## تعریف مثلثات

مثلثات، بخشی از علم هندسه است که به بررسی روابط بین اجزای مثلث می پردازد، و در مفهوم گسترده و امروزی خود خواص توابع مثلثاتی را مورد مطالعه قرار می دهد.

## واحدهای اندازه گیری

در صفحه مختصات، یک زاویه توسط دو نیم خط که رأس مشترک دارند ایجاد می شود. اگر یک نیم خط را ثابت نگه داشته و ضلع دیگر را حرکت دهیم، زاویه تغییر می کند. در صورتی که رأس یک زاویه در مبدأ و ضلع اولیه اش روی قسمت مثبت محور x ها باشد، آن زاویه در دستگاه مختصات در موقعیت استاندارد است. در صورتی که ضلع انتهایی، خلاف حرکت عقربه های ساعت تغییر کند، زاویه مثبت، و در صورتی که در جهت حرکت عقربه های ساعت تغییر کند، زاویه منفی است.

## درجه

هر زاویه مرکزی که کمان روبرویش $\frac{1}{360}$ محیط دایره باشد را یک درجه $(1^\circ)$ می نامیم (به عبارتی اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، یک قسمت آن را درجه گوییم)

## رادیان

در صورتی که طول کمان روبرو به زاویه مرکزی برابر با شعاع دایره باشد، این زاویه مرکزی یک رادیان است (به عبارتی مطابق شکل اگر متحرکی در نقطه A بر روی دایره به شعاع r حول مبدأ در جهت مثبت دوران کند و به نقطه B برسد، مسافت طی شده را اندازه زاویه دوران بر حسب رادیان می نامیم. هر رادیان تقریباً معادل $57^\circ$ است.

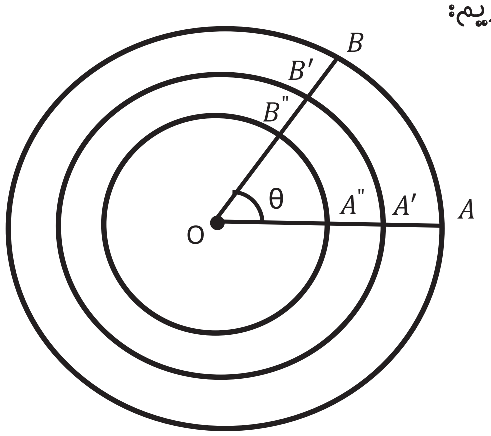
به عبارتی دیگر اگر اندازه زاویه $A\hat{O}B$، ۱ رادیان باشد در شکل مقابل داریم:

$\theta =$ ۱ رادیان

$OA = \widehat{AB}$

$OA' = \widehat{A'B'}$

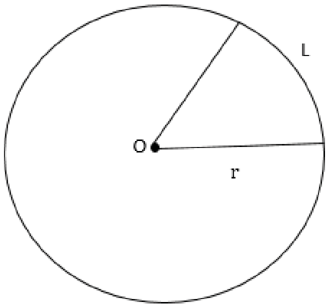
$OA'' = \widehat{A''B''}$




$$\text{اندازه یک زاویه برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبرو زاویه}}{\text{شعاع دایره}}$$

پس به عبارتی اگر L طول کمان روبرو به زاویه و r شعاع دایره و $\alpha$ اندازه زاویه برحسب رادیان باشد آنگاه رابطه بالا را به صورت زیر می توان نشان داد: (L و r هم واحد هستند)

$$\alpha = \frac{L}{r}$$




نکته: رابطه بین رادیان و درجه به صورت $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰}$ است.

از این رابطه نتیجه می‌گیریم $\pi$ رادیان معادل $۱۸۰^\circ$ است و برعکس یعنی $\frac{\pi}{۴}$ رادیان معادل $\frac{۱۸۰}{۴}$ درجه یعنی $۴۵^\circ$ است.

تذکر: حواسمان باشد $\pi$ همان ۳/۱۴ است ولی $\pi$ رادیان برابر $۱۸۰^\circ$ است.

مثال ۱) زاویه $۷۲^\circ$ چند رادیان است؟

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to R = \frac{\pi(۷۲)}{۱۸۰^\circ} = \frac{۲\pi}{۵}\text{Rad}$$

طول کمان در دایره: در یک دایره به شعاع R طول کمان L که توسط $\theta$ بر حسب رادیان ساخته می شود، برابر است با:

$$L = R\theta$$

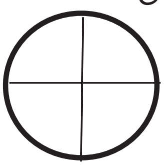
مثال ۲) در یک دایره به شعاع ۷ طول کمان ساخته شده توسط زاویه $\frac{\pi}{۳}$ را بیابید.

$$L = R\theta \to L = ۷\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۷\pi}{۳}$$

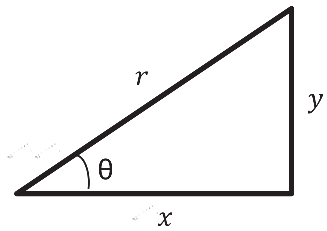
مثال ۳) طول برف پاک کن ماشینی $۴۵^{cm}$ است، برف پاک کن زاویه $۱۰۴^\circ$ را می پیماید، مسافتی که انتهای تیغه در یک حرکت می پیماید چند cm است.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to R = \frac{\pi \times ۱۰۴}{۱۸۰} \to L = R\theta \to L = ۴۵ \times \frac{\pi \times ۱۰۴}{۱۸۰} = ۲۶\pi$$

دایره مثلثاتی دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد است که جهت مثبت حرک آن در جهت خلاف عقربه های ساعت است.

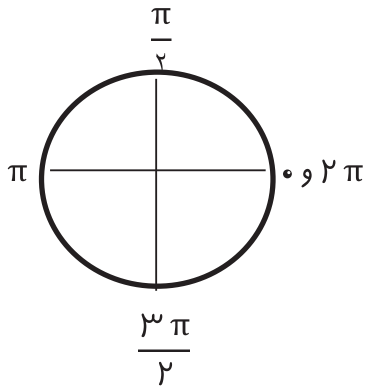


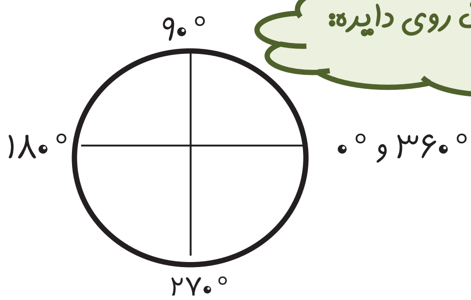
## نسبت های مثلثاتی




$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

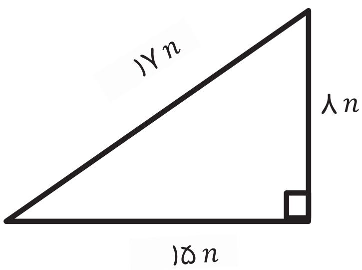
## زوایای معروف روی دایره:

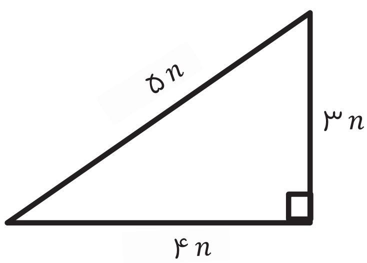


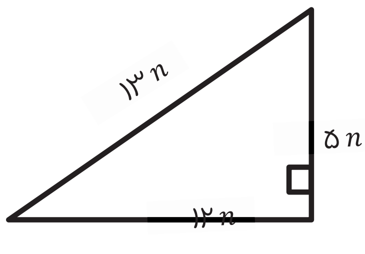




| θ | ۰ | $۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}$ | $۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}$ | $۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}$ | $۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ۱ |
| $\cos\theta$ | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ |
| $\tan\theta$ | ۰ | $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ | ۱ | $\sqrt{۳}$ | تعریف نشده |
| $\cot\theta$ | تعریف نشده | $\sqrt{۳}$ | ۱ | $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ | ۰ |

## مثلث‌های معروف



## تست

۱. زوایا داخلی مثلثی با اعداد ۳ و ۵ و ۷ متناسب است کوچکترین زاویه مثلث برحسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{\pi}{۵}$ ۴) $\frac{\pi}{۹}$

$$۳x + ۷x + ۵x = ۱۸۰^\circ \rightarrow ۱۵x = ۱۸۰^\circ \rightarrow x = ۱۲^\circ$$

$$\alpha = ۳x = ۳۶^\circ \rightarrow \alpha = ۳۶^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = \frac{\pi}{۵}\ \text{Rad}$$ کوچکترین زاویه مثلث

---

۲. در چهار ضلعی محدب ABCD رابطه $\frac{\hat{D}}{۴} = \frac{\hat{C}}{۷} = \frac{\hat{B}}{۵} = \frac{\hat{A}}{۸}$ بین زوایا داخلی برقرار است اندازه زاویه C برحسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۹}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

$$\frac{\hat{A}}{۸} = \frac{\hat{B}}{۵} = \frac{\hat{C}}{۷} = \frac{\hat{D}}{۴} = t \rightarrow \hat{A} = ۸t \text{ و } \hat{B} = ۵t \text{ و } \hat{C} = ۷t \text{ و } \hat{D} = ۴t$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰^\circ \rightarrow ۸t + ۵t + ۷t + ۴t = ۳۶۰^\circ \rightarrow t = ۱۵^\circ$$

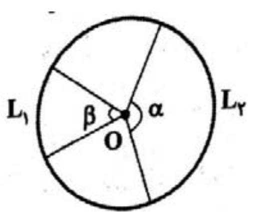
$$\hat{C} = ۷t = ۱۰۵^\circ \rightarrow \hat{C} = ۱۰۵^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = \frac{۷\pi}{۱۲}$$

---

۳. اگر در شکل زیر حاصلضرب طول کمان‌های $l_۱$ و $l_۲$، $\frac{\pi}{۹}$ برابر مساحت دایره باشد و $\alpha = ۴\beta$ باشد، آنگاه مثلثی با دو زاویه $\alpha$ و $\beta$ از کدام نوع است؟ (O: مرکز دایره)

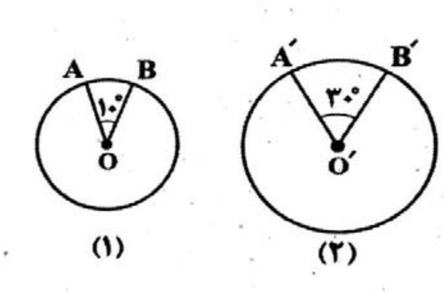
۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه

۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) هیچکدام



۴. مطابق شکل زیر اگر مساحت دایره (۲) سه برابر مساحت دایره (۱) باشد ، حاصل $\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}$ کدام است؟

۱) ۳　　　۲) $3\sqrt{3}$　　　۳) ۹　　　۴) $\sqrt{3}$




مثال ۴) هر یک از زوایای زیر را تبدیل به رادیان کنید؟

$-12^\circ =$

$36^\circ =$

$315^\circ =$

مثال ۵) هر یک از زوایای زیر که برحسب رادیان هستند را تبدیل به درجه کنید؟

$-\frac{\pi}{18} =$

$-\frac{2\pi}{5} =$

$\frac{7\pi}{8} =$

مثال ۶) درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید؟

الف. انتهای کمان $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

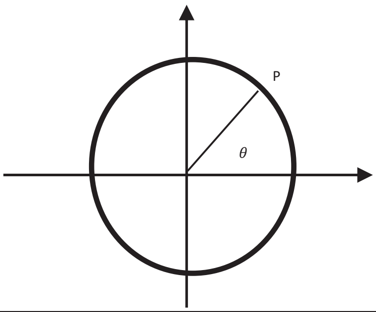
ب. زاویه های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان ، $\frac{\pi}{9}$ رادیان و $\frac{7\pi}{36}$ رادیان ، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

ج. اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد ، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچکتر از اندازه هریک از ساق‌های آن است.

# دایره مثلثاتی و تعیین نسبت ها و محورهایشان

نکته: مهم

در دایره ای به شعاع ۱ برای هر مقدار حقیقی زاویه $\theta$ نقطه $p(\cos\theta , \sin\theta)$ دوران یافته نقطه $A(۱,۰)$ تحت دوران $\theta$ حول مبدأ است.

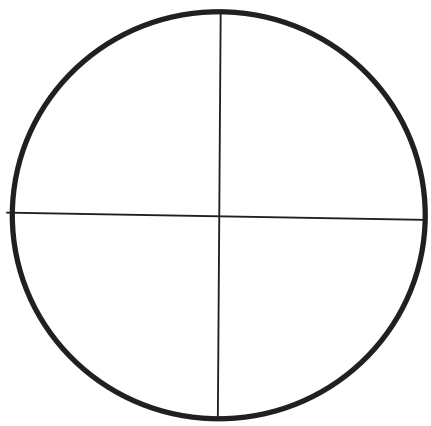



---

مثال ۷) اگر $\theta$ در موقعیت استاندارد باشد و انتهای کمان $\theta$ دایره مثلثاتی را در نقطه $\left(-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳} , \frac{۱}{۳}\right)$ قطع کند حاصل $\tan\theta$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases}\sin\theta = \frac{۱}{۳} \\ \cos\theta = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\end{cases} \rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۱}{۳}}{-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

---

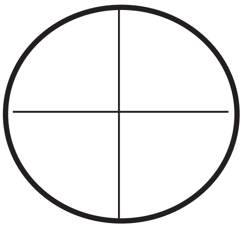


# بررسی sin روی دایره مثلثاتی:

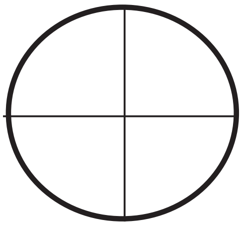
$\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$

$\sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{5\pi}{2} = 1$

$\sin \frac{3\pi}{2} = \sin \frac{7\pi}{2} = -1$

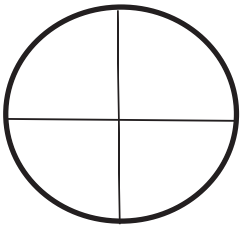


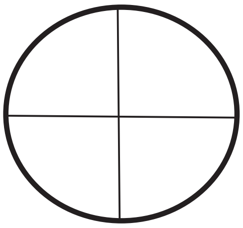
---



---

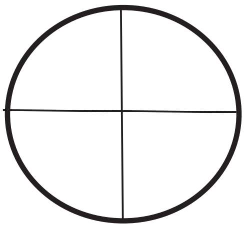
$\sin 30^\circ$

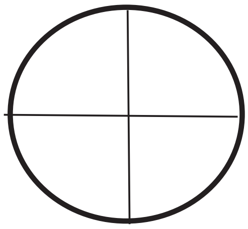




$\sin 150^\circ$

$\sin 210^\circ$

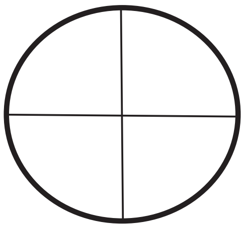




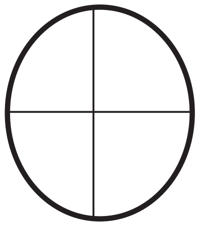
$\sin 330^\circ$

---

$\sin 10^\circ \quad \sin 20^\circ$



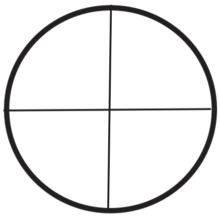
# بررسی cos روی دایره مثلثاتی



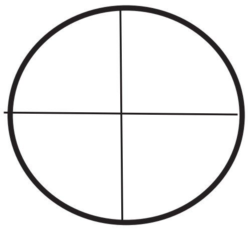
$\cos ۰ = \cos ۲\pi = ۱$

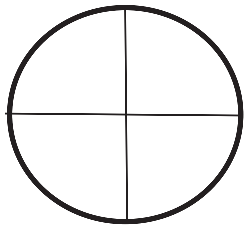
$\cos \pi = \cos ۳\pi = -۱$

$\cos \frac{۷\pi}{۲} = \cos \frac{۳\pi}{۲} = ۰$



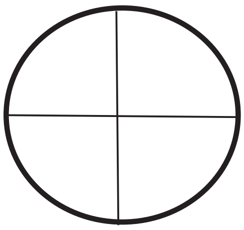
$\cos ۳۰^\circ$

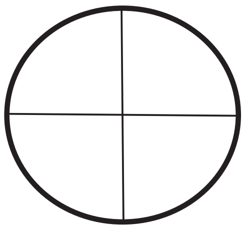




$\cos ۱۵۰^\circ$

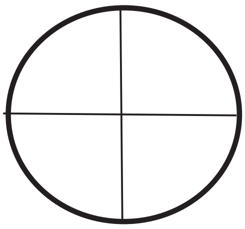
$\cos ۲۱۰^\circ$

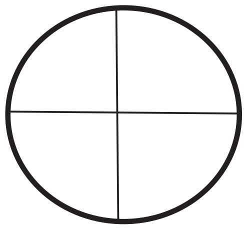




$\cos ۳۳۰^\circ$

$\cos ۱۰^\circ \quad \cos ۲۰^\circ$





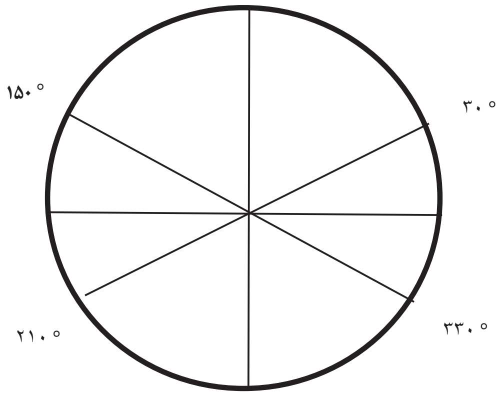
$\cos ۲۰^\circ \quad \cos ۱۷۰^\circ$

## زوایای معروف

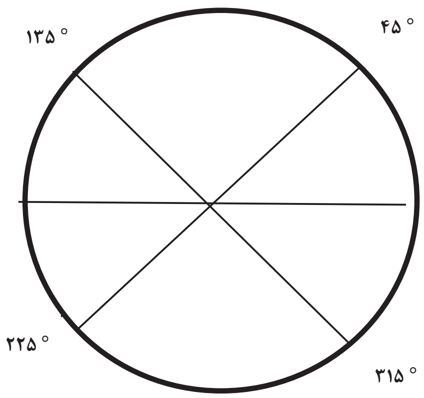
$\pi = ۱۸۰^\circ$　$\frac{\pi}{۲} = ۹۰^\circ$　$\frac{۳\pi}{۲} = ۲۷۰^\circ$　$۲\pi = ۳۶۰^\circ$　$\frac{\pi}{۶} = ۳۰^\circ$　$\frac{\pi}{۴} = ۴۵^\circ$　$\frac{\pi}{۳} = ۶۰^\circ$　$\frac{۲\pi}{۳} = ۱۲۰^\circ$　$\frac{۱۱\pi}{۶} = ۳۳۰^\circ$

$\frac{۵\pi}{۳} = ۳۰۰^\circ$　$\frac{۳\pi}{۴} = ۱۳۵^\circ$　$\frac{\pi}{۱۲} = ۱۵^\circ$　$\frac{\pi}{۲۴} = ۷.۵^\circ$　$\frac{\pi}{۵} = ۲۲.۵^\circ$　$\frac{\pi}{۱۰} = ۱۸^\circ$　$\frac{۷\pi}{۶} = ۲۱۰^\circ$　$\frac{\pi}{۱۸} = ۱۰^\circ$

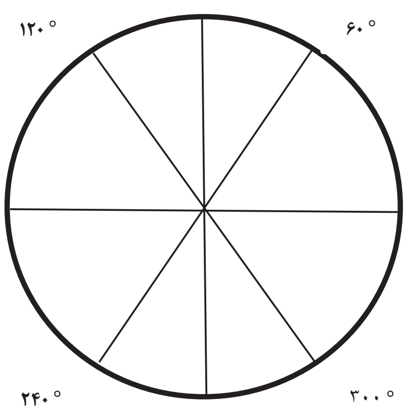
## زوایای خوابیده



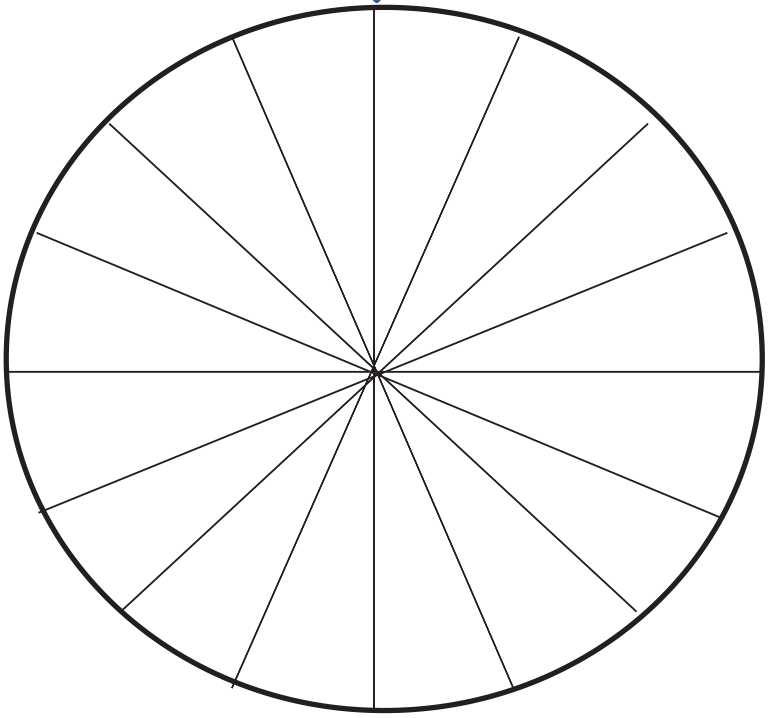

## زوایای وسط



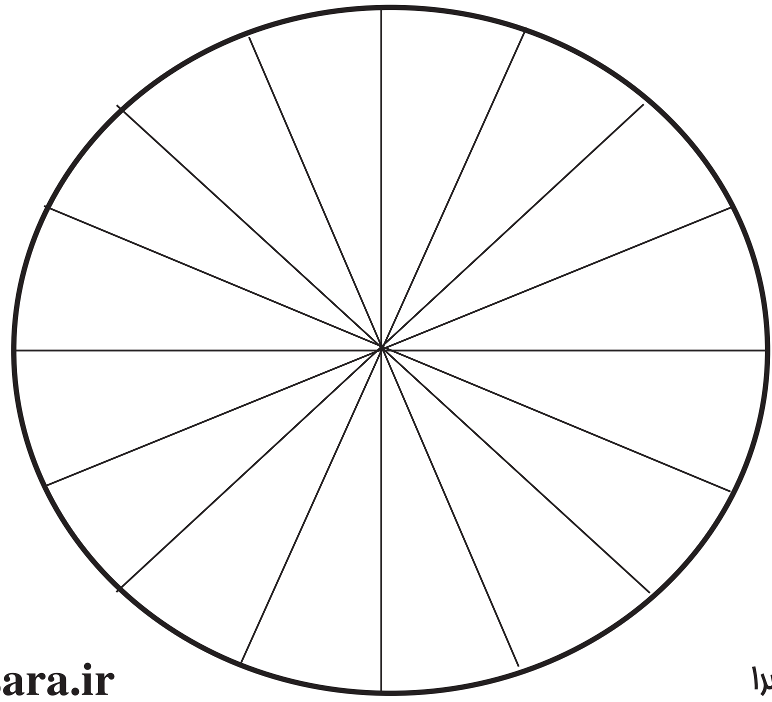

## زوایای ایستاده



# مقادیر sin θ در نواحی مختلف



# مقادیر cos θ در نواحی مختلف



## محاسبه نسبت های مثلثاتی کمان های $k\pi \pm \alpha$ بر حسب $\alpha$

اگر $\alpha$ یک زاویه حاده باشد خواهیم داشت:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin(\pi-\alpha)=+\sin\alpha$ | $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ | $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ | $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ |
| $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ | $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ | $\tan(\pi+\alpha)=+\tan\alpha$ | $\cot(\pi+\alpha)=+\cot\alpha$ |
| $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ | $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ | $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ | $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ |

نکته: به طور کلی در تعیین نسبت های مثلثاتی $k\pi \pm \alpha$ بر حسب $\alpha$ عبارت $k\pi$ فقط جهت تعیین علامت و نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

$\sin(۷\pi-\alpha)=\sin\alpha$　　$\cos(۲۰۰\pi-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos(۱۳\pi+\alpha)=-\cos\alpha$　　$\tan(۱۷۲\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

## نسبت های مثلثاتی کمان های $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ و $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ و ... بر حسب $\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=+\cos\alpha$　　$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=+\sin\alpha$　　$\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=+\cot\alpha$　　$\cot\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=+\tan\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=+\cos\alpha$　　$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\sin\alpha$　　$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\cot\alpha$　　$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

نکته: به طور کلی در تعیین نسبت های مثلثاتی $\alpha \pm \frac{\pi}{۲}$ فرد بر حسب $\alpha$ عبارت $\frac{\pi}{۲}$ فرد علاوه بر تعیین علامت، نسبت های مثلثاتی را نیز عوض می کند.

$\sin\left(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\tan\left(۱۲۹\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=$

$\sin\left(۱۳۹۱\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=$

نکته: برای محاسبه نسبت های مثلثاتی زوایایی مانند $a\frac{\pi}{4}$ و $a\frac{\pi}{3}$ و $a\frac{\pi}{6}$ که در بازه $(0,2\pi)$ هستند، عدد a فقط جهت تعیین علامت است.

$$\sin\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{120^\circ \text{ ناحیه دوم}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{3} \xrightarrow{300^\circ \text{ ناحیه چهارم}} -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6} \xrightarrow{330^\circ \text{ ناحیه چهارم}} -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

---

نکته: برای محاسبه نسبت های مثلثاتی زوایایی مانند $a\frac{\pi}{4}$ و $a\frac{\pi}{6}$ و $a\frac{\pi}{3}$ (در بیش از یک دور) ابتدا دورهای اضافی را حذف کرده سپس مانند نکته قبل عمل می کنیم.

---

نکته: هر دور مثلثاتی از ۲ تا $\pi$ و ۴ تا $\frac{\pi}{2}$ و ۶ تا $\frac{\pi}{3}$ و ۸ تا $\frac{\pi}{4}$ و ۱۲ تا $\frac{\pi}{6}$ تشکیل شده است.

$$\sin 26\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{120^\circ \text{ ناحیه دوم}} +\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 177\frac{\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos 67\frac{\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} \xrightarrow{210^\circ \text{ ناحیه سوم}} -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 870^\circ = \cos 150^\circ = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

## زوایای متمم

اگر مجموع دو زاویه $\alpha$ و $\beta$ برابر با $90^\circ$ یا همان $\frac{\pi}{2}$ باشد، در این حالت $\alpha$ و $\beta$ را دو زاویه متمم می نامیم (در این حالت هر دو زاویه در ناحیه اول قرار دارند)

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \quad \begin{matrix} \sin\alpha = \cos\beta & \tan\alpha = \cot\beta \\ \cos\alpha = \sin\beta & \tan\beta = \cot\alpha \end{matrix}$$

---

نکته: برای محاسبه متمم یک زاویه باید آن را از $90^\circ$ یا $\frac{\pi}{2}$ کم کنیم.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{11} = \frac{6\pi}{22} \\ \beta = \frac{5\pi}{22} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{10} \\ \beta = \frac{4\pi}{10} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 5^\circ \\ \beta = 85^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 10^\circ \\ \beta = 80^\circ \end{cases}$$

مثال ۸) در موارد زیر متمم را مشخص کنید.

$\cot\frac{۳\pi}{۱۷} =$ $\qquad \tan ۲۰^\circ =$ $\qquad \cos\frac{۵\pi}{۱۲} =$ $\qquad \sin ۱۴۰^\circ =$

مثال ۹) حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{\sin ۲۰^\circ \tan ۱۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cot ۸۰^\circ} =$$

**زوایای مکمل**

اگر جمع دو زاویه α و β برابر با °۱۸۰ یا π باشد در این حالت β .α را دو زاویه مکمل می نامیم (در این حالت یکی از زوایا ناحیه اول و دیگری ناحیه دوم است)

$$\alpha + \beta = \pi \rightarrow \begin{matrix} \sin\alpha = +\sin\beta \\ \cos\alpha = -\cos\beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \tan\alpha = -\tan\beta \\ \cot\alpha = -\cot\beta \end{matrix}$$

نکته: برای محاسبه مکمل یک زاویه باید آن را از °۱۸۰ یا π کم کنیم.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{۲\pi}{۷} \\ \beta = \frac{۵\pi}{۷} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{۳\pi}{۱۴} \\ \beta = \frac{۱۱\pi}{۱۴} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = ۴۰^\circ \\ \beta = ۱۴۰^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = ۱۰^\circ \\ \beta = ۱۷۰^\circ \end{cases}$$

مثال ۱۰) در موارد زیر مکمل را مشخص کنید.

$\cot\frac{۳\pi}{۱۷} =$ $\qquad \tan ۲۰^\circ =$ $\qquad \cos\frac{۵\pi}{۱۲} =$ $\qquad \sin ۴۰^\circ =$

مثال ۱۱) حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\cos\frac{\pi}{۱۱} + \cos\frac{۳\pi}{۱۱} + \cos\frac{۵\pi}{۱۱} + \cos\frac{۱۰\pi}{۱۱} + \cos\frac{۸\pi}{۱۱} + \cos\frac{۶\pi}{۱۱} =$$

مثال ۱۲) درستی روابط زیر را بررسی کنید؛

$\sin ۸۴۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$

$\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

$\tan ۸۴۰^\circ = \tan ۶۰^\circ$

---

مثال ۱۳) در تساوی‌های زیر به جای $x$، یک زاویه مناسب قرار دهید؛

الف) $\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

ب) $\tan\left(x + \frac{\pi}{۱۸}\right) = \cot\left(\frac{۲\pi}{۹} + x\right)$

---

مثال ۱۴) حاصل عبارات زیر را بیابید؛

۱) $\sin\frac{۲\pi}{۳} =$

۲) $\tan\frac{۵\pi}{۳} =$

۳) $\sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin\left(\frac{۶\pi+\pi}{۶}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$

۴) $\tan\frac{۵\pi}{۴} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = +\tan\frac{\pi}{۴} = ۱$

۵) $\tan\frac{۳۹\pi}{۴} = \tan\left(\frac{۴۰\pi - \pi}{۴}\right) = \tan\left(۱۰\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$

۶) $\sin\frac{۲۶\pi}{۳} = \sin\left(\frac{۲۷\pi - \pi}{۳}\right) = \sin\left(۹\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = +\sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۷) $\sin ۷۵۰^\circ = \sin(۲\times ۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۳۰ = \frac{۱}{۲}$

۸) $\tan(-۳۱۵^\circ) = -\tan ۳۱۵^\circ = -\tan(۳۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = +\tan ۴۵^\circ = ۱$

۹) $\sin ۸۷۰^\circ =$

---

۱۰) $\cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) + \tan(۷۲۰^\circ) - \tan(-۶۰۰^\circ) =$

---

۱۱) $\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴} - \cos\frac{\pi}{۶}}{\sin\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right) + \tan\left(-\frac{۴\pi}{۳}\right)} =$

**تست**

**۱. فرض کنید سوار چرخ و فلکی هستید که ۴۰ کابین دارد و کابین های آن شماره گذاری شده اند، اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه های ساعت شما روی کابین شماره ۳ نشسته باشید بعد از $\frac{47\pi}{10}$ رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید.**

۱) ۱۵　　۲) ۱۴　　۳) ۱۶　　۴) ۱۷

محیط چرخ و فلک (دایره) را $2\pi$ فرض کرده و فاصله بین هر دو کابین متوالی برابر $\frac{2\pi}{40}$ است، در ضمن هر دوران $2\pi$ رادیان، کابین ها را به جایگاه اولیه بر می گرداند.

$$\frac{47}{10}\pi=\frac{40\pi+7\pi}{10}=4\pi+\frac{7\pi}{10}$$

| کابین | دوران |
|---|---|
| $40$ | $2\pi$ |
| $x$ | $\frac{7}{10}\pi$ |

$\rightarrow x=14 \rightarrow$ موقعیت جدید کابین $=14+3=17$

**۲. حاصل $\frac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ=0{,}28$ کدام است (تجربی ۹۴)**

۱) $-\frac{16}{9}$　　۲) $-\frac{9}{16}$　　۳) $\frac{9}{16}$　　۴) $\frac{16}{9}$

$$\cos 285^\circ=\cos(270^\circ+15^\circ)=\sin 15^\circ$$

$$\sin 255^\circ=\sin(270^\circ-15^\circ)=-\cos 15^\circ$$

$$\sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)=\cos 15^\circ$$

$$\sin 525^\circ=\sin(525^\circ-360^\circ)=\sin 165^\circ=\sin(180^\circ-15^\circ)=\sin 15^\circ$$

$$\frac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}=\frac{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ(\tan 15^\circ+1)}{\cos 15^\circ(\tan 15^\circ-1)}=\frac{0{,}28+1}{0{,}28-1}=-\frac{16}{9}$$

۳. مقدار عددی $\frac{\cos 70^\circ + 2\sin 110^\circ + \sin 200^\circ}{\cos 160^\circ + \sin 290^\circ - 3\sin 110^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$　　۲) $-\frac{2}{5}$　　۳) $\frac{2}{5}$　　۴) $-\frac{4}{5}$

$$\frac{\cos(90-20)+2\sin(90+20)+\sin(180+20)}{\cos(180-20)+\sin(270+20)-3\sin(90+20)}$$

$$\to \frac{\sin 20 + 2\cos 20 - \sin 20}{-\cos 20 - \cos 20 - 3\cos 20} = \frac{2\cos 20}{-5\cos 20} = -\frac{2}{5}$$

---

مثال ۱۵) اگر $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ و انتهای کمان روبرو به زاویه $\alpha$ در ربع سوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید؟

$$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xrightarrow{\cos\alpha<0} \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \to \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2\sqrt{2}$$

---

مثال ۱۶) اگر $\cot\alpha = -2$ و $\cos\alpha > 0$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید؟

چون $\cos\alpha > 0$ و $\cot\alpha < 0$ است، لذا انتهای کمان ناحیه چهارم است.

$$\frac{1}{sin^2\alpha} = 1 + cot^2\alpha = 1 + 4 = 5 \to sin^2\alpha = \frac{1}{5} \to \sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{\sqrt{5}} \to \cos\alpha = \frac{+2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \to \tan\alpha = -\frac{1}{2}$$

---