درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)

اکسترمم های مطلق سراسری
توابع ــ برد توابع (قسمت دوم)

مدرس : استاد ایمان نخستین

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

روش نوشتن x برحسب y: در این روش در ضابطه‌ی تابع، مقدار x را برحسب y به دست می‌آوریم، بعد شرط وجود جواب برای x را لحاظ می‌کنیم و در نتیجه محدوده‌ی قابل قبول برای y که همان برد تابع است، به دست می آید.

توجه۱: روش نوشتن x برحسب y در توابع پیوسته هم در توابع ناپیوسته (دارای مجانب قائم) کارایی دارد.

توجه۲: وقتی عامل x درون یک تابع، یکسان و دارای ماهیت مشخصی است مثلاً (در توابع $\sin x$ و $|x|$ ماهیت مشخص دارند)، بهتر است از روش نوشتن x برحسب y به جای نقاط بحرانی استفاده کنیم.

📖 **سؤال:** برد توابع زیر را به دست آورید.

$$۱)\ y=\frac{x}{x^{۲}-۵x+۴}\Rightarrow yx^{۲}-۵xy+۴y=x\Rightarrow yx^{۲}-(۵y+۱)x+۴y=۰$$

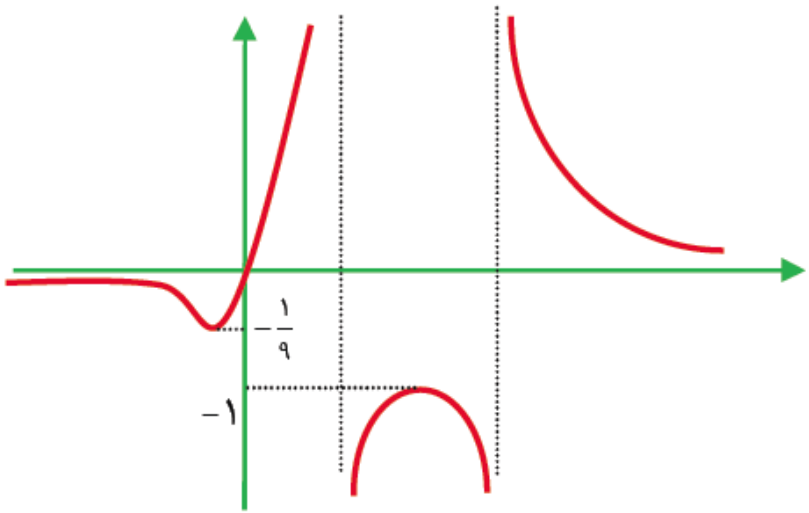
شرط وجود جواب برای x آن است که در معادله درجه دوم فوق که برحسب x است، $\Delta\geq ۰$ باشد. پس:

$$\Delta=(۵y+۱)^{۲}-۱۶y^{۲}=۹y^{۲}+۱۰y+۱\xrightarrow{\Delta\geq ۰}y\leq -۱ \text{ یا } y\geq -\frac{۱}{۹}$$

در این روش، هرگاه از شرط $\Delta\geq ۰$ استفاده کردید، بررسی کنید که آیا مجانب افقی (در صورت وجود) جزو برد تابع هست یا خیر!

در این تابع مجانب افقی $y=0$ است که به ازای $x=0$ نیز حاصل می‌شود. در واقع نمودار تابع مجانب افقی اش را قطع می‌کند و در نتیجه $y=0$ جزو برد تابع است و خلاصه $R_f=(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{9},+\infty\right)$.

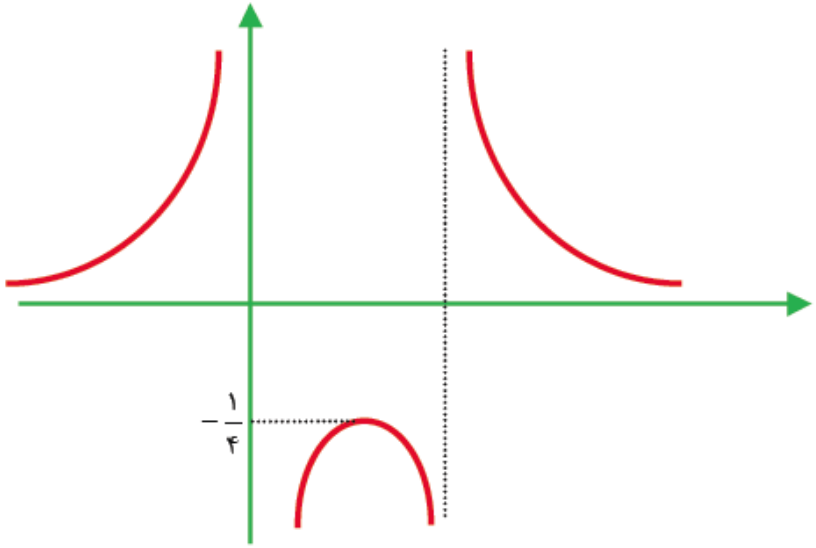
بد نیست به نمودار این تابع نیز نگاهی بیندازید.



۲) $y=\frac{۴}{x^{۲}-۸x} \Rightarrow yx^{۲}-۸yx-۴=۰ \Rightarrow \Delta=۶۴y^{۲}+۱۶y=۱۶y(۴y+۱) \xrightarrow{\Delta\geq ۰} y\leq -\frac{۱}{۴}$ یا $y\geq ۰$

اما نمودار تابع مجانب افقی خود ($y=۰$) را قطع نمی‌کند، زیرا معادله‌ی تلاقی آن‌ها یعنی $\frac{۴}{x^{۲}-۸x}=۰$ فاقد ریشه است. بنابراین:

$R_f=\left(-\infty,-\frac{۱}{۴}\right]\cup(۰,+\infty)$. نمودار این تابع به صورت مقابل است.



🔔 **توجه۳**: در توابع کسری دارای مجانب قائم، روش نوشتن x برحسب y که منجر به بررسی Δ می‌شود، توصیه می‌گردد این روش معمولاً از روش نقاط بحرانی کوتاه‌تر و سریع‌تر است.

سؤال: مقدار m برای آن که حاصل ضرب مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y=\dfrac{mx^{۲}+x+۳}{x^{۲}+x+۱}$ مساوی $\dfrac{۲۳}{۳}$ باشد، کدام است؟

۱) $m=-۱$ ۲) $m=۱$ ۳) $m=۲$ ۴) $m=-۲$

پاسخ: گزینه (۳)

ابتدا x را برحسب y می‌نویسیم:

$$yx^{۲}+yx+y=mx^{۲}+x+۳\Rightarrow(y-m)x^{۲}+(y-۱)x+(y-۳)=۰$$

اکنون اگر $\Delta=۰$ باشد، عرض اکسترمم‌های مطلق تابع به دست می‌آید (و اگر $\Delta\geq ۰$، برد تابع به دست می‌آید.)

$$\Delta=(y-۱)^{۲}-۴(y-m)(y-۳)\xrightarrow{\Delta=۰}-۳y^{۲}+(۱۰+۴m)y+(۱-۱۲m)=۰$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه ها}=\frac{c}{a}=\frac{۱-۱۲m}{-۳}=\frac{۲۳}{۳}\Rightarrow ۱۲m-۱=۲۳\Rightarrow m=۲$$

جالب است اگر بدانید:

در توابع $\frac{\text{درجه دوم}}{\text{درجه دوم}}$ ، حاصل ضرب عرض‌های ماکزیمم و مینیمم تابع مساوی $\frac{\Delta_{\text{صورت}}}{\Delta_{\text{مخرج}}}$ است.

یعنی:

$$y=\frac{mx^{۲}+x+۳}{x^{۲}+x+۱} \Rightarrow \text{حاصل ضرب عرض اکسترمم ها} = \frac{۱-۱۲m}{-۳}=\frac{۲۳}{۳} \Rightarrow m=۲$$

: پس آقا تکلیفمون روشن شد! هر وقت بعد از نوشتن x برحسب y ، $\Delta = 0$ رو حل کنیم، عرض های اکسترمم های مطلق به دست می‌آید و هر وقت $\Delta \geq 0$ رو حل کنیم، برد به دست میاد! نه؟!

بخش $\Delta \geq 0$ و برد را درست گفتید. ولی اگر تابع مجانب قائم داشته باشد، $\Delta = 0$ ، عرض اکسترمم‌های نسبی را می‌دهد و ممکن است این اکسترمم‌های نسبی، مطلق نباشند. به قسمت (۱) مثال (۲) نگاه کنید. واضح است که به ازای $\Delta = 0$ به $y = -1$ و $y = -\frac{1}{9}$ می‌رسیم که این‌ها عرض اکسترمم نسبی تابع هستند و تابع اصلاً اکسترمم مطلق ندارد.

توجه۴: گاهی روابطی بین عرض‌های اکسترمم‌های مطلق یک تابع مورد نظر است. در این حالت نیز حتی اگر تابع پیوسته باشد، روش نوشتن x برحسب y و بررسی $\Delta = 0$ بیش‌تر از روش نقاط بحرانی توصیه می‌گردد.

سؤال: بیشترین مقدار تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-x+۱}{x^{۲}+x+۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: *گزینه (۳)*

این تابع پیوسته است، پس می توانیم از روش نقاط بحرانی برد و اکستمم های مطلق آنرا تعیین کنیم. ولی دقت کنید که مشتق‌گیری از این تابع ساده به نظر نمی‌رسد. بنابراین توصیه می‌کنم از روش نوشتن x برحسب y و... استفاده کنیم.

$$(y-۱)x^{۲}+(y+۱)x+(y-۱)=۰ \Rightarrow \Delta=(y+۱)^{۲}-۴(y-۱)^{۲} \xrightarrow{\Delta\geq ۰} (۳y-۱)(-y+۳)\geq ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۳}\leq y\leq ۳$$

همچنین نمودار تابع مجانب افقی خود را قطع می کند، زیرا معادله تلاقی آن شامل ریشه $x=۰$ است:

$$\frac{x^{۲}-x+۱}{x^{۲}+x+۱}=۱ \Rightarrow x^{۲}-x+۱=x^{۲}+x+۱ \Rightarrow -۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

پس $y=۱$ نیز جزو برد تابع هست و $R_f=\left[\frac{۱}{۳},۳\right]$.

🔔 **توجه۵**: هرگاه در یک تابع، برای x ها محدودیتی غیر از دامنه واقعی تابع وجود داشته باشد، آن گاه روش $\Delta \geq 0$ را فراموش کرده و فقط و فقط از روش نقاط بحرانی استفاده می کنیم.

مطالبی در حاشیه برد توابع:

۱ـ در توابع درجه دوم $y = ax^{۲} + bx + c$:

اگر $a > ۰ \Rightarrow R_f = \left[-\frac{\Delta}{۴a}, +\infty\right)$

اگر $a < ۰ \Rightarrow R_f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{۴a}\right]$

۲ـ در توابع درجه سوم و به طور کلی توابع چند جمله ای با درجه فرد: $R_f = R$ است.

۳ـ در توابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$: $R_f = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ یعنی فقط عرض مجانب افقی خود را شامل نمی‌شود.

📖 **سؤال:** برد توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y=\left|\dfrac{x+۲}{x-۳}\right|$

برد تابع $y=\dfrac{x+۲}{x-۳}$ مساوی $R-\{۱\}$ و در نتیجه برای تعیین برد تابع $y=\left|\dfrac{x+۲}{x-۳}\right|$، کافی است در $R-\{۱\}$ مقادیر منفی را حذف کنیم، یعنی $R_f=[۰,۱)\cup(۱,+\infty)$ یا $R_f=[۰,+\infty)$.

برد تابع $y=\left|\dfrac{ax+b}{cx+d}\right|$ **همیشه برابر** $[۰,+\infty)$ **است** $(a\neq ۰)$

۲) $y=\dfrac{x+۲}{|x|-۲}$

$|x|$ را تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x+۲}{x-۲} & x\geq ۰\\ \dfrac{x+۲}{-x-۲} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x+۲}{x-۲} & x\geq ۰\\ -۱ & x<۰, x\neq -۲\end{cases}$$

بنابراین در ضابطه دوم برد مقدار ثابت ۱- است، یعنی $R_۲=\{-۱\}$. حال به ضابطه اولی می‌پردازیم:

$$\frac{x+۲}{x-۲}\ ,\ x\geq ۰\Rightarrow yx-۲y=x+۲\Rightarrow x=\frac{۲y+۲}{y-۱}\xrightarrow{x\geq ۰}\frac{۲y+۲}{y-۱}\geq ۰\Rightarrow R_۱=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$$

و در نتیجه: $R_f=R_۱\cup R_۲=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$.

سؤال: مینمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x-\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ بر روی R کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) -1 ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: *گزینه (۲)*

به نظر شما نامساوی $\sqrt[3]{x^3}\geq\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ برقرار نیست؟ پس $x\geq\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ و در نتیجه $x-\sqrt{x^3-3x^2}\geq 0$ و خلاصه آن که $f(x)\geq 0$. خُب معلوم شد که مینمم مطلق تابع f مقدار صفر است.

📖 **سؤال:** کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}=\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\xrightarrow{\sqrt[3]{x^3}\geq\sqrt[3]{x^3-x^2}}f(x)\geq 0$$

پس کمترین مقدار $f(x)$ برابر صفر است.

📖 **سؤال:** ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ کدام است؟ (خارج از کشور ۸۸)

$$\sqrt[3]{x^3} \geq \sqrt[3]{x^3 - x^2} \Rightarrow 0 \geq -\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \Rightarrow -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq 0$$

سؤال: ماکزیمم تابع $f(x)=\dfrac{-|x|\cos x}{x^{۲}-x+۱}$ در بازه $[-۱,۱]$ کدام است؟ (سراسری ۸۶ با کمی تغییر)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۴) $\dfrac{۱}{۳}$

پاسخ: *گزینه (۱)*

در $x^{۲}-x+۱$ ($\Delta<۰$ و ضریب $x^{۲}>۰$)، پس همواره مثبت است. از طرفی در بازه $[-۱,۱]$ همواره $\cos x>۰$ (یادتان باشد ۱ و ۱- برحسب رادیان می‌باشند و هر یک رادیان تقریباً ۵۷° است) و $-|x|\leq ۰$ ، پس $f(x)\leq ۰$ و این یعنی ماکزیمم مقدار صفر است.

📖 **سؤال:** در مثلث ABC زاویه $C = ۶۰^\circ$ است. حداکثر مقدار $\sin A + \sin B$ کدام است؟

$$C = ۶۰^\circ \rightarrow A + B = ۱۲۰$$

$$\sin A + \sin B = ۲\sin\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲} = ۲\sin ۶۰^\circ \cos\frac{A-B}{۲} = ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}$$

$$= \sqrt{۳}\cos\frac{A-B}{۲} \quad , \quad -۱ \le \cos O \le ۱ \rightarrow -\sqrt{۳} \le \sqrt{۳}\cos\frac{A-B}{۲} \le \sqrt{۳} \rightarrow \begin{cases} m = -\sqrt{۳} \\ M = \sqrt{۳} \end{cases}$$

در این زمینه اتحاد زیر به شما کمک می‌کند:

$$x^{۲n} \pm mx^{n} = \left(x^{n} \pm \frac{m}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{m}{۲}\right)^{۲}$$

📖 **سؤال:** برد توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $y = x^{۲} - ۴x + ۶$

$$\Rightarrow y = (x^{۲} - ۴x + ۴) + ۲ = (x - ۲)^{۲} + ۲ \xrightarrow{(x-۲)^{۲} \geq ۰} y \geq ۲ \Rightarrow R_{۲} = [۲, +\infty)$$

۲) $y=\sqrt{x}-۴x$

$$\Rightarrow y=-۴\left(x-\frac{\sqrt{x}}{۴}\right)=-۴\left(\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{۸}\right)^{۲}-\frac{۱}{۶۴}\right)=-۴\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{۸}\right)^{۲}+\frac{۱}{۱۶}$$

$$\xrightarrow{-۴\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{۸}\right)^{۲}\leq ۰} y\leq\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow R_f=\left(-\infty,\frac{۱}{۱۶}\right]$$

۳) $y=\dfrac{۱}{\sqrt{۳-۲x^{۲}-x^{۴}}}$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{\sqrt{-(x^{۴}+۲x^{۲})+۳}}=\frac{۱}{\sqrt{-((x^{۲}+۱)^{۲}-۱)+۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۴-(x^{۲}+۱)^{۲}}}$$

حال دقت کنید:

$$(x^{۲}+۱)^{۲}\geq ۱\Rightarrow -(x^{۲}+۱)^{۲}\leq -۱\Rightarrow ۴-(x^{۲}+۱)^{۲}\leq ۳\Rightarrow ۰\leq\sqrt{۴-(x^{۲}+۱)^{۲}}\leq\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۴-(x^{۲}+۱)^{۲}}}\geq\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

☜ **یادتان باشد**، اگر $۰\leq x\leq a$ و $a>۰$ ، آنگاه $۰\leq\sqrt{x}\leq\sqrt{a}$. مثلاً اگر $x\leq ۳$ ، آن گاه $۰\leq\sqrt{x}\leq\sqrt{۳}$.

۴) $y = \sin^{۴} x + \cos^{۲} x$ (سراسری ۸۴)

$$\Rightarrow y = \sin^{۴} x + (۱ - \sin^{۲} x) = (\sin^{۴} x - \sin^{۲} x) + ۱ = \left(\left(\sin^{۲} x - \frac{۱}{۲}\right)^{۲} - \frac{۱}{۴}\right) + ۱ = \left(\sin^{۲} x - \frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{۰ \le \left(\sin^{۲} x - \frac{۱}{۲}\right)^{۲} \le \frac{۱}{۴}} \frac{۳}{۴} \le y \le ۱ \Rightarrow R_f = \left[\frac{۳}{۴}, ۱\right]$$

۱) $\begin{cases} a > ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \\ a < ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \leq -۲ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a + b \geq ۲\sqrt{ab} & (a \text{ و } b \text{ نامنفی}) \\ a + b \leq -۲\sqrt{ab} & (a \text{ و } b \text{ نامثبت}) \end{cases}$

۳) $x + |x| \geq ۰ \quad , \quad x - |x| \leq ۰$

۴) $|x-a| + |x-b| \geq |a-b| \quad , \quad -|a-b| \leq |x-a| - |x-b| \leq |a-b|$

📖 سؤال: برد توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $y = x + ۵ + \frac{۱}{x + ۳}$ (آزاد ۸۳)

$$y = (x+۳) + \frac{۱}{(x+۳)} + ۲ \Rightarrow \begin{cases} x > -۳ \Rightarrow (x+۳) + \frac{۱}{(x+۳)} \geq ۲ \Rightarrow y \geq ۴ \\ x < -۳ \Rightarrow (x+۳) + \frac{۱}{(x+۳)} \leq -۲ \Rightarrow y \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow R_f = R - (۰,۴)$$

۲) $y=\frac{x^{۲}+۲}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ (آزاد خارج از کشور ۸۹)

$$y=\frac{x^{۲}+۲}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\Rightarrow y=\frac{(x^{۲}+۱)+۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\sqrt{x^{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\geq ۲\Rightarrow R_f=[۲,+\infty)$$

۷ـ نامساوی و قوانین موجود در جزء صحیح‌ها در تعیین برد برخی از توابع راهگشا هستند.

۱) $[u] \leq u$

۲) $0 \leq u - [u] < 1$

۳) $x \in Z \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \quad , \quad x \notin Z \Rightarrow [x] + [-x] = -1$

۱) $y=\sqrt{x+[-x]}$

ابتدا بگذارید وضعیت دامنه‌ی این تابع را روشن کنیم:

$$x+[-x]\geq 0 \Rightarrow [-x]\geq -x \xrightarrow{[u]\leq u} [-x]=-x \Rightarrow x\in Z \Rightarrow D_f=Z$$

اما به ازای این دامنه زیر رادیکال مساوی صفر شده و در نتیجه $f(x)=0$ و $R_f=\{0\}$.

۲) $y = \dfrac{x}{\sqrt{۱-[x]}}$

این بار هم با تعیین دامنه شروع می کنیم:

$$۱-[x]>۰ \Rightarrow [x]<۱ \Rightarrow x<۱ \Rightarrow D_f=(-\infty,۱)$$

حالا دقت کنید: اگر $۰ \le x < ۱$ ، داریم $[x]=۰$ و در نتیجه $y=x$ و خلاصه این که $۰ \le y < ۱$. اما به ازای $x<۰$ چون $\dfrac{۱}{\sqrt{۱-[x]}}$ همواره مثبت است، پس $y<۰$.

حالت $۰ \le y < ۱$ و $y<۰$ را با یکدیگر اجتماع می‌کنیم و $R_f=(-\infty,۱)$ به می‌رسیم.

۳) $y=\sqrt{x-۴\left[\frac{x}{۴}\right]}$

بوی $u-[u]$ به مشام می‌رسد!

$$t=x-۴\left[\frac{x}{۴}\right]=۴\left(\frac{x}{۴}-\left[\frac{x}{۴}\right]\right)\xrightarrow{۰\le\frac{x}{۴}-\left[\frac{x}{۴}\right]<۱}۰\le t<۴\Rightarrow ۰\le\sqrt{x-۴\left[\frac{x}{۴}\right]}<۲\Rightarrow R_f=[۰,۲)$$

۴) $y=\left[\frac{x^{۳}+۱}{x^{۳}+۸}\right]$ (سراسری ۸۷)

کمی درون جزء صحیح را ساده می کنیم:

$$y=\left[\frac{(x^{۳}+۸)-۷}{x^{۳}+۸}\right]=\left[۱-\frac{۷}{x^{۳}+۸}\right]=۱+\left[-\frac{۷}{x^{۳}+۸}\right]$$

برد تابع $-\frac{۷}{x^{۳}+۸}$ مساوی $R-\{۰\}$ است، پس برد $\left[-\frac{۷}{x^{۳}+۸}\right]$ مساوی اعداد صحیح است و در نتیجه $R_f=Z$.

اگر $u \in R$ ، آن گاه در تابع $y=\frac{au+b}{cu+d}$, $R_f = R-\left\{\frac{a}{c}\right\}$. چرا؟! (یعنی {مجانب افقی} $R_f = R-$)

مثال:

۱) $y=\frac{۲x^{۵}-۶}{۳x^{۵}-۲} \Rightarrow R_f = R-\left\{\frac{۲}{۳}\right\}$

۲) $y=\frac{\sqrt[۷]{x}-۱}{\sqrt[۷]{x}+۱} \Rightarrow R_f = R-\{۱\}$

۳) $y=\frac{-۷}{x^{۳}+۸} \Rightarrow R_f = R-\{۰\}$

۱) $-\sqrt{a^{۲}+b^{۲}} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$

۲) $\frac{۱}{۲^{n-۱}} \le \sin^{۲n} x + \cos^{۲n} x \le ۱$

۳) $-\frac{\pi}{۲} \le Arc\sin x \le \frac{\pi}{۲}$, $\circ Arc\cos \le \pi$, $-\frac{\pi}{۲} \le Arc\tan x < \frac{\pi}{۲}$, $\circ < Arc\cot gx < \pi$ (رشته ریاضی)

۴) $\begin{cases} \tan x > \circ \Rightarrow a\tan x + b\cot x \ge ۲\sqrt{ab} \\ \tan x < \circ \Rightarrow a\tan x + b\cot x \le -۲\sqrt{ab} \end{cases}$

۵) در توابع $y = a\sin^{۲} x + b\sin x + c$ یا $y = a\cos^{۲} x + b\cos x + c$ (در یک دوره تناوب) با قرار دادن (۱) و (۱-) و $-\frac{b}{۲a}$ (با شرط $-۱ < -\frac{b}{۲a} < ۱$) به جای $\sin x$ یا $\cos x$ ، کمترین و بیشترین مقدار تابع به دست می آید.

📖 **سؤال:** برد توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $y = |۳\sin x - ۴\cos x + ۳|$

گفتیم $-۵ \le ۳\sin x - ۴\cos x \le ۵$ و در نتیجه $-۲ \le ۳\sin x - ۴\cos x + ۳ \le ۸$ و از آن جا $۰ \le |۳\sin x - ۴\cos x + ۳| \le ۸$،

یعنی $R_f = [۰,۸]$.

۲) $y=\sin^{۶}x+\cos^{۶}x+\cos^{۴}x-\sin^{۴}x$

می دانیم $\sin^{۶}x+\cos^{۶}x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x$ و $\cos^{۴}x-\sin^{۴}x=\cos ۲x$ ، پس:

$$y=\left(۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x\right)+\cos ۲x=۱-\frac{۳}{۴}(۱-\cos^{۲}۲x)+\cos ۲x=\frac{۳}{۴}\cos^{۲}۲x+\cos ۲x+\frac{۱}{۴}$$

حال یک بار به جای $\cos ۲x$ قرار می دهیم ۱ و یک بار ۱- و یک بار $-۱<-\frac{b}{۲a}<۱$:

$$\begin{cases}\cos ۲x=۱\Rightarrow y=۲\\ \cos ۲x=-۱\Rightarrow y=۰\\ \cos ۲x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۱۲}\end{cases}\Rightarrow R_f=\left[-\frac{۱}{۱۲},۲\right]$$

۳) $y = \sin x \cos x + \sin^{۲} x - \cos^{۲} x$ (آزاد خارج از کشور ۸۷)

می‌دانیم $\cos^{۲} x - \sin^{۲} x = \cos ۲x$ و $\sin x \cos x = \frac{۱}{۲} \sin ۲x$. بنابراین:

$$y = \frac{۱}{۲} \sin ۲x - \cos ۲x \xrightarrow{\text{تا مساوی}(۱)} -\sqrt{\frac{۱}{۴} + ۱} \le y \le \sqrt{\frac{۱}{۴} + ۱} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۵}}{۲} \le y \le \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۴) $y = |\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$ (آزاد ۸۶)

$$y^{۲} = (\sin x - \cos x)^{۲} + (\sin x + \cos x)^{۲} + ۲|\sin^{۲} x - \cos^{۲} x| = ۲ + ۲|-\cos ۲x| = ۲(۱ + |\cos ۲x|)$$

$$\xrightarrow{۰ \le |\cos ۲x| \le ۱} ۲ \le ۲(۱ + |\cos ۲x|) \le ۴ \Rightarrow ۲ \le y^{۲} \le ۴ \xrightarrow{y > ۰} \sqrt{۲} \le y \le ۲ \Rightarrow R_f = [\sqrt{۲}, ۲]$$

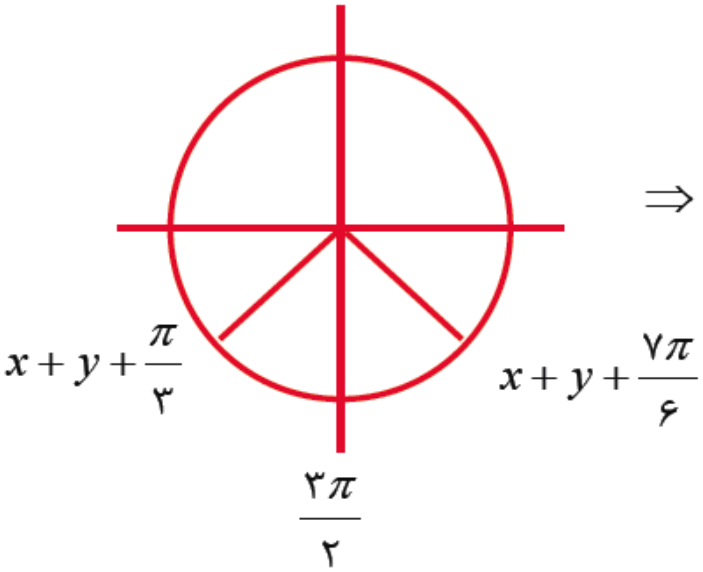
📖 **سؤال:** کمترین مقدار $A=\sin\left(x+y+\frac{\pi}{۳}\right)-\cos\left(x+y-\frac{\pi}{۳}\right)$ کدام است؟

$$\boxed{-\cos\alpha=\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right)}$$

$$A=\sin\left(x+y+\frac{\pi}{۳}\right)+\sin\left(x+y+\frac{۷\pi}{۶}\right)$$

کمترین مقدار sin به ازای $\frac{۳\pi}{۲}$ بدست می آید پس باید $x+y+\frac{\pi}{۳}$ و $x+y+\frac{۷\pi}{۶}$ به طور متقارن در اطراف $\frac{۳\pi}{۲}$ قرار بگیرند.

فاصله دو کمان $\frac{۵\pi}{۶}$ است. پس باید $\frac{۵\pi}{۱۲}$ سمت راست $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ سمت چپ $\frac{۳\pi}{۱۲}$ قرار بگیرد.

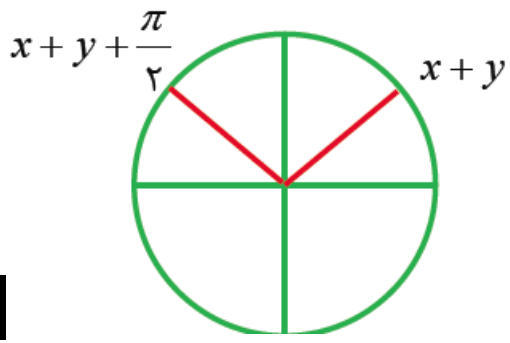


$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+\frac{\pi}{۳}=\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{۱۳\pi}{۱۲} \\ x+y+\frac{۷\pi}{۳}=\frac{۳\pi}{۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{۲۳\pi}{۱۲} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{۱۳\pi}{۱۲}\right)+\sin\left(\frac{۲۳\pi}{۱۲}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{۱۲}\right)+\sin\left(۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}\right)=-۲\sin\frac{\pi}{۱۲}=-۲\sin ۱۵^\circ=-۱۲\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۲}$$

📖 **سؤال:** ماکسیمم $\sin(x+y)+\sin\left(x+y+\frac{\pi}{۳}\right)$ چقدر است؟ (آزاد ۷۹)

می‌دانیم بیشترین مقدار sin در کمان ۹۰° اتفاق می‌افتد پس بیشترین مقدار عبارت فوق زمانی اتفاق می‌افتد که کمان‌های $(x+y)$، $\left(x+y+\frac{\pi}{۳}\right)$ بطور متقارن در بالای دایره مثلثاتی و در طرفین $\frac{\pi}{۲}$ باشند یعنی

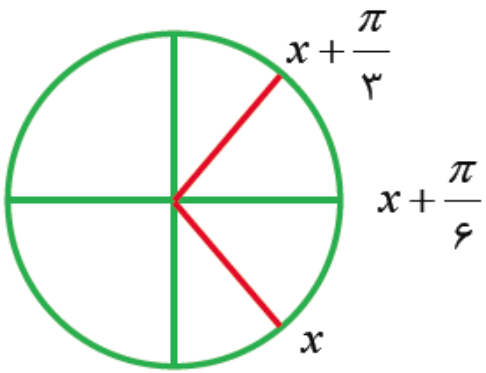


و چون فاصله این دو کمان $\frac{\pi}{۲}=۶۰^\circ$ است پس باید یکی از کمان های ۳۰° قبل از $\frac{\pi}{۲}$ و دیگری ۳۰° بعد از $\frac{\pi}{۲}$ واقع شوند. یعنی:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳} \\ x+y+\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{۳}+\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

📖 **سؤال:** ماکسیمم عبارت $\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{۶}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)$ کدام است؟ (آزاد ۸۱)

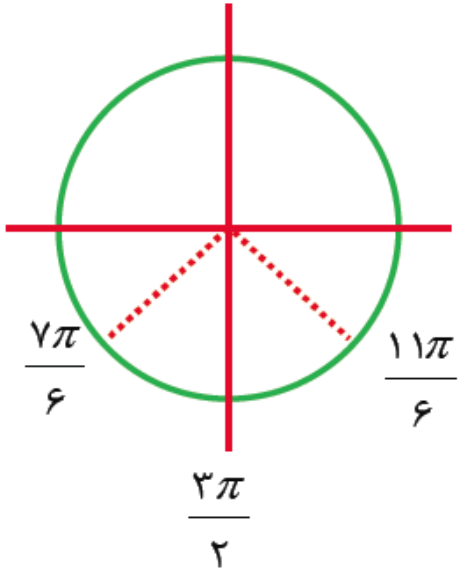
چون بیشترین مقدار $cosx$ در $x=۰$ اتفاق می‌افتد پس کافیست کمان وسطی یعنی $x+\frac{\pi}{۶}$ روی $x=۰^\circ$ واقع شود و دو کمان دیگر به طول متقارن در طرفین $x=۰^\circ$ قرار گیرد پس $x+\frac{\pi}{۶}=۰\rightarrow x=-\frac{\pi}{۶}$



$$\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right)+\cos(۰)+\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱+\sqrt{۳}$$

سؤال: اگر $\frac{۷\pi}{۶} \le x \le \frac{۱۱\pi}{۶}$، بیشترین مقدار عبارت $f(x) = \cot x - \frac{۱+\cos x}{\sin x}$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{۱+\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x - ۱ - \cos x}{\sin x} = -\frac{۱}{\sin x}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{۷\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲} \\ \sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱ \\ \sin\frac{۱۱\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow -۱ \le \sin x \le -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -۲ \le \frac{۱}{\sin x} \le -۱ \Rightarrow ۱ \le \frac{-۱}{\sin x} \le ۲ \Rightarrow R_f = [۱,۲] \Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ M = ۲ \end{cases}$$

📖 سؤال: برد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x-۱}$ کدام است؟

$$y=\frac{x^{۲}-۴}{x-۱}\rightarrow yx-y=x^{۲}-۴\rightarrow x^{۲}-yx+(y-۴)=۰\xrightarrow{\Delta\geq ۰}y^{۲}-۴(y-۴)\geq ۰$$

$$\rightarrow y^{۲}-۴y+۱۶\geq ۰\rightarrow\begin{cases}a>۰\\ \Delta'<۰\end{cases}\rightarrow y^{۲}-۴y+۱۶\rightarrow$$ همواره مثبت است

$$R_f=R$$

📖 **سؤال:** **ماکزیمم تابع با ضابطه $f(x) = -|x|\cos x$ در بازه $[-۱,۱]$ کدام است؟ (سراسری ۸۶)**

در دنیای مثلثات ما با رادیان سر و کله می‌زنیم. پس وقتی توی این سؤال می‌گه $x \in [-۱,۱]$ ، ۱ و ۱- زوایایی برحسب رادیان هستن هر یک رادیان هم حدوداً ۵۷° است پس در واقع x بین -۵۷° و ۵۷° است. یعنی ربع اول یا چهارم. اما در این دو ربع $\cos x$ مثبت است.

$$|x| \geq ۰ \rightarrow -|x| \leq ۰ \rightarrow -|x|\cos x \leq ۰ \rightarrow M = ۰$$

📖 سؤال: برد تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۱}{x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۴}$ کدام است؟ (آزاد ۷۸)

$$f(x)=\frac{(x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۴)-۳}{x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۴}=۱-\frac{۳}{x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۴}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۴=x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+۲-۲+۴=(x-\sqrt{۲})^{۲}+۲ \\ (x-\sqrt{۲})^{۲}\geq ۰(x-\sqrt{۲})^{۲}+۲\geq ۲\rightarrow ۰<\dfrac{۱}{(x-\sqrt{۲})^{۲}+۲}\leq\dfrac{۱}{۲} \end{array}}$$

$$\rightarrow ۰<\frac{۳}{(x-\sqrt{۲})^{۲}+۲}\leq\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{۳}{۲}\leq\frac{-۳}{(x-\sqrt{۲})^{۲}+۲}<۰\Rightarrow ۱-\frac{۳}{۲}\leq ۱-\frac{۳}{(x-\sqrt{۲})^{۲}+۲}<۱$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\leq f(x)<۱\Rightarrow R_f=\left[-\frac{۱}{۲},۱\right)$$

📖 **سؤال:** برد تابع $y = x - ۶\sqrt{x}$ چند صحیح منفی را شامل می‌شود؟ (آزاد ۹۰)

$$y = x - ۶\sqrt{x} = (\sqrt{x})^۲ - ۶\sqrt{x} + ۹ - ۹ = (\sqrt{x} - ۳)^۲ - ۹ \xrightarrow{(\sqrt{x}-۳)\geq ۰} (\sqrt{x} - ۳)^۲ - ۹ \geq -۹ \rightarrow R_f = [-۹, +\infty)$$

این بازه شامل ۹ عدد منفی $\{-۹, -۸, \ldots, -۱\}$ است.

📖 **سؤال:** برد تابع $f(x)=۲\sin x+۷|\sin x|$ کدام است؟ (آزاد خارج از کشور ۹۰)

راه حل غلط :
$$\begin{cases}-۱\le \sin x\le ۱\\ ۰\le|\sin x|\le ۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲\le ۲\sin x\le ۲\\ ۰\le ۷|\sin x|\le ۷\end{cases}\xrightarrow{\oplus}-۲\le ۲\sin x+۷|\sin x|\le ۹$$

ما این جواب غلطه می‌دونی چرا؟ حالا بهت می‌گم. اونجایی که $۲\sin x$ ، برابر ۲- شده یعنی $\sin x=-۱$ ، اون وقت چه جوری ممکنه تو همون لحظه $۷|\sin x|$ مساوی صفر بشه!

راه حل درست :
$$\begin{cases}۰\le \sin x\le ۱\xrightarrow{|\sin x|=\sin x}۲\sin x+۷|\sin x|=۹\sin x\xrightarrow{۰\le\sin x\le ۱}۰\le ۹\sin x\le ۹ & (۱)\\ -۱\le \sin x\le ۰\xrightarrow{|\sin x|=-\sin x}۲\sin x+۷|\sin x|=-۵\sin x\xrightarrow{-۱\le\sin x\le ۰}۰\le -۵\sin x\le ۵ & (۱)\end{cases}$$

$$(۱)\bigcup(۲)\to ۰\le f(x)\le ۹\to R_f=[۰,۹]$$

📖 **سؤال:** برد تابع $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ کدام است؟

دامنه تابع R هست. با فرض $x=tg\alpha$ خواهیم داشت.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\cos 2\alpha \xrightarrow{-1\le\cos 2\alpha\le 1} -1\le\frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1$$

حالا باید چک کنیم که $f(x)$ می‌تونه برابر ۱ یا ۱- بشه.

$$\begin{cases}\frac{1-x^2}{1+x^2}=1\to 1-x^2=1+x^2\to x=0 & \checkmark\\ \frac{1-x^2}{1+x^2}=-1\to 1-x^2=-1-x^2\to 1=-1 & \times\end{cases}$$

$f(x)$ نمی‌تونه برابر ۱- بشه

$$\to -1<\frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1\to R_f=(-1,1]$$

سؤال: مینمم سراسری تابع $f(x)=ax\sqrt{1-x^2}$ برابر $-\sqrt{2}$ است. مقدار a کدام است.

۱) $\pm 2\sqrt{2}$ ۲) $\pm\sqrt{2}$ ۳) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

گزینه (۱)

دامنه‌ی تابع $[-1,1]$ بازه است.

$$f'(x)=a\sqrt{1-x^2}+\frac{-2ax^2}{2\sqrt{1-x^2}}=a\sqrt{1-x^2}-\frac{ax^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{a(1-x^2)-ax^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{a(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

از تساوی $f'(x)=0$ نقاط بحرانی $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ بدست می آید.

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f(x)$	0	$-\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0

پس مینیمم f برابر $\frac{a}{2}$ یا $-\frac{a}{2}$ و یا به عبارت دیگر برابر $-\frac{|a|}{2}$ است.

یعنی $-\frac{|a|}{2}=-\sqrt{2}$ و $a=\pm 2\sqrt{2}$ لذا می باشد.

راه حل دوم) با فرض $x=\cos\alpha$ داریم: $f(x)=a\cos\alpha\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}$

$$f(x)=a\cos\alpha\,|\sin\alpha|=\pm a\cos\alpha\sin\alpha=\pm\frac{۱}{۲}a\sin ۲\alpha\Rightarrow-\frac{|a|}{۲}\le f(x)\le\frac{|a|}{۲}$$

$$\Rightarrow-\frac{|a|}{۲}=-\sqrt{۲}\Rightarrow|a|=۲\sqrt{۲}\Rightarrow a=\pm۲\sqrt{۲}$$

📖 **سؤال:** برد تابع $y=\frac{۲x^۲+x+۲}{x^۲+۱}$ برابر کدام است.

۱) $(۰,۲)$ ۲) $\left[\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}\right]$ ۳) $[۱,۲)$ ۴) $\left[\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}\right]-\{۲\}$

گزینه (۲)

$$y=\frac{۲(x^۲+۱)+x}{x^۲+۱}=۲+\frac{x}{x^۲+۱}$$

$$x=\tan\alpha\Rightarrow y=۲+\frac{\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=۲+\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$$

$$-۱\le\sin ۲\alpha\le ۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}\le ۲+\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\le\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}\le f(x)\le\frac{۵}{۲}$$

📖 **سؤال:** برد تابع $y = x - \sqrt{1-x^2}$ کدام است.

۱) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ ۲) $[-1,\sqrt{2}]$ ۳) $[-\sqrt{2},1]$ ۴) $[-1,1]$

گزینه (۳)

دامنه‌ی تابع بازه‌ی $[-1,1]$ است با فرض $x = \sin\alpha$ و $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$y = \sin\alpha - \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

که $-\frac{3\pi}{4} \le \alpha - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}$ ، پس $-1 \le \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ و در نتیجه $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

یعنی: $y \in [-\sqrt{2},1]$

📖 **سؤال:** برد تابع $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ کدام است.

۱) $[0,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

گزینه (۲)

چون $e^x>0$ است پس می توانیم فرض کنیم $e^x=\tan^2\alpha$ (با فرض $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$) بنابراین:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=-\cos 2\alpha$$

می دانیم $-1\leq\cos 2\alpha\leq 1$ و در نتیجه $-1\leq-\cos 2\alpha\leq 1$ ولی چون $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$، پس $2\alpha\neq k\pi$ و در نتیجه $\cos 2\alpha$ نمی تواند ۱- یا ۱ باشد بنابراین برد تابع برابر است با بازه‌ی $(-1,1)$

📖 **سؤال:** حاصل ضرب مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=x+\sqrt{8-x^2}$ کدام است.

۱) -4 ۲) $-4\sqrt{2}$ ۳) -8 ۴) $-8\sqrt{2}$

گزینه (۴)

اگر از ۸ زیر رادیکال فاکتور بگیریم: $f(x)=x+2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{8}}$

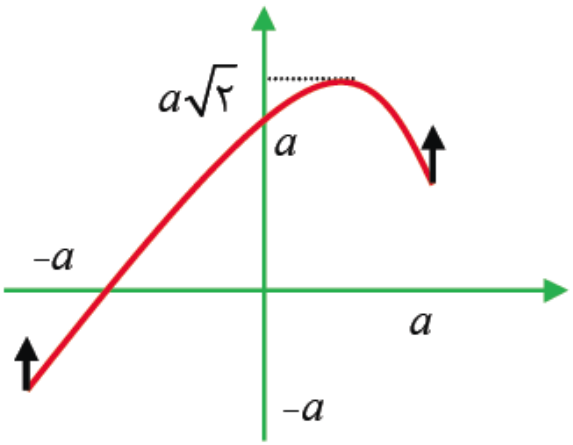
با توجه به دامنه‌ی تابع داریم $-1\le\frac{x}{2\sqrt{2}}\le 1$ پس فرض می کنیم:

$$\frac{x}{2\sqrt{2}}=\sin\alpha \quad , \quad -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$$

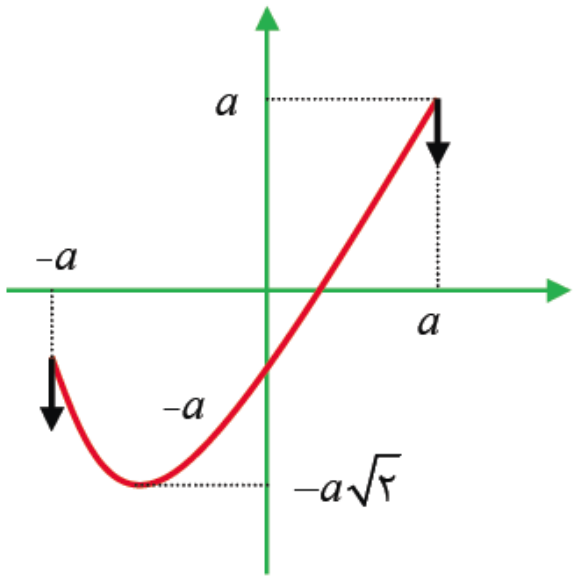
$$y=2\sqrt{2}\sin\alpha+2\sqrt{2}\sqrt{1-\sin^2\alpha}=2\sqrt{2}\sin\alpha+2\sqrt{2}\cos\alpha=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{\pi}{4}\le\alpha+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$$

$$\Rightarrow-2\sqrt{2}\le 4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\le 4\rightarrow mM=-8\sqrt{2}$$



$$f(x) = x + \sqrt{a^{۲} - x^{۲}}$$
$$-a \le x \le a$$
$$-a \le y \le a\sqrt{۲}$$



$$f(x) = x - \sqrt{a^{۲} - x^{۲}}$$
$$-a \le x \le a$$
$$-a\sqrt{۲} \le y \le a$$

📖 **سؤال:** حاصل ضرب مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=x\sqrt{۴-x^{۲}}$ کدام است.

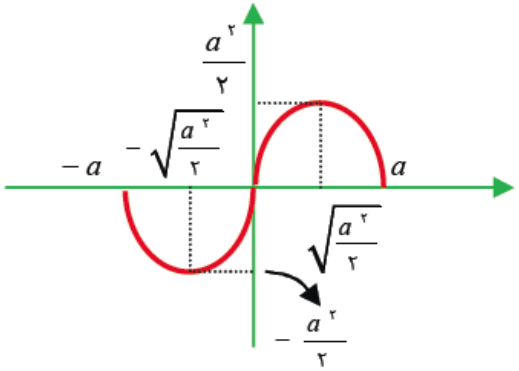
۱) -۲ ۲) $-۲\sqrt{۲}$ ۳) -۴ ۴) $-۴\sqrt{۲}$

گزینه (۳)

$$f(x)=۲x\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۴}} \qquad \frac{x}{۲}=\sin\alpha \quad , \quad -\frac{\pi}{۲}\le\alpha\le\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x)=۲(۲\sin\alpha)\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}=۴\sin\alpha\,|\cos\alpha|=۲\,|\sin ۲\alpha|\Rightarrow -۲\le ۲\sin ۲\alpha\le ۲$$

ضابطه‌ی تابع هر کدام از $۲\sin ۲\alpha$ یا $-۲\sin ۲\alpha$ باشد، ماکزیمم آن برابر ۲ و مینیمم آن برابر ۲- است پس حاصل ضرب مینیمم و ماکسیمم تابع می شود ۴-



📖 **سؤال:** مینیمم مطلق تابع $y=\frac{x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ کدام است.

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) صفر ۴) -1

گزینه (۲)

$$y=\frac{x}{x^2+1}\times\frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$x=\tan\alpha \Rightarrow y=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}.\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha$$

$$\Rightarrow y\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$$

📖 **سؤال:** اگر در تابع $y = ۴\sin ۲x - ۳\cos^۲ x + ۳\sin^۲ x$ نقطه‌ی $x = a$ ماکسیمم تابع در بازه‌ی $[۰, \pi]$ باشد $\tan a$ کدام است.

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۳-

گزینه (۱)

$$y = ۴\sin ۲x - ۳(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = ۴\sin ۲x - ۳\cos ۲x \qquad T = \pi$$

$$-۵ \le y \le ۵$$

$$\to ۴\left(\frac{۲\tan a}{۱+\tan^۲ a}\right) - ۳\left(\frac{۱-\tan^۲ a}{۱+\tan^۲ a}\right) = ۵ \Rightarrow ۸\tan a - ۳ + ۳\tan^۲ a = ۵ + ۵\tan^۲ a$$

$$\Rightarrow ۲\tan^۲ a - ۸\tan a + ۸ = ۰ \Rightarrow \tan^۲ a - ۴\tan a + ۴ = ۰ \Rightarrow (\tan a - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow \tan a = ۲$$

📖 **سؤال:** بیشترین مقدار تابع $f(x)=k\sin ۲x-۲\cos ۲x+۲$ برابر $\sqrt{۱۰}+۱$ است. K کدام است؟

🔔 **یادآوری:** $۲\cos^۲ x=۱+\cos ۲x$

$$\rightarrow f(x)=k\sin ۲x-(۱+\cos ۲x)+۲=k\sin ۲x-\cos ۲x+۱\rightarrow -\sqrt{k^۲+۱}\le k\sin ۲x-\cos ۲x\le\sqrt{k^۲+۱}$$

$$\rightarrow ۱-\sqrt{k^۲+۱}\le k\sin ۲x-\cos ۲x+۱\le\sqrt{k^۲+۱}+۱\rightarrow\begin{cases}m=۱-\sqrt{k^۲+۱}\\M=۱+\sqrt{k^۲+۱}\end{cases}\rightarrow ۱+\sqrt{k^۲+۱}=۱+\sqrt{۱۰}$$

$$\rightarrow\sqrt{k^۲+۱}=\sqrt{۱۰}\rightarrow k^۲+۱=۱۰\rightarrow k^۲=۹\rightarrow k=\pm ۳$$

📖 **سؤال:** بیشترین مقدار تابع $f(x)=\sin x-\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$ در بازه $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴}\right]$ کدام است؟

$$\boxed{\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)}$$

$$f(x)=\sqrt{۲}\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$$

پس کمان $x-\frac{\pi}{۴}$ در یک دایره مثلثاتی قرار دارد. $\boxed{\frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{۹\pi}{۴}\to ۰\le x-\frac{\pi}{۴}\le ۲\pi}$

$$\to -\sqrt{(\sqrt{۲})^۲+۱^۲}\le f(x)\le\sqrt{(\sqrt{۲})^۲+۱^۲}\to -\sqrt{۳}\le f(x)\le\sqrt{۳}\to\begin{cases}m=-\sqrt{۳}\\M=\sqrt{۳}\end{cases},R_f=[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}]$$

📖 **سؤال:** اگر $f(x)=\frac{۱}{۱+\cos x-\sin x}+\frac{۱}{۱-\cos x+\sin x}$ و $\frac{\pi}{۶}\le x\le\frac{۵\pi}{۱۲}$، آنگاه برد تابع f را بدست آورید.

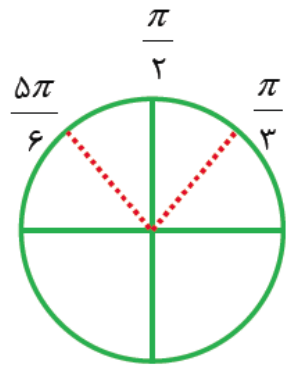
عجب گودزیلایی هست این $f(x)$ ، مخرج مشترک می‌گیریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۱+\cos x-\sin x}+\frac{۱}{۱-\cos x+\sin x}=\frac{۱}{۱+(\cos x-\sin x)}+\frac{۱}{۱-(\cos x-\sin x)}$$

$$=\frac{۱-(\cos x-\sin x)+۱+(\cos x-\sin x)}{\underbrace{(۱+(\cos x-\sin x)(۱-(\cos x-\sin x))}_{\text{اتحاد مزدوج}}}=\frac{۲}{۱-(\cos x-\sin x)^۲}$$

$$\boxed{(\cos x\pm\sin x)^۲=۱\pm\sin ۲x}$$

$$=\frac{۲}{۱-(۱-\sin ۲x)}=\frac{۲}{\sin ۲x}\rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{۶}\le x\le\frac{۵\pi}{۱۲}\\ \frac{\pi}{۳}\le ۲x\le\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \sin\frac{\pi}{۲}=۱\rightarrow\frac{۱}{۲}\le\sin ۲x\le ۱\quad\Rightarrow ۱\le\frac{۱}{\sin ۲x}\le ۲\rightarrow ۲\le\frac{۲}{\sin ۲x}\le ۴\rightarrow R_f=[۲,۴]\\ \sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

📖 **سؤال:** برد تابع $f(x)=\frac{۴\sqrt{x}}{x+۱۶}$ کدام است؟

$$D_f = x \geq ۰ \rightarrow \frac{۴\sqrt{x}}{x+۱۶} \geq ۰ \qquad (۱)$$

$$f(x)=\frac{۴\sqrt{x}}{x+۱۶}=\frac{۴}{\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{۱۶}{\sqrt{x}}}=\frac{۴}{\sqrt{x}+\frac{۱۶}{\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\sqrt{x}+\frac{۱۶}{\sqrt{x}} \geq ۲\sqrt{\sqrt{x}\,.\,\frac{۱۶}{\sqrt{x}}}=۲\sqrt{۱۶}=۲\times ۴=۸}$$

$$\rightarrow \frac{۴}{\sqrt{x}+\frac{۱۶}{\sqrt{x}}} \leq \frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲) \rightarrow R_f=\left[۰,\frac{۱}{۲}\right]$$

📖 **سؤال:** برد تابع $f(x)=\dfrac{(x^{۲}+۱)^{۲}}{x^{۴}+۱}$ کدام است؟

$$f(x)=\frac{x^{۴}+۲x^{۲}+۱}{x^{۴}+۱}=\frac{(x^{۴}+۱)+۲x^{۲}}{x^{۴}+۱}\to ۱+\frac{۲x^{۲}}{x^{۴}+۱}\Rightarrow \frac{۲}{x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}}\xrightarrow{x^{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}\geq ۲}$$

$$\frac{۲}{x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}}\leq ۱\xrightarrow{\frac{۲x^{۲}}{x^{۴}+۱}\geq ۰}۰\leq\frac{۲x^{۲}}{x^{۴}+۱}\leq ۱\to ۱\leq ۱+\frac{۲x^{۲}}{x^{۴}+۱}\leq ۲\to ۱\leq f(x)\leq ۲\to R_f=[۱,۲]$$

📖 **سؤال:** اگر نقطه مینمم تابع با ضابطه $f(x)=a\cos ۲x+b\sin x$ به مختصات $\left(\frac{\pi}{۶},-۳\right)$ باشد a کدام است؟

(سراسری ۸۹)

$$f(x)=a(۱-۲\sin^۲ x)+b\sin x=-۲a\sin^۲ x+b\sin x+a$$

$$\rightarrow \sin x=-\frac{b}{۲(-۲a)}=\frac{b}{۴a}=\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۲}\rightarrow b=۲a \qquad (۱)$$

$$-۳=-۲a\sin^۲\frac{\pi}{۶}+b\sin\frac{\pi}{۶}+a=-۲a\left(\frac{۱}{۴}\right)+\frac{b}{۲}+a\rightarrow -۳=\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲} \qquad (۲)$$

$$-۳=\frac{a}{۲}+\frac{۲a}{۲}=\frac{۳a}{۲}\rightarrow a=-۲$$

📖 **سؤال:** به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $y=\cos^{۲}x+\sqrt{۳}\sin x+a$ در فاصله $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ دارای ماکسیمم یا مینیمم به عرض $y=\frac{۳}{۴}$ خواهد بود؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱-

$$y=۱-\sin^{۲}x+\sqrt{۳}\sin x+a=-\sin^{۲}x+\sqrt{۳}\sin x+(a+۱)$$

$$\sin x=۱\rightarrow y=-۱+\sqrt{۳}+a+۱=\frac{۳}{۴}\rightarrow a+\sqrt{۳}=\frac{۳}{۴}\rightarrow a=\frac{۳}{۴}-\sqrt{۳}$$ ✗ توی گزینه ها نیست

$$\sin x=-۱\rightarrow y=-۱-\sqrt{۳}+a+۱=a-\sqrt{۳}=\frac{۳}{۴}\rightarrow a=\sqrt{۳}+\frac{۳}{۴}$$ ✗ توی گزینه ها نیست

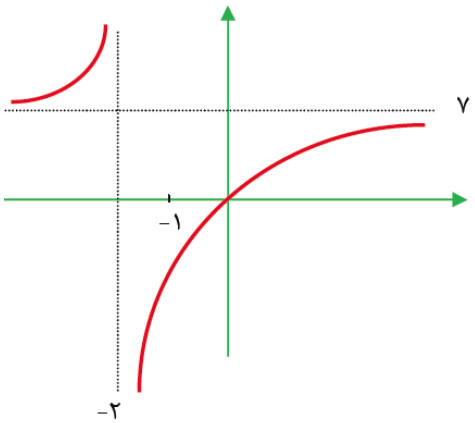
$$\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow y=-\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۲}+a+۱=\frac{۳}{۴}\rightarrow a=-۱$$ ✓

۱) $\dfrac{۷\sin x}{\sin x + ۲}$

$\sin x = u \rightarrow \dfrac{۷u}{u+۲} \qquad -۱ \le u \le ۱$

$u = -۱ \rightarrow \dfrac{-۷}{-۱+۲} = -۷$

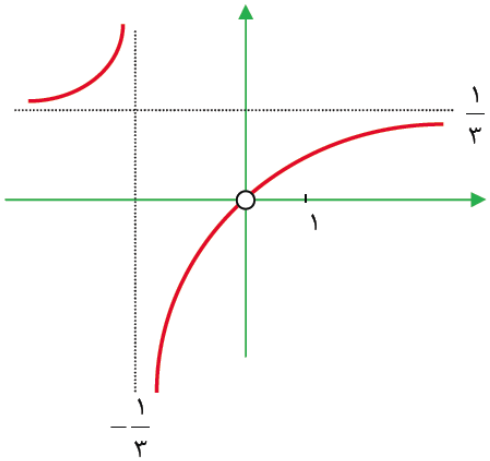
$u = ۱ \rightarrow \dfrac{۷}{۱+۲} = \dfrac{۷}{۳}$



$\rightarrow R_f = \left[-۷, \dfrac{۷}{۳}\right]$

۲) $\dfrac{\sin x}{۱+۳\sin x} \qquad (۰, \pi)$

$\dfrac{u}{۱+۳u} \qquad ۰ < u < ۱$

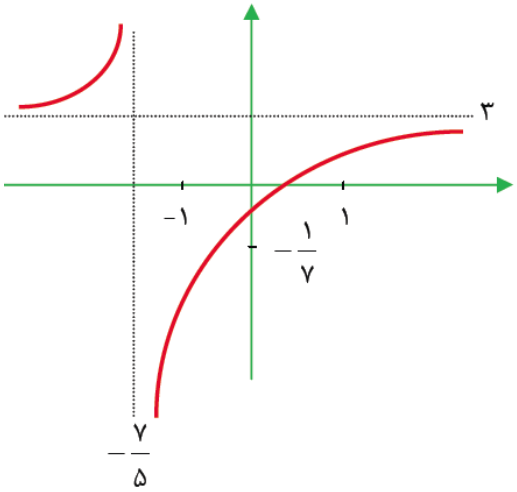


$\rightarrow R_f = \left(۰, \dfrac{۱}{۳}\right)$

۳) $\dfrac{۳\sin^{۳} x - ۱}{۵\sin^{۳} x + ۷}$

$\sin^{۳} x = u \qquad -۱ \le u \le ۱$

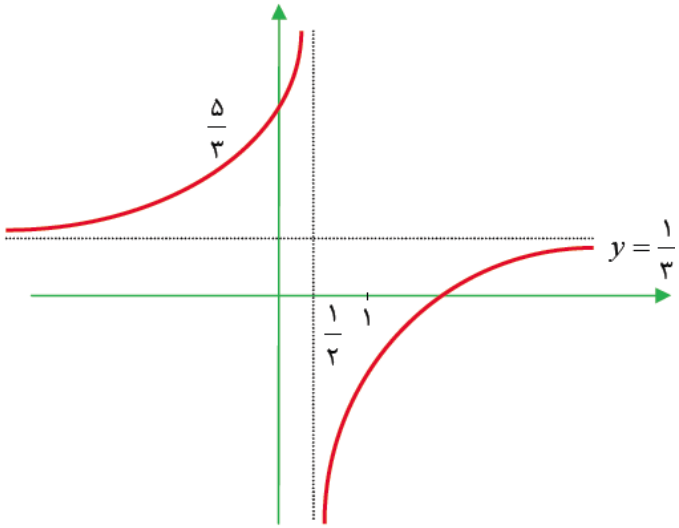
$\dfrac{۳u - ۱}{۵u + ۷}$



$\rightarrow R_f = R - \left\{-\dfrac{۷}{۵}\right\}$

۴) $\dfrac{۲\sin^{۲} x - ۵}{۶\sin^{۲} x - ۳}$

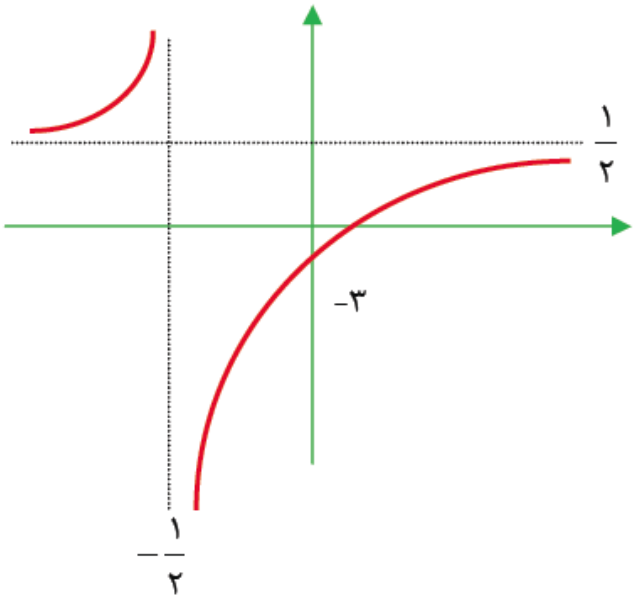
$\sin^{۲} x = u \rightarrow \dfrac{۲u - ۵}{۶u - ۳} \quad , \quad ۰ \le u \le ۱$



$\rightarrow R_f = \left[\dfrac{۵}{۳}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, \dfrac{۱}{۳}\right)$

۵) $\dfrac{|x|-۳}{۲|x|+۱}$

$|x|=u\geq ۰$

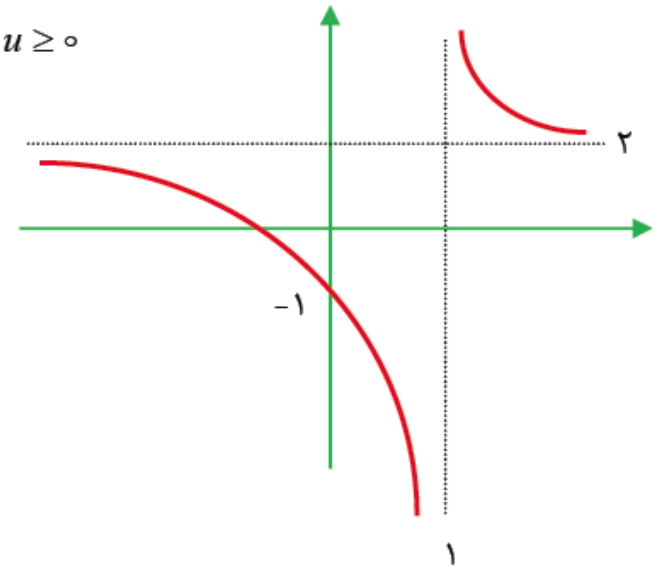


$R_f=\left[-۳,\frac{۱}{۲}\right)$

۶) $\dfrac{۲\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$

$\sqrt{x}=u \quad , \quad u\geq ۰$

$u\geq ۰$



$R_f=(-\infty,-۱]\cup(۲,+\infty)$

پایان

موفق باشید