



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

بنام خدا
کتاب کامل جبر
تألیف و ترجمه
انوشیروان صراف
دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز
(سال های ۱۳۴۲ - ۱۳۷۵)
مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری
(سال های ۱۹۹۶ - ۲۰۰۹)
آدرس ایمیل

John_Sarraf@yahoo.com

فصل اول

اعداد حقیقی و عبارت های جبری

Real Numbers and Algebraic Expressions

۱.۱ – عبارت های جبری و مجموعه های اعداد: Algebraic Expressions and Sets of Numbers

ارزیابی عبارت های جبری: Evaluating Algebraic Expressions:

حروفی که به جای اعداد بکار می روند **متغیرها Variables:** نامیده می شوند.

یک عبارت جبری تشکیل شده از اعداد و متغیر ها که به وسیله اعمال جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم ، توان رسانی ، و ریشه گیری به هم متصل شده باشند. مثال:

$$2x, \quad \frac{x+5}{6}, \quad \sqrt{y}-1/6, \quad z^3$$

حال اگر اعداد جانشین متغیر ها شوند و اعمال جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم به توان رسانی و ریشه گیری انجام شوند، نتیجه را مقدار عددی آن عبارت می نامند، و انجام مراحل بالا را ارزشیابی و یا پیدا کردن مقدار عددی آن عبارت می گویند.

توجه: در این کتاب علامت اعشاری نماد / است. پس ۱/۵ خوانده می شود یک و نیم.

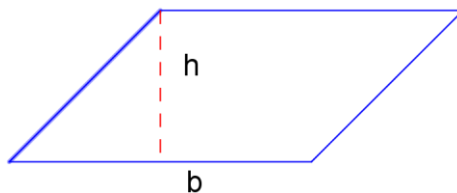
یک و شش دهم نوشته می شود ۱/۶

همچنین یک نقطه تو خالی نماد صفر فارسی است. مثلاً عدد صد نوشته می شود ۱۰۰

عبارت های جبری اغلب برای حل مسائل بکار می روند.

مثال ۱ – یک شرکت کاشی سازی یک نوع کاشی به شکل متوازی الاضلاع ساخته است. مساحت یک کاشی که طول قاعده آن ده سانتی متر و ارتفاع آن هشت و نیم سانتی متر است پیدا کنید.

حل -



Base قاعده

Height ارتفاع

Area مساحت

ارتفاع \times قاعده = مساحت

$$A = bh = 10 \times 8/5 = 16$$

مثال ۲ -

اگر $x = 15$ و $y = 4$ باشد، حاصل عبارت $3x - y$ را بدست آورید.

حل

$$3x - y = 3 \times 15 - 4 = 45 - 4 = 41$$

مثال ۳ -

اگر $r = 48$ و $s = 6$ باشد، حاصل عبارت $\frac{r}{s}$ را به دست آورید.

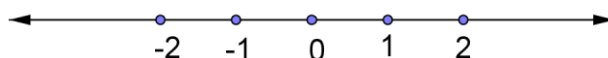
حل

$$\frac{r}{s} = \frac{48}{6} = 8$$

مجموعه های اعداد: Sets of Numbers

می خواهیم چند مجموعه اعداد و رسم نمودار آنها را روی محور اعداد Number Line بررسی کنیم. برای رسم محور اعداد، یک خط مستقیم ترسیم می کنیم و یک نقطه را روی آن مشخص می کنیم و آنرا صفر می نامیم. این نقطه را مبدأ Origin نام گذاری می کنیم. اگر یک نقطه سمت راست صفر انتخاب کنیم و آنرا یک بنامیم، فاصله صفر تا یک

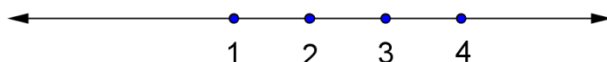
فاصله واحد نامیده می شود Unit Distance و می توان آنرا برای مشخص کردن نقاط دیگر استفاده کرد. اعداد مثبت سمت راست و اعداد منفی سمت چپ مبدا قرار می گیرند. عدد صفر نه مثبت است و نه منفی. برای ترسیم یک عدد روی محور اعداد، نقطه مربوط به آن عدد را سایه دار یا برجسته می کنیم.



مجموعه های زیر در این کتاب بکار برده می شوند.

اعداد طبیعی Natural Numbers

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$



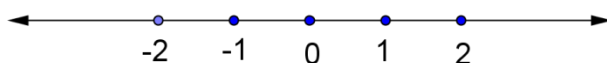
اعداد حسابی Whole Numbers

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$



اعداد صحیح Integers

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$



اعداد حقیقی Real Numbers

$$\mathbb{R} = \{\text{هر نقطه ای روی محور اعداد}\}$$



طبق تعریف نقطه که در هندسه خوانده ایم (نقطه نه طول دارد و نه عرض) بی‌نهایت اعداد حقیقی داریم.

اعداد گویا Rational Numbers

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \text{ و } b \text{ اعداد صحیح هستند و } b \neq 0 \right\}$$

اعداد گویا اعدادی هستند که بتوان آنها را بصورت کسر $\frac{a}{b}$ نوشت و $b \neq 0$ مثال

$$\frac{1}{2} = 0/5 \quad \frac{5}{4} = 1/25 \quad \frac{2}{3} = 0/6666666\ldots = 0/\overline{6}$$

$$\frac{1}{11} = 0/090909\ldots = 0/0\overline{9}$$

تبدیل اعشاری های مکرر به یک کسر Ratio با صورت و مخرج اعداد صحیح

مثال: می خواهیم عدد $3/5474747\ldots$ را به یک کسر با صورت و مخرج اعداد صحیح بنویسیم.

حل

$$1000x = 3547 / 474747 \dots$$

$$10x = 35 / 474747 \dots$$

حال این دو تساوی را از هم کم می کنیم.

$$990x = 3512 / 0$$

پس

$$x = \frac{3512}{990}$$

اعداد گنگ Irrational Numbers

اعدادی هستند که گویا نباشند. یک عدد گنگ که به صورت اعشاری نوشته شده باشد، ارقام اعشاری نه تمام می شود و نه تکرار می شود. مانند:

$$\pi = 3 / 141592 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1 / 414213 \dots$$

از تعاریف بالا نتیجه می گیریم که تمام اعداد حقیقی یا گویا هستند و یا گنگ. همچنین هر عدد صحیح یک عدد گویا است.

مثال ۴

اعداد زیر گویا هستند:

$$0 \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{9}{64} \quad \frac{28}{7} = 4 \quad 2/45 \quad 1 / \sqrt{37}$$

اعداد زیر گنگ هستند:

$$\sqrt{3} \quad \pi \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

اعداد زیر، اعداد صحیح هستند:

$$-8 \quad \frac{12}{2} \quad -\frac{3}{1} \quad \frac{75}{5}$$

کلیه اعداد در مثال ۴، اعداد حقیقی هستند.

نکته مهم

چون تقسیم یک عدد بر صفر امکان ندارد، پس $\frac{4}{0}$ قابل تعریف نیست. اما $\frac{0}{4} = 0$

تعریف مجموعه - مجموعه عبارت است از اجتماع اشیاء. این اشیاء را اعضای Elements آن مجموعه می گویند.

مشخص کردن یک مجموعه

روش اول - اعضای یک مجموعه را می توان فهرست وار **Roster Form** داخل دو آکولاد $\{ \}$ نوشت و هر عضو را به وسیله کاما از دیگری جدا کرد. مانند :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

اگر اعضای یک مجموعه زیاد باشد، سه عضو اول را می نویسیم، نقطه چین می گذاریم و سپس عضو آخر را می نویسیم.

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 48\}$$

اگر تعداد اعضای یک مجموعه نامتناهی باشد، سه عضو اول را مینویسیم و سپس نقطه چین می گذاریم.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

روش دوم - استفاده از علائم ریاضی یا توصیف مجموعه Set Builder Notation

با استفاده از یک متغیر و علائم ریاضی و نگارش یک ویژگی مشترک بین اعضای آن مجموعه در داخل آکولاد.

$$A = \{x : x \in \mathbb{N}, x < 6\}$$

و می خوانیم A مجموعه ای از اعداد طبیعی کمتر از ۶ است.

اگر یک مجموعه هیچ عضوی نداشته باشد، آنرا مجموعه تهی Empty Set می نامند. نماد مجموعه تهی $\{ \}$ و \emptyset یا \emptyset است.

اما توجه داشته باشید که $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تهی نیست.

مجموعه ای که تهی نباشد، آنرا نا تهی None Empty می نامند.

چند نماد مربوط به مجموعه ها

نماد \in هنگامی به کار می رود که نشان دهیم یک عنصر، عضوی از یک مجموعه است. مثلا اگر مجموعه A شامل اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ باشد می توانیم بگوییم ۳ عضو مجموعه A است. و به صورت های زیر نمایش می دهیم.

$$3 \in A$$

$$3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

نماد \notin هنگامی به کار می رود که نشان دهیم یک عنصر، عضوی از یک مجموعه نیست. مثلا در مثال بالا می توان گفت:

$$6 \notin A$$

$$6 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

نماد \subseteq هنگامی به کار می رود که بگوییم یک مجموعه، زیر مجموعه یک مجموعه دیگر است. مثلا می توانیم بگوییم مجموعه اعداد صحیح، زیر مجموعه اعداد گویا است. و می نویسیم:

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

زیرا تمام اعداد صحیح همچنین گویا هم هستند. اما عکس آن لزوما صحیح نیست. زیرا همه اعداد گویا اعداد صحیح نیستند.

اجتماع مجموعه ها Union of Sets

اگر T و S دو مجموعه باشند، پس اجتماع آنها $S \cup T$ مجموعه ای است که شامل کلیه عناصری است که در T و یا در S و یا در هر دو باشند.

اشتراک مجموعه ها Intersection of Sets

اگر T و S دو مجموعه باشند، پس اشتراک آنها $S \cap T$ مجموعه ای است که شامل کلیه عناصری است که هم در T و هم در S باشند.

مثال

اگر $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $T = \{4, 5, 6, 7\}$ و $V = \{6, 7, 8\}$ باشد، مجموعه های $S \cup T$ و $S \cap T$ و $S \cap V$ را پیدا کنید.

حل

$$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$S \cap T = \{4, 5\}$$

$$S \cap V = \phi$$

بازه ها یا میانین یا فاصله ها Intervals

بازه ها مجموعه ای از اعداد حقیقی هستند که بین دو عدد قرار دارند. مثلاً اگر $a < b$ باشد، پس بازه باز از a تا b شامل کلیه اعدادی است که بین a و b هستند و با نماد (a, b) نمایش داده می شود. با بکار بردن نماد توصیف مجموعه، می توان نوشت.

$$(a, b) = \{x: a < x < b\}$$

نمودار یا نمایش هندسی Graph بازه باز بالا به صورت زیر است.



بازه بالا را بازه باز **Open Interval** می نامند، زیرا دو نقطه انتهای a و b را شامل نمی شود. این موضوع را با بکار بردن دو پرانتز Parentheses () نشان دادیم.

بازه بسته Closed Interval

بازه بسته از a تا b مجموعه زیر است.

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$$

اینجا، بازه مشمول دو نقطه انتهای هم می شود. این مطلب را با بکار بردن دو کروشه [] نشان دادیم.

نمودار یا نمایش هندسی Graph بازه بسته بالا به صورت زیر است.



بازه بی‌نهایت: بازه های زیر بازه های بی‌نهایت هستند.

$$[a, \infty) = \{x: x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x: x \leq a\}$$

$$(a, \infty) = \{x: x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x: x < a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \{\mathbb{R} \text{ کلیه اعداد حقیقی}\}$$

نماد بی‌نهایت ∞ به این معنی نیست که این نماد یک عدد است. فقط به این معنی است که بازه تا بی‌نهایت ادامه دارد.

مثال بازه های زیر را به صورت نامساوی ها بنویسید.

$$a) \quad [-1, 2) = \{x: -1 \leq x < 2\}$$

$$b) \quad [1, 4] = \{x: 1 \leq x \leq 4\}$$

$$c) \quad (-3, \infty) = \{x: -3 < x\}$$

تمرینات ۱.۱

۱- سرعت متوسط هوا پیمای $B737$ ۴۱۴ مایل در ساعت است. مسافت طی شده این هوا پیمای در مدت ۵ ساعت را حساب کنید.

۲- هزینه هوا پیمای $B774$ در هر ساعت بالغ بر ۷۵ ه دلار است. هزینه این هوا پیمای برای مدت ۵/۲ ساعت را حساب کنید.

مجموعه های زیر را فهرست وار بنویسید.

۳ - مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۶

۴ - اعداد طبیعی بین ۱۱ و ۱۸

۵ - مجموعه اعداد حسابی که جزو مجموعه اعداد طبیعی نیستند .

۶ - مجموعه اعداد زوج حسابی کمتر از ۹ .

نماد \in و یا \notin در جای خالی بگذارید.

۷) $-11 \in \mathbb{Z}$

۸) $\{ \text{مجموعه اعداد صحیح مثبت است} \} \cap \emptyset$

آیا جملات زیر صحیح هستند یا غلط ؟

۹ - هر عدد حسابی یک عدد حقیقی است.

۱۰ - بعضی از اعداد حقیقی ، گنگ هستند.

۱۱ - هر عدد حسابی ، یک عدد طبیعی است.

عبارت های فارسی زیر را به صورت عبارت های جبری بنویسید. (اینجا وقتی که می گویم یک عدد ، منظور یک عدد مجهول مانند x است)

۱۲ - دو برابر یک عدد.

۱۳ - ده کمتر از یک عدد.

۱۴ - مجموع یک عدد و دو .

۱۵ - یک عدد تقسیم بر یازده .

۱۶ - چهار از یک عدد کم کنیم .

۱۷ - یک عدد از چهار کم کنیم.

۱۸ - یک عدد باضافه نوزده .

۱۹ - یک عدد کمتر از پنج.

۲۰ - پنج بیش از دو برابر یک عدد.

۲۱ - دوازده منهای سه برابر یک عدد.

۲۲ - آرمان ساعتی ۵۵۰ تومان دستمزد می‌گیرد. او می‌خواهد یک کتاب به مبلغ ۷۷۰۰ تومان بخرد. چند ساعت باید کار کند تا این مبلغ فراهم شود؟

۲۳ -

الف - فرمولی برای بدست آوردن مساحت یک مربع مستطیل بنویسید که طول آن دو برابر عرض باشد.

ب - حال اگر بخویم یک ورقه آهنی به مساحت ۵۰ فوت مربع با مشخصات قسمت الف بسازیم، طول و عرض این ورقه آهنی را پیدا کنید.

عبارت های فارسی زیر را به صورت عبارت های جبری بنویسید.

۲۴ - معدل چهار عدد.

۲۵ - جمع یک عدد و دو برابر مربع آن عدد.

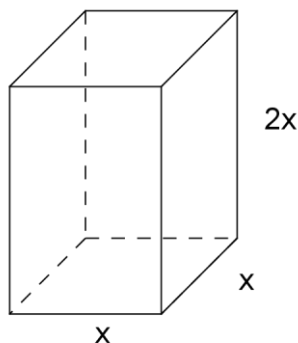
۲۶ - حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی.

۲۷ - مجموع مربع های دو عدد.

۲۸ - مساحت یک مربع به اضلاع x

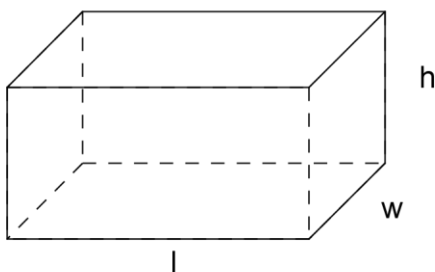
۲۹ - حجم یک مکعب به اضلاع x

۳۵ حجم یک جعبه با قاعده مربع به اضلاع x و ارتفاع $2x$



۳۱- رویه جانبی یک مکعب به اضلاع x

۳۲- رویه جانبی یک جعبه به اضلاع l, w, h



بازه های زیر را به صورت توصیفی بنویسید.

۳۳) $(-3, 0)$

۳۴) $[2, 8)$

$$۳۵) \quad [۲, \infty)$$

نامساوی های زیر را به صورت نماد بازه بنویسید.

$$۳۶) \quad x \leq ۱$$

$$۳۷) \quad -۲ < x \leq ۱$$

$$۳۸) \quad x > -۱$$

هر کدام از اعشار تکراری به صورت کسر با صورت و مخرج اعداد صحیح بنویسید.

$$۳۹) \quad ۰/\overline{۷}$$

$$۴۰) \quad ۰/\overline{۲۸}$$

$$۴۱) \quad ۰/\overline{۵۷}$$

۴۲- فرض کنید مصرف بنزین یک اتومبیل ، در شهر یک لیتر برای هر ۲۸ کیلومتر و در بزرگ راه یک لیتر برای هر ۳۴ کیلومتر باشد. و اگر x نماد کیلومتر های طی شده در شهر و y نماد کیلومتر های طی شده در بزرگ راه باشد ، پس مجموع کیلومتر هایی که این اتومبیل با ۱۵ لیتر بنزین میتواند طی کند باید بر اساس نامعادله زیر باشد.

$$\frac{1}{28}x + \frac{1}{34}y \leq 15$$

نامعادله بالا را برای پاسخ به سوال های زیر بکار ببرید.

الف – آیا این اتومبیل میتواند ۱۶۵ کیلو متر را در شهر و ۲۳۰ کیلو متر را در بزرگ راه طی کند قبل از اینکه ۱۵ لیتر بنزین تمام شود؟

ب – اگر اتومبیل ۲۸۰ کیلو متر در شهر طی کرده باشد، چند کیلو متر دیگر می تواند در بزرگ راه طی کند، قبل از اینکه ۱۵ لیتر بنزین تمام شود؟

پاسخ تمرینات ۱.۱

۱ – سرعت متوسط هوا پیمای $B737$ ۴۱۴ مایل در ساعت است. مسافت طی شده این هوا پما در مدت ۵ ساعت را حساب کنید.

مسافت Distance

نرخ – حد متوسط – سرعت متوسط Rate

وقت - زمان Time

$$d = rt = (414)(5) = 2070 \text{ مایل}$$

۲ – هزینه هوا پیمای $B774$ در هر ساعت بالغ بر ۷۰۷۵ دلار است. هزینه این هوا پیمای برای مدت ۵/۲ ساعت را حساب کنید.

هزینه Cost

$$C = rt = (7075)(5/2) = 36790 \text{ دلار}$$

مجموعه های زیر را فهرست وار بنویسید.

۳ – مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۶

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۴ – اعداد طبیعی بین ۱۱ و ۱۸

$$A = \{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$$

۵ - مجموعه اعداد حسابی که جزو مجموعه اعداد طبیعی نیستند .

$$A = \{0\}$$

۶ - مجموعه اعداد زوج حسابی کمتر از ۹ .

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

نماد \in و یا \notin در جای خالی بگذارید.

$$۷) \quad -11 \in \mathbb{Z}$$

$$۸) \quad 0 \notin \{\text{مجموعه اعداد صحیح مثبت است}\}$$

آیا جملات زیر صحیح هستند یا غلط ؟

۹ - هر عدد حسابی یک عدد حقیقی است. (صحیح)

۱۰ - بعضی از اعداد حقیقی ، گنگ هستند. (صحیح)

۱۱ - هر عدد حسابی ، یک عدد طبیعی است. (غلط)

عبارت های فارسی زیر را به صورت عبارت های جبری بنویسید. (اینجا وقتی که می گویم یک عدد ، منظور یک عدد مجهول مانند x است)

۱۲ - دو برابر یک عدد.

$$2x$$

۱۳ - ده کمتر از یک عدد.

$$x - 10$$

۱۴ - مجموع یک عدد و دو .

$$x + 2$$

۱۵ - یک عدد تقسیم بر یازده .

$$\frac{x}{11} \text{ یا } x \div 11$$

۱۶ - چهار از یک عدد کم کنیم .

$$x - 4$$

۱۷ - یک عدد از چهار کم کنیم.

$$4 - x$$

۱۸ - یک عدد باضافه نوزده .

$$x + 19$$

۱۹ - یک عدد کمتر از پنج.

$$5 - x$$

۲۰ - پنج بیش از دو برابر یک عدد.

$$2x + 5$$

۲۱ - دوازده منهای سه برابر یک عدد.

$$12 - 3x$$

۲۲ - آرمان ساعتی ۵۵۰ تومان دستمزد می‌گیرد. او می‌خواهد یک کتاب به مبلغ ۷۷۰۰ تومان بخرد. چند ساعت باید کار کند تا این مبلغ فراهم شود؟

مبلغ پرداختی Payment

دست مزد Wage

ساعت Hour

$$P = WH$$

$$7700 = 550 \cdot H$$

$$H = \frac{7700}{550} = 14 \text{ ساعت}$$

۲۳ -

الف - فرمولی برای بدست آوردن مساحت یک مربع مستطیل بنویسید که طول آن دو برابر عرض باشد.

طول Length

عرض Width

$$A = lw = 2x(x) = 2x^2$$

ب - حال اگر بخویم یک ورقه آهنی به مساحت ۵۰ فوت مربع با مشخصات قسمت الف بسازیم، طول و عرض این ورقه آهنی را پیدا کنید.

$$50 = 2x^2$$

$$25 = x^2$$

عرض ورقه آهنی $x = 5$

طول ورقه آهنی $2 \times 5 = 10$

عبارت های فارسی زیر را به صورت عبارت های جبری بنویسید.

۲۴ - معدل چهار عدد.

معدل - میانگین Average

$$A = \frac{W + X + Y + Z}{4}$$

۲۵ - جمع یک عدد و دو برابر مربع آن عدد.

$$x + 2x^2$$

۲۶ - حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی .

$$x(x + 1)$$

۲۷ - مجموع مربع های دو عدد.

$$x^2 + y^2$$

۲۸ - مساحت یک مربع به اضلاع x

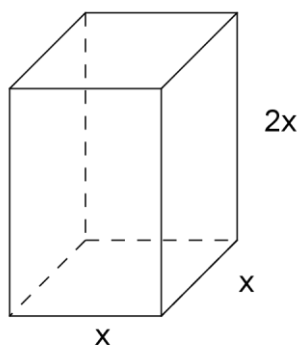
$$A = x^2$$

۲۹ - حجم یک مکعب به اضلاع x

حجم Volume

$$V = x^3$$

۳۰ - حجم یک جعبه با قاعده مربع به اضلاع x و ارتفاع $2x$



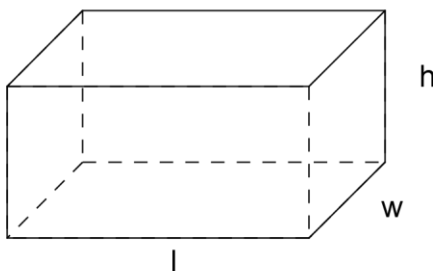
$$V = x \times x \times 2x = 2x^3$$

۳۱ - رویه جانبی یک مکعب به اضلاع x

سطح جانبی - رویه جانبی Surface Area

$$S = 6x^2$$

۳۲ - رویه جانبی یک جعبه به اضلاع l, w, h



$$S = 2lw + 2wh + 2lh$$

بازه های زیر را به صورت توصیفی بنویسید.

$$33) \quad (-3, 0)$$

$$\{x: -3 < x < 0\}$$

$$34) \quad [2, 8)$$

$$\{x: 2 \leq x < 8\}$$

$$35) \quad [2, \infty)$$

$$\{x: x \geq 2\}$$

نامساوی های زیر را به صورت نماد بازه بنویسید.

$$36) \quad x \leq 1$$

$$(-\infty, 1]$$

$$37) \quad -2 < x \leq 1$$

$$(-2, 1]$$

$$38) \quad x > -1$$

$$(-1, \infty)$$

هر کدام از اعداد تکراری به صورت کسر با صورت و مخرج اعداد صحیح بنویسید.

$$39) \quad 5/\overline{7}$$

$$40) \quad 5/\overline{28}$$

$$41) \quad 5/\overline{57}$$

حل

$$۳۹) \quad ۰/\overline{۷}$$

$$۱ \circ x = ۷ / ۷۷۷ \dots$$

$$x = ۰ / ۷۷ \dots ۷$$

$$۹x = ۷ / ۰$$

$$x = \frac{۷}{۹}$$

$$۴۰) \quad ۰/\overline{۲۸}$$

$$۱ \circ \circ x = ۲۸ / ۲۸۲۸۲۸ \dots$$

$$x = ۰ / ۲۸۲۸۲۸ \dots$$

$$۹۹x = ۲۸$$

$$x = \frac{۲۸}{۹۹}$$

$$۴۱) \quad ۰/\overline{۵۷}$$

$$۱ \circ \circ x = ۵۷ / ۵۷۵۷۵۷ \dots$$

$$x = ۰ / ۵۷۵۷۵۷ \dots$$

$$۹۹x = ۵۷$$

$$x = \frac{۵۷}{۹۹}$$

۴۲- فرض کنید مصرف بنزین یک اتومبیل، در شهر یک لیتر برای هر ۲۸ کیلومتر و در بزرگ راه یک لیتر برای هر ۳۴ کیلومتر باشد. و اگر x نماد کیلومترهای طی شده در شهر و y نماد کیلومترهای طی شده در بزرگ راه باشد، پس مجموع کیلومترهایی که این اتومبیل با ۱۵ لیتر بنزین میتواند طی کند باید بر اساس نامعادله زیر باشد.

$$\frac{1}{28}x + \frac{1}{34}y \leq 15$$

نامعادله بالا را برای پاسخ به سوال های زیر بکار ببرید.

الف- آیا این اتومبیل میتواند ۱۶۵ کیلومتر را در شهر و ۲۳۰ کیلومتر را در بزرگ راه طی کند قبل از اینکه ۱۵ لیتر بنزین تمام شود؟

ب- اگر اتومبیل ۲۸۰ کیلومتر در شهر طی کرده باشد، چند کیلومتر دیگر می تواند در بزرگ راه طی کند، قبل از اینکه ۱۵ لیتر بنزین تمام شود؟

حل

$$\frac{1}{28}(165) + \frac{1}{34}(230) \leq 15$$

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$34 = 2 \times 17$$

$$LCD = 4 \times 7 \times 17 = 476$$

دو طرف نامعادله را در ۴۷۶ ضرب می کنیم.

$$(476) \frac{1}{28}(165) + (476) \frac{1}{34}(230) \leq (476)15$$

$$(17)165 + (14)(230) \leq 7140$$

$$2805 + 3220 \leq 7140$$

$$6025 \leq 7140$$

نا معادله بالا صحیح است. پس آری به سوال الف.

پاسخ قسمت ب

$$\frac{1}{28}(280) + \frac{1}{34}y \leq 15$$

$$(476)\frac{1}{28}(280) + (476)\frac{1}{34}y \leq (476)15$$

$$4760 + 14y \leq 7140$$

$$14y \leq 7140 - 4760$$

$$14y \leq 2380$$

$$y = \frac{2380}{14} = 170 \text{ کیلو متر}$$

۱.۲ خواص اعداد حقیقی: Properties of Real Numbers

نوشتن جملات به صورت معادله و یا تساوی: Writing Sentences as Equations

برای این که بگوییم دو عبارت با هم مساوی هستند، نماد $=$ بکار می‌بریم. این نماد ترجمه عبارت “مساوی است با” می‌باشد. مثال

جملات زیر را به صورت تساوی بنویسید.

الف - جمع x و ۵ میشود ۲۰

$$x + 5 = 20$$

ب تفاوت ۸ و x مثل حاصل ضرب ۲ و x است.

$$8 - x = 2 \times x$$

بکار بردن نمادهای نامساوی: Using Inequality Symbols

اگر بخواهیم بگوییم دو عدد مساوی نیستند، نماد \neq بکار می‌بریم. مثلاً اگر بگوییم سه مساوی دو نیست می‌نویسیم

$$3 \neq 2$$

نشان دادن دو نقطه روی محور اعداد، طریقه‌ای است که دو عدد را با هم مقایسه کنیم. هر دو عدد حقیقی روی محور اعداد، آن عددی که سمت چپ است، کوچک‌تر از عدد سمت راست است. به عبارت دیگر عدد سمت راست بزرگ‌تر از عدد سمت چپ است. نماد $<$ یعنی کوچک‌تر است از و نماد $>$ یعنی بزرگ‌تر است از. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$-4 > -1 \quad -1 < -4$$

پس بطور کلی اگر $a < b$ باشد، همچنین خواهیم داشت $b > a$

نماد \leq یعنی کوچک‌تر است از یا مساوی است با

نماد \geq یعنی بزرگ‌تر است از یا مساوی است با

پیدا کردن قرینه‌ها و وارونه‌ها: بین تمام اعداد حقیقی دو عدد هستند که با اعداد دیگر تفاوت دارند. این دو عدد صفر و یک هستند. صفر تنها عدد حقیقی است که اگر با هر عدد حقیقی دیگر جمع شود، حاصل همان عدد حقیقی است. پس

صفر را عدد خنثی در جمع می‌گویند. Additive Identity

عدد یک تنها عدد حقیقی است که اگر در هر عدد حقیقی دیگر ضرب شود، حاصل همان عدد حقیقی است. پس عدد یک

را عدد خنثی در ضرب می‌گویند. Multiplicative Identity

خلاصه این که برای هر عدد حقیقی a خواهیم داشت:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

دو عدد که مجموع آنها صفر است، قرینه یک دیگر می نامند.

اعداد قرینه در جمع اگر a یک عدد حقیقی باشد، تنها قرینه Opposite or Additive Inverse آن $-a$ می باشد و تساوی زیر برقرار است:

$$a + (-a) = 0$$

خاصیت منفی مضاعف Double Negative Property

برای هر عدد حقیقی a رابطه زیر برقرار است:

$$-(-a) = a$$

اعداد قرینه یا وارونه در ضرب Reciprocals or Multiplicative Inverses

اگر a یک عدد حقیقی غیر از صفر باشد، قرینه یا وارونه آن $\frac{1}{a}$ می باشد و رابطه زیر برقرار است.

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

خواص جابجائی Commutative Properties

برای هر عدد حقیقی a و b

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

خاصیت جابجائی می گوید ترتیب قرار گرفتن دو عدد هنگام ضرب و یا جمع تاثیری در حاصل بدست آمده ندارد.

خواص شرکت پذیری Associative Properties

برای هر عدد حقیقی a, b, c

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

خواص توزیعی Distributive Properties

برای هر عدد حقیقی a, b, c

$$a(b + c) = ab + ac$$

خواص منفی ها

$$۱) (-1)a = -a$$

$$۲) -(-a) = a$$

$$۳) (-a)b = a(-b) = -(ab)$$

$$۴) (-a)(-b) = ab$$

$$۵) -(a + b) = -a - b$$

$$۶) -(a - b) = b - a$$

خواص کسر ها Properties of Fractions

$$۱) \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$۲) \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$۳) \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

$$۴) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$۵) \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

$$۶) \text{ اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ پس خواهیم داشت } ad = bc$$

مثال

$$a) -(x + ۲) = -x - ۲$$

$$b) -(x + y - z) = -x - y - (-z) = -x - y + z$$

$$c) \frac{5}{36} + \frac{7}{120}$$

برای جمع و تفریق کسر ها با مخرج های مشترک ، صورت ها را با هم جمع و یا از هم کم می کنیم و حاصل را روی مخرج مشترک می نویسیم .

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{7}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7-5}{2} = 1$$

برای جمع و تفریق کسر ها با مخرج های متفاوت ، اول کسر ها را به صورت کسر های معادل با مخرج های مشترک می نویسیم و سپس جمع یا تفریق می کنیم . پس اول باید کوچک ترین مخرج مشترک کسر ها را پیدا کنیم.

پیدا کردن کوچک ترین مخرج مشترک

الف – هر کدام از مخرج ها را به صورت حاصل ضرب عوامل اول بنویسیم. عوامل اول یا اعداد اول اعدادی هستند که بجزبر خود آن عدد و یا یک بر هیچ عدد دیگری بخش پذیر نیستند. مانند ۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹ و غیره

ب – کوچک ترین مخرج مشترک دو عدد عبارت است از حاصل ضرب عواملی که در هر کدام از آن دو عدد یافت میشود ، با بیشترین توان. در مثال بالا خواهیم داشت:

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$LCD = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \times 10}{36 \times 10} + \frac{7 \times 3}{120 \times 3} = \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360}$$

تمرینات ۱.۲

جملات زیر را به صورت تساوی جبری بنویسید.

۱- حاصل ضرب ۴ و c میشود ۷.

۲- دو برابر x باضافه ۵ معادل ۱۴- است.

۳- خارج قسمت n و ۵ مساوی است با ۴ برابر n است.

۴- تفاضل z و ۲ مثل حاصل ضرب z و ۲ است.

بین هر زوج عدد های زیر نماد $<$ ، $>$ و یا $=$ قرار دهید، تا یک جمله صحیح بدست آید.

۵) $-2 \quad \circ \quad -2$

۶) $\frac{12}{3} \quad \frac{8}{2}$

۷) $-7/9 \quad -7/9$

۸) $7/4 \quad 7/4$

۹) $8/6 \quad -3/5$

۱۰) $\frac{7}{11} \quad \frac{9}{11}$

۱۱) $\frac{1}{2} \quad \frac{5}{8}$

۱۲) $-16 \quad -17$

صحیح یا غلط ؟

۱۳) $-6 \leq 0$

۱۴) $-3 \geq -3$

۱۵) $-14 \geq -1$

۱۶) $-3 \leq -3$

قرینه اعداد زیر را بنویسید. (در عمل جمع)

۱۷) $-6/2$

۱۸) $\frac{4}{7}$

۱۹) $-\frac{2}{3}$

۲۰) 0

عکس یا معکوس اعداد زیر را بنویسید. (در عمل ضرب)

۲۱) 5

۲۲) -8

۲۳) $-\frac{1}{4}$

۲۴) 0

۲۵) $\frac{7}{8}$

۲۶ - تنها عدد حقیقی را نام ببرید که معکوس یا وارونه (در عمل ضرب) ندارد.

۲۷ - تنها عدد حقیقی نام ببرید که قرینه خودش هم هست. (در جمع)

با استفاده از خاصیت توزیعی اعمال ضرب زیر را انجام دهید.

$$۲۸) \quad ۳(x + ۵)$$

$$۲۹) \quad ۸(۲a + b)$$

$$۳۰) \quad ۲(۶x + ۵y + ۲z)$$

$$۳۱) \quad ۶x(y - ۴)$$

$$۳۲) \quad -\frac{۵}{۲}(۲x - ۴y)$$

عملیات زیر را انجام دهید.

$$۳۳) \quad \frac{۴}{۱۳} + \frac{۳}{۱۳}$$

$$۳۴) \quad \frac{۳}{۱۰} + \frac{۷}{۱۵}$$

$$۳۵) \quad \frac{۲}{۵} \div \frac{۹}{۱۰}$$

$$۳۶) \quad \left(۴ \div \frac{۱}{۲}\right) - \frac{۱}{۲}$$

جملات زیر را به صورت نامساوی ها بنویسید.

۳۷- x یک عدد مثبت است.

۳۸- t کوچک تر از ۴ است.

۳۹- a بزرگ تر از یا مساوی با π است.

۴۰- x کوچک تر از $\frac{۱}{۳}$ و بزرگ تر از -۵ است.

پاسخ تمرینات ۱.۲

جملات زیر را به صورت تساوی جبری بنویسید.

۱- حاصل ضرب ۴ و c میشود ۷.

$$4c = 7$$

۲- دو برابر x باضافه ۵ معادل ۱۴- است.

$$2x + 5 = -14$$

۳- خارج قسمت n و ۵ مساوی است با ۴ برابر n است.

$$\frac{n}{5} = 4n$$

۴- تفاضل z و ۲ مثل حاصل ضرب z و ۲ است.

$$z - 2 = 2z$$

بین هر زوج عدد های زیر نماد $<$ ، $>$ و یا $=$ قرار دهید، تا یک جمله صحیح بدست آید.

$$5) \quad 0 > -2$$

$$6) \quad \frac{12}{3} = \frac{8}{2}$$

$$7) \quad -7/9 < -7/09$$

$$8) \quad 7/4 = 7/40$$

$$9) \quad 8/6 > -3/5$$

$$10) \quad \frac{7}{11} < \frac{9}{11}$$

$$11) \quad \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$$

$$12) \quad -16 > -17$$

صحیح یا غلط ؟

$$۱۳) \quad -۶ \leq ۰ \quad \text{صحیح}$$

$$۱۴) \quad -۳ \geq -۳ \quad \text{صحیح}$$

$$۱۵) \quad -۱۴ \geq -۱ \quad \text{غلط}$$

$$۱۶) \quad -۳ \leq -۳ \quad \text{صحیح}$$

قرینه اعداد زیر را بنویسید. (در عمل جمع)

$$۱۷) \quad -۶/۲ \rightarrow ۶/۲$$

$$۱۸) \quad \frac{۴}{۷} \rightarrow -\frac{۴}{۷}$$

$$۱۹) \quad -\frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{۲}{۳}$$

$$۲۰) \quad ۰ \rightarrow ۰$$

عکس یا معکوس اعداد زیر را بنویسید. (در عمل ضرب)

$$۲۱) \quad ۵ \rightarrow \frac{۱}{۵}$$

$$۲۲) \quad -۸ \rightarrow -\frac{۱}{۸}$$

$$۲۳) \quad -\frac{۱}{۴} \rightarrow -۴$$

$$۲۴) \quad ۰ \rightarrow \text{نامعین}$$

$$۲۵) \quad \frac{۷}{۸} \rightarrow \frac{۸}{۷}$$

۲۶ - تنها عدد حقیقی را نام ببرید که معکوس یا وارونه (در عمل ضرب) ندارد.

صفر است

۲۷ - تنها عدد حقیقی نام ببرید که قرینه خودش هم هست. (در جمع)

صفر است.

با استفاده از خاصیت توزیعی اعمال ضرب زیر را انجام دهید.

$$۲۸) \quad ۳(x + ۵) = ۳x + ۱۵$$

$$۲۹) \quad ۸(۲a + b) = ۱۶a + ۸b$$

$$۳۰) \quad ۲(۶x + ۵y + ۲z) = ۱۲x + ۱۰y + ۴z$$

$$۳۱) \quad ۶x(y - ۴) = ۶xy - ۲۴x$$

$$۳۲) \quad -\frac{۵}{۲}(۲x - ۴y) = -۵x + ۱۰y$$

عملیات زیر را انجام دهید.

$$۳۳) \quad \frac{۴}{۱۳} + \frac{۳}{۱۳} = \frac{۷}{۱۳}$$

$$۳۴) \quad \frac{۳}{۱۰} + \frac{۷}{۱۵}$$

$$۱۰ = ۲ \times ۵$$

$$۱۵ = ۳ \times ۵$$

$$LCD = ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰$$

$$\frac{۳}{۱۰} + \frac{۷}{۱۵} = \frac{۳ \times ۳}{۱۰ \times ۳} + \frac{۷ \times ۲}{۱۵ \times ۲} = \frac{۹}{۳۰} + \frac{۱۴}{۳۰} = \frac{۲۳}{۳۰}$$

$$۳۵) \quad \frac{۲}{۵} \div \frac{۹}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \times \frac{۱۰}{۹} = \frac{۲}{۵} \times \frac{۲ \times ۲}{۹} = \frac{۴}{۹}$$

$$۳۶) \quad \left(4 \div \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \left(4 \times \frac{2}{1}\right) - \frac{1}{2} = \left(\frac{8}{1}\right) - \frac{1}{2} = \frac{16}{2} - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

جملات زیر را به صورت نامساوی ها بنویسید.

۳۷- x یک عدد مثبت است.

$$x > 0$$

۳۸- t کوچک تر از ۴ است.

$$t < 4$$

۳۹- a بزرگ تر از یا مساوی با π است.

$$a \geq \pi$$

۴۰- x کوچک تر از $\frac{1}{3}$ و بزرگ تر از -5 است.

$$-5 < x < \frac{1}{3}$$

۱.۳ انجام عملیات روی اعداد حقیقی Operations on Real Numbers

پیدا کردن قدر مطلق یک عدد Finding the Absolute Value of a Number

در بخش ۱.۲ برای مقایسه دو عدد حقیقی از محور اعداد استفاده کردیم. محور اعداد را هم می توان برای تصور مسافت یا فاصله Distance بکار برد، که منتج به مفهوم قدر مطلق میشود.

قدر مطلق یک عدد عبارت است از فاصله آن عدد و صفر روی محور اعداد. نماد قدر مطلق $||$ است. مثلاً چون -۴ و ۴ هر دو، روی محور اعداد چهار واحد از صفر فاصله دارند، هر کدام قدر مطلق ۴ دارند.

پس قدر مطلق a که نوشته میشود $|a|$ به صورت زیر است.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{اگر } a \geq 0 \\ -a & \text{اگر } a < 0 \end{cases}$$

مثال

$$۱) \quad |۳| = ۳$$

$$۲) \quad |۰| = ۰$$

$$۳) \quad |-۴| = -(-۴) = ۴$$

$$۴) \quad -|۲| = -۲$$

$$۵) \quad -|-۸| = -۸$$

خواص قدر مطلق

$$۱) \quad |a| \geq ۰$$

$$۲) \quad |a| = |-a|$$

$$۳) \quad |ab| = |a| \times |b|$$

$$۴) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

فاصله یا مسافت بین دو نقطه روی محور اعداد

اگر a و b اعداد حقیقی باشند، فاصله بین نقاط a و b روی محور اعداد مطابق زیر است.

$$d(a, b) = |b - a|$$

پس برای مثال فاصله بین اعداد ۲ و -۸ میشود

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |2 - (-8)| = |-10| = |10| = 10$$

جمع و تفریق اعداد حقیقی Adding and Subtracting Real Numbers

جمع اعداد حقیقی

الف - برای جمع کردن دو عدد هم علامت ، قدر مطلق آنها را با هم جمع می کنیم و سپس علامت مشترک را جلو حاصل جمع می گذاریم.

ب - برای جمع دو عدد با علامت های مغایر ، آن عددی که دارای قدر مطلق کوچک تر است از عدد که دارای قدر مطلق بزرگ تر است ، کم می کنیم و سپس علامت عددی که قدر مطلق بزرگ تر دارد ، جلو حاصل جمع می گذاریم. مثال

$$۶) \quad -3 + (-11) = -(3 + 11) = -14$$

$$۷) \quad 3 + (-7) = -4$$

$$۸) \quad -10 + 15 = 5$$

$$۹) \quad -8/3 + (-1/9) = -10/9$$

$$۱۰) \quad -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$۱۱) \quad -\frac{2}{3} + \frac{3}{7} = -\frac{14}{21} + \frac{9}{21} = -\frac{5}{21}$$

تفریق اعداد حقیقی

اگر a و b اعداد حقیقی باشند، تفاضل آنها که نوشته میشود $a - b$ به صورت زیر است.

$$a - b = a + (-b)$$

مثال

$$۱۲) \quad 2 - 8 = 2 + (-8) = -6$$

$$۱۳) \quad -۸ - (-۱) = -۸ + (۱) = -۷$$

$$۱۴) \quad ۱۰/۷ - (-۹/۸) = ۱۰/۷ + ۹/۸ = ۲۰/۵$$

$$۱۵) \quad -\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۴} = -\frac{۲}{۳} + \left(-\frac{۱}{۴}\right) = -\frac{۲ \times ۴}{۳ \times ۴} + \left(-\frac{۱ \times ۳}{۴ \times ۳}\right) = -\frac{۸}{۱۲} + \left(-\frac{۳}{۱۲}\right) = -\frac{۱۱}{۱۲}$$

برای جمع کردن یا تفریق کردن سه عدد و یا بیشتر ، از چپ به راست جمع یا تفریق می کنیم. مثال

$$۱۶) \quad ۱۱ + ۲ - ۷ = ۱۳ - ۷ = ۶$$

$$۱۷) \quad -۵ - ۴ + ۲ = -۵ + (-۴) + ۲ = -۹ + ۲ = -۷$$

ضرب و تقسیم اعداد حقیقی Multiplying and Dividing Real Numbers

حتما به خاطر دارید که ضرب یک عدد در یک عدد صحیح مثبت مثل جمع مکرر است.

$$۳(۲) = ۲ + ۲ + ۲ = ۶$$

$$۳(-۲) = (-۲) + (-۲) + (-۲) = -۶$$

پس نتیجه می گیریم که

الف — حاصل ضرب دو عدد هم علامت ، مثبت است.

ب — حاصل ضرب دو عدد با علامت های متفاوت ، منفی است

ج — به خاطر بیاورید که حاصل ضرب صفر در هر عدد حقیقی ، صفر است.

$$۰ \times a = ۰$$

عملیات ضرب های زیر را انجام دهید.

$$۱۸) \quad -۸(-۱) = ۸$$

$$۱۹) \quad ۲\left(-\frac{۱}{۶}\right) = \frac{۲}{۱} \times \left(-\frac{۱}{۶}\right) = -\frac{۲}{۶} = -\frac{۱}{۳}$$

$$۲۰) \quad -۱/۲(۰/۳) = -۰/۳۶$$

$$۲۱) \quad ۷(-۶) = -۴۲$$

$$۲۲) \quad -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}$$

$$۲۳) \quad (-4/6)(-2/5) = 11/5$$

$$۲۴) \quad 0(-6) = 0$$

یاد آوری

$$\frac{8}{4} = 2 \text{ زیرا } 2 \times 4 = 8$$

$$\frac{8}{-4} = -2 \text{ زیرا } (-2)(-4) = 8$$

$$\frac{-8}{4} = -2 \text{ زیرا } (-2)4 = -8$$

$$\frac{-8}{-4} = 2 \text{ زیرا } 2(-4) = -8$$

بنا با این برای تقسیم دو عدد حقیقی خواهیم داشت:

الف - خارج قسمت Quotient دو عدد حقیقی هم علامت ، مثبت است.

ب - خارج قسمت دو عدد حقیقی با علامت های متفاوت ، منفی است.

از استدلال بالا نتیجه می گیریم که نمی توانیم یک عدد را بر صفر تقسیم کنیم. زیرا اگر عدد $\frac{5}{0}$ وجود داشت ، بایستی حاصل ضرب آن عدد و صفر ، مساوی با ۵ میشد. و می دانیم که چنین عددی وجود ندارد. پس نمی توانیم تقسیم بر صفر را تعریف کنیم. لذا $\frac{5}{0}$ نا معین و یا نا ممکن است.

اعمال تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$۲۵) \quad \frac{20}{-4} = -5$$

$$۲۶) \quad \frac{-9}{-3} = 3$$

$$۲۷) \quad \frac{-۴۰}{۱۰} = -۴$$

$$۲۸) \quad \frac{-۸}{۰} \text{ نامعین}$$

$$۲۹) \quad \frac{۰}{-۸} = ۰$$

$$۳۰) \quad \frac{-۱۰}{-۸۰} = ۰/۱۲۵$$

از قواعد علامت های عمل تقسیم نتیجه می گیریم که محل قرار دادن علامت منفی در اعداد کسری ، در پاسخ عمل تقسیم تغییری ایجاد نمی کند. مثلاً

$$\frac{-۱۲}{۳} = \frac{۱۲}{-۳} = -\frac{۱۲}{۳} = -۴$$

پس اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $b \neq ۰$ خواهیم داشت:

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

تقسیم کنید.

$$۳۱) \quad -\frac{۱}{۱۰} \div \left(-\frac{۲}{۵}\right) = -\frac{۱}{۱۰} \times \left(-\frac{۵}{۲}\right) = \frac{۵}{۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

$$۳۲) \quad -\frac{۱}{۴} \div \frac{۳}{۷} = -\frac{۱}{۴} \times \frac{۷}{۳} = -\frac{۷}{۱۲}$$

Simplifying Expressions Containing Exponents ساده کردن عبارات هائی که توان دارند

وقتی که دو عدد در یک دیگر ضرب میشوند، هر یک از آنها را عامل Factor می نامند. مثلاً در تساوی

$$۳ \times ۵ = ۱۵$$

اعداد ۳ و ۵ را عوامل ضرب و یا عوامل می گویند.

یک توان عدد طبیعی، نمادی است برای ضرب مکرر یک عدد. عاملی که تکرار میشود را پایه **base** و تعداد دفعاتی که آن عامل تکرار میشود را توان Exponent می نامند

مثلا

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

در مثال بالا عدد ۴ را پایه و عدد ۳ را توان می نامند.

تعریف توان: اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشند، پس توان n م (خوانده میشود ENOM)

a یا a به توان n و نوشته می شود a^n حاصل ضرب n مرتبه از عامل a است.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ مرتبه}}$$

نوشتن توان یک لازم نیست مثلا بجای نوشتن 3^1 می نویسیم ۳

مثال - مقادیر عبارت های زیر را بدست آورید.

$$33) \quad 3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$34) \quad -5^2 = -(5 \times 5) = -25$$

$$35) \quad -5^3 = -(5 \times 5 \times 5) = -125$$

$$36) \quad (-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$$

$$37) \quad (-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$$

$$38) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

پیدا کردن ریشه Root یک عدد

ضد مربع یک عدد ریشه دوم Square Root آن عدد است. مثلاً چون مربع عدد ۴ میشود $4^2 = 16$ می‌گوییم ریشه دوم و یا جذر عدد ۱۶ میشود ۴.

نماد \sqrt{a} برای نشان دادن ریشه دوم مثبت یک عدد نا منفی بکار می‌رود. پس

$$\sqrt{16} = 4$$

ریشه دوم اعداد زیر را پیدا کند.

$$۳۹) \quad \sqrt{9} = 3$$

$$۴۰) \quad \sqrt{25} = 5$$

$$۴۱) \quad \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

بهمین ترتیب چون توان سوم Cubed عدد ۲ میشود ۸، پس می‌گوییم ریشه سوم Cube Root ۸ میشود ۲

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

و چون ۳ به توان ۴ میشود ۸۱ پس ریشه چهارم ۸۱ میشود ۳

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

تمرینات ۱.۳

مقادیر عبارت ها را پیدا کنید.

۱) $|100|$

۲) $|-73|$

۳) $||-6| - |-4||$

۴) $\frac{-1}{|-1|}$

۵) $|(-2) \times 6|$

۶) $\left| \left(-\frac{1}{3} \right) (-15) \right|$

فاصله بین اعداد داده شده را پیدا کنید.

۷) ۱۷ و ۲

۸) ۲۱ و ۳ -

$$۹) \quad \frac{۱۱}{۸} \text{ و } -\frac{۳}{۱۰}$$

جمع یا تفریق کنید.

$$۱۰) \quad -۳ + ۸$$

$$۱۱) \quad -۱۴ + (-۱۰)$$

$$۱۲) \quad -۴/۳ - ۶/۷$$

$$۱۳) \quad ۱۳ - ۱۷$$

$$۱۴) \quad \frac{۱۱}{۱۵} - \left(-\frac{۳}{۵}\right)$$

$$۱۵) \quad ۱۹ - ۱۰ - ۱۱$$

$$۱۶) \quad -۱۴ - ۷$$

$$۱۷) \quad -\frac{۴}{۵} - \left(-\frac{۳}{۱۰}\right)$$

۱۸ - عدد ۱۴ را از ۸ کم کنید.

$$۱۹) -۴ + ۷$$

$$۲۰) -۹ + (-۳)$$

$$۲۱) -۴ - (-۱۹)$$

$$۲۲) -۵ + (-۷) - ۱۰$$

پاسخ تمرینات ۱.۳

مقادیر عبارت ها را پیدا کنید.

$$۱) |۱۰۰| = ۱۰۰$$

$$۲) |-۷۳| = ۷۳$$

$$۳) ||-۶| - |-۴|| = |۶ - ۴| = |۲| = ۲$$

$$۴) \frac{-۱}{|-۱|} = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

$$۵) |(-۲) \times ۶| = |-۱۲| = ۱۲$$

$$۶) \quad \left| \left(-\frac{۱}{۳} \right) (-۱۵) \right| = \left| \frac{۱۵}{۳} \right| = |۵| = ۵$$

فاصله بین اعداد داده شده را پیدا کنید.

$$۷) \quad ۲ \text{ و } ۱۷$$

$$d(۲, ۱۷) = |۲ - ۱۷| = |-۱۵| = ۱۵$$

$$۸) \quad -۳ \text{ و } ۲۱$$

$$d(-۳, ۲۱) = |-۳ - ۲۱| = |-۲۴| = ۲۴$$

$$۹) \quad \frac{۱۱}{۸} \text{ و } -\frac{۳}{۱۰}$$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{۱۱}{۸}, -\frac{۳}{۱۰}\right) &= \left| \frac{۱۱}{۸} - \left(-\frac{۳}{۱۰}\right) \right| = \left| \frac{۱۱}{۸} + \frac{۳}{۱۰} \right| = \left| \frac{۱۱ \times ۵}{۸ \times ۵} + \frac{۳ \times ۴}{۱۰ \times ۴} \right| = \left| \frac{۵۵ + ۱۲}{۴۰} \right| \\ &= \left| \frac{۶۷}{۴۰} \right| = \frac{۶۷}{۴۰} \end{aligned}$$

جمع یا تفریق کنید.

$$۱۰) \quad -۳ + ۸ = ۵$$

$$۱۱) \quad -۱۴ + (-۱۰) = -۲۴$$

$$۱۲) \quad -۴/۳ - ۶/۷ = -۱۱$$

$$۱۳) \quad ۱۳ - ۱۷ = -۴$$

$$۱۴) \quad \frac{۱۱}{۱۵} - \left(-\frac{۳}{۵}\right) = \frac{۱۱}{۱۵} + \frac{۳}{۵} = \frac{۱۱}{۱۵} + \frac{۳ \times ۳}{۵ \times ۳} = \frac{۱۱}{۱۵} + \frac{۹}{۱۵} = \frac{۲۰}{۱۵} = \frac{۴}{۳}$$

$$۱۵) \quad ۱۹ - ۱۰ - ۱۱ = ۱۹ - ۲۱ = -۲$$

$$۱۶) \quad -۱۴ - ۷ = -۲۱$$

$$۱۷) \quad -\frac{۴}{۵} - \left(-\frac{۳}{۱۰}\right) = -\frac{۴}{۵} + \frac{۳}{۱۰} = -\frac{۴ \times ۲}{۵ \times ۲} + \frac{۳}{۱۰} = -\frac{۸}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰} = -\frac{۵}{۱۰} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۸ - عدد ۱۴ را از ۸ کم کنید.

$$۸ - ۱۴ = -۶$$

$$۱۹) \quad -۴ + ۷ = ۳$$

$$۲۰) \quad -۹ + (-۳) = -۱۲$$

$$۲۱) \quad -۴ - (-۱۹) = -۴ + ۱۹ = ۱۵$$

$$۲۲) \quad -۵ + (-۷) - ۱۰ = -۵ - ۷ - ۱۰ = -۲۲$$

۱.۴ – ترتیب انجام عملیات و عبارت های جبری

Order of Operations and Algebraic Expressions

ترتیب عملیات Order of Operations

اگر پرانتز ، کرشه و یا اکولاد وجود داشته باشد قبل از هر چیز عبارت های داخل پرانتز ها ، کرشه ها و اکولاد ها را ساده کنید. و اگر یک نماد داخل نماد دیگر باشد ، از داخلی ترین نماد شروع کنید. اگر کسر وجود داشته باشد ، صورت و مخرج را جدا گانه ساده کنید. سپس به ترتیب زیر عملیات را ادامه دهید.

۱ – مقادیر توان ها را پیدا کنید.

۲ – به ترتیب از چپ به راست ، عملیات ضرب یا تقسیم را انجام دهید.

۳ – به ترتیب از چپ به راست عملیات جمع یا تفریق را انجام دهید.

مثال – ساده کنید

$$۱) \quad ۳ + ۲ \times ۱۰ = ۳ + ۲۰ = ۲۳$$

$$۲) \quad ۲(۱ - ۴)^۲ = ۲(-۳)^۲ = ۲(۹) = ۱۸$$

$$۳) \quad \frac{|-۲|^۳ + ۱}{-۷ - \sqrt{۴}} = \frac{۲^۳ + ۱}{-۷ - ۲} = \frac{۸ + ۱}{-۹} = \frac{۹}{-۹} = -۱$$

$$۴) \quad \frac{(۶ + ۲) - (-۴)}{۲ - (-۳)} = \frac{۸ - (-۴)}{۲ - (-۳)} = \frac{۸ + ۴}{۲ + ۳} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$۵) \quad ۳ - [(۴ - ۶) + ۲(۵ - ۹)] = ۳ - [-۲ + ۲(-۴)] = ۳ - [-۲ + (-۸)] = ۳ - [-۱۰] = ۱۳$$

پیدا کردن مقادیر عددی یک عبارت جبری Evaluating Algebraic Expressions

یاد آوری از فصل اول بخش یک

یک عبارت جبری تشکیل شده از اعداد و متغیر ها که به وسیله اعمال جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم ، توان رسانی ، و ریشه گیری به هم متصل شده باشند.

حال اگر اعداد جانشین متغیر ها شوند و اعمال جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم به توان رسانی و ریشه گیری انجام شوند، نتیجه را مقدار عددی آن عبارت می نامند، و انجام مراحل بالا را ارزشیابی و یا پیدا کردن مقدار عددی آن عبارت می گویند.

مثال ۶ - عبارت جبری زیر برای تبدیل درجه حرارت فارنهایت به سانتی گراد بکار میرود.

$$C = \frac{5(F - 32)}{9}$$

درجات سانتی گراد برای درجات مختلف فارنهایت زیر پیدا کنید.

الف $F = -4$

حل

$$C = \frac{5(-4 - 32)}{9} = \frac{5(-36)}{9} = -20$$

ب $F = 10$

حل

$$C = \frac{5(10 - 32)}{9} = \frac{5(-22)}{9} = \frac{-110}{9} = -12\frac{2}{9}$$

ج $F = 32$

حال

$$C = \frac{5(32 - 32)}{9} = \frac{5(0)}{9} = 0$$

جمله یا Term

جمله های یک عبارت ، اجزایی از عبارت هستند که با هم جمع شده اند و به آنها عدد افزوده می گویند. Addend

مثال: در عبارت $4x^2 + 3x$ جمله ها عبارتند از $4x^2$ و $3x$

جمله های متشابه Like Terms

جمله های متشابه ، جمله هایی هستند با متغیر های یکسان با توان های مساوی .

پیوستن جملات متشابه Combining Like Terms

می توان جملات متشابه را با هم جمع یا از هم تفریق کرد. این عمل را پیوستن جملات متشابه می گویند.

مثال با متصل کردن جملات متشابه ، عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۷) \quad ۳x - ۵x + ۴ = (۳ - ۵)x + ۴ = -۲x + ۴$$

$$۸) \quad y + ۳y = (۱ + ۳)y = ۴y$$

$$۹) \quad ۷x + ۹x + ۶ - ۱۰ = (۷ + ۹)x + (۶ - ۱۰) = ۱۶x - ۴$$

$$۱۰) \quad -۷x + ۵ + ۳x - ۲ = -۷x + ۳x + ۵ - ۲ = (-۷ + ۳)x + (۵ - ۲) = -۴x + ۳$$

$$۱۱) \quad ۳y - ۲y + ۵ - ۷ + y = ۳y - ۲y + y + ۵ - ۷ = (۳ - ۲ + ۱)y + (۵ - ۷) = ۲y - ۲$$

$$۱۲) \quad -۲(x + ۳) = -۲x - ۶$$

$$۱۳) \quad ۷x + ۳ - ۵(x - ۴) = ۷x + ۳ - ۵x + ۲۰ = ۲x + ۲۳$$

تمرینات ۱.۴

عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۱) \quad ۳(۵ - ۷)^۴$$

$$۲) \quad -۳^۲ + ۲^۳$$

$$۳) \quad \frac{۳ - (-۱۲)}{-۵}$$

$$۴) \quad \left| \frac{3}{6} - \frac{7}{2} \right| + \left| \frac{3}{6} + \frac{7}{2} \right|$$

$$۵) \quad (-3)^2 + 2^3$$

$$۶) \quad -3[6 - (-2)]$$

$$۷) \quad -9 \times 8 + 5(-6)$$

$$۸) \quad 4[8 - (2 - 4)]$$

$$۹) \quad -8\left(-\frac{3}{4}\right) - 8$$

$$۱۰) \quad 2 - [(7 - 6) + (9 - 19)]$$

$$۱۱) \quad 5^2 - 3^4$$

$$۱۲) \quad 2 \times 7 - 4 \times 5$$

$$۱۳) \quad 2(7 - 4 \times 5)$$

$$۱۴) \quad 18 - 3(-4) + 7$$

$$۱۵) \frac{(-۹ + ۶)(-۱^۲)}{-۲ - ۲}$$

$$۱۶) \left(\sqrt[۲]{۸}\right)(-۴) - \left(\sqrt{۹}\right)(-۵)$$

$$۱۷) ۱۲ + \{۶ - [۵ - ۲(-۵)]\}$$

$$۱۸) ۲۵ - [(۳ - ۵) + (۱۴ - ۱۸)]^۲$$

$$۱۹) \frac{\left(۳ - \sqrt{۹}\right) - (-۵ - ۱ / ۳)}{-۳}$$

$$۲۰) \frac{|۳ - ۹| - |-۵|}{-۳}$$

$$۲۱) \frac{۳(-۲ + ۱)}{۵} - \frac{-۷(۲ - ۴)}{۱ - (-۲)}$$

ساده کنید

$$۲۲) ۶x + ۲x$$

$$۲۳) \quad ۹y - ۱۱y$$

$$۲۴) \quad ۷x + x$$

$$۲۵) \quad ۱۹y - y$$

$$۲۶) \quad ۶x - ۴x + ۱ \circ x$$

$$۲۷) \quad ۹x - ۸ - ۱ \circ x$$

$$۲۸) \quad ۱ \circ a + ۷ + ۴a + ۸$$

$$۲۹) \quad -۹ + ۴x + ۱۸ - ۱ \circ x$$

$$۳۰) \quad \frac{۳}{۴}b - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}b - \frac{۲}{۳}$$

ساده کنید.

$$۳۱) \quad ۲(۳x + ۷)$$

$$۳۲) - ۵(x - ۱)$$

$$۳۳) ۳(۲a - ۳b + ۴)$$

$$۳۴) ۵k - (۳k - ۱۰)$$

$$۳۵) (۳x + ۴) - (۶x - ۱)$$

$$۳۶) ۳(x - ۲) + x + ۱۵$$

$$۳۷) -(n + ۵) + (۵n - ۳)$$

$$۳۸) ۳x - ۲(x - ۵) + x$$

پاسخ تمرینات ۱.۴

عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۱) ۳(۵ - ۷)^۴ = ۳(-۲)^۴ = ۳(۱۶) = ۴۸$$

$$۲) -۳^۲ + ۲^۳ = -۹ + ۸ = -۱$$

$$۳) \quad \frac{۳ - (-۱۲)}{-۵} = \frac{۳ + ۱۲}{-۵} = \frac{۱۵}{-۵} = -۳$$

$$۴) \quad |۳/۶ - ۷/۲| + |۳/۶ + ۷/۲| = |-۳/۶| + |۱۰/۸| = ۳/۶ + ۱۰/۸ = ۱۴/۴$$

$$۵) \quad (-۳)^۲ + ۲^۳ = ۹ + ۸ = ۱۷$$

$$۶) \quad -۳[۶ - (-۲)] = -۳[۶ + ۲] = -۳[۸] = -۲۴$$

$$۷) \quad -۹ \times ۸ + ۵(-۶) = -۷۲ + (-۳۰) = -۱۰۲$$

$$۸) \quad ۴[۸ - (۲ - ۴)] = ۴[۸ - (-۲)] = ۴[۸ + ۲] = ۴[۱۰] = ۴۰$$

$$۹) \quad -۸\left(-\frac{۳}{۴}\right) - ۸ = \left(\frac{۸ \times ۳}{۴}\right) - ۸ = (۶) - ۸ = -۲$$

$$۱۰) \quad ۲ - [(۷ - ۶) + (۹ - ۱۹)] = ۲ - [۱ - ۱۰] = ۲ - [-۹] = ۲ + ۹ = ۱۱$$

$$۱۱) \quad ۵^۲ - ۳^۴ = ۲۵ - ۸۱ = -۵۶$$

$$۱۲) \quad ۲ \times ۷ - ۴ \times ۵ = ۱۴ - ۲۰ = -۶$$

$$۱۳) \quad ۲(۷ - ۴ \times ۵) = ۲(۷ - ۲۰) = ۲(-۱۳) = -۲۶$$

$$۱۴) \quad ۱۸ - ۳(-۴) + ۷ = ۱۸ + ۱۲ + ۷ = ۳۷$$

$$۱۵) \quad \frac{(-۹ + ۶)(-۱^۲)}{-۲ - ۲} = \frac{(-۳)(-۱)}{-۴} = \frac{۳}{-۴} = -\frac{۳}{۴}$$

$$۱۶) \quad \left(\sqrt[۳]{۸}\right)(-۴) - \left(\sqrt{۹}\right)(-۵) = (۲)(-۴) - (۳)(-۵) = -۸ - (-۱۵) = -۸ + ۱۵ = ۷$$

$$۱۷) \quad ۱۲ + \{۶ - [۵ - ۲(-۵)]\} = ۱۲ + \{۶ - [۵ + ۱۰]\} = ۱۲ + \{۶ - [۱۵]\} = ۱۲ + \{-۹\} = ۳$$

$$۱۸) \quad ۲۵ - [(۳ - ۵) + (۱۴ - ۱۸)]^۲ = ۲۵ - [-۲ - ۴]^۲ = ۲۵ - [-۶]^۲ = ۲۵ - ۳۶ = -۱۱$$

$$۱۹) \quad \frac{\left(۳ - \sqrt{۹}\right) - (-۵ - ۱/۳)}{-۳} = \frac{(۳ - ۳) - (-۶/۳)}{-۳} = \frac{۰ + ۶/۳}{-۳} = -۲/۱$$

$$۲۰) \quad \frac{|۳ - ۹| - |-۵|}{-۳} = \frac{|-۶| - ۵}{-۳} = \frac{۶ - ۵}{-۳} = -\frac{۱}{۳}$$

$$۲۱) \quad \frac{۳(-۲ + ۱)}{۵} - \frac{-۷(۲ - ۴)}{۱ - (-۲)} = \frac{۳(-۱)}{۵} - \frac{-۷(-۲)}{۱ + ۲} = \frac{-۳}{۵} - \frac{۱۴}{۳} = \frac{-۳(۳)}{۵(۳)} - \frac{۱۴(۵)}{۳(۵)}$$

$$= \frac{-9}{15} - \frac{70}{15} = \frac{-79}{15}$$

ساده کنید

$$۲۲) \quad ۶x + ۲x = (۶ + ۲)x = ۸x$$

$$۲۳) \quad ۹y - ۱۱y = (۹ - ۱۱)y = -۲y$$

$$۲۴) \quad ۷x + x = (۷ + ۱)x = ۸x$$

$$۲۵) \quad ۱۹y - y = (۱۹ - ۱)y = ۱۸y$$

$$۲۶) \quad ۶x - ۴x + ۱۰x = (۶ - ۴ + ۱۰)x = ۱۲x$$

$$۲۷) \quad ۹x - ۸ - ۱۰x = (۹ - ۱۰)x - ۸ = -x - ۸$$

$$۲۸) \quad ۱۰a + ۷ + ۴a + ۸ = (۱۰ + ۴)a + (۷ + ۸) = ۱۴a + ۱۵$$

$$۲۹) \quad -۹ + ۴x + ۱۸ - ۱۰x = (۴ - ۱۰)x + (-۹ + ۱۸) = -۶x + ۹$$

$$۳۰) \quad \frac{۳}{۴}b - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}b - \frac{۲}{۳} = \left(\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۶}\right)b + \left(-\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳}\right)$$

$$= \left(\frac{3 \times 3}{6 \times 3} + \frac{1 \times 2}{6 \times 2} \right) b + \left(-\frac{1 \times 3}{2 \times 3} - \frac{2 \times 2}{3 \times 2} \right) = \left(\frac{9}{12} + \frac{2}{12} \right) b + \left(-\frac{3}{6} - \frac{4}{6} \right)$$

$$= \frac{11}{12} b - \frac{7}{6}$$

ساده کنید.

$$۳۱) \quad ۲(۳x + ۷) = ۶x + ۱۴$$

$$۳۲) \quad -۵(x - ۱) = -۵x + ۵$$

$$۳۳) \quad ۳(۲a - ۳b + ۴) = ۶a - ۹b + ۱۲$$

$$۳۴) \quad ۵k - (۳k - ۱۰) = ۵k - ۳k + ۱۰ = ۲k + ۱۰$$

$$۳۵) \quad (۳x + ۴) - (۶x - ۱) = ۳x + ۴ - ۶x + ۱ = (۳ - ۶)x + (۴ + ۱) = -۳x + ۵$$

$$۳۶) \quad ۳(x - ۲) + x + ۱۵ = ۳x - ۶ + x + ۱۵ = (۳ + ۱)x + (-۶ + ۱۵) = ۴x + ۹$$

$$۳۷) \quad -(n + ۵) + (۵n - ۳) = -n - ۵ + ۵n - ۳ = (-۱ + ۵)n + (-۵ - ۳) = ۴n - ۸$$

$$۳۸) \quad ۳x - ۲(x - ۵) + x = ۳x - ۲x + ۱۰ + x = (۳ - ۲ + ۱)x + ۱۰ = ۲x + ۱۰$$

۱.۵ – توان ها و عدد نویسی علمی Exponents and Scientific Notation

استفاده از قانون ضرب Using the Product Rule

یاد آوری – گفتیم که توان ها برای نوشتن عوامل مکرر به شکل کوتاه تر بکار می روند. مثلاً

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

$$y^6 = y \times y \times y \times y \times y \times y$$

عاملی که تکرار می شود را پایه و تعداد دفعاتی که عامل تکرار می شود را توان می نامیم.

عبارت هایی که در آنها توان وجود دارد را عبارت های توانی می گویند. Exponential Expressions

پس 5^2 و y^6 عبارت های توانی یا بطور خلاصه توان می نامند. توان ها را می توان ضرب ، تقسیم ، جمع ، تفریق و به توان رساند .

به مثال زیر توجه کنید.

$$x^2 \times x^3 = \underbrace{(x \times x)(x \times x \times x)}_{x \text{ پنج مرتبه ضرب شده است}} = x^5$$

می بینیم که نتیجه درست همان است که اگر توان ها را با هم جمع کنیم.

پس

قانون ضرب توان ها Product Rule for Exponents

اگر m و n اعداد صحیح و a یک عدد حقیقی باشد ، پس

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

به عبارت دیگر ، برای ضرب توان های با پایه مشترک ، آن پایه مشترک را می نویسیم و توان ها را با هم جمع می کنیم و نتیجه را به عنوان توان جدید روی پایه مشترک می گذاریم.

مثال با بکار بردن قانون ضرب توان ها عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۱) \quad 2^2 \times 2^5 = 2^{2+5} = 2^7$$

$$۲) \quad x^4 \times x^3 = x^{4+3} = x^7$$

$$۳) \quad y \times y^۲ \times y^۴ = y^{۱+۲+۴} = y^۷$$

$$۴) \quad (۳x^۶)(۵x) = ۳(۵)x^۶ \times x^۱ = ۱۵x^۷$$

$$۵) \quad (-۲x^۳p^۲)(۴xp^{۱۰}) = -۲(۴)x^۳x^۱p^۲p^{۱۰} = -۸x^۴p^{۱۲}$$

توان صفر — به مثال عنر توجه کنید.

$$a^۰a^n = a^{۰+n} = a^n = ۱ \times a^n$$

از مثال بالا نتیجه می گیریم که $a^۰ = ۱$ در صورتی که a صفر نباشد.

قانون توان صفر

اگر a صفر نباشد، پس $a^۰ = ۱$

مثال — مقادیر عددی عبارت های زیر را پیدا کنید.

$$۶) \quad ۷^۰ = ۱$$

$$۷) \quad -۷^۰ = -(۷^۰) = -(۱) = -۱$$

$$۸) \quad (۲x + ۵)^۰ = ۱$$

$$۹) \quad ۲x^۰ = ۲(۱) = ۲$$

قانون تقسیم توان ها Quotient Rule for Exponents

به مثال زیر توجه کنید.

در صورتی که متغیر های مخرج صفر نباشد :

$$\frac{x^۹}{x^۲} = \frac{\cancel{x} \times \cancel{x} \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x}{\cancel{x} \times \cancel{x}} = x^۷$$

می بینیم که نتیجه همان خواهد بود اگر توان ها را از هم کم کنیم .

$$\frac{x^۹}{x^۲} = x^{۹-۲} = x^۷$$

پس اگر a یک عدد حقیقی بجز صفر باشد، و n و m اعداد صحیح، خواهیم داشت:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

به عبارت دیگر برای تقسیم توان ها با پایه های یکسان ، توان ها را از هم کم می کنیم و حاصل را روی پایه مشترک می گذاریم.

مثال - با بکار بردن قانون تقسیم توان ها ، عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۱۰) \frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$$

$$۱۱) \frac{5^8}{5^2} = 5^{8-2} = 5^6$$

$$۱۲) \frac{2 \times x^6}{4x^5} = 5x^{6-5} = 5x$$

$$۱۳) \frac{12y^1z^7}{14y^4x^7} = \frac{6}{7}y^{1-4} \times x^{7-7} = \frac{6}{7}y^3z^0 = \frac{6}{7}y^3 = \frac{6y^3}{7}$$

پیدا کردن مقادیر عبارت هایی که به توان منفی رسیده باشند .

هنگامی که توان مخرج بزرگ تر از توان صورت باشد، بکار بردن قانون خارج قسمت یا تقسیم توان ها ، یک توان منفی بدست می آید. مثلاً

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$$

از طرف دیگر می توان نوشت:

$$\frac{x^3}{x^5} = \frac{\overset{\text{red}}{x} \times \overset{\text{red}}{x} \times \overset{\text{red}}{x}}{\overset{\text{red}}{x} \times \overset{\text{red}}{x} \times \overset{\text{red}}{x} \times x \times x} = \frac{1}{x^2}$$

از مثال بالا می توان نتیجه گرفت که :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{و یا بطور کلی} \quad x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

توان منفی

اگر a یک عدد حقیقی نا منفی باشد و n یک عدد صحیح مثبت ، پس خواهیم داشت:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال – عبارت های زیر را ساده کنید و نتایج را فقط با توان مثبت بنویسید.

$$۱۴) \quad ۵^{-۲} = \frac{1}{۵^۲} = \frac{1}{۲۵}$$

$$۱۵) \quad ۲x^{-۳} = ۲ \times \frac{1}{x^۳} = \frac{۲}{x^۳}$$

$$۱۶) \quad (۳x)^{-۱} = \frac{1}{(۳x)^۱} = \frac{1}{۳x}$$

$$۱۷) \quad \frac{m^۵}{m^{۱۵}} = m^{۵-۱۵} = m^{-۱۰} = \frac{1}{m^{۱۰}}$$

$$۱۸) \quad \frac{۳^۳}{۳^۶} = ۳^{۳-۶} = ۳^{-۳} = \frac{1}{۳^۳} = \frac{1}{۲۷}$$

$$۱۹) \quad ۲^{-۱} + ۳^{-۲} = \frac{1}{۲^۱} + \frac{1}{۳^۲} = \frac{1}{۲} + \frac{1}{۹} = \frac{۹}{۱۸} + \frac{۲}{۱۸} = \frac{۱۱}{۱۸}$$

$$۲۰) \quad \frac{1}{t^{-۵}} = \frac{1}{\frac{1}{t^۵}} = 1 \div \frac{1}{t^۵} = 1 \times \frac{t^۵}{1} = t^۵$$

توجه داشته باشید که اگر یک عامل توان داشته باشد هنگام جا بجایی از صورت به مخرج و یا بالعکس ، علامت توان را تغییر دهید. مثلاً

$$x^{-۳} = \frac{1}{x^۳} \quad ۵^{-۲} = \frac{1}{۵^۲} = \frac{1}{۲۵}$$

$$\frac{1}{y^{-۴}} = y^۴ \quad \frac{1}{۲^{-۳}} = ۲^۳ = ۸$$

ساده کنید و نتایج را فقط با توان های مثبت بنویسید.

$$۲۱) \frac{x^{-۹}}{x^۲} = x^{-۹-۲} = x^{-۱۱} = \frac{1}{x^{۱۱}}$$

$$۲۲) \frac{p^۴}{p^{-۳}} = p^{۴-(-۳)} = p^۷$$

$$۲۳) \frac{۲^{-۳}}{۲^{-۱}} = ۲^{-۳-(-۱)} = ۲^{-۲} = \frac{1}{۲^۲} = \frac{1}{۴}$$

$$۲۴) \frac{۲x^{-۷}y^۲}{۱ \circ xy^{-۵}} = \frac{x^{-۷-۱} \times y^{۲-(-۵)}}{۵} = \frac{x^{-۸}y^۷}{۵} = \frac{y^۷}{۵x^۸}$$

$$۲۵) \frac{(۳x^{-۳})(x^۲)}{x^۶} = \frac{۳x^{-۳+۲}}{x^۶} = \frac{۳x^{-۱}}{x^۶} = ۳x^{-۱-۶} = ۳x^{-۷} = \frac{۳}{x^۷}$$

ساده کنید. فرض کنید t و a اعداد صحیح نامنفی و x هم صفر نیست.

$$۲۶) x^{۲a} \times x^۳ = x^{۲a+۳}$$

$$۲۷) \frac{x^{۲t-۱}}{x^{t-۵}} = x^{(۲t-۱)-(t-۵)} = x^{۲t-۱-t+۵} = x^{t+۴}$$

بکار بردن قانون توان در توان Using the Power Rules

حجم یک مکعب به ابعاد x مساوی است با $x^۳$ حال اگر ابعاد مکعبی به ابعاد $x^۲$ مساوی است با $(x^۲)^۳$

برای ساده کردن عبارتی مثل $(x^2)^3$ از تعریف a^n استفاده می‌کنیم.

$$(x^2)^3 = \underbrace{(x^2)(x^2)(x^2)}_{x^2 \text{ فاکتوری است که سه مرتبه تکرار شده است}} = x^{2+2+2} = x^6$$

x^2 فاکتوری است که سه مرتبه تکرار شده است

متوجه می‌شوید که نتیجه همان است که اگر توان‌ها را در هم ضرب کنیم.

$$(x^2)^3 = x^{2 \times 3} = x^6$$

قانون توان در توان و قانون توان در توان ضرب یا تقسیم

The Power Rule and Power of a Product or Quotient Rules for Exponents

اگر a و b اعداد حقیقی باشند و m و n اعداد صحیح باشند پس

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad b \neq 0$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

مثال – عبارت‌های زیر را ساده کنید. پاسخ‌ها را فقط با توان‌های مثبت بنویسید.

$$۲۸) \quad (x^5)^7 = x^{5 \times 7} = x^{35}$$

$$۲۹) \quad (2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$$

$$۳۰) \quad (5^{-1})^2 = 5^{(-1) \times 2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$۳۱) \quad (y^{-3})^{-4} = y^{-3(-4)} = y^{12}$$

$$۳۲) \quad (5x^2)^3 = 5^3 \times (x^2)^3 = 5^3 \times x^{2 \times 3} = 125x^6$$

$$۳۳) \left(\frac{۲}{۳}\right)^۳ = \frac{۲^۳}{۳^۳} = \frac{۸}{۲۷}$$

$$۳۴) \left(\frac{۳p^۴}{q^۵}\right)^۲ = \frac{(۳p^۴)^۲}{(q^۵)^۲} = \frac{۳^۲(p^۴)^۲}{(q^۵)^۲} = \frac{۹p^۸}{q^{۱۰}}$$

$$۳۵) \left(\frac{۲^{-۳}}{y}\right)^{-۲} = \frac{(۲^{-۳})^{-۲}}{y^{-۲}} = \frac{۲^۶}{y^{-۲}} = ۶۴y^۲$$

$$۳۶) (x^{-۵}y^۲z^{-۱})^۷ = (x^{-۵})^۷ (y^۲)^۷ (z^{-۱})^۷ = x^{-۳۵}y^{۱۴}z^{-۷} = \frac{y^{۱۴}}{x^{۳۵}z^۷}$$

خلاصه قوانین توان ها Summary of Rules for Exponents

اگر a و b اعداد حقیقی باشند و m و n اعداد صحیح باشند

خواهیم داشت

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^0 = ۱ \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad b \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad a \neq 0$$

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

مثال _ ساده کنید. پاسخ ها را فقط با توان های مثبت بنویسید.

$$۳۷) \quad (2x^0y^{-2})^{-2} = 2^{-2}(x^0)^{-2}(y^{-2})^{-2} = 2^{-2}x^0y^4 = \frac{1(y^4)}{2^2} = \frac{y^4}{4}$$

$$۳۸) \quad \left(\frac{x^{-5}}{x^{-2}}\right)^{-2} = \frac{(x^{-5})^{-2}}{(x^{-2})^{-2}} = \frac{x^{10}}{x^4} = x^{10-4} = x^6$$

$$۳۹) \quad \frac{5^{-2}x^{-3}y^{11}}{x^2y^{-5}} = (5^{-2})\left(\frac{x^{-3}}{x^2}\right)\left(\frac{y^{11}}{y^{-5}}\right) = 5^{-2}x^{-3-2}y^{11-(-5)} = 5^{-2}x^{-5}y^{16} = \frac{y^{16}}{5^2x^5} = \frac{y^{16}}{25x^5}$$

$$۴۰) \quad \left(\frac{3x^2y}{y^{-9}z}\right)^{-2} = \left(\frac{3x^2y^{10}}{z}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}x^{-4}y^{20}}{z^{-2}} = \frac{z^2}{3^2x^4y^{20}} = \frac{z^2}{9x^4y^{20}}$$

$$۴۱) \quad \left(\frac{3a^2}{2x^{-1}}\right)^2 \left(\frac{x^{-2}}{4a^{-2}}\right)^{-1} = \frac{2^2a^4}{8x^{-2}} \times \frac{x^2}{4^{-1}a^2} = \frac{2^2 \times 4^1 a^4 x^2 x^2}{8a^2} = \frac{2^2 a^4 x^4}{2}$$

عدد نویسی علمی یا اعداد با نماد علمی Scientific Notation

یک عدد مثبت با نماد علمی نوشته می شود اگر آن عدد به صورت حاصل ضرب یک عدد مانند a ، $1 \leq a < 10$ ،

و عدد ده به توان صحیح n نوشته شود. یعنی $a \times 10^n$ مثال

$$2/03 \times 10^2 \quad 7/362 \times 10^7 \quad 8/1 \times 10^{-5}$$

توجه داشته باشید که اعداد اعشاری بالا به ترتیب از چپ به راست - دو و سه صدم ، هفت و سی صد و شصت و دو هزارم ، هشت و یک دهم هستند. به خاطر دارید که گفتیم نماد / نماد اعشاری است .

قاعده نوشتن اعداد با نماد علمی :

الف - نماد اعشاری در عدد اصلی جا بجا کنید تا عدد بدست آمده عددی باشد بین ۱ و ۱۰

ب - تعداد ارقام اعشاری Decimal Places که جا بجا کرده بشمارید. اگر نماد اعشاری به سمت چپ حرکت داده‌اید ، تعداد مثبت است. اگر نماد اعشاری به سمت راست حرکت داده‌اید ، تعداد منفی است.

ج - عددی که در قدم اول بدست آورده اید ضرب در ده به توان عددی که در قدم دوم بدست آورده اید، نماد علمی عدد اصلی است.

مثال ۴۲ - عدد $۷۳۰,۰۰۰$ را به صورت علمی بنویسید.

حل

الف - نماد اعشاری را حرکت می دهیم تا عدد بدست آمده بین ۱ و ۱۰ باشد

$$۷ / ۳۰۰۰۰$$

ب - نماد اعشاری را پنج رقم به طرف چپ حرکت داده ایم. پس رقم بدست آمده پنج مثبت است .

$$۷۳۰,۰۰۰ = ۷ / ۳ \times ۱۰^۵$$

مثال ۴۳ - عدد $۰/۰۰۰۰۰۰۱۰۴$ را با نماد علمی بنویسید.

حل

الف - نماد اعشاری را حرکت می دهیم تا عدد بدست آمده بین ۱ و ۱۰ باشد

$$۰۰۰۰۰۰۱ / ۰۴$$

ب - نماد اعشاری را شش رقم به راست حرکت داده ایم. پس رقم بدست آمده شش منفی است.

$$۰/۰۰۰۰۰۰۱۰۴ = ۱ / ۰۴ \times ۱۰^{-۶}$$

نوشتن نماد علمی به شکل استاندارد

نماد اعشاری را به تعداد توان عدد ده تغییر مکان دهید. اگر توان مثبت است، نماد اعشاری را به طرف راست حرکت دهید. اگر توان منفی است، نماد اعشاری را به سمت چپ حرکت دهید.

مثال

$$۴۴) \quad ۷ / ۷ \times ۱۰^۸ = ۷۷۰,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۴۵) \quad ۱ / ۰۲۵ \times ۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۱۰۲۵$$

محاسبه اعداد با نماد علمی

برای انجام عملیات روی اعدادی که با نماد علمی نوشته شده اند ، از خواص توان ها استفاده می کنیم. مثال

$$\begin{aligned} 46) \quad (8/1 \times 10^5)(5 \times 10^{-7}) &= 8/1 \times 5 \times 10^5 \times 10^{-7} = 40/5 \times 10^{-2} \\ &= (40/5 \times 10^1) \times 10^{-2} = 40/5 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 47) \quad \frac{1/2 \times 10^4}{3 \times 10^{-2}} &= \left(\frac{1/2}{3}\right) \left(\frac{10^4}{10^{-2}}\right) = 0/4 \times 10^{4-(-2)} = 0/4 \times 10^6 = (4 \times 10^{-1}) \times 10^6 \\ &= 4 \times 10^5 \end{aligned}$$

تمرینات ۱.۵

عبارت های زیر را ساده کنید. پاسخ ها را با توان های مثبت بنویسید.

$$1) \quad x^x x^y$$

$$2) \quad y^x y^{-y}$$

$$3) \quad \frac{x^9}{x^5}$$

$$4) \quad (b^x)^5$$

$$5) \quad (3x)^2$$

$$۶) \left(\frac{x}{۲}\right)^۵$$

$$۷) (۲a^۳b^۲)(۳ab^۴)^۳$$

$$۸) \left(\frac{x}{y}\right)^۳ \left(\frac{y^۲x}{z}\right)^۴$$

$$۹) \frac{۶st^{-۴}}{۲s^{-۲}t^۲}$$

$$۱۰) \left(\frac{y}{۳z^۳}\right)^{-۲}$$

$$۱۱) (-۴x^۳p^۲)(۴y^۳x^۳)$$

$$۱۲) -۸^{\circ}$$

$$۱۳) (-۹)^{\circ}$$

$$۱۴) (۴x + ۵)^{\circ}$$

$$۱۵) (\Delta x)^{\circ} + \Delta x^{\circ}$$

$$۱۶) ۳^{\circ} - ۳t^{\circ}$$

$$۱۷) \frac{x^9 y^6}{x^8 y^6}$$

$$۱۸) \frac{-۳۶a^{\Delta}b^{\nabla}c^{1^{\circ}}}{۶ab^{\nabla}c^{\nabla}}$$

$$۱۹) \frac{x^{-9}x^{\nabla}}{x^{-\Delta}}$$

$$۲۰) ۴^{-1} + ۳^{-۲}$$

$$۲۱) \frac{y^{-۳}}{y^{-۷}}$$

$$۲۲) \frac{x^{-۷}y^{-۲}}{x^{\nabla}y^{\nabla}}$$

$$۲۳) \frac{۲a^{-۶}b^{\nabla}}{۱^{\Delta}ab^{-\Delta}}$$

$$۲۴) \frac{(24x^8)(x)}{2 \circ x^{-7}}$$

$$۲۵) \frac{x^{3t}x^{4t-1}}{x^t}$$

اعداد زیر را با نماد علمی بنویسید.

$$۲۶) \quad ۲۵,۳۱۰,۰۰۰$$

$$۲۷) \quad ۰/۰۱۶$$

$$۲۸) \quad ۶۷,۴۱۳$$

$$۲۹) \quad ۰/۰۱۲۵$$

$$۳۰) \quad ۰/۰۰۰۰۵۳$$

اعداد زیر را به صورت استاندارد بنویسید.

$$۳۱) \quad ۳/۶ \times ۱۰^{-9}$$

$$۳۲) \quad ۹/۳ \times ۱۰^7$$

$$۳۳) \quad ۱ / ۲۷۸ \times ۱۰^۶$$

$$۳۴) \quad ۷ / ۳۵ \times ۱۰^{۱۲}$$

$$۳۵) \quad ۴ / ۰.۳ \times ۱۰^{-۷}$$

ساده کنید. پاسخ ها را با توان مثبت بنویسید.

$$۳۶) \quad (۳^{-۱})^۲$$

$$۳۷) \quad (x^۴)^{-۹}$$

$$۳۸) \quad (۳x^۲y^۳)^۲$$

$$۳۹) \quad \left(\frac{۲x^۵}{y^{-۳}}\right)^۴$$

$$۴۰) \quad (a^۲bc^{-۳})^{-۶}$$

$$۴۱) \left(\frac{x^y y^{-3}}{z^{-4}} \right)^{-5}$$

$$۴۲) \left(-2^{-2} y \right)^3$$

$$۴۳) \left(\frac{4^{-4}}{y^3 x} \right)^{-2}$$

$$۴۴) \left(\frac{2a^{-2} b^5}{4a^3 b^4} \right)^{-2}$$

$$۴۵) \left(-8y^3 x a^{-2} \right)^{-3}$$

$$۴۶) \left(4x^6 y^5 \right)^{-2} \left(6x^4 y^3 \right)$$

$$۴۷) \left(\frac{2x^2}{y^4} \right)^3 \left(\frac{2x^5}{y} \right)^{-2}$$

ساده کنید. فرض کنید که متغیر ها در توان ها اعداد صحیح غیر منفی هستند و بقیه متغیر ها نیز صفر نیستند.

$$۴۸) \quad (x^{ra+r})^r$$

$$۴۹) \quad \frac{x^ra(x^ra)^r}{x^{ra-r}}$$

$$۵۰) \quad \left(\frac{rx^{rt}}{x^{rt-1}} \right)^r$$

پاسخ تمرینات ۱.۵

عبارت های زیر را ساده کنید. پاسخ ها را با توان های مثبت بنویسید.

$$۱) \quad x^rx^r = x^{r+r} = x^{11}$$

$$۲) \quad y^ry^{-r} = y^{r+(-r)} = y^{-r} = \frac{1}{y^r}$$

$$۳) \quad \frac{x^9}{x^5} = x^{9-5} = x^4$$

$$۴) \quad (b^r)^5 = b^{r \times 5} = b^{r0}$$

$$۵) \quad (3x)^r = 3^rx^r = 27x^r$$

$$۶) \quad \left(\frac{x}{۲}\right)^{\Delta} = \frac{x^{\Delta}}{۲^{\Delta}} = \frac{x^{\Delta}}{۳۲}$$

$$\begin{aligned} ۷) \quad (۲a^r b^r)(r ab^r)^r &= (۲a^r b^r) \left[r^r a^r (b^r)^r \right] = (۲a^r b^r) [۲^r a^r b^{rr}] \\ &= (۲)(۲^r)(a^r)(a^r)(b^r)(b^{rr}) = \Delta^r a^r b^{rr} \end{aligned}$$

$$۸) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r \left(\frac{y^r x}{z}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \times \frac{(y^r)^r x^r}{z^r} = (x^r x^r) \left(\frac{y^r}{y^r}\right) \left(\frac{1}{z^r}\right) = \frac{x^r y^{\Delta}}{z^r}$$

$$۹) \quad \frac{rst^{-r}}{rs^{-r}t^r} = \frac{rs^1s^r}{rt^rt^r} = \frac{rs^r}{t^r}$$

$$۱۰) \quad \left(\frac{y}{rz^r}\right)^{-r} = \frac{y^{-r}}{r^{-r}z^{-r}} = \frac{r^r z^r}{y^r} = \frac{rz^r}{y^r}$$

$$۱۱) \quad (-^r x^r p^r)(^r y^r x^r) = (-^r)(^r)(x^r)(x^r)(p^r)(y^r) = -1^r x^r p^r y^r$$

$$۱۲) \quad -\infty^{\circ} = -1$$

$$۱۳) \quad (-9)^{\circ} = 1$$

$$۱۴) (۴x + ۵)^{\circ} = ۱$$

$$۱۵) (۵x)^{\circ} + ۵x^{\circ} = ۱ + ۵(۱) = ۶$$

$$۱۶) ۳^{\circ} - ۳t^{\circ} = ۱ - ۳(۱) = ۱ - ۳ = -۲$$

$$۱۷) \frac{x^9 y^6}{x^8 y^6} = x^{9-8} y^{6-6} = x^1 y^0 = x$$

$$۱۸) \frac{-۳۶a^5 b^4 c^1}{۶ab^3 c^6} = -۶a^5 a^{-1} b^4 b^{-3} c^1 c^{-6} = -۶a^4 b^1 c^{-5}$$

$$۱۹) \frac{x^{-9} x^4}{x^{-5}} = \frac{x^{-9+4}}{x^{-5}} = \frac{x^{-5}}{x^{-5}} = x^{-5-(-5)} = x^{-5+5} = x^0 = ۱$$

$$۲۰) ۴^{-1} + ۳^{-2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{1(9)}{4(9)} + \frac{1(4)}{9(4)} = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$$

$$۲۱) \frac{y^{-3}}{y^{-7}} = y^{-3-(-7)} = y^{-3+7} = y^4$$

$$۲۲) \frac{x^{-۷}y^{-۲}}{x^۲y^۲} = (x^{-۷})(x^{-۲})(y^{-۲})(y^{-۲}) = x^{-۹}y^{-۴} = \frac{1}{x^۹y^۴}$$

$$۲۳) \frac{۲a^{-۶}b^۲}{۱۸ab^{-۵}} = \frac{1}{۹}a^{-۶}a^{-۱}b^۲b^۵ = \frac{1}{۹}a^{-۷}b^۷ = \frac{b^۷}{۹a^۷}$$

$$۲۴) \frac{(۲۴x^۸)(x)}{۲ \circ x^{-۷}} = \frac{۶x^۹}{۵x^{-۷}} = \frac{۶}{۵}x^{۹-(-۷)} = \frac{۶}{۵}x^{۹+۷} = \frac{۶x^{۱۶}}{۵}$$

$$۲۵) \frac{x^۳t x^۴t-۱}{x^t} = \frac{x^۳t+(۴t-۱)}{x^t} = \frac{x^{۷t-۱}}{x^t} = x^{۷t-۱-t} = x^{۶t-۱}$$

اعداد زیر را با نماد علمی بنویسید.

$$۲۶) \quad ۲۵,۳۱۰,۰۰۰ = ۲ / ۵۳۱ \times ۱۰^۷$$

$$۲۷) \quad ۰/۰۱۶ = ۱ / ۶ \times ۱۰^{-۲}$$

$$۲۸) \quad ۶۷,۴۱۳ = ۶ / ۷۴۱۳ \times ۱۰^۴$$

$$۲۹) \quad ۰/۰۱۲۵ = ۱ / ۲۵ \times ۱۰^{-۲}$$

$$۳۰) \quad ۰/۰۰۰۰۵۳ = ۵ / ۳ \times ۱۰^{-۵}$$

اعداد زیر را به صورت استاندارد بنویسید.

$$۳۱) \quad ۳/۶ \times ۱۰^{-۹} = ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰ ۳۶$$

$$۳۲) \quad ۹/۳ \times ۱۰^۷ = ۹۳,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۳۳) \quad ۱/۲۷۸ \times ۱۰^۶ = ۱,۲۷۸,۰۰۰$$

$$۳۴) \quad ۷/۳۵ \times ۱۰^{۱۲} = ۷,۳۵۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۳۵) \quad ۴/۰۳ \times ۱۰^{-۷} = ۰/۰۰۰۰۰۰ ۴۰۳$$

ساده کنید. پاسخ ها را با توان مثبت بنویسید.

$$۳۶) \quad (۳^{-۱})^۲ = ۳^{-۲} = \frac{۱}{۳^۲} = \frac{۱}{۹}$$

$$۳۷) \quad (x^۴)^{-۹} = x^{-۳۶} = \frac{۱}{x^{۳۶}}$$

$$۳۸) \quad (۳x^۲y^۳)^۲ = ۳^۲x^{۲ \times ۲}y^{۳ \times ۲} = ۹x^۴y^۶$$

$$۳۹) \left(\frac{۲x^۵}{y^{-۳}} \right)^۴ \frac{۲^۴ x^{۵ \times ۴}}{y^{-۳ \times ۴}} = \frac{۱۶ x^{۲۰}}{y^{-۱۲}} = ۱۶ x^{۲۰} y^{۱۲}$$

$$۴۰) (a^۲ bc^{-۳})^{-۶} = (a^۲)^{-۶} (b^۱)^{-۶} (c^{-۳})^{-۶} = a^{-۱۲} b^{-۶} c^{۱۸} = \frac{c^{۱۸}}{a^{۱۲} b^۶}$$

$$۴۱) \left(\frac{x^۷ y^{-۳}}{z^{-۴}} \right)^{-۵} = \frac{(x^۷)^{-۵} (y^{-۳})^{-۵}}{(z^{-۴})^{-۵}} = \frac{x^{-۳۵} y^{۱۵}}{z^{۲۰}} = \frac{y^{۱۵}}{x^{۳۵} z^{۲۰}}$$

$$۴۲) (-۲^{-۲} y)^۳ = (-۲^{-۲})^۳ y^۳ = \frac{y^۳}{(-۲^۲)^۳} = \frac{y^۳}{(-۴)^۳} = \frac{y^۳}{-۶۴} = -\frac{y^۳}{۶۴}$$

$$۴۳) \left(\frac{۴^{-۴}}{y^۳ x} \right)^{-۲} = \left(\frac{y^۳ x}{۴^{-۴}} \right)^۲ = (۴^۴ xy^۳)^۲ = (۴^۴)^۲ x^۲ (y^۳)^۲ = ۴^۸ x^۲ y^۶$$

$$۴۴) \left(\frac{۲a^{-۲} b^۵}{۴a^۲ b^۷} \right)^{-۲} = \left(\frac{۴a^۲ b^۷}{۲a^{-۲} b^۵} \right)^۲ = \left(\frac{۲a^۴ a^۲ b^۷}{b^۵} \right)^۲ = (۲a^۶ b^۲)^۲ = ۴a^{۱۲} b^۴$$

$$۴۵) (-۸y^۳ xa^{-۲})^{-۳} = (-۸)^{-۳} (y^۳)^{-۳} x^{-۳} (a^{-۲})^{-۳} = -۸^{-۳} y^{-۹} x^{-۳} a^۶ = \frac{a^۶}{-۵۱۲ y^۹ x^۳}$$

$$= -\frac{a^۶}{۵۱۲ x^۳ y^۹}$$

$$\begin{aligned}
 ۴۶) \quad (x^r y^s)^{-r} (x^r y^r) &= (x^{-r} x^{-1r} y^{-1s}) (x^r y^r) = \frac{x^r y^r}{x^{1r} y^{1s}} = \frac{r}{s} x^{r-1r} y^{r-1s} = \frac{r}{s} x^{-r} y^{-r} \\
 &= \frac{r}{s x^r y^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴۷) \quad \left(\frac{r x^r}{y^r}\right)^r \left(\frac{r x^s}{y}\right)^{-r} &= \frac{r^r (x^r)^r}{(y^r)^r} \left(\frac{r x^s}{y}\right)^{-r} = \frac{s x^r}{y^{1r}} \times \left(\frac{y}{r x^s}\right)^r = \frac{s x^r}{y^{1r}} \times \frac{y^r}{r^r (x^s)^r} \\
 &= \frac{s x^r y^r}{r x^{1s} y^{1r}} = r x^{r-1s} y^{r-1r} = r x^{-r} y^{-1s} = \frac{r}{x^r y^{1s}}
 \end{aligned}$$

ساده کنید. فرض کنید که متغیر ها در توان ها اعداد صحیح غیر منفی هستند و بقیه متغیر ها نیز صفر نیستند.

$$۴۸) \quad (x^{ra+r})^r = x^{(ra+r)(r)} = x^{ra+1r}$$

$$۴۹) \quad \frac{x^ra (x^ra)^r}{x^{ra-r}} = \frac{x^ra x^{1ra}}{x^{ra-r}} = \frac{x^{1ra}}{x^{ra-r}} = x^{1ra-(ra-r)} = x^{1ra-ra+r} = x^{1ra+r}$$

$$۵۰) \quad \left(\frac{r x^{rt}}{x^{rt-1}}\right)^r = \frac{r^r (x^{rt})^r}{(x^{rt-1})^r} = \frac{1r x^{1rt}}{x^{(rt-1)r}} = \frac{1r x^{1rt}}{x^{rt-r}} = 1r x^{1rt-(rt-r)} = 1r x^{rt+r}$$