ماتریس

آرایشی از اعداد در یک جدول مستطیلی که شامل سطرها و ستون هایی باشد یک ماتریس نامیده می شود.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times n}$$

سوال: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه های $A+A^2+A^3+A^4$ را به دست آورید.

پاسخ: چون A مثلثی اکید از مرتبه‌ی ۳ است پس $A^3=\bar{0}$ و در نتیجه $A^4=\bar{0}$ بنابراین کافیست A^2 را محاسبه نمائیم.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+A^2+A^3+A^4=A+A^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{مجموع درایه ها}=2+1+1=4$$

نکته: می دانیم اگر در ماتریس مثلثی درایه های قطر اصلی نیز صفر باشند، ماتریس مثلثی اکید است و اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس مثلثی اکید باشد آن گاه A پوچ توان از مرتبه‌ی n است (یعنی A^n و توان های بالاتر از n حتماً $\bar{0}$ هستند).

سوال: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & m+1 & x^2 \\ 1 & 0 & n+1 \\ -x^2 & m+1 & n^2-1 \end{bmatrix}$ پادمتقارن باشد آن گاه

ماتریس $B = \begin{bmatrix} 5 & n-1 & m \\ 0 & 7 & b \\ -3 & b & x^2 \end{bmatrix}$ چه نوعی است؟

پاسخ: در ماتریس پادمتقارن درایه های روی قطر اصلی صفر هستند و درایه های نظیر بالا و پایین قطر اصلی قرینه اند.

$$n^2 - 1 = 0 \implies n^2 = 1 \implies n = \pm 1$$

$$\implies n = 1 \ , m = \qquad m + 2 = -1 \implies m = -3$$

$$n + 1 = -(m+1) \implies n + 1 = -m - 1 \implies n = \qquad -3$$

$$3 - 1 - 1 = 1$$

مقدار n باید در دو شرط صدق کند پس $n = 1$ قابل قبول است. در نتیجه داریم:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & b \\ -3 & b & x^2 \end{bmatrix} = B^t \implies$$ ماتریس B متقارن است

نکته:

الف) اگر ترانهاده‌ی یک ماتریس مربعی با خودش برابر باشد به آن ماتریس متقارن گوئیم.

ب) اگر ترانهاده‌ی یک ماتریس مربعی با قرینه‌ی خودش برابر باشد به آن ماتریس پادمتقارن گوئیم.

نکته: در ماتریس پادمتقارن درایه های روی قطر اصلی صفر هستند.

سوال: ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&-1&5\\-2&6&1\end{bmatrix}$ را به صورت مجموع دو ماتریس، یکی متقارن و دیگری پادمتقارن بنویسید.

$$A+A^t=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&-1&5\\-2&6&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4&-2\\1&-1&6\\3&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&1\\5&-2&11\\1&11&2\end{bmatrix}$$

$$A-A^t=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&-1&5\\-2&6&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&4&-2\\1&-1&6\\3&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&5\\3&0&-1\\-5&1&0\end{bmatrix}$$

$$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)=\begin{bmatrix}2&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&-1&\frac{11}{2}\\1&\frac{11}{2}&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)$$

نکته: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، ماتریس A را می توان به صورت مجموع دو ماتریس، یکی متقارن و دیگری پادمتقارن نوشت که $A+A^t$ متقارن و $A-A^t$ پادمتقارن است.

$$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)$$

تست) از تساوی $\begin{bmatrix}\alpha & -\alpha \\ \beta & 0\end{bmatrix} + 3I_2 = \begin{bmatrix}\alpha+\beta+1 & -1 \\ \beta-\gamma & \gamma+3\theta\end{bmatrix}$ ، مجموع همه‌ی مجهولات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

$$I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha & -\alpha \\ \beta & 0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+\beta+1 & -1 \\ \beta-\gamma & \gamma+3\theta\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\alpha+3 & -\alpha \\ \beta & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+\beta+1 & -1 \\ \beta-\gamma & \gamma+3\theta\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+3 = \alpha+\beta+1 \Rightarrow \beta = 2 \\ -\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \beta = \beta-\gamma \Rightarrow \gamma = 0 \\ \gamma+3\theta = 3 \Rightarrow 3\theta = 3 \Rightarrow \theta = 1\end{cases}$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta = 1+2+0+1 = 4$$

سوال: نقطه‌ی A ابتدا نسبت به محور ox قرینه شده تا نقطه‌ی A' به دست آید سپس A' نسبت به خط $y = -x$ قرینه شده تا نقطه‌ی A'' به دست آید. چه ماتریسی نقطه‌ی A را به A'' تبدیل می کند؟

پاسخ: ماتریس تقارن نسبت به محور ox ، $A_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$ و نسبت به خط $y = -x$، $A_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$ می باشد، ماتریسی که هر دو تقارن را با هم انجام می دهد A_2A_1 است پس داریم:

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

نکته: اگر x_1 با تبدیل A_1 به x_2 ، با تبدیل A_2 به x_3 , ... , x_{n-1} با تبدیل A_{n-1} به x_n تبدیل شود، ماتریس $A_{n-1}A_{n-2} \dots A_2A_1$ ، x را به x_n تبدیل کند.

تست) با توجه به ماتریس دوران در صفحه، حاصل $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^4$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

پاسخ:

$$R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^4 = R_{\frac{\pi}{4}}^4 = R_{4\times(\frac{\pi}{4})} = R_\pi = \begin{bmatrix} cos\pi & -sin\pi \\ sin\pi & cos\pi \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس دوران به اندازه‌ی θ در جهت مثلثاتی، حول مبدأ مختصات به صورت زیر است:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

نکته: n بار دوران به اندازه‌ی α ، همان دوران به اندازه‌ی$n\alpha$ است ای بیان به زبان ریاضی به صورت $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$ قابل نمایش است. که شکل ماتریسی آن به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} cosn\alpha & -sinn\alpha \\ sinn\alpha & cosn\alpha \end{bmatrix}$$

تست) حاصل $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{720}$ کدام است؟

۱) $-2^{360}I$ ۲) $2^{720}I$ ۳) $-2^{720}I$ ۴) $2^{360}I$

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2R_{\frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{720} = (2R_{\frac{\pi}{3}})^{720} = 2^{720}R_{720\times\frac{\pi}{3}} = 2^{720}\begin{bmatrix} cos240\pi & -sin240\pi \\ sin240\pi & cos240\pi \end{bmatrix} =$$
$$2^{720}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2^{720}I$$

دترمینان

دترمینان یک تابع است که فقط روی ماتریس های مربعی اثر می کند و حاصل اثر آن روی ماتریس های مربعی یک عدد حقیقی است، دترمینان ماتریس مربعی A را با نماد $|A|$ نمایش می دهیم.

تست) اگر $A = \begin{bmatrix} |A|-2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ، مقدار دترمینان A کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: $|A| = (|A|-2)(-1)-4 \Rightarrow |A| = -|A|+2-4 \Rightarrow 2|A| = -2 \Rightarrow |A| = -1$

نکته: در ماتریس ۲ × ۲ ، دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نمایش داده می شود و به صورت $ad - bc$ تعریف می شود.

تست) اگر $a , b , 2$ سه عدد متمایز باشند حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4(a+b) \\ 1 & a+1 & a^2(b+2) \\ 1 & b+1 & b^2(a+2) \end{vmatrix}$ کدام است؟

(سراسری خارج ۸۹)

۱) ۰ ۲) $4ab$ ۳) $(a-2)(b-2)$ ۴) $2(a-2)(b-2)$

پاسخ: ابتدا قرینه‌ی ستون اول را به ستون دوم اضافه می کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4(a+b) \\ 1 & a & a^2(b+2) \\ 1 & b & b^2(a+2) \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{و در سطر سوم از } b \text{ فاکتور می گیریم}]{\text{در سطر اول از 2، در سطر دوم از } a} 2ab \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2(a+b) \\ \frac{1}{a} & 1 & a(b+2) \\ \frac{1}{b} & 1 & b(a+2) \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{اول ضرب می کنیم}]{2ab \text{ را در ستون}}$$

$$\begin{vmatrix} ab & 1 & 2a+2b \\ 2b & 1 & ab+2a \\ 2a & 1 & ba+2b \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سوم در ستون سوم می نویسیم}]{\text{ستون اول+ستون}} \begin{vmatrix} ab & 1 & 2a+2b+ab \\ 2b & 1 & 2a+2b+ab \\ 2a & 1 & 2a+2b+ab \end{vmatrix} = (2a+2b+ab) \begin{vmatrix} ab & 1 & 1 \\ 2b & 1 & 1 \\ 2a & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

نکته: دترمینان ماتریسی که دو سطر یا ستون مساوی داشته باشد صفر است.

تست اگر $AA^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 & x \\ y & 1 & 1 \\ 2 & z & 2 \end{bmatrix}$ ، و A ماتریس ۳ × ۳ باشد آن گاه $|A|$ کدام می تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۸ ۴) ۱

پاسخ: ماتریس AA^t همواره یک ماتریس متقارن است پس درایه های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر برابرند در نتیجه داریم:

$$x = 2\ , y = 1\ , z = 1 \implies AA^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|AA^t| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |A||A^t| = |A|^2 \implies |A|^2 = 4(2-1) - 1(2-2) + 2(1-2)$$
$$\implies |A|^2 = 4 - 2 = 2 \implies |A| = \pm\sqrt{2}$$

فقط $\sqrt{2}$ در گزینه ها است.

نکته: اگر A یک ماتریس دلخواه باشد آن گاه AA^t متقارن است زیرا:

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

تست حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 0 & a^2 & -4 \\ -a^2 & 0 & y^2 - x^2 \\ 4 & x^2 - y^2 & 0 \end{vmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ: دترمینان فوق دترمینان یک ماتریس پادمتقارن از مرتبه‌ی ۳ است پس حاصل آن صفر است.

نکته: دترمینان ماتریس پادمتقارن از مرتبه‌ی ۳ × ۳ صفر است.

نکته: در حالت کلی می توان گفت دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبه‌ی فرد برابر صفر است زیرا:

$$\text{پادمتقارن}\ A = A^t = -A \implies |A^t| = |-A| = (-1)^n|A| \xRightarrow{n=2k+1} (-1)^{2k+1}|A|$$

$$\implies |A^t| = -|A| \xRightarrow{|A^t|=|A|} |A| = -|A| \implies |A| = 0$$

تست) به هر درایه‌ی سطر سوم دترمینان $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان ۸ واحد بیشتر گردد ؟ (سراسری ۹۱)

۱) ۲-　　　　۲) ۱۸　　　　۳) ۳۰　　　　۴) ۴۰

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9+k & 1+k & 2+k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$\implies \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ k & k & k \end{vmatrix} = 8 \xrightarrow[\text{به دو ستون دیگر اضافه می کنیم}]{\text{قرینه ی ستون اول را}} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}} k(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 8 \implies -k(6-10) = 8$$

$$\implies -4k = 8 \implies k = -2$$

تست) به ازای چند مقدار m ، دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & m & 3\\ m & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ و دترمینان معکوس آن برابر است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: باید داشته باشیم: $|A^{-1}|=|A|$

$$|A^{-1}|=|A| \;\Rightarrow\; \frac{1}{|A|}=|A| \;\Rightarrow\; |A|^{\,2}=1$$

$$|A|=\;-m(m)+3m=-m(m-3) \Longrightarrow\; |A|^{\,2}=(-m(m-3)^2 \Longrightarrow\; |A|^{\,2}$$
$$=m^2(m-3)^2=1 \;\Rightarrow m(m-3)=\pm1$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m(m-3)=1\;\rightarrow\; m^2-3m-1=0 \;\Rightarrow\; \Delta=9-4(1)>0 & \text{دو ریشه دارد}\\ m(m-3)=-1\;\rightarrow\; m^2-3m+1=0 \;\Rightarrow\; \Delta=9-4(1)(1)=5>0 & \text{دو ریشه دارد}\end{cases}$$

بنابراین در کل ۴ ریشه دارد.

نکته: همواره داریم: $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

تست) ماتریس مربعی $A_{2\times2}$ مفروض است اگر $\left||2A|A^t\right|=128$ باشد آن گاه $|A|$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: عدد از دترمینان خارج می شود و به توان مرتبه‌ی ماتریس مربعی می رسد چون $|2A|$ عدد است داریم:

$$\left||2A|A^t\right|=128 \;\Rightarrow\; |2A|^2|A^t|=128 \;\Rightarrow (4|A|)^2|A^t|=128$$

از طرفی داریم: $|A|=|A^t|$ پس می توان نوشت:

$$(4|A|)^2|A^t| = 128 \Longrightarrow \ 16|A|^2|A| = 128 \ \Longrightarrow \ |A|^3 = \frac{128}{16} = 8 \ \Longrightarrow |A| = 2$$

نکته:

۱) اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد و k یک عدد حقیقی خواهیم داشت: $|kA| = k^n|A|$

۲) ترانهاده کردن ماتریس حاصل دترمینان را عوض نمی کند یعنی: $|A^t| = \ |A|$

سوال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $|2A^2B^3|$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$|2A^2B^3| = 2^3|A^2B^3| = 2^3|A^2||B^3| = 8|A^2||B^3|$$

$$|A| = 2(3)(-1) = -6 \qquad |B| = 1(-10) = -10$$

$$|2A^2B^3| = 8|A^2||B^3| = 8|-6|^2|-10|^3 = 8 \times 36 \times (-1000) = -288000$$

نکته:

۱) اگر $A_{n\times n2}$ ، $B_{n\times n}$ باشند آن گاه داریم: $|AB| = |A||B|$

۲) اگر k یک عدد طبیعی باشد آن گاه داریم: $|A^k| = |A|^k$

۳) دترمینان ماتریس های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر ضرب درایه های روی قطر اصلی است.

سوال: مجموع دو دترمینان $\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & t & -z \end{vmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ: با جابه‌جایی ستون های ماتریس اول، دو دترمینانی را به صورتی به دست می آوریم که بتوان از قاعده‌ی تفکیک، مجموع آنها را به صورت یک دترمینان بنویسیم:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & t & -z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & t & -z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ -z & 0 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & t \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{قاعده‌ی تفکیک}} \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = xy$$

نکته: (قاعده‌ی تفکیک) هر دو دترمینان را می توان به صورت مجموع یا تفاضل دو دترمینان دیگر نوشت به طوری *n-1* سطر یا *n-1* ستون آنها برابر باشند و مجموع یا تفاضل سطر یا ستون باقی مانده برابر با سطر یا ستون دترمینان اول باشد.

سوال: معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & x & 1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

پاسخ:

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & x & 1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 1 \\ x & x \\ 1 & x \end{matrix} \Rightarrow |A| = (x^3 + 1 + x^2) - (x^2 + x^2 + x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + x^3 + 1 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

جمع ضرایب صفر است پس یکی از ریشه ها یک است.

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow (x-1)(2x^2 - x - x) = 0$$

	۲	-۳	۰	۱
	۰	۲	-۱	-۱
۱	۲	-۱	-۱	۰

$$\Rightarrow (x-1)(x-1)(2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ریشه مضاعف} \\ x=-\dfrac{1}{2} & \text{ساده} \end{cases}$$

نکته: (روش ساروس برای محاسبه‌ی دترمینان) فقط برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس های ۳ × ۳ می توان از روش ساروس استفاده کرد در این روش یکبار درایه های ستون اول و دوم ماتریس را جلوی آن نوشته و سپس مجموع حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی را منهای مجموع حاصل ضرب درایه های روی قطرهای فرعی می کنیم.

سوال: اگر تبدیل یافته‌ی یک لوزی با زاویه‌ی 120° تحت ماتریس $M=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ یک متوازی الاضلاع به مساحت $24\sqrt{3}$ باشد اندازه‌ی یک ضلع لوزی را بیابید.

پاسخ: اگر a ضلع لوزی باشد آن گاه مساحت آن برابر $a^2 sin120^\circ$ است در ضمن بین مساحت این دوشکل رابطه‌ی روبرو برقرار است:

$$S' = \left||M|S\right|$$

$$24\sqrt{3} = \left|\begin{vmatrix}4 & 0\\ 7 & 1\end{vmatrix} a^2 sin120^\circ\right| \Rightarrow 24\sqrt{3} = \left|4a^2 sin120^\circ\right| \Rightarrow 24\sqrt{3} = 4a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

نکته: اگر S مساحت یک شکل S' مساحت تبدیل یافته‌ی آن تحت ماتریس M باشد آن گاه داریم:

$$S' = \left||M|S\right|$$

موفق و پیروز باشید

عباس اسدی امیرآبادی

Abas.asadi@yahoo.com