WWW.RIAZISARA.IR

سایت ریاضی سرا

فصل سوم

تبدیل

مروری بر نکات اصلی

۱- به تابعی که بین نقاط صفحه رابطه ایجاد می‌کند یک نگاشت می‌گوئیم. مثلاً $f(x,y)=(x+y,x-3y)$ یک نگاشت در صفحه‌ی R^2 می‌باشد بطوری‌که به هر نقطه مثل (x,y) نقطه‌ی $(x+y,x-3y)$ را نظیر می‌کند.

۲- به هر تابع یک به یک که بین مجموعه نقاط صفحه رابطه برقرار می‌کند، تبدیل می‌گوییم.

به‌عنوان مثال نگاشت $T(x,\ y)=(x-2\ ,\ y+x)$ یک تبدیل در صفحه R^2 است، که تحت آن تصویر نقطه $A(1\ ,\ 3)$ نقطه $A'(-1\ ,\ 4)$ می‌باشد.

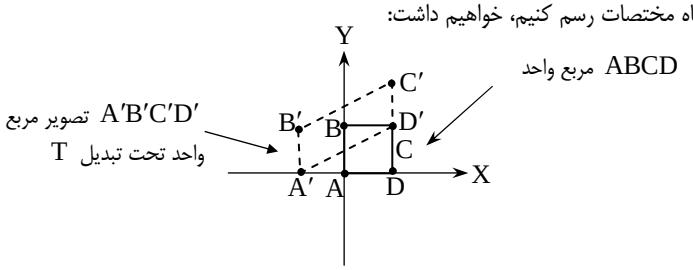
۳- به تبدیلی که فاصله بین نقاط را حفظ می‌کند، تبدیل ایزومتری می‌گوییم.

مثال: تصویر مربع واحد تحت تبدیل $T(x\ ,\ y)=(2x-1\ ,\ y+x)$ را به‌دست آورده و آن‌را رسم کنید.

راه‌حل: مربع به ضلع ۱ با رئوس $A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$, $D\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ مربع واحد است. تصاویر این نقاط تحت تبدیل T عبارتست از:

$$A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{T} A'\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \ ,\ B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \xrightarrow{T} B'\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \ ,\ C\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right. \xrightarrow{T} C'\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. \ ,\ D\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{T} D'\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$$

اگر این نقاط را در دستگاه مختصات رسم کنیم، خواهیم داشت:



همان‌طور که دیده می‌شود این تبدیل اندازه شکل را حفظ نکرده است پس این تبدیل ایزومتری نیست.

مثال: تصویر خط $2x-3y=1$ را تحت تبدیل $T(x,\ y)=(1-y\ ,\ 2x+2)$ به‌دست آورید.

راه‌حل اول: دو نقطه‌ی دلخواه از خط را به‌دست آورده تصاویر آن‌ها را تحت تبدیل T مشخص کرده معادله‌ی خطی را که از این نقاط تصویر می‌گذرد می‌نویسیم.

$$\left.\begin{array}{l} A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{T} A'\left|\begin{matrix}۰\\۶\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{T} B'\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow m_{A'B'} = \frac{y_{A'} - y_{B'}}{x_{A'} - x_{B'}} = \frac{۶-۰}{۰-۲} = -\frac{۶}{۲} = -۳$$

$$y - ۶ = -۳(x - ۰) \Rightarrow y + ۳x = ۶$$

راه‌حل دوم: با تغییر متغیر $۲x + ۲ = y'$ و $۱ - y = x'$ بین مختصات اولیه و مختصات تصویر رابطه برقرار می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۱ - y = x' \Rightarrow y = ۱ - x' \\ ۲x + ۲ = y' \Rightarrow x = \dfrac{y' - ۲}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{میدهیم}]{\text{در خط قرار}} ۲\left(\frac{y' - ۲}{۲}\right) - ۳(۱ - x') = ۱ \Rightarrow y' + ۳x' = ۶$$

مثال: مقدار b را چنان تعیین کنید که نگاشت $T(x, y) = (bx + b , y - b)$ ایزومتری باشد.

راه‌حل: دو نقطه‌ی دلخواه $A(۱ , ۱)$ و $O(۰ , ۰)$ را درنظر گرفته باید $OA = O'A'$ باشد.

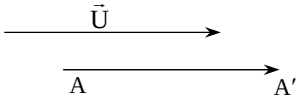
$$\left.\begin{array}{l} O\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{T} O'\left|\begin{matrix}b\\-b\end{matrix}\right. \\ A\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{T} A'\left|\begin{matrix}۲b\\۱-b\end{matrix}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow OA = \sqrt{۲} \ , \ A'O' = \sqrt{b^۲ + ۱}$$

$$OA = O'A' \Rightarrow \sqrt{b^۲ + ۱} = \sqrt{۲} \Rightarrow b^۲ + ۱ = ۲ \Rightarrow b = \pm ۱$$

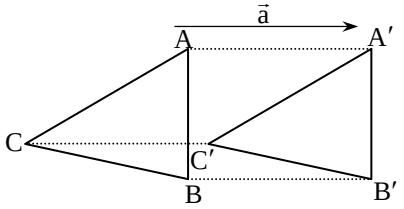
۴- انتقال: انتقال تبدیلی است که هر نقطه را تحت یک بردار به نقطه‌ای دیگر تبدیل می‌کند و ضابطه‌ی آن به‌صورت زیر است که در آن a و b اعداد حقیقی ثابتی هستند.

$$T(x, y) = (x + a , y + b)$$

به عنوان مثال انتقال یافته‌ی نقطه‌ی A تحت بردار $\vec{U}$ نقطه‌ی A' است هرگاه $\overrightarrow{AA'} = \vec{U}$ باشد.



مثال: در شکل زیر مثلث $A'B'C'$ انتقال‌یافته‌ی مثلث ABC تحت بردار $\vec{a}$ است.



۵- انتقال یک تبدیل ایزومتری است و شیب را حفظ می‌کند.

۶- ترکیب چند انتقال یک انتقال است.

تست: **کدام یک از تبدیل‌های زیر یک انتقال است؟**

۱) $T(x, y) = (x + ۱ , ۱ - y)$ **۲)** $T(x, y) = (y + ۲ , x - ۱)$

۳) $T(x, y) = (۲x + ۱ , ۱ + y)$ **۴)** $T(x, y) = (\frac{۲x + ۱}{۲} , \frac{۳y + ۵}{۳})$

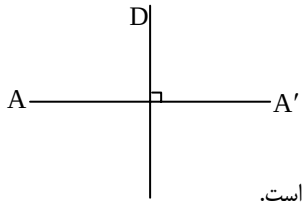
پاسخ: گزینه ۱ غلط است زیرا ضریب y غیر از یک است. (در ضابطه‌ی انتقال ضرایب x و y یک هستند.)
گزینه‌ی ۲ غلط است زیرا جای x و y با هم عوض شده‌اند.
گزینه‌ی ۳ غلط است زیرا ضریب x غیر از یک است.
گزینه‌ی ۴ درست است زیرا مطابق با ضابطه‌ی کلی یک انتقال است. در آن بردار انتقال $(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۳})$ می‌باشد.

تست: **اگر مثلث ABC با رئوس $A\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}۱\\۳\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$ و تبدیل $T(x,y)=(\frac{۲x+۱}{۲},\frac{۲y+۳}{۲})$ مفروض باشند. آن‌گاه مساحت تصویر این مثلث تحت تبدیل T کدام است؟**

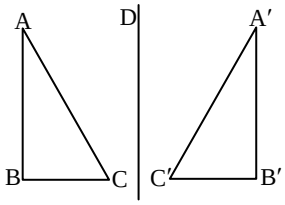
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: تبدیل T یک انتقال است پس مثلث ABC و تصویر آن برابرند. از طرفی مثلث ABC قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر ۱ می‌باشد، پس مساحت تصویر آن نیز ۱ است. بنابراین گزینه ۳ درست است.

۷- بازتاب: دو نقطه‌ی A و A' بازتاب یکدیگر نسبت به خط D هستند هرگاه D عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد.



مثال: در شکل زیر مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط D است.



۸- بازتاب نسبت به خط یک تبدیل ایزومتری است ولی لزومی ندارد شیب را حفظ کند. درضمن بازتاب نسبت به خط شکل را معکوس می‌کند به‌عبارتی ترتیب قرارگرفتن رئوس را عوض می‌کند.

۹- ضابطه‌ی چند بازتاب خاص عبارتست از:

الف) بازتاب نسبت به محور x ها: $T(x,y)=(x,-y)$

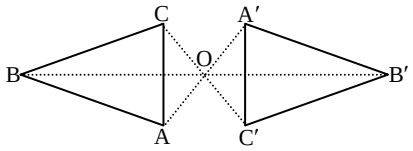
ب) بازتاب نسبت به محور y ها: $T(x,y)=(-x,y)$

ج) بازتاب نسبت به محور $y=x$: $T(x,y)=(y,x)$

د) بازتاب نسبت به محور $y=-x$: $T(x,y)=(-y,-x)$

۱۰- بازتاب نسبت به نقطه یک تبدیل ایزومتری است و شیب را حفظ می‌کند.

مثال: در شکل زیر مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به نقطه O می‌باشد.



۱۱- ضابطه‌ی بازتاب نسبت به مبدأ مختصات عبارتست از: $T(x, y) = (-x , -y)$.

۱۲- اگر نقاط A و B بازتاب همدیگر نسبت به خط d باشند، آن‌گاه d عمودمنصف پاره‌خط AB است.

۱۳- یک پاره‌خط دو محور تقارن دارد، یکی عمودمنصف پاره‌خط و دیگری خطی که پاره‌خط بر آن منطبق است.

۱۴- هر n ضلعی منتظم n محور تقارن دارد.

۱۵- هر خط بی‌نهایت محور تقارن دارد.

۱۶- پاره‌خط یک مرکز تقارن دارد.

۱۷- هر n ضلعی منتظم درصورتی که n زوج باشد یک مرکز تقارن و درصورتی که n فرد باشد مرکز تقارن ندارد.

تست: **اگر دو نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط d باشند آن‌گاه معادله‌ی خط d کدام است؟**

۱) $x+y=1$ **۲)** $x-y=1$ **۳)** $x+y+1=0$ **۴)** $x-y+1=0$

پاسخ: خط d عمودمنصف پاره‌خط AB است. پس شیب خط d عکس و قرینه‌ی شیب پاره‌خط AB و نقطه‌ی M وسط AB روی خط d قرار دارد.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0-2}{1+1} = -1 \Rightarrow m_d = 1 \ , \ M = (0 , 1)$$

$$y - 1 = 1\,(x - 0) \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

پس گزینه ۴ درست است.

تست: **تصویر بازتاب خط $2x - 4y = 3$ نسبت به خط $y = -x$ کدام است؟**

۱) $4x - 2y = 3$ **۲)** $4x + 2y = 3$ **۳)** $4x - 2y + 3 = 0$ **۴)** $4x + 2y + 3 = 0$

پاسخ: ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط $y = -x$ عبارتست از: $T(x, y) = (-y , -x)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x' = -y \Rightarrow y = -x' \\ y' = -x \Rightarrow x = -y' \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-y') - 4(-x') = 3 \Rightarrow 4x' - 2y' = 3$$

پس گزینه ۱ درست است.

تست: **یکی از نقاط تلاقی دو دایره‌ی C و C' نقطه‌ی A می‌باشد برای رسم خطی از نقطه‌ی A گذشته به‌طوری‌که در دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟**

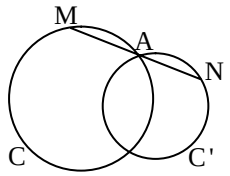
۱) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی کوچک‌تر.

۲) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز A.

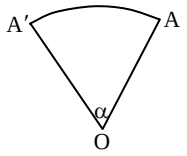
۳) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر.

۴) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز وسط خط‌المرکزین دو دایره.

پاسخ: با ترسیم شکل اگر MN خط موردنظر باشد دیده می‌شود، نقاط M و N بازتاب هم نسبت به نقطه‌ی A هستند، پس گزینه‌ی ۲ درست است.



WWW.RIAZISARA.IR سایت ریاضی سرا



۱۸- دوران: اگر نقطه‌ی A' دوران‌یافته نقطه‌ی A به مرکز O و با زاویه‌ی α باشد. آن‌گاه خواهیم داشت:

$$A\hat{O}A' = |\alpha| \ , \ OA = OA'$$

۱۹- دوران یک تبدیل ایزومتری است ولی لزومی ندارد شیب را حفظ کند.

۲۰- ترکیب چند دوران هم‌مرکز یک دوران است.

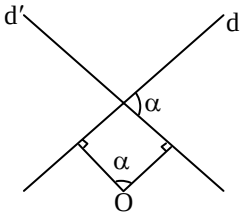
۲۱- ضابطه‌ی چند دوران خاص عبارتست از:

الف) دوران به مرکز مبدأ با زاویه‌ی ۹۰ درجه: $R(x\ ,\ y) = (-y\ ,\ x)$

ب) دوران به مرکز مبدأ با زاویه‌ی ۲۷۰ درجه یا ۹۰- درجه: $R(x\ ,\ y) = (y\ ,-x)$

ج) دوران به مرکز مبدأ با زاویه‌ی ۱۸۰ درجه: $R(x\ ,\ y) = (-x\ ,\ -y)$

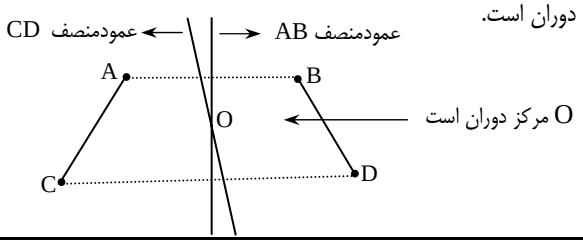
۲۲- اگر دو خط d و d' دوران یکدیگر به مرکز O و با زاویه‌ی α باشند آن‌گاه زاویه‌ی بین دو خط d و d' برابر α خواهد بود. البته زاویه‌ای که مرکز دوران در آن واقع نیست. درضمن مرکز دوران روی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط است.



۲۳- دوران ۱۸۰ درجه همان بازتاب نسبت به نقطه می‌باشد به همین علت دوران ۱۸۰ درجه شیب را حفظ می‌کند.

۲۴- در دوران ۱۸۰ درجه جهت دوران مهم نیست به عبارتی دوران با زاویه ۱۸۰ یا ۱۸۰- فرقی با هم ندارند.

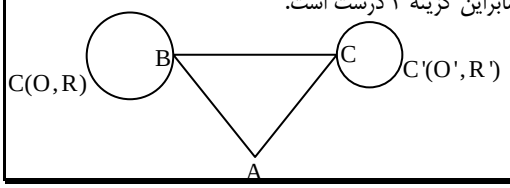
۲۵- اگر نقطه‌ی B دوران یافته نقطه A و نقطه‌ی C دوران یافته نقطه D باشند، آن‌گاه محل تلاقی عمودمنصف‌های AB و CD مرکز دوران است.



تست: **دو دایره‌ی $C(O\ ,\ R)$ و $C'(O'\ ,\ R')$ و نقطه‌ی A بیرون آن‌ها مفروضند برای رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به رأس A بطوریکه دو رأس بعدی در دوایر C و C' قرار داشته باشند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟**

۱) انتقال　　۲) دوران　　۳) تجانس　　۴) بازتاب

پاسخ: اگر مثلث ABC مثلث موردنظر باشد آن‌گاه نقطه‌ی B و C دوران‌های هم به مرکز A و زاویه‌ی ۹۰ درجه هستند پس تبدیل دوران در این مورد قابل استفاده است. بنابراین گزینه ۲ درست است.



تست: **دوران یافته‌ی خط $۳x - y = ۲$ به مرکز مبدأ و زاویه‌ی -۹۰ کدام است؟**

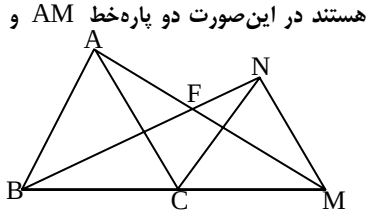
۱) $۳y - x = ۲$ **۲)** $۳y + x = ۲$ **۳)** $۳y - x + ۲ = ۰$ **۴)** $۳y + x + ۲ = ۰$

پاسخ: ضابطه‌ی دوران -۹۰ درجه به مرکز مبدأ عبارتست از: $T(x, y) = (y, -x)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x' = y \Rightarrow y = x' \\ y' = -x \Rightarrow x = -y' \end{array}\right\} \Rightarrow ۳(-y') - x' = ۲ \Rightarrow ۳y' + x' + ۲ = ۰$$

پس گزینه ۴ درست است.

تست: **در شکل مقابل دو مثلث ABC و MNC متساوی‌الاضلاع هستند در این‌صورت دو پاره‌خط AM و BN چه رابطه‌ای با هم دارند؟**



۱) دوران همدیگر به مرکز F با زاویه‌ی ۶۰ درجه هستند.

۲) دوران همدیگر به مرکز F با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه هستند.

۳) دوران همدیگر به مرکز C با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه هستند.

۴) دوران همدیگر به مرکز C با زاویه‌ی ۶۰ درجه هستند.

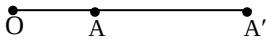
پاسخ: با توجه به تعریف تبدیل دوران داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} BC = AC \\ A\hat{C}B = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow[\text{به مرکز } C]{\text{تحت دوران ۶۰ درجه}} B \\ \left.\begin{array}{l} MC = NC \\ M\hat{C}N = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow M \xrightarrow[\text{به مرکز } C]{\text{تحت دوران ۶۰ درجه}} N \end{array}\right\} \Rightarrow AM \xrightarrow[\text{به مرکز } C]{\text{تحت دوران ۶۰ درجه}} BN$$

بنابراین گزینه ۴ درست است.

۲۶- نقطه‌ی A' مجانس نقطه‌ی A به مرکز O با نسبت k می‌باشد، هرگاه داشته‌باشیم:

$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$



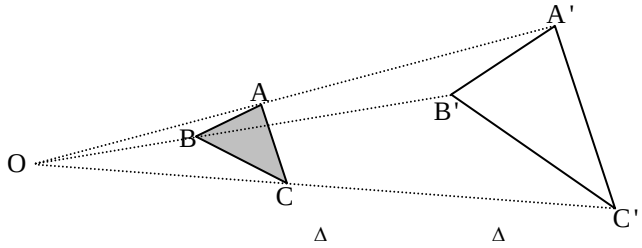
با توجه به تعریف تجانس نتیجه می‌گیریم نقاط A و A' و O در یک راستا قرار دارند.

۲۷- ضابطه‌ی تجانس به مرکز مبدأ و نسبت k عبارتست از: $T(x, y) = (kx, ky)$.

۲۸- اگر در تجانس k مثبت باشد، آن‌گاه تجانس را مستقیم و اگر k منفی باشد، آن‌گاه تجانس را معکوس می‌نامیم.

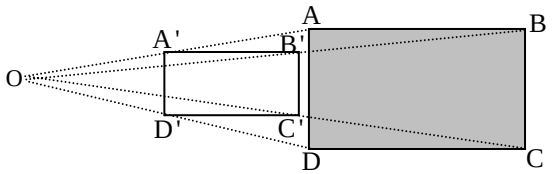
مثال: مجانس هریک از شکل‌های هاشورخورده‌ی زیر را به مرکز O با نسبت داده شده رسم کنید.

الف) $(K = ۲)$



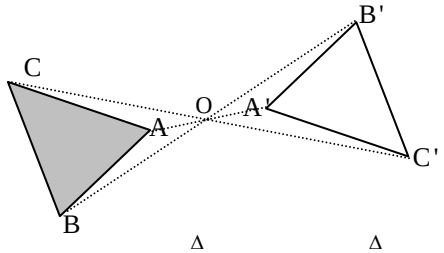
مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مجانس مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به مرکز O با نسبت ۲ می‌باشد.

ب) $\left(K=\frac{۳}{۴}\right)$



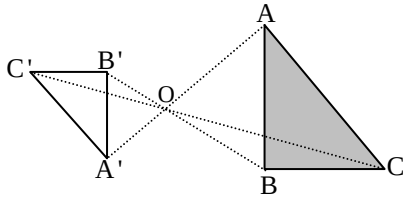
مستطیل $A'B'C'D'$ مجانس مستطیل $ABCD$ به مرکز O با نسبت $\frac{۳}{۴}$ می‌باشد.

ج) $(K=-۱)$



مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مجانس مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به مرکز O با نسبت ۱- می‌باشد.

د) $\left(K=-\frac{۱}{۲}\right)$



مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مجانس مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به مرکز O با نسبت $-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۲۹- تجانس تبدیل ایزومتری نیست ولی شیب را حفظ می‌کند.

۳۰- اگر دو شکل F و F' مجانس یکدیگر با نسبت k باشند، آن‌گاه این دو شکل با نسبت $|k|$ متشابه هستند.

۳۱- در دو شکل متجانس با نسبت k نسبت محیط‌ها برابر $|k|$ و نسبت مساحت‌ها $k^۲$ است.

۳۲- اگر در تجانس $|k|>۱$ باشد، آن‌گاه تجانس انبساط است.

۳۳- اگر در یک تجانس $|k|<۱$ باشد، آن‌گاه تجانس انقباض است.

۳۴- اگر در تجانس $|k|=۱$ باشد، آن‌گاه تجانس یک تبدیل ایزومتری است.

۳۵- اگر در تجانس $k=-۱$ باشد، تجانس همان بازتاب نسبت به نقطه یا دوران ۱۸۰ درجه است.

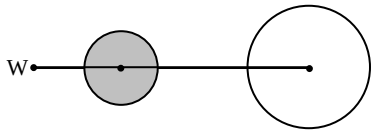
۳۶- ترکیب دو تجانس هم مرکز یک تجانس است. (با نسبتی معادل حاصل‌ضرب نسبت‌های تجانس).

۳۷- اگر نقطه‌ی A' مجانس نقطه‌ی A با نسبت k باشد، آن‌گاه A مجانس A' با نسبت $\frac{۱}{k}$ است.

۳۸- اگر نقاط نظیر در دو شکل متجانس را به هم وصل کنیم، خطوط حاصل از مرکز تجانس می‌گذرند.

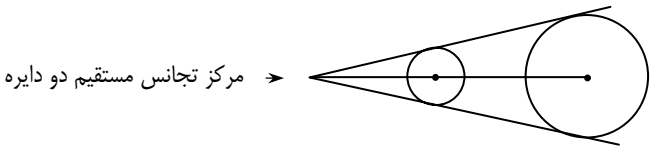
۳۹- برای رسم مجانس یک دایره کافیست مرکز دایره را مجانس‌یابی کرده به مرکز نقطه‌ی پیدا شده و $|k|$ برابر شعاع دایره‌ی اولیه دایره‌ای رسم کرد.

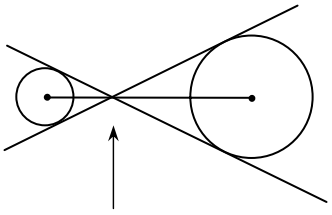
مثال: مجانس دایره‌ی هاشورخورده را به مرکز W با نسبت ۳ رسم کنید.



۴۰- دو چند ضلعی متشابه الزاما مجانس یکدیگر نیستند ولی با دوران یکی از آن‌ها می‌توان کاری کرد که اضلاع نظیر در آن‌ها موازی هم شوند و درنتیجه مجانس هم شوند.

ولی دو دایره در هر حال مجانس یکدیگر هستند و مرکز تجانس مستقیم آن‌ها محل تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره با خط‌المرکزین است و مرکز تجانس معکوس آن‌ها محل تلاقی مماس مشترک‌های داخلی دو دایره با خط‌المرکزین است. (درحالتی که دو دایره مساوی باشند، مجانس مستقیم یکدیگر نیستند.)





تست: **مجانس خط $۳x - ۲y = ۳$ به مرکز مبدأ و نسبت ۲ کدام است؟**

۱) $۳x - ۲y = ۶$ **۲)** $۶x - ۴y = ۶$ **۳)** $۶x - ۴y = ۳$ **۴)** $۳x - ۲y = \frac{۳}{۲}$

پاسخ: ضابطه‌ی تجانس با نسبت ۲ عبارتست از: $T(x, y) = (۲x, ۲y)$ داریم:

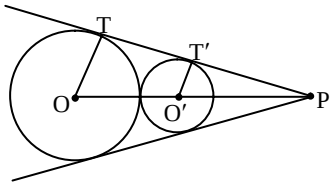
$$\left.\begin{array}{l} x' = ۲x \Rightarrow x = \frac{x'}{۲} \\ y' = ۲y \Rightarrow y = \frac{y'}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow ۳(\frac{x'}{۲}) - ۲(\frac{y'}{۲}) = ۳ \Rightarrow ۳x' - ۲y' = ۶$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

تست: **در دو دایره با شعاع‌های ۳ و ۵ و خط‌المرکزین ۸، فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم دو دایره تا مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟**

۱) ۱۲ **۲)** ۱۵ **۳)** ۱۸ **۴)** ۲۰

پاسخ: با توجه به این‌که مجموع دو شعاع برابر طول خط‌المرکزین است، نتیجه می‌گیریم دو دایره مماس خارجی هستند. اگر P محل تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره باشد، آن‌گاه P مرکز تجانس دو دایره خواهد بود، داریم:



$$OT \parallel O'T' \Rightarrow \frac{PO'}{PO} = \frac{O'T'}{OT} \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل از}} \frac{PO - PO'}{PO} = \frac{OT - O'T'}{OT}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{PO} = \frac{۵-۳}{۵} \Rightarrow PO = ۲۰$$

بنابراین گزینه ۴ درست است.

تست: **اگر $H(x,y)$ ضابطه تجانس به مرکز $O(۲,۳)$ با نسبت ۳ باشد آن‌گاه ضابطه H کدام است؟**

۱) $(۳x+۲, ۳y+۳)$ **۲)** $(۳x+۱, ۳y+۲)$ **۳)** $(۳x-۴, ۳y-۶)$ **۴)** $(۳x+۴, ۳y+۶)$

پاسخ: اگر $A'(x', y')$ مجانس نقطه $A(x,y)$ به مرکز $O(۲,۳)$ با نسبت ۳ باشد داریم.

$$\overrightarrow{OA'} = ۳\overrightarrow{OA} \Rightarrow A' - O = ۳(A - O) \Rightarrow A' = ۳A - ۲O \Rightarrow A' = ۳\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} - ۲\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}$$

$$A'\begin{vmatrix} ۳x-۴ \\ ۳y-۶ \end{vmatrix} \Rightarrow H(x,y) = (۳x-۴, ۳y-۶) \Rightarrow$$

پس گزینه ۳ درست است.

WWW.RIAZISARA.IR سایت ریاضی سرا

WWW.RIAZISARA.IR

سایت ریاضی سرا

فصل ۳ تستهای کنکور

سوالات چهار گزینه‌ای

۱- **کدام شکل هندسی یک مرکز تقارن و بیش از ۴ محور دارد؟ (سراسری-تجربی-۶۸)**

۱) پنج ضلعی منتظم ۲) شش ضلعی منتظم ۳) لوزی ۴) مربع

۲- **کدام یک از شکل‌های زیر محور تقارن ندارند؟ (آزاد-تجربی-۶۹)**

۱) ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ۲) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین

۳) پنج ضلعی منتظم ۴) مثلث متساوی‌الساقین

۳- **بین چند ضلعی‌های زیر کدام فقط یک محور تقارن دارد؟ (آزاد-ریاضی-۷۲)**

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) متوازی‌الاضلاع

۳) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ۴) مستطیل

۴- **خط به معادله‌ی $۲y+x=۲$ را تحت تجانس $D(x\ ,\ y)=(۲x\ ,\ ۲y)$ تبدیل و سپس نمودار حاصل را تحت بازتاب (قرینه) نسبت به خط $y=-x$ تصویر می‌کنیم، معادله‌ی تصویر کدام است؟ (سراسری-ریاضی-۷۸)**

۱) $۲x+y+۴=۰$ ۲) $۲x-y-۴=۰$

۳) $۲y-x-۴=۰$ ۴) $۲x+y+۱=۰$

۵- **در تجانس به مرکز O و نسبت k نقطه‌ی M' مجانس نقطه‌ی M می‌باشد، با همین مرکز و کدام نسبت تجانس، نقطه‌ی M مجانس M' خواهد بود؟ (سراسری-ریاضی-۶۸)**

۱) $۲k$ ۲) k ۳) $\frac{۱}{k}$ ۴) $\frac{k}{۲}$

۶- **ربع دایره و نیم‌دایره هریک چند محور تقارن دارند؟ (آزاد-تجربی-۷۳)**

۱) هردو یک محور تقارن دارند. ۲) ربع دایره محور تقارن ندارد و نیم‌دایره دو محور تقارن دارد.

۳) هردو دارای دو محور تقارن هستند. ۴) هردو محور تقارن ندارند.

۷- **در دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۶۸ درجه در صفحه خط d و تبدیل یافته‌اش در P متقاطعند. زاویه‌ی OP با خط d کدام است؟ (سراسری-ریاضی-۷۱)**

۱) ۶۸ ۲) ۵۶ ۳) ۴۸ ۴) ۲۲

۸- **مثلث‌های متشابه T و T' در یک صفحه قرار دارند با چه تغییر مکانی می‌توان این دو مثلث را متجانس یکدیگر ساخت؟(آزاد-ریاضی-۷۶)**

۱) یک بازتاب (تقارن) ۲) یک انتقال
۳) یک دوران ۴) یک تقارن و یک انتقال

۹- **تصویر خط به معادله‌ی $۳x+۴y=۵$ تحت انتقال $T(x\ ,\ y)=(x-۲\ ,\ y+a)$ از نقطه‌ی $(۵\ ,\ ۲)$ گذشته‌است، a کدام است؟ (سراسری-ریاضی-۷۹)**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰- **دو خط متمایز D و D' و نقطه‌ی A خارج آن مفروضند برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین با رأس A که دو سر قاعده‌ی آن بر روی هردو خط مفروض باشد، کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟ (سراسری-ریاضی-۷۹)**

۱) تجانس ۲) دوران ۳) بازتاب (دوران) ۴) انتقال

۱۱- **کدام یک از اشکال زیر مرکز تقارن ندارد؟ (آزاد-ریاضی-۷۰)**

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) ۱۵ ضلعی منتظم ۴) ۱۴ ضلعی منتظم

۱۲- **مکان هندسی اوساط پاره‌خط‌هایی که نقطه مفروض P را به نقاط مختلف یک دایره وصل می‌کند، عبارتست از: (آزاد-ریاضی-۶۷)**

۱) یک خط ۲) یک نیم‌خط ۳) دو خط ۴) یک دایره

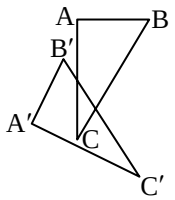
۱۳- **کدام گزینه درست نیست؟ (آزاد-ریاضی-۷۳)**

۱) نتیجه ترکیب دو بازتاب (تقارن) با محورهای متقاطع یک دوران است.
۲) نتیجه ترکیب دو بازتاب (تقارن) با محورهای موازی یک دوران است.
۳) نتیجه ترکیب دو بازتاب محوری که محورهای آن‌ها بر هم عمود است بازتاب نسبت به نقطه است.
۴) نتیجه ترکیب سه بازتاب نسبت به نقطه‌های متمایز یک بازتاب نسبت به نقطه است.

۱۴- **معادله‌ی قرینه‌ی خط Δ با معادله‌ی $y+۲x=۱$ نسبت به محور x ها کدام است؟ (آزمون پیش‌دانشگاهی- ریاضی ۷۶)**

۱) $۲y=x+۱$ ۲) $y=۲x-۱$ ۳) $۲y=x-۱$ ۴) $y=-۲x-۱$

۱۵- **در شکل مقابل مرکز دوران کجا قراردارد؟(دو مثلث دوران یافته هم هستند.) (آزمون‌پیش‌دانشگاهی- ریاضی ۷۷)**

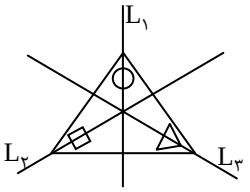


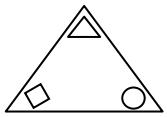
۱) داخل هر دو مثلث
۲) خارج هر دو مثلث
۳) فقط داخل مثلث ABC
۴) فقط داخل مثلث $A'B'C'$

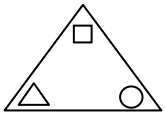
۱۶- **کدام شکل مرکز تقارن ندارد؟ (سراسری- ریاضی ۷۰)**

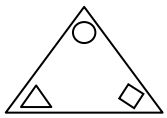
۱) مستطیل ۲) لوزی
۳) مثلث متساوی‌الاضلاع ۴) شش ضلعی منتظم

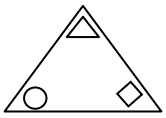
۱۷- اگر قرینه شکل مقابل را متوالیا نسبت به محور $L_۱$ و $L_۲$ و $L_۳$ به‌دست آوریم، نتیجه ترکیب سه تقارن محوری کدام است؟ (سراسری- ریاضی ۷۳)



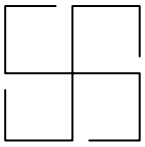
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۸- شکل زیر چند محور تقارن دارد؟ (سراسری- تجربی ۶۹)

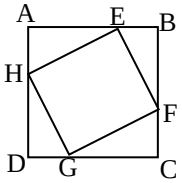


۱) صفر
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

۱۹- بین چند ضلعی‌های زیر کدام فقط یک محور تقارن دارد؟ (آزاد- ریاضی ۷۲)

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) متوازی‌الاضلاع
۳) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ۴) مستطیل

۲۰- در شکل مقابل ABCD مربع می‌باشد و $\frac{AH}{AD}=\frac{DG}{CD}=\frac{EB}{AB}=\frac{CF}{CB}=\frac{۱}{۴}$، در این‌صورت در مورد شکل فوق کدام گزینه صحیح است؟ (آزاد- تجربی ۷۲)



۱) محور تقارن ندارد و مرکز تقارن دارد.
۲) یک محور تقارن و مرکز تقارن دارد.
۳) چهار محور تقارن و مرکز تقارن دارد.
۴) چهار محور تقارن و مرکز تقارن ندارد.

۲۱- مجانس‌های یک شکل نسبت به یک مرکز و با دو نسبت مختلف k و k' خود نیز مجانس یکدیگر هستند، نسبت تجانس این دو شکل کدام می‌تواند باشد؟ (آزاد- تجربی ۷۵)

۱) $\frac{k}{k'}$ ۲) kk' ۳) $k+k'$ ۴) $۲kk'$

۲۲- اگر $A(۱\,,\,۵)$ و $C(۳\,,\,۷)$ دو رأس مقابل یک لوزی باشند، کدام خط محور تقارن لوزی است؟(آزاد- ریاضی ۷۷)

۱) $x+y=۸$ ۲) $x+y=۶$ ۳) $x+y=۱۰$ ۴) $x+y=-۸$

۲۳- تصویر خط $y=x$ تحت انتقال $T(x,\,y)=(x+۳\,,\,y+۲)$ کدام است؟ (آزاد- ریاضی ۷۸)

۱) $y=x-۱$ ۲) $y=x+۱$ ۳) $y=x$ ۴) $۲y=۳x$

۲۴- اگر $x = ۴$ را تحت زاویه‌های ۶۰° و ۱۲۰° و ۱۸۰° و ۲۴۰° و ۳۰۰° حول مبدأ مختصات دوران بدهیم مساحت محدود به شکل حاصل چه‌قدر است؟ (آزاد- ریاضی ۷۸)

۱) $۳۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲۴\sqrt{۳}$ ۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) $۴۸\sqrt{۳}$

۲۵- خط $x + ۲y = ۹$ را تحت تبدیل $T(x , y) = (x + ۲ , y - ۳)$ منتقل می‌کنیم. فاصله خط تبدیل یافته از مبدأ کدامست؟ (آزاد- ریاضی ۸۰)

۱) $\frac{۹\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۱۱\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$

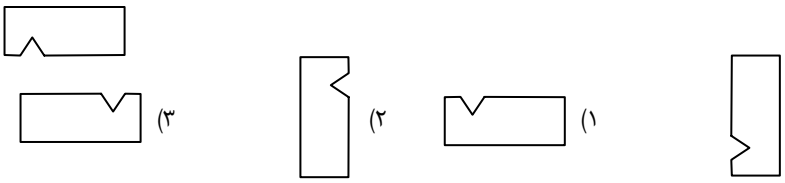
۲۶- در تجانسی به مرکز O و نسبت ۲ نقطه‌ی M' مجانس M است با همین مرکز و نسبت K نقطه M مجانس M' است K کدام است؟ (آزمایشی سنجش- ریاضی ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۷- مختصات نقطه‌ای که تصویر آن تحت تبدیل $T(x , y) = (x - ۲y , ۲x - y)$ به‌صورت $(-۱ , ۴)$ باشد، کدام است؟ (سراسری- ریاضی ۸۰)

۱) $(-۲ , ۳)$ ۲) $(۲ , ۳)$ ۳) $(۳ , ۲)$ ۴) $(۳ , -۲)$

۲۸- کدام گزینه از لغزش شکل مقابل در صفحه حاصل می‌شود؟ (سراسری- ریاضی ۸۰)



۱) ۲) ۳)

۲۹- شیب خط $y = mx$ پس از تبدیل $T(x , y) = (ax , by)$ کدام است؟ $a , b \neq ۰$ (آزاد- ریاضی ۸۱)

۱) $\frac{bm}{a}$ ۲) $\frac{am}{b}$ ۳) m ۴) $\frac{m}{a}$

۳۰- اگر فاصله خط $y = ax + b$ تا مبدأ مختصات k باشد، فاصله تبدیل یافته خط فوق تحت تبدیل $T(x , y) = (ax + b , ay + b)$ تا مبدأ کدام است؟ (آزاد- ریاضی ۸۱)

۱) $\frac{k + b}{\sqrt{a}}$ ۲) k ۳) $k + b$ ۴) $\frac{k}{\sqrt{a}}$

۳۱- معادله‌ی تصویر خط $۲x - ۳y = ۴$ تحت تبدیل $T(x , y) = (x - ۲ , y + ۳)$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش- ریاضی ۸۱)

۱) $۳y - ۲x = ۹$ ۲) $۳y - ۲x = ۳$ ۳) $۲y - ۳x = ۴$ ۴) $۲y - ۳x = ۶$

۳۲- به‌ازای کدام مقدار m دو نقطه $(m - ۱ , m)$ و $(۳ , ۴)$ قرینه نسبت به نقطه $(-۱ , ۲)$ می‌باشند؟ (آزمایشی سنجش- ریاضی ۸۱)

۱) صفر ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) هیچ مقدار

۳۳- تبدیل یافته نقطه $(۳ , ۴)$ تحت ماترس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ نقطه M است. مختصات دوران یافته M به اندازه ۹۰° حول مبدأ کدام است؟ (آزمایشی سنجش- ریاضی ۸۱)

۱) $(-۱۷ , -۱)$ ۲) $(۱۷ , ۱)$ ۳) $(-۱۷ , ۱)$ ۴) $(۱۷ , -۱)$

۳۴- خط به معادله $۲y - ۳x = ۶$ را تحت زاویه $\frac{\pi}{۲}$ حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم، معادله تصویر آن کدام است؟ (آزمایشی سنجش- ریاضی ۸۱)

۱) $۲x + ۳y = -۶$ ۲) $۲x + ۳y = ۶$ ۳) $۲x - ۳y = ۶$ ۴) $۲x - ۳y = -۶$

۳۵- دو نقطه‌ی $(-۲ , ۳)$ و (a , b) نسبت به خط $y = ۲$ قرینه‌اند، $a + b$ کدام است؟ (سراسری- انسانی ۸۱)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۶- خط $y = ۲x + ۱$ را تحت تبدیل $T(x , y) = (x + ۱ , y + k)$ منتقل کرده‌ایم، معادله شکل حاصل $y = ۲x - ۱$ است، k کدام است؟ (آزاد- ریاضی۸۲)

۱) $k = -۴$ ۲) $k = ۰$ ۳) $k = -۲$ ۴) $k = ۲$

۳۷- خط $y = ۲x$ را یک بار تحت تبدیل $T_۱(x , y) = (x + ۱ , y + ۱)$ و یک بار تحت تبدیل $T_۲(x , y) = (\frac{x}{۲} , \frac{y}{۲})$ منتقل می‌کنیم فاصله بین دو خط تبدیل یافته چه‌قدر است؟ (آزاد- ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

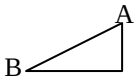
۳۸- تبدیل نقطه (x , y) به کدام صورت ترکیبی از بازتاب و انتقال است؟ (آزمایشی سنجش- ریاضی ۸۲)

۱) $(-y + ۱ , x - ۲)$ ۲) $(-y + ۲ , -x - ۱)$

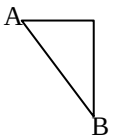
۳) $(y + ۲ , -x + ۱)$ ۴) $(۲y + ۲ , -x + ۱)$

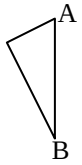
۳۹- خط به معادله‌ی $۲x - ۳y = ۵$ را حول مبدأ به اندازه‌ی ۲۷۰ درجه دوران می‌دهیم، تبدیل یافته‌ی آن از کدام نقطه می‌گذرد؟ (آزمایشی سنجش- ریاضی ۸۲)

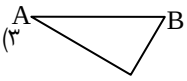
۱) $(-۱ , -۱)$ ۲) $(-۲ , -۱)$ ۳) $(-۱ , -۲)$ ۴) $(۱ , -۱)$

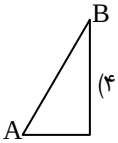
۴۰- با ترکیب یک دوران و یک انتقال شکل 

به کدام شکل تبدیل می‌شود؟ (آزمایشی سنجش- ریاضی-۸۲)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۱- تحت یک بازتاب نسبت به خط، نقطه $(۱ , -۲)$ روی نقطه $(۵ , ۲)$ تصویر می‌شود، تصویر کدام نقطه تحت این بازتاب نقطه $(۴ , ۳)$ است؟ (سراسری- ریاضی ۸۳)

۱) $(۰ , ۱)$ ۲) $(۰ , -۱)$ ۳) $(۱ , ۰)$ ۴) $(-۱ , ۰)$

۴۲- کدام تبدیل زیر ایزومتری است؟ (سراسری- ریاضی ۸۶)

۱) $D(x\ ,\ y)=(۲x\ ,\ ۲y)$ ۲) $D(x\ ,\ y)=(x+y\ ,\ x-y)$

۳) $D(x\ ,\ y)=(-y+۲\ ,\ x-۱)$ ۴) $D(x\ ,\ y)=(۲x\ ,\ \frac{۱}{۲}y)$

۴۳- تحت یک بازتاب نقطه $(-۳,-۱)$ به نقطه $(۳,۵)$ تصویر شده معادله محور تقارن کدام است؟ (آزمایشی سنجش-ریاضی-۸۴)

۱) $x+y=۲$ ۲) $x+۲y=۴$ ۳) $x-y=۲$ ۴) $۲x-y=۱$

۴۴- خط به معادله $۳x+۲y-۶=۰$ تحت دوران با زاویه ۹۰- درجه به مرکز مبدأ مختصات به کدام خط تبدیل می‌شود؟ (آزمایشی سنجش-ریاضی-۸۴)

۱) $۲x-۳y+۶=۰$ ۲) $۲x-۳y-۶=۰$ ۳) $۲x+۳y+۶=۰$ ۴) $۲x+۳y-۶=۰$

۴۵- تحت یک تبدیل، خط مفروض، یا تبدیل یافته آن، موازی است. در کدام حالت، نوع تبدیل کاملاً مشخص است؟ (سراسری-ریاضی-۸۵)

۱) تجانس ۲) دوران ۳) بازتاب نسبت به نقطه ۴) بازتاب نسبت به خط

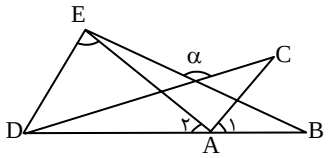
۴۶- دو نقطه $A(۳,-۱)$ و $B(۱,۵)$ را تحت زاویه ۴۵° حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. زاویه AB با $A'B'$ تبدیل یافته آن چند درجه است؟ (آزمایشی سنجش-ریاضی-۸۵)

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۴۷- عرض از مبدأ قرینه‌ی خط $۲y-۳x=۱۲$ نسبت به نقطه‌ی $(۲,-۳)$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش-ریاضی-۸۶)

۱) ۱۸- ۲) ۱۴- ۳) ۱۲- ۴) ۹-

۴۸- در شکل مقابل $AB=AC$ و $AD=AE$ و $C\hat{A}B=۵۰^\circ$ و $A\hat{E}D=۶۵^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی α چند درجه است؟ (سراسری- ریاضی ۸۷)



۱) ۱۱۵

۲) ۱۲۰

۳) ۱۲۵

۴) ۱۳۰

WWW.RIAZISARA.IR

سایت ریاضی سرا

فصل ۳ تستهای کنکور

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی(۲)

به نکته‌ی ۱۴ و ۱۷ توجه کنید.

۲- گزینه‌ی (۱)

در ذوزنقه متساوی‌الساقین خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند محور تقارن است و در پنج‌ضلعی منتظم پنج محور تقارن وجود دارد (خطوط که هر رأس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند محور تقارن است) و در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده محور تقارن است.

۳- گزینه‌ی (۳)

مثلث متساوی‌الاضلاع سه محور تقارن دارد و متوازی‌الاضلاع محور تقارن ندارد و مستطیل دو محور تقارن دارد و ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین یک محور تقارن دارد.

۴- گزینه‌ی (۱)

با تغییر متغیر $۲x = x'$ و $۲y = y'$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{x'}{۲} \\ y = \frac{y'}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{قرا رمی‌دهیم}]{\text{در خط } ۲y + x = ۲} ۲(\frac{y'}{۲}) + \frac{x'}{۲} = ۲ \text{ یا } ۲y + x = ۴$$

از طرفی ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط $y = -x$ عبارتست از: $T(x , y) = (-y , -x)$ با تغییر متغیر $x' = -y$ و $y' = -x$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x' \\ x = -y' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{قرا رمی‌دهیم}]{\text{در خط } ۲y + x = ۴} -۲x' - y' = ۴ \Rightarrow ۲x' + y' = -۴ \text{ یا } ۲x + y + ۴ = ۰$$

۵- گزینه‌ی(۳)

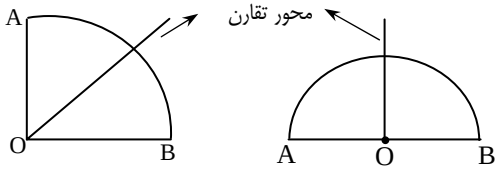
اگر M' مجانس M به مرکز O با نسبت K باشد، داریم:

$$\overrightarrow{OM'} = K\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{۱}{K}\overrightarrow{OM'}$$

پس نقطه‌ی M' مجانس M به مرکز O با نسبت $\frac{۱}{K}$ است.

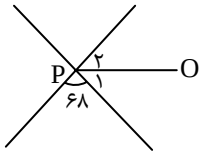
۶- گزینه‌ی (۱)

در هر شکل نیمساز زاویه‌ی AOB محور تقارن است.



۷- گزینه‌ی (۲)

با توجه به نکته ۲۲ و شکل مقابل داریم:



$$\text{زاویه‌ی بین دو خط} = ۶۸ \Rightarrow \hat{P}_۱ + \hat{P}_۲ = ۱۸۰ - ۶۸ = ۱۱۲ \Rightarrow \hat{P}_۱ = \frac{۱۱۲}{۲} = ۵۶$$

۸- گزینه‌ی (۳)

دو مثلث متشابه درصورتی متجانس یکدیگرند که اضلاعشان نظیر به نظیر موازی باشند درصورتی که اضلاع دو شکل متشابه T و T' موازی نباشند با دوران می‌توان این حالت را ایجاد کرد.

۹- گزینه‌ی (۴)

ابتدا انتقال یافته خط فوق را به‌دست می‌آوریم، برای این‌کار با تغییر متغیر $y + a = y'$ و $x - ۲ = x'$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + ۲ \\ y = y' - a \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{قرا رمی‌دهیم}]{\text{در خط } ۳x + ۴y = ۵} ۳(x' + ۲) + ۴(y' - a) = ۵ \Rightarrow ۳x' + ۴y' - ۴a + ۱ = ۰$$

یا

$$۳x + ۴y - ۴a + ۱ = ۰$$

نقطه‌ی $(۵, ۲)$ در خط به‌دست آمده صدق می‌کند. $۱۵ + ۸ - ۴a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۶$.

راه حل دوم: نقطه‌ای را تعیین می‌کنیم که تحت تبدیل T به نقطه‌ی $(۵, ۲)$ تصویر می‌شود. سپس نقطه بدست آمده باید در خط $۳x + ۴y = ۵$ صدق کند.

$$T(x, y) = (۵, ۲) \Rightarrow$$

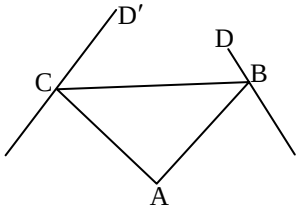
$$(x - ۲, y + a) = (۵, ۲) \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۵ \Rightarrow x = ۷ \\ y + a = ۲ \Rightarrow y = ۲ - a \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه اولیه } (۷, ۲ - a)$$

$$(۷, ۲ - a) \in ۳x + ۴y = ۵ \text{ خط} \Rightarrow ۲۱ + ۸ - ۴a = ۵ \Rightarrow a = ۶$$

۱۰- گزینه‌ی (۲)

اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه $AB = AC$ و $A = ۹۰$ پس نقطه‌ی C دوران یافته‌ی نقطه‌ی B به مرکز A و زاویه‌ی ۹۰ درجه است.

بنابراین باید خط D را به مرکز A و زاویه‌ی ۹۰ درجه دوران داد تا D' را در نقطه‌ی C قطع کند و بدین‌ترتیب رئوس مثلث ABC ایجاد شوند.

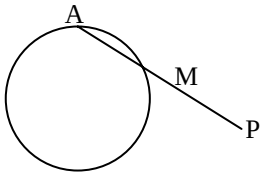


۱۱- گزینه‌ی(۳)

با توجه به نکته ۱۷ هر n ضلعی منتظم درصورتی که n فرد باشد مرکز تقارن ندارد.

۱۲- گزینه‌ی (۴)

اگر A نقطه‌ی دلخواهی روی دایره باشد و M وسط PA، آن‌گاه $PM = \frac{۱}{۲}PA$ پس M مجانس A با نسبت $\frac{۱}{۲}$ به مرکز P خواهد بود به‌همین ترتیب مشخص می‌شود هر نقطه دیگر دایره نیز دارای این ویژگی است پس مکان هندسی نقطه‌ی M، مجانس دایره‌ی فوق به مرکز P با نسبت $\frac{۱}{۲}$ است که خود دایره است.



۱۳- گزینه‌ی(۲)

زیرا ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است.

۱۴- گزینه‌ی(۲)

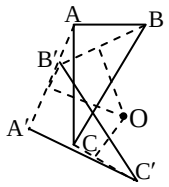
در تقارن نسبت به محور x ها، مختصات طول نقطه ثابت مانده و فقط عرض نقطه قرینه می‌شود. پس کافیست به‌جای (y) مقدار $(-y)$ را قرار دهیم، پس داریم:

$$y + ۲x = ۱ \Rightarrow -y + ۲x = ۱ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

۱۵- گزینه‌ی(۲)

یادآوری: هرگاه A' دوران یافته نقطه‌ی A نسبت به مرکز O باشد، A و A' از O به یک فاصله‌اند $(OA = OA')$. در این‌صورت نقطه O روی عمودمنصف AA' واقع است.

مرکز تقارن باید روی عمودمنصف‌های AA' و BB' و CC' واقع باشد که اگر این عمودمنصف‌ها را رسم کنیم محل تلاقی آن‌ها در خارج مثلث‌ها خواهد بود. (طبق شکل)



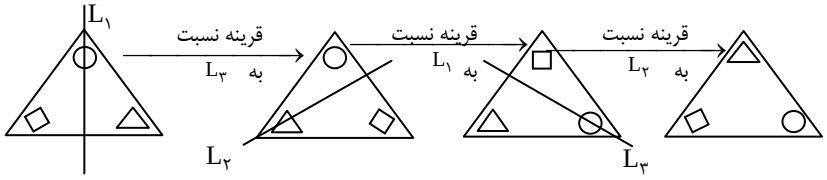
۱۶- گزینه‌ی(۳)

در مستطیل، لوزی و شش‌ضلعی منتظم محل برخورد اقطار، مرکز تقارن اشکال است. فقط مثلث متساوی‌الاضلاع دارای مرکز تقارن نیست.

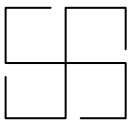
نکته: اگر یک n ضلعی منتظم دارای مرکز تقارن باشد، n حتما عددی زوج می‌باشد.

۱۷- گزینه‌ی (۱)

با سه تقارن محوری به‌ترتیب خواهیم داشت:



۱۸- گزینه‌ی (۱)

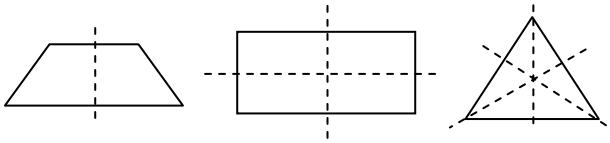


با توجه به شکل می‌توان دریافت که این شکل دارای محور تقارن نیست و فقط یک مرکز تقارن دارد.

باید توجه داشت که محور تقارن، خطی است که شکل را به دو نیمه متقارن تقسیم می‌کند و قرینه هر نقطه از شکل نسبت به خط تقارن، منطبق بر نقطه متناظر آن در نیمه دیگر می‌باشد.

۱۹- گزینه‌ی (۳)

در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع مثلث، محور تقارن شکل هستند. مستطیل نیز دو محور تقارن عمود بر طول و عرض دارد. متوازی‌الاضلاع فاقد محور تقارن است. تنها ذوزنقه متساوی‌الساقین یک محور تقارن عمود بر قاعده‌های آن دارد.



۲۰- گزینه‌ی (۱)

با توجه به نسبت فوق می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی EFGH مربع است. محور تقارن مربع ABCD، محور تقارن مربع EFGH نیست، بنابراین شکل محور تقارن ندارد.از طرفی محل برخورد اقطار دو مربع بر هم منطبق است، بنابراین مرکز تقارن دو شکل بر هم منطبق بوده و در نتیجه، شکل، مرکز تقارن دارد.

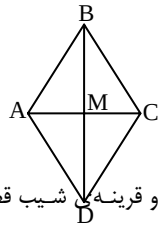
۲۱- گزینه‌ی (۱)

هرگاه A' و A'' مجانس‌های A به مرکز O و نسبت‌های k و k' باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OA'' = k'.OA \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \frac{OA'}{OA''} = \frac{k}{k'} \Rightarrow OA' = \frac{k}{k'}OA''$$

بنابراین A' نیز مجانس A'' به مرکز به O و نسبت $\frac{k}{k'}$ است.

۲۲- گزینه‌ی (۱)



می‌دانیم در لوزی، دو قطر محور تقارن هستند.

معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی A و C می‌گذرد به‌صورت مقابل است:

$$\text{قطر } AC \quad y - y_A = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_A) \Rightarrow y - ۵ = (x - ۱) \Rightarrow y = x + ۴$$

از طرفی قطر BD از وسط AC گذشته و بر آن عمود است بنابراین شیب قطر BD عکس و قرینه شیب قطر AC می‌باشد.

$$BD \perp AC \Rightarrow m_{BD} \times m_{AC} = -۱ \Rightarrow m_{BD} = \frac{-۱}{m_{AC}} = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{۲} = ۲ \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{۲} = ۶ \end{cases} \Rightarrow \text{معادله } BD : \begin{array}{l} y - y_M = -۱ \times (x - x_M) \\ y - ۶ = -۱\,(x - ۲) \Rightarrow y + x = ۸ \end{array}$$

تذکر: البته برای حل تستی تنها به دست آوردن مختصات وسط AC کافی است. زیرا با به دست آوردن $M = (۲,۶)$ می‌توان به راحتی دید که تنها این مختصات در گزینه‌ی (۱) صدق می‌کند.

۲۳- گزینه‌ی (۱)

کافی است تصویر دو نقطه از خط را پیدا کرده، معادله خط گذرنده از دو نقطه تصویر را بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} A(۱,۱): T(۱,۱)=(۱+۳,۱+۲)=(۴,۳)=A' \\ B(۰,۰): T(۰,۰)=(۰+۳,۰+۲)=(۳,۲)=B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{معادله خط } A'B'}$$

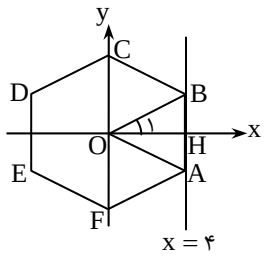
$$y-y_{A'}=\frac{y_{B'}-y_{A'}}{x_{B'}-x_{A'}}(x-x_{A'}) \Rightarrow y-۳=\frac{-۱}{-۱}(x-۴) \Rightarrow y=x-۱$$

می‌توانیم از روش تغییر متغیر استفاده کنیم. در این صورت داریم.

$$\begin{cases} x'=x+۳ \Rightarrow x=x'-۳ \\ y'=y+۲ \Rightarrow y=y'-۲ \end{cases} \Rightarrow y'-۲=x'-۳ \Rightarrow y'=x'-۱$$

۲۴- گزینه‌ی (۱)

شکل حاصل یک شش‌ضلعی منتظم می‌باشد، پس مساحت آن مساوی با شش برابر مساحت مثلث OAB است.



$$\hat{O}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱=\frac{\hat{O}}{۲}=۳۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{BH}{OH}=tg۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ x_H=۴ \Rightarrow OH=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow BH=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۴=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$AB=۲BH=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow S_{OAB}=\frac{۱}{۲}OH\times AB=\frac{۱}{۲}\times ۴\times\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_{ABCDEF}=۶\times S_{ABC}=۶\times\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}=۳۲\sqrt{۳}$$

۲۵- گزینه‌ی (۳)

از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} x'=x+۲ \Rightarrow x=x'-۲ \\ y'=y-۳ \Rightarrow y=y'+۳ \end{array}\right\} \Rightarrow x+۲y=۹ \Rightarrow (x'-۲)+۲(y'+۳)=۹ \Rightarrow$$

$x'+۲y'-۵=۰$: معادله خط تبدیل یافته

فاصله نقطه $(x_۰, y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با: $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ لذا داریم:

$$OH=\frac{|-۵|}{\sqrt{۱+۴}}=\sqrt{۵}$$

۲۶- گزینه‌ی (۱)

نقطه‌ی M' مجانس نقطه‌ی M به مرکز O با نسبت ۲ می‌باشد داریم.

$$\overrightarrow{OM'}=۲\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{OM'}$$

پس M مجانس M' به مرکز O با نسبت $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۷- گزینه‌ی (۳)

$$T(x\ ,\ y)=(x-۲y\ ,\ ۲x-y)$$

$$T(x\ ,\ y)=(-۱\ ,\ ۴)\Rightarrow\begin{cases}x-۲y=-۱\\۲x-y=۴\end{cases}\Rightarrow x=۳\ ,\ y=۲\Rightarrow \text{نقطه}\ (۳\ ,\ ۲)$$

۲۸- گزینه‌ی (۴)

مطابق گزینه‌ها، گزینه‌ی ۴ با یک دوران ۱۸۰ از شکل فوق به‌دست می‌آید. درضمن برای رسیدن به سایر گزینه‌ها باید از صفحه خارج شد پس آن‌ها موردنظر نیستند.

۲۹- گزینه‌ی(۱)

از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}ax=x'\Rightarrow x=\dfrac{x'}{a}\\by=y'\Rightarrow y=\dfrac{y'}{b}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{در معادله خط قرار می‌دهیم}}\frac{y'}{b}=m(\frac{x'}{a})\Rightarrow y'=\frac{bm}{a}x'$$

بنابراین شیب خط تصویر برابر $\frac{bm}{a}$ می‌باشد.

۳۰- گزینه‌ی (۲)

ابتدا معادله‌ی تبدیل یافته‌ی خط را تحت تبدیل T به‌دست می‌آوریم. از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}ax+b=x'\Rightarrow x=\dfrac{x'-b}{a}\\ay+b=y'\Rightarrow y=\dfrac{y'-b}{a}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{در معادله خط قرار می‌دهیم}}$$

$$\frac{y'-b}{a}=a(\frac{x'-b}{a})+b\Rightarrow y'=ax'+b$$

یعنی تبدیل یافته‌ی خط بر خودش منطبق است، بنابراین فاصله‌ای این خط نیز از مبدأ برابر k خواهد بود.

۳۱- گزینه‌ی(۱)

از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}x'=x-۲\\y'=y+۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'+۲\\y=y'-۳\end{cases}\Rightarrow ۲(x'+۲)-۳(y'-۳)=۴$$

$$\Rightarrow ۲x'-۳y'+۱۳=۴\Rightarrow ۲x'-۳y'=-۹\Rightarrow ۳y'-۲x'=۹$$

۳۲- گزینه‌ی (۴)

باید $(-۱\ ,\ ۲)$ وسط آن دو نقطه باشد:

$$\begin{cases}\dfrac{(m-۱)+۳}{۲}=-۱\\\dfrac{m+۴}{۲}=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-۴\\m=۰\end{cases}$$

باید از جواب‌های بدست آمده اشتراک بگیریم که بین آن‌ها اشتراکی وجود ندارد پس هیچ مقداری برای m نیست.

۳۳- گزینه‌ی (۱)

می‌دانیم در دوران ۹۰+ حول مبدأ نقطه‌ی (x , y) به نقطه‌ی $(-y , x)$ تبدیل می‌شود.
تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی M تحت ماتریس فوق عبارتست از:

$$M=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\ ۱۷\end{bmatrix}=M'$$

بنابراین دوران یافته M' به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$M'=(-۱ , ۱۷)\rightarrow(-۱۷ , -۱)$$

۳۴- گزینه‌ی (۱)

ضابطه دوران ۹۰ درجه به صورت $R(x,y)=(-y,x)$ می‌باشد از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}x'=-y\\ y'=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x'\\ x=y'\end{cases}\xrightarrow[\text{معادله خط داریم}]{\text{با جایگذاری در}}۲(-x')-۳(y')=۶\Rightarrow$$

$$-۲x'-۳y'=۶\Rightarrow ۲x'+۳y'=-۶$$

۳۵- گزینه‌ی(۴)

خط $y=k$ موازی محور x ها می‌باشد، اگر A' قرینه‌ی A نسبت به $y=k$ باشد، آن‌گاه نقطه H وسط AA' دارای مختصات به صورت (x,k) خواهد بود پس $A'(x,۲k-y)$.

$$A\left|\begin{matrix}۳\\ -۲\end{matrix}\right.\xrightarrow[\text{خط } y=۲]{\text{قرینه نسبت به}}A'\left|\begin{matrix}۳\\ ۲\times۲-(-۲)\end{matrix}\right.\Rightarrow A'\left|\begin{matrix}۳\\ ۶\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right.\Rightarrow a+b=۹$$

۳۶- گزینه‌ی(۲)

$$y=۲x+۱\qquad T(x , y)=(x+۱ , y+k)$$

$$\begin{cases}x'=x+۱\\ y'=y+k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'-۱\\ y=y'-k\end{cases}\Rightarrow y'-k=۲(x'-۱)+۱\Rightarrow y'=۲x'-۱+k$$

با مقایسه خط $y=۲x-۱$ نتیجه می‌گیریم:

$$-۱+k=-۱\Rightarrow k=۰$$

۳۷- گزینه‌ی (۴)

به روش تغییر متغیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases}x+۱=x'\\ y+۱=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'-۱\\ y=y'-۱\end{cases}\Rightarrow y'-۱=۲(x'-۱)\Rightarrow y'=۲x'-۱$$

حالا تصویر خط $y=۲x$ را تحت تبدیل $T_۲$ بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{۲}=x''\\ \dfrac{y}{۲}=y''\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲x''\\ y=۲y''\end{cases}\Rightarrow ۲y''=۴x''\Rightarrow y''=۲x''$$

پس خطوط $y=۲x-۱$ و $y=۲x$ تبدیل‌های یافته‌های خط داده شده هستند و فاصله این دو خط موازی برابر است با:

$$\text{فاصله}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

توجه کنید که فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\text{فاصله}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۳۸- گزینه‌ی (۲)

زیرا $T(x\ ,\ y)=(-y\ ,\ -x)$ بازتاب نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم است و $F(x\ ,\ y)=(-y+۲\ ,\ -x-۱)$ ترکیب بازتاب و یک انتقال می‌باشد.

۳۹- گزینه‌ی (۱)

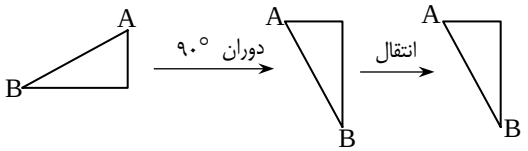
ضابطه دوران ۲۷۰ درجه به مرکز مبدأ مختصات عبارتست از $R(x\ ,\ y)=(y\ ,\ -x)$

$$\left.\begin{array}{l} x'=y \Rightarrow y=x' \\ y'=-x \Rightarrow x=-y' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{درخط}} ۲(-y')-۳(x')=۵ \Rightarrow ۳x'+۲y'+۵=۰$$

تنها نقطه $(-۱\ ,\ -۱)$ در تصویر خط صدق می‌کند.

۴۰- گزینه‌ی (۱)

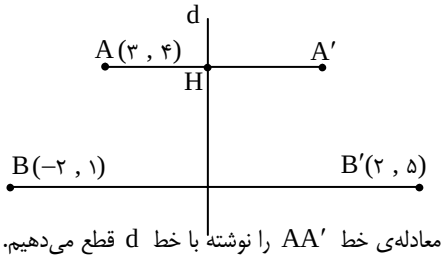
در تبدیل انتقال اضلاع نظیر به نظیر موازیند.



توجه کنید که دوران و انتقال هر دو جهت شکل را حفظ می‌کنند، پس در نهایت جهت شکل باید حفظ شود که در گزینه‌های دیگر این شرط برقرار نیست.

۴۱- گزینه‌ی(۴)

اگر A' بازتاب نقطه‌ی $A(۳\ ,\ ۴)$ نسبت به خط d باشد و $B'(۲\ ,\ ۵)$ بازتاب $B(-۲\ ,\ ۱)$ نسبت به خط d باشد، آن‌گاه خط d عمودمنصف BB' است داریم:



BB' وسط $M=\dfrac{B+B'}{۲}=(۰\ ,\ ۳)$

$m_{BB'}=\dfrac{۵-۱}{۲+۲}=۱ \Rightarrow m_d=-۱$

معادله‌ی خط d $\quad y-۳=-۱(x-۰) \Rightarrow x+y=۳$

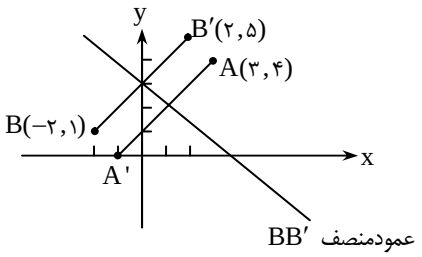
معادله‌ی خط AA' را نوشته با خط d قطع می‌دهیم.

$m_{AA'}=m_{BB'}=+۱ \Rightarrow y-۴=+۱(x-۳) \Rightarrow y-x=۱$

$$\begin{cases} y+x=۳ \\ y-x=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۱\ ,\ y=۲ \Rightarrow H\left|\begin{array}{l}۱\\۲\end{array}\right.$$

AA' وسط $H \Rightarrow H=\dfrac{A+A'}{۲} \Rightarrow A'=۲H-A \Rightarrow A'=۲\left|\begin{array}{l}۱\\۲\end{array}\right.-\left|\begin{array}{l}۳\\۴\end{array}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{array}{l}-۱\\۰\end{array}\right.$

راه حل دوم: با توجه به شکل، عمودمنصف BB' محور تقارن است پس بازتاب نقطه‌ی $A(۳,۴)$ نسبت به خط عمودمنصف نقطه‌ای مثل A' می‌باشد که با توجه به گزینه‌ها و شکل فقط گزینه ۴ می‌تواند قابل قبول باشد.



WWW.RIAZISARA.IR سایت ریاضی سرا

۴۲- گزینه‌ی (۳)

تبدیل $D(x\ ,\ y) = (-y+۲\ ,\ x-۱)$ ترکیب یک دوران ۹۰ درجه و یک انتقال است. از آن‌جا که هم دوران و هم انتقال ایزومتری هستند پس D نیز ایزومتری است.

۴۳- گزینه‌ی (۱)

محور تقارن عمودمنصف پاره‌خط AB است.

$A(-۳,-۱)$ و $B(۳,۵)$

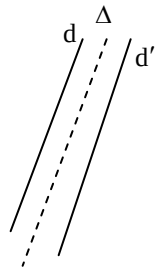
AB شیب $= \frac{۶}{۶} = ۱ \Rightarrow$ شیب محور تقارن $= -۱$, وسط $AB = (۰,۲) \Rightarrow y-۲ = -۱(x-۰) \Rightarrow y+x = ۲$

۴۴- گزینه‌ی (۲)

ضابطه دوران ۹۰- به مرکز مبدأ عبارتست از: $R(x\ ,\ y) = (y\ ,\ -x)$.

$$\left.\begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \Rightarrow x = -y' \end{array}\right\} \Rightarrow ۳(-y') + ۲(x') = ۶ \Rightarrow ۲x' - ۳y' = ۶$$

۴۵- گزینه‌ی(۴)



دو خط موازی d', d تنها دارای یک محور تقارن مثل Δ موازی آنها می‌باشد. پس گزینه ۴ درست است ولی این دو خط موازی دارای بی‌نهایت مرکز تقارن می‌باشد و نسبت به هر نقطه روی Δ و با زاویه ۱۸۰ درجه دوران یکدیگرند و نسبت به هر نقطه Δ با نسبت ۱- مجانس یکدیگرند. که در این سه حالت تبدیل مشخص ایجاد نمی‌شود. یا به عبارتی تبدیل منحصر به فرد بدست نمی‌آید.

۴۶- گزینه‌ی(۲)

می‌دانیم زاویه بین هر خط و دوران یافته آن با زاویه دوران برابر است. بنابراین زاویه بین $A'B', AB$ مساوی زاویه دوران و برابر ۴۵° درجه می‌باشد.

۴۷- گزینه‌ی (۱)

برای به‌دست آوردن قرینه‌ی خط نسبت به نقطه کافیست قرینه‌ی یک نقطه‌ی دلخواه خط را بدست آورده و چون شیب تغییر نمی‌کند با همان شیب معادله‌ی خط قرینه را بنویسیم.

$A \in$ خط $\Rightarrow A(۰,۶)$

اگر A' قرینه‌ی A نسبت به نقطه‌ی $O\ (۲,-۳)$ باشد داریم:

$$O = \frac{A+A'}{۲} \Rightarrow A' = ۲O - A \Rightarrow A' = ۲(۲,-۳) - (۰,۶) \Rightarrow A' = (۴,-۱۲)$$

از طرفی شیب خط داده شده برابر $\frac{۳}{۲}$ است پس شیب خط قرینه نیز $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$
$$\Rightarrow y + ۱۲ = \frac{۳}{۲}(x-۴) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۱۸$$

عرض از مبدأ خط قرینه برابر ۱۸- است.

۴۸- گزینه‌ی (۴)

در مثلث AED که متساوی‌الساقین است با توجه به $A\hat{E}D = ۶۵$، نتیجه می‌شود زاویه رأس $A_۲$ برابر ۵۰درجه است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB = AB\\ \hat{A}_۱ = ۵۰\end{array}\right\} \Rightarrow B \xrightarrow[\text{به مرکز } A]{\text{تحت دوران ۵۰ درجه}} C\\ \left.\begin{array}{l}AE = AD\\ \hat{A}_۲ = ۵۰\end{array}\right\} \Rightarrow E \xrightarrow[\text{به مرکز } A]{\text{تحت دوران ۵۰ درجه}} D\end{array}\right\} \Rightarrow BE \xrightarrow[\text{به مرکز } A]{\text{تحت دوران ۵۰ درجه}} CD$$

خط CD دوران یافته BE با زاویه ۵۰° است، پس طبق خواص دوران زاویه بین این‌دو نیز ۵۰ درجه است، در نتیجه $\alpha = ۱۳۰$.

WWW.RIAZISARA.IR
سایت ریاضی سرا