



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

فصل دوم (بخش دوم: دنباله ها)

بخش دوم: دنباله ها

$$a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

(۱) تعریف دنباله: دنباله تابعی است که به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی را نسبت می دهد.

$$n \mapsto a_n$$

نکته ۱: جملات برخی از دنباله ها از یک قانون خاصی پیروی می کند که به آن جمله ی عمومی دنباله گفته می شود و تمام جمله های دنباله را می توان با توجه به آن قاعده مشخص نمود. مثلاً در دنباله $1, 3, 5, \dots$ جمله ی عمومی بصورت $a_n = 2n - 1$ می باشد، و هر جمله را می توان با توجه به جمله قبل از آن و یا به طور مستقل پیدا کرد.

مثال ۱: جمله ی عمومی دنباله های $a_n = \frac{3n+2}{n}$ و $b_n = \sqrt{2 + \frac{1}{n}}$ را داریم، سه جمله ی اول آن را بنویسید.

$$a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = \frac{11}{3}$$

$$b_1 = \sqrt{3}, b_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}, b_3 = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

(۲) دنباله مسابی (عددی): جملات این دنباله ها از جمع عدد قبلی با یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می شوند. پس در حالت کلی ظاهر این دنباله ها بصورت $a, a+d, a+2d, \dots$ است. که در آن a جمله ی اول و d قدر نسبت است.

نکته ۲: قدر نسبت در این دنباله ها از رابطه ی $d = a_n - a_{n-1}$ محاسبه می شود. و همچنین جمله ی عمومی این دنباله ها در حالت کلی به شکل $a_n = a + (n-1)d$ است.

مثال ۲: در دنباله $5, 2, -1, \dots$ قدر نسبت و جمله ی 20 ام و جمله 125 ام را مشخص کنید.

$$d = 2 - 5 = -3$$

$$a_{20} = 5 + 19(-3) = -52$$

نکته ۳: اگر a و b و c به ترتیب سه جمله از یک دنباله مسابی باشند، به b واسطه عددی می گوییم و داریم $b = \frac{a+c}{2}$. همچنین داریم:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \text{ یعنی هر جمله واسطه عددی بین جملات با فاصله مساوی از طرفین خود است.}$$

مثال ۳: در مجموعه اعداد طبیعی عدد ۵ واسطه عددی چه اعدادی است؟

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$+ 4 = 5, \quad + 2 = 5$$

$$5 = \frac{1+9}{2} = \frac{2+8}{2} = \frac{3+7}{2} = \frac{4+6}{2}$$

نکته ۴: اگر جمله a_m و a_n از یک دنباله مسابی را داشته باشیم، فواید داشت: $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$

مثال ۴: اگر در یک دنباله جمله ششم ۱۵ و جمله دهم ۳۴ باشد، قدر نسبت دنباله را بیابید.

$$d = \frac{34 - 15}{10 - 6} = \frac{19}{4}$$

تست ۱: اعداد $2p+3, 3p+4, 5p-1$ سه جمله ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

۲ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$(2p+3) + (5p-1) = 2(3p+4)$$

$$d = (3p+4) - (2p+3)$$

$$= p+1 = 7$$

$$\Rightarrow 5p+2 = 4p+11 \Rightarrow p=9$$

تست ۲: به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه عددی بین دو ریشه حقیقی معادله $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

-۳ (۲)

$$\frac{3}{m^2-4} = \frac{1}{8} \Rightarrow m^2 = 14$$

$$\Rightarrow m = \pm \sqrt{14}$$

$$\Delta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{m^2-4}$$

$$\Delta = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} m=4 \Rightarrow 12x^2-3x+4=0 \rightarrow \Delta < 0 \times \\ m=-4 \checkmark \end{cases}$$

تست ۳: تصاعد حسابی به جمله اول ۶۳ و قدر نسبت (-4) چند جمله مثبت دارد؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

$$a_n = a + (n-1)d = 63 + (n-1)(-4) > 0$$

$$\Rightarrow -4n + 67 > 0 \Rightarrow n < \frac{67}{4} = 16.75$$

نکته ۵: اگر جمله ی a و b دو عدد حقیقی باشند و بخواهیم بین این دو عدد n عدد دیگر بگنجانیم بطوری که جمله های حاصل یک دنباله عددی

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

مثال ۵: بین اعداد ۲۰ و ۳۵ چهار واسطه عددی درج کنید.

$$23, 24, 25, 26$$

نیاز به حفظ رابطه بالانوارید.

تست ۴: بین دو عدد ۷ و ۵۵ به تعداد هفت جمله طوری نوشته شده است که دنباله ی حسابی تشکیل شود. جمله ی وسط کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۲ (۳)

۳۱ (۲)

۲۹ (۱)

$$d = \frac{55-7}{7+1} = \frac{48}{8} = 6$$

$$a_8 = a + (n-1)d = 7 + 6(7) = 49$$

$$a_1 = 7, a_8 = 55 \Rightarrow d = \frac{55-7}{8-1} = 6$$

نکته ۶: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم $m+n=p+q$ در آن صورت در هر دنباله حسابی خواهیم داشت: $a_m + a_n = a_p + a_q$

تست ۵: در یک دنباله حسابی جمله های هشتم، سیزدهم و شصت و هفتم به ترتیب برابر ۱۱، ۳۶ و ۳۰۶ هستند. جمله ۶۲ کدام است؟

۲۶۹ (۴)

۲۵۹ (۳)

۲۸۱ (۲)

۲۶۳ (۱)

$$a_8 + a_{40} = a_{17} + a_{31} \Rightarrow 11 + 306 = a_{17} + 259 \Rightarrow a_{17} = 258$$

$$d = \frac{306-11}{13-8} = 48, a_8 = a + 7d = a + 336 = 11 \Rightarrow a = -325 \Rightarrow a_{40} = -325 + 41(48) = 258$$

نکته ۷: مجموع n جمله ی اول در هر دنباله حسابی از رابطه ی $S_n = \frac{n}{2}[a + (n-1)d]$ و یا $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ محاسبه می شود.

امام علی علیه السلام: ((تقوای الهی پیشه کن گرچه اندک، و میان خود و خدای خویش مریم نگه دار و لو کم رنگ))

مثال ۶: در دنباله $۲, ۶, ۱۰, \dots$ مجموع ۱۰ جمله اول و مجموع ۱۴ جمله اول را بیابید.

$$S_{10} = 5(2(2) + 9(4)) = 100$$

مثال ۷: چند جمله از دنباله $۵, ۷, ۹, \dots$ را جمع کنیم تا مجموع جملات از ۱۰۰ بیشتر شود.

$$S_n > 100 \Rightarrow \frac{n}{2} [2(5) + (n-1) \times 2] > 100$$

$$\Rightarrow n[n+4] = n^2 + 4n > 100 \Rightarrow n^2 + 4n - 100 > 0$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 400}}{2} \Rightarrow n > \frac{-4 + 20}{2} = 8 \Rightarrow n = 9$$

تست ۶: در یک دنباله عددی مجموع چهار جمله اول ۳۴ و مجموع چهار جمله دوم ۱۴۶ است. مجموع جملات نهم و دهم کدام است؟

۱۱۹ (۴)

۱۱۵ (۳) ✓

۱۱۲ (۲)

۱۱۰ (۱)

$$\begin{cases} S_4 = 34 \\ S_8 - S_4 = 146 \Rightarrow S_8 = 180 \end{cases}$$

 \Rightarrow

$$2(2a + 3d) = 34 \Rightarrow$$

 \Rightarrow

$$\begin{cases} 2a + 3d = 17 \\ 2a + 7d = 45 \end{cases}$$

$$4(2a + 7d) = 180$$

$$\Rightarrow 4d = 28 \Rightarrow d = 7$$

$$a_9 + a_{10} = a + 8d + a + 9d = 2a + 17d = -4 + 119 = 115$$

$$\Rightarrow a = -2$$

نکته ۸: برای یافتن n جمله اول در یک دنباله مسابی می‌توانیم از ضرب n در جمله وسط استفاده کنیم.

تست ۷: جمله بیستم یک دنباله عددی برابر ۱۰۰ است. مجموع ۳۹ جمله اول را بیابید.

۴۰۰۰ (۴)

۳۲۰۰ (۳)

۳۹۰۰ (۲) ✓

۳۸۰۰ (۱)

$$S_{39} = 39 \times a_{20} = 3900$$

نکته ۹: تعداد جملات بین دو عدد صحیح m و n برابر $m - n + 1$ است.

تست ۸: مجموع اعداد طبیعی فرد بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است؟

۸۸۴ (۴)

۸۶۷ (۳) ✓

۸۵۲ (۲)

۸۱۶ (۱)

۳, ۶, ..., ۹۹

$$S_{17} = \frac{17}{2}(3 + 99) = 867$$

$$n = \frac{99 - 3}{3} + 1 = 17$$

(۳) دنباله هندسی: جملات این دنباله‌ها از ضرب عدد قبلی در یک عدد ثابت به نام قدر نسبت حاصل می‌شوند. پس در حالت کلی ظاهر این

دنباله‌ها بصورت a, aq, aq^2, \dots است. که در آن a جمله اول و q قدر نسبت است.

نکته ۱۰: قدر نسبت در این دنباله ها از رابطه $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ مناسبه می شود. و همچنین جمله ی عمومی این دنباله ها در حالت کلی بشکل $a_n = a_1 q^{n-1}$ است.

مثال ۸: در دنباله $5, \frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \dots$ قدر نسبت و جمله ی ۱۷ام را مشخص کنید.

$$d = \frac{1}{4}, a_1 = 5 \left(\frac{1}{4}\right)^{17} = \frac{5}{2^{68}}$$

نکته ۱۱: اگر a و b و c به ترتیب سه جمله از یک دنباله هندسی باشند، به b واسط هندسی می گوئیم و داریم $b^2 = ac$.

نکته ۱۲: اگر جمله a_n و a_m از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، خواهیم داشت: $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$.

نکته ۱۳: اگر جمله a و b دو عدد مقبلی باشند و بخواهیم بین این دو عدد n عدد دیگر بگنجانیم به طوری که جملا ت ماص ل یک دنباله

هندسی را تشکیل دهند، خواهیم داشت: $q^{n+1} = \frac{b}{a}$.

نکته ۱۴: اگر برای چهار عدد طبیعی داشته باشیم $m+n=p+q$ ، در آن صورت در هر دنباله مسابی خواهیم داشت: $a_m a_n = a_p a_q$.

مثال ۹: بین اعداد ۲ و ۱۲۸ پنج واسط هندسی بگنجانید.

$$2, \pm 4, 8, \pm 16, 32, \pm 64, 128 \leftarrow q = \sqrt[5]{\frac{128}{2}} = \pm 2$$

تست ۹: اعداد $a, 2, a-3$ جملا ت متوالی از دنباله ی هندسی q نزولی اند، جمله ی چهارم چند برابر جمله ی دهم آن است؟

$$\begin{aligned} 128 (4) \quad 64 (3) \quad 48 (2) \quad 32 (1) \\ a(a-3) = 2^2 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &-1, 2, -4, \dots \quad \times \\ &4, 2, 1, \dots \quad \checkmark \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{a q^3}{a q^0} = q^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$

تست ۱۰: در یک تصاعد هندسی $a_2 a_6 = 2 a_4^2$ جمله اول کدام است؟

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} (4) \quad 4 (3) \quad 2 (2) \quad \sqrt{2} (1) \\ a q a q^5 = 2 a q^2^2 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

تست ۱۱: در یک تصاعد هندسی صعودی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} (4) \quad 5 (3) \quad 25 (2) \quad \sqrt{5} (1) \\ q = \sqrt[4]{\frac{40}{10}} = \sqrt{2} \\ a_3 = a q^2 = 10 \Rightarrow a = 5 \end{aligned}$$

تست ۱۲: اعداد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ سه جمله متوالی از تصاعد هندسی اند. واسطه عددی بین a و b کدام است؟

$$\begin{aligned} \sqrt{2} (4) \quad 1/5 (3) \quad 2 (2) \quad 2/5 (1) \\ (2^a \times 2^b) = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2^{a+b} = 32 = 2^5 \end{aligned}$$

$$\text{واسطه عددی} = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2}$$

((مسئولیت نتایج را به عهده بگیرید، بدانید فقط شما هستید که می‌توانید خودتان را به جایی که می‌خواهید برسانید نه هیچکس دیگری))

نکته ۱۵: مجموع n جمله اول در هر دنباله هندسی از رابطه $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ بدست می‌آید.

مثال ۱۰: مجموع ۶ جمله اول از دنباله های $3, -15, +75, \dots$ را بیابید.

$$S_6 = \frac{3(1-(-5)^6)}{1-(-5)} = \frac{1}{6}(1-5^6)$$

$$S_6 = \frac{1(1-(\frac{1}{4})^6)}{1-\frac{1}{4}} = 14(1-\frac{1}{4^6}) = \frac{4^6-1}{4^5}$$

تست ۱۳: در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$$\frac{1}{4} (F)$$

$$\frac{5}{32} (S)$$

$$\frac{1}{8} (R) \checkmark$$

$$\frac{1}{16} (I)$$

$$S_8 = \frac{a(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4} \quad S_4 = \frac{a(1-q^4)}{1-q} = 1 \Rightarrow \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{5}{4} \Rightarrow 1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = q^6 = (\pm \sqrt[4]{\frac{1}{4}})^6 = \frac{1}{4}$$

تست ۱۴: تصاعد هندسی $2, x, \frac{1}{2}, \dots$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

$$\frac{23}{16} (F)$$

$$\frac{11}{8} (S)$$

$$\frac{21}{16} (R) \checkmark$$

$$\frac{41}{32} (I)$$

$$x^2 = 2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} 2, -1, \frac{1}{2} \checkmark \\ 2, 1, \frac{1}{2} \times \end{cases}$$

$$S_6 = \frac{2(1-(-\frac{1}{2})^6)}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}(1-\frac{1}{4^3}) = \frac{21}{16}$$

تست ۱۵: در یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ حاصل $\frac{a_7 a_7}{a_2^2}$ کدام است؟

$$4 (F)$$

$$\frac{1}{4} (S)$$

$$16 (R) \checkmark$$

$$\frac{1}{16} (I)$$

$$\frac{a_9 a_7}{a_2^2} = q^6 = 16$$

نکته ۱۶: اگر در دنباله هندسی $-1 < q < 1$ باشد و بخواهیم مجموع همه جملات دنباله را بیابیم، از رابطه $S = \frac{a}{1-q}$ استفاده می‌کنیم. (صورت دوم)

مثال ۱۱: مجموع کل جملات دنباله هندسی $12, -4, \frac{4}{3}, \dots$ را بیابید.

$$S = \frac{12}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{12}{\frac{4}{3}} = 9$$

$$S = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = 18$$

(۳) انواع دنباله ها

(الف) - دنباله های یکپارچه (صعودی یا نزولی)، دنباله $\{a_n\}$ صعودی است هرگاه $\forall n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m$ و همچنین دنباله $\{a_n\}$ نزولی است

هرگاه $\forall n \leq m \Rightarrow a_n \geq a_m$ ، مثلا دنباله های $\{n\}$ ، $\{n^p + 1\}$ ، $\{\log n\}$ ، $\{p^n\}$ همگی صعودی و دنباله های $\{-n\}$ ، $\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}$ ، $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

نزولی هستند و همچنین دنباله ای $\{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) هم صعودی و هم نزولی است.

(ب) $\forall n \in \mathbb{N}$ ، دنباله هایی مثلثی نظیر $\{(-1)^n\}$ ، $\{\sin n\}$ نه صعودی و نه نزولیند.

(ج) $\forall n \in \mathbb{N}$ ، اگر در دنباله $\{a_n\}$ ، $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ یا $a_{n+1} - a_n > 0$ یا $a'_n \geq 0$ باشد، دنباله صعودی است.

آزمون ۱: دنباله $u_n = -n^p - pn + p$ چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی بعد نزولی (۴) ابتدا نزولی بعد صعودی

$$u'_n = -2n - p$$

$$\frac{n}{u'_n} \mid \frac{-1}{+} \frac{0}{-}$$

چون u_n نزولی است

پس a_n هم نزولی است

(ب) - دنباله های کراندار و بی کران، اگر عدد حقیقی a طوری باشد که در دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم: $\forall n \in \mathbb{N} - a \leq a_n \leq a$ ، در این صورت این دنباله کراندار می باشد و کران بالا و پایین آن به ترتیب a و $-a$ هستند. در غیر این صورت بی کران می باشد. مثلا دنباله های

$\{(-1)^n\}$ ، $\{\sin n\}$ کراندار و دنباله های $\{n^p - 1\}$ و $\left\{\frac{-n+p}{p}\right\}$ بی کران هستند (اولی فقط کران پایین و دومی فقط کران بالا دارد).

نکته: دنباله ای $\{a_n\}$ کراندار است اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ یک عدد حقیقی شود.

آزمون ۲: دنباله $\left\{\frac{n^p}{n^p + 1}\right\}$ چگونه است؟

(۱) فقط از بالا کراندار (۲) فقط از پایین کراندار (۳) نه کراندار از بالا و نه کراندار از پایین (۴) کراندار

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = +\infty$$

آزمون ۳: کدام دنباله زیر کران بالا و پایین ندارد؟

(۱) $\left\{\sin \frac{n\pi}{p}\right\}$ (۲) $\left\{\sin \frac{1}{n}\right\}$ (۳) $\{n^n\}$ (۴) $\{n^p (-1)^n\}$

$$n^p (-1)^n \begin{cases} \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty \end{cases}$$

از بین حال اول ۱، کران بالا و پایین دارد. از بین ۲، کران بالا و پایین دارد. از بین ۳، کران بالا و پایین ندارد.

آزمون ۴: کدام دنباله فقط از پایین کراندار است؟

(۱) $a_n = \cos \frac{\pi}{n+1}$ (۲) $b_n = \log \frac{1}{n+1}$ (۳) $c_n = \left[\frac{(-1)^n}{n+1}\right]$ (۴) $d_n = \frac{n^p}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$$

$$d_n = \frac{n^p}{n+1}$$

$$c_n = \left[\frac{(-1)^n}{n+1}\right]$$

$$b_n = \log \frac{1}{n+1}$$

$$a_n = \cos \frac{\pi}{n+1}$$

$$b_n \rightarrow -\infty$$

نکته: دنباله‌های همگرا انبساطی و همگرا انقباضی $a_n = \frac{au+c}{bu+d}$ که a, b, c, d اعداد حقیقی و $b \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$ باشند، داریم:

فصل دوم (بخش دوم دنباله‌ها)

جزوه کنکور ریاضیات عمومی چهارم تجربی
تست ۲۰: کدام دنباله صعودی و از بالا و پایین کران دار است؟
 $\begin{cases} ad-bc > 0 & \text{صحران} \\ ad-bc < 0 & \text{نشری} \end{cases}$

$$U_n = \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+4} \right\} \quad U_n = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \right\} \quad U_n = \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+1} \right\} \quad U_n = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \quad (1)$$

گزینه اول و ۳ مناسب است. ولذا بگزینه ۲
گزینه ۲ و ۴ هر دو همگرا هستند لذا که انداز هستند. اما بگزینه ۱ و ۳ نداریم.

$$\frac{n^2+2}{n^2+1} \Rightarrow ad-bc = 1-2 < 0 \text{ ندری} \quad \frac{n^2+2}{n^2+4} \Rightarrow ad-bc = 4-2 > 0$$

ج- دنباله‌های همگرا و واگرا: اگر عدد حقیقی a طوری باشد که در دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، در این صورت این دنباله همگرا به عدد L می‌باشد. در غیر این صورت واگرا می‌باشد.

مثلا دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ ، $\left\{ \frac{n+p}{n} \right\}$ به ترتیب به اعداد ۰ و ۱ همگرا هستند ولی دنباله‌های $\{n+p\}$ ، $\{\sin n\}$ ، $\{(-1)^n\}$ واگرا هستند.

نکته ۱۹: دنباله‌های متناوبی نظیر $\{(-1)^n\}$ چون مدام بین دو یا چند ± 1 جا به جا می‌شود واگراست. همچنین در دنباله‌هایی نظیر $\left\{ \frac{n^p+1}{n} \right\}$ چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p+1}{n} = \infty$ لذا واگرا هستند.

نکته ۲۰: هر دنباله همگرا، کراندار است، ولی عکس این موضوع صمیم نمی‌باشد. مثلا دنباله $\left\{ \frac{pn^p-1}{pn^p+pn} \right\}$ چون همگرا به عدد $\frac{p}{p}$ است، لذا کراندار نیز است، اما دنباله $\{(-1)^n\}$ با اینکه کراندار است، ولی همگرا نمی‌باشد.

نکته ۲۱: برای تشفیص همگرایی دنباله‌هایی بشکل $\left\{ \frac{an^p+bn^{p-1}+\dots+k}{a'n^q+b'n^{q-1}+\dots+k'} \right\}$ داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^p+bn^{p-1}+\dots+k}{a'n^q+b'n^{q-1}+\dots+k'} = \begin{cases} \frac{a}{a'} & p < q \\ \frac{a}{a'} & p = q \\ \infty & p > q \end{cases}$

مثال ۱۲: دنباله $\left\{ \frac{1-x^3}{x^3+400} \right\}$ و $\left\{ \frac{pn}{-pn+5} \right\}$ و $\left\{ \frac{p}{pn-1} \right\}$ به چه اعدای همگرا هستند؟
واگرا $\rightarrow -\infty$ $\rightarrow -\frac{p}{p}$ $\rightarrow 0$

نکته ۲۲: داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n = \begin{cases} 0 & |C| < 1 \\ 1 & C = 1 \\ \infty & |C| > 1 \end{cases}$ همچنین اگر $C = -1$ ، دنباله نوسانی واگرا می‌باشد.

تست ۲۱: دنباله $\left\{ \left(\frac{5n-3}{pn+1} \right)^n \right\}$ به چه عددی همگراست؟
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-3}{pn+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{p} \right)^n \rightarrow +\infty$
۵/۳ (۱) -1 (۲) 0 (۳) ∞ (۴) واگرا

نکته ۲۳: داریم: $u \rightarrow 0 \Rightarrow \sin u \sim u$ ، $\tan u \sim u$ ، $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$

$$n \rightarrow \infty \quad \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

تست ۲۲: دنباله $\dots a_n = \left\{ \frac{13n^p}{p-13n} \times \sin \frac{p}{n} \right\}$

(۴) همگرا به $-\frac{13}{p}$

(۳) همگرا به $-\frac{13}{p}$

(۲) همگرا به $\frac{13}{p}$

(۱) واگراست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13n^p}{p-13n} \times \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13n^{p-1}}{p-13n} = -\frac{13}{p}$$

تست ۳۳: کدام گزینه نزولی و همگرا است؟

(۴) $v_n = \cos \frac{\pi}{n}$

(۳) $u_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

(۲) $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(۱) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

نکته: دنباله $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ پس دنباله ای همگرا و (محدود) می باشد.

نکته ۴۱: داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{an^p + bn + c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \left(n + \frac{b}{pa}\right), \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{an^p + bn^p + cn + d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \left(n + \frac{b}{pa}\right)$

مثال ۳۱: اگر دنباله ای $a_n = \sqrt{n^2 + bn - 1} - n + 4$ همگرا به ۶ باشد، b کدام است؟

$$a_n \rightarrow \left(n + \frac{b}{p}\right) - n + 4 = 6 \Rightarrow \frac{b}{p} = 2 \Rightarrow b = 4$$

تست ۲۴: دنباله $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ به کدام عدد همگرا است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{1}{p}$

(۲) -۱

(۱) ۱

$n = t^2$

$$a_n = \sqrt{t^2 + 1} - \sqrt{t^2} \rightarrow (t+0) - t = 0$$

نکته ۲۵: اگر $a > b$ داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n}$

(آزاد تجربی - ۸۲)

تست ۲۵: دنباله ای $a_n = \left\{ \frac{r^{3n+2} + \lambda^{n+1}}{r^{3n+1} + \lambda^n} \right\}$

(۲) همگرا به ۸ است.
(۴) واگرا است.

(۱) همگرا به ۲ است.
(۳) همگرا به ۴ است.

$$a_n = \frac{r^{3n+2} + \lambda^{n+1}}{r^{3n+1} + \lambda^n} = \frac{r + \lambda}{r + 1} = \frac{8+1}{2+1} = 3$$

"راه حل صحیح موفقیت این است که اشتیاق شما به پیروزی بیشتر از ترس شما از شکست باشد"

نکته ۲۶: اگر n عددی طبیعی و $a > 0$ و $b > 0$ و $c > 1$ در حالت کلی داریم: $n^n > n! > c^n > n^b > \log_a n$

تست ۲۶: کدام یک از دنباله های زیر نزولی است؟

(۱) $\left\{ \frac{3^n}{n!} \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{n!}{3^n} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{n^3}{n^2+1} \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{1}{n!} \right\}$

محدود $\rightarrow a-b < 0 \rightarrow a < b$ و در هر دو طرف عدد را کم می کنیم از یک است.

تست ۲۷: کدام دنباله به صفر همگراست؟

(۱) $\left\{ \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \right\}$ (۲) $\left\{ \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1}} \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$

تست ۲۸: کدام دنباله صعودی و از بالا و پایین کران دار است؟

(۱) $U_n = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$ (۲) $U_n = \left\{ \frac{n^2+3}{n^2+1} \right\}$ (۳) $U_n = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \right\}$ (۴) $U_n = \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+4} \right\}$

نکته: $\left(1 + \frac{a}{b(n+c)}\right)^{dn+e} \rightarrow e^{\frac{ad}{b}}$

تست ۲۹: کدام یک از دنباله های زیر همگراست؟

(۱) $a_n = \frac{n^2}{2n+1}$ (۲) $a_n = \frac{(-1)^n}{2}$ (۳) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (۴) $a_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2$

تست ۳۰: دنباله $a_n = \left[3 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]$ از نظر همگرایی چگونه است؟ ([نماد جزء صحیح است.)

(۴) واگرا

(۳) همگرا به ۳

(۲) همگرا به ۲

(۱) همگرا به صفر

$\frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow 0^+ \Rightarrow a_n \rightarrow [3 - 0^+] \rightarrow [3] = 3$
 $\rightarrow [3^+] = 3$

تست ۱۳: - کدام یک از دنباله های زیر همگرا است؟

$$a_n = \frac{2n}{n^2 + 17} \quad (۴)$$

$$a_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^n \quad (۳)$$

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{2} \quad (۲)$$

$$a_n = 2(-1)^n \quad (۱)$$

تست های کنکور

دنباله های عددی

تست ۱:

مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

$$۲۵۵۰ \quad (۴)$$

$$۲۵۲۰ \quad (۳)$$

$$۲۴۵۰ \quad (۲)$$

$$۲۴۲۰ \quad (۱)$$

(سراسری ۸۱)

$$۱۰۲, ۱۰۸, \dots, ۱۹۸$$

$$\frac{۱۹۸ - ۱۰۲}{۶} + ۱ = ۱۷$$

$$S_{17} = \frac{17}{2} [2(102) + 16(6)] = 17 \times 150 = ۲۵۵۰$$

تست ۲:

در یک تصاعد عددی جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ما قبل خود به اندازه $\frac{1}{3}$ کمتر است مجموع ۱۰ جمله اول

(سراسری ۸۶)

آن کدام است؟

$$a_5 = 3$$

$$۳۰ \quad (۴)$$

$$۲۷/۵ \quad (۳)$$

$$۲۵ \quad (۲)$$

$$۲۲/۵ \quad (۱)$$

$$d = -\frac{1}{3} \rightarrow a + 4(-\frac{1}{3}) = 3 \rightarrow a = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2(\frac{13}{3}) + 9(-\frac{1}{3}))$$

$$= 5(8/3) = 27/2$$

تست ۳:

مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱، کدام است؟

(سراسری ۸۵)

$$۸۱۶ \quad (۱)$$

$$۸۵۲ \quad (۲)$$

$$۸۶۷ \quad (۳)$$

$$۸۸۴ \quad (۴)$$

$$a_v^2 = a_p \cdot a_q \rightarrow (a + 4d)^2 = (a + 2d)(a + 6d) \rightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 8ad + 12d^2$$

$$\Rightarrow 4d^2 = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

تست ۴:

- در یک تصاعد عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه جمله متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندمین جمله این تصاعد، صفر است؟

(سراسری ۸۸)

$$9 \quad (۱)$$

$$10 \quad (۲)$$

$$11 \quad (۳)$$

$$12 \quad (۴)$$

$$q = \frac{1-v}{v-3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a_v}{a_p} = \frac{a+4d}{a+2d} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3a+12d = a+2d \Rightarrow a+10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

نکته: با توجه به اینکه a_1, a_2, a_3, \dots و a_k سه جمله متوالی هستند

$$q = \frac{k-n}{n-m}$$

جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام

تست ۱۵:

است؟
(سراسری ۹۷)

$$a_2 = a_1 \cdot q \rightarrow (a+d) = (a+d)(a+11d) \rightarrow a^2 + 11ad + 11d^2 = a^2 + 12ad + 11d^2$$

$$\Rightarrow 11ad = 12ad \Rightarrow 11a = 12d$$

$$q = \frac{a_5}{a_1} = \frac{a+4d}{a} = \frac{a+19d}{a+11d} = \frac{a+19d}{a+d} = \frac{a+19d}{a+d} \cdot \frac{a+d}{a+d} = \frac{a^2 + 20ad + 19d^2}{a^2 + 12ad + 11d^2}$$

مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ است. مجموع جملاتی از این تصاعد که از جمله

تست ۱۶:

بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟
(۸۹/۱۸)

۱۰۴ (۴) ۱۴۸ (۳) ۱۴۰ (۲) ۱۲۲ (۱)

$$S_{30} - S_{25} = \frac{30(29)}{2} - \frac{25(24)}{2} = 15(30) - 12(25) = 150 - 120 = 30$$

در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله ی اول است؟
(۹۱/۵۸)

تست ۱۷:

۲ (۴) ۳ (۳) ۵ (۲) ۷ (۱)

$$S_5 = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5) \Rightarrow \frac{4}{3}S_5 = \frac{1}{3}S_{10} \Rightarrow 4\left(\frac{5}{2}(2a+4d)\right) = 5(2a+9d) \Rightarrow 10a+20d = 10a+22.5d \Rightarrow 20d = 22.5d \Rightarrow 2.5d = 0 \Rightarrow d=0$$

دنباله های هندسی

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a+d}{a} = \frac{a+11a}{a} = 12$$

در یک تصاعد عددی جمله ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله ی اول این تصاعد کدام است؟
(سراسری ۸۹)

۱۳۵ (۴) ۱۲۰ (۳) ۱۰۵ (۲) ۹۰ (۱)

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}\left(\left(\frac{3}{4} - 5\right) + \left(\frac{3}{4}(15) - 5\right)\right) = \frac{15}{2}\left(14 \times \frac{3}{4}\right) = 120$$

دنباله هندسی

در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله ی متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن ها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه

تست ۱۹:

عدد کدام است؟
(سراسری ۹۰)

$$a + aq + aq^2 = 19$$

$$a(aq)(aq^2) = 216 \Rightarrow a^3q^3 = 216 \Rightarrow aq = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$\Rightarrow a + 6 + 36 = 19 \Rightarrow a = -13$$

$$aq^2 = 36 \Rightarrow (-13)q^2 = 36 \Rightarrow q^2 = -\frac{36}{13} \Rightarrow q = \pm \sqrt{-\frac{36}{13}}$$

به ازای یک مقدار x اعداد $x^2 - 2$ ، $x^2 + 4$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟
(سراسری ۹۳)

تست ۲۰:

۱۱۷ (۱) ۱۲۵ (۲) ۱۲۷ (۳) ۱۲۸ (۴)

$$(2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{1(1 - (-\frac{1}{2})^7)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1(1 - \frac{1}{128})}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{127}{128} \cdot \frac{2}{3} = \frac{127}{192}$$

تست ۱۱:

در دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ مجموع چهارده جمله اول، چند برابر مجموع هفت جمله اول آن است؟

(۹۰۵)

۶۵ (۱)

۶۳ (۲)

۱۲۷ (۳)

۱۲۹ (۴)

$$\frac{S_{14}}{S_7} = \frac{a(1-q^{14})}{1-q} \div \frac{a(1-q^7)}{1-q} = 1+q^7 = 1+(2)^7 = 129$$

تست ۱۲:

در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچکترین آن ها است؟

(۹۲۵)

۲+√۳ (۱)

۵+۲√۳ (۲)

۵+۴√۳ (۳)

۷+۴√۳ (۴)

$$2a_2 = \frac{a_1 + a_8}{2} \Rightarrow 4aq = aq + aq^7 \Rightarrow q - 4q^3 + 1 = 0$$

$$q^3 = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \frac{a_8}{a_1} = q^7 = (2 \pm \sqrt{3})^7 = 4 + 3 \pm 4\sqrt{3}$$

تست ۱۳:

به ازای یک مقدار x اعداد $x, 8-x, x$ و $12+x$ به ترتیب سه جمله اول دنباله هندسی نزولی اند. حد مجموع جملات این دنباله، کدام است؟

(۹۳۵)

۱۸ (۱)

۲۱ (۲)

۲۴ (۳)

۲۷ (۴)

$$x^2 = (12+x)(8-x) \Rightarrow x^2 = 96 - 4x - x^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 96 = 0$$

$$\Rightarrow (x+12)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = 8 \end{cases}$$

دنباله های صعودی نزولی و ...

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$$

تست ۱۴:

اگر $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ، آنگاه دنباله با جمله عمومی U_n چگونه است؟

(سراسری ۸۳)

(۴) بی کران - نزولی

(۳) بی کران - صعودی

(۲) کراندار - نزولی

(۱) کراندار - صعودی

$$u_1 = 1 + \frac{1}{2}, u_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \dots \rightarrow u_n \text{ صعودی}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \text{کراندار} \rightarrow \text{صعودی}$$

دنباله $u_n = n(\frac{2}{3})^n$ برای $n \geq 2$ چه نوع دنباله ای است؟

تست ۱۵:

(۱) صعودی - کراندار از بالا و پایین

(۲) نزولی - کراندار از بالا و پایین

(۴) فقط از بالا کراندار

(۳) صعودی - فقط از پایین کراندار

(سراسری ۸۴)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times 2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = 0 \rightarrow \text{کراندار} \rightarrow \text{نزولی}$$

$$(u_1 = \frac{2}{3} \text{ و } u_n \rightarrow 0) \Rightarrow \text{نزولی}$$

تست ۱۶: اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ، a_n عدد طبیعی است (آن گاه دنباله جزء صحیح a_n چگونه است؟)

(سراسری ۸۵) (۱) صعودی - کران دار از بالا (۲) نزولی - کران دار از پایین (۳) فاقد کران بالا و پایین (۴) نه صعودی، نه نزولی - کران دار

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] \xrightarrow{\text{بهره}} [0^+] = 0$$

$$\xrightarrow{\text{نفر}} [0^-] = -1$$

جواب: ۱-، ۲-، ۳-، ۴- (همه را)

تست ۱۷: کدام دنباله ی زیر، از بالا کران دار است ولی از پایین کران دار نیست؟

(سراسری ۸۶) (۱) $U_n = \log \frac{1}{n}$ (۲) $U_n = \sin \frac{\pi}{n}$ (۳) $U_n = \cot \frac{\pi}{n}$ (۴) $U_n = \cos \frac{n\pi}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cot \frac{\pi}{n} = \cot 0^+ = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = \log 0^+ = -\infty$$

پس: چون \cot توابعی است که در 0 دنباله ی آن به 0 میل می کند.

تست ۱۸: کوچک ترین کران بالای دنباله با جمله ی عمومی $U_n = \frac{r n^2 - r n}{r n^2 + 5}$ ، کدام است؟

(سراسری ۸۷) (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{r}{5}$ (۴) $\frac{r}{4}$

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{11}$$

$$a_n \rightarrow \frac{r}{4}$$

$$\left[\frac{r}{4}, +\infty \right)$$

کران عالی

کران پایین

تست ۱۹: دنباله ی، با کدام جمله ی عمومی، هم گرا است؟

(سراسری ۸۹) (۱) $u_n = \left[\frac{(-1)^n}{n} \right]$ (۲) $b_n = \log \frac{1}{n}$

$$v_n = \frac{n^2 - 1}{r n + 1} \quad (3) \quad a_n = \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\sin \frac{\pi}{n} \rightarrow \sin 0^+ = 0$$

$$\log \frac{1}{n} \rightarrow \log 0^+ = -\infty$$

$$\left[\frac{(-1)^n}{n} \right] \rightarrow 0$$

تست ۲۰: کدام یک از دنباله های زیر صعودی و همگرا است؟

(سراسری ۹۱) (۱) $U_n = \left(\frac{r}{2} \right)^n$ (۲) $U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

$$U_n = \frac{n+1}{n} \rightarrow 2$$

$$U_n = \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] \rightarrow 0$$

رشته ی منفرجه ی کوشیده ی اول
نزدیکی $ad - bc = -1 < 0$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1$$

تست ۱۲: کدام دنباله از بالا و از پایین کران دار و نزولی است؟
 $S_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ اگر

(۱) صعودی - بی کران (۲) نزولی - بی کران (۳) صعودی - کران دار (۴) نزولی - کران دار

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{کراندار} \rightarrow \text{مکمل}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2n}\right) \rightarrow \text{نزولی}$$

تست ۱۳: کدام دنباله از بالا و از پایین کران دار و نزولی است؟

(۱) $u_n = \frac{2^n}{n^2}$ (۲) $u_n = (-1)^n$

صاف
↓
نه صعودی
و نه نزولی

(۴) $u_n = \frac{n^2+1}{(n^2+3)}$

درسته
 $\Delta = 1 \times 3 - 1 \times 1 = 2 > 0$
صعودی

(۳) $u_n = \frac{n^2+3}{(n^2+1)}$

درسته
 $\Delta = 1 \times 1 - 3 \times 1 = -2 < 0$
نزولی

تست ۱۴: بزرگ ترین کران پایین دنباله با جمله عمومی $U_n = \frac{3n}{n^3}$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) صفر

$u_n: 3, \frac{9}{8}, \frac{27}{27}, \frac{81}{64} \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow u_n \geq 1$

تست ۱۵: بزرگ ترین کران پایین دنباله با جمله عمومی $U_n = \frac{2n^2+3}{(n^2+1)}$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{2}{5}$

(۲) ۲

(۱) $\frac{1}{5}$

درسته

$\Delta = 2 \times 1 - 3 \times 1 = -1 < 0 \Rightarrow u_n \text{ نزولی}$

$u_1 = \frac{5}{2}, u_n \rightarrow 2 \Rightarrow 2 < u_n \leq \frac{5}{2}$

کران پایین $(-\infty, 2]$

تست ۷۵: اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم. که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد.

(۹۴) (۱)، (۲، ۳)، (۴، ۵، ۶)، (۷، ۸، ۹، ۱۰)، ... مجموع جملات در دسته بیستم، کدام است؟

۴۰۴۰ (۴)

۴۰۳۰ (۳)

۲۰۲۵ (۲)

۴۰۱۰ (۱)

تعداد جملات در هر دسته: ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰
دسته بیستم

$$191 = 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

اندازه جملات در دسته بیستم

$$S = \frac{20}{2} (21 + 191) = 210$$

مجموع جملات دسته ۲۰ام

تست ۷۶: دنباله ای با جمله عمومی $a_n = \frac{1+3^n}{5+3^{n-1}}$ چگونه است؟

(۹۴) (۱) بی کران - صعودی

(۲) کراندار - صعودی

(۴) بی کران - نزولی

(۳) کراندار - نزولی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3 \Rightarrow \text{کراندار و همگرا}$$

با توجه به گزینش ما a_n بی کران نیست. پس برای بررسی همگرایی یا نهمگرایی باید حد آن را محاسبه کنیم.

تست ۷۷: در یک دنباله اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

۶۴ (۴)

۵۶ (۳)

۴۸ (۲)

۳۲ (۱)

(۹۵)

$$a_n: 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130$$

$$a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

تست ۷۸: در یک دنباله هندسی نزولی، مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است.

(۹۵) (۱) قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

مجموع مجذورات

۰/۴ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۲۵ (۲)

۰/۲ (۱)

$$a_n: a, aq, aq^2, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1-q^2} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{a}{1-q} \right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{a^2}{(1-q)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+q} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-q} \Rightarrow 2+2q = 3-3q \Rightarrow q = \frac{1}{5} = 0.2$$

تست ۱۹: اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم، که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته

(۹۵) باشد. (۱)، (۳، ۵)، (۷، ۹، ۱۱)، ... کدام است؟

۱۸۵۰ (۴)

۱۸۰۰ (۳)

۱۷۵۰ (۲)

۱۷۰۰ (۱)

تعداد جملات در هر دسته: ۱، ۲، ۳، ...

$$\Rightarrow a_{434} + a_{448} = 2(434) - 1 + 2(448) - 1 = 1800$$

۲، $a_n = 2n - 1$ جمله n ام

۳، $a_n = 2n - 1$ جمله n ام، $a_{448} = 2(448) - 1 = 895$ ، $a_{434} = 2(434) - 1 = 867$

تست ۳۰: دنباله ای با جمله عمومی $a_n = \frac{7 + 4^{n-1}}{2 + 4^n}$ چگونه است؟

(۹۵) (۱) بی کران - صعودی

(۲) بی کران - نزولی

(۳) کراندار - صعودی

(۴) کراندار - نزولی

کراندار \rightarrow همگرا $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{4}$

با توجه به گزینش ما، دنباله a_n یکنواخت است. پس کافی است جمله اول و دوم دنباله را مقایسه کنیم.

نزولی $\Rightarrow a_1 < a_n$ ($a_1 = \frac{1}{4}$ ، $a_n \rightarrow \frac{1}{4}$)

تست ۳۱: در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله هشتم این دنباله، کدام است؟

۲۵۵ (۴)

۲۴۷ (۳)

۱۵۹ (۲)

۱۲۷ (۱)

(۹۵)

a_n : ۱، ۳، ۷، ۱۵، ۳۱، ۶۳، ۱۲۷، ۲۵۵

تست ۳۲: در یک دنباله هندسی نزولی هر جمله آن، نصف مجموع تمام جملات بعدی است. قدر نسبت آن کدام است؟

(۹۵) (۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{4}$

$a_n = \frac{a_{n+1}}{1-q} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n+1}}{1-q}$

$\Rightarrow aq^n = \frac{aq^{n+1}}{1-q} \Rightarrow 1-q=q \Rightarrow q=\frac{1}{2}$