درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)

اکسترمم های مطلق سراسری
توابع ـ برد توابع (قسمت اول)

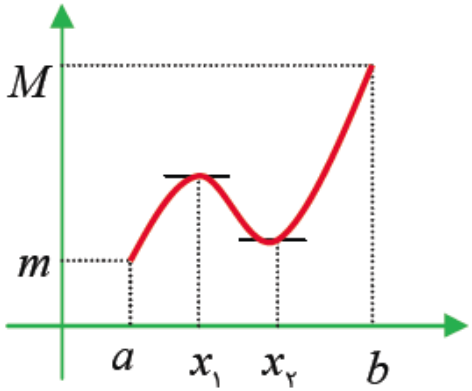
مدرس : استاد ایمان نخستین

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

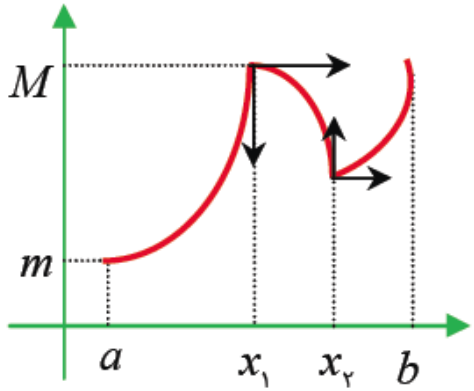
روش نقاط بحرانی (ویژه توابع پیوسته): اگر تابع پیوسته f روی بازه $[a,b]$ مفروض باشد، نقاط بحرانی تابع را روی این بازه معلوم کرده و مقادیر f را در این نقاط محاسبه می‌کنیم:

کمترین مقدار به دست آمده مینیمم مطلق (m) و بیش‌ترین مقدار به دست آمده ماکزیمم مطلق (M) تابع f است و برد این تابع بازه $[m,M]$ می‌باشد.

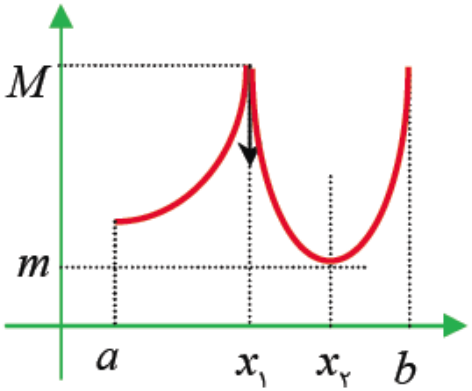
مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ را نیز حساب می‌کنیم و با مقادیر بدست آمده از نقاط بحرانی مقایسه می‌کنیم. کمترین مقدار ممکن مینیمم مطلق (m) و بیشترین مقدار بدست آمده ماکسیمم مطلق (M) خواهد بود.



$R_f = [f(x_2), f(b)]$



$R_f = [f(a), f(x_1)]$



$R_f = [f(x_2), f(x_1)]$

۱) $f(x) = x^{۳} - ۱۲x + ۸ \quad , \quad [-۳,۱]$

پاسخ: ابتدا نقاط بحرانی را معلوم می‌کنیم:

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \xrightarrow{-۳ \le x \le ۱} \boxed{x = -۲}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۳ & -۲ & ۱ \\ \hline f(x) & ۱۷ & ۲۴ & -۳ \end{array} \quad \Rightarrow \quad m = -۳, M = ۲۴ \Rightarrow$$ برد تابع در بازه مزبور $R_f = [-۳,۲۴]$

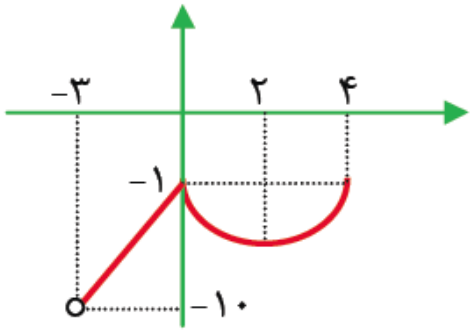
۲) $f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & -۳<x<۰ \\ x^{۲}-۴x-۱ & ۰\le x\le ۴ \end{cases}$

پاسخ: ابتدا دقت کنید که تابع مزبور در $(-۳,۴]$ پیوسته است، پس روش ما مثل قسمت قبل است، فقط به جای $f(-۳)$ داریم $\lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x)$ که عرض می‌کنم منجر به چه اتفاقی می‌شود. پس باز هم به سراغ نقاط بحرانی می‌رویم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۳ & -۳<x<۰ \\ ۲x-۴ & ۰<x<۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{نقاط بحرانی}(-۳,۴]} \begin{cases} f'(x)=۰ \Rightarrow x=۲ \\ f'(x):\text{ندارد وجود} \Rightarrow x=۰, x=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۲ & ۴ \\ \hline f(x) & -۱ & -۵ & -۱ \end{array}$$

اما توجه داشته باشید که $\lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x)=-۱۰$ ، پس در بازه $(-۳,۴]$ $M=-۱$ ولی m (مینیمم مطلق) وجود ندارد. جلب است بدانید بازه برد این تابع به صورت $R_f=(-۱۰,-۱]$ است.

نمودار این تابع در $(-۳,۴]$ به صورت مقابل است، ببینید:



اگر تابع در همسایگی a از بازه $(a,b]$، کمترین یا بیشترین مقدار خود را داشته باشد، به ترتیب فاقد مینیمم مطلق یا ماکزیمم مطلق است و بازه برد تابع از همان سمت، باز خواهد بود. در مورد بازه‌های $[a,b)$ یا (a,b) نیز رویه به همین شکل است.

۳) $f(x)=\dfrac{\sin x-\sqrt{۲}}{\cos x}\ ,\ \left[\dfrac{۲\pi}{۳},\dfrac{۵\pi}{۴}\right]$

پاسخ: تنها فرقی که این مثال با قبلی ها دارد، این است که مثلثاتی است و دقت داشته باشید که $\cos x=۰$ هیچ ریشه ای در بازه مزبور ندارد، یعنی f در این بازه پیوسته است. خُب! معطل چه هستید؟! بفرمایید تا با پیدا کردن نقاط بحرانی کار خودمان را شروع کنیم.

$$f'(x)=\frac{\overbrace{\cos^۲ x+\sin^۲ x}^{۱}-\sqrt{۲}\sin x}{\cos^۲ x}=۰\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\xrightarrow{\frac{۲\pi}{۳}\le x\le\frac{۵\pi}{۴}}x=\frac{۳\pi}{۴}\ \Rightarrow$$

x	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۴}$
$f(x)$	$۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$	۱	۳

$\Rightarrow m=۱, M=۳\Rightarrow$ در بازه مزبور $R_f=[۱,۳]$

۴) $f(x)=\sin^{۲}x-\sin x$

$$f'(x)=۲\sin x\cos x-\cos x=۰\Rightarrow \cos x(۲\sin x-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}\cos x=۰\xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & ۰ & \frac{\pi}{۲} & \frac{۳\pi}{۲} & \frac{\pi}{۶} & \frac{۵\pi}{۶} & ۲\pi \\ \hline f(x) & ۰ & ۰ & ۲ & -\frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۴} & ۰ \end{array}\Rightarrow m=-\frac{۱}{۴},M=۲\Rightarrow R_f=\left[-\frac{۱}{۴},۲\right]$$

۵) $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}\sin x-\cos x}\ ,\ \left[۰,\dfrac{۵\pi}{۶}\right]$

: پاسخ: مخرجش ریشه داره توی این بازه!

بله حق با شماست! مخرج کسر $g(x)=\sqrt{۳}\sin x-\cos x$ در $\left[۰,\dfrac{۵\pi}{۶}\right]$ ریشه دارد و دلیل این ادعا نیز قضیه ریشه است:

$$g(۰)=-۱\ ,\ g\left(\frac{۵\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow g(۰)g\left(\frac{۵\pi}{۶}\right)<۰$$

اما نگران نباشید، **صورت تابع f مقداری ثابت است، پس ما می‌توانیم ابتدا وضعیت تابع پیوسته g را در بازه مزبور مشخص کنیم و بعد با توجه به آن که $f=\dfrac{۱}{g}$ ، تکلیف تابع f را نیز مشخص کنیم**. ببینید:

$$g'(x)=\sqrt{۳}\cos x+\sin x=۰\Rightarrow \sin x=-\sqrt{۳}\cos x\Rightarrow \tan x=-\sqrt{۳}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{۰\le x\le\frac{۵\pi}{۶}}x=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & \frac{۲\pi}{۳} & \frac{۵\pi}{۶} \\ \hline g(x) & -۱ & ۲ & \sqrt{۳} \end{array}\Rightarrow m(g)=-۱, M(g)=۲\Rightarrow -۱\le g(x)\le ۲\xrightarrow{f=\frac{۱}{g}}\frac{۱}{g(x)}\le -۱ \text{ یا } \frac{۱}{g(x)}\ge\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow R=(-\infty,-۱]\cup\left[\frac{۱}{۲},+\infty\right)$$

$$۱)\ f(x)=\frac{(x^{۲}-۲)^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

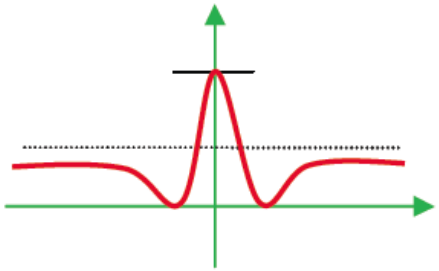
پاسخ: خبری از بازه نیست، پس ما به طور پیش‌فرض تحلیل خودمان را روی R یعنی بازه $(-\infty,+\infty)$ انجام می دهیم. همچنین یادتان باشد که تابع مزبور روی R پیوسته است.

$$f'(x)=\frac{۴x(x^{۲}-۲)(x^{۲}+۱)^{۲}-۴x(x^{۲}+۱)(x^{۲}-۲)^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۴}}=۰\Rightarrow ۴x(x^{۲}-۲)(x^{۲}+۱)(x^{۲}+۱-x^{۲}+۲)=۰$$

$$۱۲x(x^{۲}-۲)(x^{۲}+۱)=۰\Rightarrow x=۰, x=\sqrt{۲}, x=-\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -\sqrt{۲} & ۰ & \sqrt{۲} & +\infty \\ \hline f(x) & ۱ & ۰ & ۴ & ۰ & ۱ \end{array} \Rightarrow m=۰, M=۴\Rightarrow R_f=[۰,۴]$$

شاید دلتان بخواهد بدانید نمودار این تابع به چه شکلی است، بفرمایید:

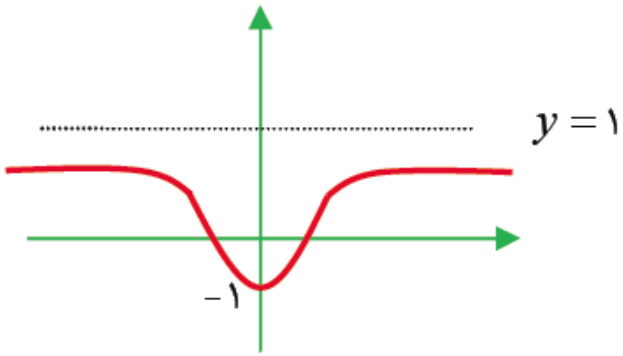


راستی بچه ها حواستان هست که منظور از $f(-\infty)$ و $f(+\infty)$ همان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ است و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۱$.

۲) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۲}{x^{۲}+۲}$

$$f'(x)=\frac{۲x(x^{۲}+۲)-۲x(x^{۲}-۲)}{(x^{۲}+۲)^{۲}}=\frac{۸x}{(x^{۲}+۲)^{۲}}\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۰\Rightarrow$$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
$f(x)$	۱	-۱	۱



خبّ اکنون به این تحلیل دقت کنید. تابع مزبور دارای مینمم مطلقی مساوی (۱-) است. **اما چون وقتی x به بی نهایت میل می‌کند، تابع به بیشترین مقدار خود می رسد، فاقد ماکزیمم مطلق است.** برد این تابع $R_f=[-۱,۱)$ است. نمودار تابع مزبور به صورت مقابل می‌باشد و نگاهی دقیق به آن خیلی راهگشاست.

۳) $f(x)=\dfrac{x^{۳}}{(x-۱)^{۲}}\ ,\ [۲,+\infty)$

تابع در بازه مزبور پیوسته است

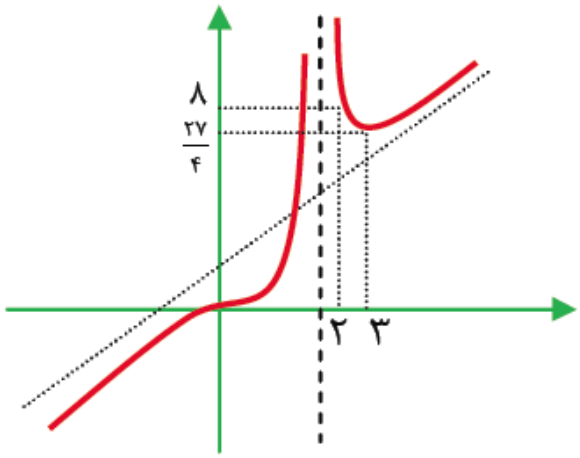
$$f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x-۱)^{۲}-۲(x-۱)x^{۳}}{(x-۱)^{۴}}=\frac{x^{۲}(x-۱)(x-۳)}{(x-۱)^{۴}}\xrightarrow[x\geq ۲]{f'(x)=۰}x=۳\Rightarrow$$

x	۲	۳	$+\infty$
$f(x)$	۸	$\frac{۲۷}{۴}$	$+\infty$

س مینیمم مطلق تابع مساوی $\frac{۱۳}{۲}$ و ماکزیمم مطلق نیز وجود ندارد. برد این تابع در

ازه مزبور مساوی $R_f=\left[\frac{۲۷}{۴},+\infty\right)$ است. نمودار این تابع به صورت مقابل است. به

فتار آن روی $[۲,+\infty)$ خیره شوید!

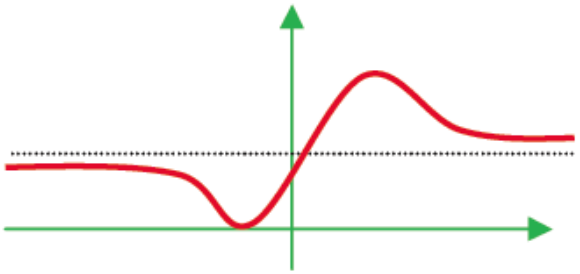


۴) $f(x)=\dfrac{(x+۱)^۲}{x^۲+۱}$

$$f'(x)=\frac{۲(x+۱)(x^۲+۱)-۲x(x+۱)^۲}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲(x+۱)(x^۲+۱-x^۲-x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲(x+۱)(۱-x)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x=۱, x=-۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -۱ & ۱ & +\infty \\ \hline f(x) & ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \end{array} \Rightarrow m=۰, M=۲ \Rightarrow R_f=[۰,۲]$$

اگر دلتان هوای نمودار این تابع را کرده، بفرمایید:



به ازای هر $x \in R$: (a نامنفی)

$$-\frac{a}{۲} \le \frac{ax}{x^۲+۱} \le \frac{a}{۲}$$

حال ببینید:

$$f(x) = \frac{(x^۲+۱)+۲x}{x^۲+۱} = ۱ + \frac{۲x}{x^۲+۱} \xrightarrow{-۱ \le \frac{۲x}{x^۲+۱} \le ۱} ۰ \le ۱ + \frac{۲x}{x^۲+۱} \le ۲$$

چه طور بود؟!

۱) $f(x)=x-\sqrt{۱-x^{۲}}$

پاسخ: بازه ای که باید این تابع را روی آن بررسی کنیم، همان بازه دامنه تابع یعنی $[-۱,۱]$ است که تابع نیز روی آن پیوسته می‌باشد.

ادامه می‌دهیم:

$$f'(x)=۱+\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}+x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\xrightarrow{f'(x)=۰}\sqrt{۱-x^{۲}}=-x\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۱-x^{۲}=x^{۲}\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{x<۰\text{, چرا؟}}x=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۱ & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۱ \\ \hline f(x) & -۱ & -\sqrt{۲} & ۱ \end{array}\Rightarrow m=-\sqrt{۲}, M=۱\Rightarrow R_f=\left[-\sqrt{۲},۱\right]$$

۲) $f(x)=x\sqrt{۲-x^{۲}}$

پاسخ: $D_f=[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ و تابع روی این بازه پیوسته است، پس:

$$f'(x)=\sqrt{۲-x^{۲}}-\frac{x^{۲}}{\sqrt{۲-x^{۲}}}=\frac{۲-۲x^{۲}}{\sqrt{۲-x^{۲}}}\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۱,x=-۱\Rightarrow$$

x	$-\sqrt{۲}$	-۱	۱	$\sqrt{۲}$
$f(x)$	۰	-۱	۱	۰

$$\Rightarrow m=-۱,M=۱\Rightarrow R_f=[-۱,۱]$$

نکته

برد تابع $x\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}$ برابر $\left[-\frac{a^{۲}}{۲},\frac{a^{۲}}{۲}\right]$ است.

ـ به عنوان تمرین اثبات کنید.

$$۳)\ f(x)=x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۵}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}\quad,\quad[-۱,۲]$$

پاسخ: ابتدا ببینیم که آیا تابع مزبور روی بازه اش پیوسته است یا خیر! بد نیست یک تغییر چهره برای تابع ایجاد کنیم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^{۵}}-\frac{۵}{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}=x\sqrt[۳]{x^{۲}}-\frac{۵}{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}=\left(x-\frac{۵}{۲}\right)\sqrt[۳]{x^{۲}}$$

بسیار خوب، این تابع روی R پیوسته است! چرا؟! پس با مشتق‌گیری کار خودمان را شروع می‌کنیم. ولی ترجیحاً از همان قیافه‌ی اولیه تابع مشتق می‌گیریم، ساده‌تر است:

$$f'(x)=\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۵}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۵}{۳}\sqrt[۳]{x^{۲}}-\frac{۵}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۵}{۳}\left(\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}}\right)\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی}[-۱,۲]}\begin{cases}f'(x)=۰ & \Rightarrow x=۱\\ f'(x):\text{وجود ندارد} & \Rightarrow x=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{c|cccc} x & -۱ & ۰ & ۱ & ۲\\ \hline f(x) & -\frac{۷}{۲} & ۰ & -\frac{۳}{۲} & -\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۳}\end{array}\Rightarrow m=-\frac{۷}{۲},M=۰\Rightarrow R_f=\left[-\frac{۷}{۲},۰\right]$$

روش دوم) $f(x)=\sqrt[۳]{\left(x-\frac{۵}{۲}\right)^{۳}x^{۲}}\Rightarrow$ ریشه مشتق : $\dfrac{۳\times۰+۲\times\frac{۵}{۲}}{۳+۲}=۱$

📖 **سؤال:** مقادیر اکسترمم مطلق و برد توابع زیر را روی بازه های مورد نظر تعیین کنید.

۱) $f(x)=x\,|x^{۲}-۳|\quad,\quad(-۲,۳)$

پاسخ : بدیهی است که تابع f تابعی پیوسته است و $x=\sqrt{۳}$ و $x=-\sqrt{۳}$ (ریشه های درون قدرمطلق) نقاطی هستند که تابع در آن‌ها مشتق ندارد. پس فقط اگر نقاطی که مشتق در آن‌ها صفر هست را معلوم کنیم، کلیه نقاط بحرانی مشخص شده و کار تمام است.

برای تعیین نقاط بحرانی از ابتکار شیرین استفاده می‌کنیم. $x=۰$ ریشه ساده تابع است پس جز نقاط بحرانی محسوب نمی‌شود. $x=\pm\sqrt{۳}$ (ریشه های داخل قدرمطلق نقاط بحرانی هستند.)

$$f(x)=x\,|x^{۲}-۳|\xrightarrow{\text{ابتکار شیرین}}f(x)=|x(x^{۲}-۳)|=|x^{۳}-۳x|$$

نقاط بحرانی : $\begin{cases} x^{۳}-۳x=۰\rightarrow x=۰ \\ ۳x^{۲}-۳=۰\rightarrow x=\pm۱ \end{cases}$, $x=\pm\sqrt{۳}$ بحرانی نیست

x	-۲	$-\sqrt{۳}$	-۱	۱	$\sqrt{۳}$	۳
$f(x)$	-۲	۰	-۲	۲	۰	۱۸

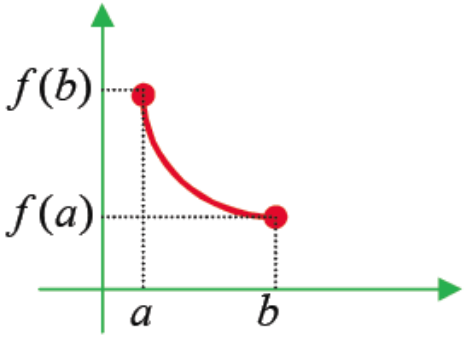
$$m=-۲,M=۱۸\rightarrow R_f=[-۲,۱۸)$$

روش توابع یکنوا (ویژه توابع پیوسته):

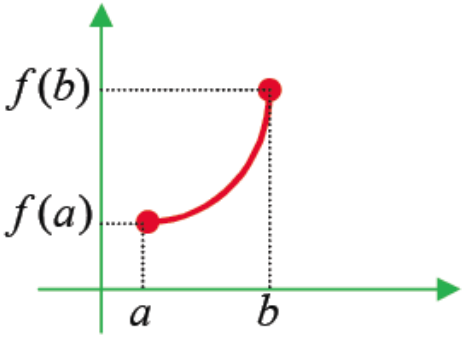
اگر تابع پیوسته f روی $[a,b]$ یکنوا باشد (یعنی مشتق تابع در آن بازه مثبت یا منفی باشد)، داریم:

۱. اگر f در $[a,b]$ صعودی باشد: $m=f(a)$ و $M=f(b)$ و $R_f=[f(a),f(b)]$

۲. اگر f در $[a,b]$ نزولی باشد: $m=f(b)$ و $M=f(a)$ و $R_f=[f(b),f(a)]$



f نزولی



f صعودی

اگر f صعودی و بازه های مورد بررسی به صورت‌های $[a,+\infty)$ یا $(a,+\infty)$ و... باشد، نتایج نیز به ترتیب به صورت $R_f=[f(a),f(+\infty))$ و $R_f=(f(a),f(+\infty))$ و... تغییر می کند.

در مورد توابع نزولی، بازه های فوق برعکس می‌شود!

۲) $f(x)=\sqrt{x+۵}-\sqrt{x+۱}$

پاسخ: دامنه‌ی این تابع بازه $[-۱,+\infty)$ است. چرا؟ از طرفی:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۵}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}=\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x+۵}}{۲\sqrt{x+۵}\times\sqrt{x+۱}}<۰\xrightarrow{f\ \text{نزولی است}}D_f=[-۱,+\infty)$$

$$\Rightarrow R_f=(f(+\infty),f(-۱)]=(۰,۲]$$

این تابع مینمم مطلق ندارد و ماکزیمم مطلق آن مساوی ۲ است.

توجه کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+۵}-\sqrt{x+۱})=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴}{\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}}=۰$$

۳) $f(x)=(\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳})(\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۸})$ (آزاد ـ ۸۰)

پاسخ: دامنه‌ی این تابع بازه $[۱,+\infty)$ است. چرا؟

در ادامه مجبوریم وضعیت یکنوایی f را معلوم کنیم. چه طور است از تابع مشتق بگیریم! یا می‌خواهید تک‌تک رادیکال‌ها را در هم ضرب کنیم و بعد... خُب! مطمئناً شما هم متوجه شدید که این پیشنهادها راه حل مناسبی برای مشخص کردن وضعیت یکنوایی این تابع نیست. ببینید بچه‌ها تابع f از حاصل‌ضرب دو تابع صعودی و همواره مثبت $g(x)=\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳}$ و $h(x)=\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۸}$ است و ما داریم:

$$f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\xrightarrow[h'>۰\ \text{و صعودی است، پس}\ h>۰]{g'>۰\ \text{و صعودی است، پس}\ g>۰} f'(x)>۰$$

بنابراین تابع f تابعی صعودی است و در نتیجه:

$$D_f=[۱,+\infty)\xrightarrow{f\ \text{صعودی است}} R_f=[f(۱),f(+\infty))=[۱۰,+\infty)$$

این تابع ماکزیمم مطلق ندارد و مینمم مطلق آن مساوی ۱۰است.

اما تابع $Arc\sin x$ نیز در دامنه‌اش صعودی است، پس:

$$-۱\le\frac{x-۱}{x+۱}<۱\xrightarrow{Arc\sin x\ \text{صعودی است}} Arc\sin(-۱)\le Arc\sin\frac{x-۱}{x+۱}<Arc\sin(۱)\Rightarrow-\frac{\pi}{۲}\le Arc\sin\frac{x-۱}{x+۱}<\frac{\pi}{۲}$$

پس تابع مزبور مینیمم مطلق دارد، ولی ماکزیمم مطلق ندارد.

سؤال: مینمم مطلق تابع $f(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}$ در فاصله $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $2-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه (۱)

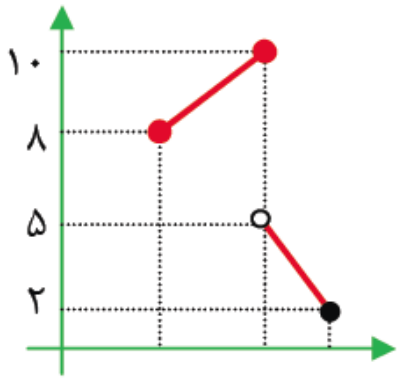
از معاون مجهول $t=\cos x$ استفاده می‌کنیم و با توجه بدایره مثلثاتی وقتی $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$، آن‌گاه $-1\le \cos x<0$ است، پس:

$$f(t)=2t+\frac{1}{t^2},t\in[-1,0)$$

$$f'(t)=2-\frac{2}{t^3}=\frac{2t^3-2}{t^3}\xrightarrow{f'(t)=0}t=1\xrightarrow{-1\le t<0}$$ غیرقابل قبول است

بنابراین با تعیین $f(-1)=-1$ و $\lim\limits_{t\to 0^-}=+\infty$ معلوم می‌شود که $R_f=[-1,+\infty)$ و مینیمم مطلق تابع مساوی -1 است.

اگر f تابعی پیوسته باشد و M و m به ترتیب ماکزیمم و مینمم مطلق آن باشند، آن گاه $R_f=[m,M]$. ولی اگر f ناپیوسته باشد، ممکن است این طور نباشد.



مثلاً در شکل مقابل می‌بینید که در تابع مزبور $m=۲$ و $M=۱۰$ ولی $R_f\neq[۲,۱۰]$ ، بلکه $R_f=[۲,۵)\cup[۸,۱۰]$.

📖 **سؤال:** مقادیر اکسترمم مطلق و برد توابع زیر را تعیین کنید.

$$۱)\ f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{۱-x^{۲}} & -۱\le x<۱ \\ \dfrac{(x+۱)^{۲}}{x^{۲}+۱} & x\ge ۱ \end{cases}$$

پاسخ: واضح است که f در $x=۱$ ناپیوسته است، ولی هر کدام از ضوابط در دامنه خودشان پیوسته هستند. اما مطمئناً من و شما خیلی با نمودار ضوابط این تابع آشنایی نداریم، پس مجبوریم به صورت زیر رفتار کنیم.

$$f_{۱}(x)=x-\sqrt{۱-x^{۲}},[-۱,۱)\xrightarrow{\text{با توجه به قسمت (۱) مثال (۳)}}R_{f_{۱}}=[-\sqrt{۲},۱)$$

$$f_{۲}(x)=\frac{(x+۱)^{۲}}{x^{۲}+۱},[۱,+\infty)\xrightarrow{\text{با توجه به قسمت (۴) مثال (۳)}}R_{f_{۲}}=(۱,۲]$$

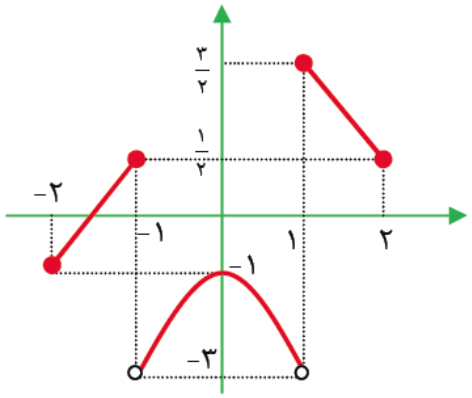
$$\Rightarrow R_{f}=[-\sqrt{۲},۱)\cup(۱,۲]$$

$$\Rightarrow m=-\sqrt{۲},M=۲$$

۲) $f(x)=\begin{cases}-۲+\cos\pi x & |x|<۱\\ ۲-\left|x-\frac{۱}{۲}\right| & ۱\le|x|\le۲\end{cases}$ **(آزاد ـ ۸۶ با کمی تغییر)**

پاسخ: ابتدا تابع را به صورت $f(x)=\begin{cases}-۲+\cos\pi x & -۱<x<۱\\ \begin{cases}\frac{۵}{۲}-x & ۱\le x\le ۲\\ \frac{۳}{۲}+x & -۲\le x\le -۱\end{cases}\end{cases}$ بازنویسی می‌کنیم. واضح است که این تابع در $x=۱$ و $x=-۱$ ناپیوسته است.

☜ **روش اول)** نمودار تابع را ترسیم می‌کنیم، ببینید:



$$\Rightarrow R_f=(-۳,-۱]\cup\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right]$$

این تابع ماکزیمم مطلقی مساوی $\frac{۳}{۲}$ دارد، ولی مینمم مطلق ندارد.

☜ **روش دوم)** بدون شرح!

$$f_۱(x) = -۲ + \cos \pi x, (-۱,۱) \xrightarrow{f'(x)=۰ \Rightarrow x=۰} \begin{array}{c|ccc} x & -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline f(x) & -۳ & -۱ & -۳ \end{array} \Rightarrow R_{f_۱} = (-۳,-۱]$$

$$f_۲(x) = \frac{۵}{۲} - x, [۱,۲] \xrightarrow{f_۲ \text{ نزولی}} R_{f_۲} = [f_۲(۲), f_۲(۱)] = \left[\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}\right]$$

$$f_۳(x) = \frac{۳}{۲} + x, [-۲,-۱] \xrightarrow{f_۳ \text{ صعودی}} R_{f_۳} = [f_۳(-۲), f_۳(-۱)] = \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right]$$

$$\Rightarrow R_f = (-۳,-۱] \cup \left[\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}\right] \cup \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right] = (-۳,-۱] \cup \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}\right]$$

۱) $f(x)=x^{۴}e^{-x^{۴}} \qquad [-۲,۱]$

$$f'(x)=۴x^{۳}e^{-x^{۴}}-۴x^{۳}e^{-x^{۴}}\times x^{۴}=۴x^{۳}e^{-x}(۱-x^{۴})\xrightarrow[-۲<x<۱]{f'(x)=۰}x=۰,x=-۱$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -۲ & -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline f(x) & \frac{۶}{e^{۱۶}} & \frac{۱}{e} & ۰ & \frac{۱}{e} \end{array} \Rightarrow m=۰, M=\frac{۱}{e}\rightarrow R_f=\left[۰,\frac{۱}{e}\right]$$

۲) $f(x)=\dfrac{Lnx}{x}$

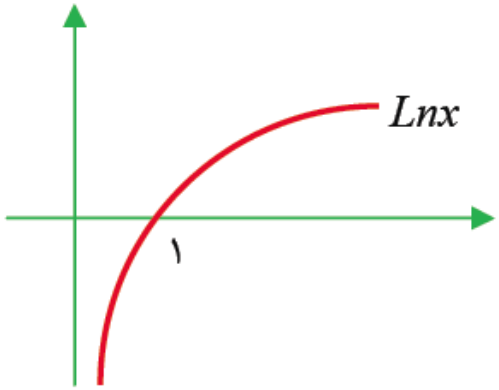
دامنه این تابع بازه $(0,+\infty)$ است. با تعیین نقاط بحرانی دست به کار می‌شویم.

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-Lnx}{x^2}=\frac{1-Lnx}{x^2}\xrightarrow{f'(x)=0}Lnx=1\Rightarrow x=e$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & e & +\infty \\ \hline f(x) & -\infty & \frac{1}{e} & 0 \end{array} \rightarrow R_f=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$$

زیرا در $+\infty$ ریشه مخرج خیلی از صورت بیشتر است :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}=0$$



$$\to \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

📖 **سؤال:** به ازای کدام مقدار b مجموع ماکزیمم و مینیمم مطلق (سراسری) تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۳}-۳x^{۲}+b$ روی بازه $[۲,۶]$ مساوی صفر است؟

$$f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{۲}-۶x=۳x\left(\frac{۱}{۲}x-۲\right)\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۰,\ x=۴\xrightarrow{۲<x<۶}x=۴$$

$$\Rightarrow\begin{array}{c|ccc} x & ۲ & ۴ & ۶ \\ \hline f(x) & b-۸ & b-۱۶ & b \end{array}$$

واضح است که از سه مقدار فوق b از همه بزرگتر و $b-۱۶$ از بقیه کوچکتر است.

$$\begin{cases} m=b-۱۶ \\ M=b \end{cases}\xrightarrow{m+M=۰}(b-۱۶)+b=۰\rightarrow ۲b-۱۶=۰\rightarrow b=۸$$

📖 **سؤال:** اگر $f(x)=x^{۳}-۳x, x\le ۱$ بوده و تابع $g(x)=x^{۴}-۴x+۱$ آنگاه برد gof کدام است؟

دامنه تابع f برابر $(-\infty,۱]$ است برد f را بدست می‌آوریم:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳=۰\xrightarrow{f'(x)=۰}x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm ۱\xrightarrow{x<۱}x=-۱$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -۱ & ۱ \\ \hline f(x) & -\infty & ۲ & -۲ \end{array}\rightarrow R_f=(-\infty,۲]$$

اکنون $(-\infty,۲]$ را به عنوان دامنه g در نظر می‌گیریم برد g در این بازه همان برد تابع gof به ازای $x\le ۱$ خواهد بود.

$$g'(x)=۴x^{۳}-۴\xrightarrow[x<۲]{g'(x)=۰}x^{۳}=۱\rightarrow x=۱$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & ۱ & ۲ \\ \hline g(x) & +\infty & -۲ & ۹ \end{array}\rightarrow R_g=[-۲,+\infty)$$

بازه $[-۲,+\infty)$ همان برد تابع gof به ازای $x\le ۱$ است.

📖 **سؤال:** اگر $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ باشد آنگاه برد gof کدام است؟

برد تابع f ، بازه $[0,1)$ است $(0\le x-\lfloor x\rfloor<1)$ این بازه را دامنه تابع g قرار می‌دهیم.

$$g'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}>0 \xrightarrow{\text{صعودی است } g} D_g=[0,1)\to R_g=[g(0),g(1^-))=[1,+\infty)$$

$$\boxed{g(1^-)=\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{0^+}=+\infty}$$

📖 **سؤال:** بیشترین مقدار $f(x)=\sqrt{\sin x}-\sin x$ کدام است؟

$$f(x)=\sqrt{\sin x}-\sin x \xrightarrow[\circ\le\sqrt{\sin x}\le ۱]{t=\sqrt{\sin x}} g(t)=t-t^{۲}, \circ\le t\le ۱$$

$$g'(t)=۱-۲t=\circ \to t=\frac{۱}{۲}$$

t	$\circ$	$\frac{۱}{۲}$	۱
$g(t)$	$\circ$	$\frac{۱}{۴}$	$\circ$

$$\to \begin{cases} m=\circ \\ M=\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow R_g=R_f=\left[\circ,\frac{۱}{۴}\right]$$

📖 **سؤال:** برد تابع $y=|(x-۱)^۲-۸|$ در بازه $x\in[-۲,۲]$ کدام است؟ (آزاد ۸۰)

$$-۲\le x\le ۲\to -۳\le (x-۱)\le ۱\to ۰\le (x-۱)^۲\le ۹\to -۸\le (x-۱)^۲-۸\le ۱\to ۰\le |(x-۱)^۲-۸|\le ۸$$

📖 سؤال: برد تابع $f(x)=\sqrt{-x^{۲}-۳x-۲}$ با ضابطهٔ کدام است؟ (آزاد ـ ۷۵)

$$-x^{۲}-۳x-۲\geq ۰ \rightarrow x^{۲}+۳x+۲\leq ۰ \rightarrow (x+۱)(x+۲)\leq ۰ \rightarrow -۲\leq x\leq -۱ \rightarrow D_f=[-۲,-۱]$$

$$f'(x)=\frac{-۲x-۳}{۲\sqrt{-x^{۲}-۳x-۲}}=۰ \rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱
$f(x)$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰

$$\rightarrow R_f=\left[۰,\frac{۱}{۲}\right]$$

📖 سؤال: کمترین مقدار $f(x)=\sin^{۴}x+\cos^{۲}x$ کدام است؟ (آزاد ۸۳)

$$f(x)=(\sin^{۲}x)^{۲}+\cos^{۲}x=(۱-\cos^{۲}x)^{۲}+\cos^{۲}x=۱-۲\cos^{۲}x+\cos^{۴}x+\cos^{۲}x=\cos^{۴}x-\cos^{۲}x+۱$$

$$۰\le\cos^{۲}x\le۱\quad,\quad\cos^{۲}x=t\to۰\le t\le۱$$

$$g(t)=t^{۲}-t+۱\to g'(t)=۲t-۱=۰\to t=\frac{۱}{۲}\to\begin{array}{c|ccc} x & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۱ \\ \hline g(t) & ۱ & \frac{۳}{۴} & ۱ \end{array}\to\begin{cases} m=\frac{۳}{۴} \\ M=۱ \end{cases}$$

📖 **سؤال:** بیشترین مقدار عبارت $۳\sin^۲ x - ۲\cos^۲ x + \cos x$ کدام است؟ (آزاد ۸۴)

$$f(x) = ۳(۱-\cos^۲ x) - ۲\cos^۲ x + \cos x = ۳ - ۳\cos^۲ x - ۲\cos^۲ x + \cos x = -۵\cos^۲ x + \cos x + ۳$$

$$-۱ \le \cos x \le ۱ \quad , \quad \cos x = t \to -۱ \le t \le ۱$$

$$g(t) = -۵t^۲ + t + ۳ \to g'(t) = -۱۰t + ۱ = ۰ \to t = \frac{۱}{۱۰} \to \begin{array}{c|ccc} t & -۱ & -\frac{۱}{۱۰} & ۱ \\ \hline g(t) & -۳ & ۳/۰۵ & -۱ \end{array} \to \begin{cases} m = -۳ \\ M = ۳/۰۵ \end{cases}$$

📖 **سؤال:** اگر $f(x)=x-\lfloor x \rfloor$, $g(x)=\frac{1-x}{x}$ برد تابع gof کدام است؟ (سراسری ۸۶)

$R_f=[0,1)$

بازه اخیر را به عنوان دامنه $g(x)$ در نظر می‌گیریم اما عزیزدلم $g(x)$ در $x=0$ تعریف نمی‌شه پس دامنه $g(x)$ را $(0,1)$ در نظر می‌گیریم.

$$D_g=(0,1)\rightarrow g(x)=\frac{1}{x}-1\rightarrow g'(x)=-\frac{1}{x^2}\xrightarrow[g'(x)<0]{x\in(0,1)}$$

پس $g(x)$ نزولی است.

$$\rightarrow R_g=(g(1),g(0^+))=(0,+\infty)$$

$$\boxed{g(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{x}=\frac{1-0}{0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty}$$

📖 **سؤال:** اگر $f(x)=x^{۳}-۳x \;;\; x\le ۱$ بوده و تابع g با ضابطه $g(x)=x^{۳}+x$ باشد بیشترین مقدار gof کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۶)

ابتدا با استفاده از دامنه f یعنی $(-\infty,۱]$، برد آن را بدست می‌آوریم.

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳\xrightarrow{f'(x)=۰}x^{۲}=۱\rightarrow x=\pm ۱\xrightarrow{x<۱}x=-۱$$

x	$-\infty$	-۱	۱
$f(x)$	$-\infty$	۲	-۲

$$\xrightarrow{\text{در بازه مزبور}}R_f=(-\infty,۲]$$

اکنون $(-\infty,۲]$ را به عنوان دامنه g در نظر می‌گیریم.

$$g'(x)=۳x^{۲}+۱>۰\xrightarrow[D_g=(-\infty,۲]]{g(x)\text{ صعودی است}}R_g=(g(-\infty),g(۲)]=(-\infty,۱۰]$$

$$\boxed{g(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}x^{۳}+x=-\infty}$$

📖 **سؤال:** اگر $f(x) = -x + \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = ۲^x$ آنگاه برد تابع gof کدام است؟ (سراسری ۹۰)

$$۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱ \to -۱ < -x + \lfloor x \rfloor \le ۰ \to R_f = (-۱, ۰]$$

بازه‌ی اخیر را دامنه g قرار می‌دهیم اما g همواره صعودی است.

$$D_g = (-۱, ۰] \to R_g(g(-۱), g(۰)] = (۲^{-۱}, ۲^۰] = \left(\frac{۱}{۲}, ۱\right]$$

این بازه همان برد تابع gof است.

📖 **سؤال:** ماکزیمم مقدار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^{۲}+x+۱}$ در بازه $[-۲,۲)$ کدام است؟

مخرج فاقد ریشه است ($\Delta_{\text{مخرج}}<۰$, $a>۰$) پس f مجانب قائم ندارد.

$$f'(x)=\frac{(x^{۲}+x+۱)-(۲x+۱)x}{(x^{۲}+x+۱)^{۲}}=\frac{۱-x^{۲}}{(x^{۲}+x+۱)^{۲}}\xrightarrow[-۲<x<۲]{f'(x)=۰}۱-x^{۲}=۰\rightarrow x^{۲}=۱\rightarrow x=\pm ۱$$

x	-۲	-۱	۱	۲
$f(x)$	$-\frac{۲}{۳}$	-۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۷}$

$$\rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ M=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

یادت باشه که اگه $\frac{۲}{۷}$ بیشترین عرض بدست اومده بود. تابع ماکزیمم نداشت.

📖 **سؤال:** ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{۱}{x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵}$ کدام است؟ (سراسری ۸۵)

$$f(x)=\frac{۱}{(x^{۲}-۲x)^{۲}+۵}\rightarrow (x^{۲}-۲x)^{۲}\geq ۰\rightarrow (x^{۲}-۲x)^{۲}+۵\geq ۵\rightarrow \frac{۱}{(x^{۲}-۲x)^{۲}+۵}\leq \frac{۱}{۵}$$

📖 **سؤال:** مینمم سراسری تابع $y = x^{۲}e^{-x}$ کدام است؟

$$f(x) = x^{۲}e^{-x} \xrightarrow[e^{-x}>۰]{x^{۲}\geq ۰} f(x) \geq ۰$$

از طرفی $f(۰) = ۰$ پس $\forall x \in R \rightarrow f(x) \geq f(۰) = ۰$

لذا مینمم مطلق یا سراسری تابع f برابر صفر می‌باشد که به ازای $x = ۰$ حاصل می شود.

روش دوم) $y' = ۲xe^{-x} - x^{۲}e^{-x} = xe^{-x}(۲ - x) = ۰ \rightarrow x = ۰,۲$

$-\infty$	۰	۲	$x \rightarrow +\infty$
$+\infty$	۰	$۴e^{-۲}$	۰

$\rightarrow [۰,+\infty)$

📖 **سؤال:** ماکزیمم سراسری تابع $f(x)=x-\sqrt{x^{۲}-۴x}$ کدام است؟

$$D_f: x^{۲}-۴x\geq ۰ \rightarrow x(x-۴)\geq ۰ \rightarrow x\geq ۴ \bigcup x\leq ۰$$

حالا بریم سراغ نقاط بحرانی:

$$f'(x)=۱-\frac{۲x-۴}{۲\sqrt{x^{۲}-۴x}}=۱-\frac{x-۲}{\sqrt{x^{۲}-۴x}}=\frac{\sqrt{x^{۲}-۴x}-(x-۲)}{\sqrt{x^{۲}-۴x}}\xrightarrow{f'(x)=۰}$$

$$\sqrt{x^{۲}-۴x}=x-۲\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x^{۲}-۴x=x^{۲}-۴x+۴\rightarrow ۰=۴$$

از نقطه بحرانی خبری نیست.

x	$-\infty$	۰	۴	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	۰	۴	۲

$$\rightarrow R_f=(-\infty,۴]\rightarrow\begin{cases} m=\text{وجود ندارد} \\ M=۴\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^{۲}-۴x}=\lim_{x\to-\infty} x-|x-۲|=\lim_{x\to-\infty} x-(-x+۲)=۲x-۲=-\infty\\ &\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^{۲}-۴x}=\lim_{x\to+\infty} x-|x-۲|=\lim_{x\to+\infty} x-(x+۲)=۲\end{aligned}}$$

📖 **سؤال:** برد تابع $f(x)=x+\sqrt{۴-x^{۲}}$ کدام است؟

$$D_f: ۴-x^{۲}\geq ۰ \rightarrow x^{۲}\leq ۴ \rightarrow -۲\leq x\leq ۲$$

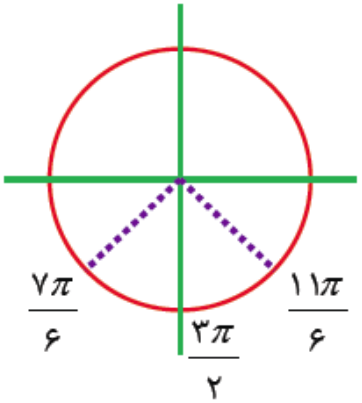
حالا بریم سراغ نقاط بحرانی:

$$f'(x)=۱-\frac{۲x}{۲\sqrt{۴-x^{۲}}}=۱-\frac{x}{\sqrt{۴-x^{۲}}}=\frac{\sqrt{۴-x^{۲}}-x}{\sqrt{۴-x^{۲}}}\xrightarrow{f'(x)=۰}\sqrt{۴-x^{۲}}=x$$

$$\xrightarrow[x\geq ۰]{\text{طرفین به توان ۲}} x=\sqrt{۲}\rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۲ & \sqrt{۲} & ۲ \\ \hline f(x) & -۲ & ۲\sqrt{۲} & ۲ \end{array} \rightarrow R_f=[-۲,۲\sqrt{۲}]\rightarrow \begin{cases} m=-۲ \\ M=۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

📖 **سؤال:** برد تابع $f(x)=\cot x-\dfrac{۱+\cos x}{\sin x}$ در بازه $\left[\dfrac{۷\pi}{۶},\dfrac{۱۱\pi}{۶}\right]$ کدام است؟

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{۱+\cos x}{\sin x}=\frac{\cos x-۱-\cos x}{\sin x}=\frac{-۱}{\sin x}$$



$$\begin{cases}\sin\dfrac{۷\pi}{۶}=-\dfrac{۱}{۲}\\[2mm] \sin\dfrac{۳\pi}{۲}=-۱\\[2mm] \sin\dfrac{۱۱\pi}{۶}=-\dfrac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow{x\in\left[\frac{۷\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}\right]}-۱\le\sin x\le-\frac{۱}{۲}$$

$$-۱\le\sin x\le-\frac{۱}{۲}\Rightarrow-۲\le\frac{۱}{\sin x}\le-۱\to۱\le-\frac{۱}{\sin x}\le۲\to R_f=[۱,۲]$$

📖 **سؤال:** برد تابع $f(x)=\dfrac{۱}{\cos ۲x+۲\sin x}$ در بازه $\left[\dfrac{\pi}{۲},\dfrac{۳\pi}{۲}\right]$ کدام است؟

مخرج در بازه $\left[\dfrac{\pi}{۲},\dfrac{۳\pi}{۲}\right]$ ریشه دارد:

$$g(x)=\cos ۲x+۲\sin x\rightarrow\begin{cases}g\left(\dfrac{\pi}{۲}\right)=-۱+۲=۱\\ g\left(\dfrac{۳\pi}{۲}\right)=-۱-۲=-۳\end{cases}\Rightarrow g\left(\dfrac{\pi}{۲}\right).g\left(\dfrac{۳\pi}{۲}\right)<۰$$

اما چون صورت کسر ثابت است می‌توانیم حدود تابع پیوسته $g(x)$ را در بازه $\left[\dfrac{\pi}{۲},\dfrac{۳\pi}{۲}\right]$ بدست آوریم و سپس با معکوس کردن آن به مقادیر ماکزیمم و مینمم تابع g برسیم.

$$g(x)=\cos ۲x+۲\sin x,\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۲}\rightarrow g(x)=۱-۲\sin^۲ x+۲\sin x=-۲\sin^۲ x+۲\sin x+۱$$

$$\xrightarrow{\sin x=t,-۱\le t\le ۱}h(t)=-۲t^۲+۲t+۱\rightarrow h'(t)=-۴t+۲=۰\rightarrow t=\frac{۱}{۲}\rightarrow$$

t	-۱	$\frac{۱}{۲}$	۱
$h(t)$	-۳	$\frac{۳}{۲}$	۱

پس $-۳\le g(x)\le\dfrac{۳}{۲}$ و در نتیجه حدود $f(x)=\dfrac{۱}{g(x)}$ برابر می‌شود با :

$$f(x)\ge\frac{۲}{۳}\text{ یا }f(x)\le-\frac{۱}{۳}\rightarrow R_f=\left(-\infty,-\frac{۱}{۳}\right]\cup\left[\frac{۲}{۳},+\infty\right)$$

📖 **سؤال:** مجموع ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=(\sin x+۱)(\sin x-۲)+a$ در بازه $\left[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right]$ مساوی $\frac{۳}{۴}$ است. a کدام است؟

$$f(x)=(\sin x+۱)(\sin x-۲)+a=\sin^{۲}x-\sin x-۲+a$$

حالا $sinx$ را t در نظر می‌گیریم و $-۱\le t\le ۱$:

$$g(t)=t^{۲}-t-۲+a \quad , \quad -۱\le t\le ۱ \Rightarrow g'(t)=۲t-۱=۰ \to t=\frac{۱}{۲}$$

t	-۱	$\frac{۱}{۲}$	۱
$g(t)$	a	$-\frac{۹}{۴}+a$	$-۲+a$

$$\to m+M=\frac{۳}{۴}\to -\frac{۹}{۴}+a+a=\frac{۳}{۴}\to ۲a=\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۴}\to ۲a=\frac{۱۲}{۴}=۳\to a=\frac{۳}{۲}$$

📖 **سؤال:** مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}+Lnx$ در بازه $(۱,+\infty)$ کدام است؟

$$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}+Lnx \rightarrow f'(x)=-\frac{۲}{x^{۳}}+\frac{۱}{x}=\frac{-۲+x^{۲}}{x^{۳}} \xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}=۲ \rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \xrightarrow{x>۱} x=\sqrt{۲}$$

x	۱	$\sqrt{۲}$	$+\infty$
$f(x)$	۱	$\frac{۱}{۲}+Ln\sqrt{۲}$	$+\infty$

$$\rightarrow m=\frac{۱}{۲}+Ln\sqrt{۲}$$

خوب حالا باید ۱ رو با $\frac{۱}{۲}+Ln\sqrt{۲}$ مقایسه کنیم:

$$\frac{۱}{۲}+Ln\sqrt{۲}=\frac{۱}{۲}+Ln۲^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}Ln۲=\frac{۱}{۲}(۱+Ln۲)$$

$$۲<e \rightarrow Ln۲<Lne=۱ \rightarrow \frac{۱}{۲}(۱+Ln۲)<\frac{۱}{۲}(۱+۱)=۱ \rightarrow \frac{۱}{۲}(۱+Ln\sqrt{۲})<۱$$

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{۱}{x^{۲}}+Lnx=۰+(+\infty)=+\infty$$

📖 **سؤال:** ماکزیمم و مینمم مطلق تابع $f(x)=x^{۲}Lnx$ را در بازه $\left[\frac{۱}{e},e\right]$ بدست آورید؟

$$f(x)=x^{۲}Lnx \rightarrow f'(x)=۲xLnx+x^{۲}.\frac{۱}{x}=۲xLnx+x=x(۲Lnx+۱)\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۰,\ Lnx=-\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{e}<x<e} x=e^{-\frac{۱}{۲}} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & \frac{۱}{e} & e^{-\frac{۱}{۲}} & e \\ \hline f(x) & -\frac{۱}{e^{۲}} & -\frac{۱}{۲e} & e^{۲} \end{array} \rightarrow \begin{cases} m=-\frac{۱}{۲e} \\ M=e^{۲} \end{cases}$$

📖 **سؤال:** بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)=x^{۳}e^{-x}$ را به دست آورید.

$$D_f = R$$

$$f'(x)=۳x^{۲}e^{-x}-e^{-x}.x^{۳}=x^{۲}e^{-x}(۳-x)\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۰,۳$$

$$\rightarrow\begin{array}{c|cccc} x & -\infty & ۰ & ۳ & +\infty \\ \hline f(x) & -\infty & ۰ & ۳^{۳}\times e^{-۳} & ۰ \end{array}\rightarrow\begin{cases} m=\text{وجود ندارد} \\ M=۳^{۳}\times e^{-۳}=\left(\dfrac{۳}{e}\right)^{۳} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^{۳}e^{-x}=(-\infty)e^{+\infty}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{۳}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۳}}{e^{x}}\ \underset{\text{بیشتر از صورت است}}{\overset{\text{رشد مخرج}}{=\!=\!=\!=}}\ ۰$$

📖 **سؤال:** مجموع ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\cos^{۲}x+|\sin x|$ کدام است؟

$$f(x)=\cos^{۲}x+|\sin x|=۱-\sin^{۲}x+|\sin x|=۱-|\sin x|^{۲}+|\sin x|\rightarrow f(x)=-|\sin x|^{۲}+|\sin x|+۱$$

$$\xrightarrow[\circ\le t\le ۱]{|\sin x|=t} g(t)=-t^{۲}+t+۱\rightarrow g'(t)=-۲t+۱=\circ\rightarrow t=\frac{۱}{۲}$$

x	$\circ$	$\frac{۱}{۲}$	۱
$g(x)$	۱	$\frac{۵}{۴}$	۱

$$\rightarrow\begin{cases} m=۱ \\ M=\frac{۵}{۴}\end{cases}\rightarrow\quad m+M=\frac{۵}{۴}+۱=\frac{۹}{۴}$$

📖 **سؤال:** اگر $f(x)=x+\lfloor -x \rfloor$ و $g(x)=۲^{-x}$ آنگاه برد تابع $gof(x)$ کدام است؟

$$\begin{cases} x\in Z \to f(x)=x-x=۰ & (۱) \\ x\notin Z \to f(x)=\underbrace{x-\lfloor x\rfloor}_{۰<O<۱}-۱ \to -۱<f(x)<۰ & (۲) \end{cases} \qquad \to (۱)\cup(۲) \to -۱<f(x)\le ۰$$

برد تابع f را دامنه تابع g در نظر می‌گیریم اما $g(x)=۲^{-x}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ تابعی نزولی است:

$$D_g=(-۱,۰] \xrightarrow{\text{نزولی } g} R_g=[g(۰),g(-۱))=[۲^۰,۲^۱)=[۱,۲)$$

📖 **سؤال:** اگر $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲}$ و $g(x)=۲^{x-۲}$ ، آنگاه برد تابع gof کدام است؟

$$۴x-x^۲\geq ۰ \rightarrow x(۴-x)\geq ۰ \rightarrow x(x-۴)\leq ۰ \rightarrow ۰\leq x\leq ۴ \rightarrow D_f=[۰,۴]$$

$$f'(x)=\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}}=\frac{۲-x}{\sqrt{۴x-x^۲}}\xrightarrow{f'(x)=۰} x=۲ \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۲ & ۴ \\ \hline f(x) & ۰ & ۲ & ۰ \end{array} \rightarrow R_f=[۰,۲]$$

این بازه را دامنه g قرار می‌دهیم اما $g(x)=۲^{-۲}\times ۲^x=\frac{۱}{۴}\times ۲^x$ صعودی است بنابراین:

$$D_g=[۰,۲]\xrightarrow{g\ \text{صعودی}} R_g=[g(۰),g(۲)]=\left[\frac{۱}{۴},۱\right]$$

پایان

موفق باشید