WWW.RIAZISARA.IR

۱–۵: چندجمله‌ای و معادله‌ی درجه‌ی دوم

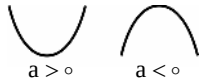
در درس‌های ریاضی (۱) و ریاضی (۲) با شیوه‌ی حل معادلات درجه‌ی ۲ و تعیین علامت عبارت‌های درجه‌ی ۲ آشنا شده‌اید. در این بخش ابتدا کمی منسجم‌تر آن مطالب را مرور می‌کنیم و سپس مطالب جدیدی چون روابط بین ریشه‌ها و ماکزیمم و مینیمم توابع درجه‌ی ۲ را بیان خواهیم کرد.

نمودار چندجمله‌ای درجه‌ی دوم (سهمی)

چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ به شرط $a\neq 0$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ است. در این چندجمله‌ای مقدار $\Delta=b^2-4ac$ را «مبین عبارت» می‌گویند. نمودار این چندجمله‌ای در صفحه‌ی مختصات شکلی است که به آن «سهمی» می‌گویند. ویژگی‌های اصلی سهمی را در نکته‌ی زیر بیان کرده‌ایم:

نکته: **ویژگی‌های اصلی نمودار سهمی شکل چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$:**

۱- با توجه به علامت a، جهت سهمی تعیین می‌شود. اگر $a>0$، سهمی رو به بالا و اگر $a<0$، سهمی رو به پایین است.

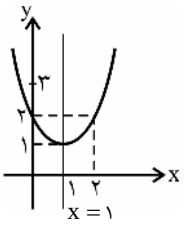


۲- خط عمودی $x=-\frac{b}{2a}$، محور تقارن سهمی است.

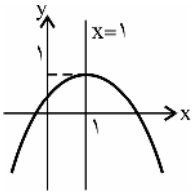
۳- رأس سهمی محل برخورد محور تقارن آن و نمودار سهمی است. طول رأس همان $x=-\frac{b}{2a}$ است و عرض رأس $y=P(-\frac{b}{2a})$. به راحتی ثابت می‌شود که $P(-\frac{b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a}$، پس مختصات رأس سهمی $(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ است.

۴- اگر $|a|>1$، آن‌گاه نمودار سهمی فشرده‌تر از نمودار $f(x)=x^2$ است و اگر $|a|<1$، آن‌گاه با نموداری بازتر از نمودار $f(x)=x^2$ مواجه‌ایم.

مثال: ۱- در شکل مقابل سهمی مربوط به نمودار $P(x)=x^2-2x+2$ رسم شده است. چون ضریب x^2 مثبت است، نمودار سهمی رو به بالا است. هم‌چنین خط $x=-\frac{-2}{2\times 1}$ (یا همان خط $x=1$) محور تقارن سهمی است (که در شکل با خط کم‌رنگ مشخص شده است). رأس سهمی محل برخورد خط $x=1$ و نمودار است. یعنی طول آن $x=1$ و عرض آن $P(1)=1-2+2=1$ است.



۲- در شکل مقابل سهمی مربوط به نمودار $P(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ رسم شده است. چون ضریب x^2 منفی است، نمودار سهمی رو به پایین است. چون $-\frac{b}{2a}=1$، پس این‌جا هم خط $x=1$ محور تقارن سهمی است. چون $P(1)=1$، رأس سهمی هم نقطه‌ی $S(1,1)$ شده است. چنان‌چه می‌بینید نمودار این سهمی نسبت به نمودار قبلی بازتر است، چون $|a|=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}<1$.



پرسش: نقطه‌ی برخورد سهمی متناظر $P(x)=ax^2+bx+c$ و محور y ها، چه ویژگی‌ای دارد؟

پاسخ: این نقطه از جای‌گذاری $x=0$ در معادله‌ی سهمی به دست می‌آید. پس عرض آن $P(0)=c$ است.

مسأله‌ی (۱): نمودار چندجمله‌ای $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ از نقاط $A(۶,۵)$، $B(-۲,۵)$ و $C(۰,-۱)$ می‌گذرد. خط $y=-۱$ در چه نقاطی نمودار را قطع می‌کند؟

حل: راه اول: می‌توانیم ضرایب a، b و c را تعیین کنیم و سپس معادله‌ی $P(x)=-۱$ را حل کنیم، زیرا جواب‌های این معادله همان طول نقطه‌های برخورد منحنی $y=P(x)$ و خط $y=-۱$ هستند. با توجه به آن‌که نقاط A، B و C روی نمودار هستند، داریم:

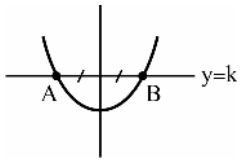
$$P(۶)=۵ \Rightarrow ۳۶a+۶b+c=۵$$
$$P(-۲)=۵ \Rightarrow ۴a-۲b+c=۵$$
$$P(۰)=-۱ \Rightarrow ۰+۰+c=-۱$$

از معادله‌ی سوم داریم $c=-۱$ و با جای‌گذاری آن در دو معادله‌ی اول به دست می‌آوریم $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-۲$. پس $P(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x-۱$.

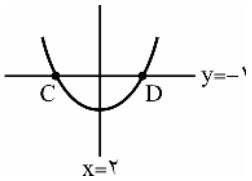
حال داریم:

$$P(x)=-۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x-۱=-۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x=۰ \Rightarrow x_{۱}=۰\ ,\ x_{۲}=۴$$

یعنی $y=-۱$ در دو نقطه‌ی $(۰,-۱)$ و $(۴,-۱)$ با نمودار برخورد می‌کند.

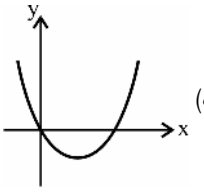


راه دوم: با استفاده از ویژگی‌های سهمی بسیار راحت‌تر می‌توانیم مسأله را حل کنیم. چنان‌چه در شکل روبه‌رو می‌بینید، وقتی یک خط افقی (به معادله‌ی $y=k$) سهمی را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند، وسط این دو نقطه روی محور تقارن قرار می‌گیرد. در این مسأله دو نقطه‌ی $A(۶,۵)$ و $B(-۲,۵)$ هم‌عرض هستند، پس هر دو روی خط $y=۵$ قرار دارند، در نتیجه وسط آن‌ها یعنی نقطه‌ی $(۲,۵)$ روی محور تقارن است.

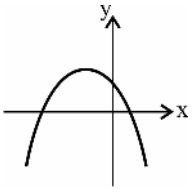


پس خط $x=۲$ محور تقارن است، در نتیجه اگر نقاط برخورد خط $y=-۱$ با سهمی را C و D بنامیم، این دو نقطه نسبت به خط $x=۲$ متقارن‌اند. مختصات یکی $C(۰,-۱)$ است، پس مختصات دیگری $D(۴,-۱)$ می‌شود.

مسأله‌ی (۲): در هر یک از شکل‌های زیر نمودار چندجمله‌ای $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ رسم شده است. علامت ضرایب P را تعیین کنید.

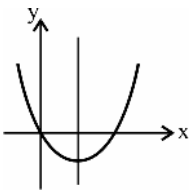


الف)



ب)

حل: الف) چون سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس $P(۰)=۰$، در نتیجه $c=۰$. چون سهمی رو به بالا است، پس $a>۰$ و علامت آن مثبت است.



هم‌چنین با توجه به شکل، محور تقارن سهمی سمت راست محور y ها است، یعنی $-\frac{b}{۲a}>۰$ (چون معادله‌ی آن $x=-\frac{b}{۲a}$ است). بنابراین:

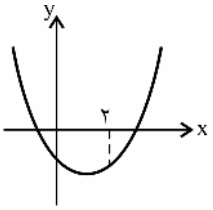
$$-\frac{b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a>۰} b<۰ \Rightarrow \text{علامت } b \text{ منفی است}$$

ب) این‌بار سهمی محور y ها را در عرضی مثبت قطع کرده، یعنی $P(۰)>۰$، پس $c>۰$.

چون سهمی رو به پایین است، پس $a<۰$. محور تقارن سهمی سمت چپ محور y ها است، بنابراین:

$$-\frac{b}{۲a}<۰ \xrightarrow{a<۰} b<۰$$

تست (۱): در شکل روبه‌رو نمودار چندجمله‌ای $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ رسم شده است. درباره‌ی علامت عبارت $S=۴a+۳b+۲c$ کدام گزینه درست است؟



۱) همواره مثبت
۲) همواره منفی
۳) گاهی مثبت و گاهی منفی
۴) گاهی منفی و گاهی صفر

حل: چون سهمی رو به بالا است، پس $a>۰$. هم‌چنین محور تقارن سهمی در سمت راست محور yها است، بنابراین:

$$-\frac{b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a>۰} b<۰$$

سهمی محور yها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع کرده، پس $P(۰)=c<۰$. حال دقت کنید که طبق نمودار $P(۲)<۰$ (زیرا نقطه‌ای با طول ۲ روی سهمی پایین محور xها است)، بنابراین:

$$P(۲)<۰ \Rightarrow ۴a+۲b+c<۰$$

عبارت $S=۴a+۳b+۲c$ از جمع سه عدد منفی $۴a+۲b+c$، b و c تشکیل شده، پس $S<۰$.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

ریشه‌های چندجمله‌ای درجه‌ی دوم

ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)=ax^{۲}+bx+c$، همان جواب‌های معادله‌ی $P(x)=۰$ هستند.[۱]

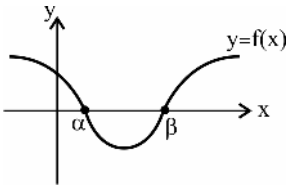
درباره‌ی این ریشه‌ها می‌دانیم:

۱- اگر $\Delta>۰$، چندجمله‌ای دو ریشه دارد: $x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$

۲- اگر $\Delta=۰$، چندجمله‌ای یک ریشه‌ی «مضاعف» (یا مکرر) دارد: $x=-\frac{b}{۲a}$

۳- اگر $\Delta<۰$، چندجمله‌ای ریشه‌ی حقیقی ندارد.

ارتباط بین ریشه‌ها و نمودار چندجمله‌ای



به طور کلی اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیریم، طول نقاط برخورد این نمودار و محور xها، ریشه‌های تابع را مشخص می‌کند.

مثلاً تابع روبه‌رو در دو نقطه‌ی $(\alpha,۰)$ و $(\beta,۰)$ با محور xها برخورد می‌کند، پس $f(\alpha)=۰$ و $f(\beta)=۰$، یعنی α و β ریشه‌های تابع هستند.

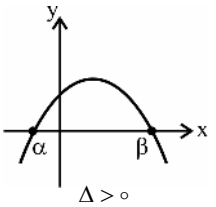
به این ترتیب درباره‌ی یک چندجمله‌ای درجه‌ی دوم، مانند $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ داریم:

۱- اگر $\Delta>۰$، سهمی با محور xها در دو نقطه برخورد می‌کند (واضح است که این دو نقطه نسبت به محور تقارن، قرینه‌اند).

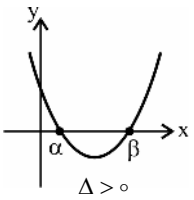
۲- اگر $\Delta=۰$، سهمی بر محور xها در یک نقطه مماس است.

۳- اگر $\Delta<۰$، سهمی با محور xها هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارد، پس یا کاملاً بالای محور xها است، یا کاملاً پایین آن.

◄ **مثال:** در هر یک از شکل‌های زیر براساس شکل سهمی، علامت Δ و ریشه‌ها را تعیین کرده‌ایم:



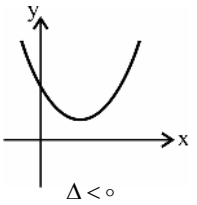
$(\alpha<۰\ ,\ \beta>۰)$ دو ریشه با علامت‌های مختلف



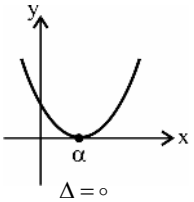
$(\alpha,\beta>۰)$ دو ریشه‌ی مثبت

---

[۱] - گاهی ریشه‌های یک چندجمله‌ای را «صفرهای چندجمله‌ای» نیز می‌گویند.



ریشه‌ی حقیقی وجود ندارد.

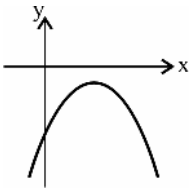


ریشه‌ی مضاعف مثبت $(\alpha = -\frac{b}{۲a})$

تست (۲): به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = (m-۱)x^۲ + \sqrt{۳}x + m$، همواره در زیر محور xها است؟ (سراسری- ۸۵)

۱) $m < -\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲} < m < ۱$ ۳) $۱ < m < \frac{۳}{۲}$ ۴) $m > \frac{۳}{۲}$

حل:



برای آن که سهمی در زیر محور xها قرار بگیرد، لازم است که $\Delta < ۰$ (تا ریشه‌ای نداشته باشد) و $a < ۰$ (تا رو به پایین باشد). پس:

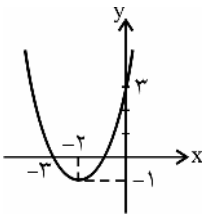
$$\Delta = (\sqrt{۳})^۲ - ۴(m-۱)m < ۰ \Rightarrow -۴m^۲ + ۴m + ۳ < ۰ \Rightarrow (-۲m-۱)(۲m-۳) < ۰ \Rightarrow m < -\frac{۱}{۲} \text{ یا } m > \frac{۳}{۲}$$

$$a = m - ۱ < ۰ \Rightarrow m < ۱$$

اشتراک دو شرط فوق محدوده‌ی $m < -\frac{۱}{۲}$ را معین می‌کند.

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

مسأله‌ی (۳): در شکل روبه‌رو نمودار چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $P(x)$ رسم شده است. تعداد ریشه‌های حقیقی هر یک از معادلات زیر را تعیین کنید.

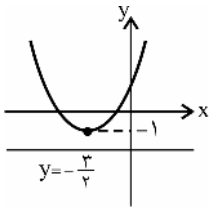


الف) $P(x) = ۰$ **ب)** $۲P(x) + ۳ = ۰$

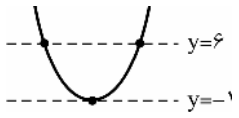
پ) $P^۲(x) - ۵P(x) - ۶ = ۰$

حل: الف) چون سهمی، محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند، معادله‌ی $P(x) = ۰$ دو ریشه دارد (یکی از آن‌ها $x = -۳$ و دیگری $x = -۱$ است، یعنی همان قرینه‌ی $x = -۳$ نسبت به محور تقارن $x = -۲$).

ب) باید معادله‌ی $P(x) = -\frac{۳}{۲}$ را حل کنیم. برای این‌کار باید خط $y = -\frac{۳}{۲}$ را با سهمی قطع بدهیم. با توجه به شکل، خط و سهمی نقطه‌ی برخورد ندارند، پس این معادله ریشه‌ای ندارد.



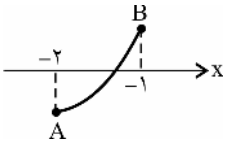
پ) معادله را می‌توانیم به صورت $(P(x)-۶)(P(x)+۱) = ۰$ بنویسیم، پس باید دو معادله‌ی $P(x) = ۶$ و $P(x) = -۱$ را حل کنیم. خط $y = ۶$ در دو نقطه سهمی را قطع می‌کند، پس معادله‌ی $P(x) = ۶$ دو ریشه دارد. خط $y = -۱$ بر سهمی مماس است، پس معادله‌ی $P(x) = -۱$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد. در نتیجه روی هم معادله‌ی اصلی ۳ ریشه دارد (که یکی از آن‌ها مضاعف یا مکرر است).



* **مسأله‌ی (۴): درباره‌ی چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ می‌دانیم $b>2a+\frac{c}{2}$ و $a+c>b$. ثابت کنید این چندجمله‌ای ریشه‌ای در فاصله‌ی $(-2,-1)$ دارد.**

حل: با استفاده از دو نامساوی علامت تابع را در نقاط به طول $x=-2$ و $x=-1$ تعیین می‌کنیم:

$$b>2a+\frac{c}{2}\Rightarrow 2b>4a+c\Rightarrow 4a-2b+c<0\Rightarrow P(-2)<0 \quad , \quad a+c>b\Rightarrow a-b+c>0\Rightarrow P(-1)>0$$



پس روی این سهمی نقطه‌ای به طول -2 پایین محور xها و نقطه‌ای به طول -1 بالای محور xها قرار دارد (مانند نقاط A و B در شکل مقابل). واضح است که حتماً سهمی بین این دو نقطه با محور xها برخورد می‌کند، بنابراین معادله‌ی $P(x)=0$ حتماً در فاصله‌ی $(-2,-1)$ ریشه دارد.

مدل‌سازی و حل معادلات درجه‌ی دوم

می‌دانیم که برای حل یک معادله‌ی درجه‌ی ۲، کافی است Δ را تشکیل دهیم و سپس با توجه به علامت آن ریشه‌ها را بیابیم. البته استفاده از تجزیه براساس «اتحاد جمله‌ی مشترک» نیز در بسیاری موارد کار ما را سریع‌تر می‌کند. با توجه به آشنایی شما با این بحث در درس‌های ریاضی (۱) و (۲)، با حل چند مسأله‌ی نمونه آن را یادآوری می‌کنیم.

مسأله‌ی (۵): اگر معادله‌ی $(2m-1)x^2+mx+3=0$ فقط یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، مقدار m را به دست آورید. مسأله چند جواب دارد؟

حل: در دو حالت معادله یک ریشه دارد. یکی وقتی درجه‌ی یک باشد، و دیگری وقتی که درجه‌ی ۲ باشد و داشته باشیم $\Delta=0$.

حالت اول: اگر $2m-1=0$، معادله درجه‌ی ۱ است، پس $m=\frac{1}{2}$ یکی از جواب‌ها است.

حالت دوم: باید معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=0\Rightarrow m^2-4(2m-1)\times 3=0\Rightarrow m^2-24m+12=0\Rightarrow m=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\times 1^2}}{2}=12\pm 2\sqrt{33}$$

پس روی هم برای m، ۳ مقدار مختلف وجود دارد.

مسأله‌ی (۶): اگر چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $P(x)=ax^2+bx+c$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، ثابت کنید a و c هم‌علامت‌اند. آیا عکس این قضیه نیز درست است؟

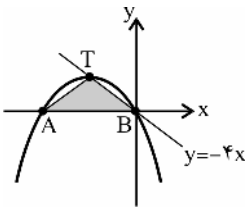
حل: اگر چندجمله‌ای ریشه نداشته باشد، داریم $\Delta<0$، پس:

$$b^2-4ac<0\Rightarrow 4ac>b^2\xrightarrow{b^2\geq 0}4ac>0\Rightarrow ac>0$$

چون $ac>0$، پس a و c هم‌علامت‌اند.

عکس این قضیه درست نیست، به عنوان مثال نقض معادله‌ی $x^2-3x+2=0$ ریشه‌های $x=1$ و $x=2$ را دارد و علاوه بر آن a و c هم‌علامت‌اند!

مسأله‌ی (۷): در شکل مقابل، خط $y=-4x$ از نقطه‌ی T رأس سهمی $P(x)=ax^2+bx$ گذشته است و در داخل سهمی مثلث TAB ایجاد شده است. اگر مساحت این مثلث ۱۶ واحد مربع باشد، حاصل $a+b$ را به دست آورید.



حل: می‌دانیم طول نقطه‌ی T، $x=-\frac{b}{2a}$ است. چون نقطه‌ی T روی خط $y=-4x$ است، پس عرض آن $-4\times\frac{-b}{2a}=\frac{2b}{a}$ می‌شود. می‌دانیم مختصات T در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند، پس:

$$P(-\frac{b}{2a})=\frac{2b}{a}\Rightarrow a\times\frac{b^2}{4a^2}+b\times\frac{-b}{2a}=\frac{2b}{a}\Rightarrow\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}=\frac{2b}{a}\Rightarrow -b^2=8b\Rightarrow b_1=0\ ,\ b_2=-8$$

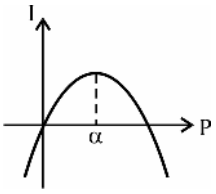
جواب $b=-8$ قابل‌قبول است (چرا؟)، پس $P(x)=ax^2-8x$، در نتیجه معادله‌ی $P(x)=0$ دو ریشه‌ی $x_1=0$ و $x_2=\frac{8}{a}$ را دارد که طول دو نقطه‌ی A و B هستند. چون $a<0$ (چرا؟)، پس طول AB برابر $-\frac{8}{a}$ می‌شود. بنابراین قاعده‌ی مثلث ATB برابر $-\frac{8}{a}$ و ارتفاع آن برابر $\frac{2b}{a}=-\frac{16}{a}$ (همان عرض نقطه‌ی T) می‌شود. حال داریم:

$$S_{ATB}=16\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{-8}{a}\times\frac{-16}{a}=16\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2\xrightarrow{a<0}a=-2\xrightarrow{b=-8}a+b=-10$$

مدل‌سازی:

بسیاری از مسائل را (مخصوصاً آن‌هایی که با زندگی روزمره‌ی ما سروکار دارند) می‌توانیم با مدل‌سازی به معادلات ریاضی تبدیل کنیم. در این‌گونه مسائل تشخیص این‌که چه متغیری را مجهول بگیریم به تجربه‌ی شما بستگی دارد. معمولاً با انتخاب مناسب متغیرها و استفاده از هندسه‌ی مسأله، می‌توانیم یک یا چند معادله تشکیل دهیم که حل آن‌ها به حل مسأله می‌انجامد.

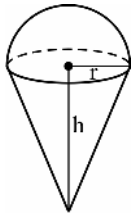
◄ **مثال:** معمولاً رابطه‌ی بین قیمت یک کالا و درآمد یک واحد فروش آن کالا با یک چندجمله‌ای درجه‌ی دوم مدل می‌شود:



$$I = aP^2 + bP + c$$

که P قیمت کالا است و I درآمد واحد فروش.

طبق این مدل‌سازی، شما اگر قیمت کالایی را تا حد معقولی افزایش دهید، درآمد شما نیز افزایش می‌یابد (تا حد $P = \alpha$). ولی از آن پس هر چقدر قیمت را افزایش دهید، درآمد شما کاهش می‌یابد! در عالم واقع نیز با افزایش بی‌رویه‌ی قیمت، تقاضا برای خرید کالا کم می‌شود و در نتیجه درآمد واحد فروش کاهش می‌یابد.



مسأله‌ی (۸): یک بالن را می‌توانیم با یک نیم‌کره بر بالای یک مخروط مدل کنیم. بالن حاوی هوای داغ است. در لحظه‌ای که $h = ۲۴$ و حجم هوا از نظر عددی ۱۲۶π برابر r است، مقدار r را به دست آورید.

حل: حجم نیم‌کره $\frac{۲}{۳}\pi r^۳$ و حجم مخروط $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ است، پس حجم هوا برابر است با: $V = \frac{۲}{۳}\pi r^۳ + \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$.

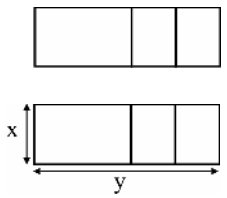
می‌خواهیم معادله‌ی $V = ۱۲۶\pi \times r$ را با فرض $h = ۲۴$ حل کنیم. داریم:

$$\frac{۲}{۳}\pi r^۳ + \frac{۱}{۳}\pi r^۲ \times ۲۴ = ۱۲۶\pi \times r$$

از دو طرف معادله $۲\pi r$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۳}r^۳ + \frac{۱۲}{۳}r = ۶۳ \Rightarrow r^۲ + ۱۲r - ۱۸۹ = ۰ \Rightarrow (r+۲۱)(r-۹) = ۰ \Rightarrow r_۱ = -۲۱ \ , \ r_۲ = ۹$$

جواب $r = ۹$ قابل‌قبول است.



مسأله‌ی (۹): با استفاده از سیمی به طول ۸۰۰ سانتی‌متر، مستطیلی مانند شکل روبه‌رو ساخته‌ایم. اگر مساحت این مستطیل ۲۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع باشد، طول آن چقدر است؟

حل: باید طول سیم و هم‌زمان مساحت مستطیل را با استفاده از متغیرهای مناسب مدل کنیم. طول مستطیل را y و عرض آن را x می‌گیریم، پس طول سیم $۴x + ۲y$ می‌شود (چرا؟) و مساحت مستطیل xy. به این ترتیب داریم:

$$۴x + ۲y = ۸۰۰ \Rightarrow ۲x + y = ۴۰۰ \Rightarrow y = ۴۰۰ - ۲x$$

$$S = xy = ۲\times۱۰^۴ \xrightarrow{y=۴۰۰-۲x} x(۴۰۰-۲x) = ۲\times۱۰^۴ \Rightarrow x(۲۰۰-x) = ۱۰^۴ \Rightarrow x^۲ - ۲\times۱۰۰x + ۱۰۰^۲ = ۰ \Rightarrow (x-۱۰۰)^۲ = ۰$$

پس $x = ۱۰۰$ و در نتیجه $y = ۲۰۰$.

معادلات قابل تبدیل به معادله‌ی درجه‌ی ۲

بسیاری از معادلات مستقیماً معادله‌ی درجه‌ی ۲ نیستند، ولی با تغییر متغیر مناسب می‌توانیم آن‌ها را به معادله‌ی درجه‌ی ۲ تبدیل و حل کنیم. ساده‌ترین این نوع معادلات، «معادله‌ی دومجذوری» است، یعنی معادله‌ای از درجه‌ی ۴ که فقط شامل توان‌های زوج x باشد.

◄ **مثال:** معادله‌ی $۲x^۴ - ۴x^۲ + ۱ = ۰$ یک معادله‌ی دومجذوری است. با تغییر متغیر $t = x^۲$، این معادله به یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ تبدیل و حل می‌شود.

$$t = x^۲ \Rightarrow ۲t^۲ - ۴t + ۱ = ۰ \Rightarrow t_۱ = \frac{۴+\sqrt{۸}}{۴} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲} \ , \ t_۲ = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$$

هر دو مقدار $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$ مقادیری مثبت‌اند، پس داریم:

$$t_۱ = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x^۲ = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}} = \pm\frac{\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$t_۲ = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x^۲ = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}} = \pm\frac{\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}}{۲}$$

۴ ریشه برای معادله به دست آمده است.

البته معادله‌های دومجذوری تنها معادلاتی نیستند که به معادله‌ی درجه‌ی ۲ قابل تبدیل‌اند. با مثال‌های دیگری از این نوع معادلات در مسائل بعد آشنا می‌شویم.

مسأله‌ی (۱۰): معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $(x^2-3)^2+x^2-5=0$

ب) $x-3\sqrt{x+4}+4=0$

پ) $3x^2-6x+\frac{2}{x^2-2x+2}=1$

ت) $(2x-3)^4+(2x-5)^4=2$

* **ث)** $x^2+(\frac{x}{x+1})^2=\frac{5}{4}$

حل: الف) با جای‌گذاری $t=x^2-3$ داریم:

$$t^2+t-2=0\Rightarrow(t-1)(t+2)=0\Rightarrow t_1=1\ ,\ t_2=-2$$
$$t_1=1\Rightarrow x^2-3=1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x_1=2\ ,\ x_2=-2$$
$$t_2=-2\Rightarrow x^2-3=-2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x_3=1\ ,\ x_4=-1$$

ب) با جای‌گذاری $t=\sqrt{x+4}$ داریم:

$$x+4-3\sqrt{x+4}=0\Rightarrow t^2-3t=0\Rightarrow t_1=0\ ,\ t_2=3\xrightarrow{t=\sqrt{x+4}}x_1=-4\ ,\ x_2=5$$

پ) با جای‌گذاری $t=x^2-2x$ داریم:

$$3(x^2-2x)+\frac{2}{x^2-2x+2}=1\Rightarrow 3t+\frac{2}{t+2}=1\Rightarrow 3t(t+2)+2=t+2\Rightarrow 3t^2+5t=0\Rightarrow t_1=0\ ,\ t_2=-\frac{5}{3}$$
$$t_1=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x_1=0\ ,\ x_2=2$$
$$t_2=-\frac{5}{3}\Rightarrow x^2-2x+\frac{5}{3}=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{ریشه‌ای ندارد.}$$

ت) با جای‌گذاری $t=2x-4$ داریم:

$$(t+1)^4+(t-1)^4=2\xrightarrow{\text{با استفاده از بسط دوجمله‌ای}}2t^4+12t^2+2=2\Rightarrow 2t^2(t^2+6)=0$$

معادله‌ی $t^2+6=0$ جواب حقیقی ندارد، پس تنها جواب $t=0$ است که به ازای آن $x=2$.

ث) ابتدا با جای‌گذاری $t=x+1$ مخرج کسر را ساده‌تر می‌کنیم:

$$(t-1)^2+(\frac{t-1}{t})^2=\frac{5}{4}\Rightarrow t^2-2t+1+(1-\frac{1}{t})^2=\frac{5}{4}\Rightarrow(t^2+\frac{1}{t^2})-2(t+\frac{1}{t})+2-\frac{5}{4}=0$$

اگر قرار دهیم $A=t+\frac{1}{t}$، داریم: $A^2-2=t^2+\frac{1}{t^2}$، بنابراین:

$$A^2-2-2A+2-\frac{5}{4}=0\Rightarrow A^2-2A-\frac{5}{4}=0\Rightarrow A_1=\frac{5}{2}\ ,\ A_2=-\frac{1}{2}$$
$$A_1=\frac{5}{2}\Rightarrow t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Rightarrow t^2-\frac{5}{2}t+1=0\Rightarrow t_1=2\ ,\ t_2=\frac{1}{2}\xrightarrow{t=x+1}x_1=1\ ,\ x_2=-\frac{1}{2}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود معادله‌ی $t+\frac{1}{t}=-\frac{1}{2}$ جواب حقیقی ندارد، پس تنها جواب‌ها $x_1=1$ و $x_2=-\frac{1}{2}$ هستند.

تست (۳): معادله‌ی $(x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0$ دارای: (آزاد- ۸۱)

۱) چهار ریشه‌ی حقیقی است.
۲) دو ریشه‌ی حقیقی است.
۳) دو ریشه‌ی مضاعف دارد.
۴) چهار ریشه‌ی غیر حقیقی است (موهومی).

حل: با جای‌گذاری $t=x^2+x+1$ داریم:

$$t^2-3t+2=(t-2)(t-1)=0\Rightarrow t_1=2\ ,\ t_2=1$$
$$t_1=2\Rightarrow x^2+x+1=2\Rightarrow x^2+x-1=0\xrightarrow{\Delta>0}\text{۲ ریشه‌ی حقیقی}$$
$$t_2=1\Rightarrow x^2+x+1=1\Rightarrow x^2+x=x(x+1)=0\Rightarrow\text{۲ ریشه‌ی حقیقی}$$

چون دو معادله ریشه‌ی مشترکی ندارند، پس معادله‌ی اصلی ۴ ریشه‌ی حقیقی دارد.
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست (۴): منحنی (C) به معادله‌ی $y^4+3xy+2=0$، نیمساز ربع دوم را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۴ **۴)** صفر

حل: معادله‌ی نیمساز ربع دوم و چهارم $y=-x$ است. نقاط برخورد منحنی و نیمساز در معادله‌ی هر دو صدق می‌کنند. پس:

$$y^4+3xy+2=0 \quad , \quad y=-x \Rightarrow x^4-3x^2+2=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-2)=0$$

معادله‌ی فوق ۴ ریشه‌ی $x_1=1$، $x_2=-1$، $x_3=\sqrt{2}$ و $x_4=-\sqrt{2}$ را دارد. هر یک از این ۴ ریشه طول یک نقطه‌ی برخورد منحنی و نیمساز ربع دوم و چهارم هستند. چون در تست نیمساز ربع دوم مورد نظر بوده است، پس باید شرط $x<0$ نیز برقرار باشد. یعنی ۲ نقطه‌ی برخورد داریم.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مسأله‌ی (۱۱): یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا بسازید که $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ یکی از ریشه‌های آن باشد. بقیه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای را نیز به دست آورید.

حل: با قرار دادن $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ داریم:

$$x^2=3+5+2\sqrt{15} \Rightarrow x^2-8=2\sqrt{15} \Rightarrow (x^2-8)^2=(2\sqrt{15})^2$$
$$\Rightarrow x^4-16x^2+64=60 \Rightarrow x^4-16x^2+4=0$$

عدد $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ در همه‌ی مراحل بالا صدق می‌کند، پس ریشه‌ی چندجمله‌ای $P(x)=x^4-16x^2+4$ نیز هست. چنان‌چه می‌بینید چندجمله‌ای موردنظر به دست آمده است. با جای‌گذاری $t=x^2$ می‌توانید ریشه‌ها را نیز به دست آورید. که آن را به خودتان واگذار می‌کنیم.

جواب‌های نهایی: $x_2=\sqrt{3}-\sqrt{5}$، $x_3=-\sqrt{3}+\sqrt{5}$ و $x_4=-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ هستند.

مسأله‌ی (۱۲): فرض کنید $P(x)=ax^4+bx^2+c$. اگر بدانیم $P(2)=P(-3)=0$ و $P(1)=\frac{8}{3}$، ضرایب a، b و c را حساب کنید.

حل: می‌توانیم با تشکیل سه معادله با سه مجهول a، b و c مسأله را حل کنیم. ولی کمی دقت راه ما را ساده‌تر می‌کند. در معادله‌ی دومجذوری $P(x)=0$، وقتی به پیدا کردن ریشه‌های نهایی می‌رسیم، باید چنین معادله‌ای را حل کنیم $x^2=k$ (که k یک عدد حقیقی است). واضح است که این معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد. به این ترتیب وقتی -3 یک ریشه‌ی معادله است (چون $P(-3)=0$)، نتیجه می‌گیریم ۳ نیز ریشه‌ی دیگر معادله است. همین‌طور از $P(2)=0$ نتیجه می‌گیریم ۲ و ۲- ریشه‌های معادله‌اند. پس با توجه به بحث بخش‌پذیری، چندجمله‌ای بر $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$P(x)=a(x^2-4)(x^2-9) \xrightarrow{P(1)=\frac{8}{3}} \frac{8}{3}=a\times(-3)\times(-8) \Rightarrow a=\frac{1}{9}$$
$$P(x)=\frac{1}{9}(x^2-4)(x^2-9)=\frac{1}{9}x^4-\frac{13}{9}x^2+4 \Rightarrow a=\frac{1}{9}\ ,\ b=-\frac{13}{9}\ ,\ c=4$$

روابط بین ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی ۲

در چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $P(x)=ax^2+bx+c$ ریشه‌ها عبارت‌اند از $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. بنابراین قضیه‌ی زیر قابل بیان است:

قضیه: **اگر ریشه‌های چندجمله‌ای درجه‌ی دوم ax^2+bx+c، x_1 و x_2 باشند، داریم:**

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad P=x_1x_2=\frac{c}{a} \quad , \quad |x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

روابط بالا، در حل مسائل مربوط به ریشه‌ها بسیار ظاهر می‌شوند.

تذکّر: به جز آن‌که مستقیماً با نوشتن x_1 و x_2 روابط S و P را ثابت کنید، می‌توانید به این روش نیز آن‌ها را ثابت کنید:

از این‌که x_1 و x_2 ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند، نتیجه می‌گیریم $f(x)$ بر $(x-x_1)(x-x_2)$ بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\Rightarrow ax^2+bx+c=ax^2-(x_1+x_2)ax+ax_1x_2$$
$$\Rightarrow b=-a(x_1+x_2)\ ,\ c=ax_1x_2$$
$$\Rightarrow S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ ,\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}$$

مسأله‌ی (۱۳): اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-10x+7=0$ باشند، مقدار عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $x_1^2+x_2^2$ **ب)** $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ **پ)** $x_1^3+x_2^3$ **ت)** $x_1^4+x_2^4$

حل: با توجه به آن که x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌اند، داریم: $S=x_1+x_2=\frac{-(-10)}{2}=5\quad,\quad P=x_1x_2=\frac{7}{2}$

الف) عبارت را به S و P ربط می‌دهیم:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5^2-2\times\frac{7}{2}=18$$

ب) اگر عبارت را A بنامیم، داریم:

$$A^2=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}+2=\frac{18}{\frac{7}{2}}+2=\frac{50}{7}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{50}{7}}=\frac{5}{7}\sqrt{14}$$

پ) با توجه به اتحاد مکعب مجموع دو جمله داریم:

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=(x_1^3+x_2^3)+3x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$\Rightarrow x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=5^3-3\times\frac{7}{2}\times5=\frac{145}{2}$$

ت) با توجه به اتحادها داریم:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=18^2-2\times(\frac{7}{2})^2=\frac{599}{2}$$

نکته: **در حل مسأله‌ی قبل از دو رابطه‌ی زیر استفاده کرده‌ایم که باز هم با آن‌ها روبه‌رو خواهید شد:**

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P\quad,\quad x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$$

مسأله‌ی (۱۴): اگر x_1 و x_2 ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)=x^2+5x-7$ باشند، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A=\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)}+\frac{1}{(2-x_1)(2-x_2)}+\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)}$$

حل: راه اول: در مخرج کسر اول با عبارت زیر مواجه‌ایم:

$$(1-x_1)(1-x_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2$$

از روابط بین ریشه‌ها می‌دانیم $x_1+x_2=-5$ و $x_1x_2=-7$. با جای‌گذاری، مخرج کسر اول مشخص می‌شود و به همین ترتیب دو عدد مخرج‌های دیگر به دست می‌آیند. ادامه‌ی راه را به خودتان واگذار می‌کنیم.

راه دوم: با کمی دقت در مفهوم ریشه‌ها می‌توانیم مسأله را ساده‌تر حل کنیم. با توجه به آن‌که x_1 و x_2 دو ریشه‌ی $P(x)$ هستند، داریم: $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$. بنابراین:

$$(1-x_1)(1-x_2)=P(1)\Rightarrow(1-x_1)(1-x_2)=1+5-7=-1$$

به همین ترتیب مخرج‌های دو کسر دیگر $P(2)$ و $P(-1)$ می‌شوند (در کسر آخر داریم: $(1+x_1)(1+x_2)=(-1-x_1)(-1-x_2)$). یعنی:

$$A=\frac{1}{P(1)}+\frac{1}{P(2)}+\frac{1}{P(-1)}=\frac{1}{-1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{-11}=-\frac{73}{77}$$

تست (۵): در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-3x+1=0$، حاصل $\sqrt{x_1^2(3x_2-1)}$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۲)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: در این تست برخلاف دو مسأله‌ی قبل، می‌خواهیم مقدار عبارتی غیرمتقارن بر حسب x_1 و x_2 را به دست آوریم.
در این گونه مسائل معمولاً عبارت‌ها به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که بدون محاسبه و با توجه به مفهوم ریشه بتوان آن‌ها را بیان کرد. می‌دانیم x_2 ریشه‌ی معادله است یعنی در آن صدق می‌کند، در نتیجه:

$$x_2^2-3x_2+1=0 \Rightarrow x_2^2=3x_2-1$$

پس به جای $3x_2-1$ در عبارت مورد نظر می‌توانیم x_2^2 را قرار دهیم:

$$A=\sqrt{x_1^2(3x_2-1)}=\sqrt{x_1^2x_2^2}=|x_1x_2| \ , \ x_1x_2=\frac{c}{a}=1 \Rightarrow A=1$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مسأله‌ی (۱۵): چه رابطه‌ای میان اعداد a، b و c باید برقرار باشد تا یک ریشه‌ی معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$، n برابر ریشه‌ی دیگر باشد؟

حل: اگر x_1 و x_2 دو ریشه باشند و داشته باشیم $x_1=nx_2$، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{b}{a}=x_1+x_2=nx_2+x_2=(n+1)x_2 \Rightarrow x_2=\frac{-b}{a(n+1)} \\ x_1x_2=nx_2x_2=nx_2^2 \quad , \ x_1x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_2^2=\frac{c}{na} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{-b}{a(n+1)}\right)^2=\frac{c}{na} \Rightarrow \frac{b^2}{ac}=\frac{(n+1)^2}{n}$$

مسأله‌ی (۱۶): اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، یک ریشه برابر مجذور وارون ریشه‌ی دیگر باشد، ثابت کنید:
$a^3+c^3=-abc$

حل: فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو ریشه باشند و x_1 مجذور وارون x_2 باشد، پس داریم:

$$x_2=\frac{1}{x_1^2} \Rightarrow x_1x_2=\frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1=\frac{a}{c}$$

می‌دانیم x_1 در معادله صدق می‌کند. پس:

$$a\left(\frac{a}{c}\right)^2+b\left(\frac{a}{c}\right)+c=0 \Rightarrow \frac{a^3}{c^2}+\frac{ab}{c}+c=0 \Rightarrow a^3+abc+c^3=0 \Rightarrow a^3+c^3=-abc$$

مسأله‌ی (۱۷): در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-5x+m=0$، مقدار m را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی $3x_1-2x_2=0$ بین ریشه‌های آن برقرار باشد.

حل: می‌دانیم $3x_1-2x_2=5x_1-2(x_1+x_2)$. حال سعی می‌کنیم مقدار یکی از ریشه‌ها را بیابیم. داریم:

$$3x_1-2x_2=0 \Rightarrow 5x_1-2(x_1+x_2)=0 \xrightarrow{x_1+x_2=5} 5x_1=10 \Rightarrow x_1=2$$

x_1 ریشه‌ی معادله است و در آن صدق می‌کند. پس:

$$2^2-5\times 2+m=0 \Rightarrow m=6$$

تست (۶): اگر $a>0$ و دو معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-3x+a=0$ و $x^2+x-3a=0$ دارای یک جواب مشترک باشند، این جواب مشترک کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -3

حل: ریشه‌ی مشترک دو معادله را α می‌نامیم. این ریشه در هر دو معادله صدق می‌کند. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2-3\alpha+a=0 \\ \alpha^2+\alpha-3a=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم کردن دو تساوی}} -3\alpha+a-\alpha+3a=0 \Rightarrow 4\alpha=4a \Rightarrow \alpha=a$$

پس ریشه‌ی مشترک دو معادله همان $x=a$ است که چون در معادله‌ها صدق می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$a^2-3a+a=0 \Rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a=0 \text{ یا } a=2 \xrightarrow{a>0} a=2$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مسأله‌ی (۱۸): اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند و تعریف کنیم $S_n=x_1^n+x_2^n$، ثابت کنید برای هر $n\in N$ داریم:

$$aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0$$

حل: چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌اند، در معادله صدق می‌کنند. یعنی:

$$ax_1^2+bx_1+c=0\Rightarrow x_1^n(ax_1^2+bx_1+c)=0\Rightarrow ax_1^{n+2}+bx_1^{n+1}+cx_1^n=0$$
$$ax_2^2+bx_2+c=0\Rightarrow x_2^n(ax_2^2+bx_2+c)=0\Rightarrow ax_2^{n+2}+bx_2^{n+1}+cx_2^n=0$$

با جمع دو طرف تساوی‌ها به دست می‌آوریم:

$$a(x_1^{n+2}+x_2^{n+2})+b(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})+c(x_1^n+x_2^n)=0\Rightarrow aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0$$

مسأله‌ی (۱۹): اگر $x+\frac{1}{x}=a$، آن‌گاه مقادیر زیر را بر حسب a محاسبه کنید.

الف) $x^2+\frac{1}{x^2}$ **ب)** $x^3+\frac{1}{x^3}$ **پ)** $x^5+\frac{1}{x^5}$

حل: اگر معادله‌ی $x^2-ax+1=0$ را در نظر بگیریم، ریشه‌های آن همان مقادیر x و $\frac{1}{x}$ هستند که در رابطه‌ی $x+\frac{1}{x}=a$ صدق می‌کنند.

الف) با استفاده از اتحادها و روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$S_2=x_1^2+x_2^2=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=a^2-2$$

ب) می‌توانیم با استفاده از اتحاد $x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$ مقدار مورد نظر را پیدا کنیم. راه دیگر استفاده از مسأله‌ی قبل است. داریم:

$$S_{n+2}-aS_{n+1}+S_n=0\xrightarrow{n=1}S_3-aS_2+S_1=0$$

می‌دانیم $S_1=x+\frac{1}{x}=a$ و $S_2=a^2-2$. پس:

$$S_3=aS_2-S_1=a(a^2-2)-a=a^3-3a$$

پ) مانند راه‌حل قسمت (ب) داریم:

$$S_4=aS_3-S_2=a(a^3-3a)-(a^2-2)=a^4-4a^2+2$$
$$S_5=aS_4-S_3=a(a^4-4a^2+2)-(a^3-3a)=a^5-5a^3+5a$$

* **مسأله‌ی (۲۰): اگر α_1 و α_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x-2=0$ باشند و β_1، β_2 و β_3 ریشه‌های معادله‌ی $x^3-3x-1=0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید:**

$$A=(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_1+\beta_2)(\alpha_1+\beta_3)(\alpha_2+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_2+\beta_3)$$

حل: با توجه به آن‌که β_1، β_2 و β_3 ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)=x^3-3x+1$ هستند، نتیجه می‌گیریم:

$$P(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$$

حال واضح است که حاصل‌ضرب A را می‌توانیم به شکل $P(-\alpha_1)P(-\alpha_2)$ بنویسیم. بنابراین:

$$A=P(-\alpha_1)P(-\alpha_2)\xrightarrow{P(x)=x^3-3x-1}A=(-\alpha_1^3+3\alpha_1-1)(-\alpha_2^3+3\alpha_2-1)$$

α_1 و α_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x-2=0$ هستند، پس در آن صدق می‌کنند. مثلاً درباره‌ی α_1 داریم:

$$\alpha_1^2-5\alpha_1-2=0\Rightarrow\alpha_1^2=5\alpha_1+2\Rightarrow\alpha_1^3=5\alpha_1^2+2\alpha_1\xrightarrow{\alpha_1^2=5\alpha_1+2}\alpha_1^3=5(5\alpha_1+2)+2\alpha_1=27\alpha_1+10$$

به این ترتیب با جای‌گذاری نتیجه‌ی بالا (و هم‌چنین نتیجه‌ی مشابه برای α_2) در A به دست می‌آوریم:

$$A=(-(27\alpha_1+10)+3\alpha_1-1)(-(27\alpha_2+10)+3\alpha_2-1)=(-24\alpha_1-11)(-24\alpha_2-11)=24^2\alpha_1\alpha_2+264(\alpha_1+\alpha_2)+11^2$$

طبق روابط بین ریشه‌ها داریم: $\alpha_1+\alpha_2=5$ و $\alpha_1\alpha_2=-2$، بنابراین:

$$A=24^2\times(-2)+264\times5+11^2=289$$

تشکیل یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ از روی ریشه‌ها

دیدیم که چگونه از روی یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ می‌توانیم روابط بین ریشه‌های آن را به دست آوریم. برعکس این امر نیز امکان‌پذیر است، یعنی با دانستن روابط بین دو عدد می‌توانیم معادله‌ی درجه‌ی دویی تشکیل دهیم که آن عددها ریشه‌هایش باشند.

نکته: **اگر برای دو عدد x_1 و x_2 داشته باشیم: $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1x_2$، آن‌گاه ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ همان x_1 و x_2 هستند.**

مثال: برای تشکیل معادله‌ی درجه‌ی ۲ با ریشه‌های $x_1 = 2$ و $x_2 = 3$ داریم:

$S = 5 \ , \ P = 6 \Rightarrow$ معادله‌ی موردنظر: $x^2 - 5x + 6 = 0$

تذکّر: واضح است که معادله‌ی $(x-2)(x-3) = 0$ نیز معادله‌ی درجه‌ی ۲ با ریشه‌های ۲ و ۳ است.

مسأله‌ی (۲۱): اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $x_1 = 2\alpha + 3\beta - 4$ و $x_2 = 2\beta + 3\alpha - 4$ باشد.

حل: چون α و β ریشه‌های $x^2 - 3x - 1 = 0$ هستند، پس: $\alpha\beta = -1$ و $\alpha + \beta = 3$. حال داریم:

$$x_1 = 2(\alpha+\beta) + \beta - 4 = 2\times 3 + \beta - 4 = \beta + 2$$

به همین ترتیب $x_2 = \alpha + 2$. اکنون حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع x_1 و x_2 را به دست می‌آوریم:

$$S = x_1 + x_2 = (2+\beta) + (2+\alpha) = 4 + (\alpha+\beta) = 4 + 3 = 7$$
$$P = x_1x_2 = (2+\beta)(2+\alpha) = 4 + 2(\alpha+\beta) + \alpha\beta = 4 + 6 - 1 = 9$$

پس معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر $x^2 - 7x + 9 = 0$ می‌باشد.

مسأله‌ی (۲۲): اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 9x + 7 = 0$ باشند:
الف) معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن معکوس α و β باشند.
ب) معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن مجذور α و β باشند.

حل: طبق روابط بین ریشه‌ها داریم: $\alpha\beta = 7$ و $\alpha + \beta = 9$

الف) راه اول: دو ریشه را x_1 و x_2 می‌نامیم و جمع و ضرب آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} \ , \ x_2 = \frac{1}{\beta} \Rightarrow P = x_1x_2 = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{7}$$
$$S = x_1 + x_2 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{9}{7}$$

معادله‌ی مورد نظر $x^2 - \frac{9}{7}x + \frac{1}{7} = 0$ می‌شود (یا معادل آن $7x^2 - 9x + 1 = 0$).

راه دوم: با فرض $x_1 = \frac{1}{\alpha}$ به دست می‌آید $\alpha = \frac{1}{x_1}$ و می‌دانیم α در معادله صدق می‌کند. پس:

$$\alpha^2 - 9\alpha + 7 = 0 \Rightarrow (\frac{1}{x_1})^2 - 9(\frac{1}{x_1}) + 7 = 0 \Rightarrow \frac{1 - 9x_1 + 7x_1^2}{x_1^2} = 0 \Rightarrow 7x_1^2 - 9x_1 + 1 = 0$$

واضح است که همین نتیجه را برای x_2 نیز می‌توان بیان کرد. پس x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $7x^2 - 9x + 1 = 0$ هستند.

ب) راه اول: دو ریشه را x_1 و x_2 می‌نامیم و جمع و ضرب آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x_1 = \alpha^2 \ , \ x_2 = \beta^2 \Rightarrow P = x_1x_2 = (\alpha\beta)^2 = 49$$
$$S = x_1 + x_2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 81 - 14 = 67$$

پس معادله‌ی مورد نظر $x^2 - 67x + 49 = 0$ می‌شود.

راه دوم: مانند راه دوم قسمت (الف) عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\alpha^2 \Rightarrow \alpha=\sqrt{x_1} \\ \alpha^2-9\alpha+7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1-9\sqrt{x_1}+7=0 \Rightarrow 9\sqrt{x_1}=x_1+7$$

$$\Rightarrow 81x_1=x_1^2+49+14x_1 \Rightarrow x_1^2-67x_1+49=0$$

مسأله‌ی (۲۳): اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+3x-1=0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی بسازید که ریشه‌های آن $x_1=\alpha^3+3\alpha^2+1$ و $x_2=\beta^3+3\beta^2+1$ باشد.

حل: α و β در معادله‌ی اول صدق می‌کنند. پس:

$$\alpha^2+3\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha^2+3\alpha=1 \Rightarrow \alpha(\alpha^2+3\alpha)=\alpha \Rightarrow \alpha^3+3\alpha^2=\alpha \xrightarrow{x_1=\alpha^3+3\alpha^2+1} x_1=\alpha+1$$

به همین ترتیب $x_2=\beta+1$ و می‌خواهیم معادله‌ای تشکیل دهیم که ریشه‌های آن یک واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادله‌ی اول باشند. داریم:

$$x=\alpha+1 \Rightarrow \alpha=x-1 \Rightarrow (x-1)^2+3(x-1)-1=0 \Rightarrow x^2+x-3=0$$

معادلات معکوسه

در راه‌حل مسأله‌ی (۲۲) قسمت (الف) دیدید که ریشه‌های دو معادله‌ی $x^2-9x+7=0$ و $7x^2-9x+1=0$ وارون یکدیگر هستند. در این دو چندجمله‌ای ضرایب برعکس یکدیگرند و ریشه‌ها نیز وارون یکدیگر می‌باشند. به این چندجمله‌ای‌ها، «چندجمله‌ای‌های معکوس یکدیگر» می‌گویند. در واقع نتیجه‌ی قسمت (الف) مسأله‌ی (۲۲)، حالت خاصی از یک قضیه است.

تعریف: **دو چندجمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ و $Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ (با شرط $a_n, a_0 \neq 0$) «چندجمله‌ای‌های معکوس یکدیگر» خوانده می‌شوند. در این چندجمله‌ای‌ها ضرایب برعکس یکدیگرند.**

قضیه: **ریشه‌های دو چندجمله‌ای معکوس یکدیگر، خود وارون یکدیگرند. به این معنا که اگر r ریشه‌ی $P(x)$ در تعریف بالا باشد، $\frac{1}{r}$ ریشه‌ی $Q(x)$ خواهد بود.**

اثبات: به راحتی می‌توانیم ثابت کنیم $Q(x)=x^nP(\frac{1}{x})$. در واقع داریم:

$$x^nP(\frac{1}{x})=x^n(a_n(\frac{1}{x})^n+a_{n-1}(\frac{1}{x})^{n-1}+...+a_1(\frac{1}{x})+a_0)$$
$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+...+a_1x^{n-1}+a_0x^n=Q(x)$$

حال فرض کنید r ریشه‌ی $P(x)$ باشد، پس $P(r)=0$ (واضح است که $r\neq 0$، چون $a_0\neq 0$). داریم:

$$Q(x)=x^nP(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x=\frac{1}{r}} Q(\frac{1}{r})=(\frac{1}{r})^nP(r) \xrightarrow{P(r)=0} Q(\frac{1}{r})=0$$

می‌بینید که $\frac{1}{r}$ ریشه‌ی $Q(x)$ است.

نتیجه: برای تشکیل چندجمله‌ای که ریشه‌های آن وارون چندجمله‌ای دیگری باشند، کافی است جای ضرایب را برعکس کنیم.

مسأله‌ی (۲۴): فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی زوج باشد و چندجمله‌ای معکوس آن را با $Q(x)$ نشان دهیم. ثابت کنید حاصل $P(x)-Q(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است.

حل: فرض می‌کنیم $F(x)=P(x)-Q(x)$. با توجه به تعریف چندجمله‌ای‌ها داریم $Q(x)=x^nP(\frac{1}{x})$. بنابراین:

$$Q(x)=x^nP(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x=1} Q(1)=P(1) \Rightarrow F(1)=P(1)-Q(1)=0$$

$$Q(x)=x^nP(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x=-1} Q(-1)=(-1)^nP(-1) \xrightarrow{n\ \text{زوج}} Q(-1)=P(-1) \Rightarrow F(-1)=0$$

بنابراین $F(1)=F(-1)=0$، پس $F(x)$ بر $x^2-1=(x-1)(x+1)$ بخش‌پذیر است.

تست (۷): اعداد ۱− و ۲ ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)=ax^3+bx^2+bx+a$ هستند. مجموع ریشه‌های حقیقی $P(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱− ۳) $\frac{7}{2}$ ٤) $\frac{3}{2}$

حل: چندجمله‌ای معکوس $P(x)$، خود $P(x)$ می‌شود! پس اگر r ریشه‌ی $P(x)$ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{r}$ نیز ریشه‌ی $P(x)$ است. بنابراین ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)$ عبارت‌اند از ۱−، ۲ و $\frac{1}{2}$ که جمع آن‌ها $\frac{3}{2}$ می‌شود.

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

قضیه‌ی ویت (برای مطالعه‌ی بیش‌تر)

بحث روابط بین ریشه‌ها را می‌توان برای چندجمله‌ای‌ها با درجات بالاتر از ۲ نیز ادامه داد و به قضیه‌ی زیبایی رسید که به آن «قضیه‌ی ویت» می‌گویند. ابتدا حالت درجه‌ی ۳ این قضیه را بیان می‌کنیم:

در معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$، اگر x_1، x_2 و x_3 سه ریشه‌ی معادله باشند، داریم:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a} \quad , \quad x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

حتماً متوجه شباهت این روابط و روابط متناظر در معادله‌ی درجه‌ی ۲ شده‌اید.

به عنوان مثالی دیگر در معادله‌ی درجه‌ی چهارم $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ داریم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}$$

این روند را می‌توان برای درجات بالاتر نیز ادامه داد، یعنی در معادله‌ی $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ داریم:

مجموع ریشه‌ها برابر است با: $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$

مجموع حاصل ضرب‌های ۲تایی ریشه‌ها برابر است با: $\frac{a_{n-2}}{a_n}$

مجموع حاصل ضرب‌های ۳ تایی ریشه‌ها برابر است با: $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$

و به همین ترتیب یکی در میان نسبت‌ها را قرینه می‌کنیم تا به حاصل‌ضرب n ریشه برسیم که برابر است با: $(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$

تست (۸): در معادله‌ی $(x+1)(x^2-x+6m)=0$، حاصل ضرب سه ریشه ۶− است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ۴

حل: راه اول: یکی از ریشه‌ها $x_1=-1$ است و دو ریشه‌ی دیگر، ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-x+6m=0$ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با:

$$x_2x_3=6m \Rightarrow x_1x_2x_3=(-1)\times 6m=-6m \Rightarrow -6m=-6 \Rightarrow m=1$$

راه دوم: طبق «قضیه‌ی ویت» داریم:

$$x_1x_2x_3=-6m \Rightarrow m=1$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

ماکزیمم و می نیمم در چندجمله ای درجه‌ی ۲

آخرین بحثی که درباره‌ی چندجمله‌ای‌های درجه‌ی ۲ می‌آموزیم، بحث ماکزیمم و می‌نیمم یا همان «بیش‌ترین مقدار» و «کم‌ترین مقدار» است. در بسیاری مسائل زندگی روزمره ما می‌خواهیم عبارتی را به بیش‌ترین مقدار یا کم‌ترین مقدار آن برسانیم، مثلاً بیش‌ترین سود در کار فروش یا کم‌ترین ضایعات در تولید یک محصول را داشته باشیم. در این موارد بحثی به درد ما می‌خورد که به آن «بهینه‌سازی» می‌گوییم. در این‌جا درباره‌ی بهینه‌سازی در چندجمله‌ای‌های درجه‌ی دوم (و چند تابع دیگر) بحث می‌کنیم. واضح است که مدل‌سازی ریاضی درباره‌ی پدیده‌های زندگی نیز ابزار کار ما در این بحث است.

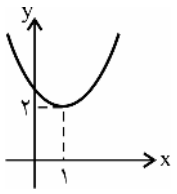
نکته:

بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار چندجمله‌ای‌های درجه‌ی ۲

۱- کم‌ترین مقدار چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ **(در حالت** $a>0$**) همان عرض رأس سهمی است. می‌دانیم:** $y_S=-\frac{\Delta}{4a}$

۲- بیش‌ترین مقدار چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ **(در حالت** $a<0$**) همان عرض رأس سهمی است. می‌دانیم:** $y_S=-\frac{\Delta}{4a}$

◄ **مثال:** نمودار چندجمله‌ای $P(x)=x^2-2x+3$ یک سهمی است که طول رأس آن $x=-\frac{-2}{2\times 1}=1$ است و عرض آن $P(1)=1-2+3=2$. در شکل می‌بینید که هر نقطه‌ی دیگری روی سهمی عرض بیش‌تری از رأس سهمی دارد، یعنی همواره $P(x)\geq 2$.



این نتیجه را به این صورت نیز می‌توان بیان کرد:

$$P(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

همواره داریم: $(x-1)^2\geq 0$، پس:

$$(x-1)^2+2\geq 2\Rightarrow P(x)\geq 2$$

مسأله‌ی (۲۵): تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ **را با شرط** $a<0$ **در نظر بگیرید. با محاسبات ریاضی نشان بدهید که بیش‌ترین مقدار تابع** f **برابر** $-\frac{\Delta}{4a}$ **است.**

حل: داخل ضابطه‌ی تابع، عبارت مربع کامل ایجاد می‌کنیم:

$$f(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})-\frac{b^2}{4a}+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

همواره داریم: $(x+\frac{b}{2a})^2\geq 0$، بنابراین با توجه به فرض $a<0$ داریم:

$$a(x+\frac{b}{2a})^2\leq 0\Rightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}\leq c-\frac{b^2}{4a}\Rightarrow f(x)\leq c-\frac{b^2}{4a}$$

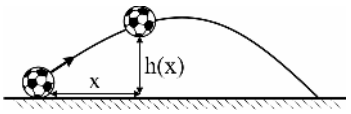
پس همواره $f(x)\leq c-\frac{b^2}{4a}$ و چون به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ داریم $f(x)=c-\frac{b^2}{4a}$، بیش‌ترین مقدار تابع همان $c-\frac{b^2}{4a}$ است. حال داریم:

$$c-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}$$

مسأله‌ی (۲۶): کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{-1+3x-3x^2}$ **چقدر است؟**

حل: با یک کسر مواجه‌ایم که چون مخرج آن هیچ ریشه‌ای ندارد (چرا؟)، همیشه تعریف شده است. در واقع چون در مخرج کسر $\Delta<0$ و ضریب x^2 منفی است، همواره حاصل آن عددی منفی می‌شود. می‌دانیم در چنین مواقعی هر چقدر مخرج بزرگ‌تر باشد، کل کسر کوچک‌تر می‌شود. پس باید بیش‌ترین مقدار عبارت مخرج کسر را بیابیم.

مخرج کسر یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ است که به ازای $x=-\frac{3}{2\times(-3)}=\frac{1}{2}$ ماکزیمم می‌شود. پس بیش‌ترین مقدار مخرج کسر $-1+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$ می‌شود، در نتیجه کم‌ترین مقدار $f(x)$ برابر ۴- است.



مسأله‌ی (۲۷): یک توپ فوتبال بر اثر شوت بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از زمین را می‌توانیم با رابطه‌ی $h(x) = -۰/۰۲۶x(x-۴۶)$ مدل کنیم که x فاصله‌ی افقی توپ از نقطه‌ی اولیه است (واحد هر دو بر حسب متر).

الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد؟

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

حل: الف) وقتی توپ به زمین می‌خورد داریم $h(x) = ۰$ (زیرا ارتفاع توپ از زمین صفر می‌شود). واضح است که این معادله دو جواب $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = ۴۶$ را دارد که یکی به نقطه‌ی اولیه مربوط است و دیگری نقطه‌ی پایان. بنابراین توپ ۴۶ متر فاصله‌ی افقی را طی می‌کند.

ب) باید بیش‌ترین مقدار $h(x) = -۰/۰۲۶(x^۲ - ۴۶x)$ را بیابیم. بیش‌ترین مقدار این تابع، در همان طول نقطه‌ی رأس سهمی رخ می‌دهد، یعنی به ازای $x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴۶}{۲} = ۲۳$. داریم:

$$h(۲۳) = -۰/۰۲۶ \times ۲۳ \times (-۲۳) = ۱۳/۷۵۴$$

پس بیش‌ترین ارتفاع توپ از سطح زمین $۱۳/۷۵۴$ متر است.

مسأله‌ی (۲۸): برای یک کارخانه‌ی تولید پارچه مشخصات اقتصادی زیر به دست آمده:

- هزینه‌ی نگهداری دستگاه‌ها و سایر امکانات، روزانه ۲۵۰۰ دلار است.

- قیمت تولید هر واحد پارچه ۹۰۰ دلار است.

- اگر قیمت هر واحد پارچه را $۲۵۰۰ - m$ دلار اعلام کنیم، روزانه m واحد کالا به فروش خواهد رفت!

برای حداکثر شدن سود کارخانه باید قیمت کالا را چقدر در نظر بگیریم؟

حل: با توجه به شرایط بالا، درآمد روزانه‌ی کارخانه $m(۲۵۰۰ - m)$ دلار است. هزینه‌ی روزانه نیز $۲۵۰۰ + ۹۰۰m$ است. به این ترتیب سود روزانه‌ی کارخانه برابر است با:

$$m(۲۵۰۰ - m) - (۲۵۰۰ + ۹۰۰m) = -m^۲ + ۱۶۰۰m - ۲۵۰۰$$

این عبارت درجه‌ی ۲ به ازای $m = -\frac{۱۶۰۰}{۲ \times (-۱)} = ۸۰۰$ بیش‌ترین مقدار خود را می‌گیرد. یعنی برای حداکثر شدن سود باید قیمت هر واحد پارچه را $۲۵۰۰ - ۸۰۰ = ۱۷۰۰$ دلار اعلام کنیم.

مسأله‌ی (۲۹): می‌خواهیم با ۲۰۰ متر سیم خاردار مرز دو قطعه زمین مساوی را مشخص کنیم (تصویر زمین‌ها از بالا مطابق شکل روبه‌رو است!). بیش‌ترین سطحی که می‌توانیم مرزش را مشخص کنیم، چند متر مربع است؟

حل: این‌جا باید مجهول‌ها را با زبان ریاضی نام‌گذاری کنیم و سپس سطح زمین را به صورت یک عبارت درجه‌ی ۲ بیان کنیم تا بتوانیم بیش‌ترین مقدار آن را بیابیم.

عرض مستطیل را y و طول آن را x در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم: $۳y + ۲x = ۲۰۰$. می‌خواهیم $S = xy$ ماکزیمم شود. داریم:

$$۳y + ۲x = ۲۰۰ \Rightarrow x = \frac{۲۰۰ - ۳y}{۲} \xrightarrow{S=xy} S = y(\frac{۲۰۰ - ۳y}{۲}) = -\frac{۳}{۲}y^۲ + ۱۰۰y$$

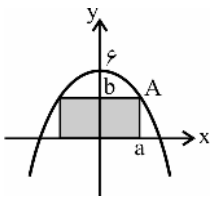
S یک تابع درجه‌ی ۲ بر حسب y است. بیش‌ترین مقدار آن به ازای $y = -\frac{۱۰۰}{-۳} = \frac{۱۰۰}{۳}$ رخ می‌دهد. به ازای این مقدار داریم:

$$S_{max} = \frac{۱۰۰}{۳} \times \frac{۲۰۰ - ۱۰۰}{۲} = \frac{۵۰۰۰}{۳}$$

پس بیش‌ترین مقدار S، $\frac{۵۰۰۰}{۳}$ متر مربع است.

تست (۹): از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن‌ها منطبق بر محور xها است و دو رأس دیگر آن‌ها روی سهمی $y = ۶ - x^۲$ قرار دارد، مستطیلی را در نظر می‌گیریم که بیش‌ترین محیط را داشته باشد. محیط این مستطیل چقدر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ٤) ۱۴



حل: همان‌طور که در شکل می‌بینید هدف سؤال، ماکزیمم بودن محیط مستطیل هاشورزده است.
طول نقطه‌ی A را a و عرض آن را b در نظر می‌گیریم. واضح است که طول مستطیل $۲a$ و عرض آن b است. پس می‌خواهیم $P = ۴a + ۲b$ بیش‌ترین مقدار را داشته باشد.
چون نقطه‌ی A روی سهمی $y = ۶ - x^۲$ است، مختصات آن در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند. بنابراین:

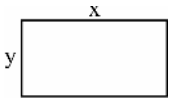
$$b = ۶ - a^۲ \xrightarrow{P=۴a+۲b} P = ۴a + ۲(۶ - a^۲) = -۲a^۲ + ۴a + ۱۲$$

عبارت P یک عبارت درجه‌ی ۲ بر حسب a است که به ازای $a = -\frac{۴}{-۴} = ۱$ بیش‌ترین مقدار خود را دارد. این بیش‌ترین مقدار برابر است با:

$$-۲ + ۴ + ۱۲ = ۱۴$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مسأله‌ی (۳۰): نشان دهید از بین همه‌ی مستطیل‌ها با محیط ثابت، مربع بیش‌ترین مساحت را دارد.



حل: اگر طول و عرض مستطیل را x و y در نظر بگیریم، مقدار $۲x + ۲y$ ثابت است و می‌خواهیم ببینیم چه وقتی $S = xy$ بیش‌ترین مقدار خود را دارد.
فرض می‌کنیم $۲x + ۲y = c$ که c عددی ثابت است. داریم:

$$۲y = c - ۲x \Rightarrow y = \frac{c}{۲} - x \Rightarrow S = x(\frac{c}{۲} - x) = -x^۲ + \frac{c}{۲}x$$

S یک عبارت درجه‌ی ۲ بر حسب x است که به ازای $x = -\frac{\frac{c}{۲}}{-۲} = \frac{c}{۴}$ بیش‌ترین مقدار خود را دارد. به ازای $x = \frac{c}{۴}$ داریم $y = \frac{c}{۲} - \frac{c}{۴} = \frac{c}{۴}$، یعنی $x = y$، بنابراین مستطیل به یک مربع تبدیل می‌شود.

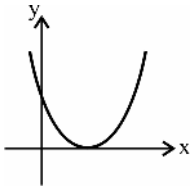
با راه‌حلی شبیه مسأله‌ی (۳۰) نتیجه می‌گیریم:

نکته: **اگر حاصل‌جمع دو متغیر مثبت مانند x و y، عددی ثابت باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار را دارد که $x = y$.**

مثال: اگر $۲x + ۳y = ۶$ و $x, y > ۰$، آن‌گاه حاصل‌ضرب $۲x \times ۳y$ وقتی ماکزیمم است که $۲x = ۳y = ۳$ (در این‌جا $a = ۲x$ یک متغیر و $b = ۳y$ متغیر دیگر است).

مسأله‌ی (۳۱): اگر $x > ۰$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{۴}{x}$ را بیابید.

حل: راه اول: فرض می‌کنیم کم‌ترین مقدار تابع a باشد، پس همواره داریم:



$$f(x) \geq a \Rightarrow x + \frac{۴}{x} \geq a \xrightarrow{\times x} x^۲ + ۴ \geq ax \Rightarrow x^۲ - ax + ۴ \geq ۰$$

به یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ رسیده‌ایم که باید همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، و باید حتماً یک‌بار برابر صفر شود، بنابراین نمودار سهمی شکل آن بر محور xها مماس است. در نتیجه $\Delta = ۰$ و داریم:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow a = \pm ۴$$

واضح است که $a > ۰$، پس کم‌ترین مقدار تابع برابر $a = ۴$ است.

راه دوم: ثابت می‌کنیم همواره $f(x) \geq ۴$ و چون به ازای $x = ۲$ داریم $f(x) = ۴$، پس کم‌ترین مقدار تابع ۴ است. با روابط برگشت‌پذیر زیر داریم:

$$f(x) \geq ۴ \Leftrightarrow x + \frac{۴}{x} \geq ۴ \Leftrightarrow x^۲ + ۴ \geq ۴x \Leftrightarrow x^۲ - ۴x + ۴ \geq ۰ \Leftrightarrow (x - ۲)^۲ \geq ۰$$

نامساوی آخر درست است، پس به صورت برگشت‌پذیر نامساوی اول نیز درست می‌شود.

یادداشت: در مسأله‌ی (۳۱) اگر قرار می‌دادید $y=\frac{۴}{x}$، آن‌گاه دو متغیر x و y داشتید که حاصل‌ضرب آن‌ها مقداری ثابت بود $(xy=۴)$. دیدید که حاصل‌جمع آن‌ها (یعنی همان $f(x)$)، وقتی کم‌ترین مقدار را دارد که $x=y=۲$.

نکته: **اگر حاصل‌ضرب دو متغیر مثبت مانند x و y، مقداری ثابت باشد، آن‌گاه حاصل‌جمع آن‌ها وقتی کم‌ترین مقدار را دارد که $x=y$.**

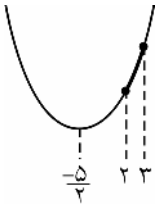
◄ **مثال:** چون ضرب x و $y=\frac{۱}{x}$ مقدار ثابت ۱ است، وقتی $x+\frac{۱}{x}$ می‌نیمم است که $x=۱$.

نکته:
- **عبارت $x+\frac{۱}{x}$، برای $x>۰$ می‌نیمم دارد، در واقع $x+\frac{۱}{x}\geq ۲$.**
- **این عبارت برای $x<۰$ ماکزیمم دارد، در واقع $x+\frac{۱}{x}\leq -۲$.**

* ❍ **مسأله‌ی (۳۲): اگر $x^۲-۵x+۶\leq ۰$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار چندجمله‌ای $P(x)=x^۲+۵x+۶$ را به دست آورید.**

حل: ابتدا محدوده‌ی x را به دست می‌آوریم:

$$x^۲-۵x+۶\leq ۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۲)\leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۲\leq x\leq ۳$$



حالا دقت کنید که با وجود آن‌که عبارت P یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ است، ولی می‌نیمم آن به ازای $x=-\frac{۵}{۲}$ رخ نمی‌دهد! همان‌طور که در سهمی مشخص کرده‌ایم، در محدوده‌ی $۲\leq x\leq ۳$ روی بخش پررنگ سهمی قرار داریم. پس پایین‌ترین نقطه، همان نقطه‌ی متناظر $x=۲$ است. یعنی کم‌ترین مقدار تابع برابر است با:

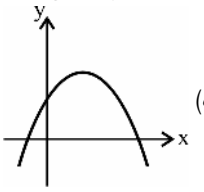
$$P(۲)=۴+۵\times ۲+۶=۲۰$$

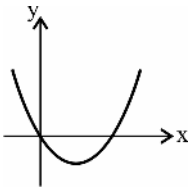
تمرین‌های بخش ۱–۵

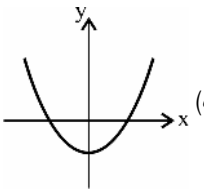
۱- **سهمی‌های زیر را در صفحه‌ی مختصات رسم کنید. در هر مورد، محور تقارن و مختصات رأس سهمی را به دست آورید.**

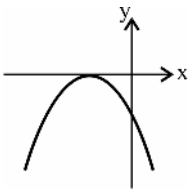
الف) $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۲x$ ب) $y=\frac{۱}{۲}x^۲+۳$ پ) $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۳$

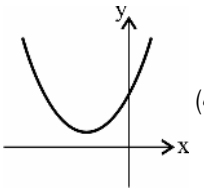
۲- **هر یک از نمودارهای زیر مربوط به یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ مانند $P(x)=ax^۲+bx+c$ است. در هر مورد، علامت ضرایب a، b و c و علامت Δ را تعیین کنید.**

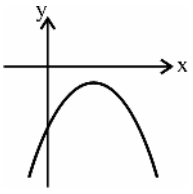
الف)


ب)


پ)


ت)


ث)


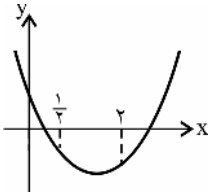
ج)


۳- در هر یک از حالت‌های زیر، مختصات سه نقطه از یک سهمی را نوشته‌ایم. معادله‌ی سهمی را تعیین کنید.

الف) $A(۱,-۶)$ ، $B(۲,-۱)$ و $C(۴,-۳)$

ب) $A(-۴,-۶)$ ، $B(۰,-۲)$ و $C(۲,۶)$

۴- در شکل روبه‌رو نمودار چندجمله‌ای $P(x)=ax^۲+bx+c$ رسم شده است. ثابت کنید: $۵a+۴b+۵c<۰$

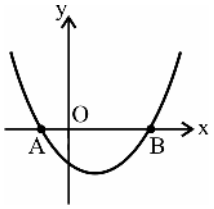


۵- برای چندجمله‌ای $P(x)=ax^۲+bx+c$ می‌دانیم $P(۱)$ و $P(-۱)$ هم‌علامت‌اند. ثابت کنید: $b^۲\le(a+c)^۲$

۶- درباره‌ی چندجمله‌ای‌های درجه‌ی دوم $P(x)$ و $Q(x)$ می‌دانیم: $P(۰)=۹$ ، $P(-۱)=۲۵$ ، $P(۱)=۱$ ، $Q(۰)=-۳$ ، $Q(-۱)=۰$ و $Q(۱)=-۲$. جواب‌های معادله‌ی $\frac{P(x)}{۳Q(x)}=\frac{۱}{۲}$ را بیابید.

۷- اگر برای چندجمله‌ای $P(x)=-۷ax^۲+۳a^۲x+۱۳$ داشته باشیم $P(۳)=-۵۹$ ، مقدار a را بیابید.

۸- نمودار چندجمله‌ای $P(x)=۳x^۲-۲x+m-۱$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. می‌دانیم $OA=\frac{۱}{۳}OB$. نقطه‌ی تلاقی سهمی با محور y ها چه عرضی دارد؟

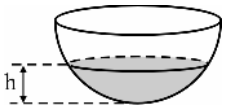


۹- شهرکی در حاشیه‌ی شهر در زمینی به ابعاد ۴۰۰×۶۰۰ تشکیل شده است. می‌خواهیم طول و عرض زمین را به اندازه‌ی یکسان گسترش دهیم، طوری که مساحت آن دو برابر شود. مقدار افزایش چند متر است؟

۱۰- از سال ۱۹۹۵ میلادی به بعد، مقدار دقایق صحبت مردم با تلفن با تابع $F(x)=۰/۳x^۲+۸/۹x+۶۱/۸$ مدل شده است که در آن x بر حسب واحد سال است و $F(x)$ بر حسب میلیون دقیقه! $x=۰$ بیانگر سال ۱۹۹۵ است. در چه سالی میزان ترافیک تلفن به ۲۷۵ بیلیون دقیقه می‌رسد؟

۱۱- طول یک مستطیل از سه برابر عرض آن ۳ واحد کم‌تر است. اگر مساحت مستطیل ۱۱۹ واحد مربع باشد، طول آن چند واحد است؟

۱۲- یک کاسه‌ی ظرف‌شویی به شکل نیم‌کره به شعاع ۶ سانتی‌متر مفروض است. حجم آب در کاسه را با رابطه‌ی $V(h)=۶\pi h^۲-\frac{\pi}{۳}h^۳$ مدل می‌کنیم. هنگامی که حجم آب از نظر عددی ۱۵π برابر h باشد، ارتفاع آب را به دست آورید.



۱۳- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(x^۲+x)^۲-۸(x^۲+x)+۱۲=۰$

ب) $\sqrt[۳]{x^۲}-۳\sqrt[۳]{x}-۱۰=۰$

پ) $x^۴-۳۶=۵x^۲$

ت) $x^{-۴}-۱۳x^{-۲}+۳۶=۰$

۱۴- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(x-۲)(x-۱)(x+۵)(x+۴)=-۸$

ب) $\frac{۱}{۲x^۲-x+۱}+\frac{۳}{۲x^۲-x+۳}=\frac{۱۰}{۲x^۲-x+۷}$

پ) $(۶x+۵)^۲(۳x+۲)(x+۱)=۳۵$

ت) $(\frac{x}{x+۱})^۲+(\frac{x+۱}{x})^۲=\frac{۱۷}{۴}$

ث) $۷(x+\frac{۱}{x})-۲(x^۲+\frac{۱}{x^۲})=۹$

* ج) $\frac{۴x}{۴x^۲-۸x+۷}+\frac{۳x}{۴x^۲-۱۰x+۷}=۱$

۱۵- x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ هستند. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\sqrt{x_1}+x_1x_2+\sqrt{x_2}$ ب) $|x_1^2-x_2^2|$ پ) $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}$

۱۶- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m+2)x^2+(2m+1)x+(m-1)=0$، مقدار m را چنان تعیین کنید که دو ریشه‌ی معادله در رابطه‌ی $\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}=1$ صدق کنند.

۱۷- اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+2bx+c=0$، دو ریشه‌ی حقیقی وارون یکدیگر داشته باشد، ثابت کنید: $|b|\geq|c|$

۱۸- اگر a یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشد، مقدار عبارت $A=\frac{16a-4}{a^2-8a+2}$ را به دست آورید.

۱۹- اگر در معادله‌ی $x^2+ax+b=0$، یک ریشه مجذور ریشه‌ی دیگر باشد، ثابت کنید:

$a^3-b(3a-1)+b^2=0$

۲۰- اگر دو معادله‌ی $x^2+ax+8=0$ و $x^2+x+a=0$ یک ریشه‌ی مشترک داشته باشند، مقدار a را به دست آورید.

۲۱- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2+x+c=0$ باشند و بدانیم: $\frac{2x_1^3}{2+x_2}+\frac{2x_2^3}{2+x_1}=-1$، آن‌گاه مقدار c را به دست آورید.

* ۲۲- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشند، مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$A=(x_1+4x_2)(2x_1+3x_2)(3x_1+2x_2)(4x_1+x_2)$

۲۳- اگر برای ریشه‌های $x^2-2x+c=0$ داشته باشیم: $7x_2-4x_1=47$، آن‌گاه مقدار c را به دست آورید.

۲۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-px+q=0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که:

الف) ریشه‌های آن از α و β، هر کدام ۲ واحد کم‌تر باشد.

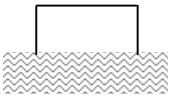
ب) ریشه‌های آن مجذور وارون α و β باشد.

پ) ریشه‌های آن $\alpha^2+\beta$ و $\beta^2+\alpha$ باشد.

۲۵- الف) بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=-x^2+5x-7$ را به دست آورید.

ب) کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=2x^2+8x-9$ را به دست آورید.

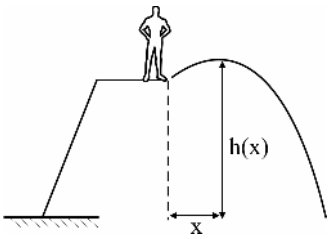
۲۶- کشاورزی می‌خواهد در کنار رودخانه با حصاری به طول ۲۰ متر، زمینی را برای خودش مرزبندی کند. بیش‌ترین مساحتی که می‌تواند مشخص کند، چقدر است؟



۲۷- ارتفاع یک شناگر هنگام شیرجه از روی سکو را با تابع $h(x)=-\frac{4}{9}x^2+\frac{24}{9}x+12$ مدل کرده‌ایم که x فاصله‌ی افقی شناگر از لبه‌ی سکو است.

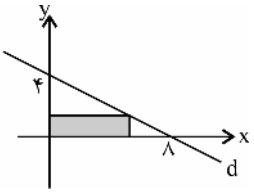
الف) ارتفاع سکو چقدر است؟

ب) حداکثر ارتفاعی که شناگر بالا می‌رود، چند متر است؟

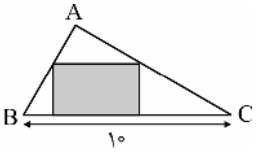


۲۸- کمپانی sony برای هر DVD بازی رایانه‌ای خود ۲۰ دلار قیمت گذاشته است و با این قیمت ۱۰۰۰۰ عدد DVD می‌فروشد. می‌دانیم به ازای هر دلاری که به قیمت هر DVD اضافه شود، ۱۰۰ عدد از تعداد فروش DVD ها کاسته می‌شود. کمپانی با چه قیمتی برای هر DVD، بیش‌ترین درآمد را خواهد داشت؟

۲۹- مستطیلی بین خط d و دو محور مختصات، مطابق شکل محصور شده است. بیش‌ترین مساحت مستطیل چقدر است؟



۳۰- در داخل مثلث ABC با قاعده‌ی ۱۰ واحد و مساحت ۴۰ واحد مربع، مستطیلی مطابق شکل محاط می‌کنیم. بیش‌ترین مساحت مستطیل چقدر است؟



WWW.RIAZISARA.IR
سایت ریاضی سرا

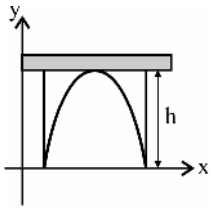
فصل ۱
چندجمله‌ای و معادله‌ی درجه‌ی دوم

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- معادله‌ی محور تقارن منحنی نمایش تابع $2x^2 + y - x - \frac{3}{2} = 0$ کدام است؟

۱) $x = -\frac{1}{2}$ ۲) $x = -\frac{1}{4}$ ۳) $x = \frac{1}{4}$ ۴) $x = \frac{1}{2}$

۲- در شکل مقابل، معادله‌ی منحنی طاق $y = -x^2 + 6x - 5$ است. ارتفاع طاق (یعنی مقدار h) چقدر است؟

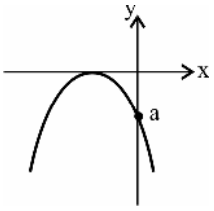


۱) ۳
۲) ۳/۵
۳) ۴
۴) ۴/۵

۳- اگر رأس سهمی $y = ax^2 + 2ax - 3$ روی نیمساز ربع اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۴- در شکل روبه‌رو سهمی به معادله‌ی $y = -2x^2 - 2mx - m^2 + 3$ رسم شده است. مقدار a چقدر است؟



۱) -1
۲) -2
۳) -3
۴) -4

۵- به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = (a-2)x^2 + ax - a - 2$ بالای محور x ها است؟

۱) $-\frac{4}{\sqrt{5}} < a < \frac{4}{\sqrt{5}}$ ۲) $-\frac{4}{\sqrt{5}} < a < 2$ ۳) $a > 2$ ۴) هیچ مقدار a

۶- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = (1-m)x^2 + x + m - 2$ از چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد و دارای ماکزیمم است؟

۱) $m < 1$ ۲) $m > 2$ ۳) $1 < m < 2$ ۴) $-1 < m < -2$

۷- نمودار تابع $y = x^2 + ax + 4 - a^2$ به ازای کدام مقادیر a از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد؟ (بزرگ‌ترین فاصله‌ی ممکن را انتخاب کنید.)

۱) $-2 \le a \le 0$ ۲) $-2 \le a \le 2$ ۳) $0 \le a \le 2$ ۴) $a \ge 2$

۸- نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = (ax-b)(bx-a)$ به ازای همه‌ی مقادیر a و b کدام وضعیت را دارد؟ $(|a| \neq |b|)$

۱) می‌نیمم دارد.
۲) محورهای مختصات را در سه نقطه قطع می‌کند.
۳) ماکزیمم دارد.
۴) محور x ها را در دو نقطه سمت راست مبدأ قطع می‌کند.

۹- به ازای کدام مقدار m، منحنی به معادله‌ی $y = mx^2 + 3x - 2$ محور x ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند؟

۱) $m < 0$ ۲) $m < \frac{3}{2}$ ۳) $m < -\frac{9}{8}$ ۴) $-\frac{9}{8} < m < 0$

۱۰- منحنی به معادله‌ی $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری- ۸۳)

۱) $-4 < a < 0$ ۲) $0 < a < 2$ ۳) $0 < a < 4$ ۴) $a > 4$

۱۱- خط به معادله‌ی $y=-\frac{۵}{۲}$، محور تقارن تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲- دو برابر عدد مثبتی از ثلث مربع آن عدد، ۹ واحد کم‌تر است. این عدد کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۱۳- معادله‌ی $x^۲+۲x\sin a+۱=۰$ به ازای کدام مقدار a ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

۱۴- به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=mx$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x+۱}{۱-x}$ را قطع نمی‌کند؟

۱) $۳-۲\sqrt{۲}<m<۳+۲\sqrt{۲}$ ۲) $۳-\sqrt{۲}<m<۳+\sqrt{۲}$

۳) $۲-۳\sqrt{۲}<m<۲+۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲-\sqrt{۲}<m<۲+\sqrt{۲}$

۱۵- به ازای کدام مقدار m دو منحنی $y=\frac{m(x-۳)}{۲x+۱}$ و $y=\frac{۲x+۱}{x-۳}$ در دو نقطه متقاطع‌اند؟ (آزاد- ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) -۲

۱۶- اگر معادله‌ی $(x-a)(x-b)-۱=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، کدام معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) $(x-a)(x-b)+۲=۰$ ۲) $(b-x)(x-a)-۲=۰$ ۳) $(x-a)(x-b)-۲=۰$ ۴) $x^۲-ab=۰$

۱۷- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+ax+۴=۰$ باشند، محدوده‌ی a کدام باشد تا رابطه‌ی $-۱<\alpha<۲<\beta$ بین ریشه‌های معادله برقرار باشد؟

۱) $a<-۴$ ۲) $a<۵$ ۳) $a>۵$ ۴) $-۴<a<۵$

۱۸- معادله‌ی $(x^۲+\sqrt{x}+۱)^۲+x^۲+\sqrt{x}-۱=۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۹- اگر معادله‌ی $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری- ۸۵)

۱) $m<-۴$ ۲) $m>۴$ ۳) $-۴<m<۴$ ۴) $۴<m<۹$

۲۰- دو معادله‌ی $x^۳-۵x^۲+۴x+۶=۰$ و $x^۳-۵x^۲+۸x-۶=۰$ چند ریشه‌ی مشترک دارند؟ (آزاد- ۸۳)

۱) دو ۲) سه ۳) صفر ۴) یک

۲۱- اگر $k^۲+ak+b=۰$ و $k'^۲+ak'+b=۰$ باشد، $k+k'$ کدام است؟ (آزاد- ۸۳)

۱) b ۲) a ۳) $-a$ ۴) $-b$

۲۲- در معادله‌ی $۳x^۲-۱۵x+m=۰$، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیش‌تر باشد، مقدار m کدام است؟ (سراسری- ۸۲)

۱) $\frac{۵۹}{۵}$ ۲) $\frac{۶۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵۹}{۴}$ ۴) $\frac{۶۳}{۴}$

۲۳- به ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{۱}{۸}$ واسطه‌ی عددی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰$ است؟ (سراسری- ۸۴)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۴- در معادله‌ی $x^۲-۴x+۱=۰$، حاصل $x_۱+\frac{۱}{x_۱}+x_۲+\frac{۱}{x_۲}$ کدام است؟ (آزاد- ۸۳)

۱) -۸ ۲) -۴ ۳) ۸ ۴) ۴

۲۵- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+x-۳=۰$ باشند، حاصل عبارت $\alpha^۳+\beta^۳+\alpha^۲+\beta^۲$ برابر است با:

۱) -۳ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۶- در معادله‌ی $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$، حاصل $x_1^6+x_2^6$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۵)

۱) ۵ ۲) ۶۵ ۳) ۱۷ ۴) ۹

۲۷- به ازای کدام مقدار k بین دو ریشه‌ی معادله‌ی $x^2-k^2x+8=0$، رابطه‌ی $\sqrt[3]{x'}+\sqrt[3]{x''}=3$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ± 3 ۴) ± 4

۲۸- اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ باشند، مقدار عبارت $x'\sqrt{x''}+x''\sqrt{x'}$ برابر است با:

۱) $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ ۲) $2\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ۳) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ۴) $2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

۲۹- خط $x+y=8$ منحنی $y=\frac{x-1}{x-2}$ را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند. مختصات وسط AB در کدام رابطه صدق می‌کند؟

۱) $y-x=0$ ۲) $y-x-1=0$ ۳) $y-x+1=0$ ۴) $y+x=0$

۳۰- مجموع قدرمطلق ریشه‌های معادله‌ی $x^4-25x^2+144=0$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۳۱- در معادله‌ی $7x^2-6x+1=0$، اگر ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند، کدام درست است؟ (آزاد- ۸۳)

۱) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$ ۲) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$

۳) $x_1(1+x_2)=1-x_2$ ۴) $x_1+x_2>\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$

۳۲- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-4x+1=0$، حاصل عبارت $(x_2^2-4x_2+4)(x_1^2-4x_1+2)$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۲)

۱) ۸ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۳- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+2x-1=0$ حاصل $x_1^4+4x_2^2-4x_2$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۴)

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۴

۳۴- α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2x-1=0$ هستند و داریم $(\alpha^3+2\alpha^2+m)(\beta^3+2\beta^2+m)=2$. در این صورت مقدار m کدام است؟

۱) ۱ و ۳ ۲) ۱- و ۳ ۳) ۱ و ۳- ۴) ۱- و ۳-

۳۵- به ازای چه مقدار m بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5mx+16=0$ روابط $x_1^3=x_2$ و $x_2>0$ برقرار است؟

۱) ۲ و ۲- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۸

۳۶- به ازای کدام مقدار k در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-x+k=0$ بین ریشه‌ها رابطه‌ی $x_1+2x_2=3$ برقرار است؟

۱) ۱۲- ۲) ۱۰- ۳) ۸ ۴) ۶

۳۷- به ازای کدام مقدار m معادله‌ی درجه دوم $mx^2+5x+m^2-6=0$ دو ریشه‌ی حقیقی و معکوس هم دارد؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۳۸- حدود m برای آن‌که معادله‌ی $(m-1)x^2+mx+m-3=0$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه داشته باشد، کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $1<m<3$ ۳) $m<1$ ۴) $0<m<1$

۳۹- حدود m برای آن که معادله‌ی درجه دوم $x^2-x+m=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد، کدام است؟

۱) $m<\frac{1}{4}$ ۲) $0<m<\frac{1}{4}$ ۳) $m>0$ ۴) $m>\frac{1}{4}$ یا $m<0$

۴۰- ریشه‌های کدام معادله از ریشه‌های معادله‌ی $x^3-x=0$ یک واحد بیش‌تر است؟

۱) $x^3-3x^2+2x=0$ ۲) $x^3+3x^2-2x=0$

۳) $x^3-3x^2-2x=0$ ۴) $x^3+3x^2+2x=0$

۴۱- در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ بین ضرایب رابطه‌ی $9a+3b+c=0$ برقرار است. کدام گزینه یکی از ریشه‌های معادله است؟

۱) $\frac{3c}{a}$ ۲) -3 ۳) $-\frac{b+3a}{a}$ ۴) $\frac{2c}{3a}$

۴۲- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2+10x-16=0$ ۲) $x^2-10x+16=0$ ۳) $x^2-10x-16=0$ ۴) $x^2+10x+16=0$

۴۳- اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2-7x+3=0$ باشند، مقدار a کدام است؟ (سراسری-۸۶)

۱) -14 ۲) -12 ۳) -8 ۴) -6

۴۴- اگر بیش‌ترین مقدار تابع $y=-x^2+kx+k$ برابر $2k$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴ و صفر ۲) صفر و ۶ ۳) ۴ و ۲ ۴) ۶ و ۲

۴۵- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیش‌تر است. اگر حاصل‌ضرب آن‌ها می‌نیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟ (سراسری- ۸۱)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۶- از بین مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن‌ها ۱۲ است، بیش‌ترین مساحت آن‌ها چند واحد مربع است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

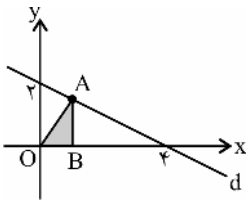
۴۷- بر دایره‌ای به شعاع R یک لوزی محیط می‌کنیم. محیط این لوزی وقتی می‌نیمم است که ضلع آن برابر باشد با:

۱) R ۲) $3R$ ۳) $2R$ ۴) $\frac{3}{2}R$

۴۸- کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین نقاط منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}x^2-2$ و نقطه‌ی ثابت $A(0,11)$ کدام است؟

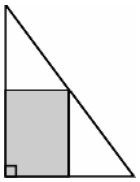
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۶

۴۹- از بین تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مطابق شکل بین محورهای مختصات و خط ثابت d قرار دارند، بیش‌ترین مساحت ممکن چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۳، ۴ و ۵ مطابق شکل، مستطیلی محاط کرده‌ایم. بیش‌ترین مساحت مستطیل کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۳/۵
۴) ۲/۵

فصل ۱
چندجمله‌ای و معادله‌ی درجه‌ی دوم

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۳) ضابطه‌ی تابع را به صورت درجه‌ی ۲ می‌نویسیم:

$$2x^2+y-x-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow y=-2x^2+x+\frac{3}{2} \Rightarrow \text{محور تقارن}: x=-\frac{1}{2\times(-2)}=\frac{1}{4}$$

۲- گزینه‌ی (۳) مقدار h همان عرض نقطه‌ی رأس سهمی است. طول این نقطه $x=-\frac{6}{2\times(-1)}=3$ است و عرض آن برابر است با:

$$h=-3^2+6\times3-5=4$$

۳- گزینه‌ی (۱) مختصات رأس سهمی $(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ است که در این‌جا $b=2a$. برای این‌که این نقطه روی خط $y=x$ باشد، داریم:

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow 2b=\Delta \xrightarrow{b=2a} 4a=4a^2-4\times a\times(-3)$$

$$\Rightarrow 4a^2=-8a \Rightarrow a_1=0\ ,\ a_2=-2$$

واضح است که $a=0$ قابل‌قبول نیست.

۴- گزینه‌ی (۳) سهمی بر محور xها مماس است، پس معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ی مضاعف دارد، بنابراین:

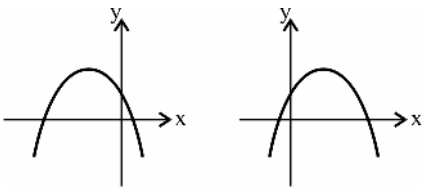
$$\Delta=0 \Rightarrow 4m^2-4\times(-2)\times(-m^2+3)=0 \Rightarrow m^2=6$$

عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌ها از جای‌گذاری $x=0$ در معادله به دست می‌آید، یعنی $a=-m^2+3=-6+3=-3$

۵- گزینه‌ی (۴) باید سهمی رو به بالا باشد و در هیچ نقطه‌ای محور xها را قطع نکند. پس باید ضریب x^2 مثبت و Δ منفی باشد:

$$\Delta<0 \Rightarrow a^2-4(a-2)(-a-2)<0 \Rightarrow a^2+4(a^2-4)<0 \Rightarrow 5a^2<16 \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}}<a<\frac{4}{\sqrt{5}}$$

شرط مثبت بودن ضریب x^2 نتیجه می‌دهد $a>2$ که چون $2>\frac{4}{\sqrt{5}}$ با محدوده‌ی قبلی هیچ اشتراکی ندارد.

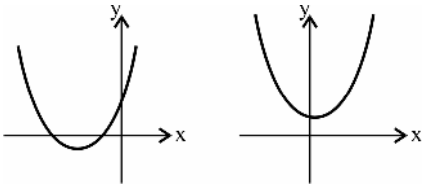


۶- گزینه‌ی (۲) از این‌که سهمی دارای ماکزیمم است نتیجه می‌گیریم رو به پایین است، پس $1-m<0$، در نتیجه $m>1$. از طرفی مطابق شکل در هر حالتی که باشیم، سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند، بنابراین:

$$m-2>0 \Rightarrow m>2$$

اشتراک دو محدوده همان $m>2$ می‌شود.

۷- گزینه‌ی (۳) با توجه به آن‌که سهمی رو به بالا است، باید به یکی از دو شکل روبه‌رو باشد، پس سهمی باید دو شرط داشته باشد: یکی آن که رأسش در ناحیه‌ی چهارم نباشد، دوم آن که محل برخورد آن با محور yها بالای مبدأ باشد. برای شرط دوم داریم:



$$\xrightarrow{x=0} y=4-a^2\geq0 \Rightarrow -2\leq a\leq2$$

برای بررسی شرط اول می‌دانیم طول رأس سهمی برابر است با $x_S=\frac{-a}{2}$. حالتی را بررسی می‌کنیم که رأس سهمی در ناحیه‌ی چهارم واقع شود:

$$x_S=-\frac{a}{2} \Rightarrow y_S=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{16-5a^2}{4a}$$

$$\text{رأس سهمی در ناحیه‌ی چهارم} \Rightarrow x_S>0\ ,\ y_S<0 \Rightarrow -\frac{a}{2}>0\ ,\ \frac{16-5a^2}{4a}<0 \Rightarrow a<0\ ,\ 16-5a^2>0 \Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{5}}<a<0$$

پس برای آن که رأس سهمی در ناحیه‌ی چهارم واقع نشود، باید: $a\geq0$ یا $a\leq-\frac{4}{\sqrt{5}}$. اشتراک این محدوده با شرط اول، محدوده‌ی مجاز a را حاصل می‌کند: $a\in[-2,-\frac{4}{\sqrt{5}}]\cup[0,2]$

در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی (۳) در این محدوده قرار دارد.

۸- گزینه‌ی (۲) ضریب x^2 در عبارت درجه‌ی ۲ برابر ab است. این ضریب ممکن است مثبت یا منفی باشد، پس سهمی می‌تواند ماکزیمم یا می‌نیمم داشته باشد. از طرفی معادله‌ی $y=0$ دو ریشه‌ی $x_1=\frac{a}{b}$ و $x_2=\frac{b}{a}$ را دارد که چون $|a|\neq|b|$، این دو ریشه دو عدد متمایزند. اگر a و b علامت‌های مختلفی داشته باشند، داریم: $x_1,x_2<0$، پس سهمی محور xها را در سمت چپ مبدأ قطع می‌کند. به این ترتیب گزینه‌های (۱) ، (۳) و (۴) رد می‌شوند و گزینه‌ی (۲) پاسخ تست است. برای اثبات آن به این دقت کنید که سهمی در نقطه‌ی x_1 و x_2 محور طول‌ها را قطع می‌کند و در نقطه‌ی به عرض ab محور yها را.

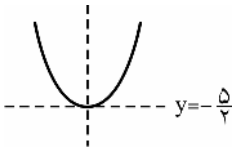
۹- گزینه‌ی(۴) باید معادله‌ی $mx^2+3x-2=0$ دو ریشه‌ی مثبت متمایز داشته باشد. پس:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>0\Rightarrow 9+8m>0\Rightarrow m>-\frac{9}{8}\\ x_1+x_2>0\Rightarrow -\frac{3}{m}>0\Rightarrow m<0\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{9}{8}<m<0$$

۱۰- گزینه‌ی (۳) معادله‌ی $(x-1)(x^2-ax+a)=0$ قطعاً یک ریشه‌ی $x=1$ را دارد و می‌دانیم $x^2-ax+a=0$ ریشه‌ی $x=1$ ندارد (چرا؟). پس برای آن که معادله همین یک ریشه را داشته باشد، باید معادله‌ی درجه دوم ریشه نداشته باشد. یعنی:

$$\Delta=a^2-4a<0\Rightarrow a(a-4)<0\Rightarrow 0<a<4$$

۱۱- گزینه‌ی (۴) وقتی خط افقی $y=-\frac{5}{2}$ محور تقارن سهمی را روی خود سهمی قطع می‌کند، نتیجه می‌گیریم محل برخورد آن‌ها همان رأس سهمی است. بنابراین عرض رأس سهمی برابر $-\frac{5}{2}$ است:



$$-\frac{\Delta}{4a'}=-\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{9-2a}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow a=2$$

۱۲- گزینه‌ی (۱) آن عدد را x می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$2x=\frac{1}{3}x^2-9\Rightarrow x^2-6x-27=0\Rightarrow(x-9)(x+3)=0\Rightarrow x_1=9\ ,\ x_2=-3$$

۱۳- گزینه‌ی (۳) باید $\Delta\geq 0$، پس داریم:

$$\Delta=(2\sin a)^2-4=4(\sin^2 a-1)\xrightarrow{\Delta\geq 0}\sin^2 a-1\geq 0\Rightarrow\sin^2 a\geq 1$$

همواره داریم $\sin^2 a\leq 1$، پس برای برقراری شرط بالا باید $\sin^2 a=1$، یعنی $\sin a=\pm 1$ که تنها در گزینه‌ی (۳) این شرط برقرار است.

۱۴- گزینه‌ی (۱) باید معادله‌ی $\frac{x+1}{1-x}=mx$ ریشه نداشته باشد. پس:

$$x+1=mx-mx^2\Rightarrow mx^2+x(1-m)+1=0\Rightarrow\Delta=(1-m)^2-4m=1-6m+m^2<0$$

عبارت $1-6m+m^2$، دو ریشه برابر $3\pm 2\sqrt{2}$ دارد، بنابراین طبق تعیین علامت آن محدوده‌ی m مشخص می‌شود.

۱۵- گزینه‌ی (۲) راه اول: باید معادله‌ی $\frac{2x+1}{x-3}=\frac{m(x-3)}{2x+1}$ دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد:

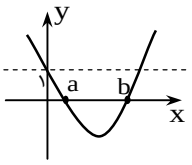
$$\frac{2x+1}{x-3}=\frac{m(x-3)}{2x+1}\Rightarrow(2x+1)^2=m(x-3)^2\Rightarrow(m-4)x^2-(6m+4)x+9m-1=0$$

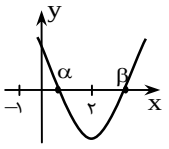
$$\Delta>0\Rightarrow(6m+4)^2-4(m-4)(9m-1)>0\Rightarrow 196m>0\Rightarrow m>0$$

به این ترتیب گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرفی اگر $m=4$، معادله‌ی درجه‌ی ۲ موردنظر تبدیل به درجه‌ی (۱) می‌شود، پس گزینه‌ی (۱) نیز رد می‌شود.

راه دوم: به معادله‌ی $m=(\frac{2x+1}{x-3})^2$ می‌رسیم. برای این‌که این معادله ۲ ریشه داشته باشد، باید $m>0$، پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. هم‌چنین می‌دانیم کسر $\frac{2x+1}{x-3}$ هیچ‌گاه برابر ۲ نمی‌شود، پس $m\neq 4$، بنابراین تنها گزینه‌ی (۲) باقی می‌ماند.

۱۶- گزینه‌ی (۳) منحنی $y=(x-a)(x-b)$ یک سهمی با تقعر رو به بالا است و ریشه‌های معادله‌ی $(x-a)(x-b)-1=0$، طول نقاط تقاطع این سهمی و خط $y=1$ می‌باشند. واضح است که اگر این خط را بالاتر ببریم، باز هم با سهمی در ۲ نقطه برخورد می‌کند. پس معادله‌ی گزینه‌ی (۳) نیز دو جواب دارد (خط $y=2$). گزینه‌های دیگر لزوماً دو جواب ندارند.





۱۷- گزینه‌ی (۱) نمودار تابع یک سهمی با تقعر رو به بالا است. پس بین دو ریشه، علامت عبارت منفی و خارج فاصله‌ی بین آن دو علامت مثبت است. یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha<۲<\beta\Rightarrow f(۲)<۰\Rightarrow ۴+۲a+۴<۰\Rightarrow a<-۴\\ -۱<\alpha<\beta\Rightarrow f(-۱)>۰\Rightarrow ۱-a+۴>۰\Rightarrow a<۵\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap} a<-۴$$

۱۸- گزینه‌ی (۴) با جای‌گذاری $t=x^۲+\sqrt{x}+۱$ داریم:

$$t^۲+t-۲=۰\Rightarrow (t+۲)(t-۱)=۰\Rightarrow t_۱=-۲, t_۲=۱$$

به وضوح $t>۰$، بنابراین $t_۱=-۲$ جواب ندارد. هم‌چنین داریم:

$$t_۲=۱\Rightarrow x^۲+\sqrt{x}+۱=۱\Rightarrow x^۲+\sqrt{x}=۰\xrightarrow{\sqrt{x}=k} k^۴+k=۰\Rightarrow k(k^۳+۱)=۰\Rightarrow k_۱=۰, k_۲=-۱$$

که باز هم $k_۲=-۱$ به دلیل $\sqrt{x}=k\geq ۰$ غیر قابل قبول است. تنها $x=۰$ جواب است.

۱۹- گزینه‌ی (۲) با جای‌گذاری $t=x^۲$ به معادله‌ی $t^۲-(m+۲)t+(m+۵)=۰$ می‌رسیم.

برای آن که معادله‌ی اول، ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، باید اولاً این معادله‌ی جدید ۲ ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد $(\Delta>۰)$ و علاوه بر آن هر ۲ ریشه نیز مثبت باشند تا معادله‌ی $t=x^۲$ به دو پاسخ متمایز برسد. پس:

$$\Delta>۰\Rightarrow (m+۲)^۲-۴(m+۵)>۰\Rightarrow m^۲-۱۶>۰\Rightarrow m>۴ \quad \text{یا} \quad m<-۴$$
$$t_۱, t_۲>۰\Rightarrow S=t_۱+t_۲>۰\Rightarrow m+۲>۰\Rightarrow m>-۲$$
$$t_۱, t_۲>۰\Rightarrow P=t_۱t_۲>۰\Rightarrow m+۵>۰\Rightarrow m>-۵$$

اشتراک سه شرط فوق $m>۴$ است.

۲۰- گزینه‌ی (۴) اگر ریشه‌ی مشترک α باشد، در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^۳-۵\alpha^۲+۴\alpha+۶=۰\\ \alpha^۳-۵\alpha^۲+۸\alpha-۶=۰\end{array}\right\}\xrightarrow{-} ۸\alpha-۴\alpha-۶-۶=۰\Rightarrow \alpha=۳$$

$\alpha=۳$ در هر دو معادله صدق می‌کند، بنابراین ریشه‌ی مشترک آن‌ها است.

۲۱- گزینه‌ی (۳) هر دو مقدار k و k' در معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ صدق می‌کنند. پس $k+k'$ همان مجموع ریشه‌های این معادله است که برابر $-a$ است.

۲۲- گزینه‌ی (۴) اگر دو ریشه را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، داریم:

$$x_۱-x_۲=۲\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲\Rightarrow \frac{\sqrt{۱۵^۲-۱۲m}}{۳}=۲\Rightarrow ۲۲۵-۱۲m=۳۶\Rightarrow m=\frac{۶۳}{۴}$$

۲۳- گزینه‌ی(۴) اگر دو ریشه را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، داریم:

$$x_۱+x_۲=۲\times\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \frac{-(-۳)}{m^۲-۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow m^۲=۱۶\Rightarrow m=\pm۴\xrightarrow{\Delta>۰}$$ $m=۴$ غیر قابل قبول است.

۲۴- گزینه‌ی(۳) طبق روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$x_۱+x_۲=۴\ ,\ x_۱x_۲=۱\Rightarrow x_۱+\frac{۱}{x_۱}+x_۲+\frac{۱}{x_۲}=(x_۱+x_۲)+\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=۴+\frac{۴}{۱}=۸$$

۲۵- گزینه‌ی(۱) طبق روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$(S=\alpha+\beta=-۱\ ,\ P=\alpha\beta=-۳)\Rightarrow \begin{cases}\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=۱-۲(-۳)=۷\\ \alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳SP=-۱-۳(-۱)(-۳)=-۱۰\end{cases}$$

۲۶- گزینه‌ی(۴) طبق روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$S=x_۱+x_۲=\sqrt{۲}+۱\ ,\ P=x_۱x_۲=\sqrt{۲}$$
$$x_۱^۳+x_۲^۳=S^۳-۳SP=(\sqrt{۲}+۱)^۳-۳(\sqrt{۲}+۱)\sqrt{۲}=(\sqrt{۲}+۱)((\sqrt{۲}+۱)^۲-۳\sqrt{۲})=(\sqrt{۲}+۱)(۳-\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}+۱$$
$$x_۱^۶+x_۲^۶=(x_۱^۳+x_۲^۳)^۲-۲(x_۱x_۲)^۳=(۲\sqrt{۲}+۱)^۲-۲(\sqrt{۲})^۳=۹+۴\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}=۹$$

۲۷- گزینه‌ی(۳) طبق روابط بین ریشه‌ها داریم: $x'+x''=k^{۲}$ و $x'x''=۸$، حال داریم:

$$\sqrt[۳]{x'}+\sqrt[۳]{x''}=۳\Rightarrow(\sqrt[۳]{x'})^{۳}+(\sqrt[۳]{x''})^{۳}=(\sqrt[۳]{x'}+\sqrt[۳]{x''})^{۳}-۳\sqrt[۳]{x'x''}(\sqrt[۳]{x'}+\sqrt[۳]{x''})$$
$$\Rightarrow x'+x''=۳^{۳}-۳\sqrt[۳]{۸}\times۳\Rightarrow k^{۲}=۹\Rightarrow k=\pm۳$$

۲۸- گزینه‌ی(۴) طبق روابط بین ریشه‌ها داریم $x'+x''=۲\sqrt{۳}$ و $x'x''=۲$، حال داریم:

$$(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})^{۲}=x'+x''+۲\sqrt{x'x''}=۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\times\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$
$$x'\sqrt{x''}+x''\sqrt{x'}=\sqrt{x'x''}(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})=\sqrt{۲}(\sqrt{۲}\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}})=۲\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$

۲۹- گزینه‌ی (۲) طول نقاط A و B در معادله‌ی $\frac{x-۱}{x-۲}=۸-x$ صدق می‌کنند، که پس از ساده شدن به معادله‌ی $x^{۲}-۹x+۱۵=۰$ می‌رسیم. طبق روابط بین ریشه‌ها داریم: $x_A+x_B=۹$ و $x_Ax_B=۱۵$. از این‌که A و B روی خط $x+y=۸$ هستند نتیجه می‌گیریم:

$$y_A=۸-x_A\ ,\ y_B=۸-x_B\Rightarrow y_A+y_B=۱۶-(x_A+x_B)=۷$$

پس مختصات M وسط AB، برابر $(\frac{۹}{۲},\frac{۷}{۲})$ می‌شود که در معادله‌ی گزینه‌ی (۲) صدق می‌کند.

۳۰- گزینه‌ی(۲) با جای‌گذاری $t=x^{۲}$ به معادله‌ی $t^{۲}-۲۵t+۱۴۴=۰$ می‌رسیم. طبق روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$t_۱t_۲=۱۴۴>۰\ ,\ t_۱+t_۲=۲۵>۰$$

پس معادله‌ی فوق دو ریشه‌ی مثبت برای t دارد. هر یک از این ریشه‌ها منجر به دو ریشه‌ی قرینه برای x می‌شود (زیرا $t=x^{۲}$)، که مجموع قدرمطلق آن‌ها برابر است با:

$$|x_۱|+|x_۲|+|x_۳|+|x_۴|=|\sqrt{t_۱}|+|-\sqrt{t_۱}|+|\sqrt{t_۲}|+|-\sqrt{t_۲}|=۲(\sqrt{t_۱}+\sqrt{t_۲})=۲\sqrt{t_۱+t_۲+۲\sqrt{t_۱t_۲}}=۱۴$$

۳۱- گزینه‌ی (۳) چون $x_۱x_۲=\frac{۱}{۷}$، پس $x_۱$ و $x_۲$ هم‌علامت‌اند و چون $x_۱+x_۲=\frac{۶}{۷}$، پس هر دو مثبت‌اند و علاوه بر آن $۰<x_۱,x_۲<۱$. وقتی یک عدد در فاصله‌ی $(۰,۱)$ را به توان می‌رسانیم، هر چقدر توان بزرگ‌تر شود، عدد کوچک‌تر می‌شود. پس:

$$\sqrt{x_۱}<\sqrt[۳]{x_۱}\ ,\ \sqrt{x_۲}<\sqrt[۳]{x_۲}\Rightarrow\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}<\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}$$

پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. به همین ترتیب گزینه‌ی (۴) نادرست است. ولی درستی گزینه‌ی (۳) را به راحتی می‌توان با روابط بین ریشه‌ها اثبات کرد.

۳۲- گزینه‌ی(۲) $x_۱$ و $x_۲$ در معادله صدق می‌کنند، پس:

$$x_۱^{۲}-۴x_۱=-۱\ ,\ x_۲^{۲}-۴x_۲=-۱\Rightarrow(x_۲^{۲}-۴x_۲+۴)(x_۱^{۲}-۴x_۱+۲)=(-۱+۴)(-۱+۲)=۳$$

۳۳- گزینه‌ی (۲) $x_۱$ در معادله صدق می‌کند، پس:

$$x_۱^{۲}+۲x_۱-۱=۰\Rightarrow x_۱^{۲}=-۲x_۱+۱\Rightarrow x_۱^{۴}=۴x_۱^{۲}-۴x_۱+۱$$
$$\Rightarrow x_۱^{۴}+۴x_۲^{۲}-۴x_۲=۴x_۱^{۲}-۴x_۱+۱+۴x_۲^{۲}-۴x_۲=۴(x_۱^{۲}+x_۲^{۲})-۴(x_۱+x_۲)+۱$$
$$\xrightarrow{\text{روابط بین ریشه‌ها}}۴(۴+۲)+۴\times۲+۱=۳۳$$

۳۴- گزینه‌ی (۲) از این‌که α ریشه‌ی معادله است، نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha^{۲}+۲\alpha-۱=۰\Rightarrow\alpha^{۲}+۲\alpha=۱\Rightarrow\alpha(\alpha^{۲}+۲\alpha)=\alpha\Rightarrow\alpha^{۳}+۲\alpha^{۲}=\alpha$$

به همین ترتیب داریم: $\beta^{۳}+۲\beta^{۲}=\beta$، بنابراین:

$$(\alpha^{۳}+۲\alpha^{۲}+m)(\beta^{۳}+۲\beta^{۲}+m)=(\alpha+m)(\beta+m)=\alpha\beta+m(\alpha+\beta)+m^{۲}\Rightarrow-۱-۲m+m^{۲}=۲\Rightarrow m=۳,-۱$$

۳۵- گزینه‌ی (۳) طبق روابط بین ریشه‌ها داریم: $x_۱x_۲=۱۶$، پس با استفاده از فرض $x_۲=x_۱^{۳}$ داریم:

$$x_۱x_۱^{۳}=۱۶\Rightarrow x_۱=\pm۲\xrightarrow{x_۱>۰}x_۱=۲$$

$x_۱$ در معادله صدق می‌کند. پس:

$$۴-۵m\times۲+۱۶=۰\Rightarrow m=۲$$

۳۶- گزینه‌ی (۲) طبق روابط بین ریشه‌ها داریم $x_۱+x_۲=\frac{۱}{۲}$، حال از فرض $x_۱+۲x_۲=۳$ داریم:

$$(x_۱+x_۲)+x_۲=۳\Rightarrow\frac{۱}{۲}+x_۲=۳\Rightarrow x_۲=\frac{۵}{۲}\xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند}}۲(\frac{۵}{۲})^{۲}-(\frac{۵}{۲})+k=۰\Rightarrow k=-۱۰$$

۳۷- گزینه‌ی (۲) از این‌که ریشه‌ها وارون یکدیگرند، نتیجه می‌گیریم:

$$x_1x_2=1\Rightarrow\frac{m^2-6}{m}=1\Rightarrow m^2-m-6=0\Rightarrow(m-3)(m+2)=0\xrightarrow{\Delta>0}m=-2$$

۳۸- گزینه‌ی (۲) حاصل‌ضرب دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه عددی منفی است، بنابراین:

$$\frac{m-3}{m-1}<0\Rightarrow 1<m<3$$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a}<0$، آن‌گاه a و c مختلف‌العلامه هستند و $\Delta=b^2-4ac>0$، پس معادله قطعاً ریشه دارد.

۳۹- گزینه‌ی (۲) برای آن‌که اعداد x_1 و x_2 مثبت و متمایز باشند، باید:

$$\left.\begin{array}{l}x_1x_2>0,x_1+x_2>0\Rightarrow m>0,1>0\\ \Delta>0\Rightarrow 1-4m>0\Rightarrow m<\frac{1}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow 0<m<\frac{1}{4}$$

۴۰- گزینه‌ی(۱) اگر α ریشه‌ی $x^3-x=0$ باشد، داریم $\alpha^3-\alpha=0$. ریشه‌ی معادله‌ی جدید را x_0 می‌گیریم:

$$x_0=\alpha+1\Rightarrow\alpha=x_0-1\Rightarrow(x_0-1)^3-(x_0-1)=0\Rightarrow x_0^3-3x_0^2+2x_0=0$$

۴۱- گزینه‌ی (۳) چون $9a+3b+c=0$، پس $x_1=3$ یکی از ریشه‌ها است. طبق روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow 3+x_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow x_2=-\frac{b}{a}-3=-\frac{b+3a}{a}$$

۴۲- گزینه‌ی(۲) اگر ریشه‌های معادله‌ی اولیه α و β باشد، ریشه‌های معادله‌ی حاصل α^2 و β^2 خواهد بود.

$$\alpha+\beta=3\sqrt{2}\ ,\ \alpha\beta=4\Rightarrow S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=10\ ,\ P=\alpha^2\beta^2=16\Rightarrow x^2-10x+16=0$$

۴۳- گزینه‌ی (۱) فرض کنید α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-7x+3=0$ باشند، پس ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$، برابر $\frac{2}{\alpha}$ و $\frac{2}{\beta}$ هستند. داریم:

$$x=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{2}{x}\Rightarrow 4\times(\frac{2}{x})^2-7\times\frac{2}{x}+3=0\Rightarrow\frac{16}{x^2}-\frac{14}{x}+3=0\Rightarrow 3x^2-14x+16=0\Rightarrow a=-14\,,\,b=16$$

۴۴- گزینه‌ی (۱) $x=\frac{k}{2}$ طول رأس سهمی است، پس عرض آن برابر است با:

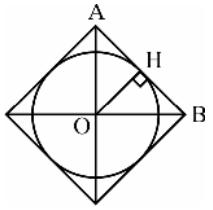
$$y=-\frac{k^2}{4}+k\times\frac{k}{2}+k\xrightarrow{y=2k}-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}+k=2k\Rightarrow\frac{k^2}{4}=k\Rightarrow k^2-4k=0\Rightarrow k_1=0\,,\,k_2=4$$

۴۵- گزینه‌ی (۱) دو عدد را a و b می‌نامیم. می‌دانیم $2a=b+6$ و می‌خواهیم $P=ab$ می‌نیمم باشد. داریم:

$$b=2a-6\Rightarrow P=a(2a-6)=2a^2-6a$$

عبارت درجه‌ی دوم بر حسب a، به ازای $a=-\frac{-6}{2\times2}=\frac{3}{2}$ می‌نیمم می‌شود. در این صورت $b=2\times\frac{3}{2}-6=-3$، در نتیجه: $a+b=-\frac{3}{2}$

۴۶- گزینه‌ی (۲) طول قاعده را a و ارتفاع را h می‌گیریم. داریم $a+h=12$ و می‌خواهیم $S=\frac{1}{2}ah$ بیش‌ترین مقدار شود. چون مجموع a و h مقداری ثابت است، وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم می‌شود که $a=h=6$. در این صورت: $S=\frac{1}{2}\times6\times6=18$

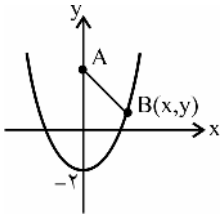


۴۷- گزینه‌ی (۳) در شکل یک لوزی بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. اگر $AH=x$ و $BH=y$، بنابر تقارن شکل، محیط لوزی $4(x+y)$ می‌شود. پس باید $x+y$ می‌نیمم شود. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAB، OH ارتفاع وارد بر وتر است، پس طبق روابط ارتفاع وارد بر وتر داریم:

$$AH\times HB=OH^2\Rightarrow xy=R^2$$

پس حاصل‌ضرب xy مقدار ثابت R^2 است، بنابراین وقتی $x+y$ می‌نیمم است که $x=y=R$. ضلع لوزی $x+y=2R$ می‌شود.

۴۸- گزینه‌ی (۲) نقطه‌ی $B(x,y)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم طول AB کم‌ترین مقدار ممکن شود. کافی است AB^2 کم‌ترین مقدار شود. می‌دانیم:



$$AB=\sqrt{(x-0)^2+(y-11)^2}\Rightarrow AB^2=x^2+(y-11)^2$$

با توجه به این‌که B روی منحنی است نتیجه می‌گیریم: $y=\frac{1}{2}x^2-2$، بنابراین:

$$AB^2=x^2+(\frac{1}{2}x^2-2-11)^2=\frac{1}{4}x^4-12x^2+13^2=(\frac{1}{2}x^2-12)^2+25$$

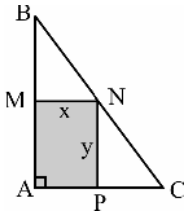
همواره $(\frac{1}{2}x^2-12)^2\geq 0$، پس همواره $AB^2\geq 25$، بنابراین کم‌ترین مقدار AB برابر ۵ است.

۴۹- گزینه‌ی (۱) راه اول: مختصات A را (x_0,y_0) در نظر می‌گیریم. به وضوح $AB=y_0$ و $OB=x_0$، پس مساحت مثلث برابر $S=\frac{1}{2}x_0y_0$ می‌شود. معادله‌ی خط d عبارت است از: $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$، پس: $\frac{x_0}{4}+\frac{y_0}{2}=1$. حال دقت کنید که مجموع دو متغیر $a=\frac{x_0}{4}$ و $b=\frac{y_0}{2}$ مقداری ثابت است، پس وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم است که $a=b=\frac{1}{2}$. واضح است وقتی ab بیش‌ترین مقدار را داشته باشد، S نیز بیش‌ترین مقدار را دارد. در این حالت داریم:

$$\frac{x_0}{4}=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{y_0}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow x_0=2\ ,\ y_0=1\Rightarrow S_{max}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$$

راه دوم: می‌توانید از رابطه‌ی $\frac{x_0}{4}+\frac{y_0}{2}=1$ نتیجه بگیرید $x_0=4-2y_0$ و با جای‌گذاری آن در رابطه‌ی S به دست آورید: $S=2y_0-y_0^2$ حالا باید بیش‌ترین مقدار عبارت درجه‌ی دوم S را تعیین کنید.

۵۰- گزینه‌ی (۱) فرض می‌کنیم $AB=4$ و $AC=3$. طول اضلاع مستطیل را x و y می‌نامیم. باید بیش‌ترین مقدار $S=xy$ را بیابیم. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MN\parallel AC\Rightarrow \frac{MN}{AC}=\frac{BN}{BC} \\ NP\parallel AB\Rightarrow \frac{NP}{AB}=\frac{NC}{BC}\end{array}\right\}\xrightarrow{+}\frac{MN}{AC}+\frac{NP}{AB}=\frac{BN+NC}{BC}=1$$

پس $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$، بنابراین $y=4-\frac{4}{3}x$. می‌خواهیم $S=xy=x(4-\frac{4}{3}x)$ ماکزیمم شود، یعنی عبارت درجه‌ی دوم $S=-\frac{4}{3}x^2+4x$ ماکزیمم شود. به ازای $x=\frac{3}{2}$ این امر رخ می‌دهد که در آن صورت $S=3$.

WWW.RIAZISARA.IR
سایت ریاضی سرا