



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

دردوین این جزوه از تجربیات مؤلفین کتاب‌های زیر
نیز استفاده شده و در تآثری از سوالات که از نظر نگارنده
غیر قابل چشم‌پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱- کتاب درسی ریاضی دوازدهم تجربی

۲- حرف آخر (مهندس منتظری)

۳- مثلثاتی خوشخوان (استاد کاظم اجلالی)

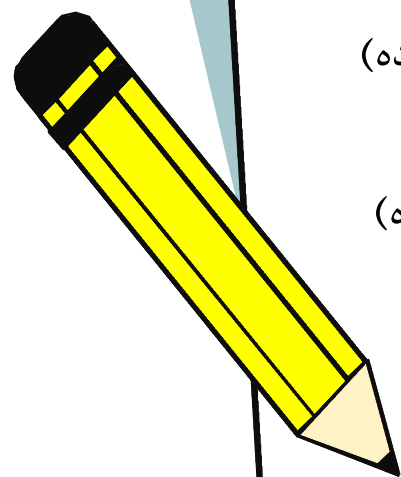
۴- نردبام حسابان خیلی سبز (استاد حسین شفیع زاده)

۵- حسابان خیلی سبز (محسن عسلی)

۶- دیفرانسیل پیشرفته خیلی سبز (حسین شفیع زاده)

۷- حسابان خوشخوان (حسین شفیع زاده)

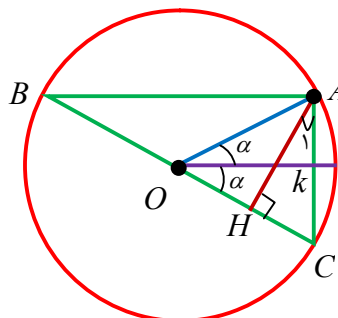
۸- تست‌های کنکور سراسری



روابط مثلثاتی 2α

دایره روبرو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α شده که روبرو به وتر AC می باشد از این رو در مثلث OAK داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2 \sin \alpha$$



هم چنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبرو به $\widehat{AC}$ می باشد لذا نصف آن است. پس: $\hat{B} = \alpha$
از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبرو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$
همچنین از مجموع زوایای $\triangle ABC$ بدست می آید:

$$\triangle OAC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

بطور مشابه در $\triangle AHC$ داریم:

$$\triangle AHC : \hat{H} + \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A} + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $\triangle OAC$ و $\triangle AHC$ بدست آورده و برابر قرار می دهیم:

$$\triangle OAC : AH = \sin 2\alpha$$

$$\triangle AHC : \cos \hat{A} = \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \xrightarrow{(\text{I})} AH = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \times \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

پس برابری $\sin 2\alpha$ دو رابطه می توان بدست آورد:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}}$$

همچنین در مثلث $\triangle OAH$ داریم $OH = \cos 2\alpha$ و در مثلث $\triangle AHC$ داریم:

$$\sin \hat{A} = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2 \sin \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

می توان برای $\cos 2\alpha$ روابط دیگری نیز بدست آورد:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \underline{1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

یادآوری:
$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

هم صورت و هم مخرج کسر را بر $\cos^2 \alpha$ تقسیم می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}$$

پس تاکنون روابط زیر را یاد گرفتیم که هر کدام را به صورت جداگانه مورد بحث قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

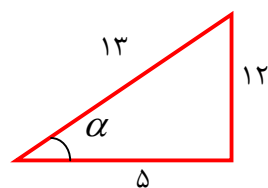
سؤال ۱: فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و زاویه ای تند باشد حاصل $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ را بدست آورید.

(تمرین کتاب درسی)

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$$



رابطه اصلی $\sin 2\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha} \text{ رابطه‌ی مادر}$$

رابطه‌ی دشمن

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = 2 \tan \alpha \times \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\sin \odot = \begin{cases} 2 \sin \frac{\odot}{2} \cos \frac{\odot}{2} \\ \frac{2 \tan \frac{\odot}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\odot}{2}} \end{cases}$$

مثال $\rightarrow \sin 100^\circ = 2 \sin 50^\circ \cos 50^\circ = \frac{2 \tan 50^\circ}{1 + \tan^2 50^\circ}$

مثال $\rightarrow \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 + \tan^2 2\alpha}$

مثال $\rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

سؤال ۲: حاصل $\cos 10^\circ \cos 165^\circ$ کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} \cos(10^\circ) = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ \\ \cos(165^\circ) = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos 10^\circ \cos 165^\circ = \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

با توجه به اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ داریم:

$$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin(2 \times 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases} \quad \text{تذکره:}$$

سؤال ۳: حاصل $\sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$ برابر کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$A = \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} \sin \left(\frac{4\pi - \pi}{8} \right)$$

$$A = \sin \frac{\pi}{8} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

سؤال ۴: مقدار $\sin \frac{\pi}{10} \times \cos \frac{\pi}{5}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

طرفین را در $\cos \frac{\pi}{10}$ ضرب می کنیم:

$$\cos \frac{\pi}{10} A = \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{10} A = \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{5} \xrightarrow[\sin \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10}]{\frac{\pi + 2\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}} A = \frac{1}{4}$$

سؤال ۵: حاصل عبارت $\sin 7/5^\circ \cdot \sin 97/5^\circ \cdot \cos 15^\circ$ چقدر است؟ (آزاد ۸۹)

$$\sin 97/5^\circ = \sin(90 + 7/5^\circ) = \cos 7/5^\circ$$

$$A = \sin 7/5^\circ \cos 7/5^\circ \cos 15^\circ = \left(\frac{1}{2} \sin 15^\circ \right) \cos 15^\circ = \frac{1}{4} \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

سؤال ۶: حاصل عبارت $A = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ کدام است؟

طرفین را در $\sin 20^\circ$ ضرب می کنیم:

$$\sin 20^\circ A = \underbrace{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}_{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sin 40^\circ \cos 40^\circ}_{\frac{1}{4} \sin 80^\circ} \cos 80^\circ$$

$$\underbrace{\frac{1}{4} \sin 80^\circ \cos 80^\circ}_{\frac{1}{8} \sin 160^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin 20^\circ A = \frac{1}{8} \sin 160^\circ \xrightarrow{\sin 20^\circ = \sin 160^\circ} A = \frac{1}{8}$$

سؤال ۷: حاصل عبارت $A = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}$ کدام است؟

دو طرف رابطه رو در $\sin \frac{\pi}{7}$ ضرب می کنیم:

$$\sin \frac{\pi}{7} A = \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{7} A = \frac{1}{8} \sin \left(\frac{8\pi}{7} \right) = \frac{1}{8} \sin \left(\frac{7\pi + \pi}{7} \right) = \frac{1}{8} \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) \Rightarrow \sin \frac{\pi}{7} A = -\frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow A = -\frac{1}{8}$$

سؤال ۸: حاصل عبارت $A = \sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24}$ کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{\pi}{24} + \frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24} \\ \frac{5\pi}{24} + \frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24} \end{cases}$$

$$A = \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24}$$

$$A = \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\frac{1}{2} \sin \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

$$A = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

سؤال ۹: اگر $A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$, $B = \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12}$ مقدار AB کدام است؟

$$\frac{1}{12} \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} AB &= \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} \\ &= \sin \frac{\pi}{12} \cos \left(\pi - \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{7\pi}{12} \cos \left(\pi - \frac{7\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \left(-\cos \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{7\pi}{12} \left(-\cos \frac{7\pi}{12} \right) \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right) \left(\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} \right) = \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right) \times \left(\frac{1}{2} \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

سؤال ۱۰: حاصل $A = \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

A را در $\sin \frac{2\pi}{9}$ ضرب می کنیم:

$$A \sin \frac{2\pi}{9} = \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9}$$

$$\Rightarrow A \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} \Rightarrow A \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9}$$

$$\Rightarrow A \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{8} \sin \frac{16\pi}{9}$$

$$\Rightarrow A \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{8} \sin \left(\frac{18\pi - 2\pi}{9} \right) = \frac{1}{8} \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{9} \right) \Rightarrow A \sin \frac{2\pi}{9} = -\frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{9} \Rightarrow A = -\frac{1}{8}$$

سؤال ۱۱: ساده شده عبارت $A = \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$ چقدر است؟

$$\frac{16}{\sin 6^\circ} \quad (۴)$$

$$\frac{8}{\sin 6^\circ} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{8 \sin 6^\circ} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{16 \sin 6^\circ} \quad (۱)$$

طرفین را در $\sin ۱۲^\circ$ ضرب می کنیم:

$$\sin ۱۲^\circ A = \underbrace{\sin ۱۲^\circ \cos ۱۲^\circ}_{\frac{1}{2} \sin ۲۴^\circ} \cos ۲۴^\circ \cos ۴۸^\circ$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sin ۲۴^\circ \cos ۲۴^\circ}_{\frac{1}{4} \sin ۴۸^\circ} \cos ۴۸^\circ$$

$$\underbrace{\frac{1}{4} \sin ۴۸^\circ \cos ۴۸^\circ}_{\frac{1}{8} \sin ۹۶^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin ۱۲^\circ A = \frac{1}{8} \sin ۹۶^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{8} \frac{\sin(۹۰^\circ + ۶^\circ)}{\sin ۱۲^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\cos ۶^\circ}{2 \sin ۶^\circ \cos ۶^\circ} = \frac{1}{۱۶ \sin ۶^\circ}$$

سؤال ۱۲: حاصل $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را بدست آورید.

$$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

حالا دو کمان متمم هم هستند پس می توان به جای $\cos$ یکی $\sin$ دیگری را نوشت:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - ۲x\right) = \frac{1}{2} \cos ۲x$$

سؤال ۱۳: حاصل $A = \sin ۱۸^\circ \sin ۵۴^\circ$ برابر کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$A \cos ۱۸^\circ = \cos ۱۸^\circ \sin ۱۸^\circ \sin ۵۴^\circ = \frac{1}{2} \sin ۳۶^\circ \cos ۳۶^\circ = \frac{1}{4} \sin ۷۲^\circ$$

$$A \cos ۱۸^\circ = \frac{1}{4} \sin ۷۲^\circ \xrightarrow{\sin ۷۲^\circ = \cos ۱۸^\circ} A = \frac{1}{4}$$

سؤال ۱۴: اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos a \cdot \cos b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ کدام است؟

$$\cos a \cdot \cos b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos a \cdot \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b$$

$$= \cos a \cdot \sin a \cdot \cos b \cdot \sin b = \cos a \cdot \sin a \cdot \left(\frac{1}{2} \sin ۲b\right) = \frac{1}{2} \sin ۲a \cdot \sin ۲b$$

$$= \frac{1}{2} \sin ۲a \cdot \sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right) = \frac{1}{2} \sin ۲a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - ۲a\right) = \frac{1}{2} \sin ۲a \cdot \cos ۲a = \frac{1}{4} \sin ۴a$$

سؤال ۱۵: در مثلثی $1 - \cos ۲c = \operatorname{tg} c$ آنگاه زاویه $\hat{C}$ چند درجه است؟

$$1 - \cos ۲c = \operatorname{tg} c \Rightarrow ۲ \sin^2 c = \frac{\sin c}{\cos c} \Rightarrow ۲ \sin^2 c - \frac{\sin c}{\cos c} = 0 \Rightarrow \sin c \left(2 \sin c - \frac{1}{\cos c}\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\sin c \neq 0 \text{ در مثلث}} ۲ \sin c - \frac{1}{\cos c} = 0 \Rightarrow \frac{۲ \sin c \cos c - 1}{\cos c} = 0 \Rightarrow \frac{\sin ۲c - 1}{\cos c} = 0$$

$$\Rightarrow \sin ۲c = 1 \Rightarrow ۲c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

سؤال ۱۶: ساده شده کسر $\frac{(1+tg^{\circ}\theta)(1+cot^{\circ}\theta)}{1-\sin^{\circ}\theta-\cos^{\circ}\theta}$ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۱)

$$\frac{(1+tg^{\circ}\theta)(1+cot^{\circ}\theta)}{(1-\sin^{\circ}\theta)-\cos^{\circ}\theta} = \frac{(1+tg^{\circ}\theta)(1+cot^{\circ}\theta)}{\cos^{\circ}\theta-\cos^{\circ}\theta} = \frac{(1+tg^{\circ}\theta)(1+cot^{\circ}\theta)}{\cos^{\circ}\theta \underbrace{(1-\cos^{\circ}\theta)}_{\sin^{\circ}\theta}}$$

$$= \frac{1+tg^{\circ}\theta}{\cos^{\circ}\theta} \cdot \frac{1+cot^{\circ}\theta}{\sin^{\circ}\theta} = \frac{1}{\cos^{\circ}\theta} \cdot \frac{1}{\sin^{\circ}\theta} = \frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^{\circ}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{\circ}} = \frac{1}{\frac{1}{16}\sin^{\circ} 2\theta} = \frac{16}{\sin^{\circ} 2\theta}$$

$$1+tg^{\circ}\theta = \frac{1}{\cos^{\circ}\theta} \quad 1+cot^{\circ}\theta = \frac{1}{\sin^{\circ}\theta}$$

سؤال ۱۷: حاصل $\left(\sin \frac{\pi}{\lambda} - \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)^{\circ} - \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)^{\circ}$ کدام است؟

$$\left(\sin \frac{\pi}{\lambda} - \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)^{\circ} - \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)^{\circ} = -4 \sin \frac{\pi}{\lambda} \cdot \cos \frac{\pi}{\lambda} = -2 \left(2 \sin \frac{\pi}{\lambda} \cdot \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)$$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{\frac{\lambda}{2}} = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$(a+b)^{\circ} - (a-b)^{\circ} = 4ab$$

رابطه اصلی $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^{\circ}\alpha - \sin^{\circ}\alpha \quad \text{رابطه‌ی مادر}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^{\circ}\alpha - \sin^{\circ}\alpha = \cos^{\circ}\alpha - (1 - \cos^{\circ}\alpha) = 2\cos^{\circ}\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^{\circ}\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^{\circ}\alpha - \sin^{\circ}\alpha = 1 - \sin^{\circ}\alpha - \sin^{\circ}\alpha = 1 - 2\sin^{\circ}\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^{\circ}\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^{\circ}\alpha - \sin^{\circ}\alpha = \frac{1}{1+\tan^{\circ}\alpha} - \frac{\tan^{\circ}\alpha}{1+\tan^{\circ}\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^{\circ}\alpha}{1+\tan^{\circ}\alpha}$$

رابطه‌ی دشمن

رابطه‌ی دوست

$$\cos \bigcirc = \cos^{\circ}\bigcirc - \sin^{\circ}\bigcirc = 2\cos^{\circ}\bigcirc - 1 = 1 - 2\sin^{\circ}\bigcirc = \frac{1-\tan^{\circ}\bigcirc}{1+\tan^{\circ}\bigcirc}$$

سؤال ۱۸: اگر $\cos^{\circ}x = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\cos^{\circ} 4x$ کدام است؟ (آزاد ۹۱)

$$\cos 2x = 2\cos^{\circ}x - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 4x = 2\cos^{\circ} 2x - 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{\circ} - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

سؤال ۱۹: حاصل عبارت $\sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به ازای $x = 7/5^\circ$ برابر است با:

$$\sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4} \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

سؤال ۲۰: بیشترین مقدار عبارت $4 \cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \sin x$ چقدر است؟

$$A = 4 \cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} (2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}$$

سؤال ۲۱: حاصل $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right)$ کدام است؟

زاویه های $\left(\frac{\pi}{4} + a \right), \left(\frac{\pi}{4} - a \right)$ متمم یکدیگرند پس $\sin$ یکی $\cos$ دیگری هست.

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right) &= \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right) \\ &= \cos \left(2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2a \right) = \sin 2a \end{aligned}$$

سؤال ۲۲: اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۰/۸ (۴)

۰/۷۵ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\times 2} 2\alpha - 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\beta$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\beta \right) = \cos 2\beta$$

$\sin 2\alpha$ برابر $\cos 2\beta$ است.

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} = 0/6$$

راه اول) می دانیم $\cos 2\beta = \frac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta}$ پس:

راه دوم) به کمک رابطه $1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$ مقدار $\cos^2 \beta$ را به دست می آوریم:

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{4}{5}$$

از طرفی می دانیم $\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1$ پس: $\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1 = 2\left(\frac{4}{5}\right) - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} = 0/6$ تذکر:

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \sin 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

سؤال ۲۳: اگر $(1 + \tan^2 \alpha)^2 = \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)$ مقدار $\sin 4\alpha$ کدام است؟

دو طرف رو بر $(1 + \tan^2 \alpha)^2$ تقسیم می کنیم:

$$1 = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) (\cos 2\alpha)$$

$$\Rightarrow 1 = 4 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha = 2(2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha) = 2 \sin 4\alpha \Rightarrow 2 \sin 4\alpha = 1 \Rightarrow \sin 4\alpha = \frac{1}{2}$$

رابطه $\tan 2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$\tan \odot = \frac{2 \tan \frac{\odot}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\odot}{2}}$

مثال

 $\tan 200^\circ = \frac{2 \tan 100^\circ}{1 - \tan^2 100^\circ}$

مثال

 $\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

سؤال ۲۴: حاصل $\frac{\tan \alpha \cot 2\alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \times \cot 2\alpha = \frac{1}{2} \tan 2\alpha \cot 2\alpha = \frac{1}{2} (1) = \frac{1}{2}$$

سؤال ۲۵: اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3$ باشد مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3 \Rightarrow 3 \sin x + 3 \cos x = \sin x \Rightarrow 2 \sin x = -3 \cos x \xrightarrow{\div \cos x} 2 \tan x = -3 \Rightarrow \tan x = \frac{-3}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-3}{1 - \frac{9}{4}} = \frac{-3}{\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{12}{5}$$

سؤال ۲۶: اگر $\frac{2\cos x}{\sin x + 3\cos x} = 2$ باشد، $\cot 2x$ کدام است؟ (آزاد ۸۹)

$$\frac{2\cos x}{\sin x + 3\cos x} \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{صورت و مخرج رو بر } \cos x} \frac{2}{\tan x + 3} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\tan x + 3} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \tan x + 3 \Rightarrow \tan x = -2 \Rightarrow \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot 2x = \frac{3}{4}$$

سؤال ۲۷: اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3$ باشد، $\tan 2x$ چقدر است؟

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 3 \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{صورت و مخرج رو بر } \cos x} \frac{\tan x}{\tan x + 1} = 3 \Rightarrow \tan x = 3\tan x + 3$$

$$\Rightarrow 2\tan x = -3 \Rightarrow \tan x = -\frac{3}{2}$$

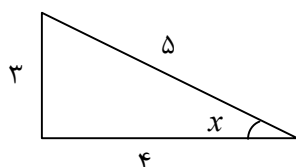
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-3}{1 - \frac{9}{4}} = \frac{-3}{\frac{4}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{-3}{-\frac{5}{4}} = \frac{-3}{-\frac{5}{4}} = \frac{-12}{5}$$

سؤال ۲۸: اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ ، $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و آنگاه $\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$ کدام است؟

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

چون x در ناحیه اول است $\cos x$ مثبت یعنی $\frac{4}{5}$ است پس: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$

(راه حل آسون تر)



$$\Rightarrow \tan x = \frac{3}{4}$$

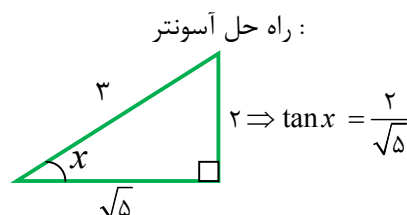
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\cot 2x = -\frac{1}{\tan 2x} = -\frac{7}{24}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

سؤال ۲۹: اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد، $\tan 2x$ کدام است؟

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \tan x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \xrightarrow[\text{در ربع اول}]{\text{راه حل آسونتر}} \tan x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{1} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$$

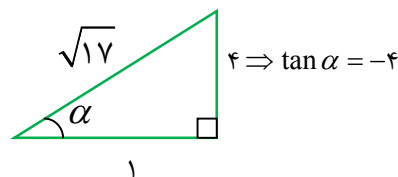
سؤال ۳۰: اگر $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ ، α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = 17 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 16 \Rightarrow \tan \alpha = \pm 4$$

در ناحیه α چهارم $\tan \alpha$ منفی $\rightarrow \tan \alpha = -4$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(-4)}{1 - (-4)^2} = \frac{-8}{1 - 16} = \frac{-8}{-15} = \frac{8}{15}$$

راه حل آسانتر :



روابط فرعی 2α

چرا $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$ ؟

علت: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1} + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

چرا $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$ ؟

علت: $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1} - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

سؤال ۳۱: اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ ، آنگاه مقدار $\tan x$ کدام است؟ (آزاد ۹۱)

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow 1 + \sin 2x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

سؤال ۳۲: حاصل $\frac{(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^4}{(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^4}$ چقدر است؟ (آزاد خارج ۹۰)

$$= \left[\frac{(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2}{(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2} \right]^2 = \left[\frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} \right]^2 = \left[\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \right]^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

سؤال ۳۳: اگر $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$ ، $\cos 4x$ چقدر است؟ (آزاد ۹۰)

$$\sin x - \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left(\frac{3}{4} \right)^2 = 1 - \frac{18}{16} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$$

سؤال ۳۴: اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha \right)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

$$-\frac{3}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\boxed{(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha}$$

سؤال ۳۵: اگر $4 \sin x \cos x = -1$ باشد، $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

$$4 \sin x \cos x = -1 \rightarrow 2(2 \sin x \cos x) = -1 \rightarrow 2 \sin 2x = -1 \rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$A = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\boxed{(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x}$$

$$A^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin 2x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

سؤال ۳۶: حاصل $(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)$ به ازای $x = \frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

$$(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1) = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = 1 + \sin 2x - 1 = \sin 2x$$

$$\xrightarrow{x = \frac{7\pi}{12}} \sin \frac{14\pi}{12} = \sin\left(\frac{12\pi + 2\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

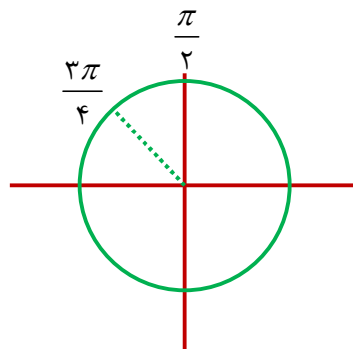
سؤال ۳۷: حاصل عبارت $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sin x$ وقتی $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ باشد، کدام است؟

$$\boxed{1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2}$$

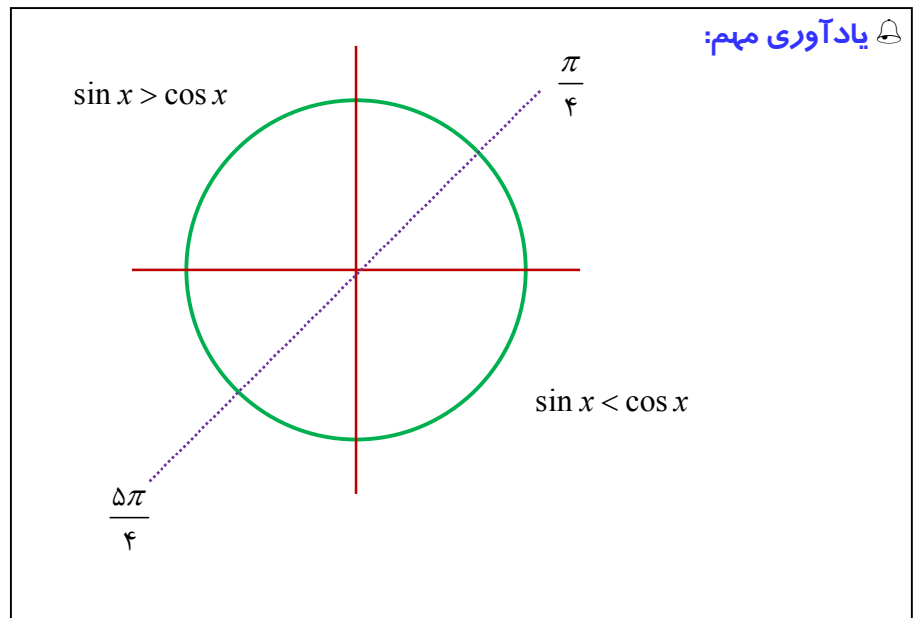
$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sin x = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} - \sin x = |\sin x + \cos x| - \sin x$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < \sin x + \cos x < 1$$

$$|\sin x + \cos x| - \sin x = \sin x + \cos x - \sin x = \cos x$$



یادآوری مهم:

سؤال ۳۸: حاصل $\sqrt{1 + \sin 2^\circ} + \sqrt{1 - \sin 2^\circ}$ برابر کدام است؟

$$\sqrt{(\sin 1^\circ + \cos 1^\circ)^2} + \sqrt{(\sin 1^\circ - \cos 1^\circ)^2} = \underbrace{|\sin 1^\circ + \cos 1^\circ|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|\sin 1^\circ - \cos 1^\circ|}_{\text{منفی}}$$

$$= \sin 1^\circ + \cos 1^\circ - (\sin 1^\circ - \cos 1^\circ) = 2 \cos 1^\circ$$

سؤال ۳۹: انتهای کمان x در کدام ناحیه باشد تا اتحاد $\frac{1 + |\sin 2x|}{\cos 2x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ برقرار باشد.

سمت چپ

$$\frac{1 \pm \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\sin x \pm \cos x)^2}{\cos 2x}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

حالا چی کار کنیم تا به چیزی شبیه عبارت سمت چپ برسیم!!!!

یه ابتکار به خرج می دم. عبارت بالا رو در $\cos x - \sin x$ ضرب می کنیم. نگاه کن:

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \times \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + |\sin 2x|}{\cos 2x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} \Rightarrow |\sin 2x| = -\sin 2x \Rightarrow \sin 2x < 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x < 0$$

این نامعادله زمانی رخ می دهد که $\sin x$ و $\cos x$ هم علامت نباشند یعنی ناحیه دوم و چهارم پس x باید در ناحیه دوم یا چهارم باشد.سؤال ۴۰: حاصل $\frac{1 + \tan^2 x}{(1 - \tan x)^2}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\text{روش اول} \quad \frac{1 + \tan^2 x}{(1 - \tan x)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1 - \sin 2x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 - \sin 2x} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 - \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{روش دوم} \quad A = \frac{1 + \tan^2 x}{(1 - \tan x)^2} \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{1 + \tan^2 x - 2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = 1 - 2 \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = 1 - \sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2$$

سؤال ۴۱: اگر $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} > \sqrt{1 + \sin 2x}$ آنگاه انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟

$$\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} 1 & \text{در ناحیه اول یا چهارم} \\ -1 & \text{در ناحیه دوم یا سوم} \end{cases}$$

x نمی تونه تو ناحیه دوم یا سوم باشه، چون در این صورت داریم $-1 > \sqrt{1 + \sin 2x}$ که غیر قابل قبول است پس x یا تو ناحیه اول یا تو ناحیه چهارم قرار دارد.

$$\Rightarrow 1 > \sqrt{1 + \sin 2x} \Rightarrow 1 > 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x < 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x < 0 \xrightarrow{\text{مختلف علامه } \cos x, \sin x} \text{در ناحیه چهارم است}$$

$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

 چرا؟

$$\text{علت: } \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

سؤال ۴۲: اگر $\tan x + \cot x = 4$ ، حاصل $\sin 2x$ چقدر است؟

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 4 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

سؤال ۴۳: هرگاه $\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} = 4$ مقدار $\cos 2x$ چه عددی است؟

$$\frac{3}{4} \quad (1) \qquad \frac{1}{2} \quad (2) \qquad \frac{1}{4} \quad (3) \qquad -\frac{1}{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

$$\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

از طرفی می دانیم $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ پس:

$$\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

با توجه به فرض سوال که $\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} = 4$ داریم:

$$\begin{aligned} \tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} &= \frac{2}{\sin x} = 4 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha \\ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \quad \text{تذکر:} \\ \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \end{cases}$$

سؤال ۴۶: اگر $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x} = \tan x + \cot x$$

پس باید به دنبال $\tan x$ باشیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} &= 2 \xrightarrow[\text{بر } \cos x \text{ تقسیم می کنیم}]{\text{صورت و مخرج رو}} \frac{\tan x + 2}{\tan x - 3} = 2 \Rightarrow \tan x + 2 = 2 \tan x - 6 \\ \Rightarrow \tan x &= 8 \Rightarrow \tan x + \cot x = \tan x + \frac{1}{\tan x} = 8 + \frac{1}{8} = \frac{65}{8} \end{aligned}$$

سؤال ۴۷: اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{2}{-\frac{3}{4}} = -\frac{8}{3}$$

سؤال ۴۶: اگر $\sin 2x = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل کسر $\frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x}$ برابر است با:

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x} &= \frac{(\tan x + \cot x)^2 - 2\tan x \cot x}{(\tan x + \cot x)^2 - 2\tan x \cot x} = \frac{(\tan x + \cot x)^2 - 2}{(\tan x + \cot x)^2 - 2(\tan x + \cot x)} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)} = \dots = \frac{34}{65} \end{aligned}$$

سؤال ۴۷: اگر $\tan(45^\circ - x) + \tan(45^\circ + x) = a$ باشد، $\cos 2x$ برابر چیست؟

چون زاویه های $(45^\circ - x) + (45^\circ + x) = 90^\circ$ متمم یکدیگرند $\tan$ یکی برابر $\cot$ دیگری است.

$$\tan(45^\circ - x) + \tan(45^\circ + x) = \tan(45^\circ - x) + \cot(45^\circ - x) = a$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2(45^\circ - x)} = a \Rightarrow \frac{2}{\sin(90^\circ - 2x)} = a \Rightarrow \frac{2}{\cos 2x} = a$$

$$\text{چرا؟} \quad \boxed{\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha}$$

$$\text{علت: } \tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

سؤال ۴۸: اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟ (سراسری ۹۶)

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} &= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{-\cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right)} = \frac{-2 \cos x}{\sin x} = -2 \cot x \end{aligned}$$

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot x = -2 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{از طرفی چون } \tan x = \frac{4}{3} \text{ است پس:}$$

راه دوم $\Rightarrow \tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$

$$\Rightarrow \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot x \xrightarrow{\tan x = \frac{4}{3}} -2 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

تذکره:
$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

سؤال ۴۹: اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد مقدار $\tan 2x$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}$$

راه اول

از طرفی می دانیم $\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ پس:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = \frac{-\cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right)} = \frac{-\cos x}{\frac{1}{2} \sin x} = -2 \cot x = 1$$

$$\Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \times -2}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

از طرفی می دانیم $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ پس:

راه دوم

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow -2 \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan x = -2 \Rightarrow \tan 2x = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

سؤال ۵۰: حاصل عبارت $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} - 2 \tan x - 4 \tan 2x$ برابر چیست؟

$$= 2 \cot x - 2 \tan x - 4 \tan 2x = 2 \times 2 \cot 2x - 4 \tan 2x = 4 \cot 2x - 4 \tan 2x = 8 \cot 4x$$

سؤال ۵۱: به کمک رابطه $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$A = \tan 2^\circ + 2 \tan 4^\circ + 4 \cot 8^\circ$$

$$A = \tan 2^\circ + 2 \tan 4^\circ + 2(2 \cot 8^\circ) = \tan 2^\circ + 2 \tan 4^\circ + 2(\cot 4^\circ - \tan 4^\circ)$$

$$= \tan 2^\circ + 2 \tan 4^\circ + 2 \cot 4^\circ - 2 \tan 4^\circ = \tan 2^\circ + 2 \cot 4^\circ = \tan 2^\circ + (\cot 2^\circ - \tan 2^\circ) = \cot 2^\circ$$

سؤال ۵۲: نمودار $(1 - 2 \tan 2^\circ \cot 4^\circ)(\cot 1^\circ - \tan 1^\circ)$ عددی کدام است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\begin{aligned} &= (2 \cot 2^\circ)^2 (1 - 2 \tan 2^\circ \cot 4^\circ) = 4 \cot^2 2^\circ (1 - 2 \tan 2^\circ \cot 4^\circ) = 4 \cot^2 2^\circ - 8 \cot 2^\circ \cot 4^\circ \\ &= 4 \cot^2 2^\circ - 4 \cot 2^\circ (2 \cot 4^\circ) = 4 \cot^2 2^\circ - 4 \cot 2^\circ (\cot 2^\circ - \tan 2^\circ) \\ &= 4 \cot^2 2^\circ - 4 \cot^2 2^\circ + 4 \cot 2^\circ \tan 2^\circ = 4 \end{aligned}$$

سؤال ۵۳: حاصل $\tan 75^\circ - \tan 15^\circ$ برابر کدام است؟

 $3\sqrt{3}$ (۴) $3 - \sqrt{3}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۱)

$$\tan 75^\circ = \cot 15^\circ \Rightarrow \tan 75^\circ - \tan 15^\circ = \cot 15^\circ - \tan 15^\circ = 2 \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

سؤال ۵۴: مقدار $\frac{\tan 15^\circ + \cot 15^\circ}{\tan 15^\circ - \cot 15^\circ}$ کدام است؟

$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad \tan \beta - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$

$$A = \frac{\frac{2}{\sin 30^\circ}}{-2 \cot 30^\circ} = \frac{\frac{2}{\sin 30^\circ}}{-\frac{2 \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}} = \frac{-1}{\cos 30^\circ} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

سؤال ۵۵: حاصل $\frac{2}{\tan 80^\circ} + \frac{1}{\tan 50^\circ}$ برابر کدام است؟

 $-\cot 50^\circ$ (۴) $\cot 50^\circ$ (۳) $-\cot 40^\circ$ (۲) $\cot 40^\circ$ (۱)

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{2 \tan 40^\circ} + \cot 50^\circ = \frac{1 - \tan^2 40^\circ}{\tan 40^\circ} + \tan 40^\circ \\ &= \frac{1 - \tan^2 40^\circ}{\tan 40^\circ} + \frac{\tan^2 40^\circ + \tan^2 40^\circ}{\tan 40^\circ} = \frac{1}{\tan 40^\circ} = \cot 40^\circ \end{aligned}$$

$$\text{راه حل دوم} = 2 \cot 80^\circ + \cot 50^\circ = (\cot 40^\circ - \tan 40^\circ) + \tan 40^\circ = \cot 40^\circ$$

سؤال ۵۶: حاصل $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ به کدام صورت است.

 $-2 \cot 2x$ (۴) $-2 \cot 2x$ (۳) $2 \tan 2x$ (۲) $2 \cot 2x$ (۱)

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

چون دو زاویه $x + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} - x$ متمم یکدیگرند. $\tan$ یکی $\cot$ دیگری است یعنی:

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \tan\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\cot\left(2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = 2\cot\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\tan 2x$$

گزینه (۲) درست است.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{4} \sin^2 2\alpha$$

چرا؟

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{4}(2\sin \alpha \cos \alpha)(2\sin \alpha \cos \alpha) = 1 - \frac{2}{4} \sin^2 2\alpha$$

$$\frac{\frac{5\pi}{12}}{12} = \frac{\frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{12} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}}{12}$$

سؤال ۵۷: حاصل عبارت $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12}$ کدام است؟

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{2}{4} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

سؤال ۵۸: حاصل $\sin^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{5\pi}{24} + \cos^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{5\pi}{24}$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$A = \sin^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{5\pi}{24} + \cos^2 \frac{5\pi}{24} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{24}\right) + 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{10\pi}{24}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{12} + 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{5\pi}{12}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} \right) = 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} \right) = 2 - \frac{1}{2} \times 1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

متمم هستند

سؤال ۵۹: به فرض آن که $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ مقدار $3\sin x \cos x$ برابر است با:

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{8}{9} \quad (2)$$

$$\frac{7}{9} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

به کمک اتحاد مربع دو جمله ای (مربع سازی) داریم:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cos x = 1 - 2(\sin x \cos x)$$

از طرفی با توجه به آن که $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$ است داریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \underbrace{2(\sin x \cos x)^2}_{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

تذکره: با توجه به تساوی $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ می توان عبارت $\sin^4 x + \cos^4 x$ را به صورت زیر نیز ساده کرد:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \underbrace{2(\sin x \cos x)^2}_{\frac{1}{2} \sin^2 2\alpha} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

بر نیست رابطه $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ را به خاطر بسپارید.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \text{چرا؟}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad \text{چرا؟}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \quad \text{از تقسیم دو رابطه‌ی قبلی به همدیگه، می‌شه به رابطه‌ی روپرو رسید:}$$

سؤال ۶۰: نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{8}$ (۲۲/۵°) را بدست آورید.

$$\sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 22/5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{4 + 2 - 4\sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan 22/5^\circ = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \Rightarrow \cot 22/5^\circ = \frac{1}{\tan 22/5^\circ} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

سؤال ۶۱: نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{12}$ (۱۵°) را بدست آورید.

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

سؤال ۶۲: اگر $5^\circ < \alpha < 6^\circ$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\alpha}}$ کدام است؟

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4\alpha)}} = \sqrt{2 + \sqrt{2(2 \cos^2 2\alpha)}} = \sqrt{2 + \sqrt{4 \cos^2 2\alpha}} = \sqrt{2 + |2 \cos 2\alpha|}$$

$$5^\circ < \alpha < 6^\circ \Rightarrow 10^\circ < 2\alpha < 12^\circ \rightarrow \sqrt{2 - 2 \cos 2\alpha} = \sqrt{2(1 - \cos 2\alpha)} = \sqrt{2(2 \sin^2 \alpha)} = \sqrt{4 \sin^2 \alpha} = |2 \sin \alpha|$$

تو ناحیه دوم $\cos 2\alpha$ منفی هست

α تو ناحیه اول

$$\xrightarrow{\sin \alpha \text{ مثبت هست}} 2 \sin \alpha$$

سؤال ۶۳: اگر $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 2$ باشد، مقدار $\cot x$ چقدر است؟

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \cot \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot x = \frac{3}{4}$$

سؤال ۶۴: اگر $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ کدام است؟

$$-\frac{5}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

$$-\frac{12}{13} \quad (2)$$

$$\frac{12}{13} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\cos \left(x + \frac{x}{2} \right) = -\sin x = -\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = -\frac{2 \times \frac{3}{2}}{1 + \left(\frac{3}{2} \right)^2} = \frac{-3}{1 + \frac{9}{4}} = -\frac{12}{13}$$

سؤال ۶۵: اگر $\frac{x}{2} = \sqrt{2}$ و $\frac{x}{2} = \sqrt{2}$ باشد، حاصل کسر $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ چقدر است؟

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

سؤال ۶۶: خلاصه شده عبارت $(1 + \cos 40^\circ) \tan 20^\circ$ برابر است با:

$$\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ) = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot 2 \cos^2 20^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ$$

سؤال ۶۷: حاصل $\cos^2 x - \sin^2 x + 1$ کدام است؟

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 1 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + 1 = \cos 2x + 1 = 2 \cos^2 x$$

سؤال ۶۸: حاصل کسر $A = \frac{3 \sin x + \sin 2x}{1 + 3 \cos x + \cos 2x}$ کدام است؟

$$A = \frac{3 \sin x + \sin 2x}{1 + 3 \cos x + \cos 2x} = \frac{3 \sin x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 3 \cos x} = \frac{\sin x (3 + 2 \cos x)}{\cos x (2 \cos x + 3)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

سؤال ۶۹: حاصل عبارت $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \times \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ برابر کدام است؟

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \times \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

سؤال ۷۰: اگر انتهای کمان α در ناحیه اول دایره مثلثاتی باشد، عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟

$$= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{|\sin \alpha|} - \left| \tan \frac{\alpha}{2} \right|$$

چون α در ناحیه اول مثلثات است $\frac{\alpha}{2}$ هم در ناحیه اول است پس هر دو قدر مطلق مثبت هستند:

$$= \frac{1}{\sin \alpha} - \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

سؤال ۷۱: اگر $\cos x = k$ و x در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $A = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \cos 2x} - \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$ را

بر حسب k بنویسید.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \sin 2x}{1 + \cos 2x} - \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{2 \cos^2 x} - \sqrt{\frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right)^2 - \sqrt{\tan^2 x} \\ &= \frac{1}{2} (tgx - 1)^2 - \underbrace{|tgx|}_{\text{تو ناحیه دوم } tg \text{ منفی هست}} = \frac{1}{2} (tg^2 x + 1 - 2tgx) + (tgx) = \frac{1}{2} tg^2 x + \frac{1}{2} - tgx + tgx \\ &= \frac{1}{2} (tg^2 x + 1) = \frac{1}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2k^2} \end{aligned}$$

سؤال ۷۲: اگر $10^\circ < \alpha < 20^\circ$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \frac{-1 + \sqrt{1 + \sin 2\alpha}}{1 + \sqrt{1 - \sin 2\alpha}}$ کدام است؟

$$A = \frac{-1 + \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}}{1 + \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}} = \frac{-1 + |\sin \alpha + \cos \alpha|}{1 + |\sin \alpha - \cos \alpha|} = \frac{-1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{(-1 + \cos \alpha) + \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha) - \sin \alpha}$$

$$= \frac{-2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{-2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

سؤال ۷۳: حاصل عبارت $\frac{\tan 29^\circ}{\cos 32^\circ} + \frac{\cot 61^\circ}{\tan 58^\circ}$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$$\begin{cases} \cot 61^\circ = \tan(90^\circ - 29^\circ) = \tan 29^\circ \\ \cos 32^\circ = \cos(90^\circ - 58^\circ) = \sin 58^\circ \end{cases}$$

$$A = \frac{\tan 29^\circ}{\sin 58^\circ} + \frac{\tan 29^\circ}{\tan 58^\circ} = \tan 29^\circ \left(\frac{1}{\sin 58^\circ} + \frac{\cos 58^\circ}{\sin 58^\circ} \right) = \tan 29^\circ \left(\frac{1 + \cos 58^\circ}{\sin 58^\circ} \right) = \frac{\sin 29^\circ}{\cos 29^\circ} \times \frac{2 \cos^2 29^\circ}{2 \sin 29^\circ \cos 29^\circ} = 1$$

سؤال ۷۴: اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ حاصل $A = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}}$ برابر است با:

$$A = \frac{1 - \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{4}}{2 \cos^2 \frac{x}{4}} = \tan^2 \frac{x}{4} = \tan \frac{x}{4}$$

سؤال ۷۵: حاصل $A = \frac{1}{4}(1 - \cos 4x + \cos 6x - \cos 4x \cos 6x)$ برابر است با:

$$A = \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)(1 + \cos 6x) = \frac{1}{4}(2 \sin^2 2x)(2 \cos^2 3x) = \sin^2 2x \cos^2 3x$$

سؤال ۷۶: اگر $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5}$$

سؤال ۷۷: حاصل کسر $\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x}$ کدام است؟

$$\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x} = \frac{(1 + \cos 4x) + \cos 2x}{\sin 2x + \sin 4x} = \frac{2 \cos^2 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2 \sin 2x \cos 2x}$$

$$= \frac{\cos 2x (2 \cos 2x + 1)}{\sin 2x (1 + 2 \cos 2x)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x$$