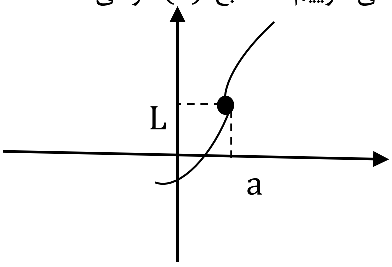
حد

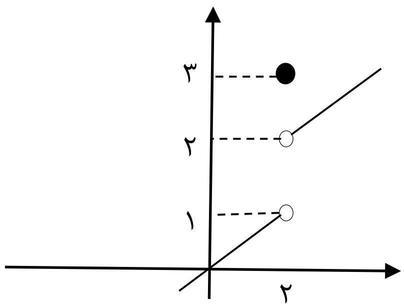
تعریف حد: فرض کنید تابع f در یک همسایگی یا همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد. آنگاه زمانی که متغییر x با مقادیر بیشتر یا کمتر از a به عدد a نزدیک می شود $(x \to a)$ پس $f(x)$ به عدد منحصر به فرد L نزدیک می شود و می گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to a$ برابر L است. به عبارتی $\lim_{x\to a} f(x) = L$



نکته ۱) حد تابع در $x = a$ با مقدار تابع در این نقطه ارتباطی ندارد.

نکته ۲) لزومی ندارد تابع در آن نقطه که حد را محاسبه می کنیم تعریف شده باشد.

مثال) با توجه به نمودار $y = f(x)$، حاصل $f(۲) + \lim_{x\to ۲^+} f(x) + \lim_{x\to ۲^-} f(x)$ کدام است؟



$$f(۲) + \lim_{x\to ۲^+} f(x) + \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۳ + ۲ + ۱ = ۶$$

قضایای حد:

۱) حد یک تابع در صورت وجود، منحصر به فرد است.

۲) اگر $p(x)$ یک چند جمله ای باشد، $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$

۳) اگر $f(x) = b^x$ یک تابع نمایی باشد آنگاه، $\lim_{x\to a} f(x) = b^a$

۴) اگر x برحسب رادیان باشد آنگاه،

الف) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$

ب) $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$

ج) $\lim_{x\to a} \tan x = \tan a \qquad \left(a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in z\right)$

د) $\lim_{x\to a} \cot x = \cot a \qquad (a \neq k\pi, k \in z)$

۵) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ باشد:

الف) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |L|$

ب) $\lim\limits_{x\to a} c\, f(x) = cL \quad ; (c \in R)$

ج) $\lim\limits_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n \quad ; (n \in N)$

د) $\lim\limits_{x\to a} \frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{L} \quad ; (L \neq ۰)$

ه) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{L} & ; n \text{ فرد} \\ \sqrt[n]{L} & ; n \text{ زوج} \to (L \geq ۰) \end{cases}$

---

۶) فرض کنید a عدد حقیقی باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_۲$ باشد آنگاه:

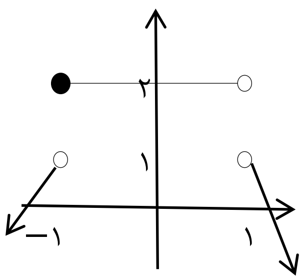
الف) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_۱ \pm L_۲$

ب) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \times g(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right) \times \left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = L_۱ \times L_۲$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_۱}{L_۲} \quad ; (L_۲ \neq ۰)$

تست) اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(\sin x) + \lim\limits_{x\to\pi} f(\cos x)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) موجود نیست



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(\sin x) = \lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 2 \\ \lim\limits_{x\to\pi} f(\sin x) = \lim\limits_{t\to(-1)^+} f(t) = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} 4$$

(تست) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^{2}-ax+b & x>2 \\ \sqrt{x+b+1} & x\le 2 \end{cases}$ و $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

چون حد f در $x=2$ موجود است باید حد چپ = حد راست باشد و با حد تابع f در $x=2$ برابر باشد.

$$2)\ \lim_{x\to 2^+}(x^{2}-ax+b)=4-2a+b=3 \xrightarrow{b=6} a=\frac{7}{2}$$

$$1)\ \lim_{x\to 2}\sqrt{x+b+1}=\sqrt{3+b}=3\to b=6$$

$$\overset{1,2}{\Rightarrow} ab=21$$

(تجربی ۸۰) به ازای کدام مقادیر a تابع $f(x)=\begin{cases} (x+a)^{2} & x\ge -1 \\ 2x+1 & x<-1 \end{cases}$ در نقطه $x=-1$ حد دارد؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) هرمقدار ۴) هیچ مقدار

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x+a)^{2}=(-1+a)^{2} \\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(2x+1)=-1 \end{cases} \to (-1+a)^{2}=-1\to \emptyset$$

(ریاضی۸۹) اگر $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} & x>0 \\ -\sqrt{x+1} & x\le 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 0^-} f(x^{3}-x)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) موجود نیست

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^{3}-x)=\lim_{x\to 0^-} f\big(x(x^{2}-1)\big)=f(0^+)=\sqrt{1-0}=1$$

محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح:

برای محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق: ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم و با حذف قدرمطلق، حاصل حد را محاسبه می کنیم.

مثال)

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x^{2}-9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{-1}{6}$$

$$3)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^{2}-4x+4}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{(x-2)^{2}}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

(تست) حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|-[x]}{2|x|+[x]}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-[x]}{2|x|+[x]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-[0^-]}{-2x+[0^-]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x+1}{-2x-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$:

اگر در $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ حاصل $\frac{0}{0}$ شود، دیگر نمی توانیم با قضایا حد که مطرح کردیم حد را محاسبه کنیم.

(اصطلاحاً می گوییم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ به وجود آمده و باید رفع ابهام شود.)

روش های رفع ابهام $\frac{0}{0}$:

حالت ۱) حذف عامل صفر شونده از صورت و مخرج: در این حالت با حذف عامل صفر شونده از صورت و مخرج حد را محاسبه می کنیم.

(عامل صفر شونده به صورت $(x-a)$ یا $\sqrt{x-a}$ و... است.)

مثال) حاصل حد های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+3)}=\frac{7}{6}$$

$$2)\ \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3}=\lim_{x\to 8}\frac{x+1-9}{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt{x+1}+3}=\frac{1}{6}$$

نکته: حد یک چند جمله ای وقتی $x\to 0$ برابر حد جمله با کوچکترین درجه در چند جمله ای است. (هم ارزی کوچکترین توان)

$$x^4+3x^2+7x\sim 7x\quad (x\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^6+5x^2+x}{x^4-3x^3++7x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{7x}=\frac{1}{7}$$

نکته: در برخی موارد با انتقال حد به نقطه صفر می توانیم سؤال را راحت تر حل کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}\qquad x-a=t\to x=a+t$$

$$x\to a\qquad t\to 0$$

حالت۲) قاعده هوپیتال: در حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ که حالت $\frac{0}{0}$ رخ داده اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\to}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

این قاعده را تا زمانی اجرا می کنیم که حد از حالت $\frac{0}{0}$ خارج شود.

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x^۳+۱}\overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{\text{Hop}}{\Longrightarrow}}\lim_{x\to -۱}\frac{۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}{۳x^۲}=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۲x-\cos x}{x^۲}\overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{\text{Hop}}{\Longrightarrow}}\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin ۲x+\sin x}{۲x}\overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{\text{Hop}}{\Longrightarrow}}\lim_{x\to ۰}\frac{-۴\cos ۲x+\cos x}{۲}=\frac{-۴+۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

نکته: در حد هایی که به صورت $\frac{۰}{۰}$ اند، اگر عاملی وجود داشته باشد که در $\frac{۰}{۰}$ نقشی نداشته باشد، باید حد آن عبارت را جدا کنیم.

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۵}\frac{(\sqrt{x+۴}-۳)x^۲}{\sqrt{x-۱}(x^۲-x-۲۰)}=\frac{۲۵}{\sqrt{۴}}\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt{x+۴}-۳}{x^۲-x-۲۰}\overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{\text{Hop}}{\Longrightarrow}}\frac{۲۵}{۲}\lim_{x\to ۵}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}}{۲x-۱}=\frac{۲۵}{۲}\left(\frac{\frac{۱}{۶}}{۹}\right)=\frac{۲۵}{۱۰۸}$$

حالت۳) روش هم ارزی

$۱)\ \sin^m u \sim u^m \quad (u\to ۰)$

$۲)\ \tan^m u \sim u^m \quad (u\to ۰)$

$۳)\ ۱-\cos^m u \sim \frac{mu^۲}{۲} \quad (u\to ۰)$

$4)\ \sqrt[m]{1\pm u}\sim 1\pm\frac{u}{m}$

$5)\ (1\pm u)^m \sim 1+mu$

مثال)

$$1)\ \lim_{x\to ۰}\frac{3\sin^3 x-\tan^3 x}{2x^3+x^4}=\lim_{x\to ۰}\frac{3x^3-x^3}{2x^3+x^4}=\frac{3}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[4]{1+2x}}{x^2+3x}=\lim_{x\to ۰}\frac{1+\frac{x}{3}-\left(1+\frac{2x}{4}\right)}{3x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x}{6}}{3x}=-\frac{1}{18}$$

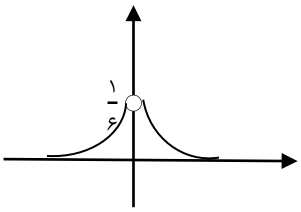
$$3)\ \lim_{x\to ۰}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{(2x)^2}{2}}{x^2}=2$$

نکته: در رفع ابهام حد های $\frac{۰}{۰}$ اگر با قدرمطلق و براکت مواجه شویم، باید قدرمطلق را در مجاورت $x = a$ تعیین علامت کنیم و اگر براکت بود، براکت را در آن نقطه تعیین علامت کنیم.

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲ - ۱}{[x]|x| - ۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = ۲$$

مثال) در شکل روبرو نمودار تابع $y = \frac{\sqrt{x^۲+۹}-a}{bx^۲}$ داده شده است. حاصل $a^۲ + b^۳$ کدام است؟



$x = ۰$ در صورت $= ۰ \to \sqrt{۰ + ۹} - a = ۰ \to a = ۳$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{bx^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{\Rightarrow}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{2bx} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2b\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{6b} = \frac{1}{6} \to b = 1 \to a^2 + b^3 = 9 + 1 = 10$$

(تست) حاصل $\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{۳x+\sqrt{x}}-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۲۱}{۸}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}}-2}{\sqrt[3]{x}-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{Hop}{\Rightarrow}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{3+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3x+\sqrt{x}}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{21}{8}$$

(ریاضی ۹۰) حاصل $\lim_{x\to ۲^-} \frac{|x^۲-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

$$|x^2-x-2| = |(x-2)(x+1)| \xrightarrow{x\to 2^-} -(x^2-x-2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-(x^2-x-2)}{2x-\sqrt{x^2+12}} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 2^-} \frac{-(2x-1)}{2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}} = -\frac{3}{2-\frac{4}{8}} = -\frac{3}{\frac{3}{2}} = -2$$

(تجربی خارج ۹۶) اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$ باشد آنگاه b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

$$\frac{۲-\sqrt{۴}}{۲a+b}\xrightarrow{\text{باید}} ۲a+b=۰ \to \lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}\overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{\text{Hop}}{\Longrightarrow}}\lim_{x\to ۲}\frac{۱-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{a}=\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۲}\to a=\frac{۱}{۲}$$

$$\to ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)+b=۰\to b=-۱$$

(تست) حاصل $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{(۱+\sqrt[۳]{x})(۲x^۲+x-۱)}{(x+۱)^۲}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) ۱

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۱+\sqrt[۳]{x}}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+x-۱}{x+۱}\xrightarrow[\text{}]{\text{هر دو Hop}}\lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{۱}\times\lim_{x\to -۱}\frac{۴x+۱}{۱}=\frac{۱}{۳}\times(-۳)=-۱$$

(تجربی ۹۰) حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۴

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{4x^2}{2}}{x^2}=2$$

(ریاضی ۸۸) حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos ۳x}}{۱-\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{x^۲}{۲}\right)-\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{۹x^۲}{۲}\right)}{\frac{x^۲}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲}{\frac{x^۲}{۲}}=۴$$

(تست) حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos ۲x+[-\sin^۲ x]}{\sin^۲ x+[\sin^۲ x]}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ∞

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos 2x+[۰^-]}{\sin^2 x+[۰^+]}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{4x^2}{2}}{x^2}=-2$$

(ریاضی ۹۱) حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{۱-\tan \pi x}{۲x-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) -۲π ۲) π ۳) $-\pi$ ۴) ۲π

$$\text{Hop} \to \lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{-\pi(۱+\tan^{۲}\pi x)}{۲-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{-\pi(۲)}{۲-۱}=-۲\pi$$

(ریاضی ۹۳) حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos^{۲}x-\sqrt{\cos x}}{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\frac{x^{۲}}{۲}-\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{x^{۲}}{۲}\right)}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-x^{۲}+\frac{x^{۲}}{۴}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۳}{۴}x^{۲}}{x^{۲}}=-\frac{۳}{۴}$$

(ریاضی ۹۴) حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}([۲x]+[-۲x])\frac{۱-\cos^{۳}x}{۱-\sqrt{۱+x^{۲}}}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) حد ندارد

❋ **نکته:** $\lim\limits_{x\to ۰}[۲x]+[-۲x]=۱$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^{۳}x}{۱-\sqrt{۱+x^{۲}}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-۳\frac{x^{۲}}{۲}}{۱-\left(۱+\frac{x^{۲}}{۲}\right)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(\frac{۳}{۲}x^{۲}\right)}{-\frac{x^{۲}}{۲}}=-۳$$

(تست) حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cot^{۳}x}{(۲x-\pi)^{۳}}$ کدام است؟

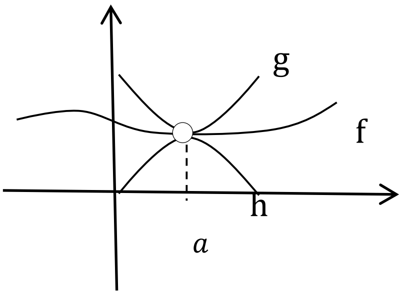
۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) ∞ ۴) ۰

$$=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cot x}{۲x-\pi}\right)^{۳}\overset{\text{Hop}}{\Longrightarrow}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-(۱+\cot^{۲}x)}{۲}\right)^{۳}=-\frac{۱}{۸}$$

قضیه فشردگی (ساندویچ) :

هرگاه به ازای هر x در بازه ای شامل a (به جز احتمالاً در خود a) $h(x) \le f(x) \le g(x)$ و نیز $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ باشد

آنگاه: $\lim_{x\to a} f(x) = L$



قضیه کران داری:

$$(۰) \times (\text{عبارت کران دار}) = ۰$$

(تست) اگر تابع f در نامساوی $|۳f(x) + \cos x + ۱| \le \frac{x^۲}{۱+\cos x}$ صدق کند، حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{f(x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$-\frac{x^۲}{۱+\cos x} \le ۳f(x) + \cos x + ۱ \le \frac{x^۲}{۱+\cos x}$$

$$\to \lim_{x\to ۰} \frac{-x^۲}{۱+\cos x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x^۲}{۱+\cos x} = ۰ \to \lim_{x\to ۰} ۳f(x) + \cos x + ۱ = ۰ \to \lim_{x\to ۰} f(x) = -\frac{۲}{۳}$$

$$\to \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{f(x)} = -\frac{۳}{۲}$$

(تست) حاصل $\lim_{x\to ۰} \sin x \left(\frac{۱}{x} - \left[\frac{۱}{x}\right]\right)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حد ندارد

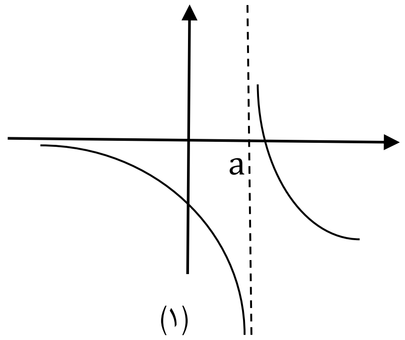
حد بی نهایت:

اگر در تابع $y=f(x)$ که در بازه I تعریف شده است، نقطه a به گونه ای باشد که بتوان از داخل بازه I به a نزدیک شد و با نزدیک شدن متغییر x به a، مقادیر $f(x)$ بزرگ شوند، به طوری که $f(x)$ بتواند از هر عدد از پیش داده شده ای بزرگتر باشد، در این صورت می گوییم با نزدیک شدن x به a، $f(x)$ به سمت $+\infty$ می رود و داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

انفصال ساده:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

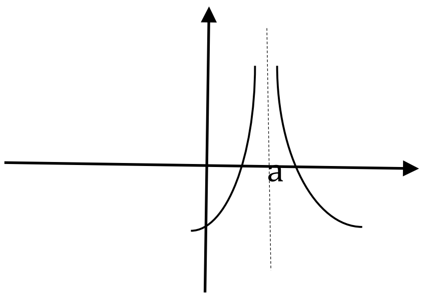
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$



(۱)

انفصال مضاعف:

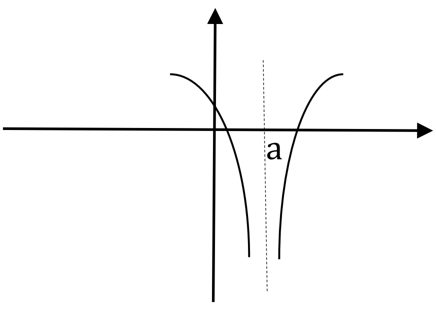
$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$



(۲)

انفصال مضاعف:

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$



(۳)

به طور خلاصه: $\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty \quad , \quad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty \quad , \quad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty \quad , \quad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۱}{(x-۱)^۳} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۱}{(x-۲)^۳} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{[\sin x]}{x} = \frac{[۰^-]}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$

معرفی چند ویژگی: (k عدد ثابت و $k > ۰$)

۱) $+\infty + \infty = +\infty$

۲) $-\infty - \infty = -\infty$

۳) $\frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$

۴) $(\pm\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$

۵) $(\pm\infty)^{\text{فرد}} = \pm\infty$

۶) $\frac{k}{\pm\infty} = ۰^\pm$

۷) $(+\infty)\times(+\infty) = +\infty$

۸) $(-\infty)\times(-\infty) = +\infty$

۹) $(+\infty)\times(-\infty) = -\infty$

۱۰) $k \pm \infty = \pm\infty$

۱۱) $k \times (\pm\infty) = \pm\infty$

۱۲) $\frac{\text{۰ مطلق}}{\text{۰ حدی}} = ۰$

۱۳) $\frac{\text{۰ مطلق}}{k} = ۰$

۱۴) $\frac{\text{۰ مطلق} - \text{حدی}}{\pm\infty} = ۰$

۱۵) $\frac{\infty}{\text{۰ حدی}} = \infty$

۱۶) $\frac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ حدی}} = \text{مبهم}$

۱۷) $\left(\text{۰ حدی}\right) \times \infty =$ مبهم

۱۸) $\left(\text{۰ مطلق}\right) \times \infty = ۰$

۱۹) $\infty - \infty =$ مبهم

۲۰) $\dfrac{\infty}{\infty} =$ مبهم

نکته: به طور کلی اگر مخرج ۰ مطلق شود، عبارت تعریف نشده می شود و حد قابل بحث نیست.

$\dfrac{k}{\text{۰ مطلق}} =$ ت ن $\quad \dfrac{\infty}{\text{۰ مطلق}} =$ ت ن $\quad \dfrac{\text{۰ مطلق}}{\text{۰ مطلق}} =$ ت ن $\quad \dfrac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ مطلق}} =$ ت ن

نکته: اگر f تابعی متناوب باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ موجود نیست. مانند:

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x =$ موجود نیست

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x =$ موجود نیست

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty} x - [x] =$ موجود نیست

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x}{[x]} = \dfrac{\text{۰ حدی}}{-۱} = ۰$

---

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{x}{[\sin x]} = \dfrac{\text{۰ حدی}}{\text{۰ مطلق}} =$ ت ن

---

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{[x]}{x} = \dfrac{\text{۰ مطلق}}{\text{۰ حدی}} = ۰$

حد در بی نهایت $(x \to \pm\infty)$

در تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است و با بزرگ شدن متغییر x (به شرط آن که x به اندازه کافی بزرگ شود) مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک می شود. در این حالت خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

حال اگر تابع $y = f(x)$ روی بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، و با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی (به شرط آن که x به اندازه کافی کوچک شود) مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک می شود. در این حالت می گوییم: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

نکته: برای محاسبه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$ باید به علامت a $(a \neq ۰)$ و زوج و فرد بودن n دقت کنیم.

نکته: هم ارزی پرتوان:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (ax^n + bx^{n-۱} + \cdots) \approx \lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

ابهام $\frac{\infty}{\infty}$:

برای محاسبه حد $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن g و f دو تابع چند جمله ای اند، وقتی $x \to \pm\infty$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n + bx^{n-۱} + \cdots}{a'x^m + b'x^{m-۱} + \cdots} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} \pm\infty & n > m \\ \frac{a}{a'} & n = m \\ ۰ & n < m \end{cases}$$

مثال)

$$۱)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲ + ۶x - ۱}{۳x^۲ + x + ۲} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{۳x^۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^۴ + ۳x - ۱}{x^۳ + ۵x^۲} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^۴}{x^۳} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲ + ۵x - ۱}{x^۴ + ۵x^۲ - ۱} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۴} = \lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^۲} = ۰$$

ابهام $\infty \times ۰$: $\lim_{x\to a} f(x)\times g(x) = ۰ \times \infty$

برای رفع ابهام باید عاملی که صفر شده را در صورت و عاملی که ∞ شده را معکوس کرده و به مخرج ببریم تا به ابهام $\frac{۰}{۰}$ تبدیل شود و سپس آن را حل می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}(x-۱)\tan\frac{\pi}{۲}x = \lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\cot\left(\frac{\pi}{۲}x\right)} \overset{\text{Hop}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۱}\frac{۱}{-\frac{\pi}{۲}\left(۱+\cot^{۲}\frac{\pi}{۲}x\right)} = \frac{-۲}{\pi}$$

ابهام $\infty - \infty$:

برای رفع ابهام؛ اگر توابع از نوع کسری باشند ابتدا مخرج مشترک بگیرید تا به ابهام $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل شود، اما اگر از نوع رادیکالی باشد از اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر و یا هم ارزی نیوتن استفاده می کنیم.

هم ارزی نیوتن: $$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots} = \begin{cases}\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| & (a>۰)\ \text{زوج } n\\ \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) & \text{فرد } n\end{cases}$$

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲+x}\right) \overset{\infty-\infty}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۰^+}\frac{x+۱-۱}{x^۲+x} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x(x+۱)} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x\pm ۱} = ۱$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+6}-x = \lim_{x\to+\infty}|x+2|-x = \lim_{x\to+\infty}x+2-x = 2$

۳) $\lim_{x\to ۰^+}[x]\cot x = [۰^+]\cot(۰^+) = \left(\text{مطلق } ۰\right)\times(+\infty) = ۰$

(تست) اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{mx^۲-bx^m-۲}{x^m-۳x+۱} = -۱$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۳ یا ۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) هیچ کدام

اگر $m=۲ \to \lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲-bx^۲-۲}{x^۲-۳x+۱} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲(۲-b)}{x^۲} = ۲-b = -۱ \to b=۳$ ق ق

اگر $m<۲ \to$ چون حاصل حد ∞ می شود امکان ندارد

اگر $m>۲ \to \lim_{x\to+\infty}\frac{mx^۲-bx^m-۲}{x^m-۳x+۱} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-bx^m}{x^m} = -b = -۱ \to b=۱$ ق ق

(ریاضی خارج ۹۴) حاصل $\lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cot x$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) حد ندارد

$[1^-]\times\infty = ۰_م \times\infty = ۰$

(تجربی ۹۴) در تابع $f(x)=\frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) 3 ۴) 5

$$\lim_{x\to-\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{3x-2|x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x+2x} \xrightarrow{n=1} \lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{5x} = \frac{a}{5} = -1 \longrightarrow a=-5$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 3}\frac{-5}{3-\frac{8x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = -\frac{5}{\frac{15}{18}} = -6$$

پیوستگی:

تعریف: تابع f که روی بازه I تعریف شده است را، در نقطه a از دامنه اش پیوسته گویند هرگاه:

۱) تابع در $x=a$ حد داشته باشد

۲) حد تابع در $x=a$ با مقدار تلبه در a برابر باشد. یعنی: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

بنابراین هرگاه تابعی روی بازه I تعریف شده باشد و یک نقطه آن، حداقل یکی از شروط بالا را نداشته باشد، در آن نقطه در بازه I ناپیوسته است.

(تست) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(x+2)[x]^2 & x<2\\ 2b-x & x=2\\ x+1+a & x>2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -4 ۴) 4

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=(2+2)[2^-]=4$$

$$f(2)=2b-2$$

$$\lim_{z\to 2^+}(x+1+a)=3+a$$

$$\to\begin{cases}2b-2=4\to b=3\\ 3+a=4\to a=1\end{cases}\to a+b=4$$

(ریاضی خارج ۹۰) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 0 ۴) هیچ مقداری

$$f(0)=a$$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}=$موجود نیست

به ازای هیچ مقداری از a پیوسته نیست.

(تجربی ۹۰) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^{۲}+x-۲|}{x-۱} & x\neq ۱\\ a & x=۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=۱$ پیوسته است؟

۱) هر مقدار a ۲) ۳ ۳) ۳− ۴) هیچ مقدار a

مقدار $f(۱)=a$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{|x^{۲}+x-۲|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|(x-۱)(x+۲)|}{x-۱}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱}=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{-(x-۱)(x+۲)}{x-۱}=-۳\end{cases}\rightarrow$$ حد موجود نیست

به ازای هیچ مقدار a تابع پیوسته نیست.

(تجربی ۹۳) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{۱-\tan^{۲}x}{\cos ۲x} & ۰\leq x<\frac{\pi}{۴}\\ a\cos ۳x & \frac{\pi}{۴}\leq x<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) ۱− ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan^{۲}x}{\cos ۲x}\overset{\text{Hop}}{\underset{\frac{۰}{۰}}{\Longrightarrow}}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-۲\tan x\,(۱+\tan^{۲}x)}{-۲\sin ۲x}=\frac{-۲(۱)(۱+۱)}{-۲(۱)}=+۲$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}(a\cos ۳x)=a\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\rightarrow a\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲\rightarrow a=-\frac{۴}{\sqrt{۲}}=-۲\sqrt{۲}$$

(تجربی خارج ۹۳) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi} & \pi<x\leq ۲\pi\\ a\cos\frac{۲}{۳}x & ۰\leq x\leq ۲\pi\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه ای به طول $x=\pi$ پیوسته است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

(تجربی ۹۵) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقداری

$f(0)=a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^{\frac{1}{2}} x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2}=-\frac{1}{4}\longrightarrow a=-\frac{1}{4}$$

(ریاضی خارج ۹۴) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3} & x>3\\ (ax-3a-\frac{3}{8} & x\leq 3\end{cases}$ در $x=3$ پیوسته است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

$$f(3)=f(3^-)=3a-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}\longrightarrow\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 3^+}\frac{0-\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}}{1}=-\frac{3}{8}$$

به ازای هر مقدار a پیوسته است.

(تجربی ۹۶) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x\neq 0\\ a & x=a\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲