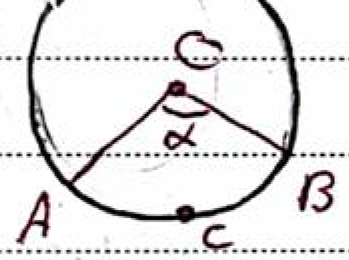
۱) دایره: شکل هندسی تشکیل شده از نقاطی از یک صفحه که فاصله اش از نقطه ای ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابتی باشد، دایره است که به نقطه ی ثابت مرکز دایره و به مقدار ثابت شعاع دایره گفته می شود.

۲) وتر: پاره خطی که دو نقطه ی متمایز از یک دایره را به هم وصل می کند وتر آن دایره گفته می شود.

۳) قطر: وتری که از مرکز دایره می گذرد قطر آن دایره نامیده می شود.

۴) زاویه مرکزی: زاویه ای که راس آن مرکز دایره باشد، زاویه مرکزی گفته می شود و با توجه به اندازه ی کمان روبروی هر زاویه مرکزی در دایره به حسب درجه همان اندازه ی زاویه ی مرکزی روبروی کمان است.

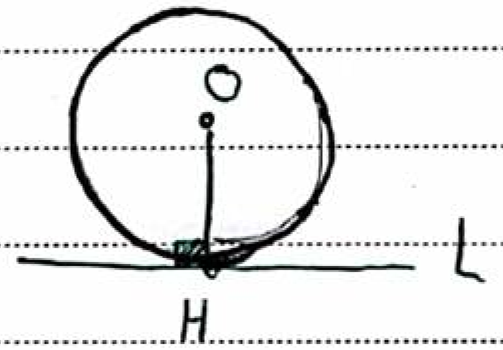
$$\overset{\frown}{ACB} = \hat{O} = \alpha$$



خط قاطع

۵) خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، قاطع نسبت به دایره گفته می شود.

۶) نقطه ی H روی دایره C به مرکز O را در نظر می گیریم. خط L که از نقطه ی H می گذرد بر شعاع OH عمود است. خط مماس بر دایره در نقطه H نامیده می شود.

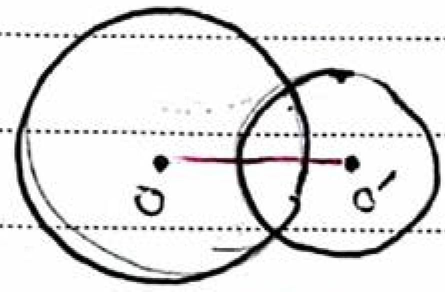


وضعیت دو دایره نسبت به هم ← خط المرکزی = $d = OO'$

r

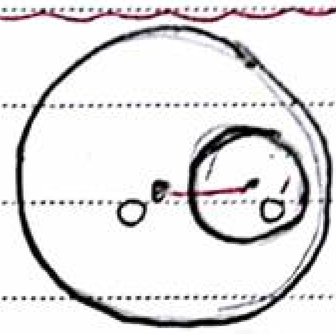
r'

۱ـ متقاطع



$r - r' < d < r + r'$

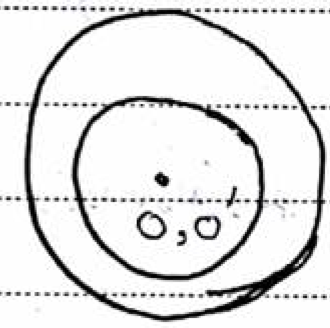
۲ـ درون هم



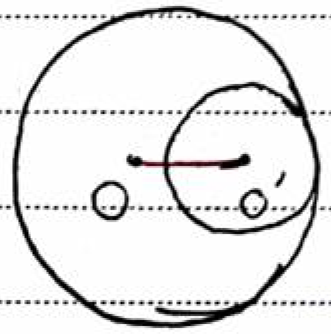
$d < r - r'$

۳ـ هم مرکز

$d = 0$



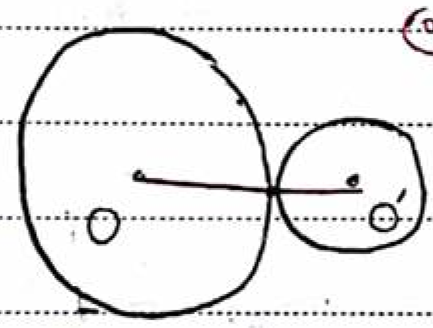
۴ـ مماس درون



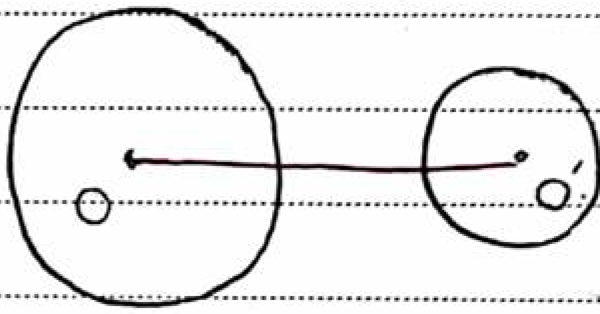
$d = r - r'$

۵ـ مماس بیرون

$d = r + r'$



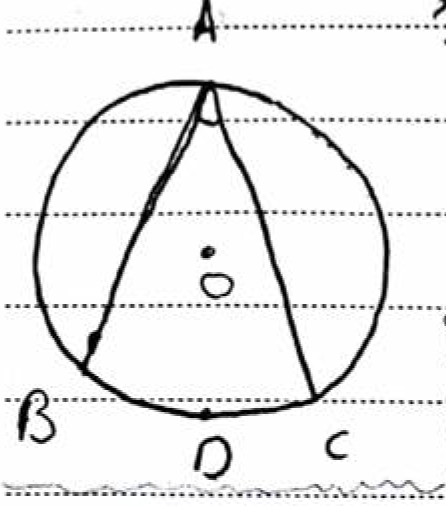
۶ـ بیرون از هم



$d > r + r'$

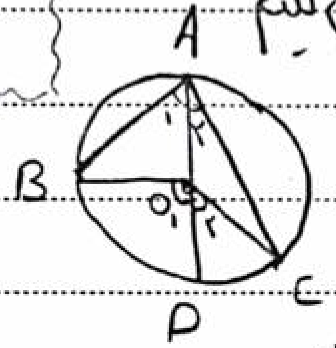
زاویه محاطی: زاویه‌ای که راس آن روی دایره و ضلع هایش دو وتر از دایره باشند زاویه محاطی نامیده می‌شود.

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبروی آن است؟



حکم: $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$

(۱) برهان: ابتدا قطر AD را رسم می‌کنیم و از B به O و C به O وصل می‌کنیم



$$O_1 \xrightarrow[A\hat{B}O]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = A_1 + B \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ABO]{\text{شعاع دایره } OA = OB} \hat{A}_1 = \hat{B} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}_1$$

$$O_1 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} O_1 = \overset{\frown}{BD}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 = BD \Rightarrow \boxed{\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}}$$

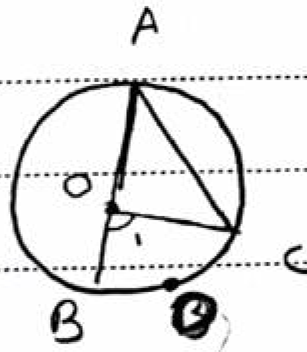
$$O_2 \xrightarrow[A\hat{C}O]{\text{زاویه خارجی}} O_2 = A_2 + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ACO]{\text{شعاع } OA = OC} \hat{A}_2 = C \Rightarrow \hat{O}_2 = 2\hat{A}_2$$

$$O_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} O_2 = \overset{\frown}{CD}$$

$$\Rightarrow 2A_2 = CD \Rightarrow A_2 = \frac{CD}{2}$$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = \frac{BD}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{BDC}{2}$$

(۲) برهان: ابتدا از C به O وصل می‌کنیم

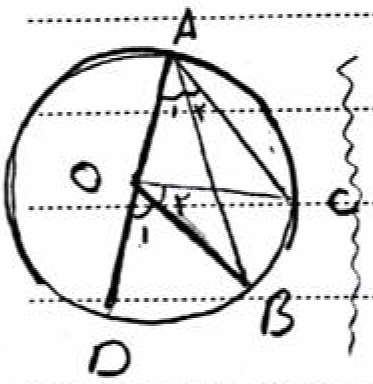


$$\hat{O}_1 \xrightarrow[A\hat{C}O]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ACO]{\text{شعاع دایره } OA = OC} \hat{A} = \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{BDC}$$

$$\Rightarrow 2A = BDC, \quad A = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$$

(۳) برهان: ابتدا قطر AD را رسم می‌کنیم و سپس از C و B به O وصل می‌کنیم



$$O_1 \xrightarrow[A\hat{B}D]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ABD]{\text{شعاع } OA = OB} \hat{A}_1 = \hat{B} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}_1$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{BD}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{BD}{2}}$$

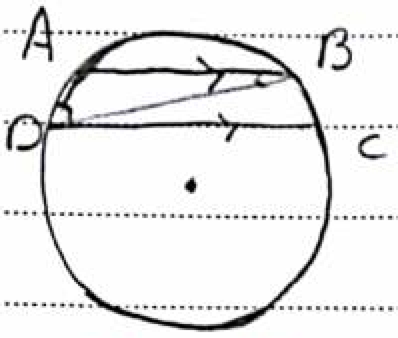
$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 \xrightarrow[A\hat{C}O]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین}]{OA = OC} A_1 + A_2 = C \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \overset{\frown}{CBD}$$

$$\Rightarrow 2(A_1 + A_2) = CBD \Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{CBD}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{CBD}{2} - \hat{A}_1$$

$$A_2 = \frac{\overset{\frown}{CBD}}{2} - \hat{A}_1 = \frac{CBD}{2} - \frac{BD}{2} = \frac{BC}{2}$$

ثابت کنید در هر دایره کمان های محصور بین دو وتر موازی باهم برابرند.



فرض: $AB \parallel CD$

حکم: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

جواب: ابتدا از B به D وصل می کنیم

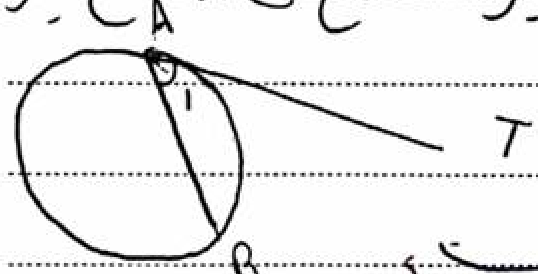
$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ زاویه محاطی (۱)

$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ زاویه محاطی (۲)

$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ BD \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$ (۳)

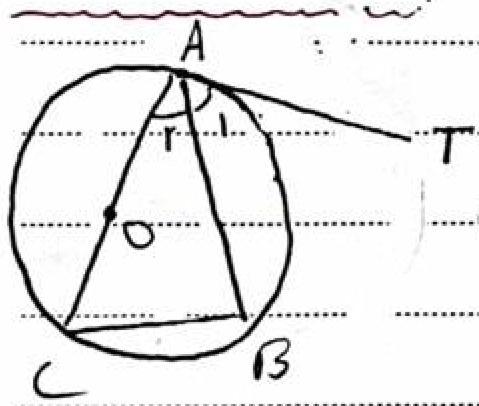
$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

زاویه ی ظلی: زاویه ای که راسش روی دایره است، یک ضلعش دایره را قطع می کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است زاویه ظلی نامیده می شود



$\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

قضیه: اندازه ی هر زاویه ی ظلی برابر با نصف کمان روبروی آن است.



برهان: ابتدا قطر AC را رسم می کنیم و در ادامه از B به C وصل می کنیم.

$\overset{\frown}{AC} = ۱۸۰°$

$\hat{B}$ زاویه محاطی: $\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{۱۸۰°}{۲} = ۹۰ \xrightarrow{ABC\,\Delta} \hat{A}_۲ + \hat{C} = ۹۰°$ (۱)

شعاع $OA \Rightarrow OA \perp \underset{\text{خط مماس}}{AT} \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰°$ (۲)

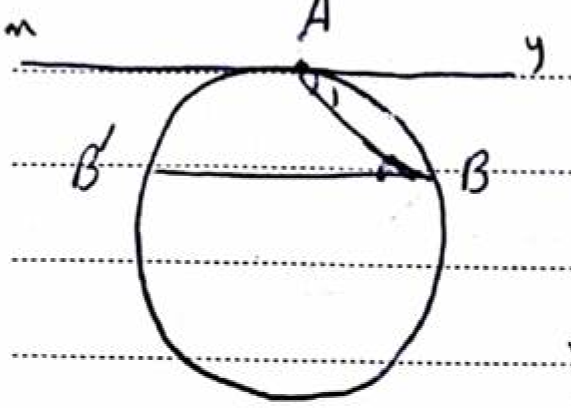
$\xrightarrow{(۱),(۲)} \hat{A}_۱ = \underset{\text{زاویه محاطی}}{\hat{C}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

Subject

Date

@Riazi_mahmoodi

مثال: خط xy در نقطه‌ی A بر دایره‌ی C مماس است. وتر BB' را موازی xy رسم کرده‌ایم. ثابت کنید $\widehat{AB}=\widehat{AB'}$



جواب: ابتدا A به B وصل می‌کنیم

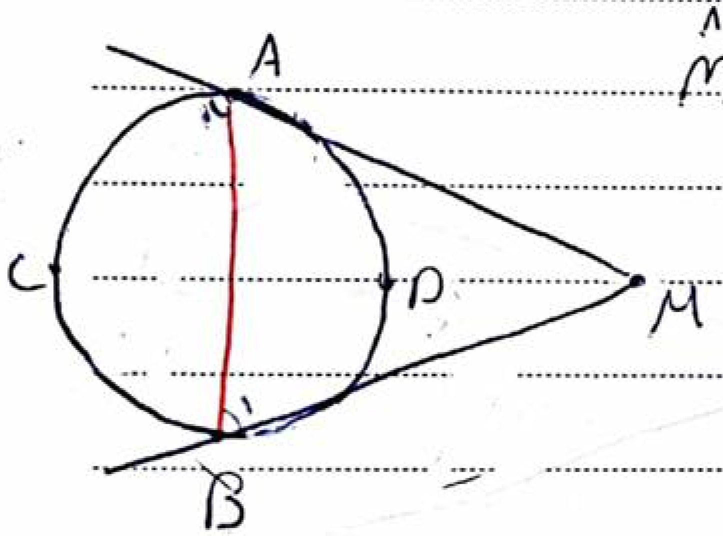
$$\left.\begin{array}{l} xy \parallel BB' \\ AB \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}' \quad (1)$$

زاویه ظلی $\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}$ (۲)

زاویه محاطی $B' = \frac{\widehat{AB'}}{2}$ (۳)

$$(1),(2),(3) \Longrightarrow \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AB'}}{2} \Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{AB'}$$

مثال: با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M} = \frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{2}$



ابتدا A به B وصل می‌کنیم

زاویه ظلی $\hat{A}_1 = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

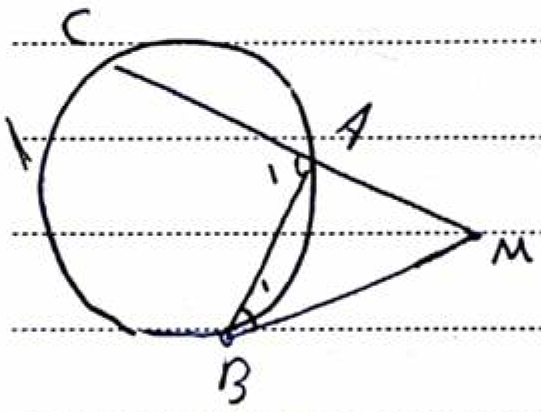
زاویه ظلی $B_1 = \frac{\widehat{ADB}}{2}$

$\overset{\triangle}{ABM}$ زاویه خارجی $\hat{A}_1 = \hat{M} + \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 - \hat{B} \xrightarrow[(2)]{(1)} \frac{\widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{ADB}}{2}$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{2}$$

مثال: با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M} = \frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{2}$

جواب: ابتدا A به B وصل می‌کنیم



زاویه محاطی $A_1 = \frac{\widehat{BC}}{2}$ (۱)

زاویه ظلی $\hat{B}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}$ (۲)

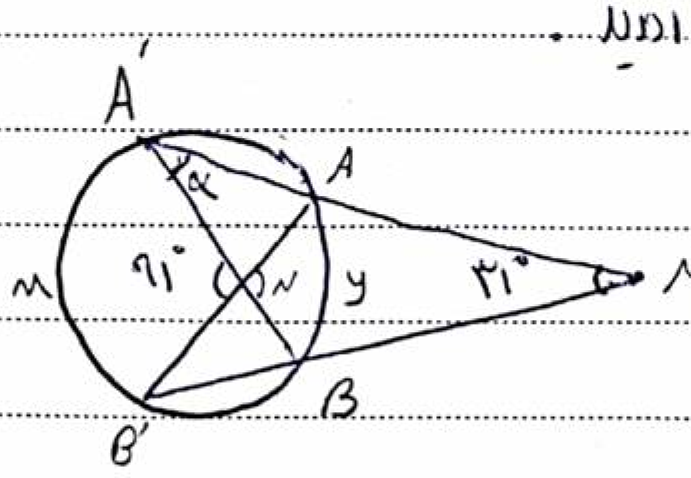
$\overset{\triangle}{ABM}$ زاویه خارجی $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 - \hat{B} \xrightarrow[(2)]{(1)} \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2}$

$$\Rightarrow M = \frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{2}$$

Subject

Date

در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه α را بدست آورید.



در قضیه‌ی قبل اثبات کردیم

$$\hat{M} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 31° = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 62°$$

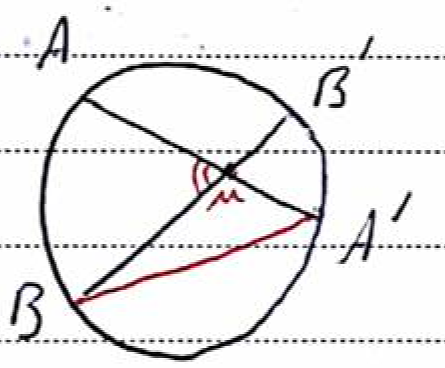
$$\hat{N} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 91° = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 182°$$

$$\begin{cases} x-y = 62 \\ x+y = 182 \end{cases} \Rightarrow 2x = 244 \Rightarrow x = 122° \Rightarrow x+y = 162,\ 122+y = 162,\ y = 60°$$

$$\alpha = \hat{A'} = \frac{y}{2} = \frac{60}{2} = 30°$$

زاویه‌ی محاطی

با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$

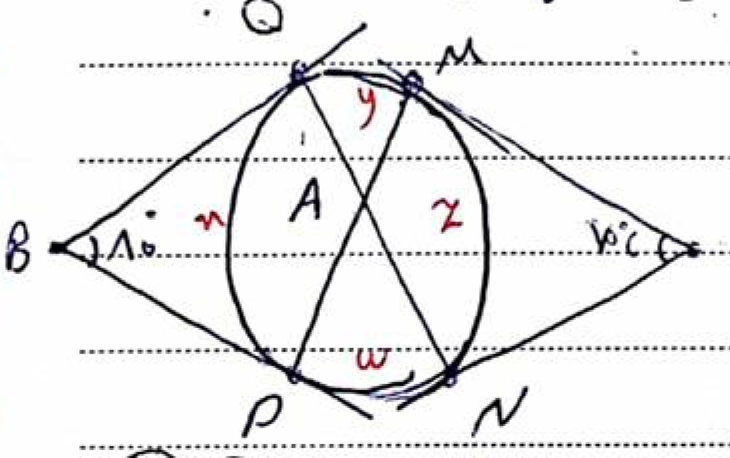


$\hat{M}$ زاویه‌ی خارجی $MA'B$

$$\hat{M} = \hat{A'} + \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

برهان: ابتدا از A' به B وصل می‌کنیم.

در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس اند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟



$$\hat{B} = \frac{y+z+w-x}{2} \Rightarrow 80 = \frac{y+z+w-x}{2} \Rightarrow y+z+w-x = 160$$

$$\Rightarrow y+w = 160 - z + x \quad (1)$$

$$\hat{C} = \frac{x+y+w-z}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y+w-z}{2} \Rightarrow x+y+w-z = 140°$$

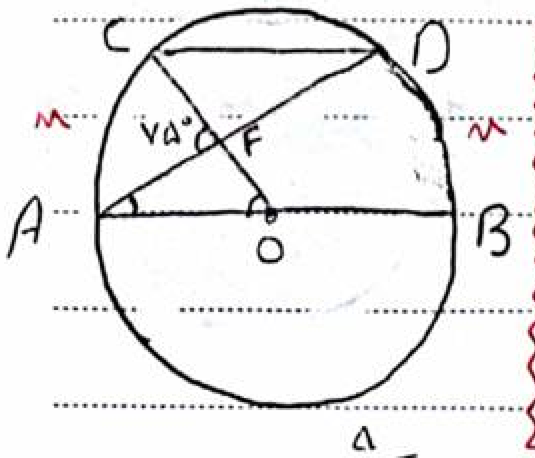
$$\Rightarrow y+w = 140 - x + z \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} 160 - z + x = 140 - x + z \Rightarrow 2x - 2z = -20 \Rightarrow x - z = -10° \quad (3)$$

$$y+w = 160 + x - z \xRightarrow{(3)} y+w = 160 + (-10) \Rightarrow y+w = 150 \quad (4)$$

$$\hat{A} = \frac{y+w}{2} \overset{(4)}{=} \frac{150}{2} = 75°$$

در دایره رسم شده ی شکل مقابل $CD \parallel AB$ است. اندازه ی کمان CD را بدست آورید.



طبق قضیه $CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = x$

قطر دایره $AB \Rightarrow \widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 180$

$\xRightarrow{(3)} 100 + y = 180 \Rightarrow y = 80 \Rightarrow \widehat{CD} = 80^\circ$

$A\hat{O}F$ زاویه خارجی $\hat{F} = 75^\circ = \hat{O} + \hat{A} \xRightarrow{(1)(2)} 75^\circ = x + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} = 75^\circ$

$\hat{O}$ زاویه مرکزی: $\widehat{AC} = x$ (1)

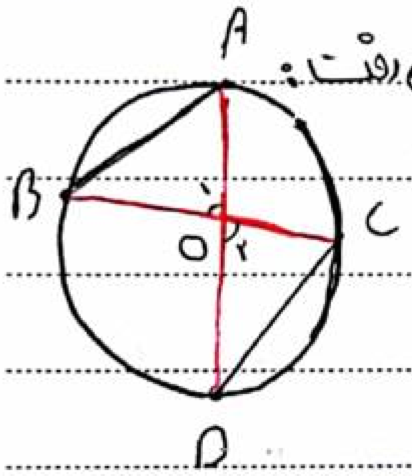
$\hat{A}$ زاویه محاطی: $\hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{x}{2}$ (2)

$\Rightarrow x = 75 \times \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x = 50^\circ$ (3)

ثابت کنید کمان های دو وتر مساوی برابرند و برعکس.

برهان رفت:



ابتدا O به A و B و C و D وصل می کنیم.

فرض: $AB = CD$

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

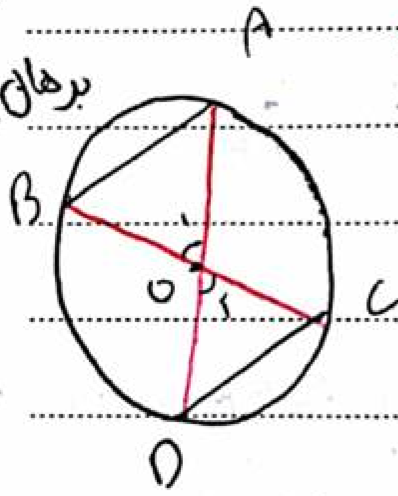
$OA = OC$ شعاع

$OB = OD$ شعاع

$AB = CD$ فرض

$\xRightarrow{(\text{ض ض ض})} O\hat{A}B \cong O\hat{C}D$ اجزای متناظر $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ زاویه مرکزی $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

برهان برگشت:



فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

حکم: $AB = CD$

ابتدا O به A و B و C و D وصل می کنیم.

$OA = OC$

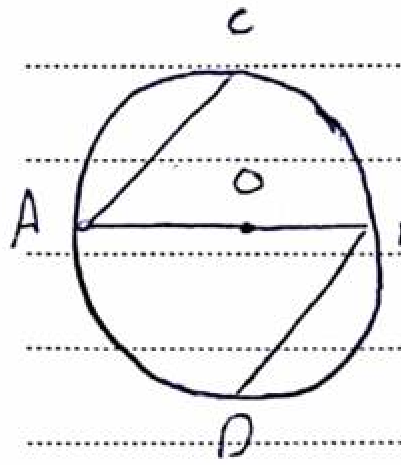
$OB = OD$

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ $(\widehat{AB} = \widehat{CD})$ زاویه مرکزی

$\xRightarrow{(\text{ض ز ض})} O\hat{A}B \cong O\hat{C}D$ اجزای متناظر $AB = CD$

Subject
Date

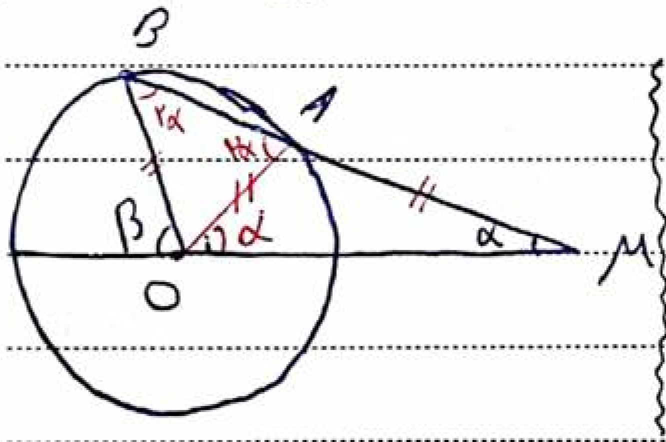
در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند
ثابت کنید $AC=BD$



وتر $AC \parallel BD \Longrightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AC}+\widehat{BC}=180^\circ \\ \widehat{BD}+\widehat{AD}=180^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{AC}+\widehat{BC}=\widehat{BD}+\widehat{AD} \xRightarrow{(1)} \widehat{AC}=\widehat{BD} \xRightarrow[\text{قضیه}]{\text{طبق}} AC=BD$$

دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $MA=R$؛ نشان دهید $\beta=3\alpha$



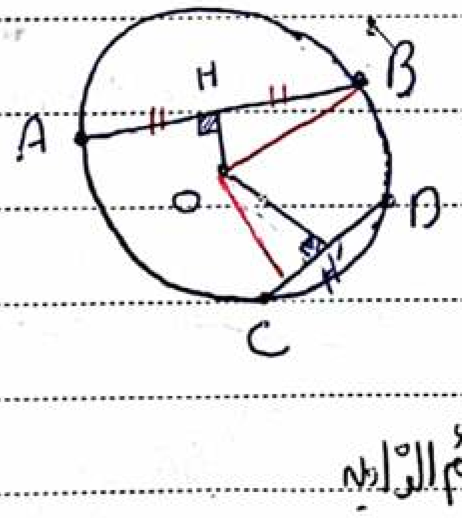
$AM=OA=R \Longrightarrow O\hat{M}A \Longrightarrow \hat{M}=\hat{O}_1=\alpha$ (1)
(متساوی الساقین)

زاویه خارجی $O\hat{M}A$: $\hat{A}_1=\hat{M}+\hat{O}_1 \xRightarrow{(1)} \hat{A}_1=2\alpha$

$OA=OB=R \Longrightarrow O\hat{A}B \Longrightarrow \hat{A}_1=\hat{B}=2\alpha$ (2)

$O\hat{M}B$ زاویه خارجی $\beta=\hat{B}+\hat{M} \xRightarrow{(1),(2)} \beta=2\alpha+\alpha \Longrightarrow \beta=3\alpha$

در دایره $C(O,R)$ نشان دهید $AB>CD$ اگر و تنها اگر $OH<OH'$.
فرض: $AB>CD$ ، برهان خلف



حکم: $OH<OH' \xRightarrow{\div 2} BH>CH'$

(ابتدا O را به B و C وصل می‌کنیم.)

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{B}H \text{ قائم الزاویه} \xRightarrow{\text{فیثاغورس}} OB^2=OH^2+BH^2 \\ O\hat{C}H' \text{ قائم الزاویه} \xRightarrow{\text{فیثاغورس}} OC^2=OH'^2+CH'^2 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{شعاع}]{OB=OC} OH^2+BH^2=OH'^2+CH'^2$$

$\xRightarrow{BH>CH'} OH^2<OH'^2$

$\Longrightarrow OH<OH'$

۵

Subject
Date

$\overset{\triangle}{OBH}$ قائم الزاویه $\xRightarrow{\text{فیثاغورس}} OB^2 = OH^2 + BH^2$

$\overset{\triangle}{OCH'}$ قائم الزاویه $\xRightarrow{\text{فیثاغورس}} OC^2 = OH'^2 + CH'^2$

$\xRightarrow[\text{شعاع}]{OB=OC} OH^2 + BH^2 = OH'^2 + CH'^2$

$\xRightarrow{OH < OH'} BH^2 > CH'^2$

$\Rightarrow BH > CH'$

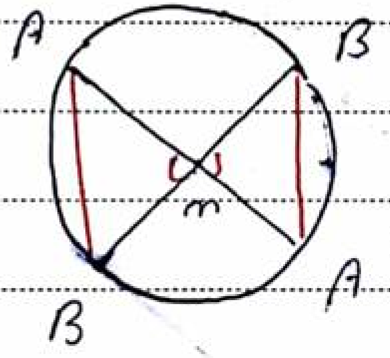
$\xRightarrow[\text{طبق قضیه}]{\times 2} AB > CD$

درس دوم

@ Riazi_mahmoodi

(رابطه‌ی طولی در دایره)

هرگاه دو وتر در داخل دایره همدیگر را قطع کنند داریم: $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$



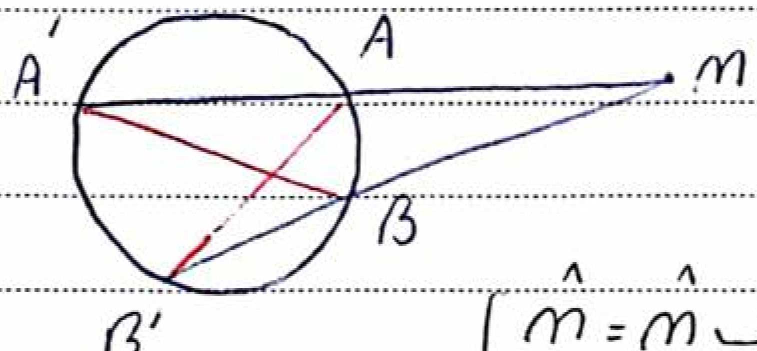
برهان: ابتدا از A به B و از A' به B' وصل می‌کنیم

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad \text{متقابل به راس} \\ \hat{A} = \hat{B'} = \dfrac{\overset{\frown}{A'B}}{2} \quad \text{محاطی} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} MAB \sim MB'A'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناسب}} \frac{MA}{MB'} = \frac{MB}{MA'}$$

$$\Rightarrow MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

اگر دو وتر دایره یا امتداد آن‌ها همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند آنگاه داریم: $MA.MA' = MB.MB'$

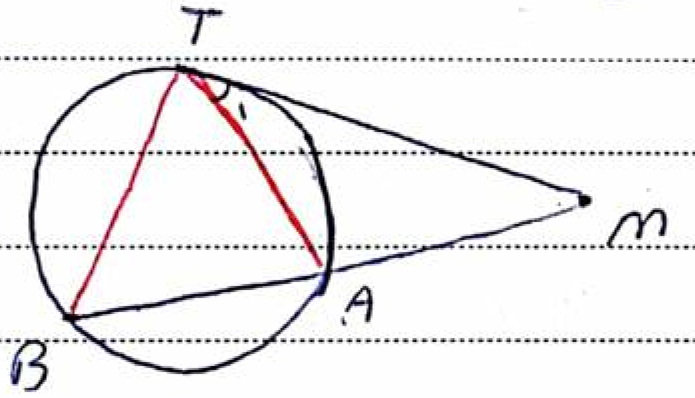


برهان: ابتدا A به B' و A' به B وصل می‌کنیم

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{M} & \text{مشترک} \\ \hat{A'} = \hat{B'} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{cases} \xRightarrow{\text{زز}} M\overset{\triangle}{B}A' \sim M\overset{\triangle}{A}B' \Longrightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MA'}{MB'}$$

$$\Longrightarrow MA.MA' = MB.MB'$$

اگر خطی مماس و وتر دایره در نقطه‌ی M همدیگر را قطع کنند آنگاه: $MT^2 = MA.MB$



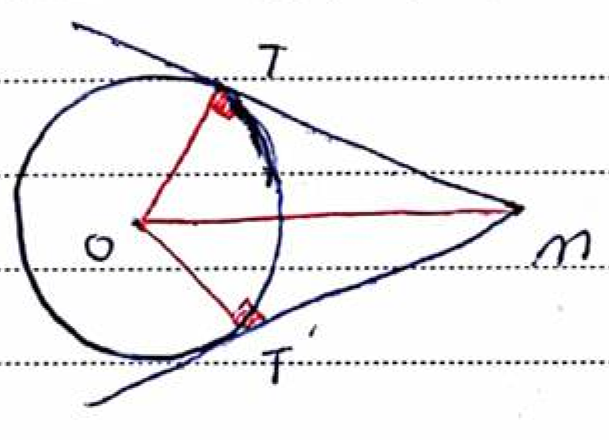
برهان: ابتدا T به A و B وصل می‌کنیم

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{M} & \text{مشترک} \\ \hat{T_1} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{2} \end{cases} \xRightarrow{\text{زز}} M\overset{\triangle}{A}T \sim M\overset{\triangle}{T}B \xRightarrow{\text{اجزای متناظر}} \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Longrightarrow MT^2 = MA.MB$$

نکته ← از هر نقطه‌ی خارج دایره دو مماس برابر می‌توان رسم کرد

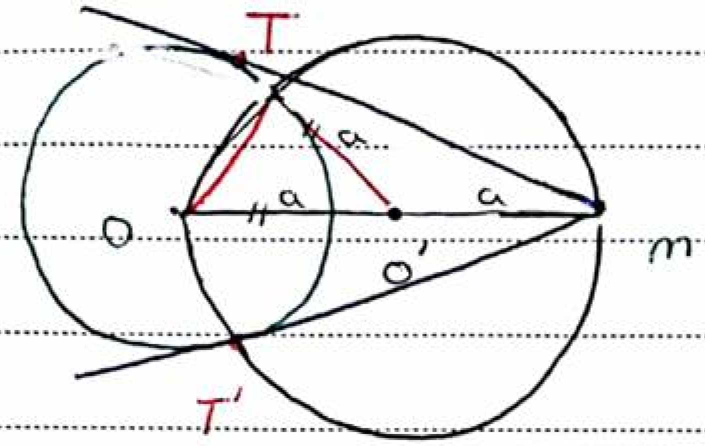
اثبات: دو مماس رسم شده از یک نقطه برابر است: $MT = MT'$



ابتدا O به T و T' و M وصل می‌کنیم چون MT و MT' مماس بر دایره‌اند پس بر شعاع عمودند

$$\begin{cases} OT = OT' & \text{شعاع} \\ OM = OM & \text{مشترک} \end{cases} \xRightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\overset{\triangle}{T}M \cong O\overset{\triangle}{T'}M \Longrightarrow MT = MT'$$

مراحل رسم مماس بر دایره از نقطه‌ی خارج دایره:



مراحل زیر را انجام می دهیم

(۱) از O به m وصل می کنیم

(۲) وسط Om را O' می نامیم

(۳) دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $O'O = O'm$ رسم می کنیم

(۴) محل برخورد دایره با دایره اصلی را T و T' می نامیم

(۵) از m به T و T' وصل می کنیم

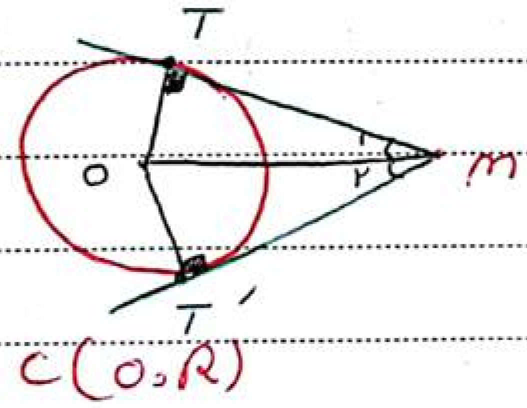
(۶) mT و mT' همان خط‌های مماس بر دایره هستند

علت: $O'T = OO' = O'm = a$ شعاع دایره

$$\left.\begin{array}{l} O'T = a \\ Om = 2a \end{array}\right\} \Longrightarrow O'T = \frac{1}{2} Om$$

مثلثی که اندازه میانه با ضلع روبرو برابر باشد همان یک مثلث قائم الزاویه است پس: $OT \perp mT$

هرگاه از نقطه‌ی m خارج دایره $C(O,r)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم. T و T' نقاط تماس باشند ثابت کنید خط Om نیمساز زاویه TmT' است.



حکم: $\hat{m}_1 = \hat{m}_2$

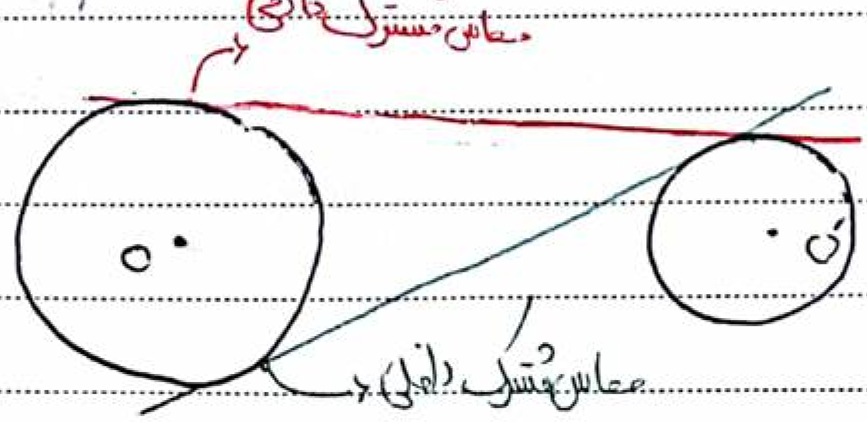
برهان: ابتدا از O به T و T' وصل می کنیم

$$\left\{\begin{array}{l} OT = OT' \quad \text{شعاع} \\ Om = Om \quad \text{مشترک} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\overset{\triangle}{T}m \cong OT'm \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزاء}} \hat{m}_1 = \hat{m}_2$$

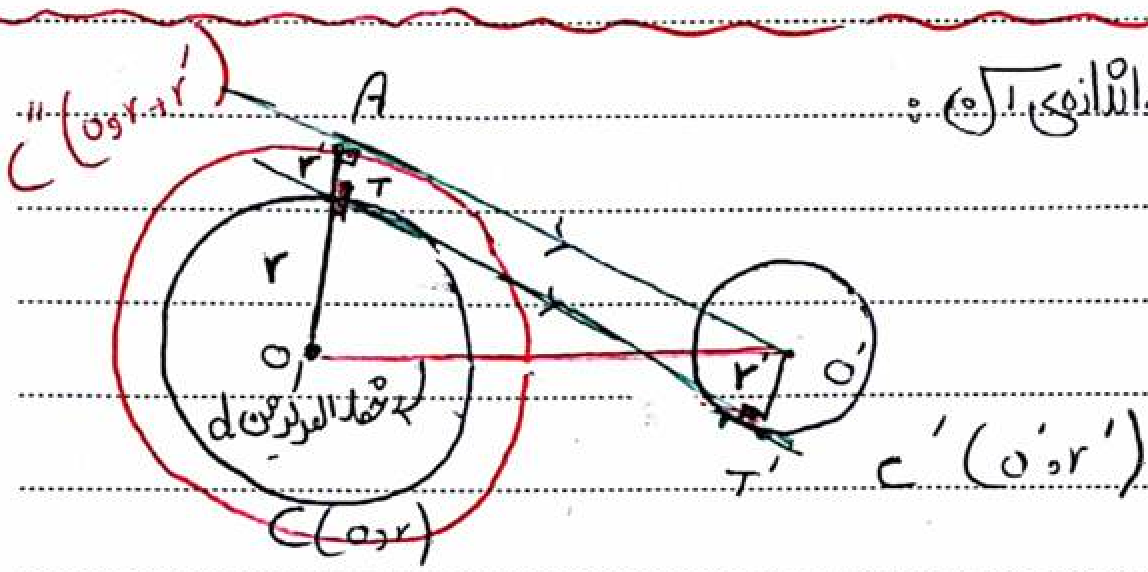
Subject

Date

مماس مشترک: هر خطی یا پاره خطی را که به طور هم زمان بر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک ۲ دایره می‌نامند



مراحل رسم مماس مشترک داخلی دایره‌های C و C':



۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r+r'$ رسم می‌کنیم

۲) از نقطه‌ی O' مماسی بر دایره‌ی C'' رسم می‌کنیم و از O به A (محل تماس خط مماس) وصل می‌کنیم

۳) شعاع OA دایره‌ی C را در T قطع می‌کند

۴) از نقطه‌ی T خط موازی O'A رسم می‌کنیم که چهارضلعی $ATT'O'$ یک مستطیل می‌شود

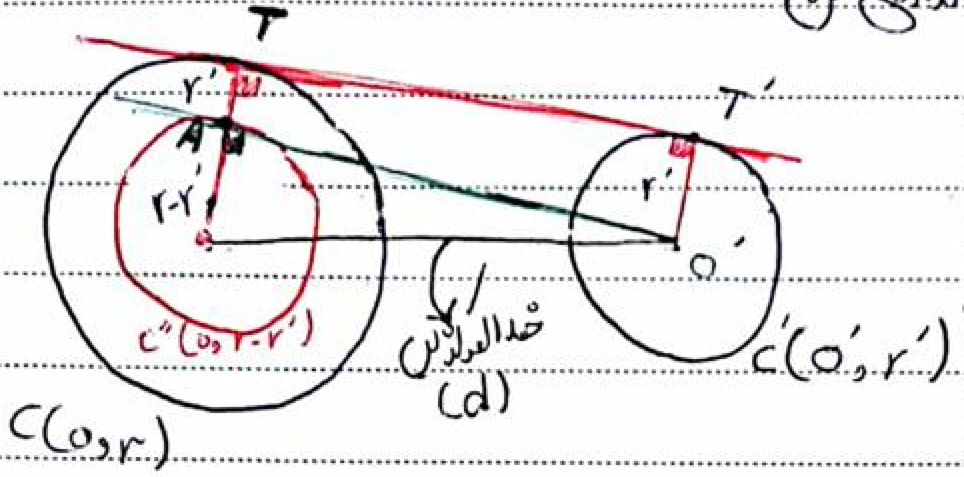
۵) خط TT' همان مماس مشترک داخلی است

$$\overset{\triangle}{OO'A} \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قائم الزاویه } \hat{A}=90^\circ} O'A^2+OA^2=OO'^2 \xrightarrow[\text{طول مستطیل}]{O'A=TT'} TT'^2+(r+r')^2=d^2$$

$$\Longrightarrow TT'^2=d^2-(r+r')^2$$

$$\Longrightarrow TT'=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$$

مراحل رسم مماس مشترک خارجی دو دایره که



(۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r-r'$ رسم می‌کنیم

(۲) از نقطه‌ی O' مماس بر دایره C'' رسم می‌کنیم

(۳) از O به نقطه‌ی تماس با دایره C'' (A) وصل و امتداد می‌دهیم تا دایره C را در نقطه‌ی T قطع کند

(۴) از نقطه‌ی T موازی خط $O'A$ رسم می‌کنیم که چهارضلعی $ATT'O'$ یک مستطیل است

(۵) خط TT' همان خط مماس مشترک خارجی دو دایره است

$$OAO' \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قائم الزاویه } \hat{A}=90^\circ} O'A^2 + OA^2 = OO'^2$$

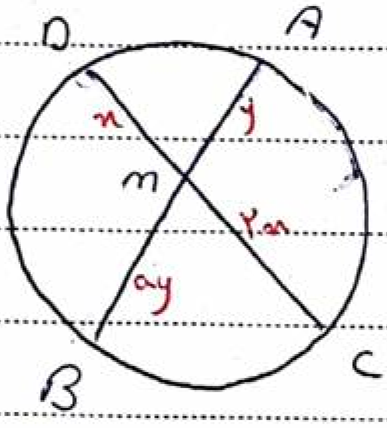
$$\xrightarrow[\text{طول مستطیل}]{O'A = TT'} TT'^2 + (r-r')^2 = d^2$$

$$\Longrightarrow TT'^2 = d^2 - (r-r')^2$$

$$\Longrightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (r-r')^2}$$

تمرین ص ۲۳

در دایره‌ی $C(O, R)$ وتر AB، وتر CD به طول $9cm$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB=11cm$ آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند.



$CD = x + 2x = 3x = 9 \Rightarrow x = 3cm$

طبق قضیه: $MA \times MB = MD \times MC$

$\Rightarrow MA \times MB = 3 \times 6$

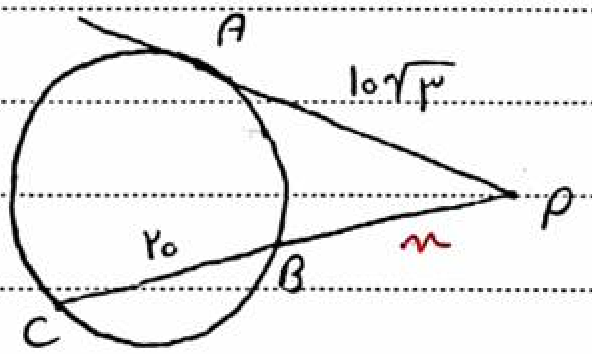
$\Rightarrow MA \times MB = 18 \Rightarrow \overset{\alpha}{y} \times \overset{\beta}{ay} = 18 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 18 = P$

$AB = \underbrace{y}_{\alpha} + \underbrace{ay}_{\beta} = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = 11 = S$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 \Rightarrow (x-2)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 = y \\ x = 9 = ay \end{cases}$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{ay}{y} = \frac{9}{2}$$

از نقطه‌ی P خارج دایره‌ای مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ بر دایره رسم کرده‌ایم. همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است. $BC=20$ طول‌های PB و PC را بدست آورید.



طبق قضیه: $PA^2 = PB \times PC$

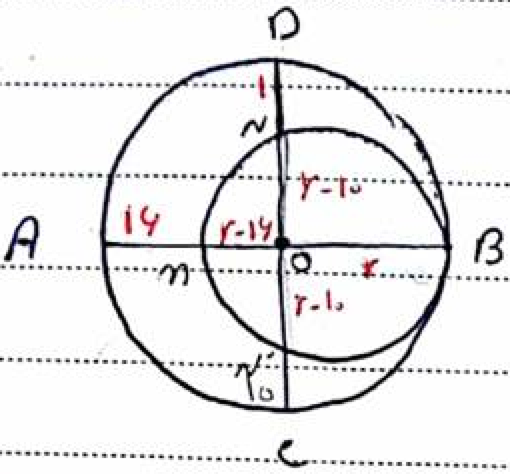
$\Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x \times (20 + x)$

$\Rightarrow 300 = 20x + x^2$

$\Rightarrow x^2 + 20x - 300 \Rightarrow (x+30)(x-10)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -30 \ \times \\ x = 10 \ \checkmark \Rightarrow \begin{cases} PB = 10 \\ PC = 30 \end{cases} \end{cases}$$

در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند اگر $Am=16$ و $ND=10$ شعاع های دو دایره را بیابید.



① دایره کوچک $ON \times ON' = Om \times OB$

$\Longrightarrow (r-10)(r-10) = (r-16)(r)$

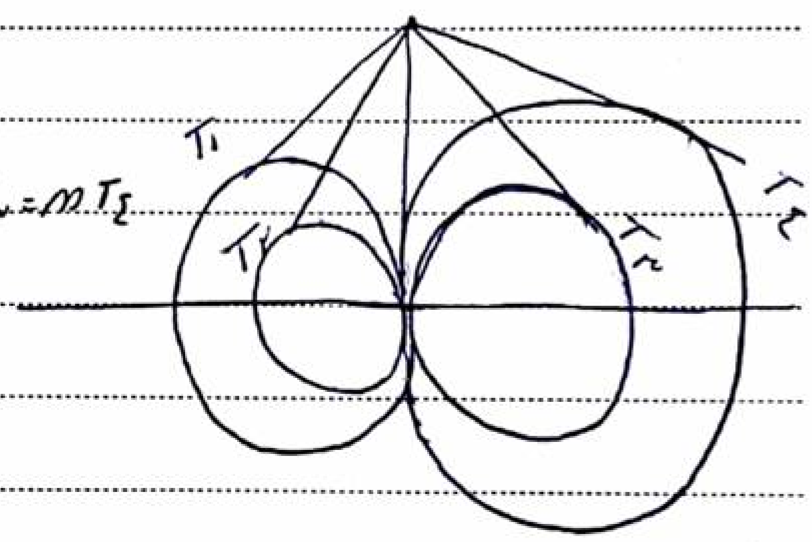
$\Longrightarrow r^2+100-20r = r^2-16r$

$\Longrightarrow 100 = 4r \Longrightarrow r = 25$ شعاع دایره بزرگ

قطر دایره کوچک $Bm = r+r-16 = 2r-16 = 50-16 = 34$

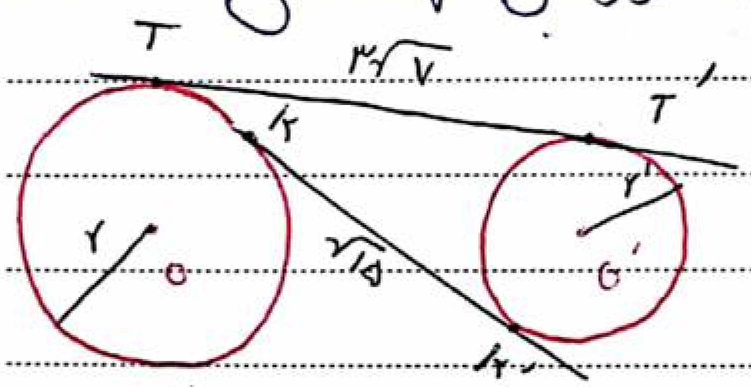
شعاع دایره کوچک $= r' = \frac{34}{2} = 17$

مطابق شکل مقابل تمام دایره ها در نقطه T برهم مماس اند. و از نقطه m روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم. ثابت کنید: $mT_1 = mT_2 = mT_3 = mT_4$



طبق قضیه
$$\begin{cases} mT = mT_1 \\ mT = mT_2 \\ mT = mT_3 \\ mT = mT_4 \end{cases} \Longrightarrow mT_1 = mT_2 = mT_3 = mT_4$$

طول شعاع های دو دایره متخارج را بیابید اگر بدانیم طول مماس مشترک خارجی آنها $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.



$r > r'$

$TT' = \sqrt{d^2-(r-r')^2}$

$\Longrightarrow 3\sqrt{7} = \sqrt{8^2-(r-r')^2}$

$\Longrightarrow 63 = 64-(r-r')^2$

$\Longrightarrow (r-r')^2 = 1$

$\Longrightarrow \begin{cases} r-r' = 1 \checkmark \\ r-r' = -1 \times \end{cases}$ ①

$KK' = \sqrt{d^2-(r+r')^2}$

$\Longrightarrow \sqrt{15} = \sqrt{8^2-(r+r')^2}$

$\Longrightarrow 15 = 64-(r+r')^2$

$\Longrightarrow (r+r')^2 = 49$

$\Longrightarrow \begin{cases} r+r' = 7 \checkmark \\ r+r' = -7 \times \end{cases}$ ②

$\xRightarrow{①,②} \begin{cases} r-r' = 1 \\ r+r' = 7 \end{cases} \Longrightarrow 2r = 8 \Longrightarrow r = 4 \Longrightarrow r-r' = 1$

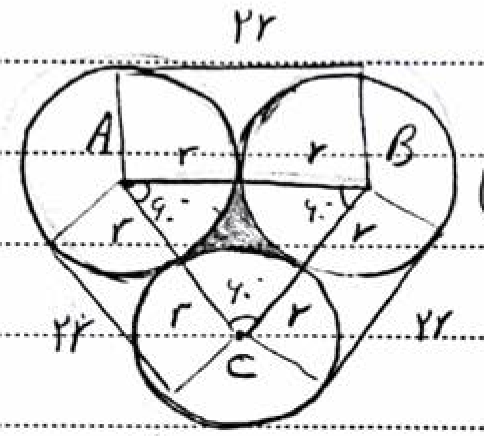
$\Longrightarrow 4-r' = 1 \Longrightarrow r' = 3$

@ Riazi_mahmoodi

Subject

Date

سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخی بسته شده است. نشان دهید طول این نخ برابر $6r+2\pi r$ است.
همچنین نشان دهید مساحت ناحیه بین سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$ محدود است.



مساحت سه قطاع
$\Rightarrow \frac{1}{2} S_{\text{دایره}} \Rightarrow \frac{1}{2}\pi r^2$

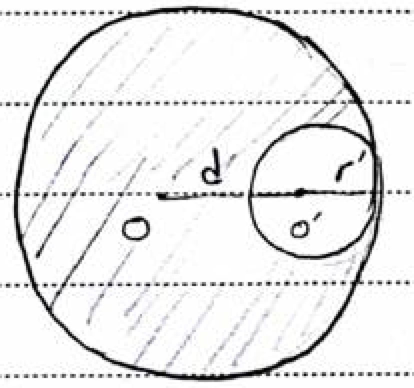
سه قطاع به زاویه ۱۲۰ درجه یک دایره کامل تشکیل می دهد

محیط دایره $+ 2r + 2r + 2r =$ طول نخ
$= 6r + 2\pi r$

$\hat{ABC} \Rightarrow$ مثلث متساوی الاضلاع $S_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} 4r^2 = \sqrt{3}r^2$

$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{مثلث}} - S_{\text{نیم دایره}} = \sqrt{3}r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$
$= r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$

طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی $2cm$، مساحت ناحیه محدود بین آنها $16\pi\, cm^2$ است. طول شعاع های دو دایره را بدست آورید.



$d = OO' = 2$

$S_{\text{هاشورخورده}} = 16\pi$

$r = d + r' = 2 + r'$

$S_{\text{دایره بزرگ}} = \pi r^2 = \pi(2+r')^2$
$= \pi(4 + r'^2 + 4r')$
$= 4\pi + \pi r'^2 + 4\pi r'$

$S_{\text{دایره کوچک}} = \pi r'^2$

$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}}$

$= 4\pi + \pi r'^2 + 4\pi r' - \pi r'^2 = 4\pi + 4\pi r' = 4\pi(1+r') = 16\pi$
$\Rightarrow 1 + r' = 4$
$\Rightarrow r' = 3$

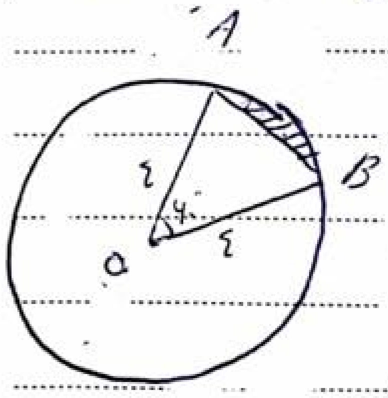
$r = 2 + r' = 2 + 3 = 5$

Nevis

Subject

Date

مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام ببرید



$S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$

$\underset{\text{مثلث متساوی الاضلاع}}{6S} = 6 \times \frac{1}{2} \times r^2 \times \sin 60 = 6 \times \frac{1}{2} \times (4)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

$S_{\text{هاشورخورده}} = \frac{S_{\text{دایره}} - 6S}{6} = \frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{2}(8\pi - 12\sqrt{3})}{\cancel{6}_{3}}$

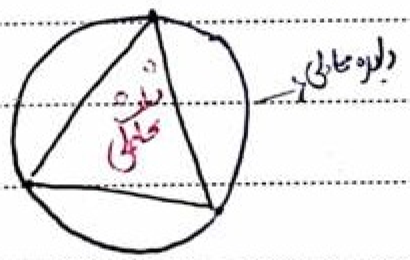
$= \frac{8\pi - 12\sqrt{3}}{3}$

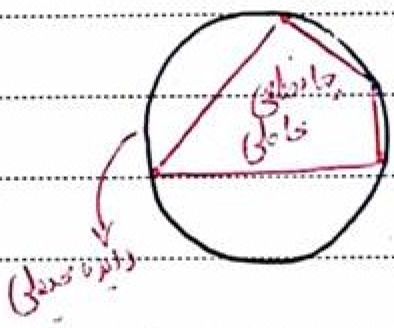
@ Riazi_mahmoodi

درس سوم

چندضلعی های محاطی و محیطی

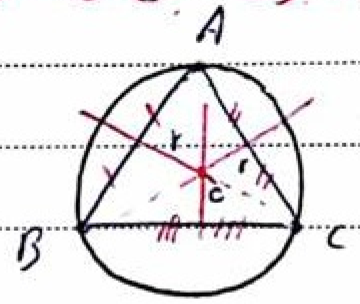
چندضلعی محاطی: چندضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه‌ی راس های آن بگذرد در این صورت دایره را، دایره‌ی محیطی آن چندضلعی می‌نامیم





نکته: یک چندضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف های همه‌ی ضلع های آن از یک نقطه همرس باشند

نکته: هر مثلث یک مثلث محاطی است که مرکز دایره‌ی محیطی آن محل همرسی عمودمنصف های اضلاع مثلث است

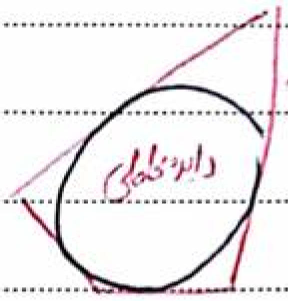


Subject

Date

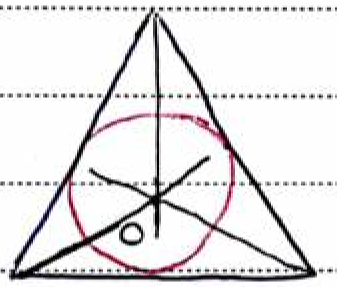
چندضلعی محیطی: چندضلعی را محیطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه‌ی ضلع‌های آن مماس باشد. در این صورت دایره را دایره محاطی این چندضلعی می‌نامیم.

مثلث محیطی

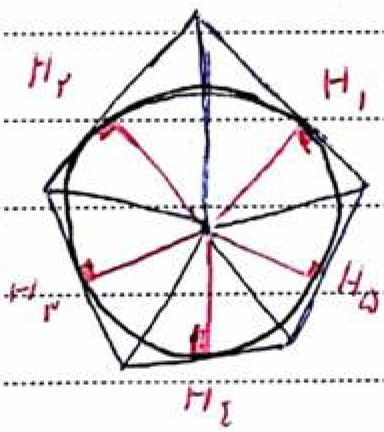


نکته: یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه‌ی نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره‌ی محاطی چندضلعی است.

نکته: هر مثلث محیطی است که مرکز دایره محاطی آن محل همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث است.



اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2p$ شعاع دایره‌ی محاطی برابر r باشد نشان دهید $S = rp$



برای ۵ ضلعی ثابت می‌کنیم و به همین طریق برای n ضلعی ثابت می‌شود:

$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4 = OH_5 = r$$

$$S_1 = \frac{1}{2} OH_1 \times AE$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OH_2 \times AB$$

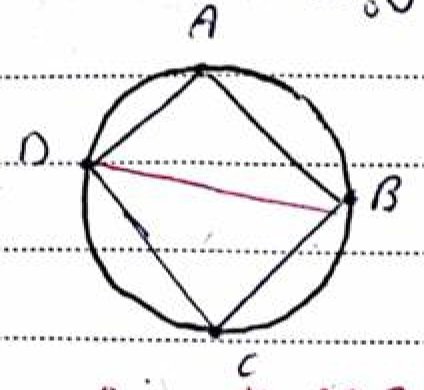
$$S_3 = \frac{1}{2} OH_3 \times BC$$

$$S_4 = \frac{1}{2} OH_4 \times CD$$

$$S_5 = \frac{1}{2} OH_5 \times DE$$

$$S_{\text{۵ ضلعی}} = \frac{1}{2} \overset{r}{\cancel{OH_1}} (\overset{2p}{AE + AB + BC + CD + DE}) = rp$$

یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند



برهان رفت:

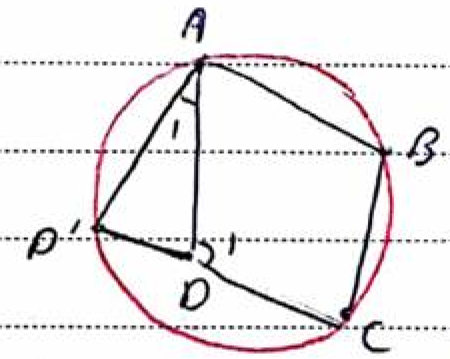
ابتدا از B به D وصل می‌کنیم و $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$ محاطی و $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$ محاطی

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2} = \frac{BCD + BAD}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود که $B + D = 180$

فرض: چهارضلعی ABCD محاطی است

حکم: $\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180 \\ \hat{B} + \hat{D} = 180 \end{cases}$



برهان برگشت:

اگر ABCD محاطی باشد که فرض ثابت است

در اگر محاطی نباشد و از سه راس A و B و C حتماً یک دایره می‌گذرد (هر مثلث یک دایره محیطی دارد) حال ضلع CD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D' قطع کند پس $ABCD'$ محاطی است

فرض: $\begin{cases} A + C = 180 \\ B + D_1 = 180 \end{cases}$

حکم: چهارضلعی ABCD محاطی است

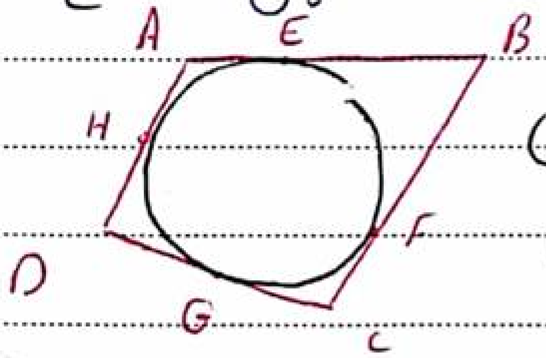
$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D'} = 180 \\ \hat{B} + \hat{D}_1 = 180 \end{cases} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D'}$ (1)

(2) در $\overset{\triangle}{ADD'}$ زاویه خارجی $\hat{D}_1 = \hat{A}_1 + \hat{D'} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{D'}$ (2)

از 1 و 2 به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی ABCD محاطی است

Subject
Date

یک چندضلعی منتظم است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع متقابل دیگر باشند

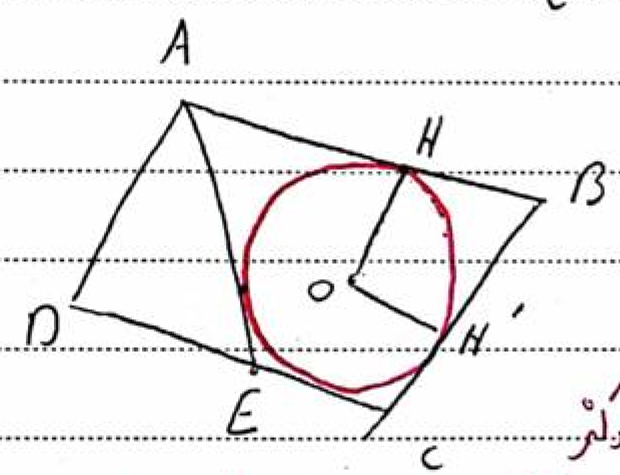


فرض: $ABCD$ محیطی است

حکم: $AB+CD = AD+BC$

طبق قضیه
$$\begin{cases} AE=AH & (1) \\ BE=BF & (2) \\ CG=CF & (3) \\ DG=DH & (4) \end{cases}$$

$$AB+CD$$
$$=AE+BE+CG+DG$$
$$=AH+BF+CF+DH$$
$$AD+BC$$



برهان بر عکس: فرض: $AB+CD=AD+BC$

حکم: چهارضلعی $ABCD$ محیطی است

نیمسازهای زاویه‌های B و C را رسم می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز
محل برخورد این نیمسازها رسم می‌کنیم که حتماً بر سه ضلع AB و BC و CE مماس است
فرض خلف: می‌کنیم که AD به دایره مماس نباشد پس از A خطی مماس بر دایره رسم
می‌کنیم و AE می‌نامیم چون چهارضلعی $ABCE$ محیطی است پس داریم:

$$AB+CE=AE+BC$$

فرض: $AB+CD=AD+BC$

$$\Rightarrow CE-CD=AE-AD$$
$$\Rightarrow AD=AE-CE+CD$$
$$\Rightarrow AD=AE+DE$$

از طرفی می‌دانیم (نامساوی مثلث) $AD < AE+DE$ پس به تناقض رسیدیم و فرض خلف
باطل و حکم ثابت است یعنی $ABCD$ محیطی است

چند ضلعی منتظم :

چند ضلعی محدب منتظم می‌نامند هرگاه ضلع‌های آن هم اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم اندازه باشند.

(تمارین صفحه ۲۹ ـ ۳۰ ـ ۳۱)

تمرین

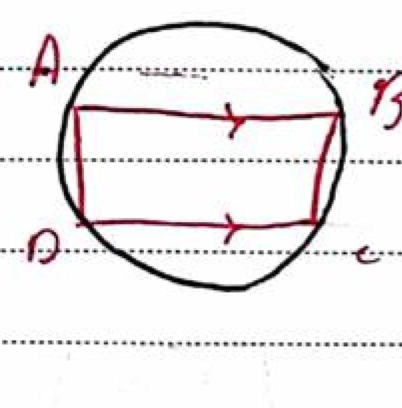
ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

برهان رفت:

فرض: ذوزنقه محاطی است.

حکم: متساوی الساقین

$$\begin{cases} AD = BC & AB \parallel CD \\ \hat{A} = \hat{B} & \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \\ \hat{C} = \hat{D} & \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} AD = CB \end{cases}$$



برهان برگشت:

فرض: ذوزنقه متساوی الساقین $\Longrightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases}$

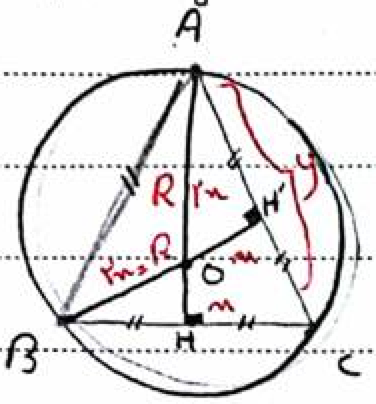
حکم: ذوزنقه محاطی است.

$$\left.\begin{array}{l} A + D = 180 \xrightarrow{C = D} A + C = 180 \\ A + D = 180 \xrightarrow{A = B} B + D = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ذوزنقه محاطی است

Subject

Date

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را بدست آورید که دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.



می دانیم در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع، میانه، نیم ساز و عمود منصف یکسان هستند همچنین می دانیم که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ و ۱ قطع می کنند.

$2x = R \Rightarrow x = \frac{R}{2}$

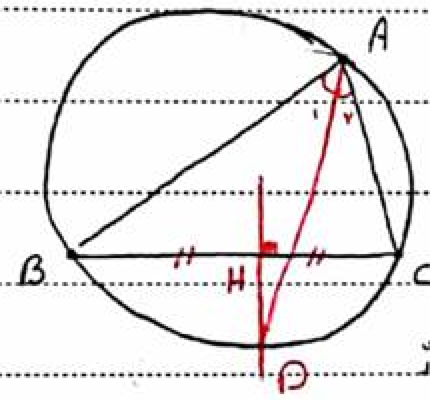
ارتفاع مثلث $AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$

$y^2 = (\frac{y}{2})^2 + (\frac{3}{2}R)^2 \Rightarrow y^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{9R^2}{4}$

$\Rightarrow y^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Rightarrow \frac{3y^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Rightarrow y^2 = 3R^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}R$

$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}R \times \sqrt{3}R = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.



نیم ساز زاویه‌ی A را رسم می کنیم که محل برخورد نیم ساز و دایره محیطی را D می نامیم. نشان می دهیم که عمود منصف ضلع BC نیز از نقطه D می گذرد.

نیمساز $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} BD = CD$

چون فاصله D تا دو سر پاره خط BC به یک اندازه است پس D روی عمود منصف پاره خط BC قرار دارد.

۴- یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

$AB = a$

$CD = b$

$AD = BC = c$

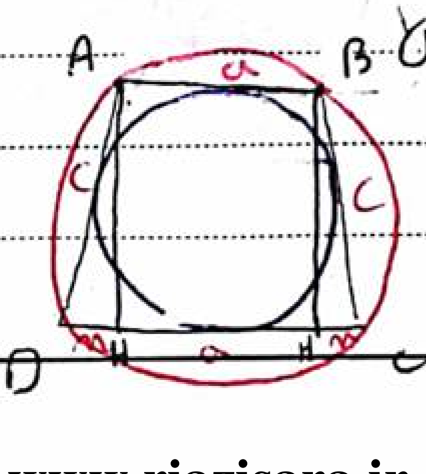
طبق قضیه $AB + CD = AD + BC \Rightarrow a + b = 2c \Rightarrow \frac{a+b}{2} = c$

$b = a + 2x \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$

فیثاغورس $A\hat{D}H$: $AH^2 + DH^2 = AD^2 \Rightarrow AH^2 + (\frac{b-a}{2})^2 = (\frac{a+b}{2})^2$

$\Rightarrow AH^2 + \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{4} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}$

$\Rightarrow AH^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow AH = \sqrt{ab}$



$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2} = \frac{(a+b)AH}{2}$

$\Rightarrow \frac{(a+b)}{2} \times \sqrt{ab}$

Subject

Date

@Riazi_mahmoodi

ه- اگر r_a ، r_b ، r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

و. به همین ترتیب اگر h_a ، h_b ، h_c اندازه سه ارتفاع باشند نشان دهید $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$

شکل صفحه ۲۶ کتاب

الف)

$S=S_{ABC}$ مساحت مثلث

$p=\frac{1}{2}P_{ABC}$ نصف محیط مثلث

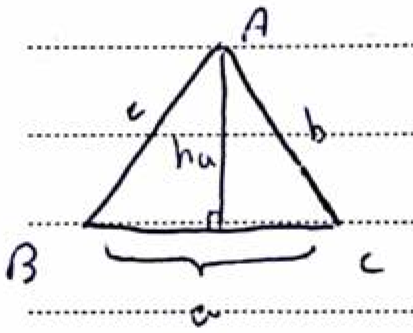
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}$$

$$=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r} \quad (1)$$

$$S=rp \Longrightarrow r=\frac{S}{p} \Longrightarrow \frac{1}{r}=\frac{p}{S} \Longrightarrow S=r_a(p-a)$$

$$r_a=\frac{S}{p-a} \Longrightarrow \frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}$$

ب)



$$S=\frac{1}{2}h_a \cdot a \Longrightarrow h_a=\frac{2S}{a} \Longrightarrow \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}$$

$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$$

$$h_c=\frac{2S}{c} \Longrightarrow \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$$

Subject

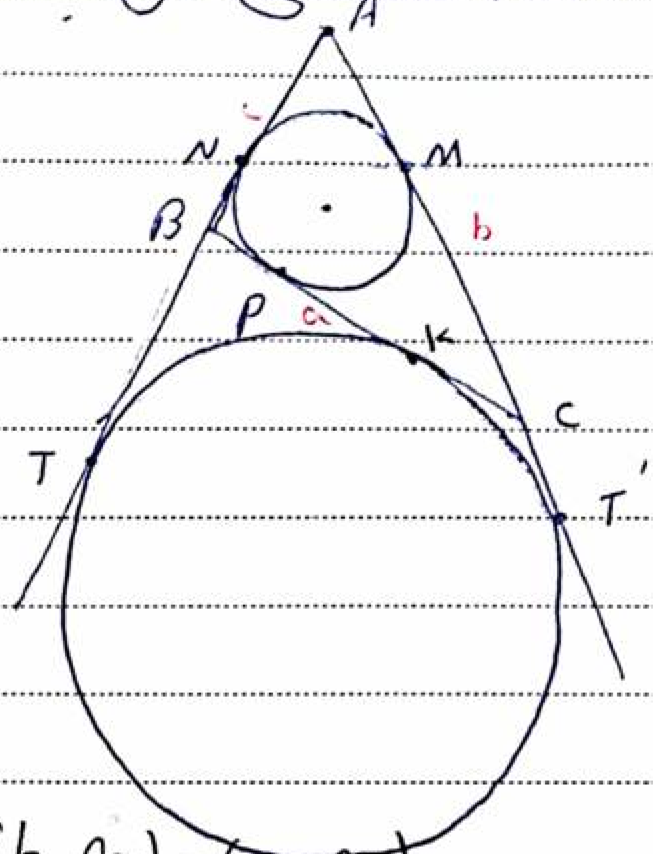
Date

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن m، N، P باشند و T، T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند نشان دهید

$Am = AN = p - a$

$BN = Bp = p - b \,,\, Cm = Cp = p - c$

$AT = AT' = p$



$Am = AN = p - a$

$2p = a + b + c$

$\Rightarrow 2p = Am + Cm + Bp + Cp + AN + BN$

$\Rightarrow 2p = 2Am + 2Cm + 2BN$

$\Rightarrow 2p = 2(Am + Cm + BN)$

$\Rightarrow p = (Am + Cm + BN)$

$\Rightarrow Am = p - Cm - BN \Rightarrow Am = p - (b - Am) - (c - AN)$

$\Rightarrow \cancel{Am} = p - b + \cancel{Am} - c + Am$

$\Rightarrow Am = b + c - p$

$\Rightarrow Am = 2p - a - p \Rightarrow Am = p - a$

$BN = Bp = p - b$

$BN + Bp = c - AN + a - Cp \xrightarrow{BN = Bp} 2BN = c + a - (AN + Cp)$

$\xrightarrow[Cp = Cm]{AN = Am} 2BN = c + a - (Am + Cm)$

$\Rightarrow 2BN = c + a - b + b - b$

$\Rightarrow 2BN = 2p - 2b$

$\Rightarrow 2BN = 2(p - b) \Rightarrow BN = p - b$

$AT = AT' = p$

$AT + AT' = c + BT + b + CT' \xrightarrow{AT = AT'} 2AT = b + c + (BT + CT')$

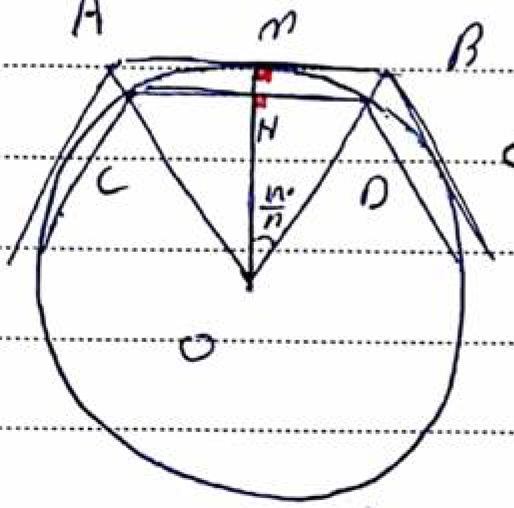
$\Rightarrow 2AT = b + c + (BK + CK)$

$\Rightarrow 2AT = b + c + a$

$\Rightarrow 2AT = 2p \Rightarrow AT = p$

Subject
Date
@Riazi_mahmoodi

۷. یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در یک شکل رسم کنید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلعی های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند آنگاه $CD = 2r\sin\frac{180}{n}$ و $AB = 2r\tan\frac{180}{n}$



شعاع $OD = r$, $OM = r$ شعاع

$O\hat{M}B : \hat{M} = 90^\circ \Longrightarrow \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{BM}{OM}$

$\Longrightarrow \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{AB}{2}}{r} \Longrightarrow AB = 2r\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

$O\hat{H}D : \hat{H} = 90^\circ \Longrightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{DH}{OH}$

$\Longrightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{CD}{2}}{r}$

$\Longrightarrow CD = 2r\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

۸. شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل مثلث MNP را ساخته ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH و TH' و TH'' را به ترتیب بر BC و ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱۰ می دانید مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

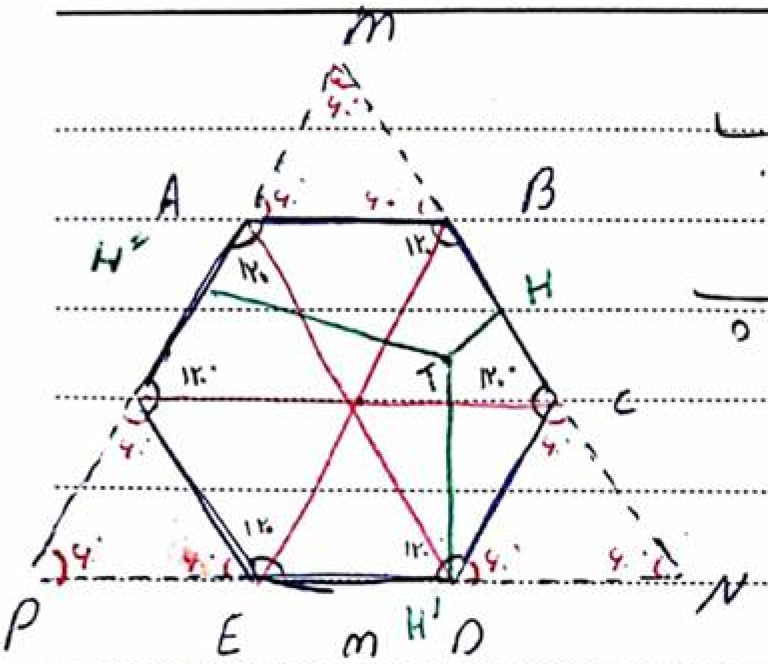
ت) مجموع مساحت های مثلث های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$

الف) مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی $= 4 \times 180 = 720$

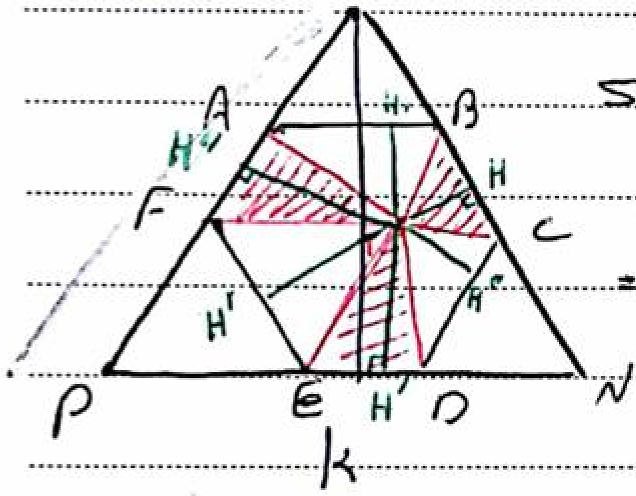
هر زاویه ۶ ضلعی منتظم $= \frac{720}{6} = 120^\circ$

Subject
Date



ب) $\dfrac{S_{\text{۶ضلعی}}}{S_{\text{مثلث}}} = \dfrac{6S_{\text{مثلث کوچک}}}{9S_{\text{مثلث}}} = \dfrac{2}{3}$

پ) $TH + TH' + TH'' = mk$



ت) $S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$

$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}$

$= \frac{1}{2} TH \times BC + \frac{1}{2} TH' \times \underbrace{DE}_{BC} + \frac{1}{2} TH'' \times \overset{BC}{AF}$

$= \frac{1}{2} BC(TH + TH' + TH'') = \frac{1}{2} BC \times mk$

$\dfrac{S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}}{S_{mNP}} = \dfrac{\frac{1}{2} BC \times mk}{\frac{1}{2} PN \times mk} = \dfrac{BC}{PN} = \dfrac{BC}{3BC} = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{PN = PE + ED + DN \Rightarrow PN = BC + BC + BC \Rightarrow PN = 3BC}$

۶) دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ مربع است چرا؟ عمودمنصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.
شکل صفحه ۳۱

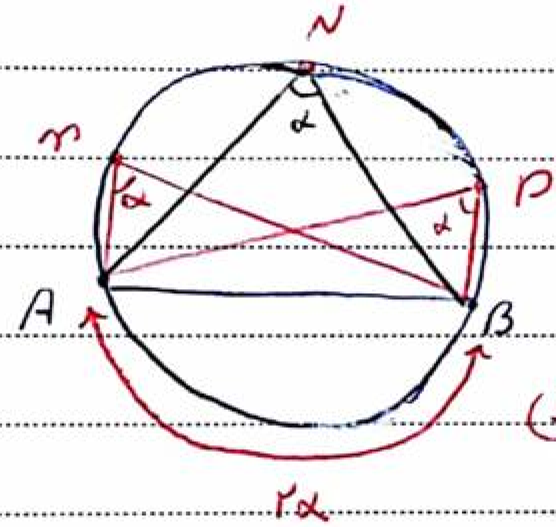
Subject
Date

$$\left.\begin{array}{l} OM = OD = ۳ \\ OA = OC = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ قطرها با هم برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند $\Rightarrow ABCD$ مستطیل است

همچنین قطرها علاوه بر نصف شدن عمود هم هستند پس $ABCD$ لوزی هم هستند داریم
یعنی $ABCD$ مربع است

طبق قضیه $\Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{PD} = \overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{BQ}$

طبق قضیه $\Rightarrow BM = AM = AN = DN = PD = PC = CQ = PC = ۶$ هشت ضلعی



زاویه محاطی

زاویه‌ی دید کمان شامل (محاطی)

کمان دیده شود

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \dots = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \alpha$$

@Riazi_mahmoodi