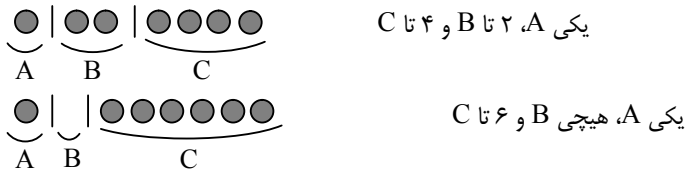




۳-۵: معادلات خطی با ضرایب واحد

○ **مسئله ۱:** به چند طریق می توان ۷ گوی یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد؟ (ممکن است به بعضی ها گوی نرسد).

حل: برای تقسیم ۷ گوی یکسان می توانیم از $3-1=2$ خط عمودی استفاده کنیم. به طور مثال، ۲ روش تقسیم به صورت زیر است:



همان طور که مشخص شد، نحوه ی قرارگیری گوی ها و خطوط در کنار هم، روش های توزیع ۷ گوی را بین ۳ نفر مشخص می کند. لذا برای شمارش روش های این توزیع، می توانیم از جایگشت با تکرار استفاده کنیم:

$$= \frac{9!}{7! \times 2!} = 36 \quad \text{نحوه ی قرارگیری } 7+2=9 \text{ شی (۷شی از نوع ۱ و ۲ شی از نوع ۲)}$$

تذکره: فرض کنید تعداد گوی هایی که A، B و C دریافت می کنند، به ترتیب x_1, x_2, x_3 باشد، در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. هم چنین متغیرها متعلق به مجموعه ی اعداد صحیح نامنفی (یعنی مجموعه ی $\{0, 1, 2, \dots\}$) می باشند.

به هر معادله به صورت $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ یک معادله ی خطی با ضرایب واحد گفته می شود (n و k دو عدد مثبت و معلوم هستند و x_i ها مجهول های این معادله اند). علت این نام گذاری این است که در این معادله، همه ی مجهول ها (یعنی x_i ها) به صورت خطی (عبارت درجه ی ۱) آمده اند و ضریب همه ی آن ها برابر واحد است.

یادداشت: با توجه به مسئله ی قبل، هر جواب این معادله را می توان با یک نحوه ی قرارگیری n گوی یکسان و $k-1$ خط نشان داد، یا در واقع با

یک جایگشت با تکرار از n شیء نوع ۱ و $k-1$ شیء نوع ۲، تعداد چنین جایگشت هایی برابر است با: $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ ، که آن را می توانیم با

$$\binom{n+k-1}{n} \text{ یا } \binom{n+k-1}{k-1} \text{ نیز نشان دهیم.}$$

قضیه ی ۱: تعداد جواب های معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ در مجموعه ی اعداد صحیح نامنفی برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

تست ۱: چند دسته ی ۷ شاخه ای از سه نوع گل موجود می توان تشکیل داد؟

۱۵ (۱) ۲۱ (۲) ۲۸ (۳) ۳۶ (۴)

حل: فرض کنید از سه نوع گل موجود به ترتیب x_1, x_2, x_3 و x_4 شاخه انتخاب کنیم. در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$. با توجه به توضیحاتی که دادیم تعداد راه های انتخاب ۷ شاخه از سه نوع گل، برابر تعداد جواب های معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ در مجموعه ی اعداد صحیح نامنفی

است. این تعداد بنا بر قضیه ی قبل برابر $\binom{9}{3} = 36$ است. بنابراین گزینه ی ۴ درست است.

○ **مسئله ۷:** تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x + y + z = 15$ را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید:

الف) $x \geq 3$

ب) $x > 3, y > 4, z \geq 2$

حل: الف) از تغییر متغیر $x' = x - 3$ استفاده می‌کنیم. اگر $x \geq 3$ ، در این صورت $x' \geq 0$ داریم:

$$x + y + z = 15 \xrightarrow{x = x' + 3} x' + y + z = 12 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{14}{2} = 91$$

ب) با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x > 3 \Rightarrow x \geq 4 \xrightarrow{x' = x - 4} x' \geq 0$$

$$y > 4 \Rightarrow y \geq 5 \xrightarrow{y' = y - 5} y' \geq 0$$

$$z \geq 2 \xrightarrow{z' = z - 2} z' \geq 0$$

$$x + y + z = 15 \Rightarrow x' + 4 + y' + 5 + z' + 2 = 15 \Rightarrow x' + y' + z' = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{6}{2} = 15$$

قضیه ۱:

فرض کنید عددهای صحیح c_1, c_2, \dots, c_k داده شده باشند. در این صورت تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x_1 \geq c_1, x_2 \geq c_2, \dots, x_k \geq c_k$ برابر $\binom{n + k - 1 - (c_1 + c_2 + \dots + c_k)}{k - 1}$ است.

○ **مسئله ۸:** معادله‌ی $x + y + z = 20$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x \geq 0, y \geq -2, z \geq 7$ چند جواب دارد؟

حل: با توجه به قضیه‌ی فوق پاسخ برابر $\binom{17}{2} = \binom{20 + 3 - 1 - (0 - 2 + 7)}{2}$ است.

تست ۱: تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ به شرط $x_i \geq 2$ چند است؟ ($i = 1, 2, 3$)

۴) ۱۳۶ ۳) ۹۱ ۲) ۵۵ ۱) ۴۵

حل: با توجه به قضیه‌ی فوق پاسخ برابر $\binom{11}{2} = \binom{15 + 3 - 1 - (3 \times 2)}{3 - 1}$ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تذکره: در حالت خاص قضیه‌ی قبل که $x_i \geq 1$ ، در واقع با جواب‌های طبیعی معادله مواجه‌ایم. بنابراین قضیه‌ی زیر قابل بیان است:

قضیه ۲:

تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر $\binom{n - 1}{k - 1}$ است.

◀ **مثال:** تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر $\binom{9}{2}$ است.

تست ۲: ۸ کبوتر یکسان به چند طریق می‌توانند در ۵ لانه‌ی متمایز قرار گیرند به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱) $\binom{12}{4}$ ۲) $\binom{7}{4}$ ۳) $\binom{8}{4}$ ۴) $\binom{8}{5}$

حل: فرض کنید در ۵ لانه به ترتیب x_1, \dots, x_5 و ۸ کبوتر قرار گیرند، در این صورت $x_1 + \dots + x_5 = 8$. چون می‌خواهیم هیچ لانه‌ای خالی نماند، پس برای هر $1 \leq i \leq 5$ ، $x_i \geq 1$. نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1 + \dots + x_5 = 8$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی یعنی

برابر $\binom{7}{4}$ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست ۴: نامعادله‌ی $(x_1 + x_2 + x_3)^2 < 300$ ، در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ (آزاد-۸۶)

۴۹ (۱) ۲۱ (۲) ۱۶ (۳) ۶ (۴)

حل: از نامعادله‌ی داده شده نتیجه می‌گیریم $5 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$ ، پس $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ یا $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. تعداد جواب‌های این

دو معادله در مجموعه‌ی اعداد طبیعی به ترتیب برابر $\binom{4}{2}$ و $\binom{5}{2}$ است، لذا تعداد جواب‌های نامعادله‌ی داده شده در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر

$$= 6 + 10 = 16 \text{ است. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.}$$

○ **مسئله‌ی ۴:** در بسط $(x + y + z + w)^7$ چند جمله‌ی متمایز ظاهر می‌شود؟

حل: با توجه به تساوی $(x + y + z + w)^7 = \underbrace{(x + y + z + w) \dots (x + y + z + w)}_{\text{هفت بار}}$ نتیجه می‌گیریم هر جمله از این بسط به صورت

$x^a y^b z^c w^d$ است که a, b, c, d اعداد صحیح نامنفی‌اند و $a + b + c + d = 7$ (زیرا هر جمله از حاصل ضرب فوق از ضرب ۷ متغیر تشکیل

شده است که یکی از پرانتز اول، یکی از پرانتز دوم،... و یکی از پرانتز هفتم انتخاب شده است در واقع مفهوم جمله‌ی عمومی $x^a y^b z^c w^d$ این است که از a پرانتز x ، از b پرانتز y ، از c پرانتز z و از d پرانتز w انتخاب شده است). در این جا مقادیر a, b, c, d تعیین کننده‌ی جملات بسط‌اند، لذا

تعداد جملات متمایز بسط، برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $a + b + c + d = 7$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی، یعنی برابر $\binom{10}{3}$ است.

○ **مسئله‌ی ۵:** معادله‌ی $x_1^4 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

حل: توجه کنید چنان چه $x_1 \geq 2$ ، در این صورت معادله‌ی فوق در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی هیچ جوابی ندارد. پس جواب‌های این معادله را می‌توانیم به دو دسته‌ی مجزا تقسیم کنیم.

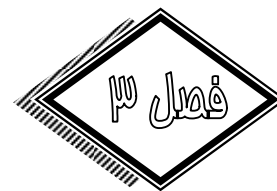
دسته‌ی اول: جواب‌هایی که $x_1 = 0$. اگر $x_1 = 0$ ، آن‌گاه معادله‌ی اصلی به $x_2 + x_3 + x_4 = 12$ تبدیل می‌شود. تعداد جواب‌های این معادله در

مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{14}{2}$ است.

دسته‌ی دوم: جواب‌هایی که $x_1 = 1$. اگر $x_1 = 1$ ، آن‌گاه معادله‌ی اصلی به $x_2 + x_3 + x_4 = 11$ تبدیل می‌شود. تعداد جواب‌های این معادله در

مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{13}{2}$ است.

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم، پاسخ مسأله برابر $\binom{14}{2} + \binom{13}{2}$ است.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۱- معادله $x + y + z = 5$ ، در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

۲۴ (۴)	۲۱ (۳)	۱۸ (۲)	۱۵ (۱)
--------	--------	--------	--------
- ۲- چند دسته گل ۳ تایی از ۶ نوع گل مختلف می‌توان ساخت؟ (تکرار مجاز است)

۸۴ (۴)	۵۶ (۳)	۴۲ (۲)	۳۵ (۱)
--------	--------	--------	--------
- ۳- به چند طریق می‌توان ۹ سیب مشابه را بین ۴ نفر توزیع کرد، به طوری که مجموع سیب‌های داده شده به نفر اول و دوم روی هم ۵ باشد؟

۳۰ (۴)	۲۴ (۳)	۲۰ (۲)	۱۱ (۱)
--------	--------	--------	--------
- ۴- معادله $x + y + z = ۱۲$ ، در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۶۶ (۴)	۵۵ (۳)	۴۸ (۲)	۹۱ (۱)
--------	--------	--------	--------
- ۵- معادله $x + y + z = ۱۳$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب با شرط $x \geq ۳$ دارد؟

۹۱ (۴)	۷۸ (۳)	۵۵ (۲)	۶۶ (۱)
--------	--------	--------	--------
- ۶- دستگاه
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = ۸ \\ x_4 + x_5 = ۵ \end{cases}$$
 چند جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارد؟

۱۳ (۱)	۸۰ (۲)	۸۴ (۳)	۱۲ (۴)
--------	--------	--------	--------
- ۷- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = ۱۷$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی، چند جواب با شرط $x_1 \geq ۴$ و $x_2 > ۵$ دارد؟

۲۴ (۱)	۳۶ (۲)	۴۲ (۳)	۴۵ (۴)
--------	--------	--------	--------
- ۸- به چند طریق می‌توان ۵ سیب یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، به طوری که به یکی از آن‌ها، دقیقاً ۳ سیب برسد؟

۶ (۱)	۱۰ (۲)	۲۴ (۳)	۴۰ (۴)
-------	--------	--------	--------
- ۹- معادله $۲x + y + z + w = ۹$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱۵ (۱)	۱۶ (۲)	۲۱ (۳)	۲۲ (۴)
--------	--------	--------	--------
- ۱۰- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۱۸$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی، چند جواب با شرط $x_i \geq ۴$ دارد؟ $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

۱۰ (۱)	۱۸ (۲)	۱۳۵ (۳)	۲۵۵ (۴)
--------	--------	---------	---------
- ۱۱- ۱۱ کبوتر یکسان به چند طریق می‌توانند در ۴ لانه‌ی متمایز قرار بگیرند، به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱۲۰ (۱)	۲۱۰ (۲)	۲۸۵ (۳)	۳۶۴ (۴)
---------	---------	---------	---------
- ۱۲- به چند طریق می‌توان ۵ خودکار یکسان و ۴ مداد یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد؟

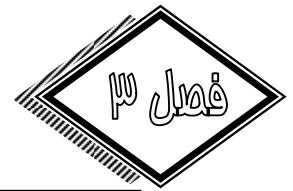
۳۶ (۱)	۴۵ (۲)	۲۴۰ (۳)	۳۱۵ (۴)
--------	--------	---------	---------
- * ۱۳- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی systems با حذف هر ۳ حرف s کلمه‌ی temy به دست می‌آید؟

۱۰ (۱)	۲۰ (۲)	۳۵ (۳)	۵۶ (۴)
--------	--------	--------	--------
- ۱۴- فرض کنید $A = (۱, ۰, ۰)$ ، $B = (۰, ۱, ۰)$ و $C = (۰, ۰, ۱)$ سه نقطه در فضای \mathbb{R}^3 باشند. درون و روی محیط مثلث ABC چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

۳۶ (۱)	۴۵ (۲)	۵۵ (۳)	۶۶ (۴)
--------	--------	--------	--------
- ۱۵- به چند طریق می‌توان ۷ سکه ۵۰ ریالی و یک سکه ۱۰۰ ریالی را بین ۳ نفر تقسیم کرد طوری که به هر نفر حداقل یک سکه برسد؟

۲۸ (۱)	۵۶ (۲)	۶۳ (۳)	۸۴ (۴)
--------	--------	--------	--------

- ۱۶- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $X_1 + X_2 + X_3 \leq 7$ چند است؟
 (۱) ۱۲۰ (۲) ۸۰ (۳) ۵۴ (۴) ۳۶
- ۱۷- نامعادله‌ی $127 < (X_1 + X_2)^3$ چند جواب طبیعی دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۱
- ۱۸- تعداد جملات حاصل از بسط $(x + y + z)^9$ چند تاست؟
 (۱) ۵۵ (۲) ۶۰ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶
- ۱۹- در بسط $(a + b + c + d)^7$ چند جمله وجود دارد که فاقد حرف b باشد؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۱۲۰
- ۲۰- چند دسته‌ی ۳ تایی گل از ۵ نوع گل مختلف می‌توان ساخت؟ (تکرار مجاز است)
 (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۵ (۴) ۴۲
- ۲۱- معادله‌ی $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 6$ با شرط $X_i \in \mathbb{Z}$ و $X_i \geq 0$ چند جواب دارد؟
 (۱) $\binom{9}{6}$ (۲) $\binom{8}{6} + \binom{7}{5}$ (۳) $\binom{9}{6} + \binom{8}{5}$ (۴) $\binom{10}{6} + \binom{9}{5}$
- ۲۲- معادله‌ی $X_1 + X_2 + 10 \cdot X_3 = 20$ ، چند جواب صحیح غیر منفی دارد؟
 (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۳ (۴) ۴۱
- ۲۳- معادله‌ی $X_1 + X_2 + X_3 = \frac{10}{X_3}$ ، چند جواب صحیح غیر منفی دارد؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۹
- ۲۴- معادله‌ی $(X_1 + X_2)^3 + X_3 + X_4 = 20$ چند جواب طبیعی دارد؟
 (۱) ۲۱ (۲) ۱۱ (۳) ۲۲ (۴) $\binom{23}{20}$
- (آزاد - ۸۰)
 (آزاد - ۸۱)
 (آزاد - ۸۲)
 (آزاد - ۸۵)



پاسخ‌های تشریحی

A ۱- گزینه‌ی (۳) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$. لذا برای معادله‌ی $x + y + z = 5$ داریم:

$$k = 3, n = 5 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}} \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

B ۲- گزینه‌ی (۳) فرض کنید از ۶ نوع گل موجود، به ترتیب x_1, x_2, \dots, x_6 و x_6 شاخه انتخاب کنیم. لذا روش‌های ساختن دسته گل ۳ تایی برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$ که برابر است با:

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$$

B ۳- گزینه‌ی (۴) ابتدا ۵ سیب را بین نفرهای اول دوم توزیع می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 = 5 \xrightarrow{\text{روش‌های توزیع}} \binom{6}{1} = 6$$

اکنون $9 - 5 = 4$ سیب باقی‌مانده را بین نفرهای سوم و چهارم توزیع می‌کنیم:

$$x_3 + x_4 = 4 \xrightarrow{\text{روش‌های توزیع}} \binom{5}{1} = 5$$

لذا طبق اصل ضرب جواب سؤال برابر است با $6 \times 5 = 30$.

A ۴- گزینه‌ی (۳) تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$. لذا تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی

$$x + y + z = 12 \text{ برابر است با } \binom{12-1}{3-1} = 55$$

A ۵- گزینه‌ی (۱) با توجه به قضیه‌ی (۲)، تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$k = 3, n = 13, x \geq 3 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}} \binom{13+3-1-3}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$$

B ۶- گزینه‌ی (۳) معادله‌های $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ و $x_4 + x_5 = 5$ در مجموعه‌ی N ، به ترتیب دارای $\binom{8-1}{3-1}$ و $\binom{5-1}{2-1}$ جواب می‌باشند.

$$\text{لذا طبق اصل ضرب تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه مورد نظر برابر است با } \binom{4}{1} \times \binom{7}{2} = 14$$

$$B \quad ۷- \text{گزینه‌ی (۲)} \text{ با توجه به قضیه‌ی (۲) تعداد جواب‌ها برابر است با } \binom{17+3-1-4-6}{3-1} = 36$$

توجه: دقت کنید که در مجموعه‌ی اعداد صحیح $x > 5$ معادل $x \geq 6$ است.

C ۸- گزینه‌ی (۳) جواب سؤال برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ با این شرط که یکی از x_i ها برابر ۳

باشد. لذا ابتدا به $\binom{4}{1}$ طریق می‌توان متغیری را که برابر ۳ است پیدا کرد. فرض کنید $x_1 = 3$ ، در این صورت معادله به صورت $x_2 + x_3 + x_4 = 2$ تبدیل

می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر $\binom{4}{2} = 6$ است. لذا طبق اصل ضرب تعداد روش‌های توزیع مطلوب سؤال برابر است با $4 \times 6 = 24$.

تذکر: دقت کنید که وقتی یکی از متغیرها برابر ۳ است، دیگر بقیه‌ی متغیرها نمی‌توانند برابر ۳ باشند و این روش شمارش، به اشتباه حالتی را تکراری را نمی‌شمارد.

B ۹- گزینه‌ی (۴) چون ضریب x غیر از یک است، باید برای x حالت‌بندی کنیم:

$$x=1 \Rightarrow y+z+w=7 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{6}{2} = 15$$

$$x=2 \Rightarrow y+z+w=5 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x=3 \Rightarrow y+z+w=3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{2}{2} = 1$$

واضح است که به ازای $x \geq 4$ برای معادله جواب طبیعی به دست نمی‌آید، لذا تعداد جواب‌ها برابر است با: $15 + 6 + 1 = 22$

B ۱۰- گزینه‌ی (۱) با توجه به قضیه‌ی (۲) تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$\binom{18+4-1-4-4-4-4}{4-1} = \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{6} = 10$$

A ۱۱- گزینه‌ی (۱) روش‌های توزیع ۱۱ کبوتر در ۴ لانه‌ی متمایز، متناظر پیدا کردن تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ ، که برابر است با:

$$\binom{11-1}{4-1} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

B ۱۲- گزینه‌ی (۴) روش‌های توزیع ۵ خودکار یکسان بین ۳ نفر، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ که برابر

است با $\binom{7}{2} = 21$. همچنین روش‌های توزیع ۴ مداد بین ۳ نفر نیز، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ، که

برابر است با $\binom{6}{2} = 15$. لذا طبق اصل ضرب تعداد روش‌های توزیع ۵ خودکار و ۴ مداد برابر است با $15 \times 21 = 315$.

۱۳- گزینه‌ی (۳) باید ۳ حرف s را در بین حروف کلمه $temy$ قرار دهیم. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_5 به ترتیب تعداد حروف s در ۵ فضای خالی ابتدا، انتها و بین حروف کلمه $temy$ باشد. در این صورت $x_1 + \dots + x_5 = 3$ و لذا پاسخ برابر تعداد جواب‌های این معادله در مجموعه اعداد

صحیح نامنفی یعنی برابر $\binom{7}{4} = 35$ است.

B ۱۴- گزینه‌ی (۴) معادله صفحه مثلث ABC برابر $x + y + z = 10$ است و درون و روی محیط این مثلث نقاطی از صفحه است که هر سه

مختص x, y و z آنها نامنفی است. پس پاسخ مسأله برابر $\binom{12}{2} = 66$ است.

B ۱۵- گزینه‌ی (۳) برای ۱۰۰ ریالی ۳ انتخاب وجود دارد و تعداد راه‌های توزیع سکه‌های ۵۰ ریالی برابر تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ در

مجموعه اعداد صحیح با شرایط $x_1 \geq 1, x_2 \geq 0$ و $x_3 \geq 0$ یعنی برابر $\binom{7}{2} = 21$ است. پس پاسخ برابر $3 \times 21 = 63$ است.

B ۱۶- گزینه‌ی (۱) با فرض $t \geq 0$ داریم:

در نتیجه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + t = 7$ ، با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \text{ برابر است با } \binom{10}{3} = 120.$$

B ۱۷- گزینه‌ی (۴) با توجه به فرض سؤال داریم:

$$16 < (x_1 + x_2)^2 < 127 \Rightarrow 3 \leq x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب طبیعی} = \binom{2}{1} = 2$$

$$x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب طبیعی} = \binom{3}{1} = 3$$

$$x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب طبیعی} = \binom{4}{1} = 4$$

لذا نامعادله‌ی مورد نظر دارای $4 + 3 + 2 = 9$ جواب طبیعی است.

B ۱۸- گزینه‌ی (۱) تذکر: تعداد جملات حاصل از بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$ ، یعنی همان جواب‌های صحیح و

$$\text{نامنفی معادله‌ی } x_1 + \dots + x_k = n \text{ . لذا جواب سؤال برابر است } \binom{9+3-1}{3-1} = 55$$

C ۱۹- گزینه‌ی (۳) تعداد جملات بسط $(a+b+c+d)^7$ که فاقد حرف b باشند، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ به شرط این که $x_2 = 0$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}} \binom{9}{2} = 36$$

B ۲۰- گزینه‌ی (۳) تعداد گل‌های از هر نوع را با x_1, x_2, \dots, x_8 نشان می‌دهیم. پس:

$$x_1 + \dots + x_8 = 3, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad x_i \geq 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3+8-1}{8-1} = \binom{10}{7} = 35$$

B ۲۱- گزینه‌ی (۱) تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله برابر است با:

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \binom{9}{6}$$

B ۲۲- گزینه‌ی (۳) واضح است که x_3 تنها می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد. تعداد جواب‌ها را در ۳ حالت پیدا می‌کنیم:

$$1) \quad x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 20 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{20+2-1}{2-1} = 21$$

$$2) \quad x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{11}{1} = 11$$

$$3) \quad x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = 1$$

پس روی هم $21 + 11 + 1 = 33$ جواب داریم.

B ۲۳- گزینه‌ی (۳) معادله را به صورت $x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 10$ می‌نویسیم و جواب‌ها را حالت‌بندی می‌کنیم:

$$1) \quad x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{9+2-1}{2-1} = 10$$

$$2) \quad x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4}{1} = 4$$

حالت‌های دیگر به دلیل نامنفی بودن x_i ها امکان‌پذیر نیست. پس معادله‌ی اصلی $10 + 4 = 14$ جواب دارد.

C ۲۴- گزینه‌ی (۲) چون $x_1 + x_2 \geq 2$ ، پس قطعاً $x_1 + x_2 = 2$ ، زیرا $3^3 > 20$. بنابراین برای حل تست، باید تعداد جواب‌های طبیعی دو

معادله‌ی $x_1 + x_2 = 2$ و $x_3 + x_4 = 12$ را بیابیم. معادله‌ی اول ۱ جواب و معادله‌ی دوم $\binom{12-1}{2-1} = 11$ جواب دارد. درکل طبق اصل ضرب،

$$11 \times 1 = 11 \text{ جواب داریم.}$$



۳-۶: اصل شمول و عدم شمول

یکی از ابزارهای قوی شمارش اصل شمول و عدم شمول است. قبل از شروع بحث مسالهی زیر به درک بهتر این موضوع کمک می‌کند.

○ **مسئله ۶:** چند عضو از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$ بر ۲ یا ۳ بخش پذیر است؟

حل: مجموعه S شامل ۴۰ عضو است که باید اعدادی را که بر ۲ یا ۳ بخش پذیرند بشماریم. فرض کنید مجموعه A_1 اعدادی باشند که بر ۲ بخش پذیرند (مضارب ۲) و مجموعه A_2 شامل اعدادی باشد که بر ۳ بخش پذیرند (مضرب ۳). در این صورت داریم:

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{40}{2} \right\rfloor = 20, \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{40}{3} \right\rfloor = 13$$

اما برخی از اعداد که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیرند (اعضای مجموعه $A_1 \cap A_2$) هم در A_1 و هم در A_2 شمرده شده‌اند. در واقع مضارب هر دو عدد (مضارب ۶) دوبار شمرده شده‌اند که باید یکبار آن‌ها را از $|A_1| + |A_2|$ کم کنیم. پس داریم:

اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیرند - اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند + اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند = اعدادی که بر ۲ یا ۳ بخش پذیرند

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{40}{6} \right\rfloor = 6 \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = 20 + 13 - 6 = 27$$

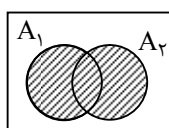
○ **مسئله ۷:** در مسالهی قبل، چند عضو از مجموعه نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیرند؟

حل: مجموعه $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$ مجموعه‌ای است که اعضای آن نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیرند که همان متمم مجموعه $A_1 \cup A_2$ است:

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \overline{A_1 \cup A_2} \Rightarrow |S| - |A_1 \cup A_2| = 40 - 27 = 13$$

اصل شمول و عدم شمول برای ۲ مجموعه

فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n مجموعه‌هایی متناهی باشند. اصل شمول و عدم شمول برای محاسبه‌ی تعداد اعضای $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ بر حسب تعداد اعضای A_1, A_2, \dots, A_n و اشتراک‌های این مجموعه‌ها ارائه می‌دهد. در این بخش این فرمول را در حالتی که n برابر ۲ یا ۳ باشد به دست می‌آوریم و کاربردهای آن را در حل مسائل شمارشی بیان می‌کنیم.

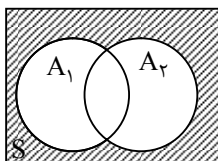


قضیه ۴: فرض کنید A_1 و A_2 مجموعه‌هایی متناهی باشند. در این صورت:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

○ **مسئله ۸:** یک مؤسسه‌ی تحقیقاتی ۱۰۰ عضو دارد. ۶۰ نفر از آن‌ها زبان انگلیسی و ۴۵ نفر زبان آلمانی را می‌دانند و ۲۰ نفر به هر دو زبان مسلط‌اند. چند عضو این مؤسسه هیچ‌یک از دو زبان را نمی‌دانند؟

حل: فرض کنید S مجموعه‌ی اعضای مؤسسه باشد، A_1 مجموعه‌ی اعضای که زبان انگلیسی را می‌دانند و A_2 مجموعه‌ی اعضای که زبان آلمانی را می‌دانند. در این صورت با توجه به فرض مسأله:



$$|S| = 100, \quad |A_1| = 60, \quad |A_2| = 45, \quad |A_1 \cap A_2| = 20$$

مجموعه‌ی اعضای که هیچ‌یک از زبان‌های انگلیسی و آلمانی را نمی‌دانند، برابر مکمل مجموعه‌ی $A_1 \cup A_2$ است. لذا تعداد این اعضا برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cup A_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 100 - 60 - 45 + 20 = 15$$

تست ۵: چند عدد از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ حداقل بر یکی از ۲ و ۳ بخش پذیرند؟

(۱) ۵۰ (۲) ۶۳ (۳) ۶۷ (۴) ۸۳

حل: فرض کنید A_1 و A_2 مجموعه‌ی اعضای از S باشند که به ترتیب بر ۲ و ۳ بخش پذیرند. در این صورت:

$$|A_1| = \left[\frac{100}{2} \right] = 50, \quad |A_2| = \left[\frac{100}{3} \right] = 33$$

همچنین $A_1 \cap A_2$ مجموعه‌ی اعضای از S است که بر هر دوی ۲ و ۳ بخش پذیرند، لذا $A_1 \cap A_2$ مجموعه‌ی اعضای از S است که بر ۶

بخش پذیرند، پس $|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$. مجموعه‌ی اعضای از S که حداقل بر یکی از ۲ و ۳ بخش پذیرند برابر $A_1 \cup A_2$ است، لذا

پاسخ برابر است با:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 50 + 33 - 16 = 67$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

مسئله‌ی ۹: چند تابع پوشا از مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه‌ی $B = \{1, 2\}$ می‌توان نوشت؟

حل: اولاً دقت کنید که برای تشکیل یک تابع مانند f ، از A به B باید ۳ جای خالی زیر را پر کنیم:

$$f(a) = \square, \quad f(b) = \square, \quad f(c) = \square$$

مثلاً در حالت کلی بدون هیچ شرطی، هریک از جاهای خالی را می‌توان به ۲ حالت (با اعداد ۱ یا ۲) پر کرد، بنابراین در کل $2 \times 2 \times 2 = 8$ تابع از A به B می‌توان تشکیل داد. حال برای حل مسئله، ابتدا تعداد توابع غیر پوشا را حساب می‌کنیم. برای این منظور باید تعداد توابعی را حساب کنیم که حداقل یکی از اعداد ۱ و ۲ در برد آن‌ها نیست. داریم:

$$|A_1| = \text{تعداد توابع از } A \text{ به } B \text{ که } 1 \text{ در بردشان نیست} = 1$$

$$|A_2| = \text{تعداد توابع از } A \text{ به } B \text{ که } 2 \text{ در بردشان نیست} = 1$$

$$|A_1 \cap A_2| = \text{تعداد توابع از } A \text{ به } B \text{ که } 1 \text{ و } 2 \text{ در بردشان نیست} = 0$$

$$|S| = B \text{ به } A \text{ کل توابع از } = 2^3 = 8$$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 8 - 1 - 1 + 0 = 6$$

راه دوم: اگر برای تابع مورد نظر فرض کنیم $f(c) = \square$ ، $f(b) = \square$ و $f(a) = \square$ ، برای پوشا بودن f باید هر دو عدد ۱ و ۲ در جاهای

خالی قرار بگیرند، ولی چون جاهای خالی یکی بیشتر از اعضای B هستند، یکی از اعضای B دو بار تکرار می‌شوند:

تعداد جایگشت اعضای برد \times تعداد روش‌های انتخاب عضو تکراری = تعداد روش‌های پر کردن جاهای خالی با ۱ و ۲

$$= \binom{2}{1} \times \frac{3!}{2} = 6$$

دقت کنید که در جایگشت‌های اعضای برد، با یک جایگشت با تکرار که دو عضو یکسان دارد، مواجه‌ایم.

مسئله‌ی ۱۰: چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۷۰۰ وجود دارد که نسبت به ۴۸ اول باشد؟

حل: اعدادی نسبت به $48 = 2^4 \times 3$ اول هستند که بر هیچ یک از عوامل اول ۲ و ۳ بخش پذیر نباشند. A_i ها را مجموعه‌های متمم در نظر می‌گیریم:

$$|A_1| = \left[\frac{700}{2} \right] = 350 = \text{تعداد اعدادی که بر } 2 \text{ بخش پذیرند}$$

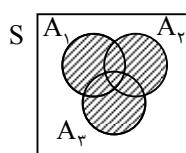
$$|A_2| = \left[\frac{700}{3} \right] = 233 = \text{تعداد اعدادی که بر } 3 \text{ بخش پذیرند}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{700}{6} \right] = 116 = \text{تعداد اعدادی که بر } 2 \text{ و } 3 \text{ بخش پذیرند}$$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 700 - 350 - 233 + 116 = 233$$

اصل شمول و عدم شمول برای ۳ مجموعه

قضیه ۵:



فرض کنید A_1 ، A_2 و A_3 مجموعه‌هایی متناهی باشند. در این صورت، مطابق نمودار ون مقابل داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

مسئله ۱۱: در چند عدد ۵ رقمی، هر سه رقم ۰، ۱ و ۲ وجود دارند؟

حل: فرض کنید S مجموعه‌ی اعداد ۵ رقمی باشد، در این صورت:

$$|S| = \binom{9}{0} \binom{10}{10} \binom{10}{10} \binom{10}{10} \binom{10}{10} = 9 \times 10^4$$

سه دسته از اعضای S برای ما مطلوب نیستند. یک دسته اعدادی که رقم ۰ را ندارند، دسته‌ی دیگر اعدادی که رقم ۱ را ندارند و دسته‌ی آخر اعدادی که رقم ۲ را ندارند. این سه دسته را به ترتیب با A_1 ، A_2 و A_3 نشان می‌دهیم. اعداد مطلوب اعدادی هستند که در هیچ‌یک از A_1 ، A_2 و A_3 قرار ندارند.

مجموعه‌ی A_1 برابر مجموعه‌ی اعداد ۵ رقمی است که رقم ۰ را ندارند، لذا:

$$|A_1| = \binom{9}{0} \binom{9}{9} \binom{9}{9} \binom{9}{9} \binom{9}{9} = 9^5$$

به‌طور مشابه $|A_2| = |A_3| = 8 \times 9^4$. مجموعه‌ی $A_1 \cap A_2$ برابر مجموعه‌ی اعداد ۵ رقمی است که هیچ‌یک از رقم‌های ۰ و ۱ را ندارند، لذا:

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{8}{0} \binom{8}{8} \binom{8}{8} \binom{8}{8} \binom{8}{8} = 8^5$$

به‌طور مشابه $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 7 \times 8^4$. مجموعه‌ی $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ برابر مجموعه‌ی اعداد ۵ رقمی است که هیچ‌یک از رقم‌های ۰، ۱ و ۲ را ندارند، لذا:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{7}{0} \binom{7}{7} \binom{7}{7} \binom{7}{7} \binom{7}{7} = 7^5$$

پس پاسخ مسأله برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 9 \times 10^4 - 2 \times 8 \times 9^4 - 9^5 + 2 \times 7 \times 8^4 + 8^5 - 7^5$$

مسئله ۱۲: چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که در آن‌ها هریک از رقم‌های ۱، ۲ و ۳ حداقل یک‌بار به‌کار رفته باشد؟

حل: مطابق مثال قبل A_i ها را مجموعه‌های متمم (فاقد ویژگی خواسته شده) در نظر می‌گیریم. یعنی A_1 ، A_2 و A_3 را به ترتیب مجموعه‌ی اعدادی در نظر می‌گیریم که در آن‌ها ارقام ۱، ۲ و ۳ به‌کار نرفته باشد. اما تفاوت این مثال با مثال قبل در این است که مجموعه‌های $A_1 \cap A_2$ ، $A_1 \cap A_3$ و $A_2 \cap A_3$ مشابهند، یعنی تعداد اعضای آن‌ها با هم برابر است. این حالت را حالت متقارن می‌گویند:

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |S| - 3 \times |A_1| + 3 \times |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|S| = 9 \times 10^3$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 8 \times 9^3$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 7 \times 8^3$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6 \times 7^3$$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 9 \times 10^3 - 3 \times (8 \times 9^3) + 3 \times (7 \times 8^3) - 6 \times 7^3$$

نکته ۱:

در حالت کلی برای سوال‌های با k ویژگی متقارن می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_k| =$$

$$|S| - \binom{k}{1}(|A_1|) + \binom{k}{2}(|A_1 \cap A_2|) - \binom{k}{3}(|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} |A_1 \cap \dots \cap A_k|$$

البته به خاطر سپردن رابطه‌ی بالا خیلی هم الزامی نیست و استفاده از مفاهیم به‌کار گرفته شده در مثال‌های قبل کافی است. در این کتاب نیز از این نکته به‌عنوان روش اول حل مسائل استفاده نشده است.

تست ۶: ۵ کتاب مختلف را به چند طریق می‌توان بین ۳ نفر تقسیم کرد به طوری که به هر یک حداقل یک کتاب برسد؟

۲۴۰ (۴)

۲۱۰ (۳)

۱۵۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

حل: فرض کنید S مجموعه‌ی کل روش‌های توزیع ۵ کتاب بین ۳ نفر باشد، در این صورت $|S| = 3^5$ ، زیرا برای هر کتاب ۳ انتخاب وجود دارد. سه دسته از این توزیع‌ها مطلوب نیستند. دسته‌ی اول توزیع‌هایی که به نفر اول هیچ کتابی نرسیده است، دسته‌ی دوم توزیع‌هایی که به نفر دوم هیچ کتابی نرسیده است و دسته‌ی سوم توزیع‌هایی که به نفر سوم هیچ کتابی نرسیده است. این سه دسته را به ترتیب با A_1 ، A_2 و A_3 نشان می‌دهیم. توزیع‌های مطلوب آن‌هایی هستند که در هیچ‌یک از A_1 ، A_2 و A_3 قرار ندارند.

مجموعه‌ی A_1 مجموعه‌ی توزیع‌هایی است که در آن‌ها به نفر اول کتاب نرسیده است، لذا $|A_1| = 2^5$ ، زیرا هر کتاب باید به نفر دوم یا سوم برسد، پس برای هر کتاب ۲ انتخاب وجود دارد. به طور مشابه $|A_2| = |A_3| = 2^5$. مجموعه‌ی $A_1 \cap A_2$ مجموعه‌ی توزیع‌هایی است که در آن‌ها به نفر اول و دوم هیچ کتابی نرسیده است، پس $|A_1 \cap A_2| = 1$ (فقط یک توزیع در $A_1 \cap A_2$ قرار دارد، توزیعی که هر ۵ کتاب به نفر سوم رسیده است). به طور مشابه $|A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 1$. مجموعه‌ی $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ مجموعه‌ی توزیع‌هایی است که در آن‌ها به نفر اول، دوم و سوم هیچ کتابی نرسیده است، لذا $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ ، زیرا چنین توزیعی وجود ندارد. نتیجه می‌گیریم پاسخ مسأله برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3^5 - 3 \times 2^5 + 3 = 150.$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

در بخش قبل برای تعداد راه‌های انتخاب تعدادی شیء از چند نوع شیء، به شرطی که از هر نوع به تعداد کافی شیء موجود باشد، فرمولی ارائه دادیم. حال فرض کنید از هر نوع به تعداد کافی شیء وجود نداشته باشد. می‌خواهیم ببینیم به چند طریق می‌توان تعداد مشخصی از آن‌ها را انتخاب کرد. به مسأله‌ی بعد توجه کنید.

مسأله‌ی ۱۳: از بین ۸ سکه‌ی ۱۰ تومانی، ۵ سکه‌ی ۲۵ تومانی و ۱۱ سکه‌ی ۵۰ تومانی، به چند طریق می‌توان ۱۳ سکه انتخاب کرد؟

حل: فرض کنید x_1 سکه‌ی ۱۰ تومانی، x_2 سکه‌ی ۲۵ تومانی و x_3 سکه‌ی ۵۰ تومانی انتخاب کنیم، در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 = 13$. باید تعداد جواب‌های این معادله را با شرایط $0 \leq x_1 \leq 8$ ، $0 \leq x_2 \leq 5$ و $0 \leq x_3 \leq 11$ بیابیم. فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد

صحیح نامنفی باشد، در این صورت $|S| = \binom{15}{2} = 105$. سه دسته از جواب‌های S مطلوب نیستند. یک دسته جواب‌هایی که $x_1 \geq 9$ ، دسته‌ی دیگر

جواب‌هایی که $x_2 \geq 6$ و دسته‌ی آخر جواب‌هایی که $x_3 \geq 12$. این سه دسته را به ترتیب A_1 ، A_2 و A_3 می‌نامیم. در این صورت:

$$|A_1| = \binom{13+3-1-(9+0+0)}{2} = \binom{6}{2} = 15$$

$$|A_2| = \binom{13+3-1-(0+6+0)}{2} = \binom{9}{2} = 36$$

$$|A_3| = \binom{13+3-1-(0+0+12)}{2} = \binom{3}{2} = 3$$

به وضوح $A_1 \cap A_2$ ، $A_1 \cap A_3$ ، $A_2 \cap A_3$ و $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ همگی تهی هستند. پس پاسخ برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 105 - (15 + 36 + 3) = 51$$

تست ۷: معادله‌ی $x + y + z = 13$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $2 \leq x \leq 5$ ، $0 \leq y \leq 4$ و $z \geq 3$ چند جواب دارد؟

۲۵ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

حل: فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x + y + z = 13$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x \geq 2$ ، $y \geq 0$ و $z \geq 3$ باشد. در این صورت دو دسته از این جواب‌ها نامطلوبند. دسته‌ی اول جواب‌هایی که در آن‌ها $x \geq 6$ و دسته‌ی دوم جواب‌هایی که $y \geq 5$. این دو دسته را به ترتیب با A_1 و A_2 نشان می‌دهیم. هر یک از مجموعه‌های S ، A_1 و A_2 مجموعه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی $x + y + z = 13$ هستند با شرایطی که در زیر ذکر شده‌اند:

$$S: x \geq 2, y \geq 0, z \geq 3$$

$$A_1: x \geq 6, y \geq 0, z \geq 3$$

$$A_2: x \geq 2, y \geq 5, z \geq 3$$

$$A_1 \cap A_2: x \geq 6, y \geq 5, z \geq 3$$

توجه کنید که چون در مجموعه‌ی مرجع S ، $y \geq 0$ و $z \geq 3$ و $A_1 \subseteq S$ ، پس در این مجموعه نیز $y \geq 0$ و $z \geq 3$. بنا بر قضیه‌ی (۳)، (از بخش قبل)، $|S| = \binom{10}{2}$ ، $|A_1| = \binom{6}{2}$ و $|A_2| = \binom{5}{2}$. هم‌چنین به وضوح $|A_1 \cap A_2| = 0$. حال جواب‌های مطلوب، جواب‌هایی از S هستند که در هیچ‌یک از A_1 و A_2 قرار ندارند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cup A_2| = \binom{10}{2} - \left(\binom{6}{2} + \binom{5}{2} - 0 \right) = 45 - (15 + 10) = 20.$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

تابع حسابی اویلر:

فرض کنید n عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد. $\varphi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n که نسبت به n اول‌اند.

مثال: $\varphi(10) = 4$ ، زیرا اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰ که نسبت به ۱۰ اول‌اند، عبارتند از ۱، ۳، ۷ و ۹.

قضیه‌ی ۴: فرض کنید n عدد طبیعی باشد ($n \geq 2$) و نمایش متعارف آن به صورت زیر باشد:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

در این صورت داریم:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

تذکره ۱: واضح است که اگر p عدد اول باشد آن‌گاه $\varphi(p) = p - 1$.

تذکره ۲: تابع $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را تابع حسابی اویلر می‌نامند.

مثال: می‌دانیم $20 = 2^2 \times 5$ ، لذا $\varphi(20) = 20 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8$.

تست ۸: چند عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 150\}$ نسبت به ۱۵۰ اول‌اند؟

۴۰ (۱)	۴۸ (۲)	۵۰ (۳)	۶۰ (۴)
--------	--------	--------	--------

حل: راه اول: اعدادی نسبت به $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ اول‌اند، که بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشند. اگر A_1 ، A_2 و A_3 را به ترتیب مجموعه‌ی اعدادی از $\{1, 2, \dots, 150\}$ در نظر بگیریم که بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیرند، مقدار $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$ را می‌خواهیم. داریم:

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 150 - \left[\frac{150}{2}\right] - \left[\frac{150}{3}\right] - \left[\frac{150}{5}\right] + \left[\frac{150}{6}\right] + \left[\frac{150}{10}\right] + \left[\frac{150}{15}\right] - \left[\frac{150}{30}\right] = 150 - 75 - 50 - 30 + 25 + 10 + 15 - 5 = 40.$$

راه دوم: جواب سوال $\varphi(150)$ است و چون $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ ، داریم: $\varphi(150) = 150 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$. بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

نکته ۱: از هر n عدد صحیح متوالی، $\varphi(n)$ عدد نسبت به n اول‌اند.

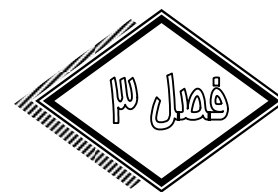
مسئله‌ی ۱۴: چند عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 120\}$ نسبت به ۲۰ اول‌اند؟

راه حل: مجموعه‌ی موردنظر شامل ۸۰ عدد متوالی است (۴ تا ۱۲۰)، لذا جواب سوال برابر است با: $\varphi(20) = 20 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8$.

تست ۹: به ازای چند عدد a متعلق به مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 105\}$ معادله‌ی سیاله‌ی $ax + 105y = 6$ جواب دارد؟

۳۶ (۱)	۴۸ (۲)	۶۰ (۳)	۷۲ (۴)
--------	--------	--------	--------

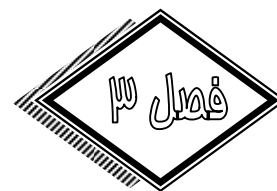
حل: معادله در صورتی جواب دارد که $6 | (a, 105)$ ، هم‌چنین می‌دانیم $105 = 3 \times 5 \times 7$ و $6 = 2 \times 3$ ، لذا معادله در صورتی جواب دارد که $(a, 105)$ برابر ۱ یا ۳ باشد، یعنی a نباید بر هیچ یک از اعداد ۵ و ۷ بخش‌پذیر باشد، یا معادلاً a باید نسبت به ۳۵ اول باشد. چون $105 = 3 \times 35$ ، لذا در مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 105\}$ دقیقاً $\varphi(35) = 24$ عدد نسبت به ۳۵ اول‌اند. بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.



- ۲۵- چند عدد از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ بر ۳ بخش پذیر نیستند؟
(۱) ۳۳ (۲) ۴۵ (۳) ۶۱ (۴) ۶۷
- ۲۶- در چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ وجود دارد؟
(۱) ۱۲۸ (۲) ۲۶۴ (۳) ۴۰۰ (۴) ۳۰۸
- ۲۷- در بین ۸۰ داوطلب کنکور، ۵۰ نفر در کنکور سراسری، ۳۰ نفر در کنکور آزاد و ۲۵ نفر در هیچ یک از ۲ کنکور شرکت نکرده‌اند. چند نفر در هر دو کنکور شرکت کرده‌اند؟
(۱) ۰ (۲) ۵ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰
- ۲۸- در بین ۲۰۰ نوزاد، ۸۰ نفر واکسن فلج اطفال و ۹۰ نفر واکسن کزاز را تزریق کرده‌اند. در ضمن ۶۰ نفر هیچ یک از دو واکسن را تزریق نکرده‌اند. چند تا از این ۲۰۰ نوزاد فقط یکی از دو واکسن را تزریق کرده‌اند؟
(۱) ۱۱۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۴۰
- ۲۹- چند عدد از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ نه مربع کامل‌اند و نه مکعب کامل؟
(۱) ۸۴ (۲) ۸۶ (۳) ۸۸ (۴) ۹۰
- ۳۰- در چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ وجود دارند؟
(۱) ۱۱۰ (۲) ۶۶ (۳) ۱۳۲ (۴) ۲۴۰
- ۳۱- چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ وجود دارد که در آن‌ها رقم ۳ حداقل یک بار ظاهر شود؟
(۱) ۱۰۱ (۲) ۱۳۸ (۳) ۱۴۲ (۴) ۱۵۶
- ۳۲- در چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ وجود دارند؟
(۱) ۵۴ (۲) ۵۷ (۳) ۷۳ (۴) ۱۱۱
- ۳۳- چند عدد از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۳ بخش پذیر نیستند؟
(۱) ۵۵ (۲) ۵۰ (۳) ۴۱ (۴) ۳۳
- ۳۴- چند عدد از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر نیستند؟
(۱) ۳۳ (۲) ۳۱ (۳) ۳۰ (۴) ۲۶
- ۳۵- چند عدد سه رقمی داریم که در هر یک از آن‌ها هر یک از دو رقم ۲ و ۵ حداقل یک بار ظاهر شده باشد؟
(۱) ۵۲ (۲) ۵۳ (۳) ۵۶ (۴) ۵۷
- ۳۶- چند عدد از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ دقیقاً بر یکی از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیرند؟
(۱) ۳۳ (۲) ۳۷ (۳) ۴۱ (۴) ۲۵
- ۳۷- در چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ وجود دارند؟
(۱) ۱۹۴ (۲) ۵۲۹ (۳) ۶۱۰ (۴) ۷۲۰
- ۳۸- در چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دقیقاً دو تا از سه رقم ۱، ۲ و ۳ وجود دارد؟
(۱) ۳۰۰ (۲) ۳۳۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۳۹۰
- ۳۹- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی dream هیچ یک از حروف d، m و r سر جای اصلی خود قرار ندارند؟
(۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۶۶ (۴) ۶۸
- * ۴۰- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی triangle حداقل دو تا از عبارت‌های an، tri و gle وجود دارند؟
(۱) ۲۲۴ (۲) ۲۴۰ (۳) ۲۵۲ (۴) ۲۵۸
- * ۴۱- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی mail هیچ حرفی در سر جای اصلی خود قرار ندارند؟
(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

- ۴۲- ۴ نفر را به چند طریق می‌توان به ۳ اتاق مختلف فرستاد به طوری که در هر اتاق حداقل یک نفر قرار گیرد؟
 (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴) ۴۲
- ۴۳- به چند طریق می‌توان ۱۰ سکه‌ی یکسان را بین علی، رضا، محمد و حسین توزیع کرد به طوری که هر یک از علی و رضا حداکثر ۳ سکه دریافت کنند؟
 (۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۲۸
- ۴۴- روی مجموعه‌ی ۳ عضوی A چند رابطه می‌توان نوشت که تقارنی نباشد؟
 (۱) ۶۴ (۲) ۲۷۲ (۳) ۴۲۲ (۴) ۴۴۸
- ۴۵- روی مجموعه‌ی ۳ عضوی A چند رابطه‌ی تقارنی می‌توان نوشت که پادتقارنی نباشد؟
 (۱) ۶۴ (۲) ۵۶ (۳) ۴۸ (۴) ۴۲
- ۴۶- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، چند رابطه روی A می‌توان تعریف کرد که خاصیت پادتقارنی داشته باشد، اما خاصیت انعکاسی نداشته باشد؟
 (۱) $3^{12} \times 5$ (۲) 5×3^7 (۳) $3^6 \times 4$ (۴) 3^7
- ۴۷- روی مجموعه‌ی ۳ عضوی A چند رابطه می‌توان نوشت که نه بازتابی باشد و نه پادتقارنی؟
 (۱) ۱۴۵ (۲) ۳۲۰ (۳) ۲۵۹ (۴) ۳۹۴
- ۴۸- اگر A یک مجموعه‌ی ۵ عضوی باشد، چه تعداد رابطه روی A می‌توان نوشت که تقارنی و پادتقارنی باشد، اما بازتابی نباشد؟
 (۱) ۳۲ (۲) ۳۱ (۳) ۱ (۴) 2^{15}
- ۴۹- چند رابطه‌ی متقارن روی $\{a, b, c, d\}$ می‌توان نوشت که شامل (a, b) و (c, c) باشد، اما خاصیت بازتابی نداشته باشد؟
 (۱) ۲۲۴ (۲) ۲۵۶ (۳) ۹۶ (۴) ۴۴۸
- ۵۰- چند رابطه‌ی متقارن روی مجموعه‌ی $\{a, b, c\}$ هیچ یک از ویژگی‌های بازتابی و پادتقارنی را ندارند؟
 (۱) ۳۷ (۲) ۴۱ (۳) ۴۵ (۴) ۴۹
- ۵۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه چند ماتریس صفر و یک مانند $M_{3 \times 3}$ وجود دارد که نه $A \ll M$ و نه $M \ll A$ ؟
 (۱) ۷۲ (۲) ۵۱۱ (۳) ۴۳۹ (۴) ۴۴۱
- ۵۲- روی مجموعه‌ی ۴ عضوی A، چند رابطه‌ی بازتابی و تقارنی وجود دارد که ترایابی نباشد؟
 (۱) ۴۹ (۲) ۴۵ (۳) ۴۲ (۴) ۳۶
- ۵۳- چند تابع پوشا از مجموعه‌ی ۳ عضوی A به مجموعه‌ی ۳ عضوی B می‌توان تعریف کرد؟
 (۱) صفر (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۵
- ۵۴- چند تابع پوشا از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه‌ی $B = \{a, b\}$ می‌توان تعریف کرد؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸
- ۵۵- تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e\}$ به مجموعه‌ی $\{a, b, c\}$ کدام است؟
 (۱) ۳۶ (۲) ۱۲۶ (۳) ۲۴۰ (۴) ۱۵۰
- ۵۶- چند ماتریس صفر و یک مثل $M_{4 \times 4}$ وجود دارد که در شرایط $M = M^T$ و $I_4 \ll M$ صدق کرده، ولی در شرط $M \gg M^{(2)}$ صدق نکند؟
 (۱) ۴۹ (۲) ۳۶ (۳) ۶۴ (۴) ۳۲
- ۵۷- مجموعه‌ی M که شامل تمام روابط متقارن تعریف شده روی مجموعه‌ی A است، ۶۴ عضوی است. چه تعداد از اعضای M بازتابی بوده و ترایابی نیستند؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۵۸- معادله‌ی $x + y + z = 15$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی با شرط $x \leq 5$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۲۱ (۲) ۴۰ (۳) ۵۵ (۴) ۷۰
- ۵۹- معادله‌ی $x + y + z = 10$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی با شرایط $x \leq 4$ و $y \leq 5$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵
- ۶۰- معادله‌ی $x + y + z = 14$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $1 \leq x \leq 6$ ، $2 \leq y \leq 6$ و $0 \leq z \leq 7$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵
- ۶۱- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرط $0 \leq x_i \leq 7$ (i = 1, 2, 3) چند جواب دارد؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴) ۵۲

- ۶۲- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $2 \leq x_i \leq 5$ چند جواب دارد؟ ($i \in \{1, 2, 3\}$)
 (۱) ۱۰ (۲) ۱۸ (۳) ۲۳ (۴) ۴۲
- ۶۳- معادله‌ی $x + y + z = 12$ در مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰
- * ۶۴- به چند طریق می‌توان ۴ سکه ۱۰ ریالی و ۴ سکه ۲۰ ریالی را بین ۳ نفر تقسیم کرد طوری که به هر نفر حداقل یک سکه برسد؟
 (۱) ۹۳ (۲) ۱۰۹ (۳) ۱۲۷ (۴) ۱۵۳
- ۶۵- چند عدد ۲ رقمی وجود دارد که نسبت به ۲۴ اول باشد؟
 (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵
- ۶۶- چند عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 70\}$ نسبت به ۷۰ اول‌اند؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶
- ۶۷- چند عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 240\}$ نسبت به ۶۰ اول‌اند؟
 (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴) ۶۴
- ۶۸- چند عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 980\}$ نسبت به ۳۰ اول‌اند؟
 (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۰۰
- ۶۹- چند عدد از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 422\}$ نسبت به ۱۰۵ اول‌اند؟
 (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۸۶ (۳) ۱۹۲ (۴) ۱۹۴
- ۷۰- از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت نکرده‌اند؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸ (سراسری - ۸۲)
- ۷۱- اگر تعداد اعداد مثبت و کوچک‌تر از ab که نسبت به $a \times b$ اول‌اند، برابر k باشد و a ، b و c اعداد اول غیر مساوی باشند، تعداد اعداد مثبت کوچک‌تر از abc که نسبت به عدد $a \times b \times c$ اول‌اند، کدام است؟ (آزاد - ۸۰)
 (۱) $\frac{k(c-1)}{c}$ (۲) k (۳) $c \times k$ (۴) $k(c-1)$
- ۷۲- چند عدد صحیح مثبت و کوچک‌تر از ۳۰۱ وجود دارد که نسبت به اعداد ۷۵ و ۶۰ اول باشند؟
 (۱) ۱۶۰ (۲) ۴۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۸۰ (آزاد - ۸۱)
- ۷۳- اگر تعداد اعداد طبیعی که نسبت به عدد $3^3 \times 5^2$ اول‌اند و از آن کوچک‌ترند k باشد، تعداد اعداد طبیعی که نسبت به عدد $2^2 \times 3^4 \times 5^2$ اول‌اند و از آن کوچک‌ترند کدام است؟
 (۱) $12k$ (۲) k (۳) $3k$ (۴) $6k$ (آزاد - ۸۲)
- ۷۴- به ازاء چند مقدار a از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ ، معادله‌ی سیاله‌ی $ax + 18y = 3$ دارای جواب است؟
 (۱) ۲۲ (۲) ۲۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۷ (آزاد - ۸۲)
- ۷۵- چند تابع پوша از $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به $B = \{1, 2\}$ وجود دارد؟
 (۱) ۲۴ (۲) ۲۳ (۳) ۳۱ (۴) ۳۰ (آزاد - ۸۴)
- ۷۶- چند رابطه‌ی انعکاسی و غیرتقارنی روی مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4\}$ می‌توان نوشت؟
 (۱) 2^6 (۲) 8×2^6 (۳) $8(4^6 - 2^6)$ (۴) $4^6 - 2^6$ (آزاد - ۸۵)
- ۷۷- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ چند جواب صحیح غیر منفی با شرط $3 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4$ دارد؟
 (۱) ۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰ (آزاد - ۸۵)
- ۷۸- چند تابع یک به یک از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ وجود دارد که شامل عضو $(1, 1)$ باشد؟
 (۱) صفر (۲) ۲۴ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰ (آزاد - ۸۶)



پاسخ‌های تشریحی

A ۲۵- گزینه‌ی (۴) اگر A مجموعه‌ی اعدادی باشد که بر ۳ بخش‌پذیرند:

$$|\overline{A}| = |S| - |A| = 100 - \left[\frac{100}{3}\right] = 100 - 33 = 67$$

B ۲۶- گزینه‌ی (۴) اگر S مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی با ارقام ۰ تا ۴ باشد و A را مجموعه‌ی اعدادی از S در نظر بگیریم که شامل رقم ۲ نباشند، داریم:

$$|S| = \overbrace{(\overbrace{4} \overbrace{5} \overbrace{5} \overbrace{5})} = 500$$

$$|A| = \overbrace{(\overbrace{3} \overbrace{4} \overbrace{4} \overbrace{4})} = 192$$

لذا تعداد اعدادی از S که رقم ۲ را دارند برابر است با: $|S| - |A| = 500 - 192 = 308$

B ۲۷- گزینه‌ی (۳) اگر A_1 مجموعه‌ی داوطلبان کنکور سراسری و A_2 مجموعه‌ی داوطلبان کنکور آزاد باشد، با توجه به فرض سؤال نتیجه می‌گیریم:

$$|A_1| = 50, |A_2| = 30, |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 25$$

$$|A_1 \cup A_2| = |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 80 - 25 = 55$$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \Rightarrow 55 = 50 + 30 - |A_1 \cap A_2| \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 25$$

B ۲۸- گزینه‌ی (۱) اگر S را کل نوزادان و A و B را مجموعه‌ی نوزادهایی در نظر بگیریم که به ترتیب واکسن فلج اطفال و کزاز را تزریق کرده‌اند، در این صورت داریم:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 80 + 90 - 140 = 30$$

لذا تعداد نوزادانی که فقط یکی از این دو واکسن را تزریق کرده‌اند برابر است با:

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 80 + 90 - 60 = 110$$

B ۲۹- گزینه‌ی (۳) فرض کنید $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ ، A_1 مجموعه‌ی اعضای S باشد که مربع کامل و A_2 مجموعه‌ی اعضای S باشد که مکعب کامل‌اند. در این صورت $|S| = 100$ ، $|A_1| = 10$ (زیرا $1^2, 2^2, \dots, 10^2$ تنها مربع‌های کامل مجموعه‌ی S هستند) و $|A_2| = 4$ (زیرا $1^3, 2^3, 3^3, 4^3$ تنها مکعب‌های کامل مجموعه‌ی S هستند).

همچنین $A_1 \cap A_2$ مجموعه‌ی اعضای S است که هم مربع و هم مکعب کامل‌اند، معادلاً $A_1 \cap A_2$ مجموعه‌ی اعضای S است که توان ششم کامل‌اند، لذا $|A_1 \cap A_2| = 2$ (فقط 1^6 و 2^6 در $A_1 \cap A_2$ قرار دارند). نتیجه می‌گیریم تعداد اعضای S که نه مربع و نه مکعب کامل‌اند برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cap A_2| = 100 - (10 + 4 - 2) = 88$$

B ۳۰- گزینه‌ی (۴)

$$S \Rightarrow |S| = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \Rightarrow |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

لذا تعداد ارقام ۴ رقمی که در آن‌ها حداقل یکی از ارقام ۱ و ۲ وجود دارد، برابر است با:

$$|A_1 \cup A_2| = |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 256 - 16 = 240$$

B ۳۱- گزینه‌ی (۲) اگر S مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد که فاقد رقم ۳ باشند، جواب برابر است با:

$$|S| - |A| = 3 \times 4 \times 4 \times 4 - 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 138$$

۳۲- گزینه‌ی (۳) S را مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی با ارقام ۰ تا ۳ و A_1 و A_2 را به ترتیب مجموعه‌ی اعدادی از S در نظر می‌گیریم که ترتیب رقم‌های ۰ و ۱ را ندارند. در این صورت داریم:

$$|S| = \textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{4}\textcircled{4} = 192$$

$$|A_1| = \textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{3} = 81, \quad |A_2| = \textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{3}\textcircled{3} = 54$$

$$|A_1 \cap A_2| = \textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{2}\textcircled{2} = 16$$

در این صورت پاسخ سؤال برابر است با:

$$|S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 192 - 81 - 54 + 16 = 73$$

۳۳- گزینه‌ی (۴) A_1 و A_2 را مجموعه‌ی اعدادی در نظر می‌گیریم که به ترتیب بر ۲ و ۳ بخش‌پذیرند:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 100 - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 100 - \left[\frac{100}{2}\right] - \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{6}\right] = 33$$

۳۴- گزینه‌ی (۴) با استفاده از اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 100 - \left[\frac{100}{2}\right] - \left[\frac{100}{3}\right] - \left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{6}\right] + \left[\frac{100}{10}\right] + \left[\frac{100}{15}\right] - \left[\frac{100}{30}\right] = 26$$

۳۵- گزینه‌ی (۱)

$$S \Rightarrow |S| = 9 \times 10 \times 10 = 900$$

$$A_1 \Rightarrow |A_1| = 8 \times 9 \times 9 = 648$$

$$A_2 \Rightarrow |A_2| = 8 \times 9 \times 9 = 648$$

$$A_1 \cap A_2 \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 7 \times 8 \times 8 = 448$$

لذا تعداد اعداد ۳ رقمی که در آن‌ها هر دو رقم ۲ و ۵ وجود دارند، برابر است با:

$$900 - 648 - 648 + 448 = 52$$

۳۶- گزینه‌ی (۴) اگر A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه‌ی مضارب ۴ و ۶ باشند، تعداد اعدادی که فقط به یکی از ۲ مجموعه تعلق دارند، برابر است با:

$$|A_1 \Delta A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{6}\right] - 2 \times \left[\frac{100}{12}\right] = 25 + 16 - 16 = 25$$

۳۷- گزینه‌ی (۱) فرض کنید S مجموعه‌ی اعداد ۴ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد. A_1 و A_2 را مجموعه‌ی اعدادی از S در نظر می‌گیریم که به ترتیب رقم‌های ۱ و ۲ را ندارند. در این صورت تعداد اعدادی از S که هر دو رقم ۱ و ۲ را دارند، برابر است با:

$$|S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 5^4 - 4^4 - 4^4 + 3^4 = 194$$

۳۸- گزینه‌ی (۲) فرض کنید S مجموعه‌ی اعداد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد و A ، B و C مجموعه‌ی اعدادی از S باشند که به ترتیب رقم‌های ۱، ۲ و ۳ را ندارند. در این صورت اعدادی که دقیقاً دو تا از سه رقم ۱، ۲ و ۳ را دارند اعضایی از S هستند که فقط به یکی از A ، B و C تعلق دارند. لذا تعداد این اعداد برابر است با:

$$|A| + |B| + |C| - 2|A \cap B| - 2|B \cap C| + 3|A \cap B \cap C| = 4^4 + 4^4 + 4^4 - 2 \times 3^4 - 2 \times 3^4 - 2 \times 3^4 + 3 \times 2^4 = 33$$

۳۹- گزینه‌ی (۲) فرض کنید S مجموعه‌ی کل جایگشت‌های حروف کلمه‌ی dream باشد و A ، B و C مجموعه جایگشت‌هایی باشند که به ترتیب حروف d، m و r در سر جای اصلی خود قرار دارند. در این صورت پاسخ برابر است با:

$$|S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 5! - 4! - 4! - 4! + 3! + 3! + 3! = 64$$

۴۰- گزینه‌ی (۳) فرض کنید A ، B و C مجموعه جایگشت‌هایی از حروف کلمه‌ی triangle باشند که به ترتیب عبارت‌های an، tri و gle را دارند. در این صورت پاسخ برابر است با:

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C| = 5! + 4! + 5! - 2 \times 3! = 252$$

۴۱- گزینه‌ی (۱) فرض کنید S مجموعه کل جایگشت‌های حروف کلمه mail باشد و A ، B ، C و D مجموعه جایگشت‌هایی باشند که به ترتیب حروف a، m، i و l در سر جای اصلی خود قرار دارند. در این صورت پاسخ برابر است با:

$$|S| - 4|A| + 6|A \cap B| - 4|A \cap B \cap C| = 4! - 4 \times 3! + 6 \times 2! - 4 \times 1 = 9$$

۴۲- گزینه‌ی (۲) C فرض کنید S مجموعه‌ی کل روش‌های تقسیم افراد در ۳ اتاق باشد، در این صورت $|S| = 3^4$ ، زیرا برای هر نفر ۳ انتخاب وجود دارد. ۳ دسته از این روش‌های تقسیم مطلوب نیستند، یکی آن‌هایی که اتاق اول خالی بماند، دیگری اتاق دوم و در نهایت اتاق سوم خالی بماند. این ۳ دسته را به ترتیب A_1 ، A_2 و A_3 می‌نامیم. در این صورت:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4, |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

زیرا مثلاً برای محاسبه‌ی $|A_1|$ ، توجه کنید که هر فرد را باید به اتاق دوم یا سوم بفرستیم، لذا برای هر نفر ۲ انتخاب وجود دارد. نتیجه می‌گیریم تعداد روش‌های مطلوب تقسیم برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3^4 - (2^4 + 2^4 + 2^4 - 1 - 1 - 1 + 0) = 36$$

۴۳- گزینه‌ی (۴) C فرض کنید به علی، رضا، محمد و حسین به ترتیب X_1 ، X_2 ، X_3 و X_4 سکه برسد، در این صورت $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$ با توجه به شرط مسأله باید تعداد جواب‌های این معادله را با شرایط $0 \leq X_1 \leq 3$ ، $0 \leq X_2 \leq 3$ ، $0 \leq X_3 \leq 3$ و $X_4 \geq 0$ بیابیم. فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی باشد، در این صورت $|S| = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3!} = 286$. دو دسته از جواب‌های S مطلوب نیستند، یک دسته جواب‌هایی که $X_1 \geq 4$ و دسته‌ی دیگر جواب‌هایی که $X_2 \geq 4$. این دو دسته را به ترتیب A_1 و A_2 می‌نامیم. در این صورت:

$$|A_1| = |A_2| = \binom{10+4-1-(4+0+0+0)}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84$$

$A_1 \cap A_2$ مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$ با شرایط $X_1 \geq 4$ ، $X_2 \geq 4$ ، $X_3 \geq 0$ و $X_4 \geq 0$ است، لذا $|A_1 \cap A_2| = \binom{10+4-1-(4+4+0+0)}{3} = \binom{5}{3} = 10$. نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cup A_2| = 286 - (84 + 84 - 10) = 128$$

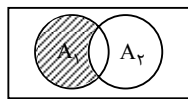
۴۴- گزینه‌ی (۴) A اگر S مجموعه‌ی کل رابطه‌ها و A_1 مجموعه‌ی رابطه‌های تقارنی روی مجموعه A باشند، داریم:

$$|S| = 2^9 = 512, |A_1| = 2^3 \times 2^3 = 64$$

لذا تعداد روابطی که تقارنی نیستند برابر است با:

$$|\overline{A_1}| = |S| - |A_1| = 512 - 64 = 448$$

۴۵- گزینه‌ی (۲) B اگر A_1 و A_2 را به ترتیب مجموعه‌ی رابطه‌های تقارنی و پادتقارنی روی مجموعه A فرض کنیم، داریم:



$$|A_1 \cap \overline{A_2}| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$$

لذا باید تعداد روابط تقارنی و پادتقارنی را از تعداد روابط تقارنی کم کنیم:

$$|A_1 \cap \overline{A_2}| = |A_1| - |A_1 \cap A_2| = 2^3 \times 2^3 - 2^3 = 56$$

۴۶- گزینه‌ی (۲) B اگر A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه‌ی رابطه‌های پادتقارنی و انعکاسی روی مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4\}$ باشند، در این صورت داریم:

$$|A_1 \cap \overline{A_2}| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$$

لذا باید تعداد روابط انعکاسی و پادتقارنی را از تعداد روابط پادتقارنی کم کنیم:

$$|A_1 \cap \overline{A_2}| = 2^6 \times 2^4 - 2^6 = 2^6(16 - 1) = 2^7 \times 5$$

۴۷- گزینه‌ی (۳) B اگر S مجموعه‌ی کل رابطه‌ها و A_1 و A_2 به ترتیب مجموعه‌ی رابطه‌های بازتابی و پادتقارنی روی مجموعه‌ی ۳ عضو A باشند، داریم:

$$|\overline{A_1 \cap A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$|S| = 2^9 = 512, |A_1| = 2^6 = 64, |A_2| = 2^3 \times 2^3 = 6^3 = 216, |A_1 \cap A_2| = 2^3 = 27$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1 \cap A_2}| = 512 - 64 - 216 + 27 = 259$$

B ۴۸- گزینه (۲) اگر A_1 مجموعه رابطه‌های تقارنی و پادتقارنی و A_2 مجموعه رابطه‌های بازتابی روی مجموعه‌ی A باشند، داریم:

$$|A_1 \cap \overline{A_2}| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$$
تعداد روابطی که تقارنی و پادتقارنی اند، ولی انعکاسی نیستند.
لذا باید تعداد روابط انعکاسی، تقارنی و پادتقارنی را از تعداد روابط تقارنی و پادتقارنی کم کنیم:

$$|A_1 \cap \overline{A_2}| = 2^5 - 1 = 31$$

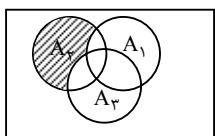
B ۴۹- گزینه (۱) با توجه به فرض سؤال داریم:

مجموعه رابطه‌های تقارنی شامل (a, b) و (c, c) : A_1

مجموعه رابطه‌های بازتابی شامل (a, b) و (c, c) : A_2

لذا جواب برابر است با:

$$|A_1 \cap \overline{A_2}| = |A_1| - |A_1 \cap A_2| = 2^3 \times 2^5 - 2^5 = 224$$



C ۵۰- گزینه (۴) اگر A_1 ، A_2 و A_3 به ترتیب مجموعه‌ی رابطه‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی روی مجموعه‌ی $\{a, b, c\}$ باشند در این صورت جواب برابر است با:

$$|A_2| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2^6 - 2^3 - 2^3 + 1 = 49$$

B ۵۱- گزینه (۴) باید تعداد ماتریس‌های M را که $M \ll A$ یا $M \gg A$ ، از تعداد کل ماتریس‌های 3×3 کم کنیم. داریم:

$$441 = 512 - 72 + 1 = (64 + 8) - (2^6 + 2^3) + 1 = 2^9 - (2^6 + 2^3) + 1$$
تعداد ماتریس‌های مطلوب

C ۵۲- گزینه (۱) روی مجموعه‌ی ناتهی A ، تعداد روابط بازتابی و تقارنی که تراییی نباشند، برابر است با تعداد روابط بازتابی و تقارنی منهای تعداد روابط هم‌ارزی. لذا داریم:

$$49 = 2^6 - 15 = \text{تعداد روابط بازتابی، تقارنی و غیر تراییی}$$

یادآوری: روی مجموعه‌ی ۴ عضوی A ، ۱۵ رابطه‌ی هم‌ارزی وجود دارد.

B ۵۳- گزینه (۲) تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی n عضوی A به مجموعه‌ی n عضوی B برابر است با $n!$ ، لذا جواب سؤال برابر است با $6 = 3!$.

B ۵۴- گزینه (۳) اگر S کل توابعی باشد که از A به B تعریف می‌شوند در این صورت $|S| = 2^3 = 8$. همچنین داریم:

$|A_1| = 1 \Rightarrow |A_1| = 1$: تعداد توابعی که a در بردشان نیست.

$|A_2| = 1 \Rightarrow |A_2| = 1$: تعداد توابعی که b در بردشان نیست.

$|A_3| = 0 \Rightarrow |A_3| = 0$: تعداد توابعی که a و b در بردشان نیست.

لذا تعداد توابعی که a و b در بردشان قرار دارد. برابر است با:

$$|S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 8 - 1 - 1 + 0 = 6$$

C ۵۵- گزینه (۴) S را مجموعه‌ی کل توابعی در نظر می‌گیریم که از $A = \{a, b, c, d, e\}$ به $B = \{a, b, c\}$ تعریف می‌شوند. A_1 و A_2 را مجموعه‌هایی را از این توابع در نظر می‌گیریم که در برد آن‌ها، به ترتیب a ، b و c قرار ندارد. بنابراین:

$$|S| = 3^5, \quad |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 2^5, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$B \text{ به } A \text{ تعداد توابع پوشا از } = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1 = 150.$$

C ۵۶- گزینه (۱) اگر R رابطه‌ی متناظر با ماتریس M باشد، آنگاه شرایط داده شده در مساله معادل آن است که R بازتابی و تقارنی بوده، ولی تراییی نباشد. حال اگر تراییی بودن را T_1 و تقارنی بودن را T_2 و بازتابی بودن را B نشان دهیم آنگاه هدف ما محاسبه‌ی $n(B \cap T_1 \cap \overline{T_2})$ است که داریم:

$$n(B \cap T_1 \cap \overline{T_2}) = n(B \cap T_1) - n(B \cap T_1 \cap T_2) = n(B \cap T_1) - (M \text{ روی هم‌ارزی}) = 2^6 - 15 = 64 - 15 = 49$$

B ۵۷- گزینه (۱) از آنجا که تعداد روابط تقارنی روی مجموعه‌ی A ، ۶۴ تا است، پس اگر تعداد اعضای A را n تا در نظر بگیریم، داریم:

$$2^n \times 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}} = 64 = 2^6 \Rightarrow n^2 + n = 12 \Rightarrow n = 3$$

در نتیجه هدف ما یافتن تعداد روابط تقارنی، بازتابی و غیرتراییی روی یک مجموعه‌ی ۳ عضوی است که داریم:

$$n(B \cap T \cap \overline{\text{تعدی}}) = n(B \cap T) - n(B \cap T \cap \text{تعدی}) = 8 - 5 = 3$$

B ۵۸- گزینه‌ی (۳) فرض کنید S ، مجموعه‌ی همه‌ی جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x + y + z = ۱۵$ باشد. در این صورت داریم:

$$|S| = \binom{۱۵-۱}{۳-۱} = \binom{۱۴}{۲} = \frac{۱۴ \times ۱۳}{۲} = ۹۱$$

اگر A را نیز مجموعه‌ی جواب‌های طبیعی معادله با شرط $x \geq ۶$ (جواب‌های نامطلوب) در نظر بگیریم، داریم:

$$A: x \geq ۶, y \geq ۱, z \geq ۱ \Rightarrow |A| = \binom{۱۵+۲-۶-۱-۱}{۲} = ۳۶ \Rightarrow |S| - |A| = ۵۵$$

C ۵۹- گزینه‌ی (۳) فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x + y + z = ۱۰$ و $A_۱$ مجموعه‌ی جواب‌هایی از S باشد که $x \geq ۵$ و $A_۲$ مجموعه‌ی جواب‌هایی از S باشند که $y \geq ۶$ (در واقع $A_۱$ و $A_۲$ دو دسته از جواب‌های نامطلوبند). در این صورت داریم:

$$A_۱: x \geq ۵, y \geq ۰, z \geq ۰ \Rightarrow |A_۱| = \binom{۷}{۲} = ۲۱$$

$$A_۲: x \geq ۰, y \geq ۶, z \geq ۰ \Rightarrow |A_۲| = \binom{۴}{۲} = ۶$$

$$A_۱ \cap A_۲: x \geq ۵, y \geq ۶, z \geq ۰ \Rightarrow |A_۱ \cap A_۲| = ۰$$

لذا تعداد جواب‌هایی از معادله که $x \leq ۴$ و $y \leq ۵$ ، برابر است با:

$$|S| - |A_۱| - |A_۲| + |A_۱ \cap A_۲| = \binom{۱۲}{۲} - ۲۱ - ۶ = ۳۰$$

روش دوم: چون $x \leq ۴$ و $y \leq ۵$ ، لذا برای x ، ۵ انتخاب و برای y ، ۶ انتخاب وجود دارد و هر بار عدد z نیز به صورت منحصر به فرد تعیین می‌شود. لذا معادله $۵ \times ۶ = ۳۰$ جواب دارد.

C ۶۰- گزینه‌ی (۱) فرض کنید S مجموعه‌ی همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی $x + y + z = ۱۴$ با شرایط $x \geq ۱$ ، $y \geq ۲$ و $z \geq ۰$ باشد. در این صورت داریم:

$$|S| = \binom{۱۴+۳-۱-۱-۲}{۳-۱} = \binom{۱۳}{۲} = ۷۸$$

هم‌چنین با توجه به اصل شمول و عدم شمول مجموعه‌های نامطلوب $A_۱$ و $A_۲$ را مشخص می‌کنیم:

$$A_۱: x \geq ۷, y \geq ۲, z \geq ۰ \Rightarrow |A_۱| = \binom{۱۴+۳-۱-۷-۲}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$$

$$A_۲: x \geq ۱, y \geq ۷, z \geq ۰ \Rightarrow |A_۲| = \binom{۱۴+۳-۱-۱-۷}{۳-۱} = \binom{۸}{۲} = ۲۸$$

$$A_۳: x \geq ۱, y \geq ۲, z \geq ۸ \Rightarrow |A_۳| = \binom{۱۴+۳-۱-۱-۲-۸}{۳-۱} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

$$A_۱ \cap A_۲: x \geq ۷, y \geq ۷, z \geq ۰ \Rightarrow |A_۱ \cap A_۲| = \binom{۱۴+۳-۱-۷-۷}{۳-۱} = \binom{۲}{۲} = ۱$$

$$A_۱ \cap A_۳: x \geq ۷, y \geq ۲, z \geq ۸ \Rightarrow |A_۱ \cap A_۳| = ۰$$

$$A_۲ \cap A_۳: x \geq ۱, y \geq ۷, z \geq ۸ \Rightarrow |A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

$$A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳: x \geq ۷, y \geq ۷, z \geq ۸ \Rightarrow |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

لذا جواب برابر است با: $۷۸ - ۲۱ - ۲۸ - ۱۰ + ۱ = ۲۰$

B ۶۱- گزینه‌ی (۲) با توجه به شرط $۰ \leq x_۱ \leq ۷$ تمام جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸$ غیر از جواب $(۸, ۰, ۰)$ ، $(۰, ۸, ۰)$ و $(۰, ۰, ۸)$ قابل قبول است. لذا تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$\binom{۸+۳-۱}{۳-۱} - ۳ = ۴۲$$

C ۶۶- گزینه‌ی (۱) فرض کنید S مجموعه همه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ با شرایط $x_i \geq 2$ باشد. در این صورت داریم:

$$|S| = \binom{12+3-1-2-2-2}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

همچنین مجموعه‌های نامطلوب A_1 ، A_2 و A_3 را مشخص می‌کنیم:

$$A_1: x_1 \geq 6, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2 \Rightarrow |A_1| = \binom{12+3-1-6-2-2}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 6$$

با توجه به شرایط مشابه برای A_2 و A_3 داریم:

$$A_1 \cap A_2: x_1 \geq 6, x_2 \geq 6, x_3 \geq 2 \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

با توجه به شرایط مشابه برای مجموعه‌های $A_1 \cap A_2$ و $A_2 \cap A_3$ نتیجه می‌گیریم $|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 0$. همچنین واضح است که $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ پس با توجه به اصل شمول و عدم شمول جواب برابر است با:

$$|S| - 3|A_1| + 3|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28 - 3 \times 6 = 10$$

C ۶۳- گزینه‌ی (۳) فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x + y + z = 12$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد. سه دسته از جواب‌های S مطلوب نیستند. یک دسته جواب‌هایی که $x \geq 7$ ، دسته‌ی دیگر جواب‌هایی که $y \geq 7$ و دسته‌ی آخر جواب‌هایی که $z \geq 7$. این ۳ دسته را به

ترتیب با A_1 ، A_2 و A_3 نشان می‌دهیم. در این صورت $|S| = \binom{11}{2} = 55$ ، $|A_1| = \binom{12+3-1-(7+1+1)}{2} = \binom{5}{2} = 10$ ، و به طور مشابه

$|A_2| = |A_3| = 10$. همچنین واضح است که $A_1 \cap A_2$ ، $A_1 \cap A_3$ ، $A_2 \cap A_3$ و $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ همگی تهی هستند. پس پاسخ برابر است با:

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 55 - (10 + 10 + 10) = 25$$

A ۶۴- گزینه‌ی (۴) فرض کنید به نفر i ام؛ x_i سکه ۱۰ ریالی و y_i سکه ۲۰ ریالی برسد، $i = 1, 2, 3$ ، در این صورت $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ و $y_1 + y_2 + y_3 = 7$. فرض کنید S مجموعه کلیه جواب‌های این دو معادله در مجموعه اعداد صحیح نامنفی باشد و A_i مجموعه جواب‌هایی از S باشد که، $i = 1, 2, 3$. در این صورت تعداد راه‌های توزیع سکه‌ها بین ۳ نفر طوری که به هر سه نفر حداقل یک سکه برسد برابر تعداد جواب‌هایی از S است که در هیچ‌یک از A_1 ، A_2 و A_3 قرار ندارند. پس پاسخ برابر است با:

$$|S| - 3|A_1| + 3|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{6}{2} \binom{6}{2} - 3 \binom{5}{1} \binom{5}{1} + 3 - 0 = 153$$

B ۶۵- گزینه‌ی (۱) چون $24 = 2^3 \times 3$ ، لذا باید اعداد طبیعی ۲ رقمی را پیدا کنیم که نسبت به ۳ و ۲ (عوامل اول ۲۴) اول باشد:

$$2 \Rightarrow |A_1| = \left[\frac{99}{2} \right] - \left[\frac{9}{2} \right] = 49 - 4 = 45$$

$$3 \Rightarrow |A_2| = \left[\frac{99}{3} \right] - \left[\frac{9}{3} \right] = 33 - 3 = 30$$

$$6 \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \left[\frac{99}{6} \right] - \left[\frac{9}{6} \right] = 16 - 1 = 15$$

لذا جواب سؤال برابر است با:

$$|S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 90 - 45 - 30 + 15 = 30$$

روش دوم: می‌دانیم از هر ۶ عدد متوالی $\phi(6) = 2$ عدد نسبت به ۶ اول‌اند. چون مجموعه‌ی اعداد ۲ رقمی شامل $15 \times 6 = 90$ عدد متوالی است، پس از این مجموعه $15 \times 2 = 30$ عدد نسبت به ۶ اول‌اند.

A ۶۶- گزینه‌ی (۲) جواب سؤال $\phi(70)$ است. داریم:

$$70 = 2 \times 5 \times 7 \Rightarrow \phi(70) = 70 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 24$$

B ۶۷- گزینه‌ی (۴) عوامل اول ۲۴۰ و ۶۰ یکسان و برابر اعداد ۲ و ۳ و ۵ می‌باشد، لذا جواب سؤال همان $\phi(240)$ است.

$$\phi(240) = 240 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 64$$

C ۶۸- گزینه‌ی (۳) می‌دانیم از هر ۳۰ عدد متوالی دقیقاً $\phi(30) = 8$ عدد نسبت به ۳۰ اول‌اند. چون مجموعه‌ی $\{81, 82, \dots, 980\}$ شامل ۹۰۰ عدد متوالی است، لذا پاسخ برابر $30 \cdot \phi(30) = 240$ است.

C ۶۹- گزینه‌ی (۴) می‌دانیم از هر ۱۰۵ عدد متوالی دقیقاً $\varphi(۱۰۵) = ۴۸$ عدد نسبت به ۱۰۵ اول‌اند. چون مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۴۲۲\}$ شامل ۴۲۲ عدد صحیح متوالی است و $۴۲۲ = ۴ \times ۱۰۵ + ۲$ ، پس در مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۴۲۰\}$ دقیقاً $\varphi(۱۰۵) = ۱۹۲$ عدد نسبت به ۱۰۵ اول‌اند. ضمناً ۲ عدد ۴۲۱ و ۴۲۲ نیز نسبت به ۱۰۵ اول‌اند. لذا جواب برابر $۱۹۴ + ۲ = ۱۹۶$ است.

A ۷۰- گزینه‌ی (۴) اگر A مجموعه‌ی شرکت‌کنندگان کلاس ادبیات و B مجموعه‌ی شرکت‌کنندگان کلاس عربی باشد، داریم:
 $|A| = ۳۵, |B| = ۳۱, |A \cap B| = ۲۳ \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۴۳ \Rightarrow |\overline{A \cup B}| = ۵۱ - ۴۳ = ۸$

C ۷۱- گزینه‌ی (۴)

$$\varphi(ab) = k \Rightarrow ab\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) = k \Rightarrow (a-1)(b-1) = k$$

$$\varphi(abc) = abc\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) = \underbrace{(a-1)(b-1)}_k (c-1) = k(c-1)$$

C ۷۲- گزینه‌ی (۳) راه اول: با توجه به آن که $۷۵ = ۳ \times ۵^۲$ و $۶۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵$ ، اعداد مورد نظر نباید بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشند. طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد چنین اعدادی برابر است با:

$$۳۰۰ - \left[\frac{۳۰۰}{۲}\right] - \left[\frac{۳۰۰}{۳}\right] - \left[\frac{۳۰۰}{۵}\right] + \left[\frac{۳۰۰}{۶}\right] + \left[\frac{۳۰۰}{۱۰}\right] + \left[\frac{۳۰۰}{۱۵}\right] - \left[\frac{۳۰۰}{۳۰}\right] = ۳۰۰ - ۱۵۰ - ۱۰۰ - ۶۰ + ۵۰ + ۳۰ + ۲۰ - ۱۰ = ۸۰$$

راه دوم: اگر a بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد، داریم $\varphi(a, ۳۰۰) = ۱$ ، زیرا $۳۰۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲$ ، پس تعداد اعدادی را می‌خواهیم که کوچک‌تر از ۳۰۱ هستند و نسبت به آن اول‌اند، یعنی همان $\varphi(۳۰۰)$ ، بنابراین:

$$\varphi(۳۰۰) = ۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲ \times \left(1 - \frac{1}{۲}\right)\left(1 - \frac{1}{۳}\right)\left(1 - \frac{1}{۵}\right) = ۲ \times ۵ \times ۲ \times ۴ = ۸۰$$

C ۷۳- گزینه‌ی (۴) تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که نسبت به n اول‌اند، برابر است با: $\varphi(n)$. داریم:

$$k = \varphi(۳^۲ \times ۵^۲) = ۳^۲ \times ۵^۲ \times \left(1 - \frac{1}{۳}\right)\left(1 - \frac{1}{۵}\right) = ۳^۲ \times ۵ \times ۲ \times ۴$$

$$\text{مقدار مطلوب} = \varphi(۲^۲ \times ۳^۴ \times ۵^۲) = ۲^۲ \times ۳^۴ \times ۵^۲ \times \left(1 - \frac{1}{۲}\right)\left(1 - \frac{1}{۳}\right)\left(1 - \frac{1}{۵}\right) = ۲ \times ۳^۴ \times ۵ \times ۲ \times ۴ = ۲ \times ۳ \times k = ۶k$$

C ۷۴- گزینه‌ی (۱) باید $۳ \mid (a, ۱۸)$ ، یعنی $(a, ۱۸) = ۱$ یا $(a, ۱۸) = ۳$. چون $۱۸ = ۲ \times ۹$ ، پس اولاً a نباید مضرب ۲ باشد، ثانیاً نباید مضرب ۹ باشد. بنابراین طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد اعدادی چون a برابر است با:

$$۵۰ - \left[\frac{۵۰}{۲}\right] - \left[\frac{۵۰}{۹}\right] + \left[\frac{۵۰}{۱۸}\right] = ۵۰ - ۲۵ - ۵ + ۲ = ۲۲$$

B ۷۵- گزینه‌ی (۴) اگر A مجموعه‌ی توابعی باشد که عدد ۲ در برد آن‌ها نیست و B مجموعه‌ی توابعی که ۱ متعلق به برد آن‌ها نیست، $|\overline{A \cup B}|$ را می‌خواهیم. با توجه به مثال‌های بخش آموزش داریم:

$$|\overline{A \cup B}| = ۲^۵ - ۱^۵ - ۱^۵ + ۰ = ۳۰$$

B ۷۶- گزینه‌ی (۴) در ماتریس متناظر رابطه، قطعاً درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر ۱ هستند. درایه‌های دیگر به $\frac{۱۶-۴}{۲} = ۶$ زوج متقارن

نسبت به قطر اصلی تقسیم می‌شوند. اگر رابطه‌ی R تقارنی باشد، هر کدام از این زوج‌ها ۲ حالت خواهند داشت (هر دو صفر یا هر دو یک) و بنابراین $۲^۶$ رابطه‌ی تقارنی و انعکاسی داریم. هم‌چنین در حالت کلی $۲^{۱۲}$ رابطه‌ی انعکاسی داریم. پس تعداد روابط انعکاسی و غیرتقارنی برابر است با:

$$۲^{۱۲} - ۲^۶ = ۴^۶ - ۲^۶$$

B ۷۷- گزینه‌ی (۱) اگر فرض کنیم $y_i = x_i - ۱$ ($1 \leq i \leq ۳$)، آن‌گاه $۰ \leq y_1, y_2, y_3 \leq ۱$ و $x_4, x_5 \geq ۰$ و می‌خواهیم تعداد جواب‌های معادله‌ی $۱ = y_1 + y_2 + y_3 + x_4 + x_5$ را پیدا کنیم. این معادله ۵ جواب دارد (در هر جواب یکی از متغیرها ۱ و مابقی صفر هستند).

B ۷۸- گزینه‌ی (۲)

$$f = \{(1, 1), (2, x), (3, y), (4, z)\}$$

تابع را می‌توانیم به صورت بالا نشان بدهیم که در آن x, y و z سه عضو متمایز (به دلیل یک‌به‌یک بودن تابع) از مجموعه‌ی B هستند. به همین دلیل برای x ، ۴ انتخاب، برای y ، ۳ انتخاب و برای z ، ۲ انتخاب وجود دارد. تعداد چنین توابعی برابر است با:

$$۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$$