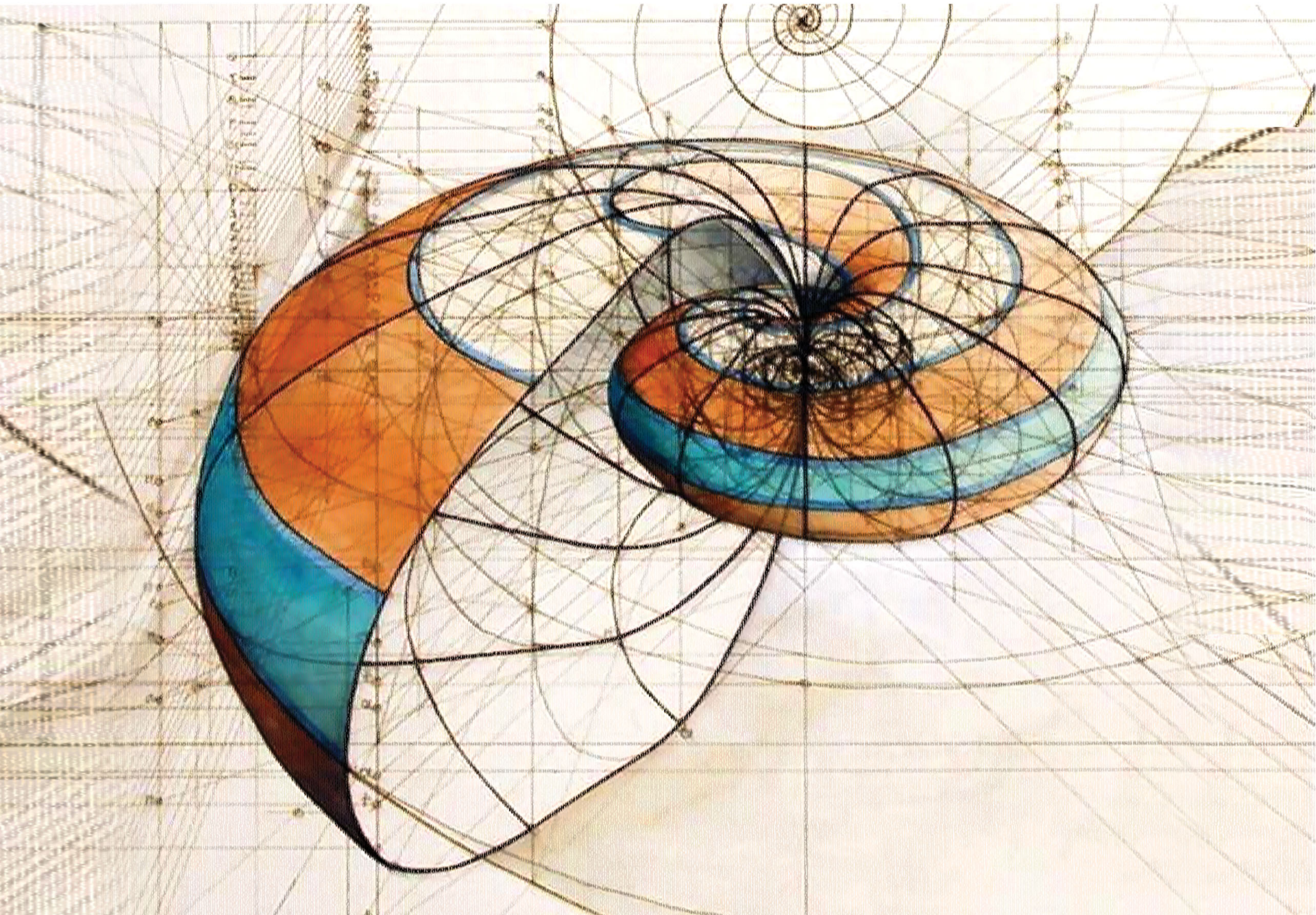
آموزش و تست

multivitamin

حسابان (۱)

kelk-m.com



به کلک: عباس امیدوار – حسنیه شریفی

تابع

فصل ۲

درس ۱ آشنایی بیشتر با تابع

۱-۱ هم‌دامنه

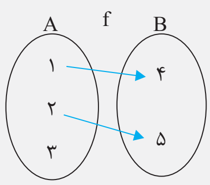
یادآوری

(نمایش پیکانی تابع)

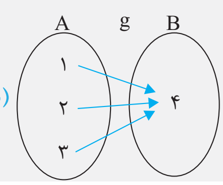
در سال گذشته یاد گرفتیم که هرگاه تمام اعضای مجموعه A را بوسیله پیکان‌هایی (فلش‌هایی) به اعضای مجموعه B مرتبط سازیم به طوری که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد، گوییم یک تابع از مجموعه A به مجموعه B با نمودار ون نمایش داده شده است و آن را به صورت $f: A \to B$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: کدام‌یک از نمودارهای ون زیر نمایش یک تابع از A به B است، در صورت تابع بودن آن را به صورت مجموعه زوج مرتب بنویسید.

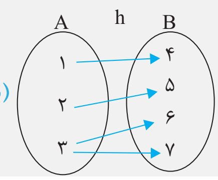
الف)



ب)



پ)



پاسخ

الف) f یک تابع نیست، چون از عضو ۳ در A پیکانی خارج نشده است.

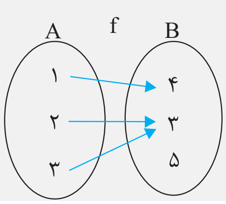
ب) g یک تابع است و نمایش زوج مرتب آن به صورت $f=\{(۱,۴),(۲,۴)(۳,۴)\}$ است.

پ) h یک تابع نیست چون از عضو ۳ در A دو پیکان خارج شده است.

نتیجه

هرگاه f از A به B یک تابع باشد لزومی ندارد به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وصل شود.

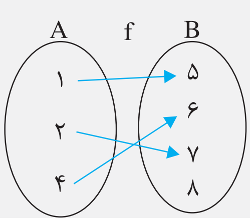
مثال ۲: نمودار ون زیر نمایش یک تابع از A به B است.



تذکر

هرگاه f تابعی از A به B باشد، آن‌گاه مجموعه A دامنه تابع و مجموعه تمام اعضایی از B که بوسیله نوک فلش مشخص شده است، برد تابع می‌گویند.

مثال ۳: در نمایش نمودار ون تابع f، دامنه و برد را مشخص کنید.



پاسخ با توجه به نمودار ون رسم شده داریم:

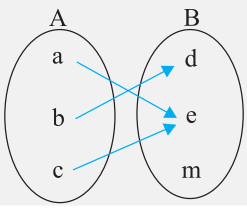
برد تابع $R_f=\{۵, \dots, \dots\}$ دامنه تابع $D_f=\{۱, \dots, \dots\}$

تعریف هم‌دامنه: هرگاه f تابعی از A به B باشد، مجموعه B را هم‌دامنه تابع می‌گویند.

نتیجه

برد تابع همواره زیر مجموعه یا مساوی هم‌دامنه می‌باشد.

مثال ۴: در تابع زیر وضعیت برد و هم‌دامنه را مشخص کنید.



پاسخ $R_f = \{\dots , \dots\} \subset$ هم‌دامنه $= \{\dots , \dots , \dots\}$

تذکر

هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواه شامل برد درنظر گرفت.

مثال ۵: در تابع $f(x)=x^۲$ مجموعهٔ هم‌دامنه را بیابید.

پاسخ می‌دانیم که $D_f=\mathbb{R}$ است، از طرفی $x^۲ \geq ۰$ پس $R_f=[۰,+\infty)$، بنابراین هر مجموعه شامل برد، هم‌دامنه تابع خواهد بود مثلاً می‌توان $[-۲,+\infty)$ را هم دامنه درنظر گرفت.

تذکر

هرگاه f تابعی از A به B با ضابطه‌ای مشخص شود دامنه تابع را ضابطه تابع مشخص نمی‌کند دامنه همان مجموعهٔ A است.

مثال ۶: تابع $f:[۰,۲]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^۲$ تعریف شده است، دامنه و برد تابع را بیابید.

پاسخ $D=[۰,۲]$ و هم دامنه = ...

می‌دانیم $۰ \leq x \leq ۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \dots \leq x^۲ \leq \dots \to R_f=[\dots,\dots]$

تذکر

هرگاه در یک تابع فقط ضابطه مشخص گردد و اشاره به دامنه آن نشود در این‌صورت دامنه و برد تابع از روی ضابطه مشخص می‌گردد. همچنین هم‌دامنه نیز مجموعه‌ای شامل برد خواهد بود.

مثال ۷: در تابع $y=x^۲-۲x$ دامنه، برد و هم‌دامنه را مشخص کنید.

پاسخ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است، حال برد تابع را بدست می‌آوریم:

چون تابع درجه دوم است و ضریب $x^۲$ مثبت، پس دارای کمترین مقدار است و این مقدار به ازای $x=\frac{-b}{۲a}$ بدست می‌آید:

$x=\dots\dots\dots \to y=(\dots\dots\dots)^۲-۲(\dots\dots)=-۱$

پس $R_f=[-۱,+\infty)$، بنابراین هم‌دامنه هر مجموعه‌ای شامل $[-۱,+\infty)$ می‌باشد مانند......................

۱-۲ تابع به عنوان یک ماشین

می‌دانیم تابع مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به صورت (x,y) است که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته نامیده شده و برحسب x بیان می‌شود که به آن ضابطهٔ تابع می‌گویند.

بنابراین می‌توان تابع f را نمایشی از ورودی‌ها و خروجی‌های یک ماشین درنظر گرفت که در آن ورودی، همان دامنه، کار ماشین، ضابطه تابع و خروجی، بُرد تابع است.

مثال ۸: فرض کنید ماشینی به نام f در ورودی خود اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از ورود هر عدد، مربع آن را با ۳ جمع کرده و حاصل را از دستگاه خارج می‌کند.

الف) با ورود عدد ۲− به ماشین چه عددی از آن خارج می‌شود.

ب) اگر خروجی عدد ۴ باشد ورودی آن چه اعدادی می‌تواند باشد.

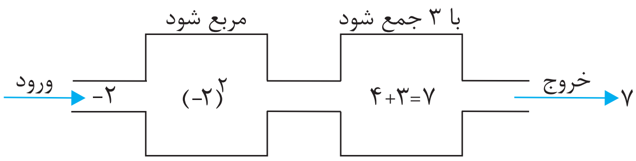
پ) با ورود x به ماشین f خروجی y را برحسب x بیابید.

ت) مجموعه خروجی‌های این ماشین چه مجموعه‌ای است.

ث) اگر مجموعه ورودی‌ها و خروجی‌های این ماشین را به صورت زوج مرتب در نظر بگیریم مجموعه حاصل یک تابع است، نمودار این تابع را رسم کنید.

پاسخ

الف)



ب) اگر ورودی دستگاه را x بگیریم در این صورت چون کار دستگاه این است که مربع هر عدد را با ۳ جمع می‌کند و آن را خارج می‌نماید پس خروجی $x^{۲}+۳$ است، از طرفی طبق فرض مسئله خروجی برابر با ۴ است، پس داریم:

$$x^{۲}+۳=۴\rightarrow x^{۲}=۱\rightarrow\begin{cases}x=+۱\\x=-۱\end{cases}$$

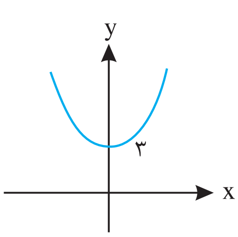
پ) $y=x^{۲}+۳$

ت) می‌دانیم ضابطهٔ تابع به صورت $y=x^{۲}+۳$ است، پس داریم:

$$x^{۲}\geq ۰\longrightarrow x^{۲}+۳\geq ۳\rightarrow R_f=[۳,+\infty)$$

پس خروجی دستگاه بازه $[۳,+\infty)$ می‌باشد.

ث) نمودار تابع $y=x^{۲}+۳$ را رسم می‌کنیم:



۱-۳ برابری دو تابع

تعریف دو تابع برابر: هرگاه نمودارهای دو تابع بر یکدیگر منطبق شوند آن دو تابع با یکدیگر مساویند.

نتیجه

۱: در نمایش زوج مرتب هنگامی دو تابع برابرند که تمام زوج مرتب‌های آن‌ها یکسان باشد.

۲: هرگاه ضابطه‌های دو تابع f و g مشخص شده باشند در صورتی دو تابع f و g برابر یکدیگرند که:

اولاً: دامنه آن‌ها یکسان باشند: $D_f = D_g$

ثانیاً: برای هر عضو از این دامنه یکسان مانند x مقادیر تابع f و g یعنی $f(x)$ و $g(x)$ یکسان باشد $(f(x)=g(x))$

مثال ۹: کدام دو تابع با هم برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲} \\ g(x)=x \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{|x|} \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{x} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=(\sqrt{x})^۲ \\ g(x)=x \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^۲}{|x|} \\ g(x)=|x| \end{cases}$

پاسخ

بررسی گزینهٔ «۱»:

چون $x^۲ \geq ۰$ پس زیر رادیکال همواره نامنفی است، بنابراین $D_f=\mathbb{R}$، از طرفی $D_g = ...$ است، پس $D_g \;....\; D_f$ است.

پس تابع f با g برابر .....

$$f(x)=\sqrt{x^۲}=|x| \to f(x) \;...\; g(x)$$

بررسی گزینهٔ «۲»:

$$D_f=\mathbb{R}-\{...\} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{...\}$$

پس $D_g \;....\; D_f$ است. از طرفی داریم:

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases} ...... & x>۰ \\ ...... & x<۰ \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^۲}}{x}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} ...... & x>۰ \\ ...... & x<۰ \end{cases}$$

پس تابع f با g برابر است.

بررسی گزینهٔ «۳»:

$$D_f : x \geq ۰ \to D_f = ...$$

و $D_g = ...$ می‌باشد پس $D_g \;....\; D_f$ بنابراین تابع f با g برابر ....

بررسی گزینهٔ «۴»:

$$D_f=\mathbb{R}-\{...\} \quad , \quad D_g = ...$$

بنابراین $D_g \;....\; D_f$ پس تابع f با g برابر ....

پس گزینهٔ .... صحیح است.

محل انجام محاسبات

تمرین

۱- جاهای خالی را پر کنید.

تابع	$y=۷x-۹$	$y=\lvert x\rvert+۲$	$y=x^۲+۱$	$y=۵x-۱$
دامنه		$(-۳,۷]$	$(-۲,۱]$	$\{-۱,۲,۳\}$
برد	$[-۳,۷)$			
هم‌دامنه				

۲- ماشین g دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) ورودی این ماشین اعداد حقیقی است.

۲) اگر هر عدد کوچکتر یا مساوی -۱ را به آن بدهیم همان عدد را به ما تحویل می‌دهد.

۳) با ورود اعداد ۳ و ۰ عدد ۲ از ماشین خارج می‌شود.

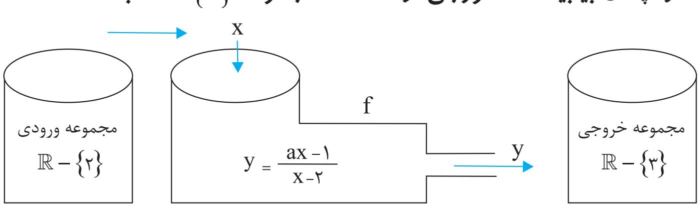
۴) با ورود اعداد بزرگتر از ۳، مربع آن اعداد از دستگاه خارج می‌شود.

۵) به ازای هر عدد بین ۳ و -۱ که وارد دستگاه شود مقدار ثابتی از آن خارج می‌شود.

الف) ضابطه این دستگاه را پیدا کنید.

ب) اگر مجموعه ورودی‌ها و خروجی‌های این ماشین را با زوج مرتب نمایش دهیم مجموعه حاصل یک تابع است، نمودار این تابع را رسم کنید.

۳- در ماشین زیر a را چنان بیابید که خروجی از دستگاه مجموعه $\mathbb{R}-\{۳\}$ باشد.



۴- هرگاه توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases} b & x=۲ \\ \frac{x^۲-۵x+a}{x-۲} & x\neq ۲\end{cases}$ و $g(x)=x+c$ برابر باشند، مقدار b چقدر است؟

۵- به ازای چه مقادیری از a دو تابع f و g با ضابطه‌های $g(x)=۱$ و $f(x)=\frac{x^۲+ax+۲}{x^۲+ax+۲}$ برابرند؟

۶- با توجه به ضابطه داده شده از توابع f و g، تساوی دو تابع را بررسی کنید.

الف) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{۱+\sqrt{x+۱}} \\ g(x)=\sqrt{x+۱}-۱\end{cases}$

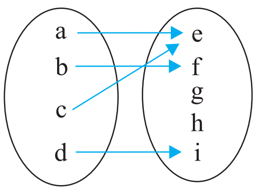
ب) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}} \\ g(x)=\sqrt{x-۱}+۱\end{cases}$

۷- دامنه توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\left|\frac{x}{۲}+۱\right|-\left|\frac{x}{۲}-۱\right|$ و $g(x)=۲$ را چنان تعریف کنید که این دو تابع باهم برابر باشند.

تست‌های درس اول (آشنایی بیشتر با تابع)

۱-۱ هم‌دامنه / ۱-۲ تابع به عنوان ماشین

۱۹۱- تابع با نمودار مقابل مفروض است. مجموعه‌های هم‌دامنه و برد به ترتیب چند عضو دارد؟



۱) ۵ , ۴
۲) ۵ , ۵
۳) ۳ , ۵
۴) ۳ , ۳

۱۹۲- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) برد و هم‌دامنه می‌توانند یکی باشند.
۲) هم دامنه زیر مجموعه‌ای از برد آن است.
۳) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن $\{۱\}$ باشد.
۴) بی‌شمار تابع وجود دارد که برد آن $\{۱\}$ است.

۱۹۳- اگر هم دامنه f مجموعه‌ی $\{-۱,۱\}$ باشد، کدام گزینه در مورد دامنه‌ی تابع صحیح است؟

۱) حداکثر ۲ عضو دارد.
۲) حداقل ۲ عضو دارد.
۳) فقط ۲ عضو دارد.
۴) می‌تواند بی‌شمار عضو داشته باشد.

۱۹۴- اگر $\begin{cases} f: A \to \{-۱,۰,۳\} \\ f(x) = ۳ - x \end{cases}$ آن‌گاه مجموعه‌ی A کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\{-۳,۱\}$
۲) $\{۰,۴\}$
۳) $\{۰,۱\}$
۴) $\{۳,۴,۶\}$

۱۹۵- اگر $\begin{cases} f: \{-۱,۱\} \to B \\ f(x) = ۴x - ۱ \end{cases}$ آن‌گاه مجموعه B کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $\{-۵,۳\}$
۲) $(-\infty,۴]$
۳) $[-۱,+\infty)$
۴) $(-۶,+\infty)$

۱۹۶- اگر $\begin{cases} f: [-۱,۱) \to B \\ f(x) = |x| + ۱ \end{cases}$ آن‌گاه B کدام مجموعه زیر می‌تواند باشد؟

۱) $(۱,۲]$
۲) $[-۲,۱)$
۳) $[۱,۲]$
۴) $[۰,۲)$

۱۹۷- ماشین f به عنوان ورودی اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت، آن عدد را مربع (مجذور) کرده و یک واحد از آن کم می‌کند به ازای ورودی ۲، خروجی کدام خواهد بود؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۹۸- ماشین تابع f با دامنه‌ی $\mathbb{R}$، خروجی ۵ را تحویل داده است. برای یافتن ورودی، ابتدا از ۵ یک واحد کم کرده و سپس حاصل بر ۲ تقسیم شده است. $f(۵)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۱۱

۱-۳ برابر دو تابع

۱۹۹- ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$ است. کدام یک از توابع زیر با تابع $g(x) = |-x|$ برابر است؟

۱) $-xf(x)$
۲) $xf(x)$
۳) $x + f(x)$
۴) $-x + f(x)$

۲۰۰- تابع با ضابطه $f(x)=|x-۲|$ برابر کدام یک از توابع است؟

۱) $\left|\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۱}\right|$ ۲) $\left|\dfrac{x^{۲}-۴}{x+۲}\right|$ ۳) $\dfrac{(x-۲)^{۲}}{|x-۲|}$ ۴) $\dfrac{|۶x-۱۲|}{۶}$

۲۰۱- اگر دو تابع $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{|x-۱|}$ برابر باشند، باید:

۱) $x\geq ۰$ ۲) $x>۰$ ۳) $x\geq ۱$ ۴) $x>۱$

۲۰۲- تابع $f(x)=|x+۱|$ با تابع $|g(x)|$ برابر است، $g(x)$ برابر است با:

۱) $\dfrac{x^{۳}+x^{۲}+x+۱}{x^{۲}+۱}$ ۲) $\dfrac{|x^{۲}-۱|}{x-۱}$ ۳) $\dfrac{x^{۲}-x}{|x|}$ ۴) $\dfrac{(x+۱)^{۲}}{x+۱}$

۲۰۳- تابع $y=\big|۲x-|x|\big|$ با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $y=۲|x|-x$ ۲) $y=x-۲|x|$ ۳) $y=|x|-۲x$ ۴) $y=۲x-|x|$

۲۰۴- اگر دو تابع $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{۲x^{۲}-۳x+۱}{x-۱} & x\neq ۱\\ k & x=۱\end{cases}$ با هم برابر باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۵- اگر $f(x)=\begin{cases}n & x=m\\ \dfrac{x^{۳}+۸}{x-m} & x\neq m\end{cases}$، $g(x)=x^{۲}-۲x+۴$ و دو تابع f و g برابر باشند، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۲۰۶- به ازای چند مقدار صحیح a، دو تابع $f(x)=x^{۲}+۲ax+۱۳$ و $g(x)=|x^{۲}+۲ax+۱۳|$ برابرند؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۰۷- دو تابع $f(x)=\dfrac{۳}{x-۲}$ و $g(x)=\dfrac{ax+b}{x^{۲}+cx+۴}$ برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۴ ۳) -۷ ۴) ۳

۲۰۸- دو تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^{۲}-۱}$ و $g(x)=\dfrac{a}{x-۱}+\dfrac{b}{x+۱}$ با هم برابرند. حاصل $a+۲b$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۲۰۹- به ازای چند مقدار a دو تابع $f(x)=\dfrac{۲x^{۲}+۲x-۲a}{x^{۲}+x-a}$ و $g(x)=a^{۳}-a+۲$ با هم برابرند.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۱۰- اگر دو تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-۳x+۲}$ و $g(x)=\dfrac{x-۲c}{x^{۳}-۵x^{۲}+ax-b}$ برابر باشند. حاصل $a-b+۲c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۶

۲۱۱- اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+ax+b}{x+۱} & x\neq -۱\\[2mm] \dfrac{c}{x-۱} & x=-۱\end{cases}$ با یک تابع همانی برابر باشد حاصل $a-b+c$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۳　　۳) -۱　　۴) -۳

۲۱۲- اگر دو تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax^{۳}+b}{۲x^{۳}-c}$ و g با ضابطه $g(x)=۲$ و دامنه $D_g=\mathbb{R}-\{-۱\}$ باهم برابر باشند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۱۰

درس ۲ انواع تابع

۲-۱ توابع گویا

خودرویی ۱۵ کیلومتر اول یک مسیر را با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت و بقیه آن را با سرعت ثابت ۸۰ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. اگر x مسافتی باشد که خودرو بعد از ۱۵ کیلومتر طی می‌کند.

الف تابعی بیابید که سرعت متوسط این خودرو را برحسب x بیان کند.

ب اگر این خودرو ۳۰ کیلومتر را با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت طی کند سرعت متوسط چقدر است؟

پ اگر بخواهیم سرعت متوسط ۷۰ کیلومتر برساعت را داشته باشیم این خودرو باید چند کیلومتر را با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت طی کند؟

تعریف تابع گویا:

هر تابع مانند $f(x)$ که بتوان ضابطه آن را به صورت $y=\frac{p(x)}{q(x)}$ نوشت که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای هستند و $q(x)\neq ۰$ را یک تابع گویا می‌نامند.

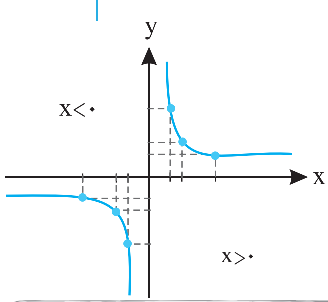
تابع مثال فوق یک تابع گویا است.

مثال ۱: هر یک از توابع زیر ضابطه یک تابع گویا هستند.

الف) $y=\frac{۱}{x}$ ب) $y=\frac{۵x-۱}{۲x+۱}$ پ) $y=\frac{\sqrt{۲}x-۳}{x^۲-۷x}$

ساده‌ترین نوع این توابع، تابع با ضابطه $y=\frac{۱}{x}$ است. که به ازای $x=۰$ تعریف نشده و نمودار آن به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر رسم می‌شود.

x	$-\infty$	$\leftarrow\cdots$	-۲	-۱	$-۰/۵\cdots\rightarrow$	۰	$\leftarrow\cdots$	۰/۵	۱	۲	$\cdots$	$\rightarrow$	$+\infty$
y	۰	$\leftarrow\cdots$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	$-۲\cdots\rightarrow$	$-\infty$ $+\infty$ ت ن	$\leftarrow\cdots$	۲	۱	۰/۵	$\cdots$	$\rightarrow$	۰



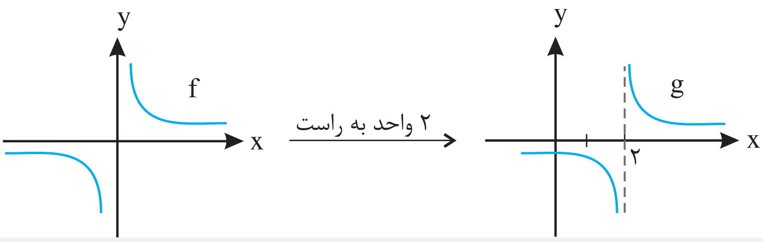
تذکر

① در نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ برای $x>۰$ هر چه مقادیر x را زیاد می‌کنیم تابع به صفر نزدیک می‌شود و هر چقدر x را به صفر نزدیک می‌کنیم تابع به مثبت بی‌نهایت نزدیک می‌شود.

② در نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{x}$ برای $x<۰$، هر چه مقادیر x را کمتر کنیم مقدار y به صفر و هر چقدر x را به صفر نزدیک کنیم تابع به منفی بی‌نهایت نزدیک می‌گردد.

مثال ۲: نمودار تابع g با ضابطه $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ را به کمک انتقال تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{۱}{x}$ رسم کنید.

پاسخ با توجه به ضابطهٔ f و g می‌توان نتیجه گرفت که $g(x)=f(x-۲)$ است، پس برای رسم تابع g کافی است نمودار f را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، پس داریم:

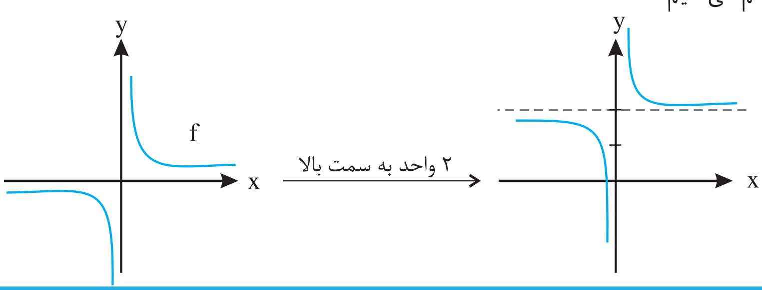


مثال ۳: نمودارتابع g با ضابطه $g(x)=\frac{۲x+۱}{x}$ را به کمک انتقال تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ رسم کنید.

پاسخ ابتدا ضابطهٔ g را ساده‌تر می‌نماییم:

$$g(x)=\frac{۲x+۱}{x}=\frac{۲x}{x}+\frac{۱}{x}\overset{x\neq ۰}{=}۲+\frac{۱}{x}$$

پس $g(x)=f(x)+۲$، حال به کمک انتقال نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:



دامنه توابع گویا:

توابع گویا به ازای xهایی که مخرج کسر را صفر می‌کنند تعریف نشده است، بنابراین دامنه این توابع $\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$ است.

مثال ۴: دامنهٔ توابع گویا با ضابطه‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $y=\frac{۷x-۴}{۲x-۵}$ ب) $y=\frac{x^۲-۴x}{x^۲+x+۱}$ پ) $y=\frac{۲x+۱}{x^۲-۳x+۲}$ ت) $y=\frac{x}{x-۲}+\frac{۵}{x^۲-۳x}$

پاسخ

الف) ابتدا ریشهٔ مخرج را بدست می‌آوریم:

$$۲x-۵=۰\to x=\frac{۵}{۲}$$

پس دامنهٔ تابع برابر است با $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{۵}{۲}\right\}$.

ب)

ریشهٔ مخرج: $x^۲+x+۱=۰\to \Delta=-۳<۰$

پس معادلهٔ فوق ریشه ندارد و $D=\mathbb{R}$ است.

پ)

ریشهٔ مخرج: $x^۲-۳x+۲=۰\longrightarrow\begin{cases}x=...\\x=...\end{cases}$

پس $D=\mathbb{R}-\{...,...\}$ است.

ت) این تابع از مجموع دو تابع کسری تشکیل شده پس داریم:

$$\begin{cases}x-۲=۰\to x=...\\x^۲-۳x=۰\to\begin{cases}x=...\\x=...\end{cases}\end{cases}$$

پس $D=...-\{...,...,...\}$ است.

نکته برای پیدا کردن دامنه توابع گویا در صورت ساده شدن کسر مجاز به این کار نیستیم زیرا ممکن است دامنه تغییر کند.

مثال ۵: نشان دهید دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x^2-x}$ باهم مساوی نیستند.

پاسخ

$$f(x)=\frac{1}{x}\to D_f=...$$

$$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x}\to x^2-x=0\to\begin{cases}x=...\\x=...\end{cases}\to D_g=....$$

پس $D_f\neq D_g$، از طرفی داریم:

$$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x}=\frac{x-1}{x(x-1)}\xrightarrow{1\notin D_g}g(x)=\frac{\cancel{x-1}}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{x}$$

چون شرط اول تساوی دو تابع برقرار نبود پس دو تابع f و g باهم مساوی نیستند.

مثال ۶: دامنه هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y=\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$

ب) $y=\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}$

پاسخ

الف) ریشهٔ مخرج : $x^2-4=0\to x=....$ یا $x=...\quad\to D_y=R-\{...,...\}$

ب) مخرج کسر کوچک : $x+1=0\to x=...$

مخرج کسر بزرگ $1+\frac{1}{x+1}=0\xrightarrow{\text{مخرج مشترک‌گیری}}\frac{x+1+1}{x+1}=0\to\frac{x+2}{x+1}=0\to x+2=0\to x=....$

پس $D=\mathbb{R}-\{...,...\}$ است.

مثال ۷: توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ و $g(x)=x-1$ و $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ تعریف شده‌اند.

الف) نشان دهیدتوابع f و g با یکدیگر برابرند.

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

پاسخ

الف) ابتدا دامنهٔ تابع f را بدست می‌آوریم: $D_f=...$

اگر ضابطهٔ f را با استفاده از دامنه‌اش ساده کنیم داریم:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1=g(x)$$

بنابراین چون $D_f=D_g$ و برای هر x از دامنهٔ f و g، $f(x)=g(x)$ پس این دو تابع باهم مساوی هستند.

ب) نمودار تابع f را می‌توان به کمک نمودار تابع g رسم نمود.

نکته در تعیین دامنه توابع گویا در کاربردهای واقعی، ممکن است با محدودیت‌های بیشتری مواجه باشیم.

مثال ۸: اگر هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای بوسیله تابع f با ضابطه $y=\frac{255x}{100-x}$ محاسبه شود که در آن x درصد آلودگی و y هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.
دامنه این تابع را در این حالت (واقعی) بیابید.

پاسخ در این تابع، علاوه بر این که مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد محدودیت‌های زیر نیز وجود دارد.

اولاً: x نمی‌تواند منفی یا صفر باشد یعنی $x>0$

ثانیاً: y (هزینه پاک‌سازی) نیز مثبت است چون $x>0$ است صورت کسر y نیز مثبت و در نتیجه باید مخرج کسر آن نیز مثبت باشد، یعنی:

$۱۰۰ - x > ۰ \rightarrow x < ۱۰۰$

حال اگر از دو وضعیت بالا اشتراک بگیریم دامنهٔ این تابع بدست می‌آید: $D = (\ldots , \ldots)$

مثال ۹: اگر دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{۲x + ۷}{x^۲ + ax + ۱}$ برابر $\mathbb{R}$ شود حدود a را بیابید.

پاسخ: هنگامی دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ است که مخرج کسر ریشه نداشته باشد. چون معادله مخرج کسر درجه دوم است، پس باید Δ آن منفی باشد، بنابراین داریم:

$$x^۲ + ax + ۱ = ۰ \rightarrow \Delta = a^۲ - ۴ < ۰ \rightarrow a^۲ < ۴ \rightarrow -۲ < a < ۲$$

مثال ۱۰: اگر دامنهٔ تابع $y = \frac{x + ۳}{x^۲ + ax + b}$ برابر $\mathbb{R} - \{-۲\}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

پاسخ: با توجه به این که در دامنهٔ تابع فقط عدد ۲− از مجموعهٔ اعداد حقیقی خارج شده پس مخرج کسر دارای یک ریشه ۲− است و این یعنی Δ معادله برابر با صفر است، پس داریم:

$$x^۲ + ax + b = ۰ \rightarrow \Delta = a^۲ - ۴b = ۰$$

هم‌چنین می‌دانیم هرگاه $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x = \frac{-b}{۲a}$ است، پس داریم:

$$x = \frac{-a}{۲} = -۲ \rightarrow a = ۴$$

پس $b = \ldots$ و $a + b = \ldots.$ است، بنابراین گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۱۱: تابع $y = \frac{۳x - ۱}{x + ۲}$ مفروض است اگر ضابطه این تابع را به عنوان کار دستگاه f درنظر بگیریم:

الف) آیا از این دستگاه عدد ۱ خارج می‌شود؟

ب) از دستگاه f چه اعدادی نمی‌توانند خارج شود؟

پ) برد تابع با ضابطه داده شده را بیابید.

پاسخ

الف) کافی است به جای y (خروجی) عدد ۱ را قرار دهیم تا مقدار ورودی x را بیابیم.

$$y = \frac{۳x - ۱}{x + ۲} \xrightarrow{y=۱} \frac{۳x - ۱}{x + ۲} = ۱ \rightarrow ۳x - ۱ = x + ۲ \rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

پس اگر $x = \frac{۳}{۲}$ وارد دستگاه شود عدد ۱ خارج می‌شود.

ب) برای پیدا کردن اعدادی که نمی‌توانند از دستگاه خارج شوند کافی است x را برحسب y بدست آوریم:

$$y = \frac{۳x - ۱}{x + ۲} \rightarrow yx + ۲y = ۳x - ۱ \rightarrow yx - ۳x = -۲y - ۱ \rightarrow x(y - ۳) = -۲y - ۱ \rightarrow x = \frac{-۲y - ۱}{y - ۳}$$

اگر $y = ۳$ باشد مخرج کسر $x = \frac{-۲y - ۱}{y - ۳}$ برابر با صفر می‌شود و x تعریف نمی شود پس از این دستگاه عدد ۳ نمی‌تواند خارج شود.

پ) با توجه به قسمت ب می‌توان نتیجه گرفت که هر عددی از دستگاه خارج می‌شود به غیر از ۳ پس $R_y = \mathbb{R} - \{۳\}$.

مثال ۱۲: تابع f با ضابطه $y = \frac{x^۲ - x - ۲}{x^۲ - ۱}$ مفروض است:

الف) دامنه تابع را بدست آورید.

ب) ضابطه تابع را تا حدامکان ساده کنید.

پ) اگر ضابطه این تابع به عنوان کار دستگاه g درنظر گرفته شود آیا عدد ۱ از دستگاه خارج می‌شود؟

پاسخ

الف) ریشهٔ مخرج کسر: $x^۲ - ۱ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \rightarrow D = R - \{۱, -۱\}$

ب) $y = \frac{x^۲ - x - ۲}{x^۲ - ۱} = \frac{(x - ۲)(x + ۱)}{(x - ۱)(x + ۱)} = \frac{x - ۲}{x - ۱}$

پ) برای پیدا کردن ورودی دستگاه کافی است به جای y عدد یک را قرار دهیم: $\frac{x-2}{x-1}=1 \to x-2=x-1 \to -2=-1$

پس $y=1$ نمی‌تواند از دستگاه خارج شود.

مثال ۱۳: تابع f با ضابطه $y=\frac{x^2+1}{x}$ مفروض است.

الف) آیا از دستگاه f، $y=1$ خارج می‌شود؟

ب) اگر $y=m$ از دستگاه خارج شود m باید چه شرطی داشته باشد؟

پ) برد تابع را بیابید.

پاسخ

الف) در ضابطهٔ تابع به جای y عدد ۱ را قرار می‌دهیم تا ورودی دستگاه را بیابیم: $\frac{x^2+1}{x}=1 \to x^2-x+1=0$

چون Δ منفی است، معادله جواب ندارد بنابراین $y=1$ نمی‌تواند از دستگاه خارج شود.

ب) $\frac{x^2+1}{x}=m \to x^2-mx+1=0 \xrightarrow{(1)} \Delta=(-m)^2-4(1)(1) \to \Delta=m^2-4$

هنگامی معادله درجه دوم (۱) دارای جواب است که $\Delta \geq 0$ باشد، پس $m^2-4\geq 0 \to m\leq -2$ یا $m\geq 2$

پ) با توجه به قسمت ب می‌توان نتیجه گرفت بُرد تابع برابر است با: $R_y=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

مثال ۱۴: دامنه هر یک از توابع کسری که شامل قدرمطلق هستند را بیابید.

الف) $y=\frac{x-3}{|x|-2}$ ب) $y=\frac{x^2-x}{|x-1|+5}$

پاسخ

الف) ابتدا ریشهٔ مخرج کسر را بدست می‌آوریم: مخرج کسر $|x|-2=0 \to |x|=2 \to x=2$ یا $x=-2$

پس: $D=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

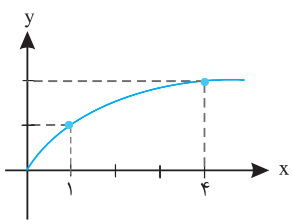
ب) می‌دانیم $|x-1|$ همواره یک عبارت نامنفی است پس جمع آن با ۵ نمی‌تواند برابر با صفر باشد، بنابراین مخرج کسر همواره مخالف با صفر است، پس $D=\mathbb{R}$ است.

۲-۲ توابع رادیکالی (تابع ریشه‌ی دوم)

می‌دانیم تنها اعداد نامنفی ریشه دوم دارند، تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و ضابطه آن را به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند.

نمودار این تابع به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر رسم می‌شود:

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲



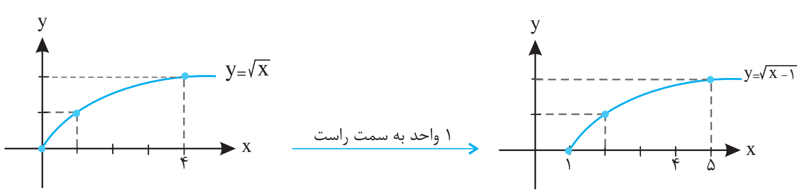
نتیجه

دامنه و برد تابع $y=\sqrt{x}$ برابر $[0,+\infty)$ است.

مثال ۱۵: با استفاده از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد آن را بیابید.

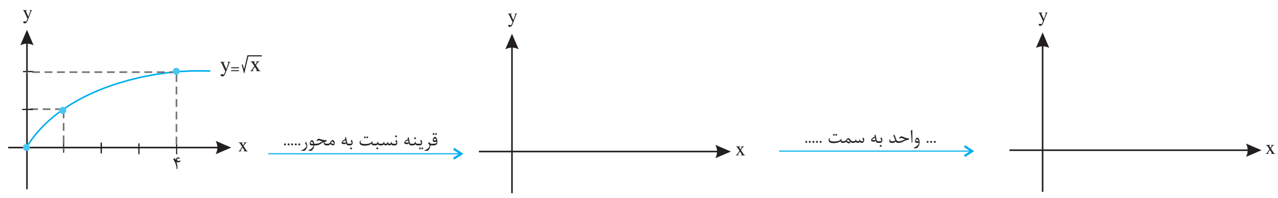
الف) $y=\sqrt{x-1}$ ب) $y=-\sqrt{x}+2$ پ) $y=\sqrt{x+3}$ ت) $y=\sqrt{x-1}+3$

پاسخ الف)

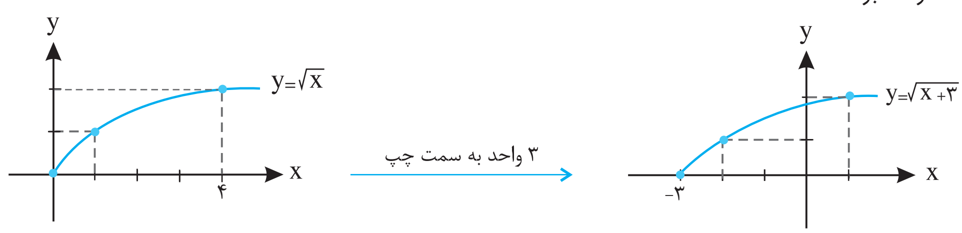


پس $D_y=[1,+\infty)$ و $R_y=[0,+\infty)$ می‌باشد.

ب)

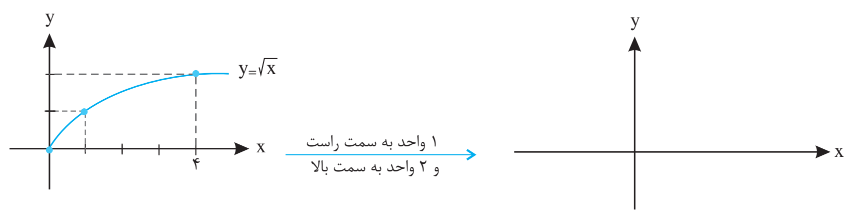


پ) بنابراین $D_y = ...$ و $R_y = ...$ خواهد بود.



پس $D_y = ...$ و $R_y = ...$ خواهد بود.

ت)



پس $D_y = ...$ و $R_y = ...$ می‌باشد.

رسم تابع f با ضابطه $y=\sqrt{ax+b}$:

با توجه به این که اعداد نامنفی ریشه دوم دارند، ابتدا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{ax+b}$ را بدست می‌آوریم بدین ترتیب که زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم سپس به کمک نقطه‌یابی در دامنه بدست آمده تابع را رسم می‌کنیم.

مثال ۱۶: هر یک از توابع زیر را رسم کنید، سپس برد آن‌ها را بدست آورید.

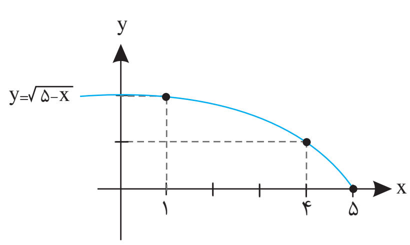
الف) $y=\sqrt{۵-x}$ ب) $y=\sqrt{۲x-۳}-۱$

پاسخ

الف) ابتدا دامنهٔ تابع را بدست می‌آوریم:

$$۵-x \ge ۰ \rightarrow x \le ۵ \rightarrow D=(-\infty, ۵]$$

x	۱	۴	۵
y	۲	۱	۰

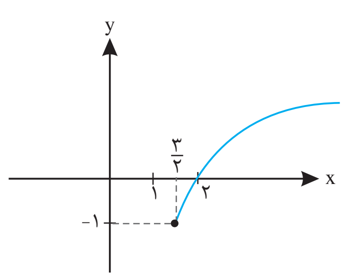


پس $R=[۰,+\infty)$ می‌باشد.

ب)

$$۲x-۳ \ge ۰ \rightarrow x \ge \frac{۳}{۲} \rightarrow D=\left[\frac{۳}{۲},+\infty\right)$$

x	$\frac{۳}{۲}$	۲
y	-۱	۰



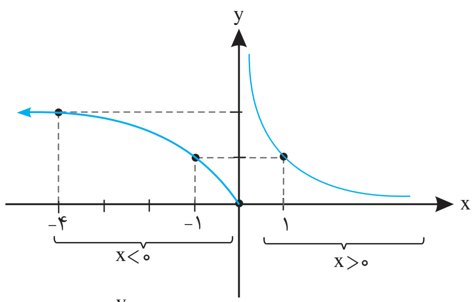
پس $R=[-۱,+\infty)$ می‌باشد.

مثال ۱۷: هریک از توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کرده سپس برد آن را بیابید.

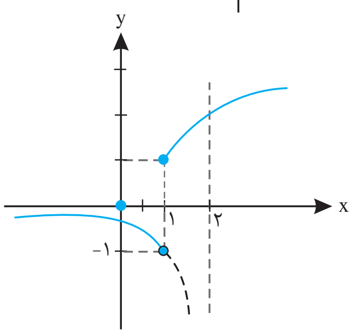
الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>0\\ \sqrt{-x} & x\le 0\end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}\sqrt{4x-3} & x\ge 1\\ \dfrac{1}{x-2} & x<1\end{cases}$

پاسخ



الف) باتوجه به نمودار رسم شده .... $=R_y$.



ب) با توجه به نمودار رسم شده .... $=R_y$.

نکته برای تعیین دامنه هر تابع به فرم $y=\sqrt[n]{f(x)}$ (n زوج) کافی است نامعادله $f(x)\ge 0$ را حل کنیم.

مثال ۱۸: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\sqrt{-3x+5}$

ب) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

پ) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$

ت) $y=\sqrt{5-|x|}$

پاسخ

الف) $-3x+5\ge 0\rightarrow -3x\ge -5\rightarrow x\le \dfrac{5}{3}\longrightarrow D_y=\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right]$

ب) $\dfrac{x-2}{x-1}\ge 0\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} x\ge .....$ یا $x\le ....$

پس $D=..........\cup.............$ می‌باشد.

پ) $x^2-5x+6\ge 0\xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} x\ge .....$ یا $x\le ....$

پس $D=........................$

ت) $5-|x|\ge 0\rightarrow |x|\le 5\xrightarrow{\text{خواص قدرمطلق}} ....\le x\le ....$

بنابراین $D=..................$

مثال ۱۹: اگر دامنه تابع $y=\sqrt{x^2-x+(a-2)}$ برابر $\mathbb{R}$ شود، حدود a را بیابید.

پاسخ هنگامی دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x^2-x+(a-2)}$ برابر $\mathbb{R}$ است که عبارت $x^2-x+(a-2)$ همواره نامنفی باشد. یعنی $x^2-x+(a-2)\ge 0$ پس باید Δ این عبارت همواره کوچکتر یا مساوی صفر و ضریب x^2 مثبت باشد. پس داریم:

$\Delta=(-1)^2-4(1)(a-2)\le 0\rightarrow$ ....

مثال ۲۰: **دامنهٔ تابع** $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۲x}}$ **شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ ضابطهٔ تابع دارای دو رادیکال است که عبارت‌های زیر رادیکال هر یک، باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند، پس داریم:

$$\begin{cases} ۱-۲x\ge ۰ \to -۲x\ge -۱ \to x\le .... \\ ۳-\sqrt{۱-۲x}\ge ۰ \to ۳\ge\sqrt{۱-۲x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۹\ge ۱-۲x \to x\ge .... \end{cases}$$

حال اگر از دو عبارت بالا اشتراک بگیریم دامنهٔ تابع به صورت .... $=D$ بدست می‌آید که در این دامنه...... عدد صحیح وجود دارد پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۲۱: **دامنهٔ تابع** $y=\sqrt{۲+|x|-x^۲}$ **شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟**

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

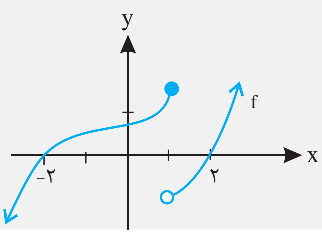
پاسخ برای تعیین دامنه زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۲+|x|-x^۲\ge ۰ \xrightarrow{|x|=a} ۲+a-a^۲\ge ۰ \to a^۲-a-۲\le ۰ \to (a-۲)(a+۱)\le ۰$$

$$\to (|x|-۲)(|x|+۱)\le ۰ \to |x|-۲\le ۰ \to |x|\le ۲ \to -۲\le x\le ۲$$

پس $D=[-۲,۲]$ بنابراین در دامنه تابع ۳ عدد صحیح نامنفی وجود دارد پس گزینه (۴) صحیح است.

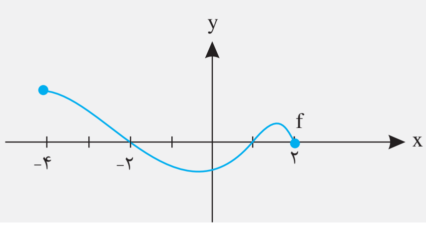
مثال ۲۲: **اگر نمودار** f **به صورت زیر رسم شود، دامنهٔ تابع** $y=۲\sqrt{-f(x)}+۱$ **را بیابید.**



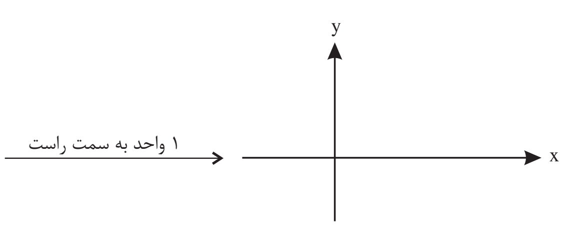
پاسخ با توجه به ضابطهٔ $y=۲\sqrt{-f(x)}+۱$ باید $f(x)\le ۰$ باشد، بنابراین دامنه تابع آن قسمتی از نمودار f است که زیر محور xها و روی آن باشد، بنابراین:

$$D_y=(-\infty,-۲]\cup(۱,۲]$$

مثال ۲۳: **اگر نمودار** f **به صورت زیر رسم شود، دامنهٔ تابع** g **با ضابطهٔ** $y=\sqrt{xf(x-۱)}$ **را بیابید.**



پاسخ با توجه به نمودار f ابتدا نمودار $f(x-۱)$ را رسم می‌کنیم:



برای پیدا کردن دامنهٔ تابع دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x\ge ۰$

اگر $x\ge ۰$ باشد باید $f(x-۱)\ge ۰$ باشد، پس قسمتی از نمودار $f(x-۱)$ که در آن $x\ge ۰$ و نمودار بالای محور xها و روی آن است را مشخص می‌کنیم، پس $D_۱=\cdots\cdots\cdots\cdots$

حالت دوم: $x\le ۰$

اگر $x \le 0$ باشد باید $f(x-1) \le 0$ باشد پس قسمتی از نمودار $f(x-1)$ که در آن $x \le 0$ و نمودار .... و روی .... است را مشخص می‌کنیم، پس $D_2 = \cdots\cdots\cdots\cdots$

اجتماع D_1 و D_2 دامنهٔ تابع g می‌باشد، بنابراین:

$$D_g = D_1 \cup D_2 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

مثال ۲۴: دامنهٔ توابع رادیکالی زیر را بیابید.

الف) $y = \sqrt{|2x-1|-1}$

ب) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}-1}$

پاسخ

الف)

$$|2x-1|-1 \ge 0 \to |2x-1| \ge 1 \to \begin{cases} 2x-1 \ge \ldots \\ \text{یا} \\ 2x-1 \le \ldots \end{cases} \to \begin{cases} x \ge \ldots \\ \text{یا} \\ x \le \ldots \end{cases} \to D = (\ldots\ldots,\ldots\ldots) \cup (\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$

ب) برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع ابتدا ریشه مخرج را بدست می‌آوریم:

$$\sqrt{2x+1}-1=0 \to \sqrt{2x+1}=1 \to x = \ldots\ldots \qquad (1)$$

از طرفی زیر رادیکال نیز باید نامنفی باشد، پس داریم:

$$2x+1 \ge 0 \to x \ge \ldots\ldots \qquad (2)$$

بنابراین دامنهٔ تابع برابر است با $D = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.

۲-۳ معادلات و توابع

برخی از معادلات دارای دو متغیر x و y هستند و یک رابطه بین x و y را نشان می‌دهند مانند $x^2+y^2=1$ و یا $x-3y=7$ و.... سؤال این است که آیا همه معادلات ضابطه یک تابع را مشخص می‌کنند؟

بگذارید دو مثال بالا را بررسی کنیم تا پی به جواب سؤال بالا ببریم.

معادلهٔ $x^2+y^2=1$ ضابطهٔ یک تابع را مشخص نمی‌کند . فرض کنید f مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها است که بین مؤلفه‌های آن رابطه $x^2+y^2=1$ برقرار است. اگر در این معادله به جای x به طور مثال عدد صفر را قرار دهیم. داریم:

$$0^2+y^2=1 \to y^2=1 \to y=\pm 1$$

بنابراین می‌توان گفت در f دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(0,-1)$ وجود دارد، پس رابطهٔ $x^2+y^2=1$ ضابطهٔ یک تابع نیست.

اما در معادلهٔ $x-3y=7$، فرض کنید g مجموعه زوج مرتب‌هایی باشد که بین مؤلفه‌های آن رابطه $x-3y=7$ برقرار است بنابراین در g می‌توان y را برحسب x به صورت روبه‌رو نوشت:

$$y = \frac{x-7}{2}$$

و این یعنی برای هر x فقط یک y وجود دارد یعنی در مجموعه زوج مرتب‌های g تمام مؤلفه‌های اول همگی متفاوت هستند.

تذکر

گاهی‌اوقات برای آن که بررسی کنیم یک معادله داده شده ضابطه یک تابع است باید زوج اعدادی که در تساوی صدق می‌کند را پیدا کنیم.

مثال ۲۵: آیا معادله $x^4+y^2-2x^2+1=0$ ضابطه یک تابع است؟

پاسخ

$$x^4-2x^2+1+y^2=0 \to (x^2-1)^2+y^2=0$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر با صفر است پس هر یک برابر با صفر می‌باشد.

$$\to \begin{cases} x^2-1=0 \to x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$$

حال اگر f مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی باشد که ضابطه آن به صورت داده شده باشد f را می‌توان به صورت $f=\{(1,0),(-1,0)\}$ نوشت پس رابطهٔ $x^4+y^2-2x^2+1=0$ تابع است.

نکته

گاهی‌اوقات برای اثبات این که معادله‌ای، ضابطه یک تابع است کافی است از برهان‌خلف استفاده کنیم یعنی فرض کنیم معادله داده شده ضابطه تابع نباشد پس در آن دو زوج مرتب (a,b) و (a,c) که $b \neq c$ وجود دارد که در معادله داده شده صدق می‌کند سپس به تناقض $b = c$ برسیم.

مثال ۲۶: نشان دهید معادلهٔ $x = y^3 + y$ ضابطهٔ یک تابع است.

پاسخ فرض کنیم (a,b) و (a,c) که $b \neq c$ دو زوج مرتب باشند که در معادله داده شده صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\begin{cases} a = b^3 + b \\ a = c^3 + c \end{cases} \rightarrow b^3 + b = c^3 + c \rightarrow (b^3 - c^3) + (b - c) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} (b-c)(b^2 + bc + c^2) + (b-c) = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (b-c)(\underbrace{b^2 + bc + c^2 + 1}_{(1)}) = 0$$

عبارت (۱) مخالف صفر است پس باید $b - c = 0$ باشد یعنی $b = c$، بنابراین به تناقض رسیدیم پس معادلهٔ داده شده تابع است.

۴-۲ توابع پله‌ای- تابع جزء صحیح

فرض کنید پارکینگ یک مجتمع تفریحی و ورزشی برای سه ساعت اول توقف ۲ هزار تومان و برای هر ساعت ۵۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۸ ساعت باشد.

الف) ضابطه تابع را بیابید که نرخ توقف را به ازای هر ساعت ممکن نشان دهد.

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} .... & 0 < x \leq 3 \\ 2500 & 3 \leq x < 4 \\ .... & 4 \leq x < 5 \\ .... & 5 \leq x < 6 \\ .... & 6 \leq x < 7 \\ .... & 7 \leq x < 8 \end{cases}$$

تعریف تابع پله‌ای: به توابعی مانند تابع فوق که بتوان دامنهٔ آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد، به طوری که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد یک تابع پله‌ای می‌گویند.

یکی از توابع پله‌ای معروف تابع جزء صحیح است. ابتدا جزء صحیح اعداد را تعریف می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌نمائیم سپس به معرفی این تابع می‌پردازیم.

تعریف جز صحیح: برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش داده و آن را جزء صحیح x یا براکت x می‌خوانند.

مثال ۲۷: جزء صحیح اعداد زیر را حساب کنید.

الف) $-2/3$ ب) $-4\sqrt{2}$ پ) -5 ت) 0 ث) $2\sqrt{3}$ ج) 7

پاسخ

الف) بزرگترین عدد صحیحی که از $-2/3$ بزرگتر نباشد عدد -3 است. $(-2 > -2/3 > -3)$ پس: $[-2/3] = -3$

ب) می‌دانیم $\sqrt{2} \simeq 1/4$ است پس $-4\sqrt{2} \simeq -5/6$ بنابراین بزرگترین عدد صحیحی که از $-4\sqrt{2}$ بزرگتر نباشد عدد -6 است یعنی $[-4\sqrt{2}] = -6$

پ) بزرگترین عدد صحیحی که از -5 بزرگتر نباشد (یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از -5 کوچکتر یا مساوی باشد) عدد -5 است، پس $[-5] = -5$

ت) با توجه به قسمت «پ» $[0] = 0$ است.

ث) می‌دانیم $\sqrt{3} \simeq 1/7$ پس داریم $2\sqrt{3} \simeq 3/4$ بنابراین: $[2\sqrt{3}] = 3$

ج) با توجه به قسمت «پ» و «ت» $[7] = 7$ است.

نتیجه

۱: مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره کوچکتر مساوی آن است: $\forall \in \mathbb{R}: [x] \leq x$

۲: اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد $[x] = x$ است.

مثال ۲۸: معادله $x=[3x]-[4x]+4$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ سمت راست معادلهٔ داده شده، مجموع و تفاضل چند عدد صحیح است که حاصل آن همیشه برابر با یک عدد صحیح می‌باشد بنابراین سمت چپ تساوی یعنی x نیز باید یک عدد صحیح باشد. پس داریم:

$$x\in\mathbb{Z}\to 3x\in\mathbb{Z}\to[3x]=3x$$

$$x\in\mathbb{Z}\to 4x\in\mathbb{Z}\to[4x]=4x$$

بنابراین داریم:

$$x=3x-4x+4\to 2x=4\to x=2$$

پس گزینهٔ ۲ صحیح است.

مثال ۲۹: اگر $x=-\frac{11}{3}$ باشد، حاصل $[x]-[2x]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -2 ۳) -3 ۴) ۴

پاسخ بزرگترین عدد صحیحی که از $-\frac{11}{3}$ بیشتر نباشد عدد -4 است. یعنی:

$$\left[-\frac{11}{3}\right]=........$$

از طرفی $2x=-\frac{22}{3}$ و بزرگترین عدد صحیحی که از $-\frac{22}{3}$ بیشتر نباشد عدد -8 است، پس:

$$\left[-\frac{22}{3}\right]=....$$

پس داریم:

$$\left[-\frac{11}{3}\right]-\left[-\frac{22}{3}\right]=....$$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

نتیجه ۳: هرگاه $n\in\mathbb{Z}$ و $n\le x<n+1$ آن‌گاه $[x]=n$ و بالعکس.

مثال ۳۰: جاهای خالی را پر کنید.

الف) $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}\to[x]=.....$

ب) $-1<x<2/5\to[x]=.....$

پ) $2/3<x<3/4\to[x]=.....$

پاسخ

الف)

$$\sqrt{2}<x<\sqrt{3}\xrightarrow[\sqrt{3}\simeq 1/7]{\sqrt{2}\simeq 1/4}1<x<2\to[x]=.....$$

ب)

$$-1<x<2/5\to\begin{cases}-1<x<0\to[x]=...\\0\le x<1\to[x]=...\\1\le x<2\to[x]=...\\2\le x<2/5\to[x]=...\end{cases}$$

پ)

$$2/3\le x<3/4\to 3\begin{cases}2/3\le x<3\to[x]=...\\3\le x<3/4\to[x]=...\end{cases}$$

مثال ۳۱: مجموعه جواب معادله $\left[x+\frac{1}{2}\right]=2$ را بیابید.

پاسخ

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=2\to 2\le x+\frac{1}{2}<3\xrightarrow{-\frac{1}{2}}2-\frac{1}{2}\le x<3-\frac{1}{2}\to............$$

مثال ۳۲: جواب معادلهٔ $\left[\frac{1-x}{x}\right]=2$ کدام است؟

۱) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ ۲) $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ ۳) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$ ۴) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$

پاسخ $\left[\frac{1-x}{x}\right]=2 \to 2\le \frac{1-x}{x}<3 \to 2\le \frac{1}{x}-\frac{x}{x}<3 \to 2\le \frac{1}{x}-1<3 \xrightarrow{+1} .... \le \frac{1}{x}< .... \xrightarrow{\text{معکوس گردد}} ....$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال ۳۳: اگر $\left[x^2+x\right]=-1$ باشد، آن‌گاه $\left[x^{20}\right]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ $\left[x^2+x\right]=-1 \to -1\le x^2+x<0$

$$\begin{cases} x^2+x\ge -1 \to x^2+x+1\ge 0 & (\text{عبارت } x^2+x+1 \text{ همواره نامنفی است چون } \Delta<0 \text{ و ضریب } x^2 \text{ مثبت است}) \\ x^2+x<0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -1<x<0 \end{cases}$$

بنابراین $-1<x<0$ می‌باشد.

$$-1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۲۰ (توان زوج)}} 0<x^{20}<1$$

پس $\left[x^{20}\right]= ...$ یعنی گزینهٔ .... صحیح است.

نتیجه ۴: برای هر عدد حقیقی x داریم: $[x]\le x<[x]+1$ و یا به عبارتی $0\le x-[x]<1$.

مثال ۳۴: معادلهٔ $[x]=x+|x-2|$ چند ریشه دارد؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) بی‌شمار

پاسخ $x+|x-2|=[x] \to x-[x]=-|x-2|$

طبق نتیجه ۴: می‌دانیم $0\le x-[x]<1$ از طرفی $-|x-2|\le 0$ می‌باشد بنابراین تساوی در صورتی صحیح است که $-|x-2|=0$ پس $x=2$، بنابراین گزینهٔ .... صحیح است.

نکته اگر $m\in\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه: $[x+m]=[x]+m$

اثبات اگر $[x]=n$ در نظر بگیریم، داریم: $n\le x<n+1 \to n+m\le x+m<n+m+1 \to [x+m]=n+m=[x]+m$

مثال ۳۵: معادلهٔ $[x]+[x+3]-[4+x]=2$ چند جواب دارد؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 1 ۴) بی‌شمار

پاسخ $[x]+[x+3]-[4+x]=2 \to [x]+[x]+3-4-[x]=2 \to [x]=3 \to 3\le x<4$ بی‌شمار جواب دارد

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

نتیجه برای هر عدد حقیقی x داریم: $\big[x+[x]\big]=2[x]$

مثال ۳۶: مجموعه جواب معادله $\big[2[x]+x\big]=-9$ کدام است؟

۱) $[-3,-2)$ ۲) $\left[-3,-\frac{2}{3}\right)$ ۳) $\left[-3,\frac{-5}{3}\right)$ ۴) $\left[-3,-\frac{3}{2}\right)$

پاسخ $\big[2[x]+x\big]=-9 \to .....+[x]=-9 \to ....[x]=-9 \to [x]=... \to ...$

پس گزینهٔ ...... صحیح است.

نکته الف) اگر $x\in\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=0$ و بالعکس ب) اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=-1$ و بالعکس

اثبات ب) $[x]=n \xrightarrow{x\notin Z} n<x<n+1 \xrightarrow{\times(-)} -n-1<-x<-n \to [-x]=-n-1$

$[x]+[-x]=n+(-n-1)=-1$

مثال ۳۷: معادلهٔ $۵[x]+۲[-x]=۳$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) بی‌شمار

پاسخ برای حل معادله دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $x\in\mathbb{Z}$: $۵[x]+۲[-x]=۳\rightarrow ۵x-۲x=۳\rightarrow ۳x=۳\rightarrow x=۱$

حالت دوم $x\notin\mathbb{Z}$: $۵[x]+۲[-x]=۳\rightarrow ۳[x]+۲([x]+[-x])=۳\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}}۳[x]+(-۲)=۳\rightarrow[x]=\frac{۵}{۳}$

اما $[x]$ نمی‌تواند برابر با یک عدد غیرصحیح باشد پس معادله فقط یک جواب صحیح دارد.

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته

اگر $n\in z$ باشد، آن‌گاه:

۱) $[x]>n\rightarrow x\geq n+۱$

۲) $[x]\geq n\rightarrow x\geq n$

۳) $[x]<n\rightarrow x<n$

۴) $[x]\leq n\rightarrow x<n+۱$

مثال ۳۸: مجموعه جواب نامعادله $[x]>۳$ کدام است؟

۱) $[۴,+\infty)$ ‏ ۲) $[۳,+\infty)$ ‏ ۳) $[۲,+\infty)$ ‏ ۴) $(-\infty,۳)$

پاسخ $[x]>۳\rightarrow x\geq۴$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال ۳۹: مجموعه جواب نامعادله $[x^۲]<۲$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ‏ ۲) $[-\sqrt{۲},۲]$ ‏ ۳) $(-\infty,\sqrt{۲})$ ‏ ۴) $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$

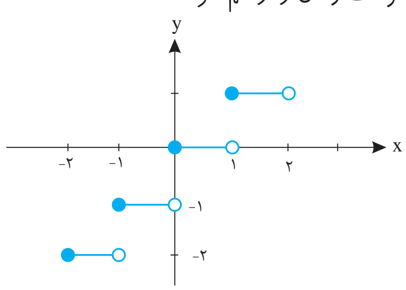
پاسخ $[x^۲]<۲\rightarrow x^۲<۲\rightarrow-\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

تعریف تابع جز صحیح: تابعی که به ازای هر عدد حقیقی جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و ضابطهٔ آن را به صورت $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهند.

این تابع را با توجه به تعریف جزء صحیح می‌توان به صورت تابع پله‌ای زیر نوشت و آن را رسم کرد:

$$f(x)=\begin{cases}\vdots & \vdots\\ ۲ & ۲\leq x<۳\\ ۱ & ۱\leq x<۲\\ ۰ & ۰\leq x<۱\\ -۱ & -۱\leq x<۰\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$



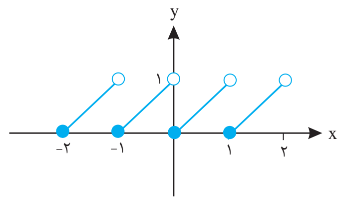
نتیجه

دامنهٔ تابع $f(x)=[x]$ برابر با $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{Z}$ است.

دو تابع معروف:

۱) **تابع** $y=x-[x]$:

نمودار این تابع به صورت زیر رسم می‌شود:



$$f(x)=\begin{cases}\vdots & \vdots\\ x-1 & 1\le x<2\\ x-0 & 0\le x<1\\ x+1 & -1\le x<0\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

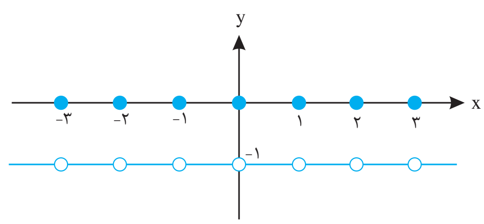
نتیجه دامنهٔ تابع $f(x)=x-[x]$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[0,1)$ می‌باشد.

۲ **تابع** $y=[x]+[-x]$:

با توجه به خاصیت گفته شده داریم:

$$y=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:



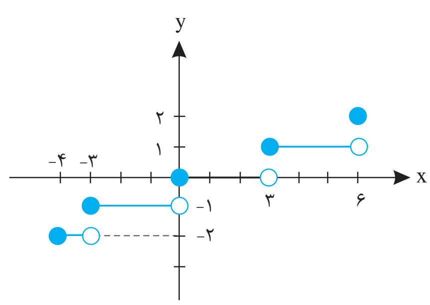
رسم توابع $y=[ax+b]$:

مثال ۴۰: نمودار تابع $y=\left[\frac{x}{3}\right]$ را در فاصلهٔ $[-4,6]$ رسم کنید.

پاسخ ابتدا این تابع را با توجه به فاصلهٔ $[-4,6]$ به صورت زیر به یک تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$-4\le x<6\xrightarrow{\div 3}\frac{-4}{3}\le\frac{x}{3}\le 2$$

$$\begin{cases}\frac{-4}{3}\le\frac{x}{3}<-1\rightarrow\left[\frac{x}{3}\right]=-2 & ;\ -4\le x<-3\\ -1\le\frac{x}{3}<0\longrightarrow\left[\frac{x}{3}\right]=-1 & ;\ -3\le x<0\\ 0\le\frac{x}{3}<1\longrightarrow\left[\frac{x}{3}\right]=0 & ;\ 0\le x<3\\ 1\le\frac{x}{3}<2\longrightarrow\left[\frac{x}{3}\right]=1 & ;\ 3\le x<6\\ \frac{x}{3}=2\longrightarrow\left[\frac{x}{3}\right]=2 & ;\ x=6\end{cases}$$

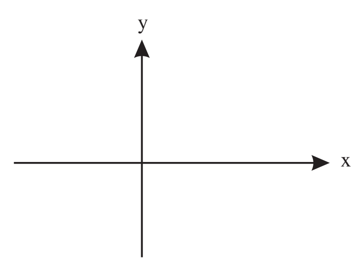


مثال ۴۱: نمودار تابع $y=[3x]$ را در فاصلهٔ $\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ را رسم کنید.

پاسخ

$$-\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}\xrightarrow{\times 3}-1\le 3x\le 2$$

$$\begin{cases}-1\le 3x<0\rightarrow[3x]=\ldots & ;\ \ldots\le x<\ldots\\ 0\le 3x<1\rightarrow[3x]=\ldots & ;\ \ldots\le x<\ldots\\ 1\le 3x<2\rightarrow[3x]=\ldots & ;\ \ldots\le x<\ldots\\ 3x=2\rightarrow[3x]=\ldots & ;\ x=\ldots\end{cases}$$



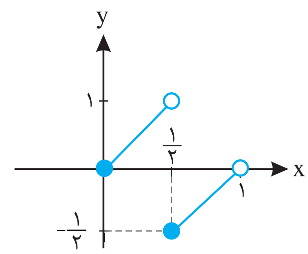
مثال ۴۲: نمودار تابع $y = x - [۲x]$ را در فاصلهٔ $[۰,۱)$ را رسم کنید.

پاسخ

$۰ \le x < ۱ \rightarrow ۰ \le ۲x < ۲$

$$\begin{cases} ۰ \le ۲x < ۱ & \rightarrow [۲x] = ۰ \quad ; \quad ۰ \le x < \frac{۱}{۲} \\ ۱ \le ۲x < ۲ & \rightarrow [۲x] = ۱ \quad ; \quad \frac{۱}{۲} \le x < ۱ \end{cases}$$

$$y = x - [۲x] = \begin{cases} x & \rightarrow ۰ \le x < \frac{۱}{۲} \\ x - ۱ & \rightarrow \frac{۱}{۲} \le x < ۱ \end{cases}$$



نکته

تابع $y = [ax + b]$ یک تابع پله‌ای است که طول هر پله آن $\left|\frac{۱}{a}\right|$ بوده و از نقطه $\left(-\frac{b}{a}, ۰\right)$ شروع و ارتفاع هر پله آن یک است.

تذکر

در تابع $y = [ax + b]$ اگر $a > ۰$ باشد پله‌ها افزایشی و اگر $a < ۰$ باشد پله‌ها کاهشی است.

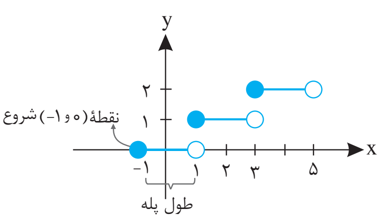
مثال ۴۳: هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $y = \left[\frac{x+۱}{۲}\right]$

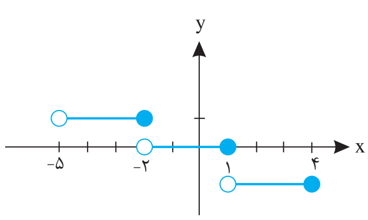
ب) $y = \left[\frac{-x+۱}{۳}\right]$

پاسخ

الف) در تابع $y = \left[\frac{x+۱}{۲}\right] = \left[\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}\right]$ چون $a = \frac{۱}{۲} > ۰$ پس یک تابع پله‌ای افزایشی است که از نقطهٔ $(-۱,۰)$ شروع می‌شود، طول هر پله $۲ = \left|\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\right| = \left|\frac{۱}{a}\right|$ بوده و ارتفاع هر پله یک است:



ب) در تابع $y = \left[\frac{-x+۱}{۳}\right] = \left[-\frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳}\right]$ چون $a = -\frac{۱}{۳} < ۰$ پس یک تابع پله‌ای کاهشی است که از نقطهٔ $(۱,۰) = \left(-\frac{b}{a}, ۰\right)$ شروع می‌شود، طول هر پله $۳ = \left|\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}}\right| = \left|\frac{۱}{a}\right|$ بوده و ارتفاع هر پله یک است:

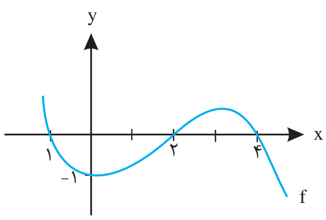


محل انجام محاسبات

تمــرین

۱- نمودار تابع $y=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{x+۱}}$ را رسم کنید.

۲- اگر نمودار تابع چند جمله‌ای f به صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{x+۱}{f(x+۱)}$ را بیابید.



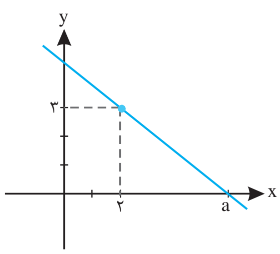
۳- مقدار a را چنان بیابید که دامنه و برد تابع f با ضابطهٔ $y=\frac{ax-۳}{x+۷}$ یکسان باشد.

۴- برد هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\frac{۵x-۱}{۳x-۲}$

ب) $y=\frac{x^۲-۲x}{x+۱}$

۵- خطی مطابق شکل زیر از نقطهٔ $(۲,۳)$ می‌گذرد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول a قطع می‌کند.



الف) ضابطهٔ تابعی را بیابید که مساحت مثلث در شکل را برحسب a بیان کند.

ب) دامنهٔ تابع را بیابید.

۶- حدود a را چنان بیابید که دامنهٔ تابع زیر برابر $\mathbb{R}$ شود:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-۲a+۱} & x\leq ۲\\ \frac{x+۳}{x-a} & x\geq ۲\end{cases}$$

۷- تابع گویای f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و دامنهٔ $D=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ را درنظر بگیرید:

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) مجموعهٔ برد تابع را بیابید.

۸- دامنهٔ تابع $y=\frac{x^۲-۱}{x^۲+ax+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{۱\}$ و برد آن به صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است مقدار n را بیابید.

۹- نمودارهای زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

الف) $y=\frac{x^۲-۲x}{x^۲-۳x+۲}$

ب) $y=\frac{x-۱}{x^۲-۱}$

محل انجام محاسبات

۱۰- دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\frac{x+۱}{۲x-|x-۱|}$ ب) $y=\frac{x+۳}{|x-۲|-|۳x-۱|}$

۱۱- اگر دامنهٔ تابع $y=\frac{۱+\sqrt{x}}{x^۲+x+a}$ برابر $[۰,+\infty)$ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای a را بیابید.

۱۲- دامنهٔ هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $y=\sqrt{\frac{۱-|x|}{۱+|x|}}$ ۲) $y=\sqrt{۴-|x-۱|}$

۳) $y=\sqrt{\frac{x}{۶}+۴-|x|}$ ۴) $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۴x}}$

۵) $y=\sqrt{\frac{۱}{\sqrt{x}-x}}$ ۶) $y=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}-۲}$

۱۳- هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=\sqrt{-x+۳}+۲$ ۲) $y=-\sqrt{۲x-۴}+۱$ ۳) $y=\sqrt{۳x}-۱$

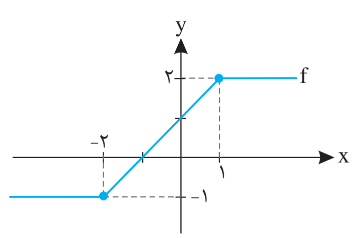
۱۴- هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=\frac{x\sqrt{x}+۱}{x-\sqrt{x}+۱}$ ۲) $y=\frac{x}{\sqrt{x+۱}+۱}$ ۳) $y=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}$

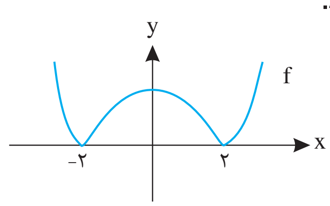
۱۵- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است، دامنهٔ هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\sqrt{f(x)-۱}$

ب) $y=\sqrt{\frac{f(x+۱)}{x}}$



۱۶- با توجه به نمودار f تمام دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)}{x}}$ را بیابید.



۱۷- نشان دهید هر یک از معادلات زیر یک تابع است.

الف) $x=y+\sqrt{y}$ ب) $|x|+|y|=x$

پ) $x=۲y-|y-۱|$ ت) $y^۳+۳y^۲+۳y+x=۵$

محل انجام محاسبات

۱۸- **نشان دهید هر یک از معادلات زیر ضابطه یک تابع نیست.**

الف) $|x|+|y|=۲$ ‌ ‌ ‌ ب) $y^{۲}-۲y=x$

پ) $x^{۲}+\sqrt{y^{۳}-y}=۰$ ‌ ‌ ‌ ت) $y=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

۱۹- **با پیدا کردن تمام زوج مرتب‌هایی که در معادلات زیر صدق می‌کند مشخص کنید کدام معادله ضابطه یک تابع را مشخص می‌کند.**

الف) $|x|+(y-۱)^{۲}=۰$

ب) $|x|+۲|y|=۵\ ;\ x,y\in\mathbb{Z}$

پ) $x^{۴}-۲x^{۲}+y^{۲}-۱۰y+۲۶=۰$

ت) $۵x^{۲}+y^{۲}+۴xy+۴x+۴=۰$

۲۰- **کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع است.**

الف) $y=\begin{cases}۲x+۱ & x\le ۱\\ x^{۲}\pm ۳x & x>۱\end{cases}$

ب) $y=\begin{cases}x^{۳} & x<۱\\ x^{۲}+۱ & x>-۱\end{cases}$

پ) $y=\begin{cases}۲x^{۲}+۳ & x\le ۱\\ ۴x+۱ & x\ge ۱\end{cases}$

۲۱- **اگر $f(x)=\begin{cases}a+x & |x|\le ۱\\ x^{۲}+bx & |x|\ge ۱\end{cases}$ تابع باشد مقادیر b,a را بیابید.**

۲۲- **اگر $f(x)=\left|[۷x]-[۵x]\right|$ حاصل $f(-\frac{۱}{۲})$ را بدست آورید.**

۲۳- **اگر $-۲<a\le -۱$ و $۲<b\le ۴$ باشد، حاصل $\left|[a+۱]\right|+\left[\left|\frac{b}{۲}-۳\right|\right]$ چقدر است؟**

۲۴- **وقتی $۰<x<۲$ باشد حاصل $[x^{۲}-۲x]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟**

۲۵- **اگر $|۳x|<|۱۰-۲x|$ باشد آن‌گاه $\left[\frac{x}{۵}\right]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟**

محل انجام محاسبات

۲۶- حاصل $\left[\sqrt{n^2+12n+35}\right]$ به ازای هر عدد طبیعی n برابر چیست؟

۲۷- اگر $1156=(\sqrt{2}-1)^8+(\sqrt{2}+1)^8$ باشد، حاصل $\left[(1+\sqrt{2})^8\right]$ را بیابید.

۲۸- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $2x+4[x]=19$

۲) $[3x+7]=x-2$

۳) $\left[2x^2\right]+x-3=0$

۴) $2[x]^2-9[x]+1=0$

۵) $\left[x+\frac{3}{4}\right]+\left[x-\frac{1}{4}\right]=5$

۶) $\dfrac{5x^2-4x}{[x]+[-x]+1}=0$

۷) $3x^2-7x-7=\dfrac{11}{[x]+[-x]}$

۸) $x+3[x]=-3/7$

۹) $\dfrac{[x]-1}{x-[x]}=0$

۱۰) $x-[x]=[-x]+x^2$

۲۹- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $[2x-1]<5$

۲) $[-x+3]>1$

۳) $[x]^2-4[x]<0$

۴) $[|2x-1|]\le 3$

۵) $2/3<x+[x]<2/9$

۶) $[-2x]\ge\frac{7}{3}$

۳۰- دامنه هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $y=\sqrt{3[x]-1}$

۲) $y=\sqrt{\dfrac{[x]-5}{2-[x]}}$

۳) $y=\sqrt{\dfrac{2-[x]}{x+|x|}}$

۴) $y=\dfrac{x+3}{[x]+[-x]}$

۳۱- برد توابع زیر را بیابید.

۱) $y=\left[2x+\frac{1}{6}\right]-\left[2x-\frac{5}{6}\right]$

۲) $y=\left[\dfrac{1}{x^2+x^{-2}}\right]$

۳) $y=\begin{cases} x-[x] & x\notin\mathbb{Z}\\ 1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

۴) $y=x-\frac{1}{5}[5x]$

محل انجام محاسبات

۳۲- هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

$۱) y = x\left[\frac{x}{۲}\right] \; ; [-۱,۴]$

$۲) y = ۲\left[\frac{x}{۲}\right] + ۱ \; ; [-۲,۶)$

$۳) y = |x| + [x] \; ; [-۱,۱)$

$۴) y = \left[x^۲\right] \; ; [-۱,۲)$

$۵) y = \frac{[x]}{|x|} \; ; [-۱,۰)$

$۶) y = \left[\sqrt{x}\right] \; ; [۰,۹)$

$۷) y = |x| . [x] \; ; [-۱,۲)$

$۸) y = [x][۲x] \; ; [۰,۲)$

۳۳- به روش هندسی تعداد ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$۱) x^۲ - x + [x] = ۰$

$۲) [x] + [-x] - x + ۱ = ۰$

۳۴- اگر $f(x) + [f(x)] = \frac{۶x + ۱}{x + ۲}$ آن‌گاه حاصل $f(۱)$ چقدر است؟

۳۵- یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های پستی کمتر از یک کیلوگرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته‌های پستی از یک تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و برای ارسال بسته‌ها از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار تومان و برای بسته‌های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می‌کنند. اگر $f(x)$ ضابطه تابع هزینه ارسال یک بسته پستی x کیلوگرم باشد. ضابطه آن را به صورت یک تابع جزء صحیح بیان کنید.

۳۶- فرض کنیم $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x+۱)}{x^۸[x]+۱} & x > ۱ \\ \dfrac{x^۲[x]+ax}{x^۸+۱} & x < ۲ \end{cases}$ یک تابع باشد a را بیابید.

تست‌های درس دوم (انواع تابع)

۲-۱ توابع گویا

۲۱۳- برد تابع $f(x)=\frac{۲}{x+۲}$ بصورت مجموعه $\{-۱,۱,۲\}$ است، دامنه‌ی آن کدام است؟

۱) $\{-۴,۰,-۱\}$ ۲) $\{۱,۳,۴\}$ ۳) $\{۲,\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۲}\}$ ۴) $\{-۳,-۱,۰\}$

۲۱۴- اگر دامنه‌ی تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{۲x+۱}{x^۲-۳x+a-۵}$ برابر $R-\{b\}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۶ ۳) $\frac{۲۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۲۱۵- دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{x}{x}+\frac{x+۴}{\frac{۲}{x+۱}+۱}$ برابر است با:

۱) $D_f=R-\{۰,-۱,-۳,-۴\}$ ۲) $D_f=R-\{۰,-۱\}$
۳) $D_f=R-\{۰,-۱,-۴\}$ ۴) $D_f=R-\{۰,-۱,-۳\}$

۲۱۶- بُرد تابع $f(x)=\frac{۳-x}{۲x+۱}$ کدام است؟

۱) R ۲) $R-\{\frac{۳}{۲}\}$ ۳) $R-\{۱\}$ ۴) $R-\{-\frac{۱}{۲}\}$

۲۱۷- اگر $x<-۱$ باشد، برد تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $(-\infty,۱)$

۲۱۸- برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲+۴}{x^۲+۲}$ کدام بازه است؟

۱) $[۱,۲)$ ۲) $(۱,۲]$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $[۱,۴]$

۲۱۹- برد تابع $y=\frac{۱+۲x-x^۲}{۱+x^۲}$ کدام فاصله است؟

۱) $[-۱,۳]$ ۲) $[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ ۴) R

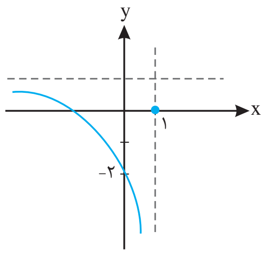
۲۲۰- برد تابع $f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{x-|x|}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)$ ۲) $(-\infty,-۱)$ ۳) $(-\infty,-\frac{۲}{۳})$ ۴) $(\frac{۳}{۲},+\infty)$

۲۲۱- برد تابع $y=\frac{۱}{x^۴+x^۲+۱}$ به صورت بازه‌ی $(a,\beta]$ است. $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۲۲- شکل مقابل قسمتی از نمودار $xy-ax+cy-b=0$ است، bc کدام است؟



۱) ۱

۲) ۱−

۳) ۲

۴) ۲−

(گزینه ۲ ـ تجربی ۹۵)

۲۲۳- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

۲۲۴- برد تابع $y=(x-|x|)\dfrac{1}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $[-1,0)$ ۲) $[-1,0]$ ۳) $[-1,1)$ ۴) $[-1,1]$

۲۲۵- تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^2+2x-2=\dfrac{1}{x}$ کدام است؟

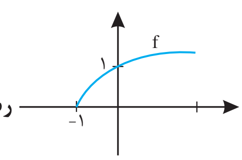
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲-۲ توابع رادیکالی تابع ریشه دوم

۲۲۶- دامنه و برد تابع $y=\sqrt{-2x+7}$ از روی نمودار آن برابر است با:

۱) $\begin{cases} D_f=\left(-\infty,\dfrac{7}{2}\right] \\ R_f=[0,+\infty) \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} D_f=\left[\dfrac{7}{2},+\infty\right) \\ R_f=[0,+\infty) \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} D_f=\left(-\infty,\dfrac{7}{2}\right] \\ R_f=R \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} D_f=\left[\dfrac{7}{2},+\infty\right) \\ R_f=R \end{cases}$

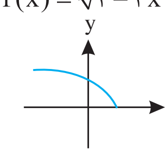
۲۲۷- با انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ به نمودار

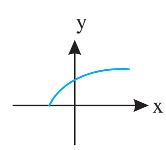


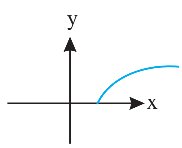
رسیده‌ایم، مقدار $f(8)$ چیست؟

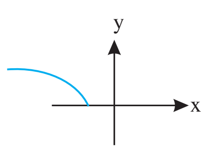
۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۸ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

۲۲۸- نمودار $f(x)=\sqrt{2-3x}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

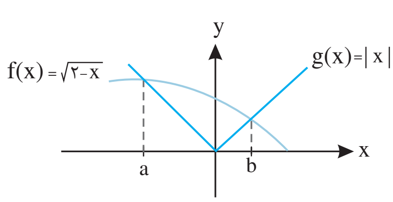
۳) 

۴) 

۲۲۹- معادله $x^2-1=\sqrt{x+1}$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۳۰- با توجه به شکل زیر فاصله بین b,a چقدر است؟



۱) ۲

۲) $\dfrac{5}{2}$

۳) ۳

۴) $\dfrac{7}{2}$

۲۳۱- دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{x^2-|x|-2}$ کدام گزینه است؟

۱) $x\le -2$ یا $x\ge 2$ ۲) $-1<x<1$ ۳) $-2<x<2$ ۴) R

۲۳۲- دامنه تابع $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x}}-\sqrt{\frac{-۱-x}{۳x-۲}}$ کدام است؟

۱) $\left[۰,\frac{۲}{۳}\right)$ ۲) $\left[-۱,\frac{۲}{۳}\right]$ ۳) $[۰,۱)$ ۴) $[-۱,۱)$

۲۳۳- اگر دامنه تعریف تابع $y=\sqrt{(x-۲)(x^۲+ax+b)}$ بازهٔ $[۱,+\infty)$ باشد مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) -۵

۲۳۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر a دامنه تابع $f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{x^۲+a}$ به صورت $(-\infty,۰)$ می‌باشد؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $\{۰\}$ ۴) $\varnothing$

۲۳۵- برد تابع $y=\sqrt{ax-۳|x|}$ به صورت $R_f=\{b\}$ است. $a^۲-b$ کدام است؟ (دامنه f بیش از یک عضو دارد)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

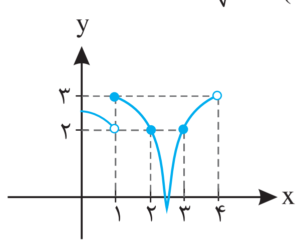
۲۳۶- اگر توابع $f(x)=\sqrt{(x-a)^۲(x-b)}$ و $g(x)=|x-a|\sqrt{x+۲}$ باهم برابر باشند مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) -۷ ۴) -۹

۲۳۷- اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+bx+۶}$ بازه‌ی $[-۲,۳]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) -۲

۲۳۸- مطابق شکل، نمودار تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در دامنه‌ی تعریفش رسم شده است. دامنه‌ی تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{۲-f(x)}}$، کدام است؟

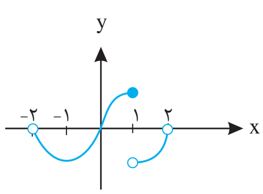


۱) $(-\infty,۴)$
۲) $(۱,۲)$
۳) $(۲,۳)$
۴) $R-[۲,۳]$

۲۳۹- دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a-|x+b|}}$ بازه‌ی $(-۱,۳)$ است. مقدار b کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۴۰- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{(x^۲-۱)f(x)}$ کدام است؟

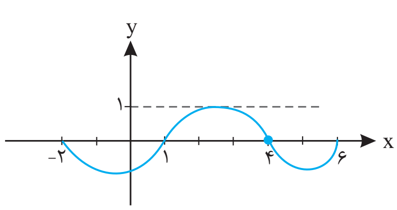


۱) $[-۱,۰]\cup\{۱\}$
۲) $[-۱,۰]$
۳) $[-۱,۱]$
۴) $(-۲,۰]\cup[۱,۲)$

۲۴۱- اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+۳x+a}$ تنها شامل یک مقدار حقیقی باشد، آن مقدار چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۴۲- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است دامنه تابع $y=\sqrt{f(۳-|x|)}$ کدام است؟



۱) $[۱,۴]$
۲) $[-۲,۲]$
۳) $[-۳,۳]$
۴) $[-۱,۳]$

۲-۳ معادلات و توابع

۲۴۳- اگر رابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ۴ax+۱ & x\le ۱ \\ ۴ax^۲+۲ & x\ge ۱\end{cases}$ معرف یک تابع باشد، a کدام است؟

۱) ۷ ‏ ۲) R ‏ ۳) ϕ ‏ ۴) ۵

۲۴۴- در کدام گزینه‌ی زیر y تابعی از x است؟

۱) $x^۲+y^۲=۱$ ‏ ۲) $x^۲-y^۲=۱$ ‏ ۳) $x^۳-y^۲=۱$ ‏ ۴) $x^۲-y^۳=۱$

۲۴۵- کدام رابطه یک تابع است؟

۱) $x=y^۳-۳y^۲$ ‏ ۲) $y+y^۳=x^۳+۱$ ‏ ۳) $|y-۱|+x=۰$ ‏ ۴) $xy^۲-x=۱$

۲۴۶- کدام یک از روابط زیر تابع نمی‌باشد؟

۱) $|y|=-۴x^۲+۴x-۱$ ‏ ۲) $x^۲+y^۲+۴x+۲y+۵=۰$

۳) $y=\sqrt{x^۲-۴}\pm\sqrt{۴-x^۲}$ ‏ ۴) $y^۲+۴yx=x-۱$

۲۴۷- کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

۱) $|x|+|y^۲-۱|=۰$ ‏ ۲) $|x|-|y|=۰$

۳) $x^۲+y^۲-۲x+۳y+۱=۰$ ‏ ۴) $x^۲+y^۲-۲x+۳y+\frac{۱۳}{۴}=۰$

۲۴۸- کدام‌یک از روابط زیر تابع نیست؟

۱) $y=\sqrt{x^۲-۹}-\sqrt{۹-x^۲}$ ‏ ۲) $|y|=-x^۲+۲x-۱$

۳) $x^۲+y^۲+۲x+۴y+۵=۰$ ‏ ۴) $x^۲+xy=۰$

۲۴۹- در کدام‌یک از روابط زیر y تابعی برحسب x است؟

۱) $x=۳y+۲|y|+۱$ ‏ ۲) $x^۲+y^۲+۲y=۱$ ‏ ۳) $x=۲y+۲|y|+۱$ ‏ ۴) $x^۲+y^۲+۲x=۱$

۲۵۰- کدام رابطه یک تابع نیست؟

۱) $۲y-|y|=x$ ‏ ۲) $۲y+|y|=x$ ‏ ۳) $y-\sqrt{y}=\sqrt{x}$ ‏ ۴) $y+\sqrt{y}=\sqrt{x}$

۲۵۱- به ازای کدام مقدار a رابطهٔ غیرتهی $x^۲+y^۲=-۸x+۲y-a$ تابع است.

۱) ۴ ‏ ۲) ۹ ‏ ۳) ۱۷ ‏ ۴) ۱۹

۲-۴ توابع پله‌ای – تابع جزء صحیح

۲۵۲- می‌دانیم $۲=(a+\sqrt{۵})(۱+\sqrt{۲})$، جزء صحیح عدد a کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) صفر ‏ ۳) -۲ ‏ ۴) -۱

۲۵۳- اگر $[x+۲[x]]=۴$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}\le x\le\frac{۷}{۳}$ ‏ ۲) $۰\le x\le ۱$ ‏ ۳) $۱\le x\le ۲$ ‏ ۴) معادله جواب ندارد.

۲۵۴- اگر $a+[b]=۴/۲$ و $b-[a]=۲/۴$ باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟ ([ ] ، علامت جزء صحیح است)

۱) ۵ ‏ ۲) ۵/۶ ‏ ۳) ۴/۶ ‏ ۴) ۳/۶

۲۵۵- اگر $|۲x-۳|<۱۱$ باشد، $\left[\frac{x}{۳}\right]$ چند مقدار صحیح خواهد داشت؟([ ] تابع جزء صحیح است)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

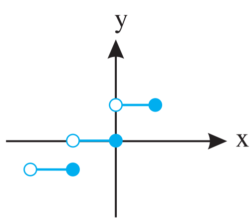
۲۵۶- مجموعهٔ $A=\left\{\left[۳x+\frac{۱}{۲}\right] \middle| |x+۱|<۲\right\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۲۵۷- مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $[x^۲+۴x]=-۴$، بازه‌ی (a,b) است، مقدار $b-a$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

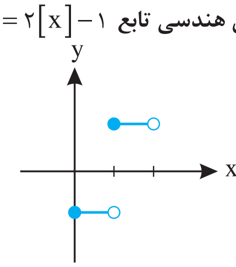
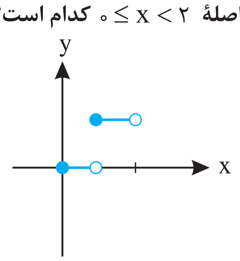
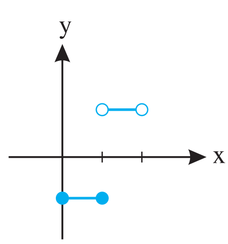
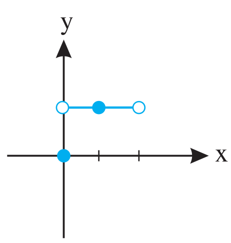
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۸- نمودار کدام تابع زیر به صورت مقابل است؟

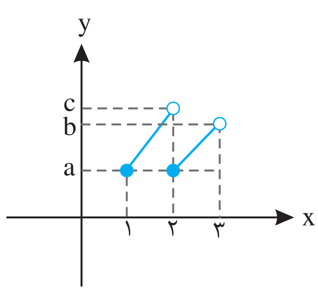


۱) $-[x]$
۲) $[-x]$
۳) $-[-x]$
۴) $۱+[x]$

۲۵۹- نمایش هندسی تابع $y=۲[x]-۱$ در فاصلهٔ $۰\le x<۲$ کدام است؟

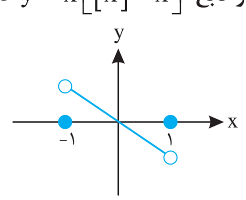
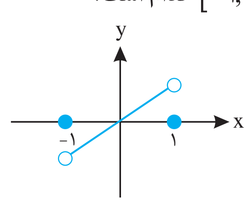
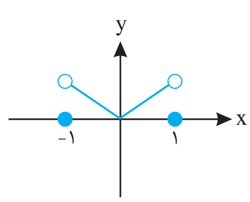
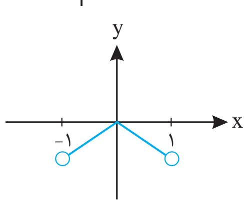
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۶۰- نمودار تابع $y=\frac{x}{[x]}$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۴/۵
۲) ۳/۵
۳) ۴
۴) ۳

۲۶۱- نمودار تابع $y=x\left[[x]-x\right]$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۶۲- دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۱}{x+[x]+[-x]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۲۶۳- معادله‌ی $x=[x]+\frac{۱}{۴}$ در بازه‌ی $[-۲,۴]$، چند ریشه دارد؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۲۶۴- معادله‌ی $x^۲+[x]=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۵- ریشه معادله $2x+[x]=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۲۶۶- نمودار تابع $y=[3x]$ در بازه‌ی $[-1,1]$ از چند قسمت تشکیل شده است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۶۷- برد تابع $y=[x]+[-x]$ کدام است؟

۱) $\{-1\}$ ۲) 0 ۳) $\{-1,0\}$ ۴) $\{1,0\}$

۲۶۸- معادله‌ی $2x-[2x]=[x]+[-x]$ در بازه‌ی $\left(1,\frac{7}{2}\right)$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۶۹- دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\left([x]-\sqrt{2}\right)\left(3-[x]\right)}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $[\sqrt{2},3]$ ۲) $[1,3)$ ۳) $[2,4)$ ۴) $[1,3]$

۲۷۰- معادله $\frac{x}{2}+\left[\frac{x-4}{2}\right]=3$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳

۲۷۱- معادله $\left[x+\sqrt{x}\right]-\sqrt{x}=4$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۳

۲۷۲- مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $[x]+[3x]=0$، بازه‌ی $[a,b)$ است، مقدار $b-a$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۷۳- حاصل عبارت $\left|x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right|$ به ازای جمیع مقادیر حقیقی x کدامیک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۲۷۴- تعداد ریشه‌های معادله $(x^2-1)\left[x^2-1\right]=1$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۲۷۵- مجموعه جواب معادله $\left[\frac{2x-1}{2}\right]-\left[\frac{1-2x}{2}\right]=3$ کدام است؟

۱) $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ ۲) $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ ۳) $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ ۴) $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

$$\begin{cases} x+۲y+۳=۰ \xrightarrow{y=-۱} x-۲+۳=۰ \to x=-۱ \\ -y-۱=۰ \to y=-۱ \end{cases} \to A(-۱,-۱)$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-۱,-۱)$ را از خط $y=-x$ (نیمساز ربع دوم) بدست می‌آوریم:

$$d=\frac{|(-۱)(۱)+(-۱)(۱)|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\xrightarrow{\text{گویا شود}} d=\sqrt{۲}$$

۱۸۵- **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا فاصله‌ی نقطه‌ی A را از خط $۳y-۴x-a=۰$ بدست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۳(۲)-۴(-۱)-a|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{|۱۰-a|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{|۱۰-a|}{۵}\xrightarrow{d=۲}\frac{|۱۰-a|}{۵}=۲$$

$$\longrightarrow |۱۰-a|=۱۰ \longrightarrow \begin{cases}۱۰-a=۱۰\to a=۰\\ ۱۰-a=-۱۰\to a=۲۰\end{cases}$$

مجموع مقادیر برای a برابر ۲۰ است.

۱۸۶- ۱ **۲** ۳ ۴

فرض کنید نقطه‌ی A روی خط $y=۲x+۱$ قرار دارد پس می‌توان مختصات آن را به صورت $A(x,۲x+۱)$ در نظر گرفت فاصله‌ی این نقطه تا نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d=\frac{|x(۱)+(۲x+۱)(-۱)|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|-x-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{|x+۱|}{\sqrt{۲}}\xlongequal{\text{طبق‌فرض}}۴\sqrt{۲}$$

$$\longrightarrow |x+۱|=۸ \to \begin{cases}x+۱=۸\\x+۱=-۸\end{cases}\to\begin{cases}x=۷\\x=-۹\end{cases}$$

۱۸۷- **۱** ۲ ۳ ۴

خط موازی با $y=\sqrt{۳}x-۱$ که از مبدأ می‌گذرد به صورت $y=\sqrt{۳}x$ است که فاصله‌ی این دو خط برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-\sqrt{۳})^۲}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۱۸۸- ۱ ۲ **۳** ۴

دو خط داده شده با هم موازیند پس فاصله‌ی بین دو خط طول ضلع مربع است.

$$\begin{cases}۲x-۲y=۳\to x-y-\frac{۳}{۲}=۰\\ y=x+۱\to x-y+۱=۰\end{cases}$$

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\left|-\frac{۳}{۲}-۱\right|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{\left|-\frac{۵}{۲}\right|}{\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

$$S=\left(\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}\right)^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

۱۸۹- **۱** ۲ ۳ ۴

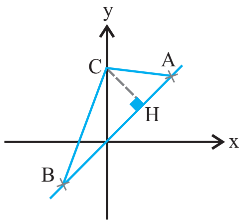
دو خط داده شده با هم موازیند پس طول ضلع مربع برابر با فاصله‌ی دو خط است، بنابراین:

$$\begin{cases}x-y-۲=۰\\x-y+۱=۰\end{cases}\longrightarrow d=\frac{|-۲-۱|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\ \text{طول ضلع مربع}$$

$$\longrightarrow \text{طول قطر}=\left(\frac{۳}{\sqrt{۲}}\right)(\sqrt{۲})=۳$$

۱۹۰- **۱** ۲ ۳ ۴

مختصات هر نقطه روی نیمساز اول و سوم به صورت (x,x) است پس داریم:



$$\frac{|x+۲x|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۲\sqrt{۵}\to\frac{۳|x|}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}\to|x|=\frac{۱۰}{۳}\to x=\pm\frac{۱۰}{۳}$$

$$A\left(\frac{۱۰}{۳},\frac{۱۰}{۳}\right)\qquad B\left(-\frac{۱۰}{۳},-\frac{۱۰}{۳}\right)\qquad C=(۰,۳)$$

حال فاصله‌ی C را از خط AB بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}C(۰,۳)\\AB:\ y=x\end{cases}\longrightarrow CH=\frac{|۳-۰|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$AB=\sqrt{\left(\frac{۱۰}{۳}-\left(-\frac{۱۰}{۳}\right)\right)^۲+\left(\frac{۱۰}{۳}-\left(-\frac{۱۰}{۳}\right)\right)^۲}=\sqrt{۲\times\left(\frac{۲۰}{۳}\right)^۲}=\frac{۲۰}{۳}\sqrt{۲}$$

$$S=\frac{CH\times AB}{۲}=\frac{\frac{۳}{\cancel{\sqrt{۲}}}\times\frac{۲۰}{\cancel{۳}}\cancel{\sqrt{۲}}}{۲}=۱۰$$

پاسخنامهٔ درس ۱ فصل ۲ (آشنایی بیشتر با تابع)

۱۹۱- ۱ ۲ **۳** ۴

هم دامنه $=\{e,f,g,h,i\}$

بُرد $=\{e,f,i\}$

۱۹۲- ۱ **۲** ۳ ۴

۱۹۳- ۱ ۲ ۳ **۴**

۱۹۴- ۱ **۲** ۳ ۴

$$\begin{cases}f(x)=-۱\to ۳-x=-۱\to x=۴\\ f(x)=۰\to ۳-x=۰\to x=۳\\ f(x)=۳\to ۳-x=۳\to x=۰\end{cases}\Rightarrow$$

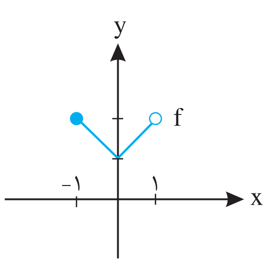
با توجه به گزینه‌ها $D=\{۰,۴\},\ R=\{-۱,۳\}$

۱۹۵- ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{cases}f(-۱)=۴(-۱)-۱=-۵\\ f(۱)=۴(۱)-۱=۳\end{cases}\longrightarrow R_f=\{-۵,۳\}\not\subset[-۱,+\infty)$$

۱۹۶- ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به نمودار f داریم:



$R_f=[۱,۲]$

۱۹۷- ۱ ۲ **۳** ۴

$$x \xrightarrow{f} x^2-1 \Rightarrow 2 \xrightarrow{f} 2^2-1=3$$

۱۹۸- ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر $f(5)=x$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به فرض داریم:

$$\frac{x-1}{2}=5 \longrightarrow x-1=10 \longrightarrow x=11$$

پس $f(5)=11$ می‌باشد.

۱۹۹- ۱ **۲** ۳ ۴

$$\begin{cases} g(x)=|-x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \\ xf(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow g(x)=xf(x)$$

۲۰۰- ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع $g(x)=\frac{|6x-12|}{6}$ با تابع داده شده برابر است زیرا $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و

$$g(x)=\frac{\cancel{6}|x-2|}{\cancel{6}}=|x-2| \Rightarrow f(x)=g(x)$$

۲۰۱- ۱ ۲ ۳ **۴**

دو تابع f و g هنگامی با هم برابرند که $D_f=D_g=(1,+\infty)$ است.

۲۰۲- **۱** ۲ ۳ ۴

دامنه‌ی تابع f برابر $\mathbb{R}$ است پس باید دامنه‌ی تابع $|g|$ نیز برابر با $\mathbb{R}$ باشد که فقط گزینه‌ی (۱) این شرط را دارد (مخرج کسر آن هیچ‌گاه صفر نمی‌شود)

$$g(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{(x+1)(\cancel{x^2+1})}{\cancel{x^2+1}}=x+1$$

$$\longrightarrow |g(x)|=|x+1| \quad , \quad D_g=D_{|g|}=\mathbb{R}$$

۲۰۳- **۱** ۲ ۳ ۴

دامنه‌ی تمام توابع داده شده برابر با $\mathbb{R}$ است پس داریم:

$$y=|2x-|x||=\begin{cases} |2x-x| & x\geq 0 \\ |2x+x| & x<0 \end{cases}=\begin{cases} |x| & x\geq 0 \\ |3x| & x\leq 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -3x & x<0 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده فقط گزینه ۱ با تابع فوق مساوی است زیرا:

گزینه ۱ : $y=2|x|-x=\begin{cases} 2x-x & x\geq 0 \\ -2x-x & x<0 \end{cases}=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -3x & x<0 \end{cases}$

۲۰۴- **۱** ۲ ۳ ۴

چون توابع f و g با یکدیگر مساویند پس $f(1)=g(1)$ است بنابراین:

$$\begin{cases} f(1)=2(1)-1=1 \\ g(1)=k \end{cases} \Rightarrow k=1$$

۲۰۵- ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(x)=\begin{cases} n & x=m \\ \dfrac{x^3+8}{x-m} & x\neq m \end{cases} \longrightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} n & x=m \\ \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x-m} & x\neq m \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی f و g می‌توان نتیجه گرفت که $m=-2$ است، همچنین چون $f=g$ است می‌توان نوشت $f(-2)=g(-2)$

$$\begin{cases} g(-2)=(-2)^2-2(-2)+4=12 \\ f(-2)=n \end{cases} \longrightarrow n=12$$

پس $m+n=(-2)+(12)=10$

۲۰۶- ۱ ۲ **۳** ۴

دو تابع f و g هنگامی با هم برابرند که همواره $f\geq 0$ باشد یعنی عبارت درجه دوم $x^2+2ax+13\geq 0$ پس باید $\Delta\leq 0$ باشد.

$$\Delta=(2a)^2-4(1)(13)=4a^2-52 \xrightarrow{\Delta\leq 0}$$

$$4a^2-52\leq 0 \longrightarrow a^2\leq 13 \longrightarrow -\sqrt{13}\leq a\leq \sqrt{13}$$

بنابراین اعداد صحیحی که در این فاصله قرار دارند عبارتند از: $-3,-2,-1,0,1,2,3$

۲۰۷- ۱ ۲ **۳** ۴

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$، پس $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$ است بنابراین مخرج کسر تابع g باید فقط یک ریشه‌ی ۲ باشد.

$$x^2+cx+4=0 \xrightarrow{x=2} (2)^2+2c+4=0 \to 2c=-8 \to c=-4$$

بنابراین:

$$g(x)=\frac{ax+b}{x^2-4x+4}=\frac{ax+b}{(x-2)^2}$$

با توجه به ضابطه‌ی f، هنگامی g با f مساوی است که $x=2$ ریشه‌ی صورت کسر g نیز باشد پس داریم:

$$ax+b=0 \xrightarrow{x=2} 2a+b=0 \to b=-2a$$

$$g(x)=\frac{ax+b}{(x-2)^2}=\frac{ax-2a}{(x-2)^2}=\frac{a(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{a}{x-2}$$

از طرفی چون ضابطه f مساوی $f(x)=\frac{3}{x-2}$ پس $a=3$.

$$b=-2a=-6 \longrightarrow a+b+c=3-6-4=-7$$

۲۰۸- **۱** ۲ ۳ ۴

$D_f=D_g=\mathbb{R}-\{1,-1\}$، همچنین داریم:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{ax+a+bx-b}{x^2-1} \\ =\dfrac{x(a+b)+(a-b)}{x^2-1} \\ f(x)=\dfrac{x}{x^2-1} \end{cases} \xrightarrow{f=g}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases} \longrightarrow a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2} \to a+2b=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

۲۰۹- ۱ **۲** ۳ ۴

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{۲(x^۲+x-a)}{x^۲+x-a}=۲ \\ g(x)=a^۳-a+۲ \end{cases} \xrightarrow{f=g} \begin{cases} a^۳-a+۲=۲ \to a^۳-a=۰ \\ a(a^۲-۱)=۰ \to \begin{cases} a=۰ \\ a=۱ \\ a=-۱ \end{cases} \end{cases}$$

از طرفی باید $D_f=D_g=\mathbb{R}$ باشد پس مخرج کسر تابع f باید مخالف صفر باشد بنابراین Δ مخرج منفی است.

$$x^۲+x-a=۰ \to \Delta=۱+۴a<۰ \to a<-\frac{۱}{۴}$$

با توجه به رابطه‌ی فوق فقط $a=-۱$ قابل قبول است.

۲۱۰- ۱ ۲ ۳ **۴**

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱,۲\} \to D_g=\mathbb{R}-\{۱,۲\}$$

پس ۱ و ۲ ریشه‌های مخرج تابع g است.

$$\begin{cases} x^۳-۵x^۲+ax-b=۰ \\ \xrightarrow{x=۱} ۱-۵+a-b=۰ \to a-b=۴ \\ x^۳-۵x^۲+ax-b=۰ \\ \xrightarrow{x=۲} ۸-۲۰+۲a-b=۰ \to ۲a-b=۱۲ \end{cases} \to \begin{cases} a=۸ \\ b=۴ \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{x-۲c}{x^۳-۵x^۲+۸x-۴}=\frac{x-۲c}{(x-۲)^۲(x-۱)}$$

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)} x-۲c=x-۲ \to c=۱$$

پس $a-b+۲c=۸-۴+۲=۶$ است.

۲۱۱- ۱ **۲** ۳ ۴

تابع $f(x)$ با تابع $g(x)=x$ برابر است پس داریم:

$$f(-۱)=g(-۱) \to \frac{c}{-۱-۱}=-۱ \to c=۲$$

$$x\neq-۱ \to f(x)=g(x) \to \frac{x^۲+ax+b}{x+۱}=x$$

$$\to x^۲+ax+b=x^۲+x \to a=۱, b=۰$$

پس حاصل $a-b+c=۱-۰+۲=۳$ می‌باشد.

۲۱۲- ۱ **۲** ۳ ۴

دو تابع f و g باهم مساویند پس $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{-۱\}$ است پس $x=-۱$ ریشهٔ مخرج تابع f است.

$$۲x^۳-c=۰ \xrightarrow{x=-۱} ۲(-۱)^۳-c=۰ \to -۲-c=۰ \to c=-۲$$

همچنین $f(x)=g(x)$، پس داریم:

$$\frac{ax^۳+b}{۲x^۳+۲}=۲ \to ax^۳+b=۴x^۳+۴ \to a=۴, b=۴$$

پس $a+b+c=۴+۴-۲=۶$ است

پاسخنامهٔ درس ۲ فصل ۲ (انواع تابع)

۲۱۳- **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} f(x)=-۱ \to \dfrac{۲}{x+۲}=-۱ \to x+۲=-۲ \to x=-۴ \\ f(x)=۱ \to \dfrac{۲}{x+۲}=۱ \to x+۲=۲ \to x=۰ \\ f(x)=۲ \to \dfrac{۲}{x+۲}=۲ \to x+۲=۱ \to x=-۱ \end{cases}$$

پس: $D=\{-۴,۰,-۱\}$

۲۱۴- ۱ ۲ **۳** ۴

چون دامنه‌ی تابع f به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ است پس مخرج تابع f فقط دارای یک ریشه‌ی b است.

بنابراین Δ مخرج برابر صفر است.

$$\Delta=(-۳)^۲-۴(۱)(a-۵)=۰ \to ۹-۴a+۲۰=۰ \to a=\frac{۲۹}{۴}$$

$$x^۲-۳x+\frac{۲۹}{۴}-۵=۰ \to x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}=۰ \to (x-\frac{۳}{۲})^۲=۰$$

پس $b=\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $a-b=\frac{۲۳}{۴}$.

۲۱۵- ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\begin{cases} x=۰ \\ x+۱=۰ \to x=-۱ \\ \dfrac{۲}{x+۱}+۱=۰ \to \dfrac{x+۳}{x+۱}=۰ \to x=-۳ \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۰,-۱,-۳\}$$

۲۱۶- ۱ ۲ ۳ **۴**

برد تابع به فرم $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ است پس در این تابع $R=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{۱}{۲}\right\}$ است.

۲۱۷- **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-۱}{x+۱}=\dfrac{(x+۱)-۲}{x+۱}=۱-\dfrac{۲}{x+۱} \\ x+۱<۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{-۲}{x+۱}>۰ \to ۱-\frac{۲}{x+۱}>۱$$

پس $f(x)>۱$، بنابراین $R=(۱,+\infty)$

۲۱۸- ۱ **۲** ۳ ۴

$$y=\frac{x^۲+۴}{x^۲+۲}=\frac{(x^۲+۲)+۲}{x^۲+۲}=۱+\frac{۲}{x^۲+۲}$$

$$x^۲\geq۰ \longrightarrow x^۲+۲\geq۲ \xrightarrow{\text{معکوس}} ۰<\frac{۱}{x^۲+۲}\leq\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times۲} ۰<\frac{۲}{x^۲+۲}\leq۱$$

$$\xrightarrow{+۱} ۱<۱+\frac{۲}{x^۲+۲}\leq۲ \longrightarrow R=(۱,۲]$$

۲۱۹- ۱ **۲** ۳ ۴

$$y=\frac{۱+۲x-x^۲}{۱+x^۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}y+yx^۲=۱+۲x-x^۲$$

$$\to(۱+y)x^۲-۲x+(y-۱)=۰$$

هنگامی معادله‌ی درجه‌ی دوم بالا دارای جواب است که $\Delta\ge ۰$ باشد پس:

$$\Delta=(-۲)^۲-۴(y+۱)(y-۱)\ge ۰\to ۱-y^۲+۱\ge ۰$$

$$\to y^۲\le ۲\to -\sqrt{۲}\le y\le\sqrt{۲}$$

۲۲۰- ۱ **۲** ۳ ۴

به ازای $x\ge ۰$ همواره $x-|x|=۰$ است پس دامنه‌ی تابع برابر اعداد حقیقی منفی است یعنی $x<۰$ پس داریم:

$$f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{x-|x|}\xrightarrow{x<۰}f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{۲x}$$

$$=\frac{x(۳x-۲)}{۲x}=\frac{۳x-۲}{۲}$$

$$x<۰\to ۳x<۰\to ۳x-۲<-۲\to\frac{۳x-۲}{۲}<-۱\to R=(-\infty,-۱)$$

۲۲۱- **۱** ۲ ۳ ۴

$$x^۴+x^۲+۱=(x^۲+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}\to y=\frac{۱}{(x^۲+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}$$

$$x^۲\ge ۰\to x^۲+\frac{۱}{۲}\ge\frac{۱}{۲}\to(x^۲+\frac{۱}{۲})^۲\ge\frac{۱}{۴}\to(x^۲+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}\ge ۱$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}}۰<\frac{۱}{(x^۲+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}\le ۱\to R=(۰,۱]$$

پس $\alpha=۰$ و $\beta=۱$ و $\alpha+\beta=۱$.

۲۲۲- ۱ ۲ ۳ **۴**

$$xy-ax+cy-b=۰\to y(x+c)=ax+b\to y=\frac{ax+b}{x+c}$$

با توجه به نمودار رسم شده مقدار تابع برای $x=۱$ وجود ندارد پس $x=۱$ ریشه‌ی مخرج است.

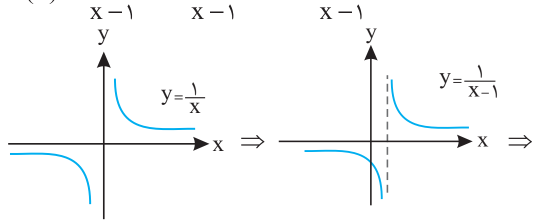
$$x+c=۰\xrightarrow{x=۱}c=-۱$$

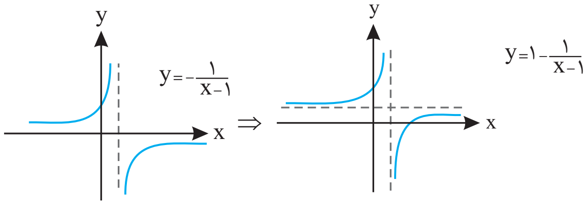
از طرفی تابع از نقطه‌ی $(۰,-۲)$ عبور می‌کند پس داریم:

$$y=\frac{ax+b}{x-۱}\xrightarrow{(۰,-۲)}-۲=\frac{b}{-۱}\to b=۲\Rightarrow bc=-۲$$

۲۲۳- ۱ **۲** ۳ ۴

$$f(x)=\frac{x-۲}{x-۱}=\frac{(x-۱)-۱}{x-۱}=۱-\frac{۱}{x-۱}$$





۲۲۴- ۱ **۲** ۳ ۴

$$y=(x-|x|)\frac{۱}{x^۲+۱}=\begin{cases}(x-x)\frac{۱}{x^۲+۱} & x\ge ۰\\ (x-(-x))\frac{۱}{x^۲+۱} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۰ & x\ge ۰\\ \frac{۲x}{x^۲+۱} & x<۰\end{cases}$$

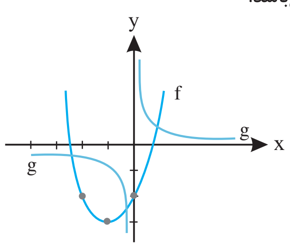
$$x<۰: y=\frac{۲x}{x^۲+۱}\to\frac{۱}{y}=\frac{x^۲+۱}{۲x}\to\frac{۲}{y}=x+\frac{۱}{x}$$

$$\xrightarrow{x+\frac{۱}{x}\le -۲}\frac{۲}{y}\le -۲\to\frac{۲}{y}+۲\le ۰\to\frac{۲y+۲}{y}\le ۰$$

$$-۱\le y<۰\to R=[-۱,۰]$$

۲۲۵- ۱ ۲ **۳** ۴

دو تابع $f(x)=x^۲+۲x-۲$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم، محل تلاقی نمودار این دو تابع، جواب معادله می‌باشد.

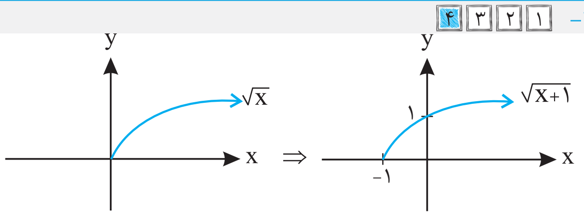


با توجه به نمودارهای رسم شده تعداد جواب‌های معادله سه تا می‌باشد.

۲۲۶- **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases}D_f: -۲x+۷\ge ۰\to x\le\frac{۷}{۲}\to D=\left(-\infty,\frac{۷}{۲}\right]\\ R_f: \sqrt{-۲x+۷}\ge ۰\to R=[۰,+\infty)\end{cases}$$

۲۲۷- ۱ ۲ ۳ **۴**

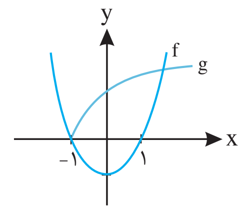


$$f(x)=\sqrt{x+۱}\longrightarrow f(۸)=\sqrt{۸+۱}=۳$$

۲۲۸- **۱** ۲ ۳ ۴

۲۲۹- ۱ ۲ **۳** ۴

توابع $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



این دو نمودار همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند پس معادله دارای دو جواب می‌باشد.

۲۳۰- ۱ ۲ **۳** ۴

b,a ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{۲-x}=|x|$ است.

$$\sqrt{۲-x}=|x| \to ۲-x=x^۲ \to x^۲+x-۲=۰ \to \begin{cases}x=-۲\\ x=۱\end{cases}$$

$\to b=۱, a=-۲ \to$ فاصله‌ی b,a $=۳$

۲۳۱- **۱** ۲ ۳ ۴

$$x^۲-|x|-۲\ge ۰ \longrightarrow (|x|-۲)\underbrace{(|x|+۱)}_{\text{همواره مثبت}}\ge ۰$$

$$\longrightarrow |x|-۲\ge ۰ \longrightarrow |x|\ge ۲ \longrightarrow \begin{cases}x\ge ۲\\ x\le -۲\end{cases}$$

۲۳۲- **۱** ۲ ۳ ۴

$\sqrt{x}: x\ge ۰$ $\boxed{۱}$

$\sqrt{۱-x}: ۱-x>۰ \to x<۱$ $\boxed{۲}$

$\sqrt{\frac{-۱-x}{۳x-۲}}: \frac{-۱-x}{۳x-۲}\ge ۰ \to -۱\le x<\frac{۲}{۳}$ $\boxed{۳}$

حال اگر از $\boxed{۱}$ و $\boxed{۲}$ و $\boxed{۳}$ اشتراک بگیریم:

$$D=\left[۰,\frac{۲}{۳}\right)$$

۲۳۳- ۱ ۲ **۳** ۴

برای آن که دامنه‌ی تابع به صورت $[۱,+\infty)$ باشد باید جدول تعیین‌علامت به صورت

x		۱		۲	
$(x-۲)(x^۲+ax+b)$	-	۰	+	۰	+

باشد بنابراین ۱ و ۲ ریشه‌های $x^۲+ax+b=۰$ هستند:

$$x^۲+ax+b=۰ \xrightarrow{x=۱} ۱+a+b=۰ \to a+b=-۱$$

$$x^۲+ax+b=۰ \xrightarrow{x=۲} ۴+۲a+b=۰ \to ۲a+b=-۴$$

$$\to a=-۳, b=۲$$

پس $b-a=۵$ است.

۲۳۴- ۱ ۲ **۳** ۴

دامنهٔ تابع f به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases}-x\ge ۰ \to x\le ۰\\ x^۲+a\ne ۰ \to x^۲\ne -a \to x\ne \pm\sqrt{a}\end{cases}$$

با توجه به این که دامنه تابع f بازهٔ $(-\infty,۰)$ است پس $a=۰$ می باشد.

۲۳۵- ۱ ۲ **۳** ۴

چون برد تابع $y=\sqrt{ax-۳|x|}$ مجموعه $\{b\}$ می‌باشد لذا این تابع یک تابع ثابت است. از طرفی صفر جزء دامنهٔ تابع است پس $f(۰)=b$ می‌باشد لذا $b=۰$ از طرفی برای هر x مثبت و هر x منفی تابع باید تابع ثابت صفر باشد. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}x>۰: \sqrt{ax-۳x}=۰ \to a=۳\\ x<۰: \sqrt{ax+۳x}=۰ \to a=-۳\end{array}\right\} \to a^۲-b=۹-۰=۹$$

۲۳۶- **۱** ۲ ۳ ۴

برای آن که دو تابع f,g باهم برابر باشند باید $D_f=D_g$ باشد.

$$D_g=[-۲,+\infty) \to D_f=[-۲,+\infty)$$

پس دو حالت زیر را داریم:

x		$-۲=a=b$	
$(x-a)^۲(x-b)$	-	۰	+

x		$-۲=b$		a	
$(x-a)^۲(x-b)$	-	۰	+	۰	+

$$\to \begin{cases}b=-۲\\ a\ge -۲\end{cases} \to a+b\ge -۴$$

۲۳۷- ۱ ۲ **۳** ۴

عبارت $ax^۲+bx+۶$ باید در بازهٔ $[-۲,۳]$ نامنفی باشد.

پس با توجه به جدول تعیین علامت باید ۲- و ۳ ریشه‌های عبارت باشند:

$$ax^۲+bx+۶=(x+۲)(۳-x)=-x^۲+x+۶$$

$$\longrightarrow a=-۱, b=۱ \longrightarrow a+b=۰$$

۲۳۸- ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به ضابطهٔ f داریم: $۲-f(x)>۰ \longrightarrow f(x)<۲$

با توجه به نمودار رسم شده در فاصله‌ی $۲<x<۳$، نمودار تابع f پایین‌تر از خط $y=۲$ قرار می‌گیرد.

۲۳۹- **۱** ۲ ۳ ۴

$$a-|x+b|>۰ \longrightarrow |x+b|<a \longrightarrow -a<x+b<a$$

$$\longrightarrow -a-b<x<a-b$$

از طرفی طبق فرض، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(-۱,۳)$ است پس داریم:

$$\begin{cases}-a-b=-۱\\ a-b=۳\end{cases} \to a=۲, b=-۱$$

۲۴۰- **۱** ۲ ۳ ۴

	-۲		-۱		۰		۱		۲
$x^۲-۱$		+	۰	-		-	۰	+	
$f(x)$		-		-	۰	+		-	
$(x^۲-۱)f(x)$		-	۰	+		-	۰	-	
				جواب					

پس $D=[-۱,۰]\cup\{۱\}$

۲۴۱- ۱ ۲ **۳** ۴

باید $\Delta=۰$ و $a<۰$ باشد پس داریم:

$$\Delta=(۳)^۲-۴(a)(a)=۰ \to ۹-۴a^۲=۰ \to a=\pm\frac{۳}{۲} \xrightarrow{a<۰} a=-\frac{۳}{۲}$$

$$f(x)=\sqrt{-\frac{۳}{۲}x^۲+۳x-\frac{۳}{۲}} \to f(x)=\sqrt{-\frac{۳}{۲}(x-۱)^۲} \to D_f=\{۱\}$$

۲۴۲- ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۳-|x|)}$ را بدست می‌آوریم:

$f(۳-|x|)\ge ۰ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار } f} ۱\le ۳-|x|\le ۴$

$\to \begin{cases} ۳-|x|\ge ۱\to |x|\le +۲ \to -۲\le x\le ۲ \\ ۳-|x|\le ۴ \to |x|\ge -۱ \quad \text{بدیهی است} \end{cases}$

۲۴۳- ۱ ۲ **۳** ۴

این رابطه هنگامی تابع است که مقدار تابع برای $x=۱$ در هر دو ضابطه برابر باشند.

$\begin{cases} f_۱(x)=۴ax+۱ \to f_۱(۱)=۴a+۱ \\ f_۲(x)=۴ax^۲+۲ \to f_۲(۱)=۴a+۲ \end{cases}$

$\xrightarrow{f_۱(۱)=f_۲(۱)} ۴a+۱=۴a+۲ \longrightarrow$ غیر ممکن

۲۴۴- ۱ ۲ ۳ **۴**

گزینهٔ ۱) $x=۰ \to y^۲=۱ \to y=\pm ۱$ این رابطه تابع نیست

گزینهٔ ۲) $x=۲ \to y^۲=۳ \to y=\pm\sqrt{۳}$ این رابطه تابع نیست

گزینهٔ ۳) $x=۲ \to y^۲=۷ \to y=\pm\sqrt{۷}$ این رابطه تابع نیست

۲۴۵- ۱ **۲** ۳ ۴

گزینهٔ ۱)

$x=۰ \to y^۳-۳y^۲=۰ \to y^۲(y-۳)=۰$

$\to \begin{cases} y=۰ \\ y=۳ \end{cases}$ این رابطه تابع نیست

گزینهٔ ۳)

$x=-۱ \to |y-۱|=۱ \to \begin{cases} y=۰ \\ y=۲ \end{cases}$ این رابطه تابع نیست

گزینهٔ ۴)

$x=۱ \to y^۲-۱=۱ \to y^۲=۲ \to \begin{cases} y=-\sqrt{۲} \\ y=\sqrt{۲} \end{cases}$ این رابطه تابع نیست

۲۴۶- ۱ ۲ ۳ **۴**

به رابطهٔ روبه‌رو توجه کنید: $y^۲+۴yx=x-۱$

$x=۱ \longrightarrow y^۲+۴y=۰ \longrightarrow y=۰$ یا $y=-۴$

۲۴۷- ۱ ۲ ۳ **۴**

$x^۲+y^۲-۲x+۳y+\frac{۱۳}{۴}=۰ \longrightarrow$

$(x-۱)^۲+(y+\frac{۳}{۲})^۲=۰ \longrightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \to x=۱ \\ y+\frac{۳}{۲}=۰ \to y=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$

پس $f=\left\{(۱,-\frac{۳}{۲})\right\}$

۲۴۸- ۱ ۲ ۳ **۴**

۲۴۹- **۱** ۲ ۳ ۴

۲۵۰- ۱ ۲ **۳** ۴

۲۵۱- ۱ ۲ **۳** ۴

$x^۲+y^۲=-۸x+۲y-a \to x^۲+۸x+y^۲+۲y=-a$

$\to x^۲+۸x+۱۶+y^۲+۲y+۱=-a+۱۶+۱$

$\to (x+۴)^۲+(y+۱)^۲=-a+۱۷$

هنگامی رابطهٔ بالا تابع است که $-a+۱۷=۰$ باشد پس $a=۱۷$.

۲۵۲- ۱ ۲ **۳** ۴

$(۱+\sqrt{۲})(a+\sqrt{۵})=۲ \Rightarrow a+\sqrt{۵}=\frac{۲}{۱+\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{گویاکردن}}$

$a+\sqrt{۵}=۲(\sqrt{۲}-۱)$

$\to a=۲(\sqrt{۲}-۱)-\sqrt{۵} \simeq ۰/۸-۲/۲ \simeq -۱/۴ \to [a]=-۲$

۲۵۳- ۱ ۲ ۳ **۴**

$[x+۲[x]]=۴ \longrightarrow ۳[x]=۴ \longrightarrow [x]=\frac{۴}{۳} \longrightarrow$ غیرممکن

۲۵۴- ۱ ۲ **۳** ۴

$a+[b]=۴/۲ \longrightarrow [a+[b]]=[۴/۲] \to [a]+[b]=۴$

$b-[a]=۲/۴ \longrightarrow [b-[a]]=[۲/۴] \to [b]-[a]=۲$

$\longrightarrow \begin{cases} [a]=۱ \\ [b]=۳ \end{cases} \longrightarrow a=۱/۲, b=۳/۴ \longrightarrow a+b=۴/۶$

۲۵۵- ۱ ۲ ۳ **۴**

$|۲x-۳|<۱۱ \to -۱۱<۲x-۳<۱۱ \to -۸<۲x<۱۴ \to -۴<x<۷$

$\to -\frac{۴}{۳}<\frac{x}{۳}<\frac{۷}{۳} \to -۱/۳<\frac{x}{۳}<۲/۳ \to \left[\frac{x}{۳}\right]=-۲,-۱,۰,۱,۲$

۲۵۶- ۱ ۲ **۳** ۴

$|x+۱|<۲ \to -۳<x<۱ \to -۸/۵<۳x+\frac{۱}{۲}<۳/۵$

$\to \left[۳x+\frac{۱}{۲}\right]=-۹,-۸,-۷,\ldots,۳$

۲۵۷- ۱ **۲** ۳ ۴

$[x^۲+۴x]=-۴ \longrightarrow -۴\le x^۲+۴x<-۳$

$\begin{cases} x^۲+۴x\ge -۴ \longrightarrow x^۲+۴x+۴\ge ۰ \longrightarrow (x+۲)^۲\ge ۰ \\ \longrightarrow \text{به ازای هر } x \text{ همواره برقرار است} \quad (۱) \\ x^۲+۴x<-۳ \longrightarrow x^۲+۴x+۳<۰ \\ \xrightarrow{\text{جدول تعیین‌علامت}} -۳<x<-۱ \quad (۲) \end{cases}$

اگر از (۱) و (۲) اشتراک بگیریم مجموعه جواب به صورت $(-۳,-۱)$ می‌باشد پس $a=-۳$ و $b=-۱$ است و $b-a=۲$ می‌باشد.

۲۵۸- ۱ ۲ **۳** ۴

۲۵۹- **۱** ۲ ۳ ۴

$y=۲[x]-۱=\begin{cases} ۲(۰)-۱ & ۰\le x<۱ \\ ۲(۱)-۱ & ۱\le x<۲ \end{cases}=\begin{cases} -۱ & ۰\le x<۱ \\ ۱ & ۱\le x<۲ \end{cases}$

۲۶۰- **۱** ۲ ۳ ۴

$۱\le x<۲ \longrightarrow [x]=۱ \longrightarrow y=x \xrightarrow{۱\le x<۲}$

$$۱\le y<۲ \longrightarrow a=۱, c=۲$$

$$۲\le x<۳ \longrightarrow [x]=۲ \longrightarrow y=\frac{x}{۲} \xrightarrow{۲\le x<۳}$$

$$۱\le y<\frac{۳}{۲} \longrightarrow a=۱, b=\frac{۳}{۲}$$

پس $a+b+c=۴/۵$

۲۶۱- **۱** ۲ ۳ ۴

$$y=\begin{cases} ۰ & x=-۱ \\ x[-۱-x] & -۱<x<۰ \\ x[-x] & ۰\le x<۱ \\ ۰ & x=۱ \end{cases} \to y=\begin{cases} ۰ & x=-۱ \\ -x & -۱<x<۰ \\ -x & ۰\le x<۱ \\ ۰ & x=۱ \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی بالا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

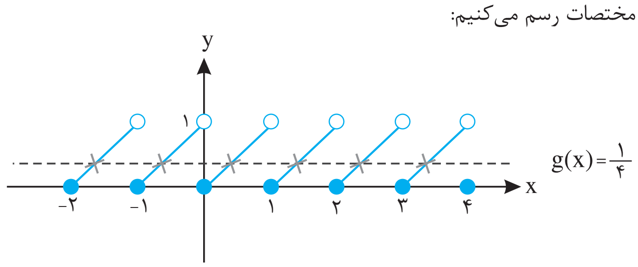
۲۶۲- ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم که $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ پس داریم:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x} & x\in\mathbb{Z} \\ \frac{۱}{x-۱} & x\notin\mathbb{Z} \end{cases} \to D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$

۲۶۳- **۱** ۲ ۳ ۴

نمودارهـای دو تـابع $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{۱}{۴}$ را در یـک دسـتگاه مختصات رسم می‌کنیم:

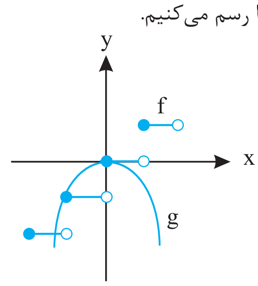


با توجه به نمودارهای رسم شده در بازه‌ی $[-۲,۴]$ در ۶ نقطه ایـن دو نمـودار همدیگر را قطع می‌کنند.

۲۶۴- ۱ ۲ **۳** ۴

$$x^{۲}+[x]=۰ \longrightarrow [x]=-x^{۲}$$

نمودار دو تابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=-x^{۲}$ را رسم می‌کنیم.

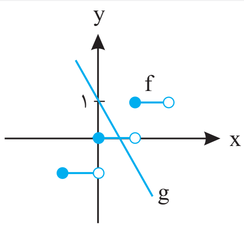


با توجه به نمودارهای رسم شده معادله سه جواب دارد.

۲۶۵- ۱ **۲** ۳ ۴

$$۲x+[x]=۱ \longrightarrow [x]=۱-۲x$$

حـال نمـودار دو تـابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=۱-۲x$ را رسم می‌کنیم.
این دو نمودار همـدیگر را در فاصلـه‌ی $(۰,۱)$ قطع کرده‌اند پس:



$$۰<x<۱ \longrightarrow [x]=۰ \longrightarrow ۱-۲x=۰ \longrightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

۲۶۶- ۱ ۲ **۳** ۴

$$-۱\le x\le ۱ \longrightarrow -۳\le ۳x\le ۳$$

پس داریم:

$$-۳\le ۳x<-۲ \longrightarrow \begin{cases} y=[۳x]=-۳ \\ -۱\le x<-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$-۲\le ۳x<-۱ \longrightarrow \begin{cases} y=[۳x]=-۲ \\ -\frac{۲}{۳}\le x<-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$-۱\le ۳x<۰ \longrightarrow \begin{cases} y=[۳x]=-۱ \\ -\frac{۱}{۳}\le x<۰ \end{cases}$$

$$۰\le ۳x<۱ \longrightarrow \begin{cases} y=[۳x]=۰ \\ ۰\le x<\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$۱\le ۳x<۲ \longrightarrow \begin{cases} y=[۳x]=۱ \\ \frac{۱}{۳}\le x<\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$۲\le ۳x<۳ \longrightarrow \begin{cases} y=[۳x]=۲ \\ \frac{۲}{۳}\le x<۱ \end{cases}$$

$$۳x=۳ \longrightarrow \begin{cases} y=[۳x]=۳ \\ x=۱ \end{cases}$$

۲۶۷- ۱ ۲ **۳** ۴

۲۶۸- ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\begin{cases} ۲x-[۲x]=[x]+[-x] \\ ۰\le ۲x-[۲x]<۱ \\ [x]+[-x]=۰ \text{ یا } -۱ \end{cases} \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=۲ \text{ یا } ۳$$

۲۶۹- ۱ ۲ **۳** ۴

$$([x]-\sqrt{۲})(۳-[x])\ge ۰ \longrightarrow \sqrt{۲}\le [x]\le ۳$$

$$\xrightarrow{[x] \text{ عدد صحیح است}} [x]=۲ \text{ یا } ۳ \to ۲\le x<۴ \to D_f=[۲,۴)$$