مقدمه

کتابی که پیش روی شماست از مجموعه کتاب های مبحثی ریاضیات می باشد که در آن سعی شده است تا مبحث مشتق ضمنی به طور کامل آموزش داده شود.

در این مجموعه در ابتدا مفاهیم مشتق ضمنی بر مبنای تدریس کتاب درسی (کتاب محور) آموزش داده شده است.

پس با طرح مسائل مختلف از مجموعه سوالات کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور و کنکورهای آزمایشی سعی شده تا دانش آموزان عزیز را به آمادگی مطلوبی برسانیم. مشتق ضمنی از آن دسته مطالبی است که علاوه بر رشته های ریاضی و فیزیک و تجربی در مقطع دبیرستان، در دانشگاه نیز کاربرد زیادی در ریاضیات خصوصا برای رشته های مهندسی دارد. از این رو این کتاب برای داوطلبان کاردانی به کارشناسی و نیز کارشناسی ارشد نیز قابل استفاده می باشد. امید است این مجموعه بتواند باری از دوش داوطلبان آزمون های مختلف برداشته و آن ها را در رسیدن به اهداف متعالی آموزشی نماید.

در پایان از دانش آموزان، دانشجویان و دبیران محترم خواهشمندم تا نظرات، انتقادات و یا پیشنهادات خود را با شماره تماس ۰۹۱۱۱۳۷۴۰۵۷ بنده در میان بگذارند.

با سپاس فراوان

مازیار احمدی ناو

تقدیم به

دختر عزیزتر از جانم

امید زندگانیم

هدیه آسمانی ام

مهان عزیزم

فهرست

صورت های مختلف بیان ضابطه ی تابع

ضابطه ی توابع را معمولا می توانیم به ۲ صورت بیان کنیم:

۱- صریح:

فرم صریح به صورت $y = f(x)$ می باشد.

مثلا $y = 4x^2 + 8x + 4$ یا $y = \frac{3x^2+4}{8x+16}$ نمونه هایی از فرم صریح هستند. در این فرم معمولا مقدار y را بر حسب عبارتی از x بدست می آوریم.

۲- ضمنی

فرم ضمنی به صورت $F(x,y) = 0$ می باشد.

اگر معادله ای دارای ۲ متغیر y, x باشد ممکن است بتوانیم از آن معادله y را بر حسب x حل کرد و یک تابع بر حسب x بدست آورد.

مثلا فرض کنید معادله ی $3y - 2x^2 + 11 = 0$ را داریم. در این معادله مقدار y بر حسب x برابر است با:

$$y = \frac{2x^2 - 11}{3}$$

در واقع معادله ی $3y - 2x^2 + 11 = 0$ به طور ضمنی تابع $y = \frac{2x^2-11}{3}$ را تعریف کرده است. به توابعی که به طور ضمنی توسط یک معادله تعریف می شوند، توابع ضمنی می گویند. توجه کنید که در بسیاری از موارد محاسبه ی صریح تابع ضمنی امکان پذیر نیست.

مثلا فرض کنید در معادله ی $e^{x+2y} - \sqrt{xy} + 4x - 29 = 0$ می خواهیم مقدار y را بر حسب x حساب کنیم که عملا امکان ناپذیر یا بسیار سخت و وقت گیر است.

مثلا:

$$x^۲y^۳+۳x^۲\sqrt{y}+y^۳\sqrt{x}+sin\frac{x}{y}=۰$$

یا

$$۲x^۳e^{x-۲y}+۳y^۲x+۴x^۳\sqrt[۵]{y}-۳=۰$$

نمونه هایی از توابع یا روابط ضمنی هستند.

مشتق گیری ضمنی

مشتق گیری ضمنی ۲ روش دارد:

روش اول:

در معادله ی داده شده از ۲ طرف معادله نسبت به x مشتق می گیریم و با فاکتورگیری y' را بدست می آوریم. با این فرض که همواره معادله ی داده شده y را به طور ضمنی به صورت تابعی مشتق پذیر از x تعریف می کند. این فرض به این معنی است که هنگام مشتق گیری ازy, y را به صورت یک متغیر وابسته در نظر می گیریم. برخلاف x که مستقل است.

به عبارتی مثلا می دانیم مشتق $x^۳$ برابر $۳x^۲$ است ولی در این حالت مشتق $y^۳$ را برابر $۳y^۲$ نمی گیریم بلکه از آن جایی که در این روش فرض کردیم y خود به صورت تابعی مشتق پذیر بر حسب x است یعنی y متغیری وابسته است مشتق $y^۳$ برابر $۳y^۲y'$ است.

توجه کنید که اساس مشتق گیری ضمنی بر پایه ی قاعده ی زنجیری است.

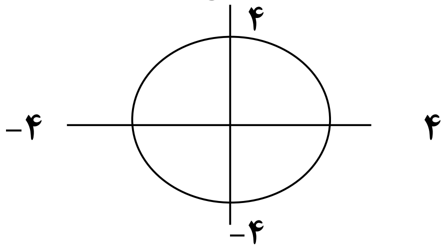
مثال۱ مشتق $x^۲y^۳+۳x^۲y+x^۲-۳y+۱=۰$ را بدست آورید.

$$۲xy^۳+۳y^۲x^۲y'+۶xy+۳x^۲y'+۲x-۳y'=۰$$
$$۳y^۲x^۲y'+۳x^۲y'-۳y'=-۲xy^۳-۶xy-۲x$$
$$y'(۳y^۲x^۲+۳x^۲-۳)=-۲xy^۳-۶xy-۲x$$
$$y'=\frac{-۲xy^۳-۶xy-۲x}{۳y^۲x^۲+۳x^۲-۳}$$

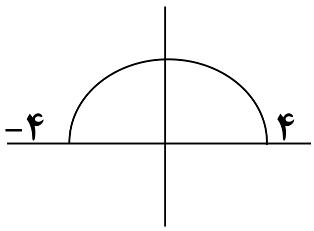
تذکّر

توجه کنید در این معادلات ممکن است به ازای یک x از دامنه، یک یا چندین مقدار برای y بدست آید. پس توجه کنید که ممکن است معادله بیانگر تابع نباشد. ولی بخشهای مختلفی از معادله می توانند نمودار تابعی مثل f را مشخص کنند.

بنابراین اگر تابع $y=f(x)$ در معادله ی $F(x,y)=۰$ صدق کند می گوییم معادله ی $F(x,y)$ بطور ضمنی تابع fرا تعریف می کند. مثلا نمودار $F(x,y)=x^۲+y^۲-۱۶=۰$ یک دایره واحد به مرکز مبدا و معادله ی $x^۲+y^۲=۱۶$ است. بدیهی است که این معادله تابع نیست و معادله ی یک دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۴ است.



اما توجه کنید که بخش هایی از آن مثل $y=\sqrt{۱۶-x^۲}$ که نمودار آن به صورت روبرو خواهد بود تابع است.



پس با فرض اینکه معادله ی $f(x,y)=۰$ حداقل یک تابع مشتق پذیر مثل $y=f(x)$ را بطور ضمنی تعریف می کند از آن مشتق می گیریم.

روش دوم:

برای بدست آوردن مشتق ضمنی معادله را به صورت $F(x,y)=۰$ می نویسیم. یعنی همه ی معادله را به یک سمت تساوی می بریم واز این فرمول استفاده می کنیم

$$\frac{dy}{dx}=y'x=-\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق نسبت به } y}=-\frac{f'x}{f'y}$$

منظور از f'_x این است که مشتق را نسبت به x می گیریم و y عدد ثابت است.

منظور از f'_y این است که مشتق را نسبت به y می گیریم و x عدد ثابت است.

البته در آینده در دانشگاه می خوانید که به این نوع مشتق گیری "مشتق جزئی" می گویند.

توجه:

در معادله ی ضمنی اگر x تابعی بر حسب y باشد و بخواهیم از x نسبت به y مشتق بگیریم فرمول مشتق به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dx}{dy} = x'y = -\frac{f'y}{f'x} = -\frac{\text{مشتق نسبت به } y}{\text{مشتق نسبت به } x}$$

تذکّر

۱ - توجه کنید اگر عدد ثابت در یک سمت نماند مشکلی نیست چون مشتق عدد ثابت صفر است.

$$(x, y) = k$$

۲ - با مقایسه دو فرمول بالا داریم:

$$y'x = \frac{۱}{x'y}$$

مثال۱ به کمک مشتق گیری ضمنی مشتق هر یک از روابط زیر را حساب کنید.

۱. $xy^{۲} + ye^{۲-x} = ۱$

$$-\left(\frac{y^{۲} + y(-۱)e^{۲-x}}{۲xy + e^{۲-x}}\right)$$

۲. $\frac{e^y}{e^x} + e^{xy} - x - ۴ = ۰$

$$e^y e^{-x} + e^{xy} - x - ۴ = ۰ \Rightarrow -\left(\frac{(-۱)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{y} + ye^{xy} - ۱}{\mathrm{e}^{y}e^{-x} + xe^{xy}}\right)$$

۳. $xcosy + ysinx = ۰$

$$-\left(\frac{cosy + ycosx}{(-x)siny + sinx}\right)$$

۴. $y = y^{۲}e^{sin۲x} + sinx$

همه ی جملات را به یک طرف منتقل می کنیم $\Longleftarrow$ $y^{۲}e^{sin۲x} + sinx - y = ۰$

$$-\left(\frac{۲cos۲xe^{sin۲x}.y^{۲} + cosx}{۲ye^{sin۲x} - ۱}\right)$$

۵. $ysin^{۲}x + y^{۳} = \frac{۵}{۴}$

$$-\left(\frac{۲ysinxcosx}{sin^{۲}x + ۳y^{۲}}\right)$$

۶. $y - sin\frac{x}{y} = ۱$

$$-\left(\frac{-\frac{۱}{y}\cos\frac{x}{y}}{۱ + \left(\frac{x}{y^{۲}}\right)\cos\frac{x}{y}}\right)$$

نکته

گاهی رابطه ی داده شده هیچ تابعی را به صورت ضمنی مشخص نمی کند.

پس رابطه داده شده مشتق ندارد.

مثال ۱ مشتق معادله ی ضمنی $(۲x + y)^{۴} + cos^{۲}y + ۴sin^{۲}y + ۱۶ = ۰$ را حساب کنید.

$$(۲x + y)^{۴} + cos^{۲}y + ۴sin^{۲}y = -۱۶$$

سمت چپ نامنفی و سمت راست منفی است پس مشتق این رابطه موجود نیست.

مثال اگر $f(x^۳) + f(y^۲ - ۱) = m$ باشد آنگاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه ی $(۲,۳)$ از نمودار این رابطه کدام است؟

$$y'_x = -\frac{۳x^۲ f'(x^۳) + ۰}{۲y f'(y^۲ - ۱) + ۰} \xrightarrow{x = ۲} -\frac{۱۲ f'(۸)}{۶ f'(۸)} = -۲$$

یادآوری

$$y = f(u) \xrightarrow{\text{مشتق}} u' f'(u)$$

مثال از رابطه ی $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{۷}{۱۲}$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ با علامت منفی کدام است؟

فرض کنید $\frac{y}{x} = t$

$$\frac{۱}{t} - t = \frac{۷}{۱۲} \xRightarrow{\times ۱۲t} ۱۲t^۲ + ۷t - ۱۲ = ۰$$

با حل این معادله داریم

$$\Rightarrow t_۱ = \frac{۳}{۴} \qquad t_۲ = -\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۳}{۴}x \qquad y = -\frac{۴}{۳}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۳}{۴} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{۴}{۳}$$

پس حاصل $\frac{dy}{dx}$ برابر $-\frac{۴}{۳}$ است.

مثال دو نقطه ی $B(x, y)$ و بر روی دایره ای به مرکز $A(۲,۳)$ مبدا و شعاع ۴ قرار دارند. اگر ضریب زاویه BA برابر $m(x)$ باشد $\lim_{x \to ۲} m(x)$ کدام است؟

در واقع شیب خط مماس بر منحنی دایره در نقطه $A(۲,۳)$ را می خواهیم.

معادله دایره $x^۲ + y^۲ = ۴^۲$ است. بنابراین:

$$x^{۲} + y^{۲} = ۱۶ \xrightarrow{\text{مشتق}} y'_x = -\left(\frac{۲x}{۲y}\right) \Rightarrow y'_x = -\frac{x}{y}$$

$$\xrightarrow{A(۲,۳)} y'_x = -\frac{۲}{۳}$$

نکته

گاهی معادله ای که به ظاهر در آن تعیین y بر حسب x دشوار است،

به راحتی به یک رابطه ی صریح تبدیل می شود.

مثال۱ اگر $۲x^{۲}\sqrt{y} - y = x^{۴}$ باشد، مشتق y نسبت به x در $x = \sqrt[۳]{۳}$ کدام است؟

$$y - ۲x^{۲}\sqrt{y} + x^{۴} = ۰ \Rightarrow \left(\sqrt{y} + x^{۲}\right)^{۲} = ۰ \Rightarrow \sqrt{y} = x^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} y = x^{۴} \Rightarrow y' = ۴x^{۳} \xrightarrow{\quad} ۴(۳) = ۱۲$$

مثال۱ مشتق تابع $y^{۳} + ۳\sqrt{x}y^{۲} + ۳xy + x\sqrt{x} = ۰$ در نقطه $x = ۴$ کدام است؟

$$\left(y + \sqrt{x}\right)^{۳} = ۰ \Rightarrow y = -\sqrt{x} \Rightarrow y' = -\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y'(۴) = -\frac{۱}{۴}$$

یادآوری نکته تستی

$$۱)\ a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \qquad (a > ۰)$$

$$۲)\ a + \frac{۱}{a} \leq -۲ \qquad (a < ۰)$$

$$۳)\ a + \frac{۱}{a} = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

$$۴)\ a + \frac{۱}{a} = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

مثال اگر $\left(\frac{x^۳-۱}{y^۴}\right)^{۱۱}+\left(\frac{y^۴}{x^۳-۱}\right)^{۱۱}=-۲$ باشد مشتق y نسبت به x کدام است؟

طبق نکته بالا

$$\left(\frac{x^۳-۱}{y^۴}\right)^{۱۱}=\left(\frac{y^۴}{x^۳-۱}\right)^{۱۱}=-۱$$

$$\frac{x^۳-۱}{y^۴}=-۱\Rightarrow x^۳-۱=-y^۴\Rightarrow x^۳+y^۴-۱=۰$$

$$y'_x=-\left(\frac{۳x^۲}{۴y^۳}\right)$$

هشدار

عبارات مسلسلی ضمنی هستند.

مثال مشتق $y=sinx+\sqrt{sinx+\sqrt{sinx+\sqrt{sinx\ldots}}}$ را بدست آورید.

دو طرف را به توان ۲ می رسانیم.

$$y^۲=sinx+\sqrt{sinx+\sqrt{sinx+\sqrt{\ldots}}}$$

$$y^۲-y-sinx=۰$$

$$\Rightarrow-\left(\frac{-\cos x}{۲y-۱}\right)=\frac{cosx}{۲y-۱}$$

مثال عرض از مبدا خط قائم بر منحنی $y\ln(۲x-y)+x^۲y=۷x^۲-۱۶$ در نقطه ی $(۲,۳)$ کدام است؟

۱) ۱/۸ ۲) ۲/۴ ۳) ۳/۲ ۴) ۳/۶

$$y'_x = -\left(\frac{y \times \frac{۲}{۲x-y} + ۲xy - ۱۴x}{۱ \times ln(۲x-y) + \frac{-۱}{۲x-y} \times y + x^{۲}}\right)$$

$A\Big|_{۳}^{۲} \Rightarrow y' = -\left(\frac{۳(۲)+۱۲-۲۸}{۰+(-۱)(۳)+۴}\right) = ۱۰$ شیب خط مماس

$\Rightarrow \ -\frac{۱}{۱۰}$ شیب خط قائم

معادله خط قائم $y - ۳ = -\frac{۱}{۱۰}(x - ۲) \xrightarrow[x = ۰]{\text{عرض از مبدا}} ۳/۲$

مثال۱ خط مماس بر نمودار $y^{۳} + ۳xy^{۲} - ۳x^{۳}y = ۱$ در نقطه ی $(۱,۱)$ از کدام نواحی صفحه مختصات می گذرد؟

۱) ۳,۱ ‏ ۲) ۴,۱ ‏ ۳) ۳,۲,۱ ‏ ۴) ۴,۲,۱

$$y'_x = -\left(\frac{۳y^{۲} - ۹x^{۲}y}{۳y^{۲} + ۶xy - ۳x^{۳}}\right)$$

$$A\Big|_{۱}^{۱} \Rightarrow y' = ۱$$

معادله خط مماس $y - ۱ = ۱(x - ۱) \Rightarrow y = x$ که از ناحیه ۱و۳ می گذرد

مثال۱ از نقطه ای به طول m واقع بر محور x ها سه خط قائم بر نمودار رابطه ی $x = ۲y^{۲}$ رسم شده است. بزرگ ترین عدد طبیعی قابل قبول برای $\frac{۱}{m}$ کدام است؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۱

فرض کنید پای قائم نقطه ای مثل B روی منحنی باشد $\Leftarrow B(۲a^{۲}, a)$

$$۲y^{۲} - x = ۰ \Rightarrow \text{مشتق} = -\frac{-۱}{۴y} \xrightarrow{y = a} \frac{۱}{۴a}$$ شیب مماس

شیب خط قائم قرینه و عکس است و برابر $(-۴a)$ است.

$$m_{\text{قائم}} = AB \text{ شیب خط } = \frac{a - ۰}{۲a^۲ - m} = -۴a$$
$$\Rightarrow a = -۴a(۲a^۲ - m)$$

این معادله باید ۳ ریشه داشته باشد زیرا ۳ خط قائم بر منحنی رسم شده است.

$$a = -۸a^۳ + ۴am \Rightarrow -۸a^۳ + ۴am - a = ۰$$
$$a(-۸a^۲ + ۴m - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow a = ۰ \,, -۸a^۲ + ۴m - ۱ = ۰ \Rightarrow a^۲ = \frac{۱ - ۴m}{-۸}$$

برای آنکه معادله ۳ جواب داشته باشد باید $a^۲$ دارای ۲ ریشه باشد

یعنی $\frac{۱-۴m}{-۸} > ۰$ باشد $\Leftarrow$ $۱ - ۴m < ۰$

$$-۴m < -۱ \Rightarrow m > \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{m} < ۴$$

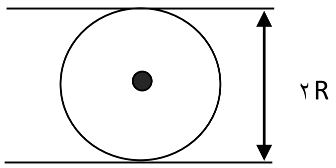
پس بزرگترین مقدار طبیعی $\frac{۱}{m}$ برابر ۳ است.

کاربردهای مقاطع مخروطی در مشتق ضمنی:

مثال) دو نقطه بر منحنی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ وجود دارد که مماس بر منحنی در آن دو نقطه به موازات خط $y = ۲x$ است. فاصله ی ۲ نقطه تا هم چقدر است؟

۱) ۱   ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۲   ۴) ۳

می دانیم منحنی به معادله ی $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$ معادله ی یک دایره است. کافی است عدد ۱ را اضافه و کم کنیم



$$x^۲ - ۲x + ۱ - ۱ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۱)^۲ + y^۲ = ۱$$

که این معادله ی یک دایره به مرکز $C\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ و شعاع $R = ۱$ است. می دانیم فاصله ی دو خط موازی مماس بر دایره برابر قطر یا همان $۲R$ است.

$$\Rightarrow R = ۱ \Rightarrow ۲R = ۲$$

مثال) از ۲ نقطه ی $A(۱,۲)$ و $B(m,n)$ دو مماس موازی بر منحنی $x^۲+۲y^۲=xy+۷$ رسم کرده ایم. مقدار m کدام است؟

۱) ۱　　۲) -۱　　۳) ۲　　۴) -۲

$$y'_x=-\frac{۲x-y}{-x+۴y}\xrightarrow{A\left|{}^{۱}_{۲}\right.}y'=۰$$

پس در نقطه ی $B(m,n)$ نیز باید مشتق صفر باشد.

$$\Rightarrow y'=-\frac{۲m-n}{-m+۴n}=۰\Rightarrow ۲m-n=۰\Rightarrow ۲m=n$$
$$m^۲-۲m^۲+۸m^۲=۷\Rightarrow m=\pm۱\Rightarrow B=(-۱,n)\Rightarrow m=-۱$$

مثال) اگر $y^۲x^۳+xy^۳+۲y-x=۱۵$ باشد مقدار y' به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۹}{۱۸}$　　۲) $-\frac{۲۱}{۲۰}$　　۳) $-\frac{۱۸}{۱۹}$　　۴) $-\frac{۲۰}{۲۱}$

$$x=۱\Rightarrow y^۲+y^۳+۲y=۱۶\Rightarrow y=۲\quad A\left|{}^{۱}_{۲}\right.$$

توجه کنید حل معادله درجه ۳ را در کتاب های درسی نخوانده ایم و معمولا با روش هایی مثل تجزیه حل می کنیم. در اینجا بهترین راه عدد گذاریست و اعدادی مثل ±۲ , ±۱ را امتحان می کنیم.

$$y'_x=-\left(\frac{-۳x^۲y^۲+y^۳-۱}{۲yx^۳+۳y^۲x+۲}\right)\xrightarrow{A\left|{}^{۱}_{۲}\right.}-\frac{۱۹}{۱۸}$$

محاسبه ی $\frac{d^2y}{dx^2}$:

فرض کنید معادله ی ضمنی $f(x,y)=۰$ ، y را بر حسب x به صورت ضمنی تعریف می کند. برای محاسبه ی مشتق دوم y نسبت به x یعنی y''_x یا همان $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ ابتدا y'_x را پیدا کنید، سپس از ۲ طرف رابطه ی بدست آمده برای y'_x جمله به جمله مشتق بگیرید. یادتون باشه که y تابعی وابسته به x است. یعنی y برحسب x بیان شده. پس اگر بخوای از y مشتق بگیری داریم

$$(y^n)' \Rightarrow ny^{n-۱}y'$$

مثال ۱ در معادله ی $xy^۳+x^۲+y=۲x+y^۲+۱$ مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ در نقطه ی $(۱,۱)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) -۱ ۳) ۰   ۴) ۲

$$xy^۳+x^۲+y-y^۲-۲x-۱=۰$$

$$y'_x=-\frac{f'x}{f'y}=-\frac{y^۳+۲x-۲}{۳y^۲x+۱-۲y}\xrightarrow{(۱,۱)}-\frac{۱}{۲}$$

حالا با مشتق گیری جمله به جمله از طرفین رابطه ی $y'_x=-\frac{y^۳+۲x-۲}{۳y^۲x+۱-۲y}$ داریم:

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=y''$$

$$=-\frac{(۳y^۲y'+۲)(۳y^۲x+۱-۲y)-(۳(y^۲+۲yy'x)-۲y')(y^۳+۲x-۲)}{(۳y^۲x+۱-۲y)^۲}$$

$$=-\frac{\left(-\frac{۳}{۲}+۲\right)(۲)-\left(۳(۱-۱)-۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)(۱)}{(۲)^۲}=-\left(\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)(۲)-۱}{۴}\right)=۰$$

یک نکته طلایی

اگر در ضابطه ی ضمنی با تعویض جای y,x تغییری اتفاق نیافتد، یعنی ضابطه نسبت به y,x متقارن باشد، داریم: $x'_y(a,a)=y'_x(a,a)=-۱$

مثال۱ در نمودار $x^۴y^۴ + ۳\cos(x+y) + ۹^{x+y} = ۴$ شیب خط مماس در مبدا مختصات کدام است؟

طبق نکته صفحه ی قبل چون با تعویض جای y, x اتفاقی نمی افتد، پس پاسخ -۱ است.

مثال۱ مشتق y نسبت به x از رابطه ی $\frac{۱}{۳}sin^۲x = \frac{\cot x}{۴y^۲} + ۴y^۲\tan x$ کدام است؟

سمت چپ جمع یک عبارت با معکوسش است که خارج از فاصله ی $(-۲,۲)$ است اما $\frac{۱}{۳}sin^۲x$ در فاصله ی $\left(۰,\frac{۱}{۳}\right)$ است و هرگز با هم برابر نمی شوند پس مشتق وجود ندارد.

مثال۱ اگر $۳^y = ۲^x - y$ باشد و مشتق y نسبت به x در $(۲,۱)$ به صورت $\log_{be}^{۱۶}$ باشد (e همان عدد نپر است) مقدار b چند است؟

$$y' = -\frac{۲^x \ln ۲}{-۳^y \ln ۳ - ۱} \xrightarrow{(۲,۱)} -\frac{۴\ln ۲}{-۳(\ln ۳) - ۱}$$

$$= \frac{۴\ln ۲}{۳\ln ۳ + ۱} = \frac{\ln ۱۶}{\ln ۲۷ + ۱} = \frac{\ln ۱۶}{\ln ۲۷ + \ln e} = \frac{\ln ۱۶}{\ln ۲۷e} = \ln \frac{۱۶}{۲۷e}$$

$$\Rightarrow b = ۲۷$$

مثال اگر $\frac{dy}{dx} = \frac{-۲y+x}{۴y+۲x+۱}$ باشد و نمودار رابطه ی $F(x,y) = k$ از نقطه ی $(۱,۱)$ بگذرد k چند است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲}{۱۱}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'x}{f'y} = -\frac{۲y - x}{۴y + ۲x + ۱}$$

در صورت عامل $۲y$ مشتق $۲xy$ نسبت به x است و عامل x مشتق $\frac{x^۲}{۲}$ نسبت به x است. در مخرج $۴y$ مشتق $۲y^۲$ نسبت به y است و $۲x$ مشتق $۲xy$ نسبت به y است و ۱ نیز مشتق y نسبت به y است. ضمنا تابع ممکن است هر عدد ثابتی مثل c هم داشته باشد.

$$۲xy + \frac{x^۲}{۲} + ۲y^۲ + ۲xy + c = ۰$$

$$A\Big|_{۱}^{۱} \Rightarrow ۲ + \frac{۱}{۲} + ۲ + ۲ + c = ۰ \Rightarrow c = -\frac{۱۳}{۲}$$

$$F(x,y) = k$$

$$\Rightarrow ۲xy + \frac{x^۲}{۲} + ۲y^۲ + ۲xy = \frac{۱۳}{۲}$$

$$\Rightarrow k = \frac{۱۳}{۲}$$

مثال از رابطه ی $y^۲ e^{۲x} = ۲y$ مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ در نقطه ی $(۰,۲)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) ۸

$$e^{۲x}=\frac{۲y}{y^{۲}}\Rightarrow e^{۲x}=\frac{۲}{y}\Rightarrow\frac{y}{۲}=\frac{۱}{e^{۲x}}\Rightarrow y=۲e^{-۲x}$$
$$y'=-۴e^{-۲x}\Rightarrow y''=۸e^{-۲x}$$
$$y''(۰)=۸$$

مثال دو خط به موازات نیمساز ربع اول و سوم بر منحنی $\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{y^{۲}}=۲$ مماس شده، فاصله ی ۲ نقطه ی تماس چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ‏ ۲) $\sqrt{۲}$ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۴

معادله ی نیمساز ربع اول و سوم $y=x$ است که شیب آن برابر یک است $۱=$ $y'=-\dfrac{\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}}{\frac{۲}{۳}y^{-\frac{۱}{۳}}}$

و چون خطوط موازی با این خط موازی اند سپس مقدار مشتق باید برابر ۱ باشد

$$\Rightarrow -\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳}y^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y=-x$$
$$\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{y^{۲}}=۲\Rightarrow ۲\sqrt[۳]{x^{۲}}=۲\Rightarrow\sqrt[۳]{x^{۲}}=۱\Rightarrow x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm۱$$
$$\begin{array}{llll} x=۱ & \Rightarrow & y=۱ & A\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right. \\ x=-۱ & \Rightarrow & y=-۱ & B\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right. \end{array}\Rightarrow AB=\sqrt{\left(۱-(-۱)\right)^{۲}+\left(۱-(-۱)\right)^{۲}}$$
$$=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۴}$$

مثال در یک نقطه از منحنی به معادله ی $\sqrt{y}+yx\sqrt{x}-۶x=۰$ خط مماس بر منحنی موازی محور xهاست. طول آن نقطه کدام است؟

۱) ۳ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۴

$$y'_x=-\frac{\frac{۳}{۲}y\sqrt{x}-۶}{\frac{۱}{۲\sqrt{y}}+x\sqrt{x}}=۰$$

شیب محور x ها برابر صفر است پس $y'x=۰$ می باشد.

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}y\sqrt{x}=۶ \Rightarrow y\sqrt{x}=۴ \to \sqrt{x}=\frac{۴}{y}$$

با جاگذاری این نتیجه در ضابطه ی ضمنی داریم:

$$\sqrt{y}+y\times\left(\frac{۴}{y}\right)^{۲}\times\frac{۴}{y}-۶\left(\frac{۴}{y}\right)^{۲}=۰ \Rightarrow \sqrt{y}+\frac{۱۶\times۴}{y^{۲}}-\frac{۶\times۱۶}{y^{۲}}=۰$$

$$\xRightarrow{\times y^{۲}} y^{۲}\sqrt{y}+۱۶\times۴-۶\times۱۶=۰ \Rightarrow y^{۲}\sqrt{y}=۲\times۱۶ \Rightarrow y=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۴}{y} \Rightarrow \sqrt{x}=۱ \Rightarrow x=۱$$

مثال) با مشتق گیری ضمنی $y'=\frac{x+۲xy}{y^{۳}-h(x,y)}$ بدست آمده است. $h(x,y)$ کدام می تواند باشد؟

۱) $x^{۲}-۱$ ۲) $۴x+۸$ ۳) $-۴x+۱$ ۴) $-x^{۲}+۱$

عبارت صورت، مشتق نسبت به x است پس در تابع $\frac{x^{۲}}{۲}$ و $x^{۲}y$ داریم که مشتق آنها نسبت به x به ترتیب $۲xy$ و x شده است. حالا در مخرج باید مشتق این توابع را نسبت به y داشته باشیم که به ترتیب $x^{۲}$ و ۰ می شود. پس $h(x,y)$ حتما شامل $x^{۲}$ است. عامل $y^{۳}$ نیز در مخرج مشتق $\frac{y^{۴}}{۴}$ نسبت به y است. به همین دلیل در صورت وجود ندارد.

$$-\frac{f'x}{f'y}=\frac{x+۲y}{y^{۳}-h(x,y)} \Rightarrow \frac{f'x}{f'y}=\frac{x+۲y}{h(x,y)-y^{۳}}$$

مثال) بر منحنی $y^{۲}+۴xy+۴+۳x^{۲}=۰$ دو خط به موازات محور y ها می توان رسم کرد. فاصله ی این دو خط کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱

شیب هر خط موازی محور ها تعریف نشده (یا ∞) می باشد. سپس مشتق می گیریم و مخرج را مساوی صفر قرار می دهیم

$$y' = -\frac{۴y + ۶x}{۲y + ۴x} \Rightarrow ۲y + ۴x = ۰ \Rightarrow y = -۲x$$

این رابطه را در معادله ی اولیه قرار می دهیم.

$$(-۲x)^۲ + ۴x(-۲x) + ۳x^۲ = -۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

فاصله ی ۲خط $x = ۲$ و $x = -۲$ برابر ۴ است.

مثال) خط مماس بر منحنی $۲x^۲ = ۹ - y^۲$ در نقطه ای به طول ۲ واقع در ناحیه ی اول محورهای مختصات را در نقاط B, A قطع می کند. مساحت مثلث OAB حدودا برابر کدام عدد است؟

۱) ۲۱   ۲) ۱۴   ۳) ۷   ۴) ۱۰

$$x = ۲ \Rightarrow ۸ = ۹ - y^۲ \Rightarrow y = \pm ۱ \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} y = ۱ \Rightarrow A\Big|_{۱}^{۲}$$

$$۲x^۲ + y^۲ - ۹ = ۰$$

$$y'_x = -\frac{۴x}{۲y} \xrightarrow{A\big|_{۱}^{۲}} y'_x = -۴$$

$$y - ۱ = -۴(x - ۲) \Rightarrow y = -۴x + ۹$$

برای تعیین محل تلاقی با محورهای y, x داریم:

$$\begin{array}{l} x = ۰ \Rightarrow y = ۹ \Rightarrow A\Big|_{۹}^{۰} \\ y = ۰ \Rightarrow x = \frac{۹}{۴} \Rightarrow B\Big|_{۰}^{\frac{۹}{۴}} \end{array} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۹ \times \frac{۹}{۴} = \frac{۸۱}{۸} = ۱۰/۱۲۵$$

می دانیم مساحت مثلثی که خط $ax + by + c = ۰$ $(c \neq ۰, a \neq ۰, b \neq ۰)$ با محورهای y, x می سازد: $S = \frac{۱}{۲}$ (طول از مبدا × عرض از مبدا)

سخن پایانی

مجموعه ای که مطالعه کردید شامل تدریس کامل بر مبنای کتاب درسی و نیز ریزترین و کوتاه ترین راه های تستی مبحث مشتق ضمنی بود. توصیه می شود قبل از مطالعه ی این کتاب به طور کامل فرمول های مشتق و نیز معادله ی خط مماس و قائم و سایر مطالب پیش نیاز برای این مجموعه را مطالعه کنید.

با امید به اینکه مجموعه ی فوق بتواند گره گشای مشکلات شما داوطلبان گرامی کنکورهای مقاطع دبیرستان و دانشگاهی باشد.