



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

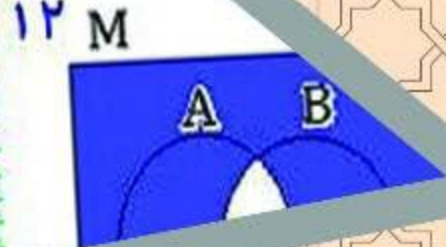
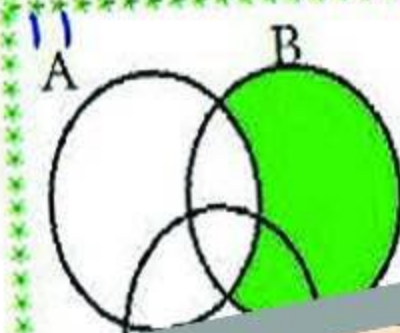
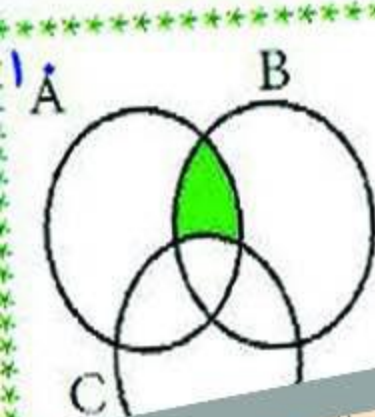
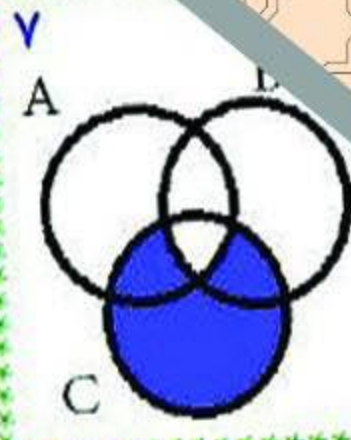
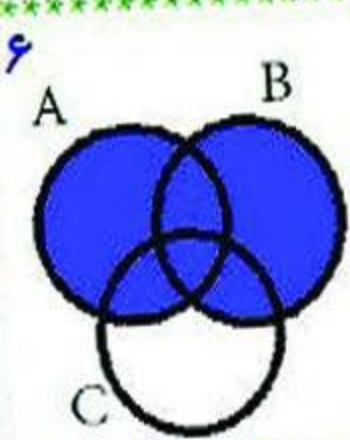
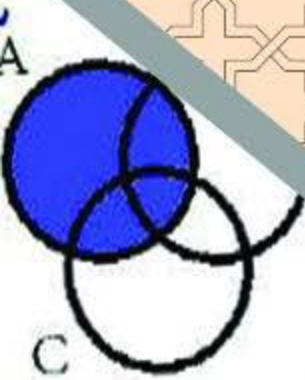
[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

مجموعه‌ها

ویژه کنکور ۹۸



مؤلف: مهندس حسن پور

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

((مجموعه ها))

تعریف: هر دسته مشخص از اشیاء را یک مجموعه و آن اشیاء را اعضای آن مجموعه می گویند.

تکرار اعضا در مجموعه اثر ندارد. مجموعه را با نماد آکولاد $\{\}$ نمایش می دهند. نام مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می دهند.

مجموعه های معروف و پر کاربرد در ریاضی:

۱- مجموعه اعداد طبیعی $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

۲- مجموعه اعداد حسابی $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

۳- مجموعه اعداد صحیح $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

۴- مجموعه اعداد گویا $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$

۵- مجموعه اعداد گنگ: اعدادی که گویا نیستند را گنگ (اصم) می گوئیم و آن را با نماد Q^c یا Q' نمایش می دهیم.

به عبارتی اعداد گنگ اعدادی هستند که نمی توانیم آن ها را به صورت کسری نمایش دهیم.

معروف ترین این اعداد عبارتند از: e و π و $\pm\sqrt{k}$ اگر k مربع کامل نباشد

۶- مجموعه اعداد حقیقی: بزرگترین مجموعه اعداد که تا این جا می شناسیم و شامل تمام اعداد گویا و گنگ است. $R = Q \cup Q'$

به عبارتی دیگر: $(R - Q = Q'$ یا $R - Q' = Q)$

نکته: سیر تکامل اعداد:

اعداد حقیقی $\xrightarrow{\text{اعداد گنگ اضافه شود}}$ اعداد گویا $\xrightarrow{\text{حاصل تقسیم دو عدد صحیح}}$ اعداد صحیح $\xrightarrow{\text{قرینه اعداد طبیعی اضافه شود}}$ اعداد حسابی $\xrightarrow{\text{صفر اضافه شود}}$ اعداد طبیعی

نکته: عضویت یک شیء در یک مجموعه را با نماد \in و عدم عضویت آن را با نماد \notin بیان می کنیم.

اعضای یک مجموعه ممکن است خود از جنس مجموعه باشند مانند $\{2\}$ که عضوی از مجموعه $A = \{3, \{2\}, 5\}$ است.

دقت شود که $\{2\} \in A$ و $2 \in A$ ولی $2 \notin A$

مجموعه تهی: مجموعه را که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی می گویند و آن را با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می دهند.

به عنوان مثال $\{\text{همه شترمرغ هایی که پرواز می کنند}\}$ یک مجموعه تهی است.

مثال) کدام یک از مجموعه های زیر یک مجموعه تهی است؟

۱) مجموعه اعداد زوج اول $\underline{2}$ مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از یک $\{ \{-6\} \}$ ۳ $\{\emptyset\}$ ۴

مثال) کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$\emptyset \notin \{\emptyset\} \quad (۴)$$

$$\emptyset \notin \emptyset \quad (۳)$$

$$0 \in \emptyset \quad (۲)$$

$$0 \notin \{\emptyset\} \quad (۱)$$

مجموعه \emptyset عضوی ندارد در نتیجه $\emptyset \notin \emptyset$

زیرمجموعه:

اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A عضو B نیز باشد، در این صورت می‌گوییم A زیرمجموعه B است

می‌نویسیم $A \subset B$



به طور مثال اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲\}$ و $C = \{۲, ۳\}$ باشد آنگاه به دلیل آن که $۱ \in B$ و $۱ \notin C$:

$$B \subset A \text{ و } C \subset A \text{ و } B \not\subset C$$

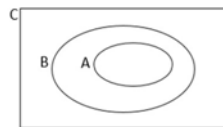
نکات زیرمجموعه:

۱- هر مجموعه زیرمجموعه خودش است $A \subset A$

۲- تهی زیرمجموعه هر مجموعه است $\emptyset \subset A$

۳- تهی فقط یک زیرمجموعه دارد و آن هم تهی است $\emptyset \subset \emptyset$

۴- با توجه به مفهوم زیرمجموعه بودن بین مجموعه اعداد رابطه مقابل برقرار است: $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$



۵- اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد آنگاه $A \subset C$

۶- اگر $A = B$ باشد آنگاه $A \subset B$ و $B \subset C$ و برعکس اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد آنگاه $A = B$ است.

۷- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$

۸- مجموع تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

مثال) تمام زیرمجموعه های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

$\{ \}$ یا $\emptyset \rightarrow \binom{3}{0} = 1$: تعداد زیرمجموعه های صفر عضوی

$\{c\}$ و $\{b\}$ و $\{a\} \rightarrow \binom{3}{1} = 3$: تعداد زیرمجموعه های یک عضوی

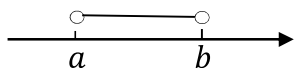
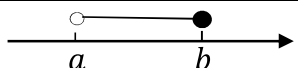
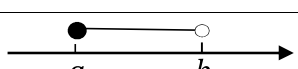
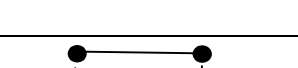
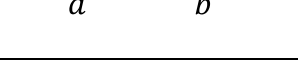


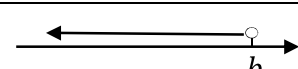
$\{b, c\}$ و $\{a, c\}$ و $\{a, b\} \rightarrow \binom{3}{2} = 3$: تعداد زیرمجموعه های دو عضوی

$\{a, b, c\} \rightarrow \binom{3}{3} = 1$: تعداد زیرمجموعه های سه عضوی

مجموع کل: $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 = 8$

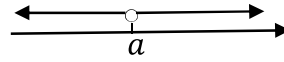
بازه ها:

برای نمایش تمام اعداد حقیقی بین دو عدد یا اعداد حقیقی بیشتر یا کمتر از یک عدد از بازه ها استفاده می کنیم. انواع بازه ها:

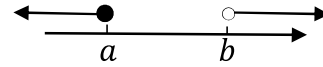
نمایش مجموعه ای	نمایش بازه ای	نمایش هندسی (روی محور)	نوع بازه	محدود
$\{x \in R a < x < b\}$	(a, b)		باز	محدود
$\{x \in R a < x \leq b\}$	$(a, b]$		نیم باز	محدود
$\{x \in R a \leq x < b\}$	$[a, b)$		نیم باز	محدود
$\{x \in R a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$		بسته	محدود
$\{x \in R x > a\}$	$(a, +\infty)$		باز	نامحدود
$\{x \in R x \geq a\}$	$[a, +\infty)$		نیم باز	نامحدود
$\{x \in R x < b\}$	$(-\infty, b)$		باز	نامحدود
$\{x \in R x \leq b\}$	$(-\infty, b]$		نیم باز	نامحدود

دو مورد که بازه نیستند اما دارای اهمیت هستند:

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq a\} \quad \mathbb{R} - \{a\} \quad \text{یا} \quad (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$



$$\{x \in \mathbb{R} | x > b \text{ یا } x \leq a\} \quad \mathbb{R} - (a, b] \quad \text{یا} \quad (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$$



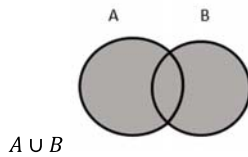
نکته: در بازه‌های محدود $b - a$ طول بازه است.

مثال) اگر عدد $1 + 2x$ در بازه $[1, x + 2]$ باشد، x در کدام بازه قرار دارد؟

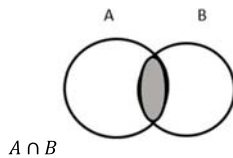
$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 1 \rightarrow 2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ 2x + 1 < x + 2 \rightarrow x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 \leq x < 1$$

اشتراک و اجتماع دو مجموعه:

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B که به صورت $A \cup B$ نشان داده می‌شود مجموعه‌ای است که هر عضو آن متعلق به مجموعه A یا B یا هر دو مجموعه می‌باشد.



اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A یا B به صورت $A \cap B$ نشان داده می‌شود. مجموعه‌ای است که هر عضو آن هم در A و هم در B موجود باشد.



نکته: هم A و هم B (هر دو باهم) یعنی $A \cap B$

قوانین:

$$۱) A \cup B = B \cup A \quad \text{و} \quad A \cap B = B \cap A \quad (\text{خاصیت جابجایی})$$

$$۲) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \text{و} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری})$$

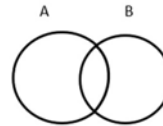
$$۳) A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \\ A \cap A = A \end{cases}$$



$$۴) A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$$

$$۵) A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

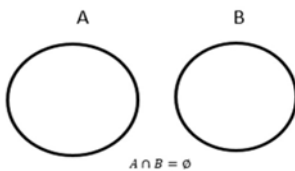
$$۶) A \cup (A \cap B) = A \quad \text{و} \quad A \cap (A \cup B) = A \quad \text{قوانین جذب}$$



$$۷) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{خاصیت پخشی اجتماع روی اشتراک})$$

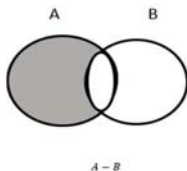
$$۸) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{خاصیت پخشی اشتراک روی اجتماع})$$

دو مجموعه مجزا یا جدا از هم: دو مجموعه ناتهی را که اشتراک آن‌ها مجموعه تهی است مجزا یا جدا از هم می‌گوییم.



به عنوان مثال مجموعه اعداد گنگ و مجموعه اعداد اول زوج دو مجموعه مجزا هستند

تفاضل مجموعه‌ها: تفاضل مجموعه B از A که به صورت $A - B$ نمایش داده می‌شود مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو A هستند ولی عضو B نیستند.



مثال) اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $B = \{a, d, e\}$ باشد $A - B$ کدام است؟

$$A - B = \{a, b, c, d, e\} - \{a, d, e\} = \{b, c\}$$

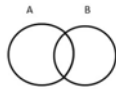
قوانین تفاضل مجموعه‌ها: اگر A و B هر کدام دو مجموعه دلخواه ناتهی باشند آنگاه:

۱) $A - A = \emptyset$

۲) $A - \emptyset = A$

۳) $\emptyset - A = \emptyset$

۴) $\begin{cases} A - B \subset A \\ B - A \subset B \end{cases}$



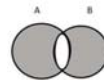
۵) $\begin{cases} A \subset B \rightarrow A - B = \emptyset \\ A - B = \emptyset \rightarrow A \subset B \end{cases}$



۶) $A \cap B = \emptyset \rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$



۷) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$



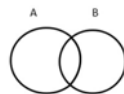
۸) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

۹) $A - B \neq B - A$

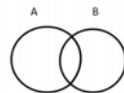
۱۰) $\begin{cases} A = B \rightarrow A - B = B - A = \emptyset \\ A - B = B - A \rightarrow A = B \end{cases}$

دو رابطه مهم:

۱) $B - A = B - (A \cap B)$



۲) $(A \cup B) - B = A - B$



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

تعداد اعضای مجموعه A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. اگر $A = \{ \}$ باشد آنگاه $n(A) = 0$ است و مجموعه A را تهی می‌گوییم.

اگر A مجموعه‌ای با n عضو باشد آن را مجموعه متناهی (n عضوی) می‌نامیم اما وقتی تعداد اعضای A محدود نباشد آن را نامتناهی می‌نامیم.

تذکره: ممکن است تعداد اعضای A خیلی خیلی زیاد باشد به طوری که شمردن آن‌ها برای ما سخت یا غیرممکن باشد ولی در کل مجموعه متناهی باشد مانند اتم‌های کره زمین، درختان جنگل آمازون و... دارای تعداد بسیار زیادی عضو هستند اما اعضایشان محدود است.

مجموعه‌های نامتناهی در کتاب درسی:

۱- هندسی: مجموعه تمام دایره‌ها به مرکز مبدأ، تمام خطوط با شیب ۳ و ...

۲- بازه‌های حقیقی گویا و گنگ: تمام بازه‌ها نامتناهی‌اند چون تعداد اعضایشان نامحدود است. اعداد گویا و گنگ در هر بازه نامتناهی‌اند چون بین هر دوتای آن‌ها بی‌شمار عدد دیگر وجود دارد.

۳- دارای اعضای بزرگ یا کوچک که تا $-\infty$ یا $+\infty$ می‌رسند: مجموعه اعداد N و W و Z ، اعداد اول، مضارب ۵ و... از این گروه هستند.

نکته: اگر مجموعه A متناهی باشد تمام زیرمجموعه‌های آن نیز متناهی‌اند و اشتراک A با هر مجموعه دیگر نیز حتماً متناهی است.

نکته: اگر مجموعه B نامتناهی باشد هم زیرمجموعه متناهی و زیرمجموعه نامتناهی دارد و اجتماع B با هر مجموعه دیگر نامتناهی است اما در مورد اشتراک با مجموعه‌های دیگر نمی‌توان نظری داد. جالب است بدانید اگر B نامتناهی باشد و $B \subset C$ آنگاه C حتماً نامتناهی است.

نکته: اگر دو مجموعه A و B داشته باشیم که نامتناهی باشند امکان دارد $A \subset B$ یا $B \subset A$ باشد، $B - A$ یا $A - B$ یک، دو و... عضوی باشند و یا امکان دارد $A \cap B$ تهی، تک عضوی، دو عضوی و... باشد اما $A \cup B$ حتماً نامتناهی است.

مثال) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد وضعیت مجموعه‌های زیر چگونه است؟

الف) $A \cap B$ ب) $B - A$ ج) $A - B$ د) $A \cup B$

الف) $A \cap B$ زیرمجموعه A است و از خود A بیشتر عضو ندارد پس حتماً متناهی است.

ب) $B - A$ شامل قسمت نامتناهی از B است پس حتماً نامتناهی است.

ج) $A - B$ زیرمجموعه A است پس حتماً متناهی است.

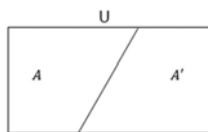
د) $A \cup B$ شامل قسمت نامتناهی از B است پس حتماً نامتناهی است.

مجموعه مرجع: مجموعه‌ای است که کل فضای مسئله را نمایش می‌دهد و تمام مجموعه‌های موجود زیرمجموعه آن هستند. این مجموعه را مجموعه جهانی یا عام هم می‌نامیم و معمولاً با U نمایش می‌دهیم.

هر مجموعه مانند A زیرمجموعه مرجع است یعنی: $A \subset U$

تعریف متمم: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subset U$ آنگاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نمایش می‌دهیم. به عبارتی دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

$$A' = U - A = \{x | x \notin A\}$$



خواص مجموعه متمم:

$$۱) \emptyset' = U$$

$$۲) U' = \emptyset$$

$$۳) (A')' = A$$

$$۴) A \cap A' = \emptyset$$

$$۵) A' - A = A'$$

$$۶) A - A' = A$$

$$۷) A \cup A' = U$$

$$۸) n(A') = n(U) - n(A)$$

$$۹) (A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{قوانین دمرگال}$$

$$۱۰) (A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{قوانین دمرگال}$$

$$۱۱) A - B = B' - A'$$

۱۲) وقتی $B' \subset A' \leftarrow A \subset B$ یعنی متمم‌ها با ترتیب برعکس زیرمجموعه می‌شوند.

در مورد متناهی و نامتناهی بودن مجموعه هم می‌توان به صورت زیر نظر داد:

۱- اگر U متناهی باشد تمام مجموعه‌ها و متمم‌های آن‌ها متناهی اند (چون همگی زیرمجموعه U هستند)

۲- اگر U نامتناهی باشد متمم هر مجموعه متناهی مانند A قطعاً نامتناهی است اما در مورد متمم مجموعه نامتناهی نظری نداریم. به عبارتی دیگر متمم یک مجموعه نامتناهی می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

قوانین تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه:

الف) اگر دو مجموعه A و B جدا از هم باشند یعنی $A \cap B = \emptyset$ داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

ب) اگر دو مجموعه A و B جدا از هم نباشند یعنی $A \cap B \neq \emptyset$ داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تعداد اعضای $A \cup B$ یعنی تعداد اعضای که به A یا B (حداقل یکی از این دو مجموعه) تعلق داشته باشد.

در حالت کلی:

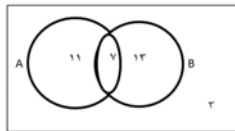
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

→ اگر A و B و C جدا از هم باشند

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

→ اگر A و B و C جدا از هم نباشند

مثال) در یک کلاس ۱۸ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۰ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند. اگر ۳ نفر عضو هیچ تیمی نباشند این سؤال را تحلیل کنید.



A فوتبال B والیبال

$n(A - B) = 11$ یعنی ۱۱ نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند

$n(A - B) + n(B - A) = 11 + 13 = 24$ یعنی ۲۴ نفر فقط عضو یک تیم هستند

$n(U) = 34$ یعنی کل نفرات کلاس ۳۴ نفر هستند

دقت شود بجز ۷ نفر مشترک بقیه افراد ($11 + 13 + 3 = 27$) حداکثر عضو یک تیم هستند

نفر $n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B) = 34 - 7 = 27$ به زبان ریاضی

مشخص کردن مجموعه‌ها: زمانی که اعضای مجموعه را با علائم ریاضی نشان می‌دهیم می‌توانیم یک متغیر را به عنوان نماینده اعضای مجموعه انتخاب کنیم و اعضای مجموعه را با توصیفی به آن متغیر نسبت دهیم.

مثال) اعضای مجموعه $A = \{x^2 + 1 \mid x \in Z, 1 < x \leq 5\}$ را مشخص کنید.

$$A = \{5, 10, 17, 26\}$$

تست‌های بازه:

۱- در $\{-۱, ۲\}$ و $(-۱, ۲)$ و $(-۱, ۲]$ و $[-۱, ۲]$ به ترتیب چند عدد صحیح وجود دارد؟

۴, ۳, ۳, ۴ (۴)

۴, ۳, ۳, ۲ (۳)

۳, ۲, ۳, ۲ (۲)

۴, ۲, ۳, ۲ (۱)

۲- در بازه های $A = [۰, ۱]$ و $B = (-۲, ۱]$ و $C = (-۱, +\infty)$ حاصل $(B \cap C) - A$ کدام است؟

$(-۱, ۱]$ (۴)

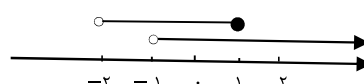
$(-۱, ۰]$ (۳)

$(-۱, ۰)$ (۲)

$(-۱, ۰) \cup \{۱\}$ (۱)

$$B \cap C = (-۱, ۱]$$

$$(B \cap C) - A = (-۱, ۱] - [۰, ۱] = (-۱, ۰) \cup \{۱\}$$



۳- اگر a_n بازه $[(-۱)^n n, ۲n]$ باشد $(n \in \mathbb{N})$ حاصل $a_۴ - a_۳ \cup a_۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

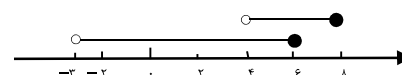
۷ (۱)

$$a_n = [(-۱)^n n, ۲n]$$

$$a_۱ = (-۱, ۲] \quad a_۳ = (-۳, ۶]$$

$$a_۲ = (۲, ۴] \quad a_۴ = (۴, ۸]$$

$$a_۴ - a_۳ = (۴, ۸] - (-۳, ۶] = (۶, ۸] \rightarrow (a_۴ - a_۳) \cup a_۱ = (۶, ۸] \cup (-۱, ۲]$$



شامل اعداد صحیح ۸ و ۷ و ۲ و ۱ و ۰ است

۴- اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{۲}]$ و $i \in \{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$ باشد آنگاه مجموعه $(A_۳ \cap A_۵) - (A_۱ \cap A_۷)$ به کدام صورت است؟

\emptyset (۴)

$[-۱, ۱]$ (۳)

$[-۲, -۱] \cup [۱, ۲]$ (۲)

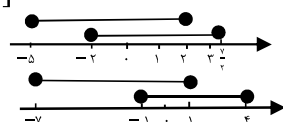
$[-۲, -۱) \cup (۱, ۲]$ (۱)

$$A_۱ = [-۱, ۴] \quad A_۳ = [-۲, \frac{۷}{۲}]$$

$$A_۵ = [-۵, ۲] \quad A_۷ = [-۷, ۱]$$

$$A_۳ \cap A_۵ = [-۲, ۲]$$

$$A_۱ \cap A_۷ = [-۱, ۱]$$



$$(A_۳ \cap A_۵) - (A_۱ \cap A_۷) = [-۲, ۲] - [-۱, ۱] = [-۲, -۱) \cup (۱, ۲]$$

۵- اگر $(-\infty, k+1] \cap [3k-2, +\infty) = \{a\}$ باشد $a+k$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$k+1 = 3k-2 \rightarrow 3 = 2k \rightarrow k = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{5}{2} \rightarrow a+k = 4$$

۶- اگر دو بازه $A = (2a-2, 10)$ و $B = (-2, a+1)$ هیچ عضو مشترکی نداشته باشند و بدانیم که عدد γ عضو مجموعه A است محدوده a کدام است؟

 $-2 < a \leq \gamma$ (۴)

 $-2 \leq a < \gamma$ (۳)

 $1 < a \leq 4/5$ (۲)

 $3 \leq a < 4/5$ (۱)

$$\begin{cases} a+1 \leq 2a-2 \rightarrow a \geq 3 \\ \gamma \in (2a-2, 10) \rightarrow 2a-2 < \gamma \rightarrow a < \frac{\gamma}{2} \end{cases} \rightarrow 3 \leq a < \frac{\gamma}{2}$$

تست‌های زیرمجموعه:

۱- فرض کنید $A = \{0, 1\}$ و $B = \{1, \{1\}\}$ در این صورت کدام گزینه درست نیست؟

- ۱) $\{1\} \in A$ ۲) $\{1\} \in B$ ۳) $\{1\} \subset A$ ۴) $\{1\} \subset B$

$$A = \{0, 1\} \rightarrow \begin{cases} \text{اعضا: } 0 \in A \text{ و } 1 \in A \\ \text{زیرمجموعه‌های } A: \emptyset \text{ و } \{0\} \text{ و } \{1\} \text{ و } \{0, 1\} \end{cases}$$

$$B = \{1, \{1\}\} \rightarrow \begin{cases} \text{اعضا: } 1 \in B \text{ و } \{1\} \in B \\ \text{زیرمجموعه‌های } B: \emptyset \text{ و } \{1\} \text{ و } \{\{1\}\} \text{ و } \{1, \{1\}\} \end{cases}$$

۲- تعداد زیرمجموعه‌هایی از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ که شامل ۳ و ۴ باشند کدام است؟

- ۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۴

\emptyset و $\{1\}$ و $\{2\}$ و $\{1, 2\}$

اعداد ۳ و ۴ را در نظر نمی‌گیریم بقیه را می‌نویسیم و در آخر می‌توانیم به تمام زیرمجموعه‌ها ۳ و ۴ را اضافه کنیم.

۳- اگر $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ زیرمجموعه‌های A که شامل f و d باشد ولی شامل a نباشد چندتا است؟

- ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۱۶

ابتدا لازم است آن دسته از زیرمجموعه‌هایی که نه شامل f و d و نه شامل a باشد را پیدا کنیم که تعداد آن‌ها می‌شود $2^3 = 8$ حالا کفایت f و d را به تک تک زیرمجموعه‌ها اضافه کنیم.

۴- اگر $A = \{2, 3, 4, 5, 8\}$ و $B = \{2, x + 3, 5\}$ باشد چند مقدار طبیعی ممکن برای x وجود دارد به طوری که $B \subset A$ باشد؟

- ۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{غ ق ق} \quad x + 3 = 2 \rightarrow x = -1 \\ \text{غ ق ق} \quad x + 3 = 3 \rightarrow x = 0 \\ \text{سه مقدار ممکن} \rightarrow \text{ق ق ق} \quad x + 3 = 4 \rightarrow x = 1 \\ \text{ق ق} \quad x + 3 = 5 \rightarrow x = 2 \\ \text{ق ق} \quad x + 3 = 8 \rightarrow x = 5 \end{array} \right.$$

۵- چند مجموعه مانند B وجود دارد که $\{a, b, c, d, e, f, g\} \supset B \supset \{a, c, d\} \subset A$ و $g \notin A$ باشد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۴

مجموعه B زیرمجموعه‌ای از $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ است که شامل d و c و a ولی فاقد g است. پس از مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ را کنار می‌گذاریم و می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های $\{a, b, c, d, e, f\}$ که شامل d و c و a باشند برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{d, e, f\}$ که برابر است با $2^3 = 8$.

۶- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{1, \{1\}, \{1, 1\}, \{1, 1, 1\}\}$ کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۱۶ (۳) ۸ (۴) ۴

$$A = \{1, \{1\}\} \rightarrow 2^2 = 4$$

۷- مجموعه A دارای n عضو است اگر دو عضو متمایز به A اضافه شود تعداد ۹۶ زیرمجموعه به زیرمجموعه‌های A اضافه می‌شود. n کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

$$2^{n+2} = 2^n + 96 \rightarrow 4(2^n) = 2^n + 96 \rightarrow 3(2^n) = 96 \rightarrow 2^n = 32 \rightarrow n = 5$$

۸- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $2n - 5$ عضو ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n - 2$ عضو است. مقدار n کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۱

$$2^{2n-5} = 16 \times 2^{n-2} \rightarrow 2^{2n-5} = 2^4 \times 2^{n-2} \rightarrow 2^{2n-5} = 2^{n+2} \rightarrow n = 7$$

۹- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n + 4$ عضو چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n - 1$ عضو است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۱۶ (۳) ۶۴ (۴) ۸

$$\frac{2^{n+4}}{2^{n-1}} = \frac{2^n \times 2^4}{2^n \times 2^{-1}} = 2^5 = 32$$

تست‌های مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

۱- اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدر مطلق کمتر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در Z با پایان است؟ (سراسری ۸۶)

$$A - B \quad (۱) \quad Z - A \quad (۲) \quad A \cap B \quad (۳) \quad A \cup B \quad (۴)$$

$$A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, \dots\} \quad B = \{-۹۹, -۹۸, \dots, ۹۸, ۹۹\}$$

بررسی گزینه‌ها:

$$۱) A - B = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, \dots\} - \{-۹۹, -۹۸, \dots, ۹۸, ۹۹\} = \{۱۰۲, ۱۰۵, \dots\}$$
 بی پایان

$$۲) Z - A = \{\dots, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\} - \{۳, ۶, ۹, ۱۲, \dots\} = \{\dots, -۱, ۰, ۱, ۲, ۴, ۵, ۷\}$$
 بی پایان

$$۳) A \cap B = \{۳, ۶, ۹, \dots, ۹۹\}$$
 با پایان

$$۴) A \cup B =$$
 بی پایان

۲- اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد کدام مجموعه نامتناهی است؟ (خارج ۹۲)

$$A \cap B \quad (۱) \quad B - A \quad (۲) \quad A - B \quad (۳) \quad (A - B) - A \quad (۴)$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) چون $A \cap B \subset B$ است و B متناهی است پس اعضای $A \cap B$ کمتر از اعضای B اند پس $A \cap B$ حتماً متناهی است.

۲) $B - A \subset B$ است پس طبق توضیحات گزینه ۱ مجموعه متناهی است.

۳) $A - B \subset A$ است پس $A - B$ نامتناهی عضو دارد که تعداد متناهی عضو از آن برداشته می‌شود پس نامتناهی عضو باقی می‌ماند و مجموعه نهایی نامتناهی است.

۴) $A - B \subset A$ پس $(A - B) - A = \emptyset$ است که مجموعه‌ای متناهی است.

۳- اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد باشد و B مجموعه اعداد اول باشد، کدام مجموعه متناهی و غیر تهی است؟ (خارج ۹۱)

$$A - B \quad (۱) \quad B - A \quad (۲) \quad A \cap B \quad (۳) \quad A - (A \cup B) \quad (۴)$$

$$A = \{۱, ۳, ۵, \dots\} \quad B = \{۲, ۳, ۵, ۷, \dots\}$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) $A - B = \{۱, ۹, ۱۵, ۲۱, \dots\}$ نامتناهی و غیر تهی

۲) $B - A = \{۲\}$ متناهی و غیر تهی

۳) $A \cap B = \{۳, ۵, ۷, ۱۱, \dots\}$ نامتناهی و غیر تهی

۴) $A - (A \cup B) \xrightarrow{A \subset (A \cup B)} A - (A \cup B) = \emptyset$ متناهی و تهی

۴- اگر $A = \{۱, ۲, ۳, \{۴, ۵, \dots\}\}$ و $B = \{۵, ۶, ۷, \dots\}$ باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) A نامتناهی و B متناهی A متناهی و B نامتناهی A نامتناهی و B نامتناهی

۲) A و B هر دو نامتناهی A و B هر دو متناهی

مجموعه B نامتناهی است ولی A تنها سه عضو دارد پس متناهی است. دقت شود A یک عضو دارد که تعداد اعضای آن نامتناهی است.

۵- اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟

۱) $B - A$ $(۲) A \cap B$ $(۳) A - B$ $(۴) A \cup B$

اجتماع دو مجموعه نامتناهی حداقل به اندازه تک تک آن‌ها عضو دارد پس حتماً متناهی است.

برای رد کردن گزینه‌های ۱ و ۳ مثالی می‌زنیم:

$$A = \{۰, ۱, ۲, \dots\} \quad B = \{۲, ۳, ۴, \dots\}$$

$$A - B = \{۰, ۱\} \quad B - A = \emptyset$$

برای رد کردن گزینه ۲ مجموعه $A = N$ و $B = Z - N$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} A = \{۱, ۲, ۳, \dots\} \\ B = \{۰, -۱, -۲, \dots\} \end{cases} \rightarrow A \cap B = \emptyset$$

۶- اگر مجموعه A متناهی و مجموعه B نامتناهی باشد کدامیک از مجموعه‌های زیر حتماً متناهی است؟

$$(۱) B' \quad (۲) (A - B) \cup (B - A) \quad (۳) A' - B \quad (۴) \underline{A \cap B}$$

گزینه ۴ صحیح است چون $(A \cap B) \subset A$ و A متناهی است پس $A \cap B$ حتماً متناهی است.

برای نادرستی گزینه‌های دیگر مثال نقض می‌زنیم:

گزینه (۱) اگر B مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد B' مجموعه اعداد طبیعی فرد است که B و B' هر دو نامتناهی‌اند. (مجموعه مرجع N).

گزینه (۲) $(A - B) \cup (B - A)$ اگر A و B جدا از هم باشند برابر است با $A \cup B$ و چون B نامتناهی است پس $A \cup B$ هم نامتناهی است.

$$\text{گزینه (۳) آنگاه } B' = (-\infty, 0) \text{ است و } A' - B = (-\infty, 0) \text{ نامتناهی است. (مجموعه مرجع } R)$$

$$\begin{cases} A = \{0\} \\ B = (0, +\infty) \\ A' = R - \{0\} \end{cases}$$

۷- کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(۲) مجموعه اعداد حسابی و غیر گنگ

(۱) مجموعه مضرب‌های ۵ کوچکتر مساوی ۱۵

$$(۴) Z - W$$

$$(۳) \underline{W - N}$$

گزینه (۱) $\{15, 10, 5, 0, -5, \dots\}$ نامتناهی است

گزینه (۲) همه اعضای مجموعه اعداد حسابی گویا، (غیرگنگ) هستند پس نامتناهی است

گزینه (۳) $W - N = \{0\}$ متناهی است

گزینه (۴) $Z - W = \{-1, -2, \dots\}$ نامتناهی است.

۸- اگر $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\}$ و $B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in N \right\}$ مفروض است کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ (سراسری ۹۶)

$$(۱) A - B \quad (۲) B - A \quad (۳) \underline{A \cap B} \quad (۴) A \cup B$$

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\} \quad B = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \dots \right\}$$

$$۱) A - B = \left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \right\} \text{ نامتناهی}$$

$$۲) B - A = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots \right\} \text{ نامتناهی}$$

$$۳) A \cap B = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\} \text{ متناهی}$$

$$۴) A \cup B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \text{ نامتناهی}$$

تست‌های اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها:

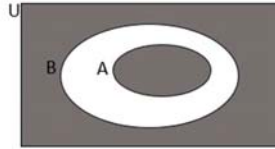
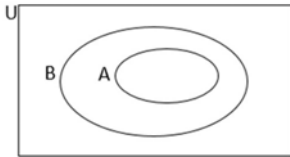
۱- اگر $A \subset B$ باشد کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست نیست؟

$A \cup B' = U$ (۴)

$A \cap B' = \emptyset$ (۳)

$A' \cup B = U$ (۲)

$A' \subset B'$ (۱)



گزینه ۴ صحیح است. دلیل:

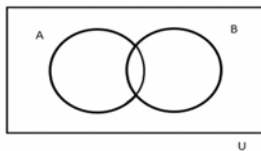
۲- مجموعه $A - (A - B)$ همواره برابر است با:

$A \cup B'$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

\emptyset (۲)

$A \cup B$ (۱)



۳- اگر $A \subset B$ باشد کدام گزینه درست است؟

$(A \cap B) \cup A = A$ (۳)

$(A \cap B) \cup B = A$ (۱)

$(A \cup B) \cap B = A$ (۴)

$(A \cap B) \cup A = B$ (۲)

بررسی گزینه‌ها:

۱) $(A \cap B) \cup B = A \cup B = B$ ×

۲) $(A \cap B) \cup A = A \cup A = A$ ×

۳) $(A \cap B) \cup A = A \cup A = A$ ✓

۴) $(A \cup B) \cap B = B \cap B = B$ ×

۴- کدام مجموعه زیرمجموعه سایر مجموعه‌هاست؟

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (۴)

$\emptyset \cap \{\emptyset\}$ (۳)

$\emptyset \cup \{\emptyset\}$ (۲)

$\{\{\emptyset\}\}$ (۱)

اشتراک تهی با هر مجموعه دیگر برابر تهی است در نتیجه گزینه ۱ و ۴ که عضو دارند تهی نیستند.

۲) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ تهی نیست

۳) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$ ✓

۵- اگر $B \subset A$ و $C \subset B$ باشد کدام یک از رابطه‌های زیر نادرست است؟

(۱) $(A \cap B) \cup C = C$ (۲) $(A \cup B) \cap C = C$

(۳) $(A \cup C) \cap B = B$ (۴) $(A \cap C) \cup B = B$

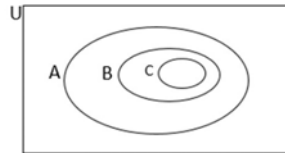
اگر $B \subset A$ و $C \subset B$ باشد آنگاه حتماً $C \subset A$ است. بررسی گزینه‌ها:

۱) $(A \cap B) \cup C = B$ ×

۲) $(A \cup B) \cap C = C$ ✓

۳) $(A \cup C) \cap B = B$ ✓

۴) $(A \cap C) \cup B = B$ ✓



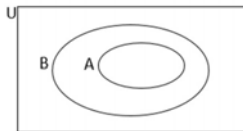
۶- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی و $A \cup B \subset B$ باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) $B \subset A$

(۲) $A \cap B = \emptyset$

(۳) $A \cap B = B$

(۴) $A \cap B = A$



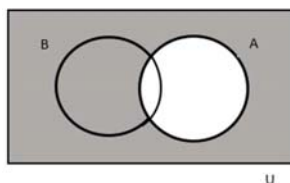
۷- ناحیه سایه زده کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟

(۱) A'

(۲) $A' \cup B$

(۳) $B - A$

(۴) $B' - A$



۸- متمم مجموعه‌های $A' \cap B'$ و $A' \cup B'$ به ترتیب کدام است؟

(۱) $A - B$ و $B - A$

(۲) $A \cup B$ و $A \cap B$

(۳) $A \cap B$ و $A \cup B$

(۴) $A' \cap B'$ و $A' \cup B'$

با توجه به قوانین دمرگال:

$A' \cup B' = A \cap B$

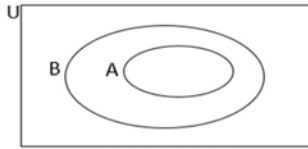
$A' \cap B' = A \cup B$

۹- اگر $(A - B) \subset (A - B)'$ باشد آنگاه $A' \cup B$ کدام است؟

- \emptyset (۱) U (۲) A (۳) B (۴)

در هیچ مجموعه‌ای مانند $* \subset *'$ هیچ‌گاه $* \subset *'$ نمی‌شود مگر اینکه $* = \emptyset$ باشد. از $(A - B) \subset (A - B)'$ نتیجه می‌شود

$A - B = \emptyset$ یعنی $A \subset B$ است پس داریم: $A' \cup B = U$



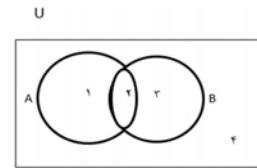
۱۰- متمم مجموعه $(B - A)' - A$ نسبت به U کدام است؟

- $A \cup B$ (۱) $A \cap B$ (۲) A (۳) B (۴)

$$(B - A)' - A = (B \cap A')' - A = (B' \cup A) - A = (B' \cup A) \cap A' = (B' \cap A') \cup (A \cap A')$$

$$\rightarrow (B' \cap A') \cup \emptyset = B' \cap A' \xrightarrow{\text{متمم}} (B' \cap A')' = B \cup A$$

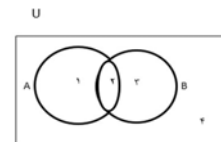
$$\text{روش دوم: } (B - A)' - A = (۳)' - (۱, ۲) = (۱, ۲, ۴) - (۱, ۲) = (۴) \xrightarrow{\text{متمم}} (۴)' = (۱, ۲, ۳) = A \cup B$$



۱۱- مجموعه $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟ (سراسری ۸۸)

- $B - A$ (۱) B (۲) A' (۳) \emptyset (۴)

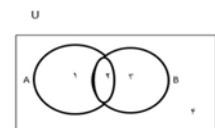
$$(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' = \{۲, ۳, ۴\} \cap \{۱, ۲, ۳\} \cap \{۳, ۴\} = \{۳\} = B - A$$



۱۲- مجموعه $[A \cap (A - B)'] \cup [B \cap (A' \cup B')]$ با کدام یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

- A (۱) B (۲) $B \cap A'$ (۳) $A \cap B'$ (۴)

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = \{۱, ۳, ۴\} \rightarrow [\{۱, ۲\} \cap \{۱, ۳, ۴\}] \cup [\{۲, ۳\} \cup \{۱, ۳, ۴\}] = \{۲\} \cup \{۳\} = B$$



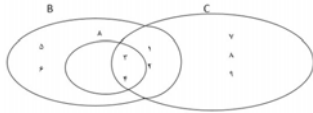
۱۳- با توجه به شکل مقابل مجموعه $(A - B) \cup (C - A)$ چند عضو دارد؟ (خارج ۸۹)

۶ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)



$$A = \{3, 4\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad C = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

$$A - B = \emptyset \quad C - A = \{1, 2, 7, 8, 9\} \rightarrow (A - B) \cup (C - A) = 5 \text{ عضو دارد}$$

۱۴- اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ آنگاه کدام نتیجه زیر درست است؟ (سراسری ۹۲)

$B \cap C \neq \emptyset$ (۴)

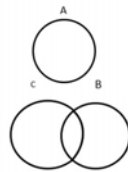
$A \cap (B \cup C) = \emptyset$ (۳)

$A \cap (B - C) \neq \emptyset$ (۲)

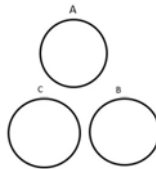
$B \cap C = \emptyset$ (۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱) $B \cap C \neq \emptyset \rightarrow$ نادرست



۲) $B \cap C = \emptyset \rightarrow$ نادرست



۳) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \rightarrow$ درست

۴) $(B - C) \subset B \rightarrow A \cap (B - C) = A \cap B = \emptyset \rightarrow$ این رابطه همواره نادرست است

۱۵- اگر A مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ و B مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و کمتر از ۱۰۰ باشد، $A - B$ چند عضو دارد؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

$$A = \{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, \dots, 99\}$$

$$A - B = \{14, 28, 35, 49, 56, 70, 77, 91, 98\} \rightarrow 9 \text{ عضو دارد}$$

۱۶- مجموعه $(A \cup B)$ دارای ۵ عضو و مجموعه $(A \cap B)$ دارای ۲ عضو و $(A - B)$ نیز دارای ۲ عضو می‌باشد. در این صورت مجموعه $(B - A)$ چند عضو دارد؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

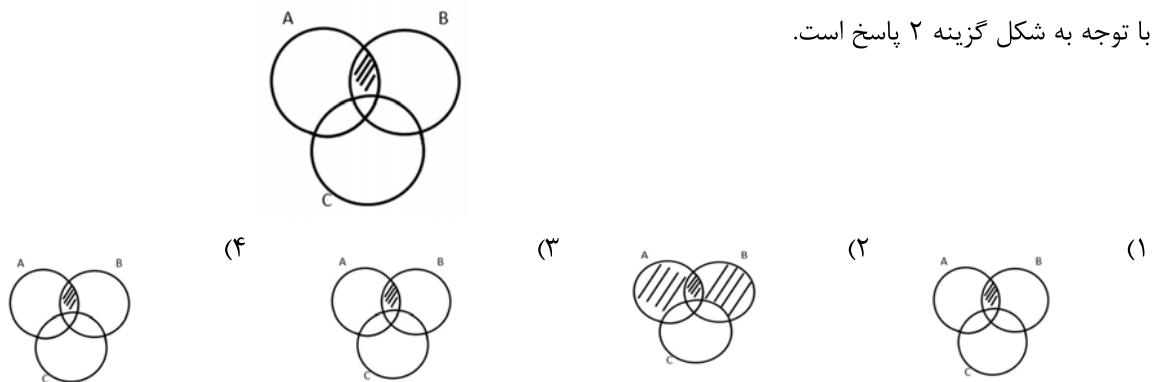
$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \rightarrow 5 = 2 + 2 + n(B - A) \rightarrow n(B - A) = 1$$

۱۷- متمم مجموعه $C \cup A' \cup B'$ نسبت به مجموعه U با کدام مجموعه برابر نیست؟ (خارج ۸۹)

(۱) $(A \cap B) - (A \cap C)$ (۳) $A \cap (B - C)$

(۲) $(A - C) \cup (B - C)$ (۴) $(A \cap B) - C$

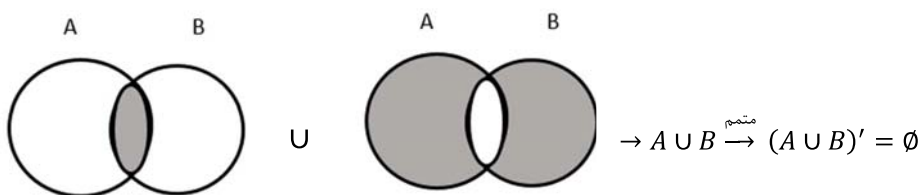
با توجه به شکل گزینه ۲ پاسخ است.



۱۸- متمم مجموعه $[A - (A - B)] \cup (A \cap B)'$ کدام است؟ (خارج ۸۹)

- (۱) A (۲) B' (۳) \emptyset (۴) $A' \cup B'$

$$[A - (A - B)] \cup (A \cap B)'$$



۱۹- اگر A و B و C سه مجموعه غیرتهی باشند به طوری که $A \subset B$ ، آنگاه مجموعه $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

- (۱) $A \cap C'$ (۲) $A \cap C$ (۳) A (۴) B

$$(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C) \xrightarrow{B-C=B \cap C'} (A \cap B \cap C') - (A \cap B \cap C)$$

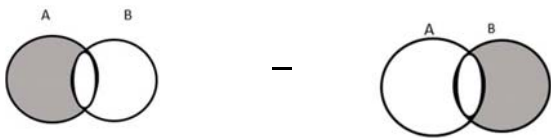
$$\xrightarrow[\substack{A \subset B \\ A \cap B = A}]{A \cap C'} (A \cap C') - (A \cap C) = A \cap C' \text{ یا } A - C$$

دقت شود $A \cap C'$ اشتراکی با $A \cap C$ ندارد چون C و C' اشتراکی ندارند.

۲۰- اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟

- (۱) B' (۲) \emptyset (۳) $A \cap B$ (۴) $A - B$

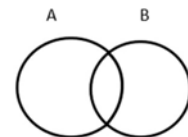
$$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = A - B$$



۲۱- اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشد، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $A \cup B$ (۴) $A \cup B'$

$$A - (B - (A \cap B)) = A - (B - A) \xrightarrow{\text{جدا از هم هستند } A \text{ و } (B-A)} A - (B - A) = A$$



۲۲- متمم مجموعه $[(A \cup B) - (A \cap B)] \cap [A' - (A \cap B)]'$ کدام است؟

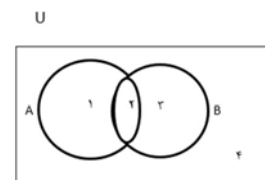
- (۱) $A' \cup B$ (۲) $A \cap B'$ (۳) $A' \cup B'$ (۴) $A' \cap B'$

$$[(A \cup B) - (A \cap B)] \cap [A' - (A \cap B)]' = [(A - B) \cup (B - A)] \cap [A' \cap (A \cap B)]'$$

$$= [(A - B) \cup (B - A)] \cap [A \cup (A \cap B)] = [(A - B) \cup (B - A)] \cap A = A - B = A \cap B' \xrightarrow{\text{متمم}} A' \cup B$$

$$\text{روش دوم: } [(A \cup B) - (A \cap B)] \cap [A' - (A \cap B)]' = [\{1,2,3\} - \{2\}] \cap [\{3,4\} - \{2\}]'$$

$$= \{1,3\} \cap \{3,4\}' = \{1,3\} \cap \{1,2\} = \{1\} = A - B = A \cap B' \xrightarrow{\text{متمم}} A' \cup B$$



۲۳- اگر A مجموعه اعداد طبیعی که بر ۶ بخش پذیراند و B مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی کمتر از ۴۰ که بر ۳ بخش پذیراند باشد، مجموعه $A - B$ چند عضو دارد؟ (خارج ۹۵)

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

$$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$$

$$B = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}$$

$$B - A = \{15, 21, 27, 33, 39\} \rightarrow \text{عضو } 5$$

تست‌های اعضای اجتماع $n(A \cup B)$:

۱- در یک جمع ۶۰ نفری ۴۰ نفر ورزشکار و ۲۰ نفر هنرمند هستند. اگر ۵ نفر عضو هر دو گروه باشند، چند نفر عضو هیچ گروهی نیستند؟ (هنرمند $B =$ و ورزشکار $A =$)

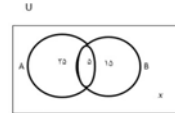
۸ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۵ (۱)

$$۳۵ + ۵ + ۱۵ + x = ۶۰ \rightarrow x = ۵$$



۲- از بین ۳۶ دانش‌آموز یک کلاس ۴ نفر به اردو نرفته‌اند و بقیه آن‌ها برای اردو به قم یا مشهد رفته‌اند به این ترتیب که ۲۱ نفر به قم و ۶ نفر به مشهد و قم سفر کرده‌اند. چند نفر فقط به مشهد رفته‌اند؟ (مشهد $B =$ و قم $A =$)

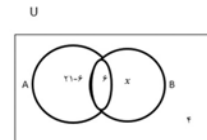
۱۱ (۴)

۱۵ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

$$۱۵ + ۶ + x + ۴ = ۳۶ \rightarrow x = ۱۱$$



۳- در یک کلاس ۲۰ نفره ۱۰ نفر عضو کتابخانه و ۸ نفر عضو بسیج هستند اگر ۵ نفر عضو هیچ گروهی نباشند چند نفر فقط عضو یکی از این دو گروه هستند؟ (بسیج $B =$ و کتابخانه $A =$)

۳ (۴)

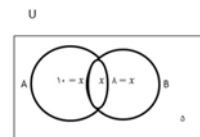
۱۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

$$۱۰ - x + x + ۸ - x + ۵ = ۲۰ \rightarrow x = ۳$$

$$\text{پاسخ: } \xrightarrow{x=3} ۱۰ - x + ۸ - x = ۱۲ \text{ نفر}$$



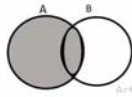
۴- در یک روستا شامل ۵۰ کشاورز فقط سیب و گلابی کشت می‌شود اگر ۲۰ کشاورز سیب و ۷ کشاورز هم سیب و هم گلابی بکارند چند کشاورز فقط گلابی می‌کارند؟ (گلابی = B و سیب = A)

۴۳ (۴)

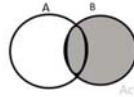
۳۷ (۳)

۳۰ (۲)

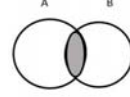
۲۳ (۱)



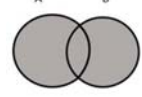
۲۰ نفر کشت سیب



x نفر کشت گلابی



۷ نفر کشت سیب و گلابی

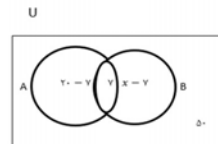


۵۰ نفر کل کشاورزان

تعداد مشترک A و B - تعداد گروه B + تعداد گروه A = تعداد کل کشاورزان

$$50 = 20 + x - 7 \rightarrow x = 37$$

روش دوم: $(20 - 7) + 7 + (x - 7) = 50 \rightarrow x = 37$



۵- در یک کلاس ۲۳ نفره ۱۵ نفر عضو تیم A و ۱۳ نفر عضو تیم B هستند. با فرض اینکه هر دانش‌آموز حداقل عضو یک تیم باشند چند نفر فقط عضو تیم B هستند؟

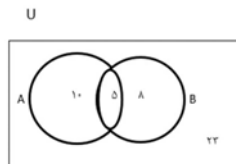
۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

چون از ۲۳ نفر ۱۵ نفر عضو تیم A هستند پس $23 - 15 = 8$ نفر عضو تیم A نیستند و از آنجا که هر نفر باید حداقل عضو یکی از دو تیم باشد این ۸ نفر فقط عضو تیم B هستند.



اشتراک: $13 - 8 = 5$

۶- در یک کلاس ۳۰ نفره ۱۰ دانش‌آموز به درس ریاضی و ۷ دانش‌آموز به درس فیزیک علاقه دارند اگر در این کلاس تنها ۵ نفر به هر دو درس علاقه داشته باشند دقیقاً چند نفر به هر دو درس بی‌علاقه هستند؟ (فیزیک = B و ریاضی = A)

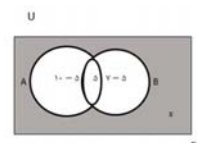
۲۳ (۴)

۲۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۸ (۱)

$$(10 - 5) + 5 + (7 - 5) + x = 30 \rightarrow 5 + 5 + 2 + x = 30 \rightarrow x = 18$$



۷- در یک کلاس ۴۰ نفری ۱۸ نفر در فوق برنامه هنری و ۲۱ نفر در فوق برنامه علمی شرکت کردند اگر ۹ نفر آن‌ها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند چند نفر از آن‌ها در هر دو برنامه شرکت کردند؟ (سراسری ۹۵) ($A =$ هنری و $B =$ علمی)

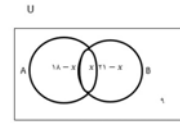
۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$۱۸ - x + x + ۲۱ - x + ۹ = ۴۰ \rightarrow x = ۸$$



۸- اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است مجموعه های $(A - B)$ و $(B - A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند اگر از هریک از مجموعه های A و B ۹ عضو برداشته شود از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۲۶ (۴)

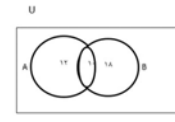
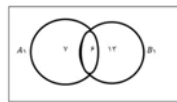
۲۴ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

$$n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A) - n(B) = ۴۰ - (۱۲ + ۱۸) = ۱۰ \text{ عضو}$$

$$n(A_1 \cup B_1) = ۱۳ + ۶ + ۷ = ۲۶$$



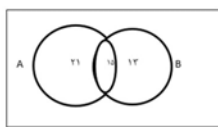
۹- مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود از اشتراک آن‌ها ۹ عضو کم می‌شود تعداد اعضای اجتماع مجموعه‌های جدید با مجموعه B کدام است؟ (سراسری ۹۴ خارج)

۳۳ (۴)

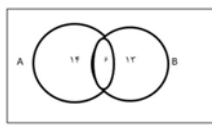
۴۲ (۳)

۴۱ (۲)

۴۰ (۱)



→



$$n(A \cup B) = ۱۴ + ۶ + ۱۳ = ۳۳ \text{ عضو}$$

بعد از حذف ۱۶ عضو از A

۱۰- اگر $n(A - B) = ۲$ و $n(B - A) = ۸$ و $n(B) = ۳n(A)$ باشد $n(A \cup B)$ چند عضو دارد؟

۱۵ (۴)

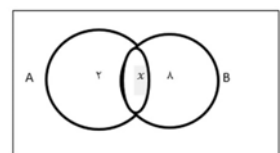
۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

$$n(B) = ۳n(A) \rightarrow ۸ + x = ۳(۲ + x) \rightarrow x = ۱$$

$$n(A \cup B) = ۲ + ۱ + ۸ = ۱۱$$

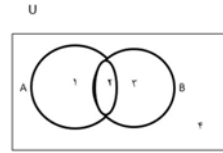


۱۱- حاصل $n(A \cup B')$ کدام است؟ (U مرجع)

$$n(U) - n(A \cap B) \quad (۱) \quad n(U) - n(A - B) \quad (۲)$$

$$n(U) - n(B - A) \quad (۳) \quad n(U) - n(B) \quad (۴)$$

$$A \cup B' = \{۱, ۲\} \cup \{۱, ۴\} = \{۱, ۲, ۴\} = \{۱, ۲, ۳, ۴\} - \{۳\} = n(U) - n(B - A)$$



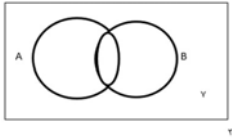
۱۲- در یک کلاس ۳۲ نفری ۷ نفر به هیچ کدام از ورزش های فوتبال و والیبال علاقه ندارند همچنین تعداد کسانی که به والیبال علاقه دارند با تعداد کسانی که به فوتبال علاقه دارند برابر است. حداکثر چند نفر به فوتبال علاقه دارند؟ (والیبال $B =$ و فوتبال $A =$)

$$۱۳ (۴)$$

$$۱۲ (۳)$$

$$۱۱ (۲)$$

$$۱۰ (۱)$$



$$n(U) = ۳۲ \quad n(A \cup B) = n(U) - ۷ = ۳۲ - ۷ = ۲۵$$

$$n(A \cup B) = ۲۵ \rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۲۵$$

از آنجایی که $n(A) = n(B)$ پس $n(A \cap B)$ عددی فرد است که کمترین مقدار آن ۱ است پس حداکثر ۱۲ نفر وجود دارد که فقط به فوتبال علاقه دارند.

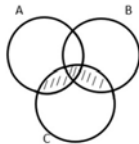
$$n(A) = n(B) = ۱۳ \rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۳ - ۱ = ۱۲$$

۷- اگر A و B دو مجموعه مجزا باشند حاصل $C \cup [A \cap (B \cup C)]$ کدام است؟

- (۱) $A \cap C$ (۲) $B \cup C$ (۳) \emptyset (۴) C

۸- A و B و C سه مجموعه هستند و داریم $A \subset B \subset C$. حاصل مجموعه $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) C (۴) $B \cup C$



۹- کدام مجموعه قسمت سایه خورده را نشان می‌دهد؟

- (۱) $A \cap (B \cup C)$ (۲) $A \cup (B \cap C)$
(۳) $C \cup (A \cap B)$ (۴) $C \cap (A \cup B)$

۱۰- مجموعه تعداد طبیعی N ، اعداد حسابی W و اعداد صحیح Z مفروض هستند. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $N \cup W \subset W$ (۲) $N \cap W \subset W$
(۳) $W \cup Z \subset W$ (۴) $N \cap Z \subset W$

۱۱- اگر N و Z و Q و R به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی، صحیح، گویا و حقیقی باشند مجموعه $Z \cap (R \cup N) \cap Q$ کدام است؟

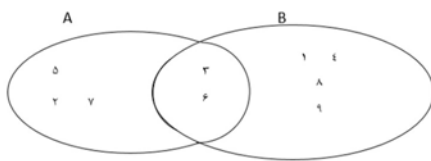
- (۱) Z (۲) Q (۳) R (۴) N

۱۲- مجموعه A دارای ۷ عضو و مجموعه $A \cup B$ دارای ۹ عضو است مجموعه $A \cup (B \cap A')$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۱۶ (۴) ۲

۱۳- با توجه به شکل زیر اجتماع دو مجموعه $A - (A - B)$ و $B - (B - A)$ چند عضو دارد؟ (سراسری ۸۹)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۱۴- اگر $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A \cap B = \{2, 5\}$ باشد مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۵- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟

- (۱) $Z \cup N = N$ (۲) $R \cap Q = Q$ (۳) $W - \{0\} = N$ (۴) $R - Q' = Q$

۱۶- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟

(۱) $N \cap W = N$ (۲) $W - N = \emptyset$ (۳) $N - W = \emptyset$ (۴) $W \cup N = W$

۱۷- اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد تک رقمی و B مجموعه اعداد اول تک رقمی باشد $A - B$ دارای چند زیرمجموعه است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۸

۱۸- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A \cap B = \{3, 5\}$ باشد مجموعه $A - B$ کدام است؟

(۱) $\{1, 2, 4\}$ (۲) $\{2, 3\}$ (۳) $\{2, 4, 5\}$ (۴) $\{1, 2, 5\}$

۱۹- اگر $A \subset B$ باشد حاصل $(A - B) \cap (A - C)$ کدام است؟

(۱) C (۲) A (۳) B (۴) \emptyset

۲۰- در یک مهمانی ۴۵ نفره ۲۳ نفر چای، ۲۱ نفر قهوه و ۱۱ نفر هر دو نوشیدنی را خوردند. چند نفر نه چای و نه قهوه نوشیدند؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۴) ۱۸ (۴) ۱۷

۲۱- در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر عضو تیم A و ۱۵ نفر عضو تیم B هستند اگر ۵ نفر از این کلاس عضو هیچ کدام از این تیم نباشند چند نفر عضو هر دو تیم هستند؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۲- اگر $n(A - B) = ۳$ و $n(B - A) = ۷$ و تعداد اعضای B دو برابر تعداد اعضای A باشد A و B چند عضو مشترک دارند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳- مجموعه های A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مادر هستند به طوری که $n(U) = ۲۰۰$ و $n(A) = ۱۰۰$ و $n(B) = ۷۰$ و $n(A \cap B) = ۴۰$ است. تعداد عضو هایی که نه در A و نه در B قرار دارند کدام است؟

(۱) ۷۰ (۲) ۸۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۱۰

۲۴- در یک کلاس ۵۰ نفره ۳۰ نفر به فوتبال و ۲۰ نفر به بسکتبال و ۱۵ نفر به والیبال و ۵ نفر به هر سه رشته علاقه دارند اگر ۴ نفر به هیچ‌یک از این سه رشته علاقه نداشته باشد چند نفر فقط به ۲ رشته علاقه دارند؟

(۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) ۶

جواب تمرین‌های مبحث مجموعه:

۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است

$$k = 10 \rightarrow \forall k = 70$$

$$k = 11 \rightarrow \forall k = 77$$

$$k = 12 \rightarrow \forall k = 84$$

$$k = 13 \rightarrow \forall k = 91$$

$$k = 14 \rightarrow \forall k = 98$$

$$k = 15 \rightarrow \forall k = 105 \quad \text{غ ق ق} \quad \text{پس عضوهای زیرمجموعه } A \text{ عضو دارد}$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است

$$2^{n+3} + 2^{n+1} + 2^{n-2} = 164 \rightarrow 2^n(2^3 + 2^1 + 2^{-2}) = 164 \rightarrow 2^n \times \frac{41}{4} = 164 \rightarrow 2^n = 16 \rightarrow n = 4$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است

الف) نامتناهی چون بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد گویا وجود دارد

$$\text{ب) نامتناهی است مانند } A = \left\{ 3, 4, \frac{17}{4}, \dots \right\}$$

ج) مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ متناهی است

د) مجموعه $\{10\} - \{1, 2, 3, \dots, 19\}$ متناهی است

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است

همه گزینه‌ها صحیح هستند اما در مورد گزینه ۳: $A \cap B$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است

$$\begin{cases} A \subset (A \cup B) \\ A \cup B = \emptyset \end{cases} \rightarrow A \subset \emptyset \xrightarrow{\emptyset \subset A} A = \emptyset$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است

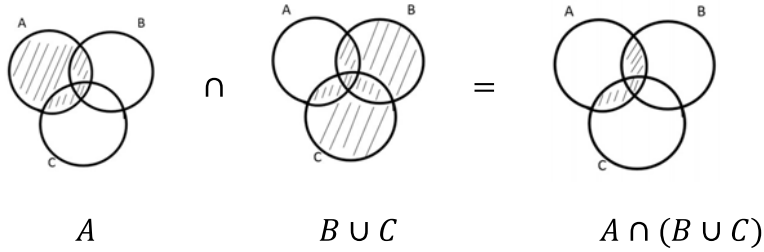
$$[A \cap (B \cup C)] \cup C = [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cup C = [\emptyset \cup (A \cap C)] \cup C = [A \cap C] \cup C = C$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است

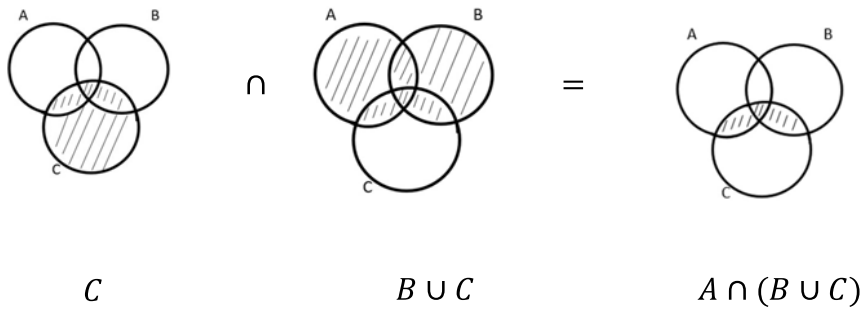
$$\begin{cases} A \subset B \rightarrow A \cup B = B \\ A \subset C \rightarrow A \cup C = C \end{cases} \rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) = B \cap C \xrightarrow{B \subset C} B$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است

اجتماع دو مجموعه تمام اعضای هر دو مجموعه را شامل می‌شود یعنی گزینه ۲ و ۳ رد می‌شود چون A و C کامل رنگ نشده



بررسی گزینه ۱:



بررسی گزینه ۴:

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است

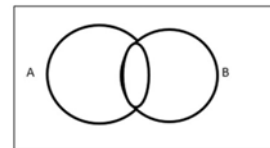
$$N = \{1, 2, 3, \dots\} \quad W = \{0, 1, 2, \dots\} \quad Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است

$$Z \cap (R \cup N) \cap Q \rightarrow Z \cap R \cap Q = Z \cap Q = Z$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است

$$A \cup (B \cap A') = A \cup (B - A) = A \cup B = \text{دارای ۹ عضو}$$



۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است

$$B - (B - A) = A \cap B$$

$$A - (A - B) = A \cap B$$

$$\rightarrow [B - (B - A)] \cup [A - (A - B)] = (A \cap B) \cup (A \cap B) = A \cap B = \{3, 6\}$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 5\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

۴ عضو دارد

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ و } B = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow A - B = \{1, 9\} \rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه ها} = 2^2 = 4$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است

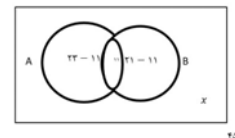
$$A - (A - B) = A \cap B \rightarrow A - B = A - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 5\} = \{1, 2, 4\}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است

$$A \subset B \xrightarrow{A-B=\emptyset} (A - B) \cap (A - C) = \emptyset \cap (A - C) = \emptyset$$

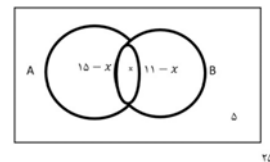
۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است

$$A = \text{چای} \text{ و } B = \text{قهوه} \rightarrow (23 - 11) + 11 + (21 - 11) + x = 45 \rightarrow x = 12$$



۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است

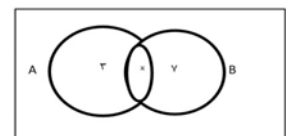
$$(15 - x) + x + (11 - x) + 5 = 25 \rightarrow x = 6$$



۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است

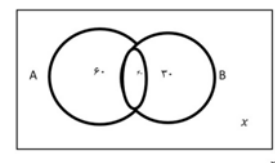
$$n(A) = 3 + x \text{ و } n(B) = 7 + x \rightarrow n(B) = 2n(A) \rightarrow 7 + x = 2(3 + x) \rightarrow x = 1$$

$$n(A \cap B) = 1$$



۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است

$$60 + 4 + 30 + x = 200 \rightarrow x = 70$$

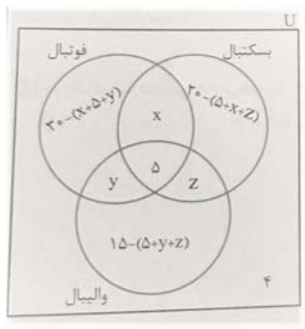


۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است

با توجه به اینکه کل افراد ۵۰ نفر هستند:

$$30 - (x + 5 + y) + 20 - (5 + x + z) + 15 - (5 + y + z) + x + y + z + 5 + 4 = 50$$

$$\rightarrow 59 - x - y - z = 50 \rightarrow x + y + z = 9$$



بنابراین ۹ نفر فقط به دو رشته علاقه دارند.