این‌که می‌خواستیم جزوه پیش رو برای هر دو رشته ریاضی و تجربی قابل استفاده باشد، در این جزوه صرفاً مطالب موجود در کتاب ریاضی ۲ مطرح شده است و مطالب تکمیلی‌تر مرتبط که در کتاب حسابان آمده است، در جزوات بعدی و مطابق زمان‌بندی طرح گام اول خدمت شما عزیزان ارائه می‌گردد.

۴- توصیه می‌کنیم بعد از گرفتن جزوه کمک آموزشی از پایگاه اینترنتی مؤسسه گزینه دو و مطالعه‌ی درس‌نامه‌ها به بررسی تست‌های مربوط به همان قسمت اقدام نمایید.

با آرزوی توفیق روزافزون شما
گروه ریاضی مؤسسه گزینه دو



گزیده

مؤسسه آموزشی فرهنگی

سایت ریاضی سرا

ریاضی

www.riazisara.ir

فصل پنجم: مثلثات

۱- یکی از زوایای مثلثی 72° و زاویه‌ی دیگر $\frac{3\pi}{10}$ رادیان است. در این مثلث:

(۱) هر سه زاویه برابرند. (۲) زاویه‌ها به نسبت ۲، ۳ و ۴ هستند.

(۳) زاویه‌ها به نسبت ۳، ۳ و ۴ هستند. (۴) هیچ دو زاویه‌ای برابر نیستند.

۲- یک ساعت دیواری دایره‌ای شکل که طول عقربه‌ی ساعت‌شمار آن ۱۵ سانتی‌متر است، روی دیواری نصب شده است. اگر زاویه‌ی این عقربه را

با جهت مثبت خط افق θ بگیریم، پس از چه مدت زاویه‌ی $\frac{5\pi}{4}$ رادیان توسط این عقربه پیموده می‌شود؟

(۱) $7:30'$ (۲) $7:20'$ (۳) $7:40'$ (۴) $7:50'$

۳- مقدار عددی عبارت $(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)$ برابر می‌شود با:

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۴- اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) -۴

۵- حاصل $(a+b)\sin^2 30^\circ + (a-b)\cos^2 60^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{b}{2}$ (۲) $\frac{a-2b}{4}$ (۳) $\frac{2a+b}{4}$ (۴) $\frac{a}{2}$

۶- اگر $\sin \theta \cdot \cos \theta < 0$ باشد، انتهای کمان θ در «کدام ربع» قرار دارد؟

(۱) اول یا چهارم (۲) دوم یا سوم (۳) دوم یا چهارم (۴) سوم یا چهارم

۷- اگر $\sin \theta > 0$ و $\sin \theta \cdot \tan \theta < 0$ ، آن‌گاه زاویه‌ی θ در کدام ربع دایره‌ی مثلثاتی است؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۸- اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{4}$ و $\tan \theta < 0$ ، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۹- اگر $\sin \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه‌ی چهارم باشد، مقدار $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۰- اگر $\cos \theta - \sin \theta = \frac{6}{5}$ ، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۱- اگر $P(-\sqrt{3}, 1)$ ، یک نقطه از صفحه‌ی مختصات و O مبدأ مختصات باشد، زاویه‌ی OP با جهت مثبت محور xها کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

۱۲- مقدار $\cos(\frac{-875\pi}{3})$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳- اگر $\sin \theta = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه‌ی دوم باشد، مقدار $\tan \theta + \tan 45^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۴- حاصل عبارت $\frac{2\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{3\cot\frac{2\pi}{3} + \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۵- حاصل عبارت $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\tan x}$ (۲) $\tan x$ (۳) $\frac{2}{\tan x}$ (۴) ۲

۱۶- اگر $\cot 34^\circ = 1/5$ باشد، حاصل $A = \frac{2\sin 326^\circ + 3\sin 56^\circ}{\cos 304^\circ}$ چقدر است؟

- (۱) $2/5$ (۲) $6/5$ (۳) -۱ (۴) $-1/5$

۱۷- مقدار عبارت $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۸- حاصل عبارت $\cos^2 \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{6}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر

۱۹- اگر $\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ مقادیر m در کدام فاصله می‌باشد؟

- (۱) $(1, 2]$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(2, 3]$ (۴) $[3, 4)$

۲۰- مقدار عددی $\cos 315^\circ$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۱- اگر $\tan 15^\circ = x$ باشد، حاصل $\frac{\sin 195^\circ + \cos 345^\circ + \cos 75^\circ}{\cos 105^\circ + \sin(-375^\circ)}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{1}{2x}$ (۲) $\frac{2}{x}$ (۳) $-\frac{x}{2}$ (۴) $-2x$

۲۲- مقدار $\cos 20^\circ$ برابر است با:

- (۱) $\sin 110^\circ$ (۲) $\cos 110^\circ$ (۳) $\sin 200^\circ$ (۴) $\cos 200^\circ$

۲۳- حاصل عبارت $2\sin^2 225^\circ - \cot 330^\circ \times \tan 405^\circ$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) $1 - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

۲۴- حاصل کدام گزینه با $\tan 10^\circ$ برابر است؟

- (۱) $\tan(-10^\circ)$ (۲) $\cot 100^\circ$ (۳) $\tan 170^\circ$ (۴) $\tan 190^\circ$

۲۵- اگر $\tan 20^\circ = 0/36$ ، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{17}{8}$ (۴) $\frac{31}{16}$

۲۶- اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\sin x = \frac{m}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

(۱) $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2} < m \leq 2$ (۴) $1 \leq m < \sqrt{2}$

۲۷- حدود k برای این که معادله $\sin x = k$ در فاصله $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ دارای جواب باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-1 \leq k \leq 1$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq 1$ (۴) $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۸- اگر $\tan x + \frac{1}{\tan x} = k - 1$ باشد، حدود k برای آن که معادله جواب داشته باشد کدام است؟

(۱) $-1 < k < 3$ (۲) $k \geq 3$ یا $k \leq -1$ (۳) $k > 2$ (۴) $k < -\frac{1}{2}$

۲۹- معادله $\tan x + \cot x = \sqrt{3}$ چند ریشه در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۰- برد تابع $y = \sqrt{1 - \sin x}$ کدام است؟

(۱) $[0, \sqrt{2}]$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $[0, 2]$

۳۱- کدام معادله ی مثلثاتی زیر ریشه ی حقیقی ندارد؟

(۱) $\sqrt{3} \sin^2 x = \sqrt{2}$ (۲) $\sin^2 x = \sqrt{5} - 2$ (۳) $2 \sin^2 x = 4$ (۴) $\sin^2 x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{6}$

۳۲- کدام یک از بازه های زیر، بیانگر برد تابع $y = 2 - 3 \sin(x - \frac{\pi}{4})$ می باشد؟

(۱) $[-1, 1]$ (۲) $[-1, 5]$ (۳) $[-5, 1]$ (۴) $[-2, 3]$

۳۳- معادله $(\sin x + 1)^2 - \frac{9}{4} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱

۳۴- معادله $(2 \sin x + 1)(3 \sin x + 2) = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱

۳۵- معادله $(\sin x - \frac{1}{4})(\sin x + \frac{1}{3})(\sin x - \frac{1}{6}) = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲

۳۶- فاصله ی بین نقاط ماکزیمم و می نیمم تابع $f(x) = 2 \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) 2π (۲) $\pi + 2$ (۳) $\sqrt{\pi^2 + 4}$ (۴) $\sqrt{\pi^2 + 16}$

۳۷- کم ترین مقدار عبارت $3 \cos^4 x - 4 \cos^3 x + 1$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۳۸- دامنه ی تابع $y = \sqrt{2 \sin x - 2}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ (۲) $\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$ (۳) $[0, 2\pi]$ (۴) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

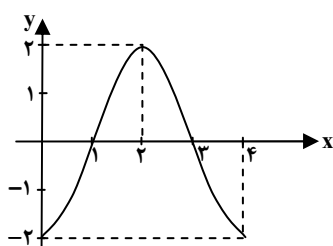
۳۹- نمودار شکل مقابل مربوط به کدام یک از گزینه های زیر می باشد؟

(۱) $y = -2 \cos 4x$

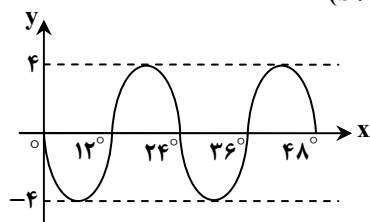
(۲) $y = -2 \cos \frac{\pi x}{2}$

(۳) $y = 2 \cos(\frac{-x}{4})$

(۴) $y = 3 \cos(\frac{-\pi x}{2})$



۴۰- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin bx$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟ ($b > 0$)



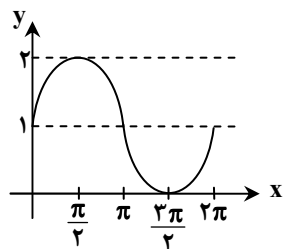
(۱) $(4, 24)$

(۲) $(-4, 24)$

(۳) $(4, 15)$

(۴) $(-4, 15)$

۴۱- نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. معادله‌ی آن کدام است؟



(۱) $f(x) = \cos x + 1$

(۲) $f(x) = \sin x - 1$

(۳) $f(x) = \cos x - 1$

(۴) $f(x) = \sin x + 1$

۴۲- کدام عبارت نادرست است؟

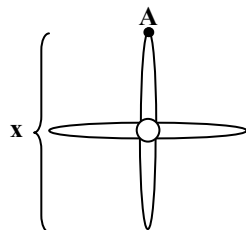
(۲) $\sin 160^\circ > \cos 285^\circ$

(۱) $\sin 37^\circ > \cos 75^\circ$

(۴) $\cos(-65^\circ) < \sin 55^\circ$

(۳) $\cos 125^\circ < \cos 212^\circ$

۴۳- یک ژنراتور بادی شروع به چرخش می‌کند و t ثانیه پس از شروع حرکت، ارتفاع نوک یک پره‌ی این ژنراتور (نقطه‌ی A) از سطح زمین از رابطه‌ی $h = 45 + 30 \sin 10t$ به دست می‌آید. قطر پره‌ی ژنراتور (x) چقدر است؟



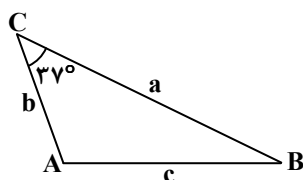
(۱) ۱۰

(۲) ۱۵

(۳) ۳۰

(۴) ۶۰

۴۴- در مثلث مقابل $a = 2b$ و $c \cos B + b \cos C = 6$ می‌باشد. مساحت مثلث کدام است؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$)



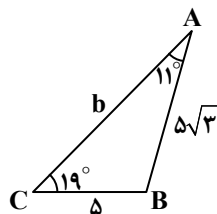
(۱) $5/4$

(۲) $4/5$

(۳) ۵

(۴) $4/8$

۴۵- در شکل روبه‌رو اندازه‌ی b کدام است؟



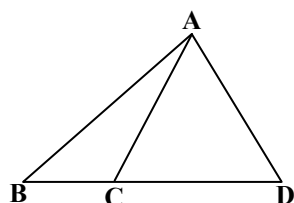
(۱) ۵

(۲) $5\sqrt{5}$

(۳) $5\sqrt{6}$

(۴) $5\sqrt{7}$

۴۶- در شکل مقابل $\hat{ADC} = 75^\circ$ و $\hat{BAC} = 15^\circ$ و $\hat{ACB} = 120^\circ$ می‌باشند اگر $AD = 30$ و $AC = 20\sqrt{6}$ باشد محیط مثلث ABD کدام است؟



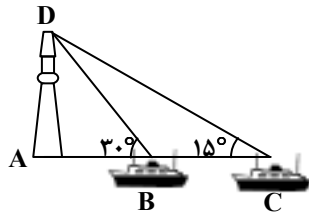
(۱) $90 + 30\sqrt{3}$

(۲) $90 + 20\sqrt{5}$

(۳) $30 + 80\sqrt{3}$

(۴) $60 + 30\sqrt{6}$

۴۷- دو کشتی مطابق شکل نوری را از یک برج مراقبت دریافت می کنند. اگر کشتی C نور را با زاویه ی 15° و کشتی B نور را با زاویه ی 30° نسبت به خط افق دریافت کنند و فاصله ی دو کشتی یک کیلومتر باشد، فاصله ی کشتی C از محل انتشار نور (D) چند کیلومتر است؟



(۱) $2 + \sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

(۳) $2 + 2\sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$

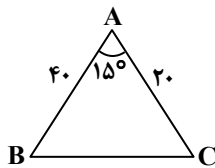
۴۸- اگر $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ باشد، مساحت مثلث ABC چقدر است؟

(۱) $10(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

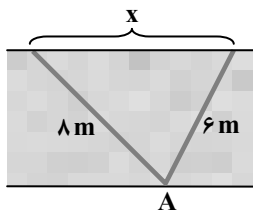
(۲) $100(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

(۳) $25(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

(۴) $50(\sqrt{6} - \sqrt{2})$



۴۹- نوک دو چوب به طول های ۶ و ۸ متر در نقطه ی A روی رودخانه قرار گرفته اند. اگر سینوس زاویه ی حاده ی بین این دو چوب $\frac{\sqrt{55}}{8}$ باشد، فاصله ی دو سر دیگر چوب در آن سوی رودخانه کدام است؟



(۱) ۸

(۲) $12\sqrt{55} - 10$

(۳) $8\sqrt{2}$

(۴) $6\sqrt{2}$

۵۰- اگر در مثلثی $AB = 6$ و $BC = 4$ و $AC = 5$ باشد، آن گاه در این مثلث کدام غلط است؟

(۴) $\hat{A} < 90^\circ$

(۳) $\hat{C} > 90^\circ$

(۲) $\hat{C} < 90^\circ$

(۱) $\hat{B} < 90^\circ$

۵۱- در یک مثلث قائم الزاویه که $\hat{A} = 30^\circ$ و $AB = 4$ ، طول نیم سازه ی زاویه ی حاده ی B چقدر است؟

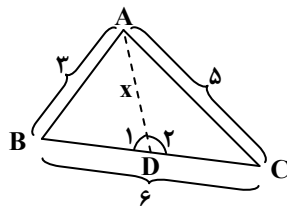
(۴) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(۳) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۵۲- مزرعه ای مثلثی شکل به ابعاد زیر با کشیدن یک دیوار که از یک رأس به وسط بزرگ ترین ضلع کشیده شده است، به دو مزرعه ی جداگانه تبدیل شده است. طول دیوار کشیده شده کدام است؟



(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) ۴

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) ۶

۵۳- اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاعی عدد طبیعی باشد، مساحت مثلث کدام می تواند باشد؟

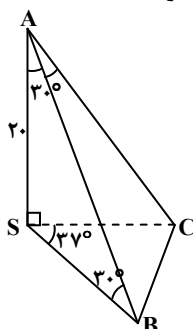
(۴) $\sqrt{5}$

(۳) ۲

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{3}$

۵۴- هرمی به صورت زیر ساخته شده است. مساحت کف هرم (مثلث SBC) چقدر است؟ (\hat{ASB} و \hat{ASC} قائم الزاویه اند و $\sin 37^\circ \approx 0.6$)



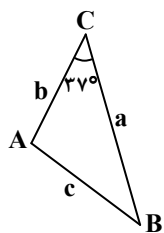
(۱) $200\sqrt{3}$

(۲) ۱۲۰

(۳) $100\sqrt{3}$

(۴) ۲۴۰

۵۵- در مثلث مقابل $a = 2b$ و $c \cos \hat{B} + b \cos \hat{C} = 6$ می‌باشد. مساحت مثلث کدام است؟ ($\sin 37^\circ \approx 0.6$)



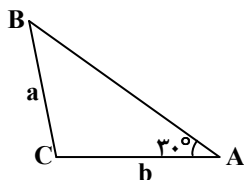
(۱) $5/4$

(۲) $4/5$

(۳) 5

(۴) $4/8$

۵۶- شکل بال یک هواپیمای اسباب‌بازی به صورت مقابل است. اگر $b = a\sqrt{2}$ باشد، زاویه منفرجه‌ی C چند درجه است؟



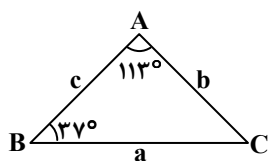
(۱) 115°

(۲) 120°

(۳) 135°

(۴) 105°

۵۷- در مثلث ABC نسبت $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟ ($\sin 37^\circ \approx 0.6$ و $\sin 113^\circ \approx 0.8$)



(۱) $\frac{25}{9}$

(۲) $\frac{25}{6}$

(۳) $\frac{12}{25}$

(۴) $\frac{14}{5}$

۵۸- سرسره‌ای را در نظر بگیرید که نردبانی به طول $4/5$ متر جهت بالا رفتن دارد. اگر طول سرسره $5/4$ متر باشد و نردبان زاویه‌ی 65° با زمین بسازد، کسینوس زاویه‌ی حاده‌ای که سرسره با زمین می‌سازد کدام است؟ ($\sin 65^\circ \approx 0.9$)

(۴) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

(۳) $\frac{9}{16}$

(۲) $\frac{7}{16}$

(۱) $\frac{3}{4}$

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\text{رادیان} = \frac{3\pi}{10} = \frac{3 \times 180^\circ}{10} = 54^\circ$$

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

برای راحتی کار $\frac{5\pi}{4}$ رادیان را به درجه تبدیل می‌کنیم. می‌دانیم $\frac{5\pi}{4} = \frac{5 \times 180^\circ}{4} = 225^\circ$ رادیان. هم‌چنین در هر $60'$ (60 دقیقه) عقربه‌ی ساعت‌شمار $30^\circ = \frac{360^\circ}{12}$ را طی می‌کند. لذا در هر دقیقه این عقربه زاویه‌ی $0/5^\circ = \frac{30^\circ}{60}$ درجه را طی می‌کند. حال باید ببینیم در چه مدت زاویه‌ی 225° طی می‌شود.

زاویه‌ی طی شده (درجه)

$$\begin{array}{cc} 1 & 0/5 \\ x & 225 \end{array} \Rightarrow x = \frac{225}{0/5} = 450 \text{ دقیقه}$$

بنابراین پس از 450 دقیقه یعنی $7 \times 60 + 30$ یا به عبارت دیگر (7 ساعت و نیم) این زاویه طی می‌شود.

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ) = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{-\sin(\pi + \alpha) - \cos\alpha} = \frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$$

صورت و مخرج را بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم.

$$= \frac{-1 - \tan\alpha}{\tan\alpha - 1} = \frac{-1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} = 5$$

۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\text{می‌دانیم که: } \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ و } \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \text{ بنابراین:}$$

$$(a+b)\sin^2 30^\circ + (a-b)\cos^2 60^\circ = (a+b)\left(\frac{1}{4}\right) + (a-b)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{a}{4} - \frac{b}{4} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$$

۶- گزینه ۳ پاسخ است.

عبارت $\sin\theta \cos\theta$ هم‌علامت با عبارت $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ می‌باشد که همان $\tan\theta$ است. پس $\sin\theta \cos\theta < 0$ معادل با $\tan\theta < 0$ است و $\tan\theta$ در ربع‌های دوم و چهارم منفی است.

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \sin\theta \cdot \tan\theta < 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{باشد تا رابطه } \sin\theta \cdot \tan\theta < 0 \text{ برقرار باشد}]{\text{با توجه به اینکه } \sin\theta > 0 \text{ بنابراین باید } \tan\theta < 0} \begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \tan\theta < 0 \end{cases}$$

حال با توجه به این‌که سینوس در ناحیه‌های اول و دوم مثبت است و تانژانت هم در ناحیه‌های دوم و چهارم منفی است، متوجه می‌شویم که فقط در ناحیه‌ی دوم است که سینوس مثبت و تانژانت منفی است.

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$$1 - \cos \theta = \frac{5}{4} \Rightarrow -\cos \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{انتهای کمان } \theta \text{ در ربع دوم یا سوم می باشد.}$$

همچنین $\tan \theta$ در ربع های دوم و چهارم منفی است، لذا انتهای کمان θ در ربع دوم می باشد.

۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \pm \frac{1}{3} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم}} \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.

راه حل اول:

$$\cos \theta = \sin \theta + \frac{6}{5}$$

از آن جا که $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ می باشد بنابراین $\sin \theta$ باید منفی باشد تا $\cos \theta$ بامعنی باشد. به علاوه $\cos \theta$ همواره مثبت می شود، زیرا

حداقل مقدار $\sin \theta = -1$ می باشد و $-1 + \frac{6}{5} > 0$ است. پس همواره $\cos \theta > 0$ می باشد، بنابراین از آن جا که $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta > 0$ ،

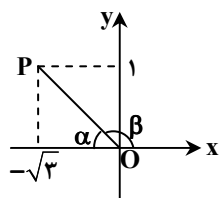
انتهای کمان θ در ربع چهارم است.

راه حل دوم:

$$(\cos \theta - \sin \theta)^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow 1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{36}{25} \Rightarrow \sin \theta \cdot \cos \theta = -\frac{11}{50}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} & \Rightarrow \cos \theta < 0, \sin \theta > 0 \Rightarrow \cos \theta - \sin \theta < 0 \\ \text{گزینه ی (۴) صحیح است.} & \\ \text{انتهای کمان } \theta \text{ در ربع دوم} & \\ \text{انتهای کمان } \theta \text{ در ربع چهارم} & \Rightarrow \cos \theta > 0, \sin \theta < 0 \Rightarrow \cos \theta - \sin \theta > 0 \end{cases}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

اما مسأله از ما زاویه ی OP با جهت مثبت محور x ها را می خواهد (یعنی زاویه ی β را می خواهد)

که داریم:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \xrightarrow[\alpha = 30^\circ]{\text{از طرفی می دانیم که:}} 30^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\cos\left(\frac{-875\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{875\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{875\pi - \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{874\pi}{3}\right) = \cos\left(291\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \xrightarrow{\sin \theta = \frac{3}{5}} \frac{9}{25} + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \xrightarrow[\text{در ربع دوم } \cos \theta \text{ منفی است}]{\theta \text{ در ربع دوم}} \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

از طرفی می دانیم که $\tan 45^\circ = 1$ است بنابراین به طور کلی داریم:

$$\tan \theta + \tan 45^\circ = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{aligned} 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= -2\sin\frac{\pi}{3} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \\ \sin\frac{11\pi}{6} &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ 3\cot\frac{2\pi}{3} &= 3\cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -3\cot\frac{\pi}{3} = -3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \\ \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) &= \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \text{حاصل عبارت} &= \frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{2}}{-\sqrt{3} + \frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

برای حل ابتدا به طور جداگانه هر کدام از نسبت های مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{(1)} = \sin x \quad \text{و} \quad \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}_{(1)} = -\sin x \quad \text{و} \quad \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{(1)} = \cos x \quad \text{و} \quad \underbrace{\cos(-x)}_{(1)} = \cos x$$

ناحیه ی چهارم: \cos مثبت (۱) ناحیه ی اول: \sin مثبت (۱) ناحیه ی دوم: \cos منفی (۱) ناحیه ی اول: \cos مثبت

(۲) \sin به \cos تبدیل می شود. (۲) \cos به \sin تبدیل می شود. (۲) \cos به \sin تبدیل می شود.

حال داریم:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)} = \frac{\sin x - (-\sin x)}{\cos x + \cos x} = \frac{2\sin x}{2\cos x} = \tan x$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{aligned} \sin 326^\circ &= \sin(2\pi - 34^\circ) = -\sin 34^\circ \\ \cos 304^\circ &= \cos(2\pi - 56^\circ) = \cos 56^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 34^\circ\right) = \sin 34^\circ \\ \frac{-2\sin 34^\circ + 2\cos 34^\circ}{\sin 34^\circ} &= -2 + 2\cot 34^\circ = -2 + 2(1/5) = 2/5 \end{aligned}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) &= \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\sin 45^\circ\right)\left(-\cos 45^\circ\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \text{ناحیه ی دوم:} & \quad \text{ناحیه ی سوم:} \\ \cos & \quad \sin \end{aligned}$$

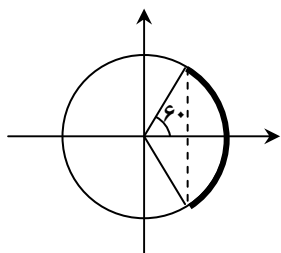
۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\cos^2\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{6} = \cos^2\left(\frac{4\pi + \pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{6\pi + \pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

ناحیه ی سوم: \sin منفی ناحیه ی سوم: \cos منفی

$$= [-\cos(\frac{\pi}{4})]^2 + (-\sin\frac{\pi}{6}) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ است.



$$\frac{-\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9} \Rightarrow \frac{-\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos 3x \leq 1$$

طبق شکل $\cos 3x$ در قسمت‌های پررنگ شده قرار می‌گیرد، یعنی مابین $(\frac{1}{2}, 1]$

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\cos 315^\circ = \cos (360^\circ - 45^\circ) = \cos (-45^\circ) = \cos (45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ناحیه‌ی چهارم: \cos مثبت

صفحات ۱۳۲ تا ۱۳۶ کتاب

۲۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\frac{\sin 195^\circ + \cos 345^\circ + \cos 75^\circ}{\cos 105^\circ + \sin (-375^\circ)} = \frac{\sin (180^\circ + 15^\circ) + \cos (360^\circ - 15^\circ) + \cos (90^\circ - 15^\circ)}{\cos (90^\circ + 15^\circ) - \sin (360^\circ + 15^\circ)} = \frac{-\sin 15^\circ + \cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{-\sin 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{-2\sin 15^\circ}$$

با توجه به این که:

$$\tan 15^\circ = x \Rightarrow \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = x \Rightarrow \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\cos 15^\circ}{-2\sin 15^\circ} = \frac{1}{-2x} = -\frac{1}{2x}$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$\sin 110^\circ = \sin (90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

(۱) ناحیه‌ی دوم: \sin مثبت

(۲) \sin به \cos تبدیل می‌شود.

۲۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 225^\circ - \cot 330^\circ \times \tan 405^\circ &= 2 \sin^2 (180^\circ + 45^\circ) - \cot (360^\circ - 30^\circ) \times \tan (360^\circ + 45^\circ) \\ &= 2 \sin^2 45^\circ - \cot (-30^\circ) \times \tan (45^\circ) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3} \times 1 = 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ است.

برای حل باید مقدار هر یک از گزینه‌ها را محاسبه کنیم:

۱ : گزینه ۱ : $\tan (-10^\circ) = -\tan 10^\circ$ نادرست است.

ناحیه‌ی چهارم: \tan منفی

۲ : گزینه ۲ : $\frac{1}{\tan 100^\circ} = \frac{1}{\tan (90^\circ + 10^\circ)} = -\frac{1}{\tan 10^\circ}$ نادرست است.

ناحیه‌ی دوم: \tan منفی

۳ : گزینه ۳ : $\tan (170^\circ) = \tan (180^\circ - 10^\circ) = -\tan 10^\circ$ نادرست است.

ناحیه‌ی دوم: \tan منفی

۴ : گزینه ۴ : $\tan (190^\circ) = \tan (180^\circ + 10^\circ) = \tan 10^\circ$ صحیح است.

ناحیه‌ی سوم: \tan مثبت

یادآوری می‌کنیم $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ است.

۲۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\tan 20^\circ = 0.36, \quad \frac{\sin 160^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin (180^\circ - 20^\circ) - \cos (180^\circ + 20^\circ)}{\cos (90^\circ + 20^\circ) + \sin (90^\circ + 20^\circ)}$$

حال هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی را جداگانه ساده می‌کنیم که در این صورت داریم:

$$\sin (180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\cos (180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

ناحیه‌ی دوم: Sin مثبت

ناحیه‌ی سوم: Cos منفی

$$\cos (90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\sin (90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

(۱) ناحیه‌ی دوم: Cos منفی

(۱) ناحیه‌ی اول: Sin مثبت

(۲) Cos به Sin تبدیل می‌شود.

(۲) Sin به Cos تبدیل می‌شود.

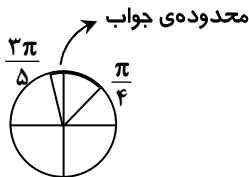
بنابراین داریم:

$$\frac{\sin (180^\circ - 20^\circ) - \cos (180^\circ + 20^\circ)}{\cos (90^\circ + 20^\circ) + \sin (90^\circ - 20^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ - (-\cos 20^\circ)}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}$$

حال صورت و مخرج کسر را به $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم.

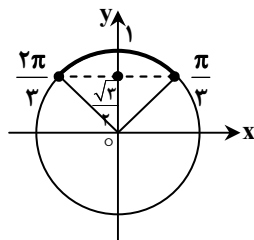
$$\frac{\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\frac{-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}} = \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1} \quad \text{حال می‌دانیم که: } \tan 20^\circ = 0.36 \Rightarrow \frac{0.36 + 1}{-0.36 + 1} = \frac{1.36}{0.64} = \frac{17}{8}$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ است.



$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{2} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2} < m \leq 2$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.



$\sin \theta$ در فاصله‌ی $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{2\pi}{3}$ مرتباً افزایش می‌یابد تا در $\frac{\pi}{2}$ به بیش‌ترین مقدار خود یعنی

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$ می‌رسد. سپس مقدار آن کاهش می‌یابد و در $\frac{2\pi}{3}$ به $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌رسد. پس

حدود تغییرات $\sin x$ ، به صورت $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq 1$ می‌باشد، پس $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq 1$.

۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.

راه حل اول: می‌گیریم $\tan x = y$ ، داریم:

$$y + \frac{1}{y} = k - 1 \xrightarrow{\times y} y^2 - y(k-1) + 1 = 0$$

شرط این‌که معادله‌ی فوق جواب داشته باشد، حدود تغییرات k را مشخص می‌کند.

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow [-(k-1)]^2 - 4(1)(1) \geq 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 - 4 \geq 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow (k-3)(k+1) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} k \leq -1 \text{ یا } k \geq 3$$

پس گزینه‌ی (۲) جواب است.

راه حل دوم: می‌دانیم برای $a \neq 0$ ، $a + \frac{1}{a} \geq 2$ یا به‌ازای $a < 0$ ، $a + \frac{1}{a} \leq -2$ ، بنابراین داریم:

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } \tan x > 0 \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} \geq 2 \\ \text{اگر } \tan x < 0 \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-1 \geq 2 \Rightarrow k \geq 3 \\ k-1 \leq -2 \Rightarrow k \leq -1 \end{cases}$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ است.

راه حل اول:

$$\tan x + \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = \sqrt{3} \xrightarrow{\tan x=y} y + \frac{1}{y} = \sqrt{3} \Rightarrow y^2 - \sqrt{3}y + 1 = 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$$

$$\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4(1)(1) = 3 - 4 = -1 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

راه حل دوم: می‌دانیم همواره برای $a \neq 0$ ، $a + \frac{1}{a} \geq 2$ یا به ازای $a + \frac{1}{a} \leq -2$. چون $\sqrt{3} \not\geq 2$ و $\sqrt{3} \not\leq -2$ بنابراین معادله‌ی

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \sqrt{3}$$

جواب ندارد.

۳۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow[\text{جهت های نامساوی عوض می شود}]{\text{جزء به جزء نامساوی را در (-۱) ضرب می کنیم}} 1 \geq -\sin x \geq -1 \xrightarrow[\text{جزء به جزء نامساوی را با ۱ جمع می کنیم}]{\text{}} 2 \geq 1 - \sin x \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1 - \sin x} \leq \sqrt{2} \Rightarrow R_f = [0, \sqrt{2}]$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\sqrt{3} \sin^2 x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \xrightarrow[0 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq 1]{0 \leq \sin^2 x \leq 1} \text{ معادله جواب دارد.}$$

$$2 \text{ گزینه ی } \sin^2 x = \sqrt{5} - 2 \xrightarrow{0 < \sqrt{5} - 2 < 1} \text{ معادله جواب دارد.}$$

$$3 \text{ گزینه ی } 3 \sin^2 x = 4 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{3} \xrightarrow{\frac{4}{3} > 1} \text{ معادله جواب ندارد.}$$

$$4 \text{ گزینه ی } \sin^2 x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{6} \xrightarrow{0 < 1 - \frac{\sqrt{5}}{6} < 1} \text{ معادله جواب دارد.}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ است. صفحه ۱۳۷ کتاب

می‌دانیم که: $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ بنابراین داریم:

$$-1 \leq \sin(x - \frac{\pi}{y}) \leq 1$$

حال کافیست طرفین نامساوی بالا را در (-3) ضرب کنیم، (دقت کنید که جهت نامساوی عوض خواهد شد)

$$3 \geq -3 \sin(x - \frac{\pi}{y}) \geq -3 \Rightarrow -3 \leq -3 \sin(x - \frac{\pi}{y}) \leq 3$$

حال به طرفین نامساوی عدد (2) را اضافه می‌کنیم:

$$-1 \leq 2 - 3 \sin(x - \frac{\pi}{y}) \leq 5 \Rightarrow -1 \leq y \leq 5$$

پس برد تابع برابر بازه‌ی $[5 \text{ و } -1]$ می‌باشد که گزینه‌ی ۲ صحیح می‌باشد.

۳۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$(\sin x + 1)^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow (\sin x + 1)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sin x + 1 = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x + 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{5}{2} = -2.5 \end{cases}$$

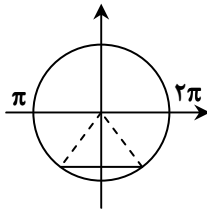
$\sin x = -2.5$ ، غیرقابل قبول است، چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ می‌باشد.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{6} \text{ ق ق} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین در فاصله‌ی $0 \leq x \leq \pi$ دو ریشه داریم.

۳۴- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم که هرگاه ضرب چند عبارت برابر صفر باشد، تک تک آن عبارت‌ها را می‌توان مساوی صفر قرار داد، بنابراین:



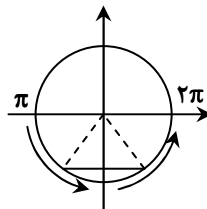
$$(2\sin x + 1)(2\sin x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \\ 2\sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \end{cases}$$

حال برای به‌دست آوردن تعداد ریشه‌ها به دایره‌ی مثلثاتی مقابل توجه کنید.

در دایره‌ی مثلثاتی مقابل در فاصله‌ی $(\pi, 2\pi)$ برای هر مقدار منفی سینوس که در نظر بگیریم، دو زاویه‌ی متمایز به‌دست می‌آید که در این صورت معادله چهار جواب دارد. (مقدار $x = \frac{3\pi}{2}$ استثنا است و در این حالت فقط یک جواب داریم).

۳۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$(\sin x - \frac{1}{4})(\sin x + \frac{1}{3})(\sin x - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{4} \\ \sin x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{3} \\ \sin x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{4} \end{cases}$$



با توجه به این که $\pi \leq x \leq 2\pi$ است و سینوس زوایای بین π و سینوس 2π مقداری منفی است،

بنابراین $\sin x = \frac{1}{4}$ و $\sin x = -\frac{1}{3}$ غیرقابل قبول هستند، هم چنین به استثناء $\sin x = -1$ ، برای

هر مقدار منفی سینوس که در نظر بگیریم دو مقدار به‌دست می‌آید که در این صورت معادله دو جواب دارد.

۳۶- گزینه ۴ پاسخ است.

برای به‌دست آوردن طول نقطه‌ی می‌نیم تابع باید معادله‌ی $\cos x = -1$ و برای به‌دست آوردن طول نقطه‌ی ماکسیم تابع باید معادله‌ی $\cos x = 1$ را حل نماییم.

$$\begin{cases} \cos x = -1 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \pi \Rightarrow A(\pi, -2) \text{ تابع می‌نیم} \\ \cos x = 1 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0 \text{ یا } x = 2\pi \Rightarrow B(0, 2), C(2\pi, 2) \text{ تابع ماکسیم} \end{cases}$$

حال کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A از یکی از دو نقطه‌ی B یا C را محاسبه کنیم.

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\pi^2 + 16}$$

صفحه ۱۴۰ کتاب

۳۷- گزینه ۴ پاسخ است.

برای یافتن مینیمم مطلق باید مقدار تابع را در نقاط بحرانی به دست آورد:

$$\cos x = t$$

$$f(t) = 3t^4 - 4t^3 + 1, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$f'(t) = 12t^3 - 12t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ یا } t = 1$$

$$f(0) = 1, f(1) = 0, f(-1) = 8 \Rightarrow \text{مقدار مینیمم مطلق} = 0$$

۳۸- گزینه ۲ پاسخ است.

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، لذا داریم:

$$2\sin x - 2 \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq 1$$

اما می‌دانیم همواره $-1 \leq \sin x \leq 1$ می‌باشد، لذا تنها حالت قابل قبول در نامساوی بالا این است که $\sin x = 1$ شود.

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

ابتدا مشاهده می شود که مقدار حداقلی و حداکثر تابع برابر ۲- و ۲ می باشد و در تابع $y = a \cos bx$ می دانیم: $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}$ و در شکل داده شده $0 \leq x \leq 4$.

$$\frac{2\pi}{b} = 4 \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین یکی از گزینه های ۲ یا ۴ صحیح می باشد، با توجه به این که مقدار $x = 2$ مقدار حداکثری تابع یعنی $y = 2$ می باشد بنابراین $|a| = 2$ بوده، پس گزینه ی ۲ صحیح می باشد.

۴۰- گزینه ۴ پاسخ است.

نمودار تابع هر 24° تکرار می شود. پس $T = 24^\circ$ می باشد. از طرفی داریم:

$$T = \frac{360^\circ}{|b|} = 24^\circ \Rightarrow |b| = \frac{360^\circ}{24^\circ} = 15 \Rightarrow b = 15$$

به ازای $x = 6^\circ$ مقدار تابع $y = -4$ می شود، لذا داریم:

$$y = a \sin 15x \Rightarrow -4 = a \sin 90^\circ \Rightarrow a = -4$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ است.

راه اول: این نمودار انتقال یافته ی تابع $y = \sin x$ به اندازه ی یک واحد به بالا می باشد، لذا $f(x) = \sin x + 1$.

راه دوم: با توجه به این که نقاط روی منحنی یعنی نقاط $(0, 1)$ و $(\frac{\pi}{2}, 2)$ و $(\pi, 1)$ و $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ و $(2\pi, 1)$ در تابع $y = \sin x + 1$ صدق می کنند، گزینه ی (۴) با نقطه یابی حاصل می شود.

۴۲- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به نمودارهای تابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و افزایشی و کاهشی بودن آن ها در بازه های مختلف داریم:

$$(1) \text{ گزینه ی } \cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ \xrightarrow{\text{در } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ در } \sin x \text{ افزایشی است}} \sin 15^\circ < \sin 37^\circ \Rightarrow \cos 75^\circ < \sin 37^\circ$$

$$(2) \text{ گزینه ی } \begin{cases} \sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ \\ \cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) \xrightarrow{\text{در ربع چهارم } \cos x \text{ مثبت است}} \sin 15^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{در } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ در } \sin x \text{ افزایشی است}} \sin 15^\circ < \sin 20^\circ \Rightarrow \cos 285^\circ < \sin 160^\circ$$

$$(3) \text{ گزینه ی } \begin{cases} \cos 125^\circ = \cos(180^\circ - 55^\circ) \xrightarrow{\text{در ربع دوم } \cos x \text{ منفی است}} -\cos 55^\circ \\ \cos 212^\circ = \cos(180^\circ + 32^\circ) \xrightarrow{\text{در ربع سوم } \cos x \text{ منفی است}} -\cos 32^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{در } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ در } \cos x \text{ کاهشی است}} -\cos 32^\circ > -\cos 55^\circ \Rightarrow \cos 212^\circ < \cos 125^\circ$$

$$(4) \text{ گزینه ی } \begin{cases} \cos(-65^\circ) = \cos 65^\circ \\ \sin(55^\circ) = \cos(90^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{در } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ در } \cos x \text{ کاهشی است}} \cos 35^\circ > \cos 65^\circ \Rightarrow \sin 55^\circ > \cos(-65^\circ)$$

پس تنها گزینه ی (۳) نادرست و جواب صحیح می باشد.

۴۳- گزینه ۴ پاسخ است.

قطر پرهی ژنراتور برابر است با اختلاف بیش ترین و کم ترین فاصله ی یک پره از سطح زمین. بیش ترین ارتفاع یک پره به ازای $\sin 10^\circ t = 1$ و کم ترین ارتفاع یک پره به ازای $\sin 10^\circ t = -1$ حاصل می شوند.

$$h_{\max} = 45 + 30 = 75, h_{\min} = 45 - 30 = 15 \Rightarrow 75 - 15 = 60 \text{ قطر پرهی ژنراتور}$$

۴۴- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم:

$$a = c \cos B + b \cos C$$

$$c \cos B + b \cos C = 6 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \frac{6}{10} = 5.4$$

۴۵- گزینه ۴ پاسخ است.

حال از رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

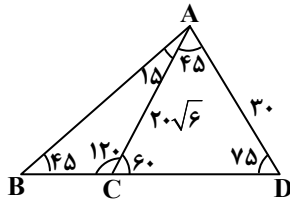
$$b^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2(5)(5\sqrt{3})\cos 150^\circ = 25 + 75 - 50\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 100 + 75 = 175$$

$$\Rightarrow b^2 = 175 \Rightarrow b = \sqrt{175} = \sqrt{25 \times 7} = 5\sqrt{7}$$

صفحات ۱۵۰ و ۱۵۲ کتاب

۴۶- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به زوایای داده شده زاویه B برابر 45° خواهد شد؛ و زاویه \hat{CAD} نیز برابر 45° می‌باشد، حال با توجه به رابطه‌ی سینوس‌ها در مثلث داریم:



$$\Delta ABC: \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} \Rightarrow \frac{\sin 45^\circ}{20\sqrt{6}} = \frac{\sin 120^\circ}{AB} \Rightarrow AB = \frac{20\sqrt{6}(\sin 120^\circ)}{\sin 45^\circ}$$

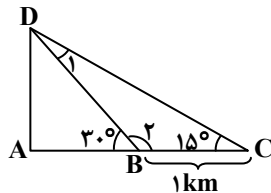
با توجه به این که $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$ داریم:

$$AB = 20\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = 60$$

$$\Delta ABD: BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos \hat{A} \Rightarrow BD^2 = 3600 + 900 - 2(60)(30)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow BD^2 = 2700 \Rightarrow BD = 30\sqrt{3}$$

بنابراین محیط برابر است با: $60 + 30 + 30\sqrt{3} = 90 + 30\sqrt{3}$

۴۷- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\hat{B}_r = (180^\circ - 30^\circ) = 150^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 180^\circ - (150^\circ + 15^\circ) = 15^\circ \Rightarrow$$

$$\hat{D}_1 = \hat{C} \Rightarrow \text{مثلث DBC متساوی الساقین است.} \Rightarrow BC = DB = 1$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کشتی C از محل انتشار نور (DC)، با توجه به قانون کسینوس‌ها در مثلث داریم:

$$DC^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos \hat{B}_r = 2 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow DC = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

(توجه کنید که $\cos \hat{B}_r = \cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

صفحه ۱۵۱ کتاب

۴۸- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم که:

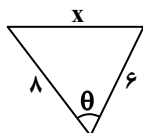
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AB \times AC) \times \sin 15^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 40 \times 20 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 100(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\sin 15^\circ = \sin (90^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ$$

۴۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{55}}{8}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{55}{64} = \frac{9}{64} \xrightarrow[\text{حاده}]{\text{زاویه } \theta} \cos \theta = \frac{3}{8}$$

با توجه به قانون کسینوس‌ها داریم:



$$x^2 = 8^2 + 6^2 - 2(8)(6)\cos \theta = 64 + 36 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{64} = 8$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ است.

در مثلث ABC با توجه به قانون کسینوس ها داریم:

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2(4)(5)\cos C \Rightarrow 36 = 25 + 16 - 40\cos C \Rightarrow -5 = -40\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow \hat{C} < 90^\circ$$

با توجه به این که زاویه ی C روبه روی بزرگ ترین ضلع (AB = 6) قرار دارد، بزرگ ترین زاویه ی مثلث باشد و لذا باقی زوایا نیز نمی توانند بزرگ تر از زاویه ی C باشند. در نتیجه گزینه ی (۳) نادرست است.

۵۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\hat{B} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$$

با توجه به شکل، مثلث ADB متساوی الساقین است، لذا داریم:

$$(\hat{D}_1 = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ)$$

$$4^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos D_1 \Rightarrow 16 = 2x^2 + (-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow 16 = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

۵۲- گزینه ۱ پاسخ است.

در مثلث های ABD و ADC با توجه به این که DC = BD = 3 می باشد، از قانون کسینوس ها داریم:

$$\begin{cases} 3^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x)\cos D_1 \Rightarrow 9 = 9 + x^2 - 6x\cos D_1 & (1) \\ 5^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x)\cos D_2 \Rightarrow 25 = 9 + x^2 - 6x\cos D_2 & (2) \end{cases}$$

با جمع کردن دو طرف رابطه های (۱) و (۲) داریم:

$$34 = 18 + 2x^2 - 6x(\cos D_1 + \cos(180^\circ - D_1)) \Rightarrow 34 = 2x^2 + 18 - \cos D_1$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

۵۳- گزینه ۱ پاسخ است.

می دانیم اندازه ی هر زاویه ی مثلث متساوی الاضلاع ۶۰ درجه است. اگر ضلع این مثلث را a بگیریم، داریم:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin A = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

از آن جا که a عددی طبیعی است، $\frac{a^2}{4}$ عددی گویاست، پس جواب به صورت ضرب عددی گویا در $\sqrt{3}$ می باشد که تنها گزینه ی (۱) می تواند باشد.

۵۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\tan A = \frac{SC}{AS} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{SC}{20} \Rightarrow SC = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

همچنین در مثلث ASB داریم:

$$\tan B = \frac{AS}{SB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20}{SB} \Rightarrow SB = 20\sqrt{3}$$

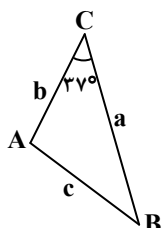
۵۵- گزینه ۱ پاسخ است.

نکته: در قوانین Cos ها داریم:

$$a = c \cos B + b \cos C$$

$$\cos B + b \cos C = 6 \Rightarrow a = 6 \xrightarrow{a=2b} b = \frac{6}{2} = 3$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \frac{6}{10} = 5.4$$



۵۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \xrightarrow{b=a\sqrt{2}} \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin B} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin B}$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{a\sqrt{2}}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{حاده است } \hat{B}} \hat{B} = 45^\circ$$

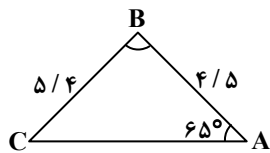
۵۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\hat{C} = 180^\circ - (113^\circ + 37^\circ) = 30^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 113^\circ} = \frac{b}{\sin 37^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} \Rightarrow a = \frac{b \sin 113^\circ}{\sin 37^\circ}, c = \frac{b \sin 30^\circ}{\sin 37^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{b \sin 113^\circ}{\sin 37^\circ} + b}{\frac{b \sin 30^\circ}{\sin 37^\circ}} = \frac{b(\frac{\sin 113^\circ}{\sin 37^\circ} + 1)}{\frac{b \sin 30^\circ}{\sin 37^\circ}} = \frac{14}{6} = \frac{12 \times 14}{6 \times 10} = \frac{14}{5}$$

۵۸- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\frac{5/4}{\sin 65^\circ} = \frac{4/5}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{4/5 \times \sin 65^\circ}{5/4} = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \cos^2 C = 1 - \sin^2 C = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

فصل ششم: ماتریس

۱- ماتریس سطری A به صورت 1×2 به ترتیب شامل درایه‌های ۲ و ۳ و ماتریس ستونی B به صورت 2×1 به ترتیب شامل درایه‌های ۴ و ۵ می‌باشد. حاصل $A \times B$ «چه درایه‌ای» است؟

۱۴ (۱) ۲۳ (۲) ۲۶ (۳) ۴۵ (۴)

۲- اگر داشته باشیم: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و I ماتریس واحد از مرتبه‌ی 2×2 باشد، ماتریس $(A + I) \cdot (A - I)$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -2 & 25 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 & 25 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -2 & 25 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 25 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

۴- با فرض آنکه $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مقدار $x - y$ کدام است؟

۸ (۱) -۸ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴)

۵- حاصل $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

-۱۲۴ (۱) -۹۶ (۲) -۸۴ (۳) -۴۶ (۴)

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} c & d \\ b & a \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -d & -c \\ -b & -a \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، بطوریکه $A^7 = \alpha A + \beta I$ مقدار $\alpha \beta$ کدام است؟

-۲ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

۸- اگر I ماتریس واحد از مرتبه‌ی (2×2) و $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^4 کدام است؟

۴I (۱) ۲I (۲) -۲I (۳) -۴I (۴)

۹- اگر بدانیم $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}$ ، $A^2 = \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ a & b \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $x + y$ کدام است؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های A^5 کدام است؟

۳۲ (۱) ۳۳ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

۱۲- جمع درایه‌های ماتریس X کدام باشد تا تساوی $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ برقرار باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A^{10} کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) 2^{10} (۳) 2^{11} (۴) 2^{12}

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل جمع درایه‌های $A + A^2 + A^3 + A^4$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱۲ (۴) ۶

۱۵- اگر A, B و C ماتریس‌های مربعی و هم‌رتبه باشند، کدام گزینه همواره درست است؟ (\bar{O} ماتریس صفر است).

- (۱) $AB = AC \Rightarrow B = C$ (۲) $AB = \bar{O} \Rightarrow A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$ (۳) $AB = BA$ (۴) $(A+B)C = AC+BC$

۱۶- اگر $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، عدد a کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ آن گاه درباره‌ی دترمینان ماتریس $A \times B$ چه می‌توان گفت؟

- (۱) وجود ندارد (۲) برابر ۱۵۸- است (۳) برابر ۱۵۸ است (۴) برابر صفر است.

۱۸- کارخانه‌ای سه محصول A, B و C را در دو بازار N و M می‌فروشد. اگر تعداد واحدهای محصول فروخته شده در هر بازار به صورت

$$P = \begin{bmatrix} A & B & C \\ 300 & 400 & 500 \\ 200 & 300 & 100 \end{bmatrix} N \quad \text{و هزینه‌ی هر واحد محصول} \quad K = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{و قیمت فروش هر واحد محصول} \quad S = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} M$$

باشد، سود فروش تمام محصولات در بازار N است؟

- (۱) ۷۰۰ (۲) ۱۷۰۰ (۳) ۲۴۰۰ (۴) ۲۰۰۰

۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه‌های ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $A^2 + A$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(A^2)^{-1}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۲- چند مقدار قابل قبول x ، حاصل دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} \log_2(6x-1) & \log_2(1-x) \\ \log_2(1-x) & \log_2(6x-1) \end{bmatrix}$ را صفر می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۳- وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^{-1} کدام است؟

(۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{5}{4}$

۲۵- اگر $2A + I = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $2A^{-1}$ چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، معکوس ماتریس A^3 کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

۲۷- اگر $2A - I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، جمع درایه‌های A^{-1} چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{7}$ (۲) ۵ (۳) $\frac{5}{7}$ (۴) ۱

۲۸- اگر برای دو ماتریس مربعی A و B داشته باشیم $B \times A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ، حاصل ضرب $A^{-1} \times B^{-1}$ برابر کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

(۴) به دلیل عدم جابه‌جایی در ضرب، قابل محاسبه نیست. (۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}$ آن گاه، $(A^{-1})^2$ کدام است $(a \neq \pm 1)$ ؟

(۱) $\frac{1}{a^2-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\frac{1}{a^2-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\frac{1}{a^2-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\frac{1}{a^2-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۳۰- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A کدام است؟

(۱) $\frac{1}{33}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) ۱ (۴) ۳۳

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $2A^{-1}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -۴ (۳) -۱ (۴) -۲

۳۲- هرگاه $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(2A)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۳۳- اگر $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $(2A) \cdot (3A^{-1})$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۳۶

۳۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه جواب معادله $AX = B$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

۳۶- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است. اگر $x + y$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۷- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - 3y = 7 \\ bx + 4y = 2 \end{cases}$ اگر دترمینان ماتریس ضرایب مجهولات برابر ۱۷ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۳۸- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ ، معکوس ماتریس ضرایب مجهول به صورت $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ است. اگر $x = 1$ ، مقدار y کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۹- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه $AX = 2I$ ماتریس X کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

۴۰- از رابطه $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 21 & 17 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 21 & 19 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 31 & 17 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 31 & 19 \end{bmatrix}$

پایخ‌های تشریحی

۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases} A_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \\ B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 8 + 15 = 23$$

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 + a \\ 3 + 2b + a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 1 \\ a + 2b + 3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} a - 3 = 1 \\ 2a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$$

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به این که $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد، داریم:

$$\begin{cases} (A+I) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ (A-I) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow (A+I) \cdot (A-I) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 25 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases} -y + z = -1 \Rightarrow y = 5 \\ y + 2x + z = 1 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \Rightarrow x - y = -8$$

۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\text{انجام ضرب}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ -34 \end{bmatrix} = -22 - 102 = -124$$

۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

ابتدا این دو ماتریس را در هم ضرب می‌کنیم.

۷- گزینه ۱ پاسخ است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta = -2$$

۸- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به این که $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4I$$

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+1 & x+xy \\ 2+2y & 2x+y^2 \end{bmatrix}$$

$$2x+1=11 \Rightarrow x=5 \Rightarrow x+y=7$$

$$(1+y)5=15 \Rightarrow y=2$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به این که $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ می باشد، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین با توجه به این که $A^2 = I$ می باشد، داریم:

$$\begin{cases} A^6 = A^2 \cdot A^2 = I \times I = I \\ A^5 = (A^2)^2 \times A = I \times A = A \end{cases} \Rightarrow A^5 - A^6 = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب ملاحظه می کنید که پس از هر بار عمل ضرب تنها درایه ی a_{11} ، ۲ برابر می شود و باقی درایه ها تغییر نمی کنند. لذا

$$A^5 = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^5 \text{ بنابرین مجموع درایه های } A^5 \text{ برابر ۳۳ می شود.}$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a=0$$

$$b=2$$

$$a+2c=2 \Rightarrow c=1$$

$$b+2d=0 \quad d=-1$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2^3 & 2^3 \end{bmatrix}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت:

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = 2^{10} + 2^{10} = 2 \times 2^{10} = 2^{11}$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به این که $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ است، داریم:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{3 \times 3} \Rightarrow A^6 = A^3 \cdot A = O_{3 \times 3} \cdot A = O_{3 \times 3}$$

$$(A + A^2 + A^3 + A^6) = 3 + 1 + 0 + 0 = 4$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی ندارد، پس گزینه‌ی (۴) نادرست است. گزینه‌ی (۱) نیز نادرست است، زیرا اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ باشند، داریم:}$$

$$\begin{cases} AB = \bar{O} \\ AC = \bar{O} \end{cases} \Rightarrow AB = AC$$

ولی مشخص است که $B \neq C$. گزینه‌ی (۲) نیز نادرست است. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

ولی $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ، بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{انجام ضرب}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a-4 \\ 8 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow 2(2a-4) + 8 = 3 \Rightarrow 4a - 8 + 8 = 3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -10 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 7 \times 14 + 6 \times 10 = 158$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است.

سود برابر با قیمت فروش کل منهای هزینه می‌باشد. قیمت فروش کل از ضرب ماتریس‌های P و S و هزینه از حاصل ضرب ماتریس‌های K و P حاصل می‌شوند. در نتیجه سطر اول ماتریس $PS - PK$ برابر است با میزان سود در بازار N.

$$\begin{bmatrix} 300 & 400 & 500 \\ 200 & 300 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 300 & 400 & 500 \\ 200 & 300 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 + 2000 + 4000 \\ 800 + 1500 + 800 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 900 + 1600 + 3000 \\ 600 + 1200 + 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7200 \\ 3100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5500 \\ 2400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1700 \\ 700 \end{bmatrix}$$

پس سود حاصل از فروش در بازار N، ۱۷۰۰ واحد است.

دقت کنید می‌توانستیم از ابتدا فقط مقادیر مربوط به سطر اول را محاسبه کنیم و محاسبات سطر دوم که مربوط به بازار M است را انجام ندهیم.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\det A = 6 - 3 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \text{ های درایه‌های } = 1 - 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$$A^2 + A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{انجام ضرب}} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 \\ -12 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 12 \\ -16 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^2 + A| = -180 - (-192) = 12$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ است.

روش اول:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |(A^2)^{-1}| = \frac{1}{|A^2|} = \frac{1}{49-48} = 1$$

روش دوم:

$$|(A^2)^{-1}| = \frac{1}{|A^2|} = \frac{1}{|A|^2} = \frac{1}{1} = 1$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{vmatrix} \log_2(x-1) & \log_2(1-x) \\ \log_2(1-x) & \log_2(x-1) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \log_2(x-1)\log_2(x-1) - \log_2(1-x)\log_2(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow [\log_2(x-1)]^2 = [\log_2(1-x)]^2 \xrightarrow{A^2=B^2 \Rightarrow A=\pm B} \begin{cases} \log_2(x-1) = \log_2(1-x) \\ \log_2(x-1) = -\log_2(1-x) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \log_2 A = \log_2 B \Rightarrow A=B \\ -\log_2 A = \log_2 \frac{1}{A} \end{matrix}} \begin{cases} x-1 = 1-x \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ \log_2(x-1) = \log_2 \frac{1}{1-x} \Rightarrow x-1 = \frac{1}{1-x} \Rightarrow -x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

به ازای تمام x های حاصل جلوی هیچ یک از لگاریتم ها منفی نمی شود، پس همه ی x ها قابل قبول اند.

۲۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$|A| = 2 \times (-8) - (-3) \times 5 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \times \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

نکته:

$$A \text{ در ماتریس } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ داریم } |A| = ad - bc \text{ دترمینان } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2) \text{ اگر } |A| \neq 0 \text{ آنگاه وارون ماتریس بالا برابر است با:}$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا دترمینان ماتریس A و سپس معکوس آن را محاسبه می کنیم.

$$|A| = 4 - 0 = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |2A^{-1}| = 4|A^{-1}| = 4 \times \frac{1}{|A|} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad |A| = 2 \neq 0$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A^2| = (4)(-2) - (-3)(3) = -8 + 9 = 1 \Rightarrow (A^2)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$2A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{2}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$A^{-1} \text{ جمع درایه‌های } = \frac{1}{\Delta} (3 + 1 + 2 - 1) = \frac{5}{\Delta}$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.

برای به‌دست آوردن $A^{-1} \times B^{-1}$ کافی است $(B \times A)^{-1}$ یعنی معکوس ماتریس $B \times A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ را به‌دست آوریم:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |B \times A| = (5 \times 3) - (2 \times 7) = 15 - 14 = 1 \Rightarrow (B \times A)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\text{نکته: } (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 - 1 & 0 \\ 0 & a^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$|A^2| = (a^2 - 1)^2 \Rightarrow (A^2)^{-1} = \frac{1}{(a^2 - 1)^2} \begin{bmatrix} a^2 - 1 & 0 \\ 0 & a^2 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 - 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ است.

داریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = (2)(6) - (3)(-7) = 12 + 21 = 33 \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{33}$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad |A| = ad - bc$$

شرط وارون پذیری ماتریس A آن است که $|A| \neq 0$

$$|2A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (2A)^{-1} = \frac{1}{24 - 12} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(2A)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$|(2A)^{-1}| = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (\frac{1}{2} \times 0) - (1 \times (-\frac{1}{2})) \Rightarrow |A| = \frac{1}{2} \xrightarrow{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}} |A^{-1}| = 2$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$2A \cdot 3A^{-1} = (2 \times 3) \underbrace{A \cdot A^{-1}}_I = 6I = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{دترمینان} = 6 \times 6 = 36$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر A^{-1} وارون A باشد خواهیم داشت:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

بنابراین داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ است.

ماتریس مجهولات از ضرب معکوس ماتریس ضرایب در ماتریس مقادیر به دست می آید. بنابراین:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = 3 \Rightarrow x + y = 4$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ است.

ماتریس ضرایب این دستگاه به صورت $A = \begin{bmatrix} a & -3 \\ b & 4 \end{bmatrix}$ می باشد. داریم:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{|A|=17} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 34 & 24 \\ -7b + 2a \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{34}{17} = 2$$

حاصل ضرب را محاسبه می کنیم.

۳۸- گزینه ۱ پاسخ است.

می دانیم در دستگاه معادلات $AX = B$ ، ماتریس دوجوهلی X از رابطه $X = A^{-1}B$ حاصل می شود. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x=1} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ 2f-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -f = 1 \Rightarrow f = -1 \\ y = 2f-1 \Rightarrow y = 2(-1)-1 = -3 \end{cases}$$

۳۹- گزینه ۱ پاسخ است.

می دانیم $2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، داریم:

$$AX = 2I \Rightarrow X = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حال A^{-1} را محاسبه می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -6 - (-4) = -2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ است.

فرض کنید $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$. بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow BAC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{دو طرف را از چپ در } B^{-1}} AC = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{دو طرف را از راست در } C^{-1}} A = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C^{-1} \quad (*)$$

$$|B| = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|C| = -1 \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(*) \Rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{ضرب می کنیم}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 19 \\ -49 & -30 \end{bmatrix}$$

پس گزینه‌ی (۴) جواب است.

فصل هفتم: ترکیبیات

۱- از بین ۴ پرس غذای مختلف و ۳ بطری نوشابه‌های متفاوت، شخصی غذا و نوشابه‌ی مورد نظر خود را برداشته است. چند راه ممکن برای انتخاب غذا و نوشابه‌ی نفر بعدی وجود دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۲- شخصی دارای ۲ کت، ۳ جفت کفش، ۴ شلوار و ۵ پیراهن هر کدام ناهم‌رنگ می‌باشد. با اضافه کردن فقط یک مورد متمایز به کدام یک از پوشش‌های خود، می‌تواند امکان بیش‌ترین شکل متفاوت از آن‌ها را فراهم نماید؟

- (۱) کفش (۲) کت (۳) شلوار (۴) پیراهن

۳- کدام تساوی درست است؟

- (۱) $\frac{9!}{7!} = 72$ (۲) $\frac{5!}{0!} = \infty$ (۳) $\frac{18!}{3!} = 6!$ (۴) $15! + 3! = 18!$

۴- حاصل $(8 \times 9 \times 10)$ با فاکتوریل کدام عدد طبیعی برابر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۵- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\binom{2x}{x+1} = \binom{2x}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۶- اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد، n چه قدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۷- اگر ${}^{14}P(n, 2) = {}^{14}P(2n, 3)$ باشد، مقدار n برابر است با:

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) معادله جواب ندارد.

۸- با اعداد ۸، ۷، ۵، ۱، ۰ و ۳ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام جایز نمی‌باشد).

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۰۰

۹- چند عدد سه رقمی، با ارقام متمایز وجود دارد؟

- (۱) ۴۵۰ (۲) ۵۰۴ (۳) ۶۴۸ (۴) ۷۲۰

۱۰- با اعداد ۳، ۴، ۱، ۰، ۰، ۲، ۲، ۲ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

- (۱) ۸! (۲) $\frac{7!}{2!}$ (۳) $\frac{8!}{3!3!}$ (۴) $\frac{7!}{2!3!}$

۱۱- با ارقام ۸، ۷، ۵، ۳ و ۰ بدون تکرار ارقام، چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴

۱۲- چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیرصفر است؟

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۵۱۲ (۳) ۶۲۵ (۴) ۱۰۲۴

۱۳- با ارقام $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت که زوج باشد؟

- (۱) ۳۸ (۲) ۴۰ (۳) ۴۲ (۴) ۴۴

۱۴- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۰، ۰، ۰ و ۳ می‌توان نوشت؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۵- با ارقام ۳ و ۴ و ... و ۹ چند عدد چهار رقمی بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت که دو تا از رقم‌ها زوج و دو تا از رقم‌ها فرد باشند؟

- (۱) $15 \times 4!$ (۲) $12 \times 4!$ (۳) $18 \times 4!$ (۴) $14 \times 3!$

۱۶- پلاک اتومبیل سواری سری ب در تهران به صورت تهران است که هر ستاره نمایش یک رقم غیرصفر است. در سری ب و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم می‌شود؟

- (۱) ۱۱۶۶۴ (۲) ۱۴۵۸۰ (۳) ۱۵۴۸۰ (۴) ۱۸۲۲۵

۱۷- چند عدد چهار رقمی وجود دارد که مجموع دو رقم اول و آخر آن ۱۲ و مجموع دو رقم دیگر آن ۹ است؟

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۷۰ (۴) ۴۰

۱۸- با جایگشت حروف کلمه‌ی «NADER» چند کلمه‌ی پنج حرفی بدون توجه به مفهوم آن می‌توان ساخت به‌طوری‌که همواره حرف D در وسط قرار گیرد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۹۶ (۴) ۱۲۰

۱۹- به چند روش می‌توان با حروف کلمه‌ی «سازندگی» کلمه‌های ۴ حرفی ساخت (بدون توجه به معنی کلمه) که حرف اول آن‌ها نقطه‌دار نباشد؟ (بدون تکرار حروف)

- (۱) ۶۰۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۵۳۰ (۴) ۶۴۰

۲۰- ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۲۱- چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام با اعداد ۱ تا ۶ می‌توان نوشت که در آن‌ها ارقام ۲ و ۳ کنار هم نباشند؟

- (۱) ۳۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۷۲۰

۲۲- حروف کلمه‌ی «LAGRANGE» را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۷۲۰ (۴) ۱۴۴۰

۲۳- با ارقام ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد شش رقمی می‌توان نوشت به‌طوری‌که ارقام فرد یک در میان باشند؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۵۴ (۳) ۷۲ (۴) ۸۱

۲۴- با رقم‌های ۲ و ۳ و ۶ و ۹ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که در هر کدام حداقل یک رقم تکراری وجود داشته باشد؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۲۸ (۳) ۶۰ (۴) ۴۶

۲۵- حروف کلمه‌ی ASISST را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم آن طوری کنار هم قرار داد که S ها یک در میان باشند؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۸

۲۶- حروف AAABBBCCC را به چند طریق می‌توان پیش هم چید به شرطی که هیچ یک از A ها پیش هم نباشند؟

- (۱) ۷۰۰ (۲) ۷۵۰ (۳) ۸۰۰ (۴) ۸۵۰

۲۷- با ۱۵ نقطه در یک صفحه حداکثر چند بردار غیرصفر می‌توان مشخص کرد؟

- (۱) ۲۱۰ (۲) ۱۶۵ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۰۵

۲۸- با حروف کلمه «بلوچستان» چند کلمه سه حرفی بدون توجه به معنی می‌توان ساخت به طوری که فاقد تکرار باشند؟

- (۱) $\frac{8!}{5!3!}$ (۲) $\frac{8!}{5!}$ (۳) $\frac{8!}{3!}$ (۴) $8!$

۲۹- شرکتی با ۳۰ نوع گزینش برای استخدام یک فروشنده و یک کارمند اداری روبه‌رو شده است. داوطلبان این مشاغل «چند نفر» بوده‌اند؟

- (۱) ۶ (۲) ۳۰ (۳) ۱۲ (۴) ۶۰

۳۰- با حروف کلمه SHOP و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف S باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۳۱- از رابطه‌ی $C(n, n-2) = 120$ ، عدد n کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

۳۲- اگر $C(n, 4) = P(n-1, 2)$ ، عدد n کدام است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۳۴ (۴) ۴۳

۳۳- تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز نسبت به ترکیب‌های ۳ از ۸ شیء مختلف، برابر فاکتوریل چه عددی است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۴- به چند طریق می‌توان ۵ کتاب را در قفسه‌ای چید به طوری که ۳ کتاب مخصوص همزمان پهلوی هم نباشند؟

- (۱) $5! \times 3! \times 3!$ (۲) ۳۶ (۳) ۸۴ (۴) ۲۴

۳۵- در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی در هواپیما وجود دارد و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۴ نفر را سوار کرد؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۶۳ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۲۶

۳۶- دو خط موازی داده شده است، روی هر کدام از این دو خط ۵ نقطه قرار دارد. چند مثلث با این نقاط می‌توان ساخت؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۳۰۰

۳۷- راه‌های مختلفی که می‌توان از بین ۱۰ سؤال متفاوت به ۷ سؤال پاسخ داد، مساوی با «فاکتوریل چه عددی» است؟

۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴)

۳۸- به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، شش نفر انتخاب کرد به طوری که حداقل سه زن انتخاب شوند؟

۲۰ (۱) ۳۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴)

۳۹- بر روی یک دایره ۸ نقطه‌ای متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی‌های محدب که هر رأس آن واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۵۶ (۱) ۶۸ (۲) ۷۰ (۳) ۷۲ (۴)

۴۰- در یک شرکت ۶ نفری به چند طریق می‌توان از بین کارکنان شرکت یک رئیس، یک حسابدار و یک منشی انتخاب کرد هرگاه هر فرد فقط یک شغل بتواند اختیار کند؟

۲۱۶ (۱) ۲۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۷۲ (۴)

۴۱- تعداد قطره‌های یک ۱۲ ضلعی محدب کدام است؟

۵۴ (۱) ۴۲ (۲) ۴۸ (۳) ۶۶ (۴)

۴۲- در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از این کیسه ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل ۲ مهره سیاه باشند؟

۵۲ (۱) ۴۸ (۲) ۵۰ (۳) ۶۴ (۴)

۴۳- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه به چند طریق می‌توان ۳ نفر را طوری انتخاب کرد که همواره ب ۱ فرد مورد نظر بین آن ۳ نفر باشد؟

۶۰ (۱) ۵۵ (۲) ۶۶ (۳) ۷۲ (۴)

۴۴- از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته‌ی ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟

۲۴۱۰ (۱) ۲۴۲۰ (۲) ۲۵۲۰ (۳) ۲۵۴۰ (۴)

۴۵- به چند طریق می‌توان به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ داد به طوری که از ۵ سؤال اول حداقل به چهار سؤال پاسخ داد؟

۴۰ (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

۴۶- یک مجموعه‌ی n عضوی، ۵۵ زیرمجموعه‌ی $2 - n$ عضوی دارد. n کدام است؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

پایخ‌های تشریحی

۱- گزینه ۲ پاسخ است.

چون ۴ نوع غذا موجود بوده و یکی انتخاب شده، پس ۳ انتخاب برای نفر بعدی وجود دارد. همچنین چون از نوشیدنی‌های نیز یکی انتخاب شده، پس ۲ انتخاب برای شخص بعدی باقی می‌ماند. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$۳ \times ۲ = ۶ \Rightarrow \text{۶ راه برای نفر بعدی وجود دارد.}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ است.

$$۱۸۰ = ۳ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = \text{کل حالات مختلف جدید} \xrightarrow{۲ \rightarrow ۳} \text{افزودن یک کت}$$

$$۱۶۰ = ۲ \times ۴ \times ۴ \times ۵ = \text{کل حالات مختلف جدید} \xrightarrow{۳ \rightarrow ۴} \text{افزودن یک کفش}$$

$$۱۵۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۵ = \text{کل حالات مختلف جدید} \xrightarrow{۴ \rightarrow ۵} \text{افزودن یک شلوار}$$

$$۱۴۴ = ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۶ = \text{کل حالات مختلف جدید} \xrightarrow{۵ \rightarrow ۶} \text{افزودن یک پیراهن}$$

بنابراین بیش‌ترین شکل متفاوت با افزودن یک کت ایجاد می‌شود.

۳- گزینه ۱ پاسخ است.

تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ی (۱): } \frac{۹!}{۷!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۹ \times ۸ = ۷۲$$

$$\text{گزینه ی (۲): } \frac{۵!}{۰!} = \frac{۱۲۰}{۱} = ۱۲۰ \neq \infty$$

$$\text{گزینه ی (۳): } \frac{۱۸!}{۳!} = \frac{۱۸ \times ۱۷ \times \dots \times ۴ \times ۳!}{۳!} \neq ۶!$$

$$\text{گزینه ی (۴): } ۱۵! + ۳! = ۱۵ \times ۱۴ \times \dots \times ۲ \times ۱ + ۳ \times ۲ \times ۱ \neq ۱۸! = ۱۸ \times ۱۷ \times \dots \times ۲ \times ۱$$

۴- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم که حاصل $۸ \times ۹ \times ۱۰ = ۷۲۰$ است و از طرفی $۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$ می‌شود، بنابراین گزینه ی (۱) صحیح است.

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

برای برقراری معادله ی داده شده باید یکی از دو حالت $۳ = ۱ + x$ یا $۳ = x + ۱$ برقرار باشد. در نتیجه $x = ۲$ یا $x = ۴$.

همواره داریم:

$$\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$$

در نتیجه برای برقراری تساوی $\binom{n}{K} = \binom{n}{r}$ باید یکی از دو تساوی $K = r$ یا $K + r = n$ برقرار باشد.

۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1) \times n \times (n-1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n)} = \frac{1}{6} \Rightarrow (n+1)(n) = 6$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow (n+3)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -3 \text{ ق ق} \\ n = 2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

صفحه ۱۸۱ کتاب

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \leq n$$

$$۳P(۲n, ۳) = ۱۴P(n, ۲) \Rightarrow ۳ \times \frac{(۲n)!}{(۲n-۳)!} = ۱۴ \times \frac{n!}{(n-۲)!} \Rightarrow ۳ \times \frac{(۲n)(۲n-۱)(۲n-۲)(۲n-۳)!}{(۲n-۳)!} = ۱۴ \times \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} \Rightarrow$$

$$۳ \times (۲n)(۲n-۱)(۲n-۲) = ۱۴ \times (n)(n-۱) \xrightarrow{n \geq 2} ۱۲(۲n-۱) = ۱۴ \Rightarrow ۲n-۱ = \frac{۷}{۶} \Rightarrow ۲n = \frac{۱۳}{۶} \Rightarrow n = \frac{۱۳}{۱۲}$$

با توجه به این‌که $n \in \mathbb{N}$ می‌باشد پس معادله جواب ندارد.

۸- گزینه ۴ پاسخ است.

چون می‌خواهیم یک عدد سه رقمی بسازیم، سه خانه در نظر می‌گیریم:

یکان دهگان صدگان
 $\square \quad \square \quad \square$

رقم اول (صدگان) صفر نمی‌تواند باشد، پس برای رقم اول ۵ انتخاب، برای رقم دوم هم ۵ انتخاب (همه‌ی اعداد از جمله صفر می‌توانند باشند به جز رقمی که ابتدا انتخاب شده) و برای رقم سوم ۴ انتخاب داریم. چون دو رقم انتخاب شده‌اند. بنابراین:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 5 & 4 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = 5 \times 5 \times 4 = 100$$

طریق طریق طریق

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

چون می‌خواهیم عدد سه رقمی بسازیم، سه خانه در نظر می‌گیریم. چون اعداد سه رقمی نمی‌توانند با صفر شروع شوند، در خانه‌ی اول همه‌ی ارقام به جز صفر (به ۹ طریق)، در خانه‌ی دوم همه‌ی ارقام به جز رقم اول (در این خانه صفر هم می‌تواند باشد، پس ۹ طریق) و در خانه‌ی سوم همه‌ی ارقام به جز دو رقم قبلی (به ۸ طریق) می‌توانند قرار بگیرند. داریم:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 9 & 9 & 8 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد} = 9 \times 9 \times 8 = 648$$

طریق طریق طریق

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{6 \times 7!}{3! \times 2!} = \frac{7!}{2!} \quad \text{فرض می‌کنیم ارقام متمایز باشند:}$$

$\underline{6} \quad \underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1}$

جایگشت ارقام تکراری

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.

دو حالت را در نظر می‌گیریم، یکی این‌که رقم آخر ۸ باشد و حالت دیگر این‌که رقم آخر صفر باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 3 \times 3 \times 1 = 9 \\ \text{طریق طریق طریق} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 4 \times 3 = 12 \\ \text{طریق طریق طریق} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعداد اعداد} = 9 + 12 = 21$$

رقم آخر ۸ :
رقم آخر صفر :

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.

چون در مسئله مشخص نکرده که تکرار مجاز است یا نه، تکرار را مجاز در نظر می‌گیریم. ارقام زوج غیر صفر عبارت‌اند از: ۲، ۴، ۶، ۸. بنابراین در هر خانه یکی از این ۴ عدد می‌تواند قرار بگیرد.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{تعداد اعداد} = 4^5 = 1024$$

طریق طریق طریق طریق طریق

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۱۷۷ کتاب

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{حالت } 4! = 24 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{حالت } 3 \times 3! = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow 24 + 18 = 42$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

برای حل ابتدا ۵ خانه در نظر می‌گیریم:

حال باید حتماً ۲ یا ۳ در خانه‌ی اول باشند. اگر رقم ۲ در خانه‌ی اول باشد، در این صورت رقم ۳ در ۴ جای دیگر می‌تواند باشد و بقیه‌ی خانه‌ها صفر هستند. همچنین اگر رقم ۳ در خانه‌ی اول باشد، در این صورت رقم ۲ در ۴ جای دیگر می‌تواند باشد و بقیه‌ی خانه‌ها صفر هستند. بنابراین در کل $4 + 4 = 8$ حالت وجود دارد.

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

در میان ارقام ۳ تا ۹، ۴ رقم فرد و ۳ رقم زوج می‌باشند. دو عدد فرد و دو عدد زوج انتخاب کرده در جایگشت آن‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\binom{4}{3} \binom{3}{2} \times 4! = 18 \times 4!$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

به جای ستاره‌ی سمت چپ، پنج رقم فرد می‌توان قرار داد (اعداد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹) و به جای ستاره‌ی سمت راست، چهار رقم می‌توان قرار داد (اعداد ۲ و ۴ و ۶ و ۸) و به جای بقیه‌ی ستاره‌ها ۹ رقم از ۱ تا ۹ را می‌توان قرارداد (چون تکرار ارقام مجاز است) که در این صورت کل حالات به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{5} \boxed{9} \boxed{9} \boxed{4} \Rightarrow 5 \times 9 \times 9 \times 9 \times 4 = 14580$$

طریق طریق طریق طریق طریق

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

۷ زوج مرتب $abcd \rightarrow a + d = 12 \rightarrow (9, 3), (8, 4), \dots, (4, 2), (3, 9) \rightarrow$

۱۰ زوج مرتب $b + c = 9 \rightarrow (9, 0), (8, 1), \dots, (1, 8), (0, 9) \rightarrow$

$$7 \times 10 = 70$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر قرار باشد حرف D در وسط قرار بگیرد، مدل جایگشت به صورت $\boxed{\quad} \boxed{\quad} \boxed{D} \boxed{\quad} \boxed{\quad}$ درمی‌آید که در این صورت حرف D به دلیل این که باید در جای خاصی قرار بگیرد، در شمارش تعداد حالات نقشی ندارد و به حساب نمی‌آید. بنابراین تعداد جایگشت‌ها طبق اصل ضرب به صورت مقابل درمی‌آید:

$$\boxed{4} \boxed{3} \boxed{D} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

صفحه ۱۷۷ کتاب

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.

کلمه‌ی «سازندگی» از ۷ حرف ساخته شده است. برای ساخت یک کلمه‌ی ۴ حرفی که حرف اول، آن نقطه دار نباشد به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

در خانه‌ی اول از سمت راست می‌توان حروف «س، ا، د، گ» را قرارداد:

$$\begin{matrix} 4 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

پس طبق اصل ضرب $4 \times 5 \times 6 \times 4 = 480$ کلمه‌ی ۴ حرفی داریم که با حرف نقطه‌دار آغاز نمی‌شود (دقت کنید که وقتی حرف «ی» در اول کلمه قرار گیرد نقطه‌دار می‌شود).

۲۰- گزینه ۳ پاسخ است.

سه رقم فرد را یک مجموعه در نظر می‌گیریم که این مجموعه به اتفاق دو عدد زوج دیگر یعنی اعداد ۲ و ۴، به ۳! طریق کنار هم جابه‌جا می‌شوند. اما مجموعه‌ی اعداد فرد یعنی اعداد ۱ و ۳ و ۵ خود به ۳! طریق کنار هم قرار می‌گیرند که بنا به اصل ضرب تعداد طرق آن‌ها در هم ضرب می‌شود، یعنی:

$$3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

حالاتی که ۲ و ۳ کنار هم نیستند = حالاتی که ۲ و ۳ کنار هم هستند - کل حالات

$$6! - 5! \times 2 = 720 - 240 = 480$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به مفروضات مسأله، باید حروف یکسان کنار هم قرار بگیرند. برای این کار دو حرف A یعنی AA را یک مجموعه (یک شیء) در نظر می‌گیریم. همین‌طور دو حرف G یعنی GG را نیز یک مجموعه (یک شیء) در نظر می‌گیریم. این دو مجموعه (دو شیء) به اتفاق چهار حرف E و N و R و L تشکیل ۶ شیء می‌دهند که به ۶! طریق ۷۲۰ طریق می‌توانند جایگشت داشته باشند.

ضمناً دو حرف AA که تشکیل یک مجموعه می‌دهند، چون حروف مثل هم هستند، تنها ۱ طریق جابه‌جایی دارند. هم‌چنین دو حرف GG نیز که تشکیل یک مجموعه (یک شیء) می‌دهند، چون حروف مثل هم هستند، تنها ۱ طریق جابه‌جایی دارند.

۲۳- گزینه ۳ پاسخ است.

ترتیب یک در میان قرار گرفتن اعداد فرد به صورت (ز، ف، ز، ف، ز، ف) یا (ف، ز، ف، ز، ف، ز) می‌باشد و چون اعداد زوج و فرد با هم متفاوت‌اند، می‌توانند در بین خود با هم جابه‌جایی داشته باشند. بنابراین تعداد جایگشت‌های اعداد فرد ۳! و تعداد جایگشت‌های اعداد زوج نیز ۳! است و همان‌طور که گفته شد، جابه‌جایی کل اعداد فرد (۵، ۳، ۱) با کل اعداد زوج (۶، ۴، ۲) نیز ۲ حالت دارد که بنابه اصل ضرب طرق آن‌ها در هم ضرب می‌شود:

$$3! \times 3! \times 2 = 6 \times 6 \times 2 = 72$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است.

از اصل عدم شمول استفاده می کنیم:

$$4^3 - \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{= 24} = 40$$

اعداد بدون رقم تکراری

کل اعداد

۲۵- گزینه ۳ پاسخ است.

برای حل این مسأله دو حالت در نظر می گیریم: حالت اول حالتی است که کلمات با S شروع نشده باشند، یعنی $\square \square \square \square \square \square$ که

$6 = 3 \times 2 \times 1$ حالت دارند. حالت دوم حالتی است که کلمات با S شروع شده باشند، یعنی $S \square \square \square \square \square$ که باز هم $3! = 6$ حالت دارند.

بنابراین تعداد کل حالات برابر $12 = 6 + 6$ می باشد.

۲۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$-B-B-B-C-C-C- \quad \left(\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right) \times \frac{6!}{3!3!} = 35 \times 20 = 700$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ است.

از آن جا که در یک بردار، جهت مهم است و تفاوت می کند که از دو نقطه ی A و B کدام ابتدای بردار و کدام انتها باشد، پس باید تعداد ترتیب های ۲ نقطه از ۱۵ نقطه یعنی $P(15, 2)$ را بیابیم.

$$P(15, 2) = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15 \times 14 \times \cancel{13!}}{\cancel{13!}} = 210$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{8}{\cancel{8}} \frac{7}{\cancel{7}} \frac{6}{\cancel{6}} = 8 \times 7 \times 6 = \frac{8!}{5!}$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ است.

در واقع شرکت فوق از بین n داوطلب باید ۲ نفر برای شغل های فروشندگی و کارمندی که ترتیب آن ها مهم است انتخاب کند که ۳۰ حالت گزینش دارد. برای به دست آوردن n داریم:

$$P(n, 2) = 30 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow n(n-1) = 30$$

حال n و (n-1) دو عدد طبیعی پشت سر هم هستند و عدد ۳۰ را هم می توان به صورت ضرب دو عدد طبیعی متوالی ۵ و ۶ نوشت و داریم:

$$\underbrace{n(n-1)}_{= 6 \times 5} = 30 \Rightarrow n = 6$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left(\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right) \times 3! = 18$$

از بین حروف H, O, P باید دو حرف را انتخاب کرد، سپس در کنار S آنها را چید:

۳۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$C(n, n-2) = 120 \Rightarrow \frac{n!}{\underbrace{[n-(n-2)]!}_{\text{منفی اثر می کند}} (n-2)!} = 120 \Rightarrow \frac{n!}{(n-n+2)! (n-2)!} = 120$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2! (n-2)!} = 120 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 120 \Rightarrow n(n-1) = 240$$

در این جا ممکن است بر ایمان سخت باشد که بفهمیم ضرب کدام دو عدد طبیعی پشت سر هم برابر ۲۴۰ می شود. برای همین از گزینه ها استفاده می کنیم، که متوجه می شویم گزینه ی (۲) یعنی ۱۶ صحیح است، زیرا:

$$\underbrace{n(n-1)}_{= 16 \times 15} = 240$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به این که $C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ و $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ است، داریم:

$$C(n, 4) = P(n-1, 3) \Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{(n-1)!}{[(n-1)-3]!} \Rightarrow \frac{n(n-1)!}{(n-4)!4!} = \frac{(n-1)!}{(n-4)!}$$

حال از طرفین معادله عبارت $\frac{(n-1)!}{(n-4)!}$ را ساده می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\frac{n}{4!} = \frac{1}{1} \Rightarrow n = 4! = 24$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.

تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متفاوت برابر ۸! است. هم‌چنین ترکیب ۳ شیء از ۸ شیء نیز به صورت $C(8, 3) = \binom{8}{3}$ می‌باشد. داریم:

$$\frac{\text{جایگشت های ۸ شیء متمایز}}{\text{ترکیب ۳ شیء از ۸ شیء مختلف}} = \frac{8!}{\binom{8}{3}} = \frac{8!}{\frac{8!}{3!5!}} = \frac{3! \times 5!}{1} = 3! \times 5! = 6 \times 5! = 6!$$

دقت کنید $5! \times 6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6!$ می‌شود.

۳۴- گزینه ۳ پاسخ است.

سه کتاب به ۳! حالت می‌توانند کنار هم باشند. حال این سه کتاب را به صورت یک عضو در نظر می‌گیریم. حال مانند این است که بپرسند ۳ کتاب به چند حالت می‌توانند کنار باشند. حال از اصل عدم شمول استفاده می‌کنیم.

$$5! - 3! \times 3! = 84$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ است.

چون در صورت مسئله حرفی از ترتیب در فهرست لیست انتظار زده نشده است، بنابراین مسئله ترکیب $C(9, 4)$ می‌باشد. پس:

$$C(9, 4) = \frac{9!}{(9-4)!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ است.

باید یکی از دو خط را انتخاب کنیم سپس از آن ۲ نقطه و از خط دیگر ۱ نقطه بر داریم.

$$\binom{2}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{5}{2} = 100$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ است.

چون این که اول به کدام سؤال پاسخ دهیم اهمیت ندارد و فقط باید ۷ سؤال را پاسخ دهیم، بدون این که مهم باشد به کدام اول یا دوم یا ... جواب دهیم، از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2 \times 3} = 120$$

هم‌چنین می‌دانیم $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ ، بنابراین گزینه‌ی ۲ جواب است.

۳۸- گزینه ۴ پاسخ است.

باید تعداد حالاتی که سه زن انتخاب شوند را با حالاتی که چهار زن انتخاب شوند را جمع کنیم:

$$\binom{4}{3} \binom{5}{3} + \binom{4}{4} \binom{5}{2} = 50$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم که هر چهارضلعی از به هم وصل کردن چهار نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست به‌وجود می‌آید، یعنی برای ساختن هر چهارضلعی ۴ نقطه نیاز داریم که این چهار نقطه را از بین ۸ نقطه‌ی موجود انتخاب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد چهارضلعی‌ها} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 70$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ است.

کافی است سه نفر انتخاب کنیم. البته این انتخاب باید با در نظر گرفتن ترتیب باشد:

$$\binom{6}{3} \times 3!$$

۴۱- گزینه ۱ پاسخ است.

برای پیدا کردن تعداد قطرهای، ابتدا تعداد پاره‌خط‌های ایجاد شده توسط ۱۲ نقطه را که هیچ سه تایی از آن‌ها بر یک استقامت نیستند، می‌یابیم.

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2!10!} = 6 \times 11 = 66$$

سپس اضلاع را از آن کم می‌کنیم:

$$66 - 12 = 54$$

۴۲- گزینه ۱ پاسخ است. صفحه ۱۸۵ کتاب

چون قرار است حداقل ۲ مهره سیاه باشند یعنی یا ۲ مهره سیاه است و یک مهره به رنگ دیگر و یا هر ۳ مهره سیاه هستند پس داریم:

$$\binom{4}{2} \binom{8}{1} + \binom{4}{3} = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{8!}{7!1!} + \frac{4!}{3!1!} = 6 \times 8 + 4 = 52$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ است.

چون یک نفر خاص باید حتماً در بین انتخاب‌ها باشد، باید از ۱۱ نفر باقی‌مانده ۲ نفر را انتخاب کنیم، پس:

$$\binom{12-1}{3-1} = \binom{11}{2} = \frac{11!}{(11-2)!2!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9! \times 2!} = 55$$

۴۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\binom{10}{2} \times \binom{8}{3} = \frac{10!}{(10-2)!2!} \times \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 45 \times 56 = 2520$$

۴۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\binom{5}{4} \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \binom{5}{2} = 5 \times 10 + 1 \times 10 = 60$$

پاسخ ۴	پاسخ ۳	پاسخ ۵	پاسخ ۲
سؤال از ۵	سؤال از ۵	سؤال از ۵	سؤال از ۵
سؤال اول	سؤال دوم	سؤال اول	سؤال دوم

فراموش نکنید که اگر جواب را به صورت $\binom{5}{4} \binom{6}{3} = 100$ می‌نوشتید یعنی به ۴ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ داده‌اید و به ۳ سؤال از ۵ سؤال دوم و یک سؤال باقی‌مانده از سری اول جواب می‌دهید، به نتیجه‌ی اشتباهی می‌رسید یعنی جواب تکراری تولید می‌شد. مثل:

$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$	$\boxed{5} (1) (2)$
$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{5}$	$\boxed{4} (1) (2)$

سؤال سری اول = □

سؤال سری دوم = ()

در این وضعیت یک جواب را چند بار شمارش کرده‌اید که اشتباه است.

۴۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\binom{n}{n-2} = 55 \Rightarrow \frac{n!}{[n-(n-2)]!(n-2)!} = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-n+2)!(n-2)!} = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2!} = 55$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55 \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{طرفین وسطین}} n(n-1) = 110 \Rightarrow \overset{\curvearrowright}{n(n-1) = 11 \times 10} \Rightarrow n = 11$$



سایت ریاضی سرا

آمار و مدل سازی

www.riazisara.ir

فصل ششم: شاخص‌های مرکزی

۱- در یک سری داده‌های آماری، فواصل داده‌ها از یکدیگر ۳، کمترین داده ۴ و بیشترین داده برابر ۱۹ است. میانه‌ی این داده‌ها برابر است با:

$$(۱) \frac{19}{2} \quad (۲) \frac{21}{2} \quad (۳) \frac{23}{2} \quad (۴) \frac{25}{2}$$

۲- میانگین داده‌های آماری ۱۸، ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ چقدر است؟

$$(۱) ۱۲ \quad (۲) ۱۷ \quad (۳) ۲۲ \quad (۴) ۲۷$$

۳- در جدول فراوانی مقابل، میانگین داده‌ها کدام است؟

حدود دسته‌ها	۶-۸	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
فراوانی	۱	۳	۱	۵

(۱) ۱۰
(۲) ۱۰/۵
(۳) ۱۱
(۴) ۱۱/۵

۴- در نمودار ساقه و برگ مقابل، تفاضل میانه از مُد کدام است؟

۱	۱	۲	۳	۳	۴
۲	۱	۲	۲	۵	
۳	۲	۳	۳	۳	۷

(۱) ۱۱
(۲) ۲۲
(۳) ۳۳
(۴) صفر

۵- اگر میانگین داده‌های آماری $5 - 3x_1, 5 - 3x_2, \dots, 5 - 3x_n$ عدد ۱۹ باشد، میانگین داده‌های آماری

$$3 - 2x_1, 3 - 2x_2, \dots, 3 - 2x_n$$
 چیست؟

$$(۱) ۱۳ \quad (۲) -۱۳ \quad (۳) ۱۲ \quad (۴) -۱۲$$

۶- اگر میانگین n داده آماری ۱۵ و میانگین ۱۵ داده دیگر برابر ۱۰ باشد بطوریکه میانگین تمام داده‌ها با هم ۱۲ باشد، n کدام است؟

$$(۱) ۱۲ \quad (۲) ۱۰ \quad (۳) ۸ \quad (۴) ۶$$

۷- به مجموعه آماری روبرو کدام مقادیر ملحق شوند تا میانه نمونه آماری روبرو عدد ۴/۵ باشد؟

$$(۱) ۷ \quad (۲) ۴ و ۵ \quad (۳) ۱ و ۸ \quad (۴) ۵ و ۶$$

۸- اگر میانگین داده‌ها در جدول زیر برابر ۴ باشد، فراوانی نسبی دسته آخر کدام است؟

حدود دسته	۰-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۸
فراوانی	۵	۷	۴	X

(۱) $\frac{4}{11}$ (۲) $\frac{3}{10}$ (۳) $\frac{7}{22}$ (۴) $\frac{3}{11}$

۹- برای داده‌های ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۰ حاصل $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})$ کدام است؟

$$(۱) ۵/۵ \quad (۲) ۵۵ \quad (۳) ۴۹/۵ \quad (۴) صفر$$

۱۰- اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_{10} برابر ۱۲ باشد میانگین داده‌های ۸، ۱۶، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ چقدر از میانگین قبلی بیشتر است؟

$$(۱) ۲/۴ \quad (۲) ۲ \quad (۳) صفر \quad (۴) ۱/۴۴$$

۱۱- میانگین n داده آماری برابر ۵ و میانگین m داده دیگر ۱۰ می‌باشد. اگر میانگین تمام داده‌ها با هم ۸ باشد کدام رابطه بین n, m برقرار است؟

$$(۱) 4m = 3n \quad (۲) 2m = 3n \quad (۳) 2n = 3m \quad (۴) 3m = 4n$$

۱۲- میانگین قد ۲۰ دانش آموز یک کلاس ۱۷۰ سانتیمتر است بطوری که میانگین قد ۱۵ نفر آنها ۱۸۰ سانتیمتر می‌باشد. میانگین قد ۵ نفر دیگر

چقدر است؟

$$(۱) ۱۵۵ \quad (۲) ۱۴۵ \quad (۳) ۱۴۰ \quad (۴) ۱۵۰$$

۱۳- میانگین داده‌های X_1, X_2, \dots, X_{100} برابر ۱۲ می‌باشد. میانگین $X_1 + 1, X_2 - 2, X_3 + 3, \dots, X_{100} - 100$ چقدر است؟
 (۱) $12/5$ (۲) $11/5$ (۳) 12 (۴) $12/25$

۱۴- اگر میانگین داده‌های $1, 2, \dots, 100$ را \bar{X} و میانگین $1, 3, 5, 7, \dots, 199$ را \bar{Y} بنامیم آنگاه:

(۱) $\bar{X} = \bar{Y}$ (۲) $\bar{Y} = 2\bar{X}$ (۳) $\bar{Y} = 2\bar{X} + 1$ (۴) $\bar{Y} = 2\bar{X} - 1$

۱۵- اگر میانگین داده‌های $1, a, a, 3, \dots, a, a$ نصف میانگین داده‌های 2 و a و 5 باشد مقدار a کدام است؟

(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{-4}{3}$ (۴) $\frac{-8}{3}$

۱۶- کدام اعداد را به مجموعه داده‌های مقابل بیفزاییم تا میانه این نمونه آماری برابر ۳ شود؟ $2, 5, 7, 1, 3, 4, 6, 2, 4$

(۱) $3, 2$ (۲) $4, 3$ (۳) $6, 2$ (۴) $8, 1$

۱۷- چارک‌های اول و سوم داده‌های 22 و 21 و 20 و 18 و 16 و 14 و 12 و 10 و 8 کدام است؟

(۱) 20 و 12 (۲) 21 و 13 (۳) $20/5$ و 11 (۴) $21/5$ و 11

۱۸- میانه و میانگین داده‌های $6, 4, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 6$ چقدر اختلاف دارند؟

(۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۱۹- در نمودار جعبه‌ای داده‌های آماری، کدامیک از مقادیر زیر نمایش داده نمی‌شود؟

(۱) کوچکترین داده (۲) میانگین (۳) میانه (۴) چارک سوم

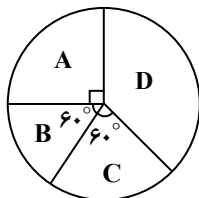
۲۰- اگر میانگین داده‌های آماری $X_1 + n, X_2 + 2n, X_3 + 3n, \dots, X_n + n^2$ از میانگین داده‌های X_1, X_2, \dots, X_n به اندازه 190 واحد بیشتر باشد مقدار n کدام است؟

(۱) 20 (۲) 19 (۳) 38 (۴) 40

۲۱- اگر در داده‌های آماری $\{40, 50, x, 70, 30, 10, 90\}$ مد و میانه داده‌ها با هم برابر باشند، با فرض منحصر بفرد بودن مد داده‌ها برای x چند جواب وجود دارد؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۲۲- اگر در نمودار دایره‌ای زیر، مرکز دسته‌های A و B و C و D به ترتیب 1 و 2 و 3 و 4 باشد، میانگین داده‌ها برابر است با:



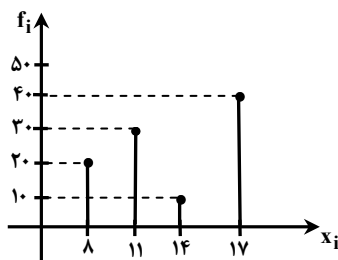
(۱) $2/35$

(۲) $2/45$

(۳) $2/5$

(۴) $2/75$

۲۳- در داده‌های مربوط به نمودار روبه رو میانه کدام است؟



(۱) 11

(۲) 14

(۳) $12/5$

(۴) $9/5$

۲۴- اگر میانگین داده‌های $2n, n+1, \dots, n$ برابر \bar{X} باشد، میانگین داده‌های $2n - (n+1), \dots, 2, (n+1) - 1, n - 1$ چه قدر است؟

(۱) $\bar{X} - \frac{n}{2}$ (۲) \bar{X} (۳) $\bar{X} - \frac{n+2}{2}$ (۴) $\bar{X} - \frac{n+1}{2}$

۲۵- اگر میانگین داده‌های X_1, X_2, \dots, X_n برابر \bar{X} باشد، میانگین داده‌های $X_1 + \bar{X}, X_2 + 2\bar{X}, \dots, X_n + n\bar{X}$ کدام است؟

(۱) $\frac{(n+1)\bar{X}}{2}$ (۲) $2\bar{X}$ (۳) $\frac{(n+3)\bar{X}}{2}$ (۴) $\frac{n\bar{X}}{2}$

۲۶- اگر میانگین داده‌های $X_1 - 1, X_2 - 2, \dots, X_n - n$ برابر \bar{X} باشد، میانگین داده‌های $X_1 + 1, X_2 + 2, \dots, X_n + n$ کدام است؟

(۱) $\bar{X} + n + 1$ (۲) $\bar{X} + \frac{n(n+1)}{2}$ (۳) $\bar{X} + \frac{n+1}{2}$ (۴) $2\bar{X}$

۲۷- در جدول فراوانی مقابل، حاصل ضرب میانه در مُد داده‌ها کدام است؟

x_i	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
f_i	۸	۲	۷	۱

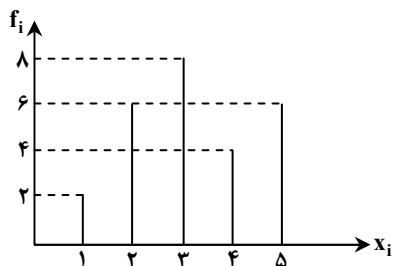
(۱) ۷۵

(۲) ۱۵۰

(۳) ۱۷۵

(۴) ۲۲۵

۲۸- در نمودار میله‌ای مقابل، مُد داده‌ها کدام است؟



(۱) ۸

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۳

۲۹- در سؤال فوق، میانگین داده‌ها تقریباً برابر است با:

(۴) ۳/۲

(۳) ۴/۲

(۲) ۴/۷

(۱) ۵/۷

۳۰- اگر میانه‌ی داده‌های آماری x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۸ باشد، میانه‌ی داده‌های آماری $x_1 - 1, x_2 - 1, \dots, x_n - 1$ برابر است با:

(۴) ۱۵

(۳) ۱۶

(۲) ۸

(۱) ۷

پانخ‌های تشریحی

۱- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به صورت سؤال، داده‌ها تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند بطوری که:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 3 \\ a_n = 19 \end{cases}$$

۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۹

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو داده‌ی وسطی برابر میانه است، پس: $\bar{x} = \frac{10+13}{2} = \frac{23}{2}$

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i + 17 + 18}{9+2} \rightarrow 23 = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i + 35}{11} \rightarrow 253 = \sum_{i=1}^9 x_i + 35 \rightarrow \sum_{i=1}^9 x_i = 218$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i + 15 + 9}{9+2} = \frac{218 + 15 + 9}{11} = \frac{242}{11} = 22$$

۳- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم در یک جدول فراوانی، میانگین کرانه‌های هر طبقه برابر نشان

دسته است، پس داریم:

حدود دسته‌ها	۶-۸	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
نشان دسته‌ها	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۱	۳	۱	۵

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{7 \times 1 + 9 \times 3 + 11 \times 1 + 13 \times 5}{1+3+1+5} = \frac{7+27+11+65}{10} = \frac{110}{10} \rightarrow \bar{x} = 11$$

۴- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به نمودار ساقه و برگ مفروض، تعداد ۱۴ داده داریم که از کوچک به بزرگ عبارتند از:

۳۷ و ۳۳ و ۳۳ و ۳۳ و ۳۲ و ۳۲ و ۲۵ و ۲۲ و ۲۲ و ۲۱ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۱

$$\bar{x} = 22$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو داده‌ی وسطی برابر میانه خواهد بود، پس:

از طرفی چون عدد ۳۳ بیش از اعداد دیگر تکرار شده، لذا:

$$\hat{x} = 33$$

$$\hat{x} - \bar{x} = 33 - 22 = 11$$

۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$3\bar{x} - 5 = 19 \Rightarrow \bar{x} = 8 \Rightarrow -2\bar{x} + 3 = -16 + 3 = -13$$

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر میانگین k عدد برابر \bar{X} و میانگین m عدد دیگر \bar{Y} باشد میانگین تمام آنها با هم از رابطه $\bar{Z} = \frac{k\bar{X} + m\bar{Y}}{k + m}$ بدست می آید.

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 20 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 200$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} (2x_i + i)}{10} = \frac{2 \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} i}{10} = \frac{2 \times 200 + \frac{10 \times (11)}{2}}{10} = \frac{400 + 55}{10} = 45.5$$

$$\frac{\bar{X}}{X} = \frac{10 \times 15 + 15 \times 10}{n + 15} = 12 \Rightarrow 15n + 150 = 12n + 180 \Rightarrow 3n = 30 \Rightarrow n = 10$$

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

۱, ۱, ۲, ۳, ۳, ۴, ۵, ۶, ۶, ۷

با توجه به مفهوم میانه و مجموعه آماری مطروح در صورت سؤال، مقادیر ملحق شونده بادی اولاً یک زوج باشند ثانیاً باید بزرگتر از یا مساوی ۵ باشند، چرا که ۴/۵ میانگین دو عدد ۴ و ۵ است پس باید دو عدد طوری اضافه شود که دو عدد ۴ و ۵ وسط سایر مجموعه قرار گیرند.

۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\frac{1 \times 5 + 3 \times 7 + 5 \times 4 + 7 \times X}{5 + 7 + 4 + X} = 4 \Rightarrow 5 + 21 + 20 + 7X = 64 + 4X$$

$$\frac{6}{22} = \frac{3}{11} \quad \text{فراوانی نسبی دسته آخر}$$

$$3X = 64 - 46 \Rightarrow X = \frac{18}{3} = 6$$

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\sum (x_i - \bar{X}) = 0 \quad \text{همواره}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\bar{X} = 12 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 120$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} + 16 + 8 = 120 + 24 = 144 \Rightarrow \bar{Y} = \frac{144}{12} = 12 \quad \bar{Y} - \bar{X} = 0$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{5n + 10m}{m + n} = 8 \Rightarrow 5n + 10m = 8m + 8n \Rightarrow 2m = 3n$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{20} l_i}{20} = 170 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{20} l_i = 3400 \\ \frac{\sum_{i=1}^{15} l_i}{15} = 180 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{15} l_i = 2700 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} l_i = 3400 - 2700 = 700$$

$$\sum_{i=1}^{20} l_i = \sum_{i=1}^{15} l_i + \sum_{i=1}^{20} l_i$$

$$\frac{700}{5} = 140 \quad \text{پس میانگین قد ۵ نفر دیگر برابر است با: } 140$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

برای حل این سؤال بهتر است ابتدا مقدار

$$\sum_{i=1}^{100} (-1)^{i+1} \times i = \sum_{k=1}^{50} 2k - 1 - \sum_{k=1}^{50} 2k = 2 \sum_{k=1}^{50} k - 50 - 2 \sum_{k=1}^{50} k = -50$$

$$y_i = x_i + (-1)^{i+1} \times i$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{100} (x_i + (-1)^{i+1} \times i)}{100} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i + \sum_{i=1}^{100} (-1)^{i+1} i}{100} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i + (-50)}{100} = \bar{x} - \frac{1}{2} = 11/5$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$y_i = 2x_i - 1 \Rightarrow \bar{y} = 2\bar{x} - 1$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\frac{3+4+a+a+1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{5+a+2+1}{4} \Rightarrow 8+2a = \frac{1}{2}(8+a) \Rightarrow 16+4a = 8+a$$

$$\Rightarrow 8 = -3a \Rightarrow a = \frac{-8}{3}$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.

در یک نمونه آماری، اگر داده‌ها را مرتب کنیم عددی که در وسط قرار می‌گیرد میانه است. (و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده وسطی میانه است.) پس ابتدا داده‌ها را به ترتیب می‌نویسیم:

۱, ۲, ۲, ۳, ۴, ۴, ۵, ۶, ۷

تعداد این داده‌ها ۹ تاست و اگر ۲ تا به آن‌ها بیفزاییم ۱۱ تا می‌شود، لذا عدد ششم میانه است پس عدد ۳ باید ششمین عدد باشد که با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه ۱ می‌تواند صحیح باشد.

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کنیم داریم:

۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰, ۲۱, ۲۲

میانه برابر با ۱۶ است. در نیمه‌ی اول میانه برابر $Q_1 = \frac{10+12}{2} = 11$ و در نیمه‌ی دوم، میانه برابر $Q_3 = \frac{20+21}{2} = 20/5$ است.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

برای محاسبه میانه باید داده‌ها را مرتب کنیم:

۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۶
دو عدد وسط

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو عدد وسطی برابر میانه است پس: $2/5 = \text{میانه}$

برای محاسبه میانگین داریم:

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+2+2+2+3+3+3+4+4+6}{12} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4} = 2/75$$

$$\text{اختلاف} = 2/75 - 2/5 = 0/25 = \frac{1}{4}$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.

براساس مطلب صفحه ۱۲۰ کتاب درسی نمودار جعبه‌ای نموداری تصویری است که داده‌ها را براساس پنج مقدار نمایش می‌دهد این مقادیر عبارتند از:

۱- کوچکترین داده ۲- چارک اول ۳- میانه

۴- چارک سوم ۵- بزرگترین داده

بنابراین میانگین داده‌ها در نمودار جعبه‌ای نمایش داده نمی‌شود.

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 + n) + (x_2 + 2n) + (x_3 + 3n) + \dots + (x_n + n^2)}{n} &= \frac{x_1 + x_1 + x_2 + x_2 + \dots + x_n + x_n}{2n} + 190 \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{(1+2+3+\dots+n)n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + 190 \Rightarrow 1+2+3+\dots+n = 190 \\ \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 190 \Rightarrow n(n+1) = 380 \Rightarrow n = 19 \end{aligned}$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ است.

چون مُد داده‌ها منحصر بفرد است پس باید حتماً x یکی از مقادیر ۱۰ یا ۳۰ یا ۴۰ یا ۵۰ یا ۷۰ یا ۹۰ باشد. از طرفی میانه داده‌ها داده‌ای است که پس از مرتب کردن داده‌ها به صورت صعودی یا نزولی در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد (چون تعداد آنها فرد است) چون داده‌های غیر از x به صورت $\{10, 30, 40, 50, 70, 90\}$ مرتب می‌شوند پس x باید برابر ۴۰ باشد و یا برابر ۵۰ یعنی برای x دو جواب وجود دارد.

۲۲- گزینه ۴ پاسخ است.

می‌دانیم که در نمودار دایره‌ای $\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$ که در آن α_i و f_i به ترتیب زاویه و فراوانی مطلق دسته‌ی i ام هستند.

در این تست داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_A = 90^\circ \text{ و } \alpha_B = \alpha_C = 60^\circ &\Rightarrow \alpha_D = 150^\circ \\ \alpha_A = 90^\circ \Rightarrow \frac{f_A}{n} \times 360^\circ = 90^\circ &\Rightarrow \frac{f_A}{n} = \frac{1}{4} \Rightarrow f_A = \frac{1}{4}n \\ \alpha_B = \alpha_C = 60^\circ &\Rightarrow f_B = f_C = \frac{1}{6}n \\ \alpha_D = 150^\circ &\Rightarrow f_D = \frac{5}{12}n \\ \bar{X} = \frac{1 \times f_A + 2 \times f_B + 3 \times f_C + 4 \times f_D}{n} &= \frac{\frac{1}{4}n + \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}n + \frac{5}{3}n}{n} = \frac{\frac{11}{4}n}{n} = \frac{11}{4} = 2.75 \end{aligned}$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر داده‌های این نمودار را در یک سطر مرتب کنیم داریم:

$$\underbrace{8, 8, \dots, 8}_{20 \text{ تا}} \text{ و } \underbrace{11, 11, \dots, 11}_{30 \text{ تا}} \text{ و } \underbrace{14, 14, \dots, 14}_{10 \text{ تا}} \text{ و } \underbrace{17, 17, \dots, 17}_{40 \text{ تا}}$$

تعداد کل داده‌ها برابر ۱۰۰ است که جمله‌های پنجاهم و پنجاه و یکم در وسط قرار دارند. اما با توجه به سطر بالا دیده می‌شود که جمله‌ی

$$\frac{11+14}{2} = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ پس میانه برابر است با } 12.5$$

۲۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

راه حل اول: مثلاً $n = 3$ را در نظر می‌گیریم. پس میانگین داده‌های \overline{x} ۵ و ۴ و ۳ برابر \overline{x} است. میانگین داده‌های گروه دوم یعنی ۲ و ۲ و ۲ خواسته شده (به جای n ، ۳ قرار دادیم)، با این شرایطی که در نظر گرفتیم، خواهیم داشت:

$$\bar{X} = \frac{3+4+5+6}{4} = \frac{9}{2}$$

و میانگین داده‌های ۲ و ۲ و ۲ برابر است با $\frac{9}{2}$. حالا در گزینه‌ها $n = 3$ و $\bar{X} = \frac{9}{2}$ را قرار می‌دهیم، باید به عدد ۲ برسیم:

$$\bar{X} = \frac{9}{2} \quad (2)$$

$$\bar{X} - \frac{n}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3 \quad (1)$$

$$\bar{X} - \frac{n+1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2} \quad (4)$$

$$\bar{X} - \frac{n+2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2 \quad (3)$$

راه حل دوم: میانگین داده‌های خواسته شده را \bar{Y} می‌گیریم:

$$\bar{X} = \frac{n + n + 1 + n + 2 + \dots + 2n}{2n - n + 1}$$

$$\bar{Y} = \frac{n - 1 + (n + 1) - 2 + \dots + 2n - (n + 1)}{n + 1} = \frac{n + (n + 1) + \dots + 2n - (1 + 2 + \dots + n + 1)}{n + 1}$$

$$\bar{Y} = \frac{n + (n + 1) + \dots + 2n}{n + 1} - \frac{1 + 2 + \dots + (n + 1)}{n + 1} = \bar{X} - \frac{(n + 1)(n + 2)}{2(n + 1)} - \frac{n + 2}{2}$$

۲۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

راه حل اول: مثلاً $X_1 = 1$ و $X_2 = 2$ ، $X_3 = 3$ می‌گیریم که میانگین آن‌ها $\bar{X} = \frac{1 + 2 + 3}{3} = 2$ است میانگین داده‌های گروه دوم یعنی

$$X_1 + \bar{X} = 1 + 2 = 3 \text{ و } X_2 + 2\bar{X} = 2 + 4 = 6 \text{ و } X_3 + 3\bar{X} = 3 + 6 = 9$$

$$\bar{Y} = \frac{3 + 6 + 9}{3} = 6$$

در گزینه‌ها $n = 3$ و $\bar{X} = 2$ قرار می‌دهیم، باید حاصل ۶ شود:

$$\frac{n\bar{X}}{2} = \frac{3(2)}{2} = 3 \quad (۴) \quad \frac{(n + 3)\bar{X}}{2} = \frac{6(2)}{2} = 6 \quad (۳) \quad 2\bar{X} = 4 \quad (۲) \quad \frac{(n + 1)\bar{X}}{2} = \frac{4(2)}{2} = 4 \quad (۱)$$

راه حل دوم: میانگین داده‌های خواسته شده را \bar{Y} در نظر می‌گیریم:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{X_1 + \bar{X} + X_2 + 2\bar{X} + \dots + X_n + n\bar{X}}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n + \bar{X} + 2\bar{X} + \dots + n\bar{X}}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} + \frac{(1 + 2 + \dots + n)\bar{X}}{n} = \bar{X} + \frac{n(n + 1)}{2} \bar{X} = \bar{X} + \frac{n + 1}{2} \bar{X} = \frac{(n + 3)\bar{X}}{2}$$

۲۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ است.

راه حل اول:

$$\bar{X} = \frac{X_1 - 1 + X_2 - 2 + \dots + X_n - n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - (1 + 2 + \dots + n)}{n}$$

$$\boxed{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{X} + \frac{n + 1}{2}^*} \quad \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - \frac{n(n + 1)}{2}}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{n + 1}{2} \rightarrow$$

میانگین گروه دوم داده‌ها عبارت است از:

$$\bar{Y} = \frac{X_1 + 1 + X_2 + 2 + \dots + X_n + n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n + 1 + 2 + \dots + n}{n}$$

$$= \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n + \frac{n(n + 1)}{2}}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{n + 1}{2} \xrightarrow{*} \bar{Y} = \bar{X} + \frac{n + 1}{2} + \frac{n + 1}{2} \rightarrow \bar{Y} = \bar{X} + n + 1$$

راه حل دوم: به جای X_1 و X_2 و X_3 به ترتیب مثلاً ۱ و ۲ و ۳ قرار می‌دهیم، گروه اول داده‌ها عبارتند از: ۰ و ۰ و ۰ و $X = 0$ گروه دوم

داده‌ها عبارتند از: ۲ و ۴ و ۶ $\leftarrow \bar{Y} = \frac{2 + 4 + 6}{3} = 4$ در گزینه‌ها به جای n ، ۳ و به جای \bar{X} صفر قرار می‌دهیم حاصل باید ۴ شود،

که فقط در گزینه‌ی «۱» این اتفاق می‌افتد.

۲۷- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم که مُد، داده‌ای است که بیش‌ترین فراوانی را دارد، لذا چون فراوانی دسته‌ی اول بیش از سایر دسته‌ها است؛ پس:

$$\hat{x} = 10$$

x_i	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
f_i	۸	۲	۷	۱
فراوانی تجمعی	۸	۱۰	۱۷	۱۸

اما برای تعیین میانه، لازم است فراوانی تجمعی داده‌ها را تشکیل داده، اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن از $\frac{n}{2}$ بیش‌تر باشد را بیابیم که چون در این سؤال $n = 18$ است، پس نشان دسته‌ی دوم برابر میانه خواهد بود:

$$\tilde{x} = 15$$

نتیجه این‌که:

$$\hat{x}, \tilde{x} = 10 \times 15 = 150$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به نمودار داده شده، جدول فراوانی ذیل نتیجه می‌گردد:

x_i	۱	۲	۳	۴	۵
f_i	۲	۶	۸	۴	۶

چون طبقه‌ی سوم بیش‌ترین فراوانی را دارد، نشان این طبقه برابر مُد داده‌ها است.

۲۹- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به جدول فراوانی مقابل، می‌توان نوشت:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2 \times 1 + 6 \times 2 + 8 \times 3 + 4 \times 4 + 6 \times 5}{2 + 6 + 8 + 4 + 6} = \frac{2 + 12 + 24 + 16 + 30}{26} = \frac{84}{26} \rightarrow \bar{x} = \frac{84}{26} = 3/2$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: اگر میانه‌ی داده‌های آماری x_1, x_2, \dots, x_n برابر \tilde{x} باشد، آن‌گاه میانه‌ی داده‌های آماری $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر است با:

$$a\tilde{x} + b$$

لذا در این تست داریم:

$$\begin{cases} \tilde{x} = 8 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{میانه‌ی جدید} = 2(8) - 1 = 15$$

فصل هفتم: شاخص‌های پراکندگی

۱- اگر انحراف معیار اعداد ۴، ۶، ۸ و ۱۰ برابر σ باشد، آنگاه انحراف معیار اعداد ۱۲، ۱۸، ۲۴، ۳۰ برابر است با:

- (۱) $9\sigma^2$ (۲) 9σ (۳) σ^3 (۴) 3σ

۲- اگر میانگین داده‌های آماری را از داده‌ها کم کنیم داده‌های جدیدی بدست می‌آید که واریانس آنها k می‌باشد، واریانس داده‌های اولیه چقدر بوده است؟

- (۱) k (۲) صفر (۳) $|k - \bar{x}|$ (۴) $|k + \bar{x}|$

۳- واریانس داده‌های جدول مقابل کدام است؟

x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۱	۱	۳	۳

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) ۱

۴- اگر قیمت اجناس با انحراف معیار $\frac{1}{4}$ طی یک سال ۲۰٪ افزایش یابد واریانس قیمت‌های جدید چقدر می‌باشد؟

- (۱) $0/18$ (۲) $0/72$ (۳) $0/36$ (۴) $0/24$

۵- اگر میانگین $2a$ ، $2a + 1$ ، a برابر ۱۲ باشد واریانس آنها کدام است؟

- (۱) $\frac{40}{3}$ (۲) ۱۲ (۳) $\frac{38}{3}$ (۴) $\frac{35}{3}$

۶- اگر انحراف معیار ۵، x_1 ، x_2 ، x_3 برابر صفر باشد واریانس $x_1 + 2$ ، x_2 ، $x_3 + 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۷- اگر ضریب تغییرات Z ، y ، x برابر $0/2$ باشد، ضریب تغییرات کدام داده‌ها نیز $0/2$ است؟

- (۱) $z + 2$ ، $y + 2$ ، $x + 2$ (۲) $2z - 1$ ، $2y - 1$ ، $2x - 1$

- (۳) $2x$ ، $2y$ ، $2z$ (۴) $\frac{1}{2}x - 1$ ، $\frac{1}{2}y - 1$ ، $\frac{1}{2}z - 1$

۸- اگر واریانس داده‌های d ، c ، b ، a برابر ۴ و میانگین آنها برابر ۹ باشد ضریب تغییرات $2d$ ، $2c$ ، $2b$ ، $2a$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۹- انحراف معیار $2x + 3$ ، $2y + 3$ ، $2z + 3$ برابر ۴ است. واریانس $\frac{x}{2} - 1$ ، $\frac{y}{2} - 1$ ، $\frac{z}{2} - 1$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۱۰- اگر ضریب تغییرات داده‌هایی که همگی مثبت هستند برابر a باشد. اگر داده‌ها را در دو ضرب کنیم و با چهار جمع کنیم ضریب تغییرات

داده‌های جدید در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) بین a و $2a$ است. (۲) بیش از $2a$ است. (۳) کمتر از a است. (۴) دقیقاً $2a$ است.

۱۱- اگر واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر صفر باشد. میانگین داده‌های $2x_1 - 3, 2x_2 - 3, \dots, 2x_n - 3$ چقدر است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۷ (۳) صفر (۴) ۱۴

۱۲- اگر انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر $\frac{1}{5}$ میانگین آنها باشد ضریب تغییرات داده‌های $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۳- اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_{12} برابر ۱۲ و ضریب تغییرات آنها صفر باشد، ضریب تغییرات داده‌های $2x_1 + 3, 2x_2 + 3, \dots, 2x_{12} + 3$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{2}{25}$ (۲) $\frac{2}{24}$ (۳) صفر (۴) $\frac{2}{12}$

۱۴- اگر سه عدد a, b, c تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت d دهند، واریانس آنها چقدر است؟

- (۱) d (۲) $\frac{d}{3}$ (۳) $\frac{d^2}{3}$ (۴) $\frac{2d^2}{3}$

۱۵- انحراف معیار داده‌های $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\sqrt{2}$

۱۶- با فرض آنکه ضریب تغییرات داده‌های $5x_1 + 3, 5x_2 + 3, \dots, 5x_{10} + 3$ و ۲۸ برابر صفر است میانگین $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{10}^2$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) 28^2 (۳) ۵ (۴) ۲۵

۱۷- با اعمال کدام تغییر بر روی داده‌های آماری ضریب تغییرات داده‌ها تغییر نمی‌کند؟

(۱) به هر داده ۵ واحد اضافه کنیم.

(۲) هر داده را ۵ برابر کنیم.

(۳) هر داده را نصف کنیم و سپس به هر کدام یک واحد اضافه کنیم.

(۴) هر داده را به توان دو برسانیم.

۱۸- در یک نمونه ۱۰ داده‌ای، مجموع مجذورات داده‌ها برابر ۱۰۰ و میانگین داده‌ها برابر ۲ است. واریانس داده‌ها چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲

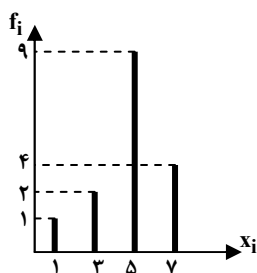
۱۹- اگر واریانس و میانگین داده‌های a و b و c و d به ترتیب برابر ۴ و ۵ باشند، ضریب تغییرات داده‌های $3a+1$ و $3b+1$ و $3c+1$ و $3d+1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{6}{7}$ (۲) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $-\frac{3}{7}$

۲۰- اگر ضریب تغییرات $c-3$, $b-2$, $a-1$ برابر صفر باشد ضریب تغییرات a, b, c کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{7}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{14}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{21}$

۲۱- با توجه به نمودار میله ای روبه‌رو، واریانس داده‌ها چه قدر است؟



(۱) ۲/۲۵

(۲) ۲/۴۵

(۳) ۲/۵

(۴) ۲/۷۵

۲۲- اگر انحراف معیار اعداد x_1, x_2, \dots, x_5 برابر با صفر باشد، میانه اعداد $1, 3x_1 + 1, 3x_2 + 1, 3x_3 + 1, 3x_4 + 1, 3x_5 + 1$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۷ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵/۵

۲۳- ضریب تغییرات داده‌های ۴ و ۶ و ۳ و ۳ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

۲۴- مجموع مربعات اختلاف‌های ۲۰ داده آماری از میانگین آن‌ها برابر ۳۲۰ و ضریب تغییرات این داده‌ها برابر ۰/۳ است. میانگین این داده‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{40}{3}$ (۲) $\frac{20}{3}$ (۳) $\frac{160}{3}$ (۴) $\frac{80}{3}$

۲۵- در یک نمونه‌گیری آماری، مجموع ۱۰ عدد داده آماری برابر ۵۰ و ضریب تغییرات آن‌ها $\frac{1}{5}$ است. مجموع مربعات این داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۲۶۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ۲۵۰

۲۶- اگر در داده‌های آماری با میانگین \bar{X} و انحراف معیار σ ، تمام داده‌ها را دو برابر کرده و با \bar{X} جمع کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات قبلی است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۲۷- اگر انحراف معیار داده‌های آماری x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۲ و ضریب تغییرات داده‌های آماری $x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_n + 4$ برابر $\frac{1}{3}$ باشد، میانگین داده‌های اخیر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۲

۲۸- اگر داده‌های آماری مفروضی را در اختیار داشته باشیم و \bar{X} میانگین این داده‌ها باشد با توجه به جدول مقابل، انحراف معیار داده‌ها، تقریباً برابر کدام است؟

f_i	۳	۱	۲	۵	۴	۵
$x_i - \bar{X}$	۵	۲	۱	-۲	t	-۴

- (۱) $2/7$
(۲) $3/3$
(۳) $9/8$
(۴) $8/2$

۲۹- اگر کمترین و بیشترین داده‌ی آماری به ترتیب برابر $1 - 2a, 3a + 10$ و دامنه‌ی تغییرات برابر $4 - 15a$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{14}{15}$ (۲) $\frac{15}{16}$ (۳) $\frac{15}{14}$ (۴) $\frac{16}{15}$

پانخ‌های تشریحی

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: اگر همه‌ی داده‌های آماری در عدد ثابت k ضرب شود، آنگاه انحراف معیار نیز در $|k|$ ضرب می‌شود. بنابراین در این تست خواهیم داشت:

$$۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ \xrightarrow{\times 3} ۱۲ و ۱۸ و ۲۴ و ۳۰$$

$$\sigma' = |k| \sigma \rightarrow \sigma' = 3\sigma$$

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

نکته: اگر انحراف معیار x_1, x_2, \dots, x_n برابر S باشد انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $|a| \cdot S$ می‌باشد.

$$y_i = x_i - \bar{x} \Rightarrow S_y^2 = S_x^2$$

تذکر (۱) اگر مقدار ثابتی با تمامی داده‌ها جمع شود (یا تفریق شود) واریانس و انحراف معیار داده‌ها تغییری نمی‌کند.

۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\bar{x} = \frac{1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 3 + 4 \times 3}{1 + 1 + 3 + 3} = \frac{1 + 2 + 9 + 12}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1 \times 2^2 + 1 \times 1^2 + 3 \times 0^2 + 3 \times 1^2}{8} = \frac{4 + 1 + 3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y = x + \frac{20}{100}x \Rightarrow y = x + \frac{1}{5}x = \frac{6}{5}x$$

$$S_y = \frac{6}{5}S_x \Rightarrow S_y^2 = \frac{36}{25}S_x^2 = \frac{36}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{25} = 0.36$$

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{a + 2a + 1 + 2a}{3} = 12 \Rightarrow 5a + 1 = 36 \Rightarrow a = 7$$

$$\text{داده‌ها: } 7, 10, 14 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(7-12)^2 + (10-12)^2 + (14-12)^2}{3} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{25 + 9 + 4}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{38}{3}$$

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

چون انحراف معیار x_1, x_2, x_3 برابر صفر است پس $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + 2 = 7 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = \frac{7 + 0 + 6}{3} = 6 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1 + 1 + 0}{3} = \frac{2}{3}$$

۷- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر داده‌ها را در عدد مثبت a ضرب کنیم هم میانگین در a ضرب می‌شود و هم انحراف معیار در a ضرب خواهد شد لذا ضریب تغییرات

تغییری نمی‌کند. اما اگر داده‌ها با عددی مثبت جمع شوند آنگاه ضریب تغییرات کم خواهد شد. زیرا در فرمول $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ مخارج افزایش می‌یابد اما صورت ثابت خواهد ماند.

۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$a, b, c, d \begin{cases} \bar{x} = 9 \\ s_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a, 2b, 2c, 2d \begin{cases} \bar{y} = 2 \times 9 = 18 \\ s_2 = 2 \times 2 = 4 \end{cases}$$

$$CV = \frac{s_2}{\bar{y}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

۹- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر فرض کنیم انحراف معیار x, y, z برابر S باشد آنگاه $2S = 4$ پس $S = 2$ لذا انحراف معیار داده‌های $\frac{x}{2} - 1, \frac{y}{2} - 1, \frac{z}{2} - 1$ برابر

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ است. پس در نهایت واریانس آنها ۱ است.}$$

نکته: اگر انحراف معیار x_1, x_2, \dots, x_n برابر S باشد انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $|a| \cdot S$ می‌باشد.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = a$$

$$y_i = 2x_i + 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = 2\bar{x} + 1 \\ \sigma_y = 2\sigma_x \end{cases} \Rightarrow CV_y = \frac{2\sigma_x}{2\bar{x} + 1} < \frac{2\sigma_x}{2\bar{x}} = a$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$S^2 = 0 \Rightarrow x_i = 7 \Rightarrow \bar{x} = 7$$

$$y_i = 2x_i - 3 \Rightarrow \bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 11$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y_i = 2x_i \Rightarrow \begin{cases} \sigma_y = 2\sigma_x \\ \bar{y} = 2\bar{x} \end{cases} \Rightarrow CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{2\sigma_x}{2\bar{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\bar{x}$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$CV_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = 0$$

$$y_i = 2x_i + 3 \Rightarrow \sigma_y = 2\sigma_x = 0 \Rightarrow CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = 0$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\bar{x} = b$$

$$S^2 = \frac{(a-b)^2 + (b-b)^2 + (c-b)^2}{2} = \frac{d^2 + d^2}{2} = d^2$$

$$\sigma^2 = d^2 \frac{3^2 - 1}{12} = \frac{2}{3} d^2 \text{ داریم: } \sigma^2 = d^2 \frac{n^2 - 1}{12}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\bar{x} = 0$$

$$S^2 = \frac{9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9}{6} = 4 \Rightarrow S = 2$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$CV_y = 0 \Rightarrow \sigma_y = 0 \Rightarrow y_i = 28 = 5x_i + 3 \Rightarrow x_i = 5$$

$$z_i = x_i^2 \Rightarrow \bar{z} = \bar{x}^2 = 25$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است.

از فرمول دوم واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{100}{10} - (2)^2 = 6$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n به ترتیب برابر \bar{x} و σ باشند، میانگین و انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b$ و $ax_2 + b$ و \dots و $ax_n + b$ به ترتیب برابر $a\bar{x} + b$ و $|a|\sigma$ و واریانس آن برابر $a^2\sigma^2$ است. پس:

$$\begin{cases} \bar{x} = 5 \\ \sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2 \end{cases}$$

$$y_i = -3x_i + 1 \Rightarrow \bar{y} = -3\bar{x} + 1 = -14, \quad \sigma_y = |-3| \times \sigma_x = 6$$

$$\Rightarrow c.v. = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{6}{-14} = -\frac{3}{7}$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر ضریب تغییرات یک سری داده برابر صفر باشد تمام داده‌ها باهم برابرند. پس در این سؤال داریم:

$$c - 3 = b - 2 = a - 1 = 0 \Rightarrow c = 3, b = 2, a = 1$$

$$\bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2 \Rightarrow S^2 = \frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2}{3} = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C_v = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$X = \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 9 \times 5 + 4 \times 7}{16} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{1 \times 1^2 + 2 \times 3^2 + 9 \times 5^2 + 4 \times 7^2}{16} - 5^2 = 2.5$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

چون انحراف معیار صفر است پس همه داده‌ها با هم برابرند: $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 5$

بنابراین میانه اعداد: ۷, ۱۵, ۱۶, ۱۶, ۱۶, ۱۶, ۱۶ برابر با ۱۶ است.

۲۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\bar{x} = \frac{3+3+6+4}{4} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-4)^2 \times 2 + (6-4)^2 + (4-4)^2}{4} = \frac{6}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

راه دوم: داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{9+9+36+16}{4} - 4^2 = \frac{70}{4} - 16 = \frac{6}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 320 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{320}{20}} = \sqrt{16} = 4$$

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0.3 = \frac{4}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4}{0.3} = \frac{40}{3}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\bar{X} = \frac{50}{10} = 5 \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{\sigma}{5} \Rightarrow \sigma = 1 \Rightarrow \sigma^2 = 1 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} = \bar{X}^2 \Rightarrow 1 = \frac{\sum x_i^2}{10} - 25 \Rightarrow \sum x_i^2 = 260$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\bar{X}_{\text{جدید}} = 2\bar{X} + \bar{X} = 3\bar{X}$$

$$\sigma_{\text{جدید}} = 2\sigma$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

$$C.V_{\text{جدید}} = \frac{2\sigma}{3\bar{X}} = \frac{2}{3} C.V$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ است.

می دانیم اگر به تمام داده‌های آماری یک عدد ثابت را بیافزائیم، انحراف معیار تغییر نمی کند، پس:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow \delta_1 = 2$$

(جامعه ی اول)

$$x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_n + 4 \rightarrow \delta_1 = 2$$

(جامعه ی دوم)

$$\text{ضریب تغییرات} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}} \rightarrow CV_2 = \frac{\delta_2}{x_2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{x_2} \rightarrow \bar{x}_2 = 4$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$(10 + 3a) - (2a - 1) = 15a - 4 \rightarrow a + 11 = 15a - 4 \rightarrow 14a = 15 \rightarrow a = \frac{15}{14}$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم همواره مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است یعنی $\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{X}) = 0$ بنابراین داریم:

$$\sum f_i (x_i - \bar{X}) = 0 \rightarrow 3 \times 5 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times (-2) + 4 \times t + 5 \times -4 = 0 \rightarrow 4t - 11 = 0 \rightarrow t = \frac{11}{4} \approx 3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{3(25) + 1(4) + 2(1) + 5(4) + 4(9) + 5(16)}{20}} = \sqrt{\frac{217}{20}} \approx 3.3$$

