سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

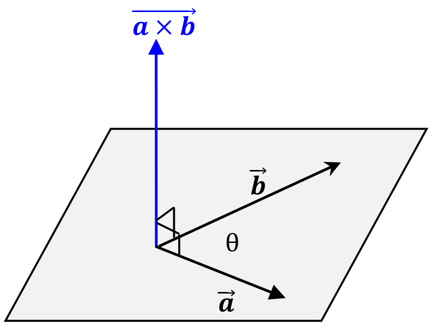
https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

ضرب خارجی دو بردار

تعریف : بـــردارهای ناصفر a و b را که زاویه بین آنها θ است ، در نظر می گیریم ، ضرب خارجی این دو را بردار به صورت $a\times b$ نمایش می دهیم . (در بعضی از منابع به صورت $a\wedge b$ نیز نشان داده می شود .) ضرب خارجی دو بردار یعنی $a\times b$ یک بردار با مشخصات زیر است :

۱- راستای آن بر صفحه ای که بردارهای a و b بر آن واقعند عمود است .

نتیجه : با توجه به اینکه $a\times b$ بر صفحه شامل a و b عمود است بر این دو بردار نیز عمود است ، در نتیجه حاصلضرب داخلی بردار $(a\times b)$ با بردارهای a و b برابر صفر است ، به بیان ریاضی داریم :



$$a\times b\perp a \Leftrightarrow a.(a\times b)=\vec{۰} \quad , \quad a\times b\perp b \Leftrightarrow b.(a\times b)=\vec{۰}$$

۲- جهت آن از قانون انگشتان دست راست تبعیت می کند .

۳- طول آن از رابطه زیر به دست می آید :

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

۴ – اگر $\mathrm{a}=(\mathrm{a}_{۱},\mathrm{a}_{۲},\mathrm{a}_{۳})$ ، $\mathrm{b}=(\mathrm{b}_{۱},\mathrm{b}_{۲},\mathrm{b}_{۳})$ ، بردار $a\times b$ از دستور زیر محاسبه می شود :

$$a\times b=\big((a_{۲}b_{۳}-a_{۳}b_{۲})\,,-(a_{۱}b_{۳}-a_{۳}b_{۱})\,,(a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱})\big)$$

تذکر : به خاطر سپردن فرمول فوق قدری دشوار است ، بنابراین از راه حلی که در ادامه مطلب ارائه می دهیم برای تعیین $a\times b$ استفاده کنید .

روش عملی محاسبه تعیین حاصلضرب خارجی دو بردار :

بردار های $\mathrm{a}=(\mathrm{a}_{۱},\mathrm{a}_{۲},\mathrm{a}_{۳})$ ، $\mathrm{b}=(\mathrm{b}_{۱},\mathrm{b}_{۲},\mathrm{b}_{۳})$ را در نظر می گیریم ، دو بردار را به صورت $\begin{pmatrix}\mathrm{a}_{۱} & \mathrm{a}_{۲} & \mathrm{a}_{۳}\\ \mathrm{b}_{۱} & \mathrm{b}_{۲} & \mathrm{b}_{۳}\end{pmatrix}$ می نویسیم ، ستون اول را حذف کرده ، دترمینان عناصر باقی مانده یعنی حاصل $\begin{vmatrix}\mathrm{a}_{۲} & \mathrm{a}_{۳}\\ \mathrm{b}_{۲} & \mathrm{b}_{۳}\end{vmatrix}$را به دست آورید ، حاصل آن اولین مولفه از $a\times b$ خواهد بود ، سپس ستون دوم را حذف می کنیم ، دترمینان عناصر باقی مانده یعنی حاصل $\begin{vmatrix}\mathrm{a}_{۱} & \mathrm{a}_{۳}\\ \mathrm{b}_{۱} & \mathrm{b}_{۳}\end{vmatrix}$را به دست آورید ، قرینه عدد به دست آمده دومین مولفه از $a\times b$ خواهد بود ، حال ستون سوم را حذف می کنیم ، دترمینان عناصر باقی مانده یعنی حاصل $\begin{vmatrix}\mathrm{a}_{۱} & \mathrm{a}_{۲}\\ \mathrm{b}_{۱} & \mathrm{b}_{۲}\end{vmatrix}$را محاسبه می کنیم ، حاصل آن اولین مولفه از $a\times b$ خواهد بود . به مثال زیر توجه کنید .

مثال : اگر $a=(۱,-۱,۲)$ و $b=(-۳,۰,۲)$ حاصل $a\times b$ و $b\times a$ هم چنین $|a\times b|$ و $|b\times a|$ را به دست آورید .

حل : ابتدا دو بردار را به صورت ماتریس روبرو می نویسیم ، توجه داشته باشید که اولین بردار از سمت چپ باید در سطر اول نوشته شود :

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ -۳ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

مرحله اول :

حذف ستون اول

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ \square & \square & \square \\ -۳ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{محاسبه دترمینان عناصر باقی مانده}} \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = -۱\times۲-۰\times۲=-۲$$

مرحله دوم :

حذف ستون دوم

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ \square & \square & \square \\ -۳ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{محاسبه دترمینان عناصر باقی مانده}} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۱\times۲-(-۳)\times۲=۸ \xrightarrow{\text{قرینه عدد حاصل}} -۸$$

مرحله سوم :

حذف ستون سوم

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ \square & \square & \square \\ -۳ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{محاسبه دترمینان عناصر باقی مانده}} \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ -۳ & ۰ \end{vmatrix} = ۱\times۰-(-۳)\times(-۱)=-۳$$

بنابراین : $a\times b=(-۲,-۸,-۳)$ ، البته این مراحل را به صورت ذهنی انجام خواهیم داد . حال طول $a\times b$ را محاسبه می کنیم ، داریم :

$$|a\times b|=\sqrt{(-۲)^۲+(-۸)^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۴+۶۴+۹}=\sqrt{۷۷}$$

برای $b\times a$ ، با استفاده از تکرار روند فوق در ماتریس فرضی زیر خواهیم داشت :

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{b\times a}=\left(\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۳ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}\right)=(۲,۸,۳)$$

و در نتیجه $|b\times a|=\sqrt{(۲)^۲+(۸)^۲+(۳)^۲}=\sqrt{۴+۶۴+۹}=\sqrt{۷۷}$

از مثال فوق نتیجه می شود که $a\times b=-b\times a$ و در نتیجه $|a\times b|=|b\times a|$ ، این رابطه همواره برای ضرب خارجی بردارها برقرار است .

یادآوری : دترمینان ماتریس مربعی مرتبه ۲ به صورت مقابل محاسبه می شود : $\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix}=\mathrm{ad-bc}$

تست . اگر $u = ۳i - ۲j + k$ و $v = (۰\,,۱\,,-۱)$ ، حاصل $|u \times v| + u\,.\,v$ کدام است ؟

۱) $\sqrt{۱۴} - ۳$　　　۲) $\sqrt{۱۹} + ۳$　　　۳) $\sqrt{۱۹} - ۳$　　　۴) $\sqrt{۱۴} + ۳$

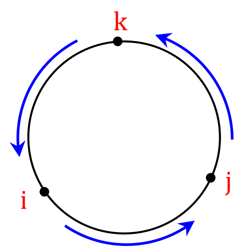
حل : گزینه (۳) صحیح است . برای محاسبه $|u \times v|$ ابتدا باید بردار $u \times v$ را محاسبه کنیم ، مطابق معمول ماتریس فرضی $\begin{pmatrix} ۳ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$ را خواهیم داشت ، حال :

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} ۳ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} \right) = (۱\,,۳\,,۳) \Rightarrow |u \times v| = \sqrt{۱^۲ + ۳^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۹}$$

از طرفی : $u.v = (۳\,,-۲\,,۱).(۰\,,۱\,,-۱) = ۳ \times ۰ + (-۲) \times ۱ + ۱ \times (-۱) = -۳$ ، و در نتیجه

$$|u \times v| + u.v = \sqrt{۱۹} - ۳$$

نکته : برای بردارهای یکه i و j و k داریم :



$$i \times j = k$$

$$j \times k = i$$

$$k \times i = j$$

در شکل فوق ، حاصلضرب خارجی هر دو بردار مجاور با توجه به جهت چرخش بردار ، برابر بردار سوم است .

اثبات : به عنوان مثال فقط رابطه سوم یعنی $k \times i = j$ را اثبات می کنیم ، ماتریس فرضی $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ را در نظر می گیریم ، حال داریم :

$$k \times i = \left(\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} \right) = (۰\,,۱\,,۰) = j$$

تست . کدامیک از بردارهای زیر بر دو بردار $u = ۳i - ۲j + k$ و $v = -۳k + ۲j - i$ عمود است ؟

۱) $(-۱\,,۲\,,-۱)$　　　۲) $(۱\,,-۲\,,۱)$　　　۳) $(-۱\,,-۲\,,-۱)$　　　۴) $(-۱\,,-۲\,,۱)$

حل : گزینه (۳) صحیح است . همانگونه که گفتیم ، بردار $u \times v$ بر هر دو بردار u و v عمود است ، بنابراین کافی است $u \times v$ را محاسبه کنیم :

$$u \times v \;:\; \begin{pmatrix} ۳ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{pmatrix} \rightarrow u \times v = \left(\begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & -۳ \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & -۳ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} \right) = (۴\,,۸\,,۴)$$

همانگونه که ملاحظه می کنید پاسخ به دست آمده در میان گزینه ها نیست ، اما یادآوری می کنیم که هرگاه بردار a بر بردار b عمود باشد ، آنگاه هر مضربی از a نیز بر b عمود است ، حال بردار $(-۱\,,-۲\,,-۱)$ که مضربی از $u \times v = (۴\,,۸\,,۴)$ است ، بر هر دو بردار u و v عمود است .

تست . کدامیک از اعداد زیر می تواند طول بردار عمود بر دو بردار $u = ۳i - ۲j + k$ و $v = -۳k + ۲j - i$ باشد ؟

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۴}$ ۳) $\sqrt{۱۵}$ ۴) همه گزینه ها صحیح است .

حل : گزینه (۴) صحیح است . همانگونه که قبلاً نیز اشاره کردیم ، بردار $u \times v$ بر هر دو بردار u و v عمود است و هر بردار موازی با u × v (هر مضربی از u × v) نیز بر دو بردار u و v عمود است ، پس بی شمار بردار وجود دارد که بر u و v عمـود باشند که هر طول دلخواهی می توانند داشته باشند .

تست . اگر $a = ۲i - j + ۳k$ و $b = i - ۲j + k$ ، قرینه بردار a × b نسبت به محور Oz کدام است ؟

۱) $(-۵, -۱, -۳)$ ۲) $(-۵, -۱, ۳)$ ۳) $(۵, ۱, -۳)$ ۴) $(۵, ۱, -۳)$

حل : گزینه (۱) صحیح است . ابتدا بردار $a \times b$ را محاسبه می کنیم ،

$$a \times b \ : \ \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{pmatrix} \rightarrow a \times b = \left(\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} \right) = (۵, ۱, -۳)$$

یادآوری می کنیم که قرینه بردار $a = (a_۱, a_۲, a_۳)$ نسبت به محور Oz به صورت $a'' = (-a_۱, -a_۲, a_۳)$ است . بنابراین قرینه $(۵, ۱, -۳)$ نسبت به محور Oz عبارت است از : $(-۵, -۱, -۳)$

تست . اگر $a = ۲i - j + ۳k$ و $b = i - ۲j + k$ ، تصویر بردار a × b بر صفحه xOz کدام است ؟

۱) $(۵, ۱, ۰)$ ۲) $(۰, ۱, -۳)$ ۳) $(۵, ۰, -۳)$ ۴) $(۰, ۰, -۳)$

حل : گزینه (۳) صحیح است . یادآوری می کنیم که تصویر بردار $a = (a_۱, a_۲, a_۳)$ بر صفحه xOz عبارت است از $a' = (a_۱, ۰, a_۳)$ ، بنابراین تصویر $a \times b = (۵, ۱, -۳)$ که بردار آن در تست قبلی محاسبه شده است بر صفحه xOz ، برابر است با $(۵, ۰, -۳)$

تست . اگر $a = ۲i - j + ۳k$ و $b = i - ۲j + k$ ، طول تصویر بردار a × b بر محور Oz کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{۱۰}$

حل : گزینه (۲) صحیح است ، یادآوری می کنیم که تصویر بردار $a = (a_۱, a_۲, a_۳)$ بر محور Oz عبارت است از $a' = (۰, ۰, a_۳)$ ، بنابراین تصویر $a \times b = (۵, ۱, -۳)$ بر محور Oz ، برابر است با $(۰, ۰, -۳)$ ، واضح است که طول $(۰, ۰, -۳)$ برابر است با ۳

ویژگی های ضرب خارجی :

۱- برای هر دو بردار a و b ، $a \times b = -(b \times a)$ به عبارتی ضرب خارجی بردارها دارای خاصیت جابجایی نیست .

اثبات ویــژگی فوق به راحتی با استفاده از محاسبه $a \times b$ و $b \times a$ برای بــردارهای $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ انجام می گیرد .

۲ – برای هر بردار a ، $a \times a = \vec{0}$ ،

اثبات : بنا به ویژگی ۱ و با فرض $a = b$ ، داریم :

$$a \times a = -(a \times a) \Rightarrow a \times a = -(a \times a) = \vec{0} \Rightarrow 2(a \times a) = \vec{0} \Rightarrow a \times a = \vec{0}$$

۳- برای هر دو بردار a و b و هر عدد حقیقی r ، $ra \times b = r(a \times b) = a \times rb$

اثبات ویژگی فوق نیز با استفاده از محاسبه $ra \times b$ ، $r(a \times b)$ و $a \times rb$ برای بـردارهای $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ انجام می گیرد .

۴- برای هر سه بردار a ، b و c ، $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ و $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$ یعنی ضرب خارجی بردار ها بر جمع بردارها از چپ و راست توزیع پذیر است .

تذکر : ضرب خارجی بردارها دارای خاصیت شرکت پذیری نیست یعنی $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$ ، بنابراین $a \times b \times c$ بدون درج پرانتز مفهومی ندارد.

۵ - برای دو بردار ناصفر a و b ، حاصلضرب خارجی دو بردار صفر است اگر و تنها اگر دو بردار باهم موازی باشند . به بیان ریاضی داریم :

$$a \times b = \vec{0} \Leftrightarrow a \parallel b$$

اثبات : $a \times b = \vec{0} \Leftrightarrow |a \times b| = 0 \Leftrightarrow |a||b| \sin\theta = 0 \xLeftrightarrow{|a| \neq 0 \;,\; |b| \neq 0} \sin\theta = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$

تذکر : اگر یکی از دو بردار a و b صفر باشد ، آنگاه ضرب خارجی آنها صفر است ولی عکس مطلب همیشه درست نیست

مثال : اگر a ، bو c بردارهایی دلخواه و i ، j و k بردارهای یکه باشند ، عبارات زیر را تاحد امکان ساده کنید .

الف) $(a + b + c) \times c + (a + b + c) \times b + (b - c) \times a$

حل :

$$\underbrace{(a+b+c)\times c}_{\text{توزیع پذیری ضرب خارجی}} + \underbrace{(a+b+c)\times b}_{\text{توزیع پذیری ضرب خارجی}} + \underbrace{(b-c)\times a}_{\text{توزیع پذیری ضرب خارجی}} = a\times c + b\times c + \underbrace{c\times c}_{\vec{0}} + a\times b + \underbrace{b\times b}_{\vec{0}} + \underbrace{c\times b}_{-b\times c} + \underbrace{b\times a}_{-a\times b} \underbrace{-c\times a}_{a\times c}$$

$$= \underline{a\times c} + b\times c + a\times b - b\times c - a\times b + \underline{a\times c} = 2a\times c$$

ب) $i\times(i+j-k) - j\times(i+j) + k\times(k-i)$

حل : $i\times(i+j-k) - j\times(i+j) + k\times(k-i) = \underbrace{i\times i}_{\vec{0}} + \underbrace{i\times j}_{\vec{k}} - \underbrace{i\times k}_{-\vec{j}} - \underbrace{j\times i}_{-\vec{k}} - \underbrace{j\times j}_{\vec{0}} + \underbrace{k\times k}_{\vec{0}} - \underbrace{k\times i}_{\vec{j}} = 2k$

ضرب دو گانه یا ضرب مضاعف خارجی سه بردار :

تعریف : $(a\times b)\times c$ را حاصلضرب دو گانه برداری یا ضرب مضاعف سه بردار می نامند ، رابطه زیر در یک ضرب دو گانه همواره برقرار است :

$$(a\times b)\times c = (a.c)b - (b.c)a$$

توجه داشته باشید که حاصلضرب سه گانه سه بردار ، یک بردار است .

ضرب مختلط سه بردار :

تعریف : حاصلضرب مختلط سه بردار a ، b و c را به صورت $a.(b \times c)$ نشان می دهیم ، بدیهی است که حاصلضرب مختلط سه بردار عددی حقیقی است .

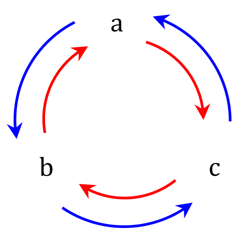
نکته : سه بردار a ، b و c را به $۶ = !۳$ حالت زیر در هم ضرب کرد ، که هر شش حالت از نظر قدر مطلق باهم برابرند .

$$a.(b \times c) \quad , \quad a.(c \times b) \quad , \quad b.(a \times c) \quad , \quad b.(c \times a) \quad , \quad c.(a \times b) \quad , \quad c.(b \times a)$$

نکته : هرگاه جای دو عامل متوالی از یک ضرب مختلط را تغییر دهیم علامت حاصلضرب مختلط تغییر می کند ، به عنوان مثال داریم :

$$a.(b \times c) = -a.(c \times b) = -b.(a \times c)$$

اما با تبدیل دوری عامل ها (مطابق شکل) ، علامت حاصلضرب تغییر نمی کند . یعنی داریم :



$$a.(b \times c) = b.(c \times a) = c.(a \times b) = a.(b \times c)$$

$$b.(a \times c) = a.(c \times b) = c.(b \times a) = b.(a \times c)$$

به عبارت دیگر برای تشخیص حالت های مساوی از شش حالت ذکر شده ، کافی است سه بردار را پشت سرهم نوشته و در هر مرحله اولین بردار از سمت چپ را در اخر (سمت راست) قرار دهیم .

تست. اگر a ، b و c سه بردار غیر صفر باشند ، $a.(b \times c)$ برابر کدام است ؟

۱) $(a.c) \times b$ ۲) $a.(c \times b)$ ۳) $(a.b) \times c$ ۴) $(a \times b).c$

حل : با توجه به نکته قبل ، گزینه (۴) صحیح است . البته توجه داشته باشید که $c.(a \times b) = (a \times b).c$

نکته : هرگاه حاصلضرب مختلط سه بردار غیر صفر a ، b و c برابر صفر باشد آنگاه آن سه بردار هم صفحه اند و بالعکس .

تست . اگر بردارهای $a = (۱, ۴, -۱)$ ، $b = (n, ۳, ۲)$ و $c = (۳, -۱, ۲)$ هم صفحه باشند ، مقدار n کدام است ؟

۱) $\frac{۴۱}{۷}$ ۲) ۶ ۳) $-\frac{۴۱}{۷}$ ۴) -۶

حل : گزینه (۳) صحیح است . باید حاصلضرب مختلط سه بـردار برابر صفر باشد ، ابتدا بـردار $b \times c$ (یا $a \times c$ یا $a \times b$) را محـاسبه می کنیم ، داریم :

$$b \times c : \begin{pmatrix} n & ۳ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{pmatrix} \to b \times c = \left(\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} n & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n & ۳ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} \right) = (۸, ۶-۲n, -n-۹)$$

حال باید $a.(b \times c)$ را محاسبه کرده ، مساوی صفر قرار دهیم :

$$a.(b \times c) = (۱, ۴, -۱).(۸, ۶-۲n, -n-۹) = ۰ \Rightarrow ۱ \times ۸ + ۴ \times (۶-۲n) + (-۱) \times (-n-۹) = ۰ \Rightarrow n = -\frac{۴۱}{۷}$$

مسأله : فرض کنید a ، b و c بردارهایی باشند با این خاصیت که $(a \times b) + (b \times c) + (c \times a) = \vec{o}$ ، ثابت کنید بردارهای a ، b و c در یک صفحه قرار می گیرند .

حل : ثابت می کنیم ضرب مختلط این سه بردار برابر صفر است . طرفین رابطه داده شده را در یکی از بردارهای a یا b یا c ضرب داخلی می کنیم ، داریم :

$$a.[(a \times b) + (b \times c) + (c \times a)] = a.\vec{o} \Rightarrow \underbrace{a.(a \times b)}_{\text{صفر}} + a.(b \times c) + \underbrace{a.(c \times a)}_{\text{صفر}} = ۰ \Rightarrow a.(b \times c) = ۰$$

توجه داشته باشید که $a \times b$ بر a عمود است بنابراین حاصلضرب داخلی آنها صفر است ، یعنی $a.(a \times b) = ۰$ با استدلال مشابه $a.(c \times a) = ۰$

مسأله : فرض کنید a ، b و c بردارهایی باشند با این خاصیت که $a + b + c = \vec{o}$ ، ثابت کنید $a \times b = b \times c = c \times a$

حل : طرفین رابطه $a + b + c = \vec{o}$ را در a ، b و c ضرب خارجی می کنیم ، داریم :

$$\left.\begin{array}{l} a \times (a+b+c) = a \times \vec{o} \Rightarrow \underbrace{a \times a}_{\vec{o}} + a \times b + a \times c = \vec{o} \Rightarrow a \times b = \underbrace{-a \times c}_{c \times a} \\ b \times (a+b+c) = b \times \vec{o} \Rightarrow b \times a + \underbrace{b \times b}_{\vec{o}} + b \times c = \vec{o} \Rightarrow b \times c = \underbrace{-b \times a}_{a \times b} \end{array}\right\} \Rightarrow a \times b = b \times c = c \times a$$

نکته : اگر a ، b و c بردارهایی غیر صفر باشند ، از $a \times b = a \times c$ لزوماً نمی توان $b = c$ را نتیجه گرفت .

دلیل : $a \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - a \times c = \vec{o} \Rightarrow a \times (b - c) = \vec{o} \Rightarrow a \parallel (b - c)$

بنابراین به عنوان مثال نقض کافی است b و c را بردارهایی دلخواه در نظر گرفته ، a را چنان تعیین کنیم که با $(b - c)$ موازی باشد ، به عبارت دیگر a مضربی از $(b - c)$ باشد ، با توجه به توضیحات داده شده ، مثال نقض زیر را ارائه می کنیم که در آن $a \times b = a \times c$ ، اما $b \neq c$ است :

$$b = (۲, ۱, -۲) \quad , \quad c = (۳, ۱, -۳) \Rightarrow (b - c) = (-۱, ۰, ۱)$$

همانگونه که گفتیم باید a مضربی از $(b - c)$ باشد ، به عنوان مثال : $a = (-۳, ۰, ۳)$

به ازای بردارهای داده شده درستی $a \times b = a \times c$ را بررسی کنید .

رابطه بین بین ضرب داخلی و خارجی دو بردار :

نکته(اتحاد لاگرانژ): برای دو بردار ناصفر a و b داریم : $|a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - (a.b)^۲$

اثبات : با توجه به تعریف ضرب خارجی بردارها داریم :

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم}} |a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲\sin^۲\theta \xrightarrow{\sin^۲\theta = ۱-\cos^۲\theta}$$

$$\Rightarrow |a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲(۱ - \cos^۲\theta) \Rightarrow |a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - \underbrace{|a|^۲|b|^۲\cos^۲\theta}_{(a.b)^۲} \Rightarrow |a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - (a.b)^۲$$

نتیجه : اگر بردارهای a و b برهم عمود باشند ، آنگاه $|a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲$

دلیل : در این صورت $a.b = ۰$ خواهد شد و رابطه نکته قبل به صورت $|a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲$ در خواهد آمد .

تست . اگر $|a| = ۲ \, , |b| = ۳$ و $|a \times b| = ۵$، حاصل ضرب داخلی بردارهای a و b کدام است ؟

۱) $\pm\sqrt{۱۱}$ ۲) $\pm\sqrt{۱۲}$ ۳) $\pm\sqrt{۱۳}$ ۴) $\pm\sqrt{۱۴}$

حل : گزینه (۴) صحیح است . داریم :

$$|a \times b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ - (a.b)^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۲^۲ \times ۳^۲ - (a.b)^۲ \Rightarrow (a.b)^۲ = ۳۶ - ۲۵ = ۱۱ \Rightarrow a.b = \pm\sqrt{۱۱}$$

توجه داشته باشید که $|a \times b|$ همواره مثبت است در حالیکه $a.b$ می تواند مثبت یا منفی باشد .

نکته : اگر θ زاویه بین دو بردار a و b باشد آنگاه : $\tan\theta = \frac{|a\times b|}{a.b}$

اثبات : با توجه به تعریف ضرب داخلی و تعریف ضرب خارجی دو بردار داریم :

$$\frac{|a \times b|}{a.b} = \frac{|a||b|\sin\theta}{|a||b|\cos\theta} \Rightarrow \frac{|a \times b|}{a.b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \tan\theta = \frac{|a \times b|}{a.b}$$

تست . اگر برای بردارهای a و b داشته باشیم $|a \times b| = \sqrt{۳} \, , a.b = -۱$ ، زاویه بین دو بردار a و b کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۳) $-\frac{\pi}{۶}$ ۴) $-\frac{۵\pi}{۶}$

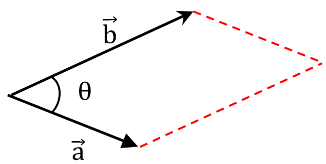
حل : گزینه (۲) صحیح است . با توجه به نکته قبل داریم :

$$\tan\theta = \frac{|a \times b|}{a.b} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \theta = \tan^{-۱}\left(\frac{-۱}{\sqrt{۳}}\right) \Rightarrow \theta = \left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۵\pi}{۶}$$

ضرب خارجی بردارها و محاسبه مساحت متوازی الاضلاع و مثلث

نکته : اگر a و b دو بردار و زاویه بین انها برابر θ باشد ، مساحت متوازی الاضلاعی که روی این دو بردار بنا می شود برابر است با :

$$s = |a \times b|$$



نتیجه : مساحت مثلثی که به دو بردار a و b تولید می شود برابر است با :

$$s = \frac{۱}{۲}|a \times b|$$

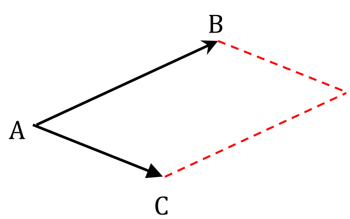
دلیل : هر قطر متوازی الاضلاع ، مساحت آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند ، بنابراین مساحت هر یک از دو مثلثی که توسط یک قطر متوازی الاضلاع پدید می اید نصف مساحت متوازی الاضلاع است .

مثال : مساحت متوازی الاضلاعی را به دست آورید که $A = (۳, ۱, -۳)$ ، $B = (۲, ۱, -۲)$ و $C = (۲, ۱, ۲)$ مختصات سه رأس از آن باشند .

حل : با توجه به شکل متوازی الاضلاع روی دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بنا می شود ،

بنابراین مساحت آن برابر است با $s = |AB \times AC|$ ، ابتدا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را

محاسبه می کنیم :



$$\overrightarrow{AB} = (۲, ۱, -۲) - (۳, ۱, -۳) = (-۱, ۰, +۱) \quad , \overrightarrow{AC} = (۲, ۱, ۲) - (۳, ۱, -۳) = (-۱, ۰, ۵)$$

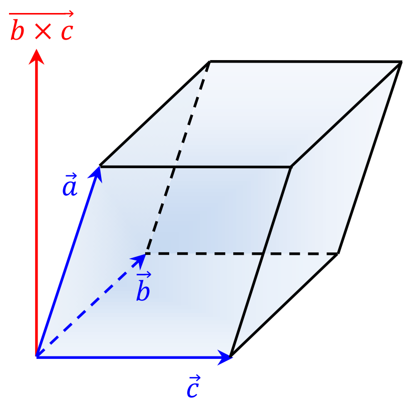
حال $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ را محاسبه می کنیم :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۵ \end{pmatrix} \to \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۵ \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} \right) = (۰, ۴, ۰)$$

و در نتیجه : $s = |AB \times AC| = |(۰, ۴, ۰)| = ۴$

ضرب مختلط بردارها و محاسبه حجم متوازی السطوح ، منشور مثلث القاعده و هرم مثلث القاعده (چهار وجهی)

تعریف متوازی السطوح : متوازی السطوح یک شش وجهی است که تمام وجوه آن متوازی الاضلاع باشند ، به عبارت دیگر متوازی السطوح یک منشور با قاعده متوازی الاضلاع است . مکعب و مکعب مستطیل حالت های خاصی از متوازی السطوح هستند که در آنها یالهای جانبی بر صفحه قاعده عمودند.



یادآوری : منشور یک چند وجهی است که دو وجه ان همنهشت بوده و در دو صفحه موازی قرار گیرند (این دو وجه را قاعده های منشور می نامند .) و سایر وجه های آن متوازی الاضلاع باشند .

حجم متوازی السطوح : حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار a ، b و c بنا می شود ، (شکل مقابل) برابر است با قدر مطلق ضرب مختلط این سه بردار . یعنی داریم :

$$v = |a.(b\times c)|$$

تذکر : هرگاه حجم متوازی السطوحی برابر صفر باشد ، نتیجه می شود بردارهایی که سه یال همرس متوازی السطوح را تشکیل می دهند باهم در یک صفحه قرار دارند .

تست . حجم متوازی السطوحی که بردارهای $a = (۴\,,۰\,,۲)$ ، $b = ۳i + j + ۳k$ و $c = (-۲\,,۱\,,-۱)$ سه یال همرس آن باشند کدام است ؟

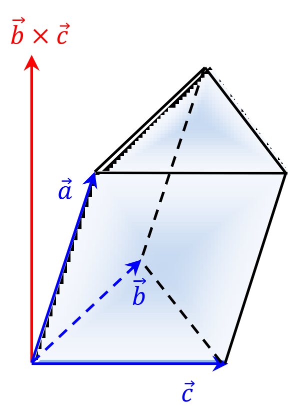
۱) ۴　　　　۲) ۶　　　　۳) ۸　　　　۴) ۱۰

حل : گزینه (۲) صحیح است . داریم :

$$\vec{b}\times\vec{c} : \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۱ & -۱ \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b}\times\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix}\right) = (-۴\,,-۳\,,۵)$$

$$a.(b\times c) = (۴\,,۰\,,۲).(-۴\,,-۳\,,۵) = -۱۶ + ۰ + ۱۰ = -۶ \Rightarrow v = |a.(b\times c)| = |-۶| = ۶$$

حجم منشور مثلث القاعده :



اگر سه بردار a ، b و c سه یال همرس یک منشور مثلث القاعده باشند (شکل مقابل) ، حجم منشور از رابطه زیر به دست می آید :

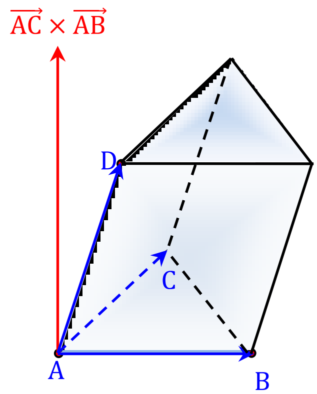
$$v = \frac{۱}{۲}|a.(b\times c)|$$

تست . نقاط $A = (۳\,,۱\,,-۱)$ ، $B = (۲\,,۲\,,۱)$ ، $C = (۰\,,۱\,,-۲)$ و $D = (۲\,,-۱\,,۴)$ ، چهار

رأس یک منشور مثلث القاعـده می باشند ، حجم منشور کدام است ؟

۱) ۴   ۲) ۶   ۳) ۸   ۴) ۱۰

حل : گزینه (۳) صحیح است . مطابق شکل ، منشور مورد نظر روی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ بنا می شود ، بنابراین ابتدا مختصات این بردارها را محاسبه می کنیم ، داریم :



$$\overrightarrow{AB} = (۲\,,۲\,,۱) - (۳\,,۱\,,-۱) = (-۱\,,۱\,,۲)$$

$$\overrightarrow{AC} = (۰\,,۱\,,-۲) - (۳\,,۱\,,-۱) = (-۳\,,۰\,,-۱)$$

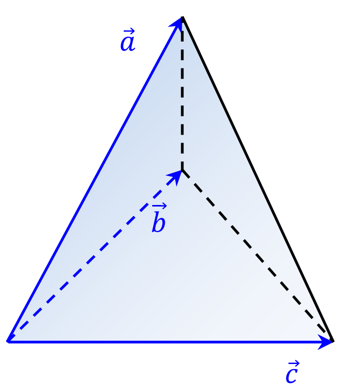
$$\overrightarrow{AD} = (۲\,,-۱\,,۴) - (۳\,,۱\,,-۱) = (-۱\,,۰\,,۵)$$

حال باید ، حاصل ضرب مختلط سه بردار به دست آمده را محاسبه کنیم :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} :\ \begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۳ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} , -\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ -۳ & -۱ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ -۳ & ۰ \end{vmatrix} \right) = (-۱\,,-۷\,,۳)$$

$$\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = (-۱\,,۰\,,۵).(-۱\,,-۷\,,۳) = ۱ + ۰ + ۱۵ = ۱۶ \Rightarrow v = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right| = \frac{۱}{۲}|۱۶| = ۸$$

حجم چهار وجهی (هرم مثلث القاعده) :



اگر سه بردار a ، b و c سه یال همرس یک هرم مثلث القاعده باشند (شکل مقابل) ،

حجم هرم از رابطه زیر به دست می آید :

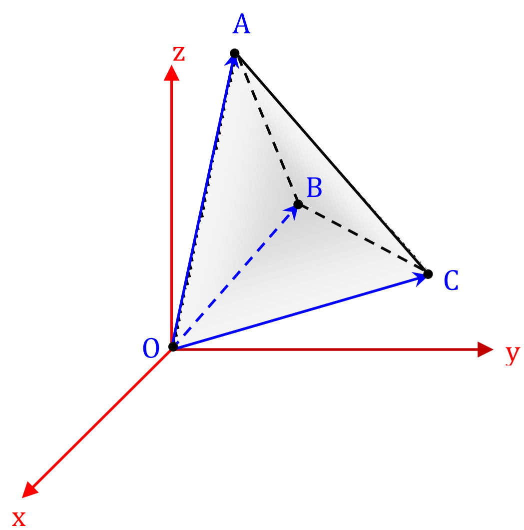
$$v = \frac{۱}{۶}|a.(b \times c)|$$

یادآوری: هرم یک چند وجهی است که همه وجه های آن به جز یکی در یک رأس مشترکند .

مثال : نقاط $A = (2, -1, 0)$ ، $B = (0, 1, 2)$ ، $C = (-1, 1, 2)$ و مبدأ مختصات چهار رأس یک چهار وجهی هستند ، حجم هرم چقدر است ؟

حل : با توجه به شکل بردارهای $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ سه یال همرس چهار وجهی می باشند ، با توجه به اینکه O مبدأمختصات است داریم :

$OA = (2, -1, 0)$ ، $OB = (0, 1, 2)$ ، $OC = (-1, 1, 2)$ ، حال ضرب مختلط این سه بردار را محاسبه می کنیم :



$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (0, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) = (2, -1, 0) \cdot (0, -2, 1) = 2$$

$$v = \frac{1}{6}|\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC})| = \frac{1}{6}|2| = \frac{1}{3}$$