



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

مثلثات

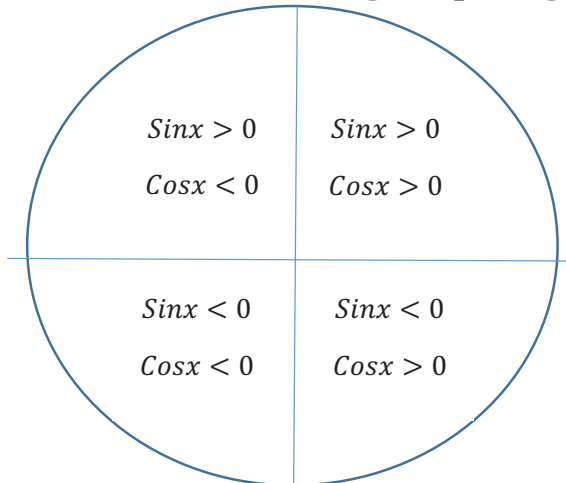
نکته ۱: در یک مثلث قائم الزاویه داریم

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه آلفا}}{\text{وتر}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه آلفا}}{\text{وتر}} \quad \tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه آلفا}}{\text{ضلع مجاور زاویه آلفا}}$$

نکته ۲: نسبت های مثلثاتی زوایای معروف را حفظ باشیم.

زاویه - نسبت	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

نکته ۳: نسبت های مثلثاتی در چه ربع هایی مثبت و یا منفی هستند.



تانژانت حاصل تقسیم سینوس به کسینوس است پس علامت آن مثبت است اگر هر دو مثبت یا منفی باشند.

نکته ۴: یک فرمول بسیار مهم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

مثال: زاویه آلفا در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ می باشد. مقدار $\cos \alpha$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

زاویه آلفا در ربع دوم است کسینوس آن منفی بوده و $-\frac{4}{5}$ قابل قبول می باشد.

نکته ۵: برای هر زاویه

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \& \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

نکته ۶: روابط مثلثاتی دو آلفا!

اگر مقدار یک نسبت مثلثاتی زاویه ای را داشته باشیم میتوانیم نسبت های مربوط به زاویه های نصف و دو برابر آن را نیز به دست آوریم.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان این است که به طور مثال فکر میکنند:

$$\sin 60 = 2 \sin 30$$

که اشتباه میباشد زیرا طبق فرمول:

$$\sin 60 = 2 \sin 30 \cdot \cos 30$$

مثال: زاویه آلفا در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ می باشد. مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$\cos 2\alpha$ •

$\sin 2\alpha$ •

$\cos 4\alpha$ •

$\sin 4\alpha$ •

$\tan 2\alpha$ •

در ربع دوم است و کسینوس منفی است.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2\left(-\frac{24}{25}\right)\left(\frac{7}{25}\right) = -\frac{336}{625}$$

نکته ۷: رابطه بین α و 2α دقیقاً مثل رابطه بین 2α و 4α و یا هر زاویه دیگر و دو برابرش است.

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(\frac{7}{25}\right)^2 - 1 = \frac{-527}{625}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{-24}{7}$$

نکته ۸: ارتباط کسینوس و تانژانت

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

۱. اگر برای زاویه آلفا داشته باشیم: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ مقدار $\cos 2x$ برابر است با:

1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
---	---	----------------------	----------------------

دو فرمول جالب و کم کاربرد:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

۲. اگر $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ باشد مقدار $\cos x$ را بیابید.

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
---------------	----------------	---------------	----------------

روابط حاصل جمع دو زاویه

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$$

۳. اگر $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ حاصل $\sin x + \cos x$ چقدر است؟

$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
--------------------------	----------------------	---------------	----------------------

۴. اگر $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$

$\frac{8}{9}$

$\frac{2}{3}$

$-\frac{1}{9}$

نکته ۹: ساده سازی روابط فوق

- در روابط $(\alpha \pm \beta)$ اگر یکی از زوایا مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ باشد حتما نسبت های مثلثاتی به یکدیگر تبدیل میشوند. یعنی تنها باید به علامت نسبت اصلی در آن ربعی که زاویه در آن قرار دارد دقت کنیم.

مثال:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = +\cos\frac{\pi}{6}$$

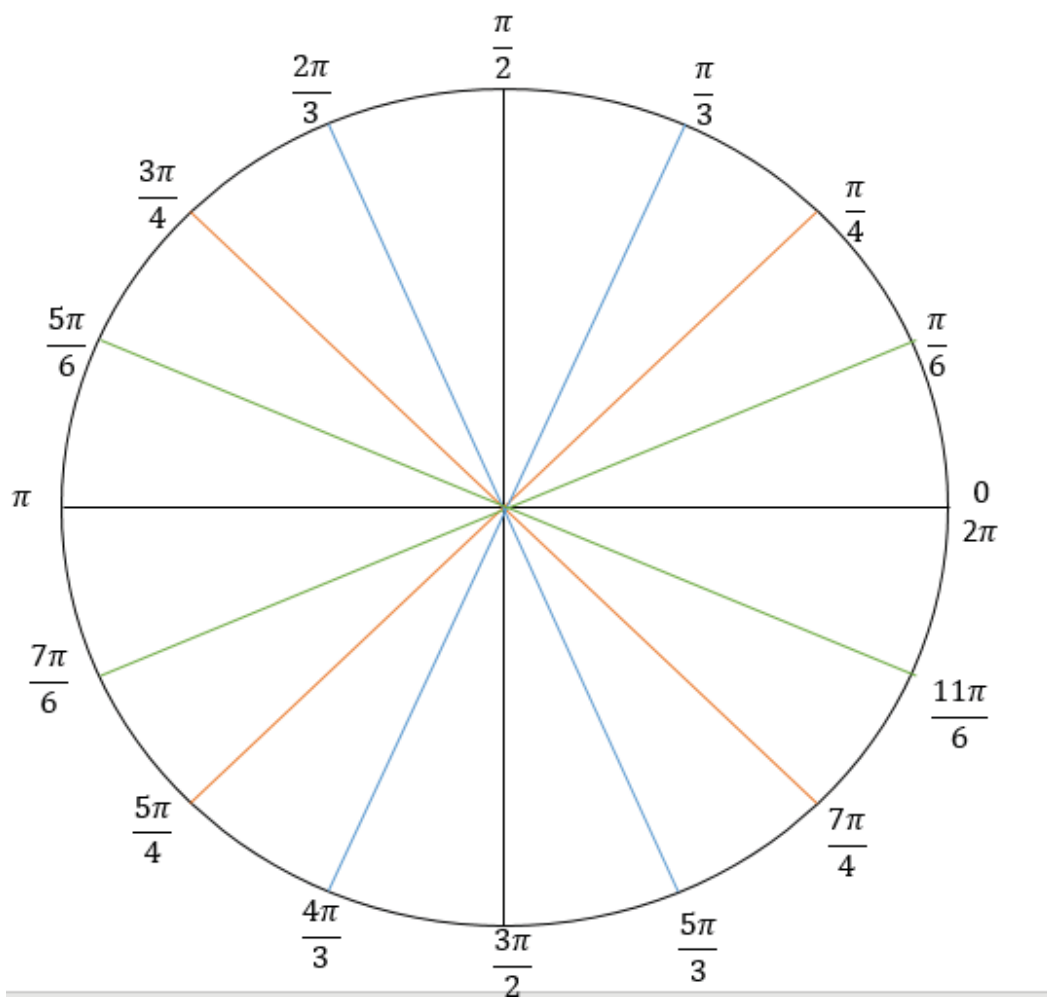
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$$

- در روابط $(\alpha \pm \beta)$ اگر یکی از زوایا مضارب صحیح π باشد نسبت های مثلثاتی تغییر نمی کنند و تنها باید به علامت نسبت اصلی در آن ربعی که زاویه در آن قرار دارد دقت کنیم.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$$

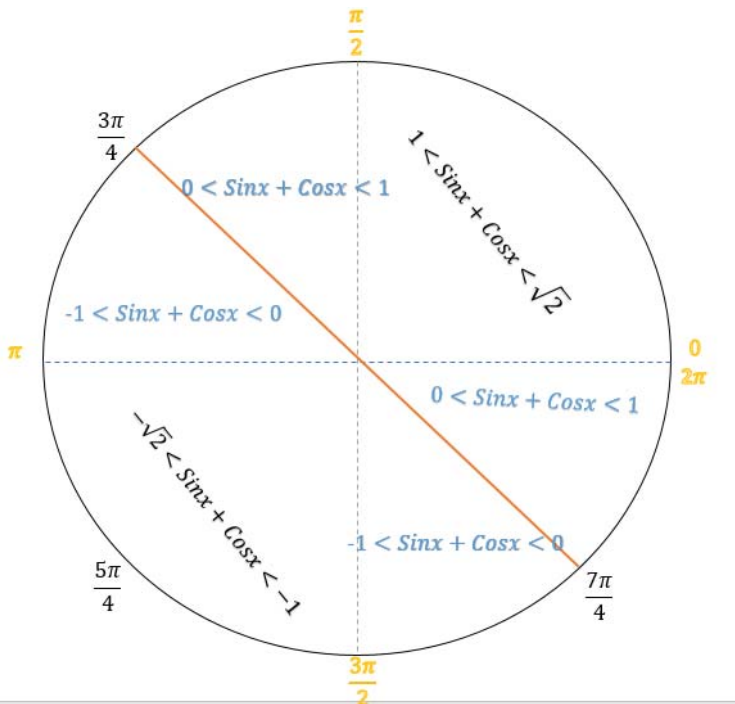
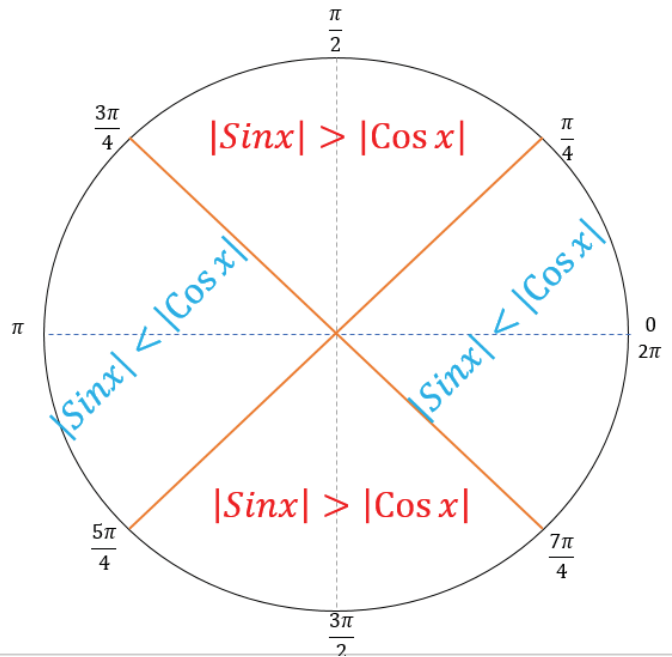
دایره مثلثاتی

تمامی زوایایی که ضرائبی از $\frac{\pi}{k}$ هستند دارای نسبت های مثلثاتی شبیه $\frac{\pi}{k}$ می باشند. فقط باید به ناحیه ای که در آن حضور دارند دقت کرده و علامت را تعیین کنیم.



به طور مثال:

$$\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$



دو نکته مهم:

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

همچنین:

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x \cdot \cos x \leq \frac{1}{2}$$

• فرمول تبدیلی بسیار مهم (برای بلد نبودن این نکته هیچ توجیهی قابل قبول نیست)

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

قسمت اول مثلثات در این جا به پایان میرسد.

نکته و تست

نکته ۱۰: در مواقعی که $\sin x + \cos x$ داده شود، به توان رساندن آن میتواند گزینه مناسبی باشد.

۵. اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد حاصل $\sin 2x$ را محاسبه کنید.

$$\frac{3}{8} \qquad \frac{-3}{8} \qquad \frac{-3}{4} \qquad \frac{3}{4}$$

نکته ۱۱: چند رابطه ی مهم برای حاصلجمع توان های سینوس و کسینوس

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha\beta)$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin^2 x \cos^2 x) = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3(\sin^2 x \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

نکته ۱۱ تکمیلی:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x) (\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) \\ &= (\sin x + \cos x) (1 - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

۶. اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ را محاسبه کنید.

$$\frac{-12}{16} \qquad \frac{-11}{16} \qquad \frac{12}{16} \qquad \frac{11}{16}$$

۷. اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ را محاسبه کنید.

$$\frac{32}{64} \qquad \frac{46}{64} \qquad \frac{26}{36} \qquad \frac{56}{64}$$

۸. اگر $\sin x + \cos x = \frac{3}{\sqrt{5}}$ باشد حاصل $\sin x - \cos x$ ؟

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \pm \frac{\sqrt{6}}{5} \qquad \pm \frac{\sqrt{10}}{5} \qquad \pm \frac{\sqrt{7}}{5}$$

نکته ۱۲: هرگاه حاصل جمع یا تفاضل تانژانت و کتانژانت داده شد بهتر است آنها را به صورت سینوس و کسینوس نوشته و مخرج مشترک بگیریم.

۹. اگر $\tan x + \cot x = 3$ مقدار $\sin 2x$ را بیابید.

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \frac{1}{3}$$

۱۰. اگر $\cot x - \tan x = 3$ مقدار $\cot 2x$ را بیابید.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{2}{3}$$

نکته ۱۳: اکثر مواقعی که زاویه $\frac{\pi}{4}$ و تانژانت در سوال مطرح شد احتمالاً باید از طرفین تانژانت بگیریم (چون تانژانت $\frac{\pi}{4}$ برابر ۱ است و کار راحت می شود).

۱۱. اگر $x = y + \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2}{3}$ باشد حاصل $\tan(y)$ را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{-1}{5} \qquad \frac{5}{3}$$

۱۲. حاصل $\tan 28^\circ + \tan 17^\circ + \tan 28^\circ \tan 17^\circ$ را به دست آورید.

$$\frac{-1}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad -1 \qquad 1$$

۱۳. مقدار عددی $\sin^2 15^\circ + 3\cos^2 15^\circ$ را به دست آورید.

$$2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نکته ۱۴: حتما روابط زیر را به بهترین شکل یاد گرفته و هر جا دیدیم جایگذاری میکنیم.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \rightarrow 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \rightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

۱۴. اگر $\frac{1 + \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4$ مقدار $\tan x$ را به دست آورید.

$$2\sqrt{2} \qquad \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۵. اگر $\frac{\cos x - 1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = -4$ مقدار $\tan x$ را به دست آورید.

$$2\sqrt{2} \qquad 2\sqrt{3} \qquad -2\sqrt{3} \qquad -2\sqrt{2}$$

نکته ۱۵: دو رابطه مهم

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x \pm \cos x)$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x \mp \sin x)$$

۱۶. اگر $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ باشد مقدار $\sin 2x$ را به دست آورید.

$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{3}{4}$
-----------------------	----------------------	----------------	---------------

۱۷. اگر $\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = 2$ باشد مقدار $\tan x$ را به دست آورید.

$\frac{-1}{3}$	-3	$\frac{1}{3}$	3
----------------	----	---------------	---

۱۸. حاصل $\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ به ازای $x = \frac{5\pi}{12}$ برابر است با:

1	-1	$\frac{1}{2}$	2
---	----	---------------	---

نکته ۱۶: از زوایای با درجات بزرگ، ضرایب 360° و یا مضارب زوج π را کم می کنیم.

۱۹. حاصل $\sin\left(\frac{127\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{91\pi}{3}\right)$ باشد را به دست آورید.

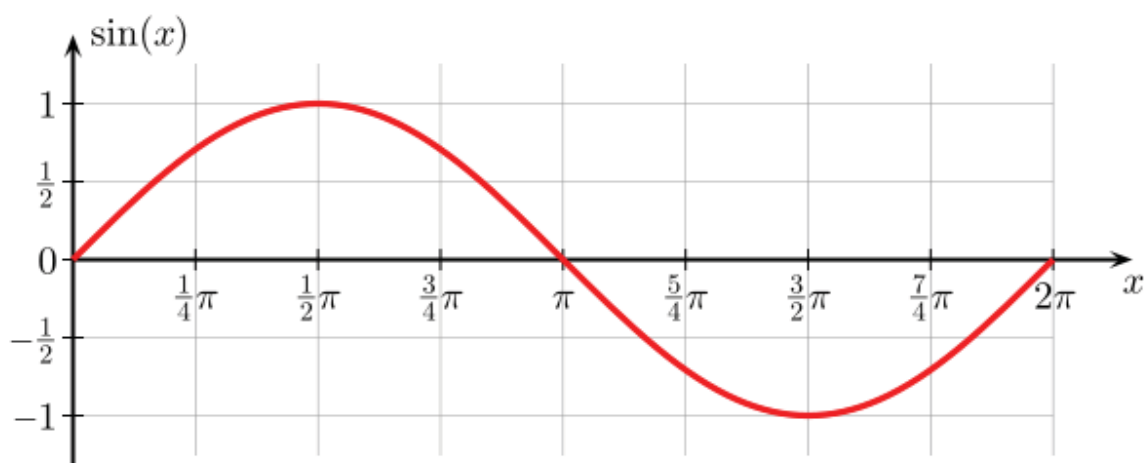
0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
---	---	----------------	---------------

۲۰. حاصل $\sin(675^\circ) + \cos(765^\circ)$ باشد را به دست آورید.

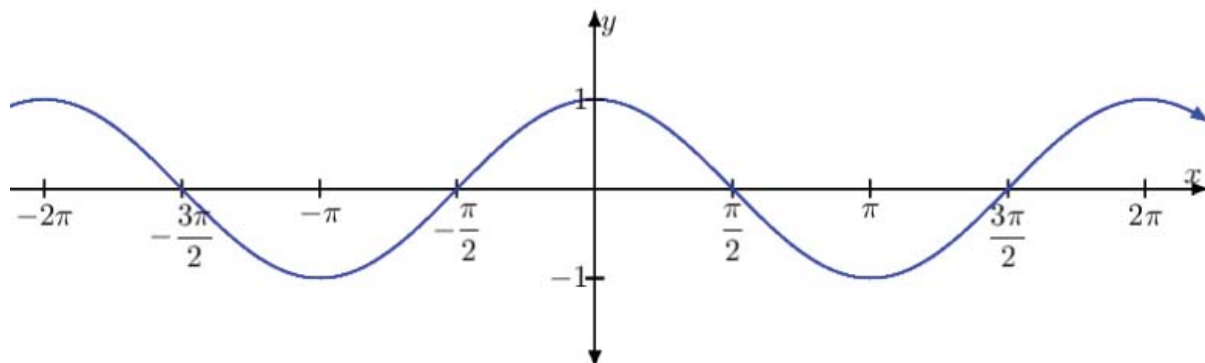
$\sqrt{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$
------------	---	----------------------	-----------------------

رسم نمودار های مثلثاتی و دوره تناوب

اگر بخواهیم نمودار $y = \sin x$ را رسم کنیم، با داشتن مقادیر سینوس زوایای مشهور میتوان به راحتی به شکل زیر رسید.

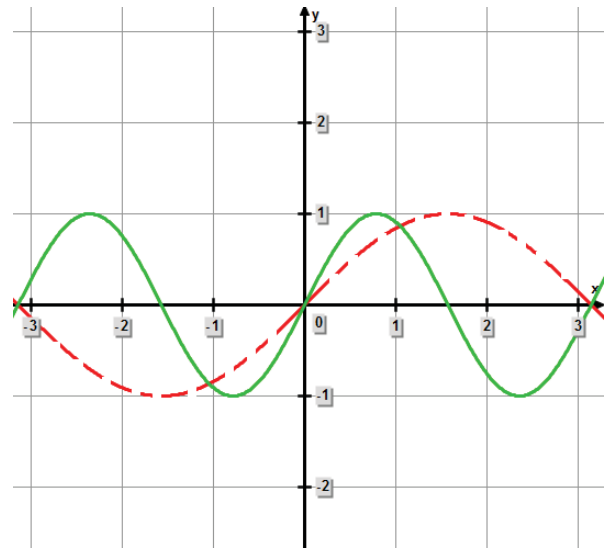


و نمودار $y = \cos x$:

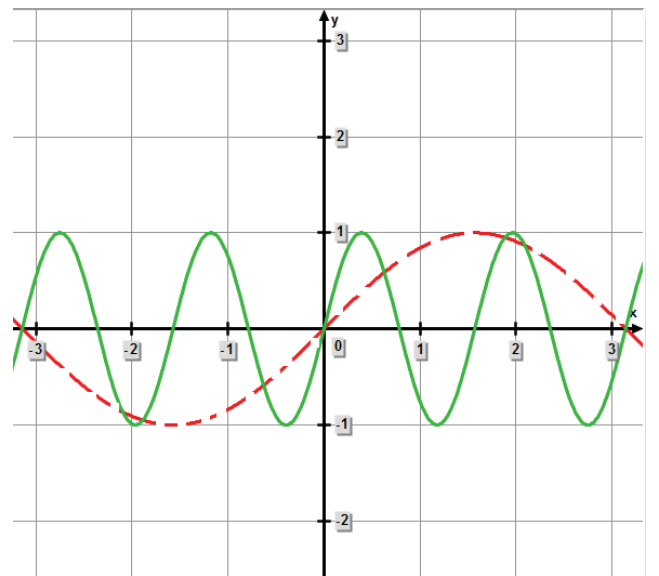


حال اگر بخواهیم تابع $y = \sin 2x$ را رسم کنیم چطور؟

مسئله در این تابع به ازای $x = \pi$ مقدار $y = \sin 2\pi$ ارائه می شود پس یک دور کامل زده خواهد شد. بنابراین نمودار جمع تر می شود و دوره تناوب این تابع همانطور که گفته شد $T = \pi$ می باشد.



نمودار خط چین، تابع $y = \sin x$ و نمودار ممتد تابع $y = \sin 2x$ هستند.



نمودار خط چین، تابع $y = \sin x$ و نمودار ممتد تابع $y = \sin 4x$ هستند.

میتوان نتیجه گرفت دوره تناوب تابع $y = \sin bx$ برابر با $T = \frac{2\pi}{b}$ می باشد.

• مورد فوق برای تابع کسینوس نیز برقرار است.

• به طور کلی تابع $y = k + a \sin bx$ و $y = k + a \cos bx$ دارای مقدار ماکزیمم $k + |a|$ و مینیمم $-k + |a|$ می باشد.

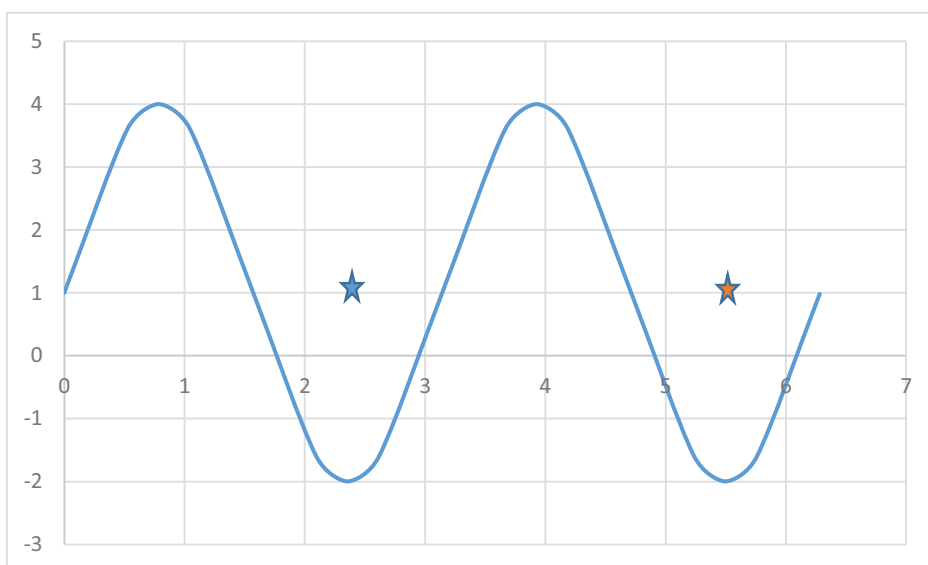
مثال: تابع

$$y = 4 + 2\sin 3x$$

تابعیست با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{3}$ که دارای مقدار ماکزیمم ۶ و مینیمم ۲ می باشد.

مثال:

معادله تابع را بنویسید.



آزمون اول مثلثات

۱. اگر برای زاویه x داشته باشیم: $1 + \tan^2 x = \frac{-2}{\cos x} - 1$ مقدار $\cos 2\alpha$ برابر است با:

$$0 \qquad \pm 1 \qquad 1 \qquad -1$$

۲. اگر برای زاویه x داشته باشیم $\cos 4x = \frac{-28}{100}$ مقدار $\cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$ برابر است با:

$$\frac{\pm 6}{10} \qquad \frac{\pm 8}{10} \qquad \frac{-8}{10} \qquad -1$$

۳. عبارت $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$ برقرار می باشد مقدار $\sin 2x$ را محاسبه کنید.

$$1 \qquad \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad + \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad - \frac{1}{2}$$

۴. برای زاویه x که در بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ است داریم $\cos 4x = \frac{-28}{100}$ مقدار $\sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$ برابر است با:

$$\frac{\pm 6}{10} \qquad \frac{\pm 8}{10} \qquad \frac{8}{10} \qquad \frac{6}{10}$$

۵. اگر عبارت $\cos x - \sin x = \frac{2}{10}$ برقرار باشد مقدار $\sin 2x$ را محاسبه کنید.

$$\frac{-48}{100} \qquad \frac{96}{100} \qquad \frac{48}{100} \qquad \frac{-96}{100}$$

۶. اگر $\cos(x - 37^\circ) = a$ و $\cos(x - 53^\circ) = b$ در شرایطی که a و b باهم برابر باشند حاصل $\sin 2x$ چه مقداری می تواند باشد؟

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \pm 1 \qquad 0$$

۷. اگر داشته باشیم $\tan x = \frac{4}{3}$ مقدار $\sqrt{1 + \sin 2x}$ برابر است با:

$$\frac{20}{100} \qquad \frac{160}{100} \qquad \frac{120}{100} \qquad \frac{140}{100}$$

آزمون دوم مثلثات

۱. حاصل $(\tan 20^\circ + \cot 40^\circ) \sin 50^\circ$ برابر با کدام گزینه است؟

$\cos 50^\circ$	$\cot 50^\circ$	$\tan 50^\circ$	1
-----------------	-----------------	-----------------	---

۲. اگر $\tan(\alpha + \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} + 1$ و $\tan(\alpha - \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} - 1$ آنگاه $\tan \frac{2\beta}{3}$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$
---------------	----------------	----------------	---------------

۳. مقدار $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{1}{8}$
----------------------	---------------	----------------------	---------------

۴. مقدار عددی $\frac{2 \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ برابرست با:

$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
-----------------------	---	----------------------	---------------

۵. اگر $\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{5}$ حاصل $\tan^3 x + \cot^3 x$ ؟

$\frac{45}{8}$	$\frac{75}{8}$	$\frac{65}{8}$	$\frac{55}{8}$
----------------	----------------	----------------	----------------

۶. حاصل $\cot 20^\circ (1 - \cos 40^\circ)$ کدام است؟

$\cos 10^\circ$	$\cos 20^\circ$	$\cos 40^\circ$	$\cos 50^\circ$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

۷. اگر $\sin 2x = \frac{1}{2}$ حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

$\frac{13}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
-----------------	---------------	---------------	---------------

آزمون سوم مثلثات

۱. اگر $\sin 2x = \frac{-3}{4}$ باشد حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ را محاسبه کنید.

$$\frac{-12}{16} \quad \frac{-11}{16} \quad \frac{12}{16} \quad \frac{11}{16}$$

۲. اگر $\sin 2x = \frac{-3}{4}$ باشد حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ را محاسبه کنید.

$$\frac{32}{64} \quad \frac{46}{64} \quad \frac{26}{36} \quad \frac{56}{64}$$

۳. حاصل عبارت $\frac{1+\tan 15}{1-\tan 15}$ برابر است با:

$$-\sqrt{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \sqrt{3} \quad 1$$

۴. اگر $\cos 2x = \frac{3}{5}$ باشد حاصل $\sin x - \cos x$ ؟

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \pm \frac{\sqrt{6}}{5} \quad \pm \frac{\sqrt{10}}{5} \quad \pm \frac{\sqrt{7}}{5}$$

۵. اگر عبارت $\cos 3x - \sin 3x = \frac{-14}{10}$ برقرار باشد مقدار $\sin(2\pi + 6x)$ را محاسبه کنید.

$$\frac{-48}{100} \quad \frac{96}{100} \quad \frac{48}{100} \quad \frac{-96}{100}$$

۶. اگر $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ باشد مقدار $\sin 2x$ را به دست آورید.

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{-3}{4} \quad \frac{3}{4}$$

۷. اگر $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ باشد مقدار $\sin 2x$ را به دست آورید.

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{-3}{4} \quad \frac{3}{4}$$

آزمون چهارم مثلثات

۱. اگر $Tan20^\circ = x$ باشد حاصل $\frac{Sin70^\circ}{Cos110^\circ + Cos250^\circ}$ برابر است با:

$$\frac{-1}{2x} \qquad \frac{1}{2x} \qquad -2x \qquad 2x$$

۲. اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ باشد کدام گزینه صحیح است؟

$$Cotx > 1 \qquad Tanx > 1 \qquad Sin^2x > Cos^2x \qquad \sqrt{Sinx} > \sqrt{Cosx}$$

۳. در کدام یک از بازه های زیر رابطه ی $Sinx > Cosx$ برقرار نمیباشد؟

$$\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \qquad \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \qquad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

۴. حاصل $Tan35^\circ + Tan20^\circ$ برابر است با:

$$\frac{1}{Sin35^\circ} \qquad \frac{1}{Cos20^\circ} \qquad \frac{1}{Cos55^\circ} \qquad \frac{1}{Cos35^\circ}$$

۵. تفاضل بیشترین مقدار عبارت $Sinx + Cosx$ از کمترین مقدار آن کدام است؟

$$2\sqrt{2} \qquad \sqrt{2} \qquad 2 \qquad 1$$

۶. اگر $\frac{Sin3x}{Sin2x} = Cosx$ باشد مقدار $Cos2x$ را به دست آورید.

$$(Sin3x = 3Sinx - 4Sin^3x \text{ : راهنمایی})$$

$$\sqrt{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{-1}{2}$$

۷. اگر $Tanx = \sqrt{2} - 1$ و $Tany = \sqrt{2} + 1$ و x و y زوایای حاده باشند کدام رابطه درست است؟

$$y - x = \frac{\pi}{2} \qquad y - x = \frac{\pi}{4} \qquad y - x = \frac{\pi}{6} \qquad y - x = \frac{\pi}{3}$$

۸. حاصل $\frac{Cos^2x - Sin^2x}{Sinx.Cosx} + Tanx$ کدام است؟

$$Tan2x \qquad Tanx \qquad COT2x \qquad COTx$$

آزمون پنجم مثلثات

۱. حاصل $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20 + \frac{1}{2} \cos 20$ کدام است؟

$\cos 100$ $\cos 10$ $\cos 50$ $\cos 40$

۲. اگر $\tan(\alpha + 20) = \frac{3}{4}$ آنگاه $\cot(25 - \alpha)$ برابر است با:

7 8 6 5

۳. اگر $\cos x + \frac{1}{\cos x} = -2$ حاصل $\cos^4 x + \sin^7 x$ کدام است؟

$\sqrt{2} - 1$ 2 1 0

۴. حاصل $\cos^4 x - \sin^4 x - 1$ برابر است با:

$-2\sin^2 x$ $2\sin^2 x$ $-2\cos^2 x$ $2\cos^2 x$

۵. اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3$ باشد حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

-3 $\frac{12}{5}$ $\frac{-3}{2}$ $\frac{6}{5}$

معادله مثلثاتی

فرض کنید بخواهیم معادله $\text{Sin}x = \frac{1}{2}$ را حل کنیم. متوجه میشویم که $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ جوابهای معادله هستند. اما آیا فقط همین دو جواب را داریم؟

در دور دوم یعنی $[2\pi, 4\pi]$ چطور؟ مسلما در این فاصله هم دو جواب داریم که در $\text{Sin}x = \frac{1}{2}$ صدق کنند.

بنابراین باید یک روال کلی را مشخص کرد که جوابهای یک معادله در تمامی دورها را ارائه دهد.

پس میتوانیم بگوییم جوابهای معادله فوق عبارتند از:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

یعنی فرضا در حالتی که $k = 0$ باشد یعنی در همان دور اول، جوابها $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ می باشند.

اگر $k = 1$ باشد یعنی در دور دوم، جوابها $x = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$ می باشند.

اگر $k = 2$ باشد یعنی در دور سوم، جوابها $x = 4\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$ می باشند.

دقت کنید که میتوانیم به جای $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ بنویسیم $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

پس در حالت کلی برای زاویه آلفا داریم: اگر $\text{Sin}x = \text{Sin}\alpha$

$$x = 2k\pi + \alpha$$

$$x = 2k\pi + \pi - \alpha$$

مثال:

معادله $\text{Sin}^2x = \frac{3}{4}$ را حل کنید.

$$\text{Sin}^2x = \frac{3}{4} \rightarrow \text{Sin}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Sin}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Sin}x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{4\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

با توجه به مطالب بالا، برای معادله کسینوسی نیز باید جوابها در دوره‌های مختلف را به دست آوریم.

پس در حالت کلی برای زاویه آلفا داریم: $\text{Cos}x = \text{Cos}\alpha$

$$x = 2k\pi + \alpha$$

$$x = 2k\pi - \alpha$$

زیرا زاویه‌هایی که نسبت به محور طول قرینه باشند دارای مقادیر یکسان کسینوس هستند.

معادله $\text{Cos}^2x = \frac{3}{4}$ را حل کنید.

$$\text{Cos}^2x = \frac{3}{4} \rightarrow \text{Cos}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{Cos}x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

و برای تانژانت با توجه به اینکه زاویه‌ها در ربع‌های اول و سوم دارای تانژانت یکسان هستند و همچنین در ربع دوم و چهارم:

پس در حالت کلی برای زاویه آلفا داریم اگر: $\text{Tan}x = \text{Tan}\alpha$

$$x = k\pi + \alpha$$

معادله $\text{Tan}^2x = 1$ را حل کنید.

$$\text{Tan}^2x = 1 \rightarrow \text{Tan}x = \pm 1$$

$$\tan x = 1 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = -1 \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

۱. معادله $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

حل:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۲. معادله $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

حل:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \pi - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

۳. معادله $\sin x + \cos x = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\times \frac{1}{\cos}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\cos x}{\cos x} \rightarrow \tan x = -1$$

$$x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

۴. معادله $\sin 2x + \cos x = 0$ را حل کنید.

$$\sin 2x + \cos x = 0 \rightarrow 2\sin x \cos x + \cos x = 0 \rightarrow$$

۵. معادله $\cos 2x + \cos x = 0$ را حل کنید.

$$\cos 2x + \cos x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0 \rightarrow$$

۶. معادله $\cos 2x + \sin x = 0$ را حل کنید.

$$\cos 2x + \cos x = 0 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \rightarrow$$

۷. معادله $\sin 2x - \sin 3x = 0$ را حل کنید.

۸. معادله $\sin 2x + \sin 3x = 0$ را حل کنید.

۹. معادله $\cos 2x - \cos 3x = 0$ را حل کنید.

۱۰. معادله $\cos 2x + \cos 3x = 0$ را حل کنید.

۱۱. معادله $\cos 2x \sin x = 0$ را حل کنید.

۱۲. معادله $\frac{\cos x + \cos 3x}{1 + \cos x} = 0$ را حل کنید.

۱۳. معادله $\tan x \tan 3x = 1$ را حل کنید.