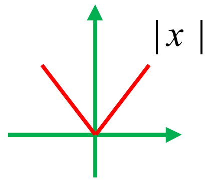
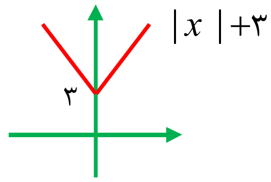
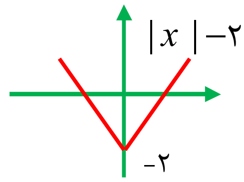
رسم نمودار توابع به کمک انتقال

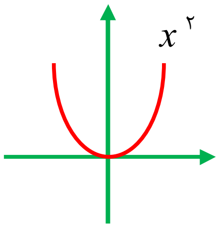
اگر فرض کنیم k یک عدد حقیقی مثبت باشد در هر یک از حالات زیر می خواهیم با انتقال نمودار تابع f ، به نمودار تابع موردنظر برسیم.

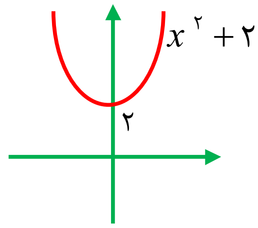
الف) $f(x)+k$: کافی است نمودار f را k واحد به سمت بالا انتقال دهیم به عبارتی برای همان مقدار x مقدار y را k واحد افزایش دهیم و برای رسم $f(x)-k$ به همین ترتیب نمودار f را k واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

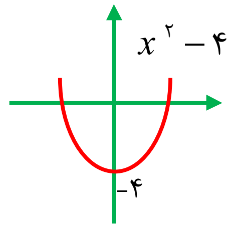




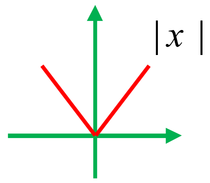


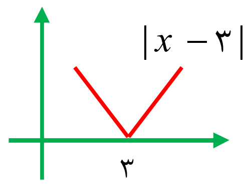


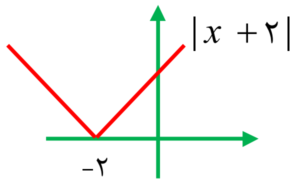


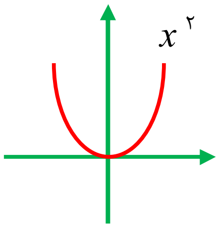


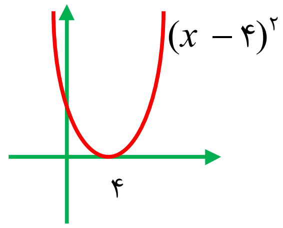
ب) $f(x-k)$: کافی است نمودار f را k واحد به سمت راست انتقال دهیم. برای رسم $f(x+k)$ نمودار f را k واحد به سمت چپ انتقال می دهیم.

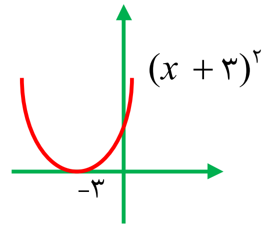


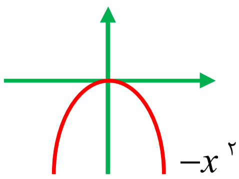


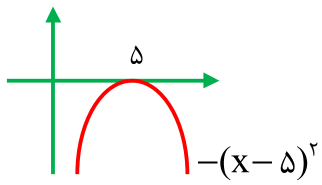


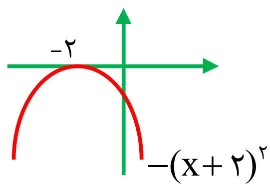










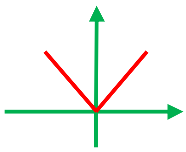


📖 **سؤال ۱: نمودار تابع $y=۲-|x-۲|$ از کدام ناحیه عبور نمی کند؟**

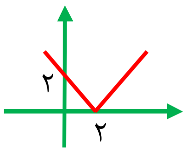
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

☜ **پاسخ: گزینه۲**

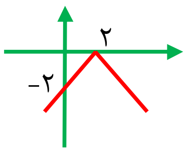
نمودار تابع $y=۲-|x-۲|$ را مطابق مراحل زیر رسم می کنیم:



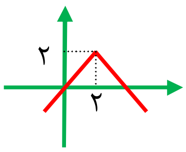
۱) نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می کنیم.



۲) نمودار تابع مرحله (۱) را ۲ واحد به سمت راست می بریم تا نمودار تابع $y=|x-۲|$ ایجاد شود:



۳) نمودار تابع مرحله (۲) را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم تا نمودار تابع $y=-|x-۲|$ ایجاد شود.



۴) نمودار تابع مرحله (۳) را ۲ واحد به سمت بالا می بریم تا نمودار تابع $y=۲-|x-۲|$ ایجاد شود:

پس تابع $y=۲-|x-۲|$ از ناحیهٔ دوم عبور نمی کند.

📖 **سؤال ۲: به ازای کدام مقادیر a نمودار تابع $y=|x+a|-۲$ از ناحیهٔ سوم عبور نمی کند؟**

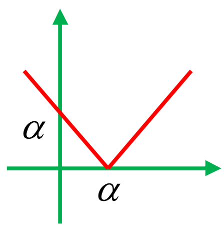
۱) $a\geq ۲$ ۲) $a\leq ۲$ ۳) $a\leq -۲$ ۴) $a\geq -۲$

☜ **پاسخ: گزینه۳**

برای رسم تابع $y=|x+a|$ با توجه به علامت a باید تابع f را به سمت چپ یا راست به مقدار $|a|$ انتقال دهیم پس دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

۱) اگر $a>۰$ باشد باید تابع f را به اندازهٔ a واحد به سمت چپ انتقال دهیم:

حال اگر این تابع را ۲ واحد به سمت پایین انتقال دهیم حتماً از ناحیهٔ سوم عبور می کند پس a نمی تواند مثبت باشد. (در نتیجه همهٔ گزینه های (۱) و (۲) و (۴) که شامل اعداد مثبت اند رد می شوند.)



۲) اگر $a\leq ۰$ باشد و برانیم $a=-\alpha$ است که $\alpha\geq ۰$ است. تابع f را ابتدا به اندازهٔ α واحد به سمت راست انتقال می دهیم تا تابع $g(x)=|x+a|$ ایجاد شود:

$\alpha=-a,\alpha\geq ۰$

حالا اگر این تابع را ۲ واحد به سمت پایین انتقال دهیم نباید از ناحیه سوم عبور کند. پس α نباید از ۲ کمتر باشد یعنی:

$$\alpha\geq ۰\xrightarrow{\alpha=-a}-a\geq ۲\Rightarrow a\leq -۲$$

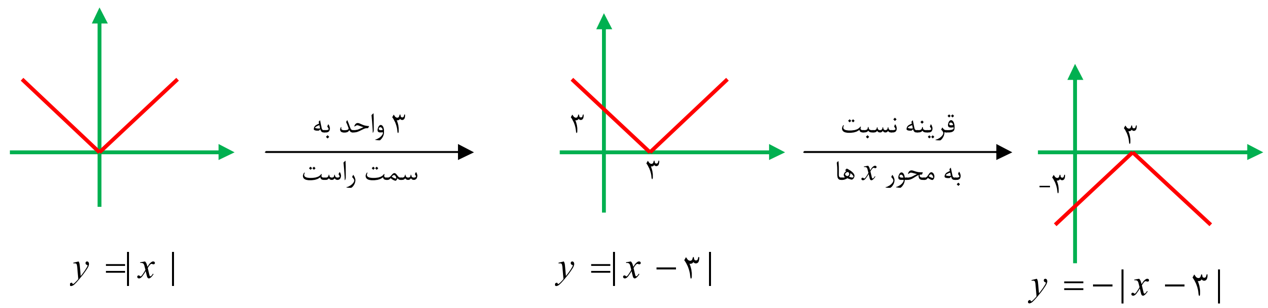
پس اگر $a\leq -۲$ باشد تابع $y=|x+a|-۲$ از ناحیهٔ سوم عبور نمی کند.

📖 سؤال ۳: نمودار تابع $f(x)=-|x-3|-a$ فقط از ناحیهٔ دوم نمی گذرد. حدود a کدام است؟

۱) $-3\le a\le 3$ ۲) $-3\le a\le 0$ ۳) $0\le a\le 3$ ۴) $a=-3$

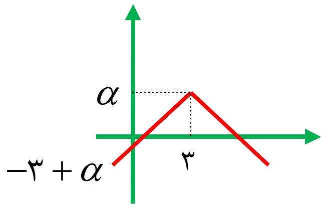
☜ پاسخ: گزینه۲

ابتدا نمودار تابع $y=-|x-3|$ را رسم می کنیم:



برای رسم تابع f باید تابع فوق را به اندازهٔ $|a|$ واحد به بالا یا پایین برد. اگر $a>0$ باشد باید تابع f را به اندازهٔ a پایین برد که در این صورت تابع f از دو ناحیهٔ اول و دوم عبور نمی کند که خواستهٔ سوال نیست. پس لازم است $a<0$ باشد اگر $a<0$ باشد و فرض کنیم $\alpha\ge 0, a=-\alpha$ برای رسم تابع f تابع $y=-|x-3|$ را به اندازهٔ α واحد باید بالا ببریم. برای آنکه f از ناحیهٔ دوم عبور نکند لازم است $\alpha\le 3$ باشد که مطابق شکل روبه رو تابع f از ناحیهٔ ۲ عبور نکند:

$$-3+\alpha\le 0\Rightarrow \alpha\le 3$$



پس $0\le\alpha\le 3$ است و چون $\alpha=-a$ است پس $0\le-\alpha\le 3$ و در نتیجه $-2\le\alpha\le 0$.

📖 سؤال ۴: با کدام انتقال از نمودار $y=x^2-6x+1$ به نمودار $y=x^2$ می رسیم؟

۱) سه واحد به راست، ۸ واحد به پایین   ۲) ۳ واحد به چپ ، ۸ واحد به بالا

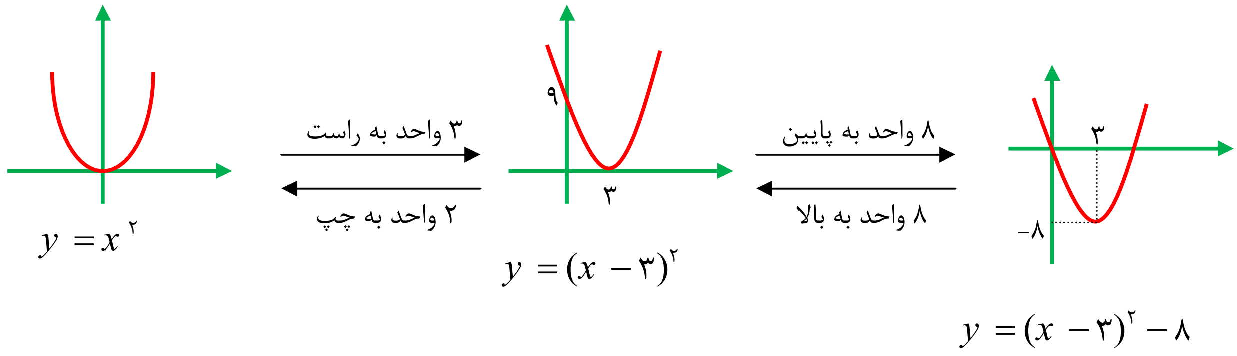
۳) سه واحد به راست، ۸ واحد به بالا   ۴) ۳ واحد به چپ، ۸ واحد به پایین

☜ پاسخ: گزینه۲

می دانیم $(x-3)^2=x^2-6x+9$ پس $x^2-6x+1=(x-3)^2-8$ در نتیجه:

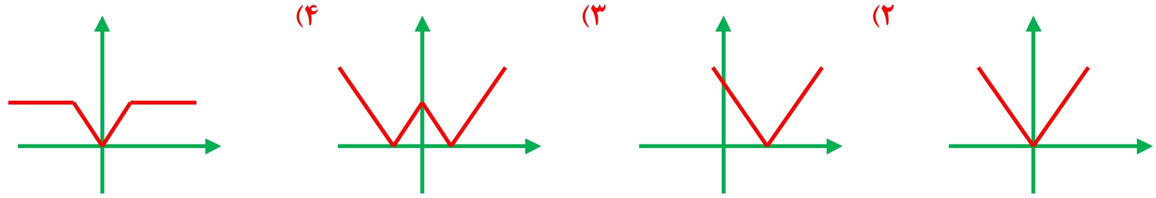
$$f(x)=x^2-6x+1=(x-3)^2-8$$

نمودار تابع f از انتقال ۳ واحد به راست و ۸ واحد به پایین تابع $y=x^2$ به دست آمده است پس نمودار تابع $y=x^2$ از انتقال ۸ به سمت بالا و ۳ واحد به سمت چپ تابع f ایجاد می شود.



سؤال ۵: نمودار $f(x) = |۲|x| - |۴x||$ به کدام صورت می باشد؟

۱) ۲) ۳) ۴)

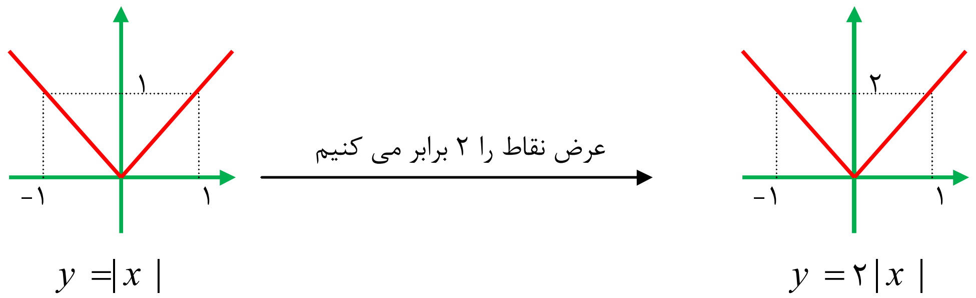


پاسخ: گزینه۱

می دانیم $|۴x| = ۴|x|$ در نتیجه: $y = |۲|x| - |۴x|| = |۲|x| - ۴|x|| = |-۲|x||$

از طرفی می دانیم $|-a| = |a|$ پس: $y = |-۲|x|| = |۲|x|| = ۲|x|$

پس باید نمودار تابع $g(x) = ۲|x|$ را رسم کنیم.



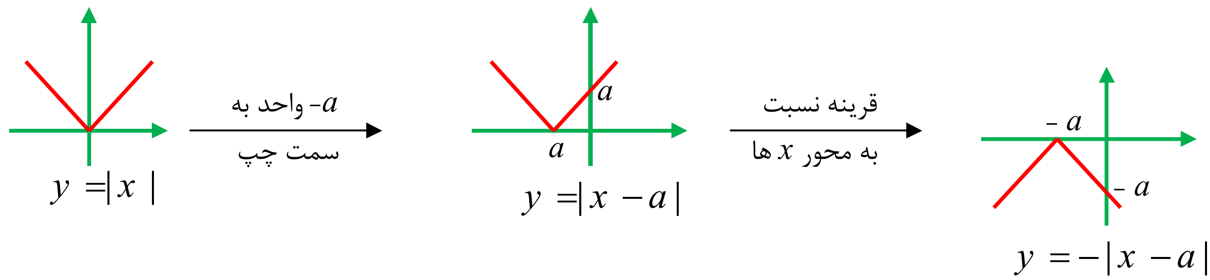
سؤال ۶: سطح بین $f(x) = a - |x - a|$ تا محور x ها برابر ۱۶ می باشد. a کدام است؟

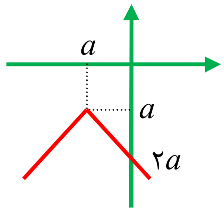
۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۱

ابتدا باید نمودار تابع f را رسم کنیم. برای رسم تابع f دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

۱) اگر $a < ۰$ باشد ابتدا باید تابع $y = |x|$ را به اندازهٔ $-a$ واحد به سمت چپ ببریم و سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه کنیم:

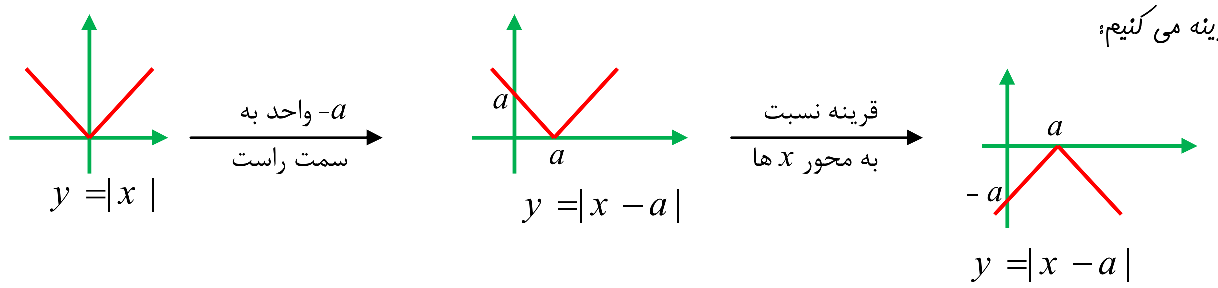




حال اگر تابع f را a- واحد به سمت پایین ببریم تابع $y=a-|x-a|$ ایجاد می شود.

در این حالت f سطحی با محور x ها ایجاد نمی کند پس a نم تواند منفی باشد.

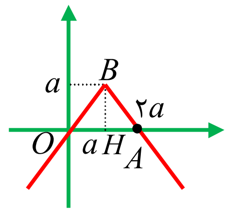
۲) اگر $a>0$ باشد ابتدا باید تابع $y=|x|$ را به اندازهٔ a واحد به سمت راست می بریم و سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم:



حالا اگر تابع فوق را a واحد بالا ببریم تابع f ایجاد می شود. مطابق شکل مساحت مثلث AOB برابر ۱۶ است پس:

$$S=\frac{OA\times BH}{2}\Rightarrow\frac{2a\times a}{2}=16\Rightarrow a^2=16$$

$$\Rightarrow a=\pm 4\xrightarrow{\text{چون } a>0} a=4$$



$f(x)=a-|x-a|$

تذکر: برای به دست آوردن محل برخورد تابع f در حالت $a>0$ با محورها می توانستیم $f(x)$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$a>0: f(x)=0\Rightarrow a-|x-a|=0\Rightarrow |x-a|=a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-a=a\\x-a=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2a\\x=0\end{cases}$$

سؤال ۷: اگر $f(x)=|x|$ طول نقطهٔ تلاقی $y=f(x)-1, y=f(x-2)$ کدام است؟

۱) ۱ ‏ ‏ ۲) ۱/۵ ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه۲

اگر $f(x)=|x|$ باشد $f(x-2)=|x-2|$ است و $f(x)-1=|x|-1$ پس باید محل تلاقی نمودار تابع $y=|x|-1, y=|x-2|$ را به دست آوریم. در محل تلاقی دو منحنی طول و عرض نقطهٔ برخورد برابر است پس باید:

$$|x-2|=|x|-1$$

تنها گزینه ای که باعث برقراری معادلهٔ فوق می شود (۲) است:

$$x=1/5\Rightarrow\underbrace{|1/5-2|}_{0/5}=\underbrace{|1/5|-1}_{0/5}$$

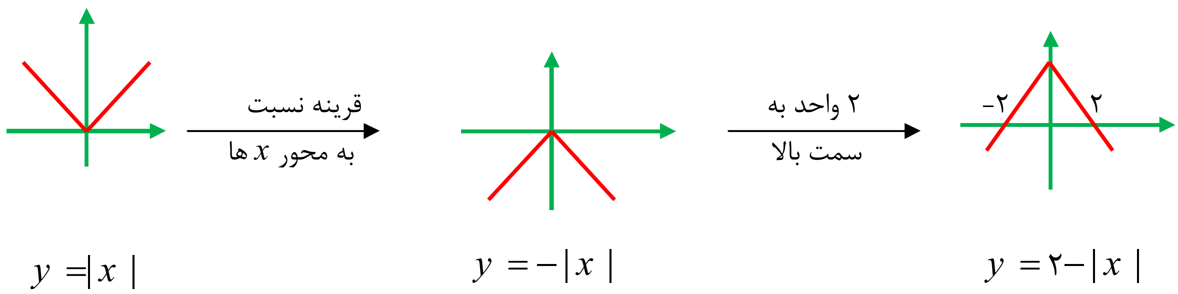
بقیهٔ گزینه ها در معادله صدق نمی کنند.

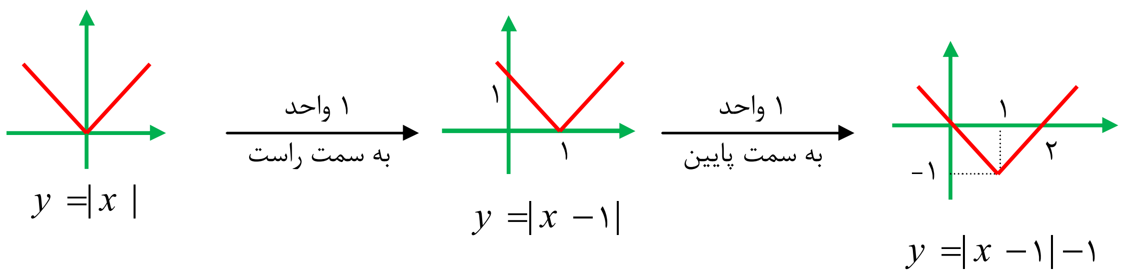
سؤال ۸: **مساحت بین نمودار دو تابع** $y=|x-1|-1, y=2-|x|$ **چقدر است؟**

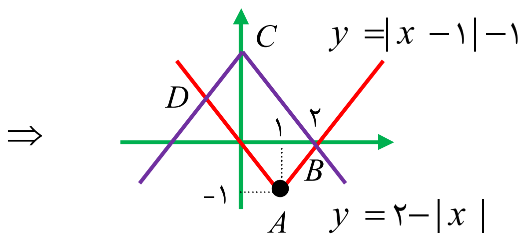
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نمودار دو تابع را رسم و سپس هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:







با توجه به آنکه در تابع $y=|x|$ دو خط عمود بر هم داریم (شیب دو خط ۱ و ۱- است) پس در شکل بالا شکل ایجاد شده مستطیل است. با توجه به شکل مختصات $A(1,-1), C=(0,2), B(2,0)$ است. اگر طول **CB** و **AB** را حساب کنیم می توانیم مساحت مستطیل را به دست آوریم. از طرفی می دانیم فاصلهٔ دو نقطهٔ $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ از هم برابر $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ است پس:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}A(1,-1)\\B(2,0)\end{cases}\Rightarrow AB=\sqrt{(1-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}\\ \begin{cases}B(2,0)\\C(0,2)\end{cases}\Rightarrow BC=\sqrt{(0-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{8}\end{array}\right\}\Rightarrow S=AB\times BC=\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$$

📖 سؤال ۹: **نمودار تابع $y=۳-|x-۱|$ را حداقل چند واحد به طرف x ها مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها نامنفی باشد؟**

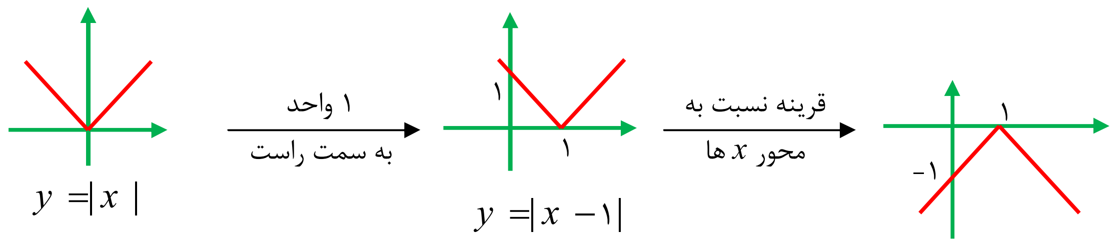
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

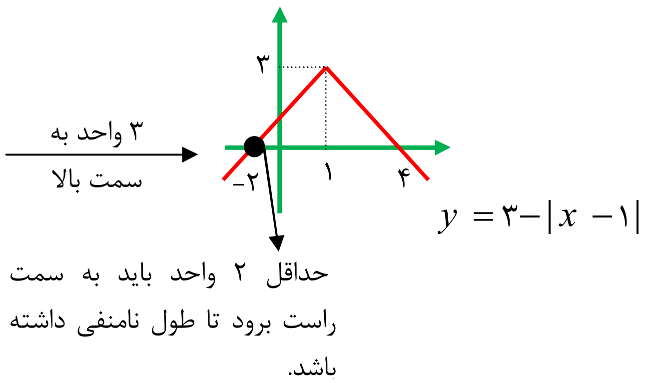
☜ پاسخ: گزینه۲

می دانیم در محل برخورد هر تابع با محور x ها عرض نقطه برابر صفر است پس با قرار دادن $y=۰$ محل های برخورد تابع را با محور x ها به دست می آوریم:

$$y=۰\Rightarrow ۳-|x-۱|=۰\Rightarrow |x-۱|=۳\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۳\Rightarrow x=۴ \\ x-۱=-۳\Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

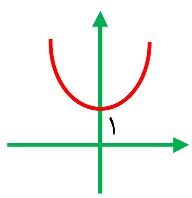
پس تابع در دو نقطه با طول های ۲- و ۴ با محور x ها برخورد دارد. پس حداقل باید ۲ واحد تابع را به سمت راست ببریم تا محل های برخورد با محور x ها در نقاطی با طول منفی نباشند. به نمودار تابع دقت کنید:



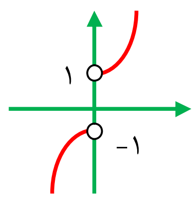


📖 سؤال ۱۰: **کدامیک از گزینه های زیر نمودار تابع $y=|x|\left(x+\frac{۱}{x}\right)$ است؟**

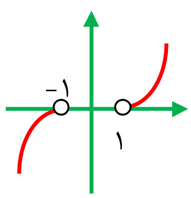
۱)



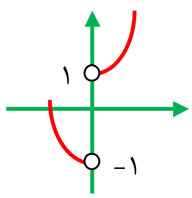
۲)



۳)



۴)



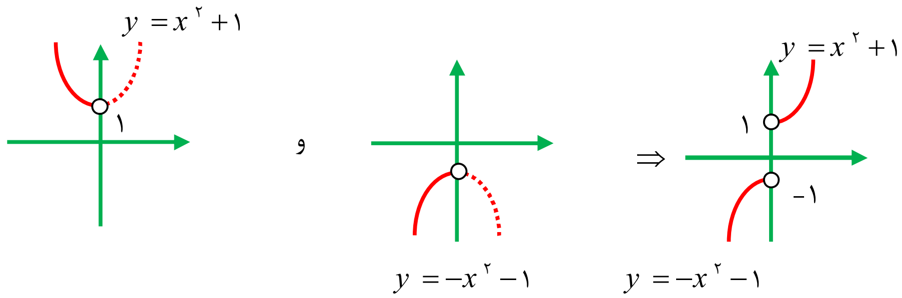
☜ پاسخ: گزینه۲

اگر $x>۰$ باشد داریم $|x|=x$ پس: $x>۰: y=x\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۲+۱$

اگر $x<0$ باشد داریم $|x|=-x$ پس: $x<0: y=-x\left(x+\frac{1}{x}\right)=-x^2-1$

$$y=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ -x^2-1 & x<0 \end{cases}$$

نمودار تابع $y=x^2+1$ را به ازای $x>0$ و نمودار تابع $y=-x^2-1$ را به ازای $x<0$ رسم می‌کنیم:



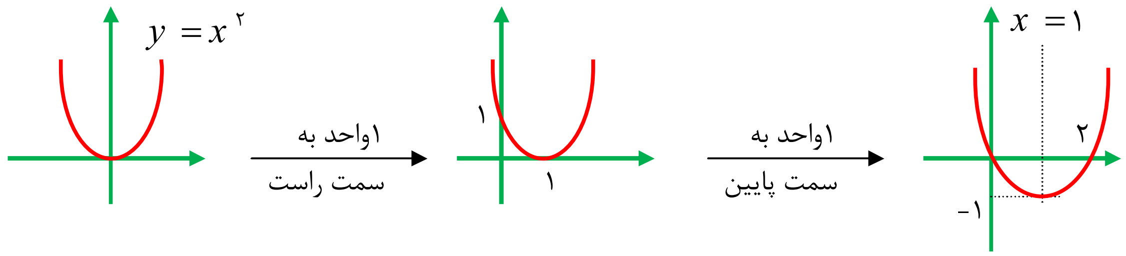
تذکر: چون $x=0$ مخرج کسر تابع را صفر می‌کند عضوی از دامنه نیست.

📖 سؤال ۱۱: **اگر $f(x)=x^2-2x$ با دامنهٔ $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ باشد برد آن چند عضوی است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

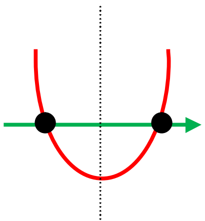
☜ پاسخ: گزینه۲

ابتدا سهمی $y=x^2-2x$ را رسم می‌کنیم. می دانیم $x^2-2x=(x-1)^2-1$ پس به کمک انتقال تابع $y=x^2$ داریم:



$$y=(x-1)^2-1=x^2-2x$$

با توجه به آنکه $x=1$ محور تقارن سهمی است نقاطی که نسبت محور تقارن سهمی متقارن هستند دارای عرض یکسان اند:



پس نقاط با طول $-3,5,-2,-1,3,0,2$ که عضو دامنهٔ تابع f هستند. دارای عرض برابرند پس به ازای این ۸ عضو از دامنه فقط ۴ عضو از برد ایجاد می شود. چون $x=1$ طول رأس سهمی است به ازای آن نیز یک عضو دیگر از برد ایجاد می شود. پس برد تابع f یک مجموعهٔ ۵ عضوی است:

$f(-۳) = f(۵) = ۱۵$

$f(-۲) = f(۴) = ۸$

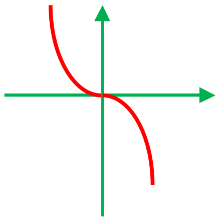
$f(-۱) = f(۳) = ۳$

$f(۰) = f(۲) = ۰$

$f(۱) = -۱$

$R_f = \{۰, -۱, ۳, ۸, ۱۵\}$

سؤال ۱۲: نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{(۳x-۲)f(x-۱)}$ کدام است؟

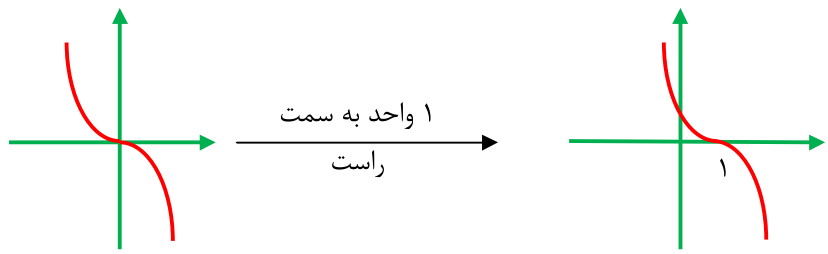


۱) $\left[\frac{۲}{۳}, ۱\right]$ ۲) $R - \left[۰, \frac{۲}{۳}\right)$

۳) $\left(۰, \frac{۲}{۳}\right]$ ۴) $R - \left(\frac{۲}{۳}, ۱\right)$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تابع $g(x) = f(x-۱)$ را رسم می کنیم:



$y = f(x)$ $y = f(x-۱)$

حال با توجه به نمودار تابع g و ریشه و دامنهٔ آن و به کمک جدول تعیین علامت دامنهٔ تابع $y = \sqrt{(۳x-۲)g(x)}$ را به دست می آوریم: $۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$

ریشه های تابع g $= ۱$

$D_g = R$

g پایین محور x هاست.

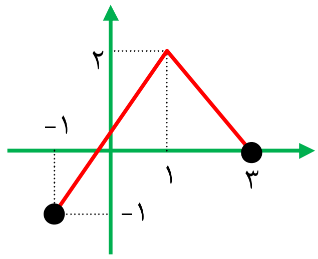
g پایین محور x هاست.

x		$\frac{۲}{۳}$		۱	
$g(x)$	$+$		$+$	۰	$-$
$۳x-۲$	$-$	۰	$+$		$+$
$(۳x-۲)g(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$(۳x-۲)g(x) \geq ۰ \Rightarrow x \in \left[\frac{۲}{۳}, ۱\right] \Rightarrow D_y = \left[\frac{۲}{۳}, ۱\right]$

سؤال ۱۳: نمودار تابع $y=f(x-1)+2$ به صورت مقابل است برد تابع $y=3-f(x+1)$ کدام است؟

۱) $[-1,3]$
۲) $[3,6]$
۳) $[-3,6]$
۴) $[-3,1]$



پاسخ: گزینه۲

اگر نمودار تابع $y=f(x-1)+2$ را ۲ واحد به سمت چپ ببریم تابع $g(x)=f(x+1)+2$ ایجاد می شود که برد آن با برد تابع اولیه یکسان است. با توجه به شکل برد تابع $y=f(x-1)+2$ به صورت بازهٔ $[-1,2]$ است پس برد تابع g نیز بازهٔ $[-1,2]$ است. در نتیجه؛

$$-1\le f(x+1)+2\le 2 \xrightarrow{\times(-1)} -2\le -f(x+1)-2\le 1$$
$$\xrightarrow{+5} 3\le 3-f(x+1)\le 6$$

در نتیجه برد تابع $y=3-f(x+1)$ بازهٔ $[3,6]$ است.

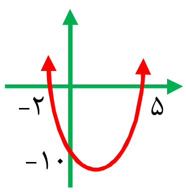
سؤال ۱۴: نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^2-3x-10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه۳

با رسم نمودار تابع $y=x^2-3x-10$ به این نتیجه می رسیم که اگر نمودار را حداقل ۲ واحد به سمت x های مثبت (یعنی به سمت راست) انتقال دهیم طول نقاط تلاقی نمودار با محور x ها، نامنفی می شود.

$$y=x^2-3x-10=(x-5)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=5 \end{cases}$$



سؤال ۱۵: نمودار تابع $y=\left|\frac{1}{2}x\right|-2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟(تجربی داخلی ۹۳)

۱) $-3/5$ ۲) -3 ۳) $-2/5$ ۴) -2

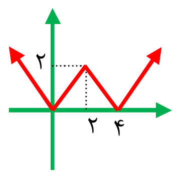
پاسخ: گزینه۲

وقتی نمودار $f(x)$ را ۴ واحد به طرف x های منفی (یعنی چپ) و ۱ واحد به طرف y های مثبت (یعنی بالا) انتقال می دهیم معادلهٔ جدید به صورت $y=f(x+4)+1$ در میآید. بنابراین باید $y=f(x)$ را با $y=f(x+4)+1$ در یک دستگاه قطع دهیم:

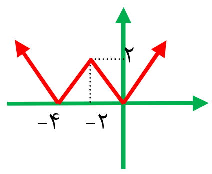
$$\begin{cases} y=f(x)=\frac{1}{2}|x|-2 \\ y=f(x+4)+1=\frac{1}{2}|x+4|-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}|x|-2=\frac{1}{2}|x+4|-1 \Rightarrow |x|=|x+4|+2 \Rightarrow x=-3$$

سؤال ۱۶: نمودار تابع $y=||x|-2|$ شبیه کدام گزینه است؟

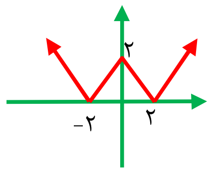
۱)



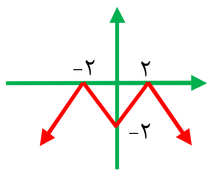
۲)



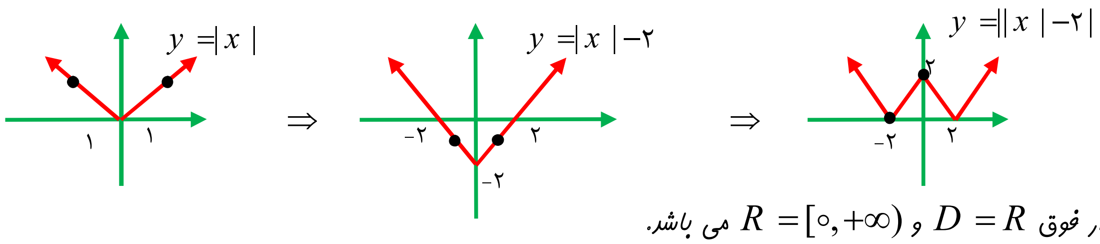
۳)



۴)



پاسخ: گزینه۳



با توجه به نمودار فوق $D=R$ و $R=[0,+\infty)$ می باشد.

سؤال ۱۷: نمودار تابع $y=|x-1|$ را یک واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می کنیم. سپس نمودار را روی محور x ها ۲ واحد به سمت چپ منتقل می کنیم. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم. در این صورت ضابطهٔ تابع جدید کدام است؟

۱) $y=|x+1|-1$ 	۲) $y=-|x-3|+1$

۳) $y=-|x+1|+1$ 	۴) $y=|x-1|-1$

پاسخ: گزینه۳

$$y=|x-1| \xrightarrow[\text{ها به سمت پایین } y]{\text{یک واحد در راستای محور}} y=|x-1|-1 \xrightarrow[\text{ها به سمت چپ } x]{\text{دو واحد در راستای محور}}$$

$$y=|x+2-1|-1 \Rightarrow y=|x+1|-1 \xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ ها قرینه}} y=-|x+1|+1$$

سؤال ۱۸: **نمودار $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ را ابتدا یک واحد به سمت راست و سپس ۵ واحد به سمت پایین انتقال می دهیم. به ازای $x\in(a,b)$ نمودار تابع حاصل پایین تر از تابع همانی قرار می گیرد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟**

۱) ۵ **۲) ۷** **۳) ۹** **۴) ۱۲**

پاسخ: گزینه۳

$$y=\frac{1}{3}x^2 \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\text{انتقال یک واحد به}} y=\frac{1}{3}(x-1)^2 \xrightarrow[\text{سمت پایین}]{\text{انتقال ۵ واحد به}} y=\frac{1}{3}(x-1)^2-5$$

ضابطهٔ تابع همانی به صورت $y=x$ است چون نمودار تابع انتقال یافته به ازای $x\in(a,b)$ پایین تر از نمودار تابع همانی است پس نامعادلهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{1}{3}(x-1)^2-5<x \xrightarrow{\times 3} x^2-2x+1-15<3x \Rightarrow x^2-5x-14<0 \Rightarrow (x+2)(x-7)<0$$

x		-2		7	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)(x-7)$	$+$	0	$-$	0	$+$

	-7		7	
$+$	|	$-$	|	$+$

$$\Rightarrow -2<x<7 \Rightarrow x\in(-2,7)$$

$$\Rightarrow \max(b-a)=7-(-2)=9$$