فصل دهم

توابع چند جمله ای و گویا

Polynomial and Rational Function

۱۰.۱

موارد استفاده توابع درجه دوم Applications of Quadratic Functions

در فصل های شش و هفت در مورد توابع درجه دوم و رسم نمودار آنها مفصلا صحبت کردیم. در عمل ، توابع درجه دوم مورد استفاده زیادی دارند ، که اینجا به تعدادی از آنها می پردازیم.

مثال ۱ - پیدا کردن مقدار حد اقل و حد اکثر

مشخص کنید که آیا تابع زیر مقدار حد اکثر و یا حد اقل دارد ، آنرا پیدا کنید.

$$f(x) = x^{۲} - ۴x + ۷$$

پاسخ –تابع داده شده بالا را با $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ مقایسه می کنیم. نتیجه می گیریم

$$a = ۱, b = -۴, c = ۷$$

چون $a > ۰$ است پس نمودار این تابع به طرف بالا باز می شود و در نتیجه یک نقطه حد اقلی دارد. پس

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۴)}{۲(۱)} = ۲$$

این مقدار حد اقل در $x = ۲$ اتفاق می افتد و مقدار آن

$$f\left(\frac{-b}{۲a}\right) = f(۲) = ۲^{۲} - ۴(۲) + ۷ = ۳$$

مثال ۲ – شرکت تولید کننده یک نوع ماشین حساب به این نتیجه رسیده است که اگر هر یک از ماشین حساب ها را به قیمت p دلار بفروشد، در آمد R بر حسب دلار ، تابعی از قیمت p است .یعنی

$$R(p) = -۱۵۰p^{۲} + ۲۱۰۰۰p$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

معین کنید هر ماشین حساب با چه قیمتی به بازار عرضه شود تا در آمد شرکت به حد اکثر ممکن برسد. اگر این قیمت برای هر ماشین حساب در نظر گرفته شود ، حد اکثر درامد چه مبلغی خواهد بود؟

پاسخ در آمد R مطابق تابع زیر است.

$$R(p) = -۱۵۰\,p^{۲} + ۲۱\,۰۰۰$$

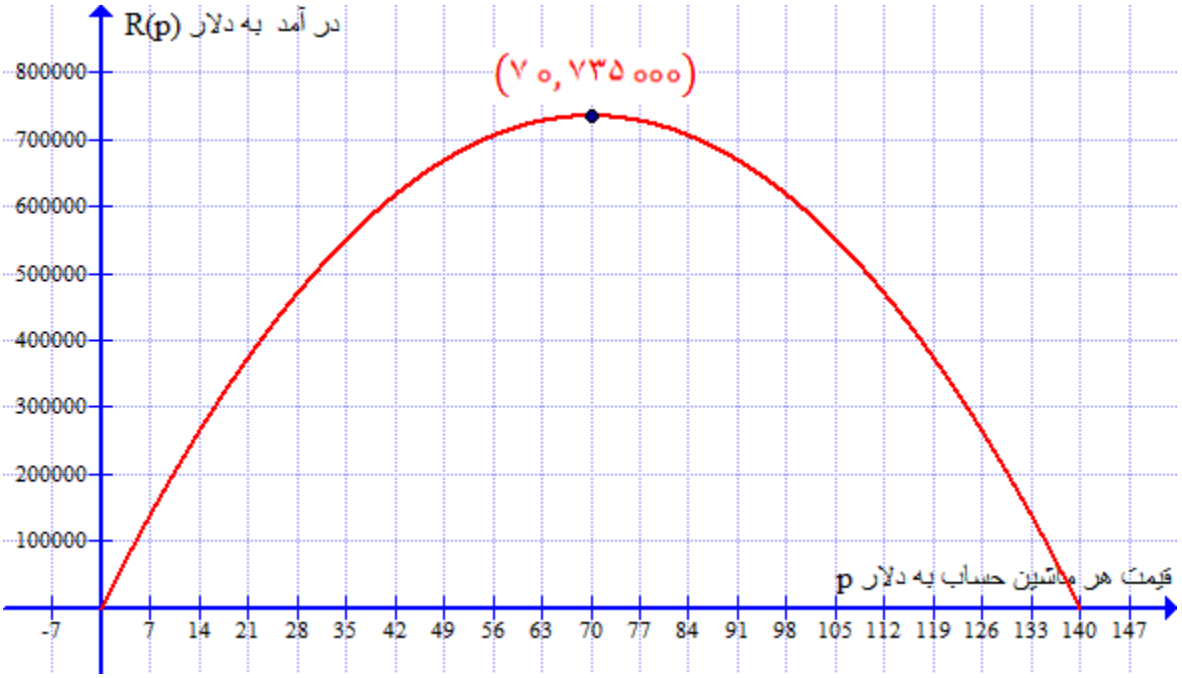
این تابع یک تابع درجه دوم است با $a = -۱۵۰, b = ۲۱\,۰۰۰, c = ۰$

چون $a < ۰$ پس راس بالا ترین نقطه سهمی است. بنا بر این در آمد به حد اکثر ممکن می رسد اگر قیمت p

$$p = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲۱\,۰۰۰}{۲(-۱۵۰)} = \frac{۲۱\,۰۰۰}{۳۰۰} = ۷۰$$

یعنی هر ماشین حساب باید به قیمت ۷۰ دلار به فروش برسد. و حد اکثر درامد ممکن

$$R(۷۰) = -۱۵۰\,(۷۰)^{۲} + ۲۱\,۰۰۰\,(۷۰) = ۷۳۵\,۰۰۰ \text{ دلار}$$



مثال ۳–

یک کشاورز ۲۰۰۰ متر نرده دارد و می خواهد اطراف یک مزرعه مستطیل شکل حفظ بکشد. ابعاد این مستطیل چه اندازه باشد تا حد اکثر مساحت را حصار کند؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

این ۲۰۰۰ متر نرده یعنی محیط مستطیل ۲۰۰۰ متر است. v می دانیم

دو برابر عرض + دو برابر طول = محیط مستطیل

$$P = ۲l + ۲w \qquad (۱)$$

عرض × طول = مساحت مستطیل

$$A = lw$$

برای اینکه A را بر حسب یک متغیر بنویسیم ، معادله (۱) را برای w حل می کنیم و حاصل را در معادله $A = lw$ می گذاریم.

$$P = ۲l + ۲w$$

$$۲۰۰۰ = ۲l + ۲w$$

$$۲w = ۲۰۰۰ - ۲l$$

$$w = \frac{۲۰۰۰ - ۲l}{۲} = ۱۰۰۰ - l$$

و در نهایت

$$A = l(۱۰۰۰ - l) = -l^۲ + ۱۰۰۰\, l$$

حالا یک تابع درجه دوم داریم بر حسب l

چون $a = -۱ < ۰$ پس راس نقطه حد اکثری است و حد اکثر در

$$l = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۰۰۰}{۲(-۱)} = ۵۰۰$$

پس $l = ۵۰۰$ باید باشد تا بتون با آن مقدار نرده حد اکثر مساحت را حصار کرد. و حد اکثر مساحتی که حصار می شود

$$A\left(\frac{-b}{۲a}\right) = A(۵۰۰) = -۵۰۰^۲ + ۱۰۰۰(۵۰۰) = -۲۵۰۰۰۰ + ۵۰۰۰۰۰ = ۲۵۰۰۰۰ \text{ متر مربع}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

حد اکثر مساحتی را که می توان با ۲۰۰۰ متر نرده محصور کرد ۲۵۰۰۰۰ متر مربع است. در حقیقت زمین مورد نظر یک مربع است به ابعاد ۵۰۰ متر

مثال ۴–

تجزیه و تحلیل حرکت یک موشک Analyzing the Motion of a Projectile

یک موشک از فراز یک صخره کناردریا که تا سطح آب ۵۰۰ فوت ارتفاع دارد با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق و سرعت ۴۰۰ فوت در ثانیه پرتاب می شود. در فیزیک ، ارتفاع موشک تا سطح آب طبق فرمول زیر است.

$$h(x) = \frac{-۳۲x^{۲}}{(۴۰۰)^{۲}} + x + ۵۰۰$$

در فرمول بالا x فاصله افقی موشک است تا قاعده تپه

الف –حد اکثر ارتفاع موشک را حساب کنید.

ب –هنگامی که موشک به آب بر خورد می کند ، تا قاعده تپه چه قدر فاصله دارد ؟

پاسخ

الف –ارتفاع موشک بر اساس تابع درجه دوم زیر است.

$$h(x) = \frac{-۳۲x^{۲}}{(۴۰۰)^{۲}} + x + ۵۰۰ = \frac{-۱}{۵۰۰۰}x^{۲} + x + ۵۰۰$$

می خواهیم حد اکثر ارتفاع موشک را پیدا کنیم. چون مقدار حد اکثر در راس سهمی است پس

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱}{۲\left(\frac{-۱}{۵۰۰۰}\right)} = \frac{۵۰۰۰}{۲} = ۲۵۰۰$$

حد اکثر ارتفاع موشک مطابق زیر است.

$$h(۲۵۰۰) = \frac{-۱}{۵۰۰۰}(۲۵۰۰)^{۲} + ۲۵۰۰ + ۵۰۰ = -۱۲۵۰ + ۲۵۰۰ + ۵۰۰ = ۱۷۵۰ \text{ فوت}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب – هنگامی که موشک به آب بر خورد می کند ، ارتفاع آن نسبت به سطح آب صفر است. یعنی $h(x)=۰$ پس باید معادله زیر را حل کنیم.

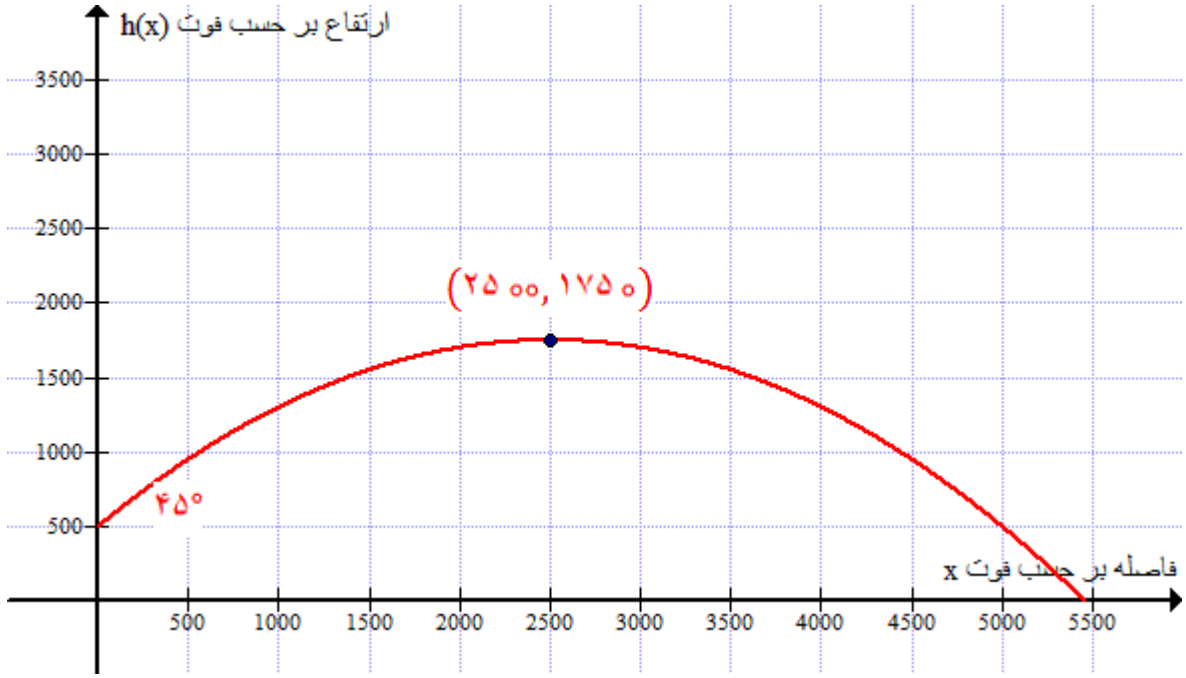
$$\frac{-۱}{۵\,۰۰۰}x^{۲}+x+۵\,۰۰=۰$$

برای حل معادله بالا از فرمول درجه دوم استفاده می کنیم.

$$b^{۲}-۴ac=۱-۴\left(\frac{-۱}{۵\,۰۰۰}\right)(۵\,۰۰)=۱/۴$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}=\frac{-۱\pm\sqrt{۱/۴}}{\frac{-۲}{۵\,۰۰۰}}\approx\begin{cases}-۴۵۸\\ ۵۴۵۸\end{cases}$$

پاسخ منفی را کنار می گذاریم. پس موشک در فاصله ۵۴۵۸ فوتی تا پایه صخره به سطح آب بر خورد می کند.



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات – ۱۰.۱

راهنمایی – یک تابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ با $b^۲ - ۴ac > ۰$ را هم می توان به صورت $f(x) = a(x - r_۱)(x - r_۲)$ نوشت. اینجا $r_۲$ و $r_۱$ محل تلاقی نمودار تابع با محور x ها است.

۱ – یک تابع درجه دوم پیدا کنید که محل تلاقی نمودار آن با محور x ها ۱ و ۳– باشد و $a = ۱ : a = -۲ : a = ۵$

الف – مقدار a چه تاثیری روی محل تلاقی نمودار با محور x ها دارد؟

ب – مقدار a چه تاثیری روی محور تقارن دارد؟

ج – مقدار a چه تاثیری روی راس دارد؟

۲ – فرض کنید تولید کننده یک نوع ماشین لباس شویی ، متوجه شد که اگر قیمت هر دستگاه ماشین لباس شویی p دلار باشد،مقدار درامد بر حسب دلار بر اساس تابع زیر بدست می آید.

$$R(p) = -۴p^۲ + ۴\,۰۰۰\,p$$

هر دستگاه را باید به چه قیمتی فروخت تا حد اکثر در آمد حاصل شود؟ حد اکثر در آمد چه مبلغ خواهد بود؟

۳ – قیمت p و فروش x تابع معادله زیر است.

$$p = -\frac{۱}{۶}x + ۱\,۰۰ \qquad ۰ \le x \le ۶\,۰۰$$

یعنی قیمت هر محصول تابع تعداد فروش آن محصول است. اگر تعداد فروش بیشتر شود ، قیمت پایین می آید و اگر قیمت بالا رود ، فروش پایین می آید.

الف –در آمد را به صورت تابعی از تعداد فروش ، بنویسید.

ب –اگر تعداد ۲۰۰ واحد از محصول به فروش برسد ، در آمد چه مقدار است؟

ج –چه تعداد از فروش یک محصول ، بیشترین در آمد را تولید می کند؟ این بیشترین در آمد چه مقدار است؟

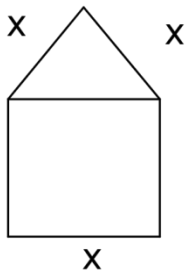
د –شرکت چه مبلغی را برای هر واحد از محصول باید تقاضا کند ، تا حد اکثر در آمد داشته باشد؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴ – یک مساله چلشی

یک پنجره مخصوص ، به شکل مربع مستطیل است که در بالای آن یک مثلث متساوی اضلاع قرار دارد. (مطابق شکل زیر) اگر محیط پنجره ۱۶ فوت باشد ، چه ابعادی این پنجره باید داشته باشد تا بیشترین نور ممکن از آن عبور کند؟

راهنمایی –مساحت مثلث متساوی الاضلاع $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)x^{۲}$ است. اینجا x یک ضلع مثلث است.



۵ – جدول زیر تعداد افراد مبتلا به ایدز در آمریکا از سال ۱۹۸۲ تا ۱۹۹۳ را نشان می دهد.

سال	افراد مبتلا به ایدز
۱۹۸۲	۱۵۶۳
۱۹۸۳	۴۶۴۷
۱۹۸۴	۱۰۸۴۵
۱۹۸۵	۲۲۶۲۰
۱۹۸۶	۴۱۶۶۲
۱۹۸۷	۷۰۲۲۲
۱۹۸۸	۱۰۵۴۸۹
۱۹۸۹	۱۴۷۱۷۰
۱۹۹۰	۱۹۳۲۴۵
۱۹۹۱	۲۴۸۰۲۳
۱۹۹۲	۳۱۵۳۲۹
۱۹۹۳	۳۶۱۵۰۹

الف –این اطلاعات را روی صفحه مختصات نقطه گذاری کنید. فرض کنید $x = ۰$ مربوط می شود به سال ۱۹۸۰

ب –آیا یک تابع خطی مناسب این اطلاعات است و یا یک تابع درجه دوم؟ توضیح دهید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –یک تابع درجه دوم برای این اطلاعات بنویسید.

د –نمودار تابعی را که در قسمت ج پیدا کردید ، روی همان صفحه مختصات در قسمت الف رسم کنید، آیا این نمودار با نمودار قسمت الف هم آهنگ است؟

ه –با استفاده از تابع بدست انده در قسمت ج پیش بینی کنید در سال های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۰ چه تعدادی مبتلا به ایدز خواهند بود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۰.۱

راهنمایی – یک تابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ با $b^۲ - ۴ac > ۰$ را هم می توان به صورت $f(x) = a(x - r_۱)(x - r_۲)$ نوشت. اینجا $r_۲$ و $r_۱$ محل تلاقی نمودار تابع با محور x ها است.

۱ – یک تابع درجه دوم پیدا کنید که محل تلاقی نمودار آن با محور x ها ۱ و ۳– باشد و $a = ۱: a = -۲: a = ۵$

الف – مقدار a چه تاثیری روی محل تلاقی نمودار با محور x ها دارد؟

ب – مقدار a چه تاثیری روی محور تقارن دارد؟

ج – مقدار a چه تاثیری روی راس دارد؟

پاسخ

$a = ۱: f(x) = (x - ۱)(x + ۳) = x^۲ + ۲x - ۳$

$a = -۲: f(x) = -۲(x - ۱)(x + ۳) = -۲x^۲ - ۴x + ۶$

$a = ۵: f(x) = ۵(x - ۱)(x + ۳) = ۵x^۲ + ۱۰x - ۱۵$

الف – مقدار a تاثیری روی محل تلاقی با محور x ها ندارد.

ب – مقدار a تاثیری رر محور تقارن ندارد. دردر هر سه مورد ، محور تقارن $x = -۱$ است.

ج - مقدار a تاثیری روی مختصات x راس ندارد ، اما مختصات y راس در a ضرب می شود.

۲ – فرض کنید تولید کننده یک نوع ماشین لباس شویی ، متوجه شد که اگر قیمت هر دستگاه ماشین لباس شویی p دلار باشد،مقدار درامد بر حسب دلار بر اساس تابع زیر بدست می آید.

$$R(p) = -۴p^۲ + ۴۰۰۰p$$

هر دستگاه را باید به چه قیمتی فروخت تا حد اکثر در آمد حاصل شود؟ حد اکثر در آمد چه مبلغ خواهد بود؟

پاسخ

$p = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴۰۰۰}{۲(-۴)} = \frac{۴۰۰۰}{۸} = ۵۰۰$ قیمت هر دستگاه بر حسب دلار

دانلود از سایت ریاضی سرا

درآمد بر حسب دلار $R(۵۰۰) = -۴(۵۰۰)^۲ + ۴۰۰۰(۵۰۰) = -۱۰۰۰۰۰۰ + ۲۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰$

۳ – قیمت p و فروش x تابع معادله زیر است.

$$p = -\frac{۱}{۶}x + ۱۰۰ \qquad ۰ \leq x \leq ۶۰۰$$

یعنی قیمت هر محصول تابع تعداد فروش آن محصول است. اگر تعداد فروش بیشتر شود ، قیمت پایین می آید و اگر قیمت بالا رود ، فروش پایین می آید.

الف –در آمد را به صورت تابعی از تعداد فروش ، بنویسید.

ب –اگر تعداد ۲۰۰ واحد از محصول به فروش برسد ، در آمد چه مقدار است؟

ج –چه تعداد از فروش یک محصول ، بیشترین در آمد را تولید می کند؟ این بیشترین در آمد چه مقدار است؟

د –شرکت چه مبلغی را برای هر واحد از محصول باید تقاضا کند ، تا حد اکثر در آمد داشته باشد؟

پاسخ

الف –طبق فرض مساله داریم

$$p = -\frac{۱}{۶}x + ۱۰۰ \qquad ۰ \leq x \leq ۶۰۰$$

می دانیم که در آمد از فروش یک محصول مساوی است با قیمت هر واحد از محصول ، ضرب در تعداد فروش آن محصول .یعنی

$$R = px$$

اینجا p قیمت هر واحد از محصول است و x تعداد فروش .پس

$$R(x) = px = x\left[\left(-\frac{۱}{۶}x\right) + ۱۰۰\right] = -\frac{۱}{۶}x^۲ + ۱۰۰x$$

ب –

$$R(۲۰۰) = -\frac{۱}{۶}(۲۰۰)^۲ + ۱۰۰(۲۰۰) = ۱۳۳۳۳$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۰۰}{-\frac{۲}{۶}} = \frac{۶۰۰}{۲} = ۳۰۰ \text{ عدد}$$

$$R(۳۰۰) = -\frac{۱}{۶}(۳۰۰)^{۲} + ۱۰۰(۳۰۰) = ۱۵۰۰۰ \text{ واحد پول}$$

د

در قسمت ج پیدا کردیم که اگر تعداد ۳۰۰ واحد از محصول به فروش برسد ، حد اکثر درآمد ممکن ۱۵۰۰۰ واحد پولی خواهد بود. یعنی $R = ۱۵۰۰۰$ و $x = ۳۰۰$ این دو مقدار را در فرمول $R = xp$ می گذاریم تا p یعنی قیمت هر واحد از محصول پیدا شود.

$$R = xp$$

$$۱۵۰۰۰ = ۳۰۰\,p$$

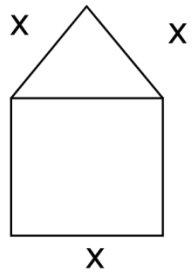
$$p = \frac{۱۵۰۰۰}{۳۰۰} = ۵۰ \text{ واحد پولی}$$

۴ – یک مساله چلشی

یک پنجره مخصوص ، به شکل مربع مستطیل است که در بالای آن یک مثلث متساوی اضلاع قرار دارد. (مطابق شکل زیر) اگر محیط پنجره ۱۶ فوت باشد ، چه ابعادی این پنجره باید داشته باشد تا بیشترین نور ممکن از آن عبور کند؟

راهنمایی –مساحت مثلث متساوی الاضلاع $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)x^{۲}$ است. اینجا x یک ضلع مثلث است.

دانلود از سایت ریاضی سرا



پاسخ

برای راحتی کار متقیر های زیر را فرض می کنیم.

ارتفاع مستطیل Height of Rectangular h_{Rec}

ارتفاع مثلث Height of Triangle h_{Tri}

کل ارتفاع Total Height h_{Total}

مساحت مستطیل Area of Rectangular A_{Rec}

مساحت مثلث Area of Tringle A_{Tri}

کل مساحت Total Area A_{Total}

محیط یا پیرامون Perimeter p

اینک حل مساله

بر اساس فرض مساله محیط پنجره ۱۶ فوت است ومطابق شکل داده شده داریم:

$$x + x + x + ۲h_{Rec} = ۱۶$$

$$۳x + ۲h_{Rec} = ۱۶$$

$$h_{Rec} = \frac{۱۶ - ۳x}{۲}$$

مساحت مستطیل را بدست می آوریم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$A_{Rec} = h_{Rec}(x) = x\left(\frac{۱۶ - ۳x}{۲}\right) = \frac{۱۶x - ۳x^{۲}}{۲}$$

بر اساس راهنمایی مساحت مثلث متساوی الاضلاع

$$A_{Tri} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}$$

مجموع مساحت مستطیل و مثلث که همان کل مساحت پنجره است بدست می آوریم.

$$A_{Total} = A_{Rec} + A_{Tri} = \frac{۱۶x - ۳x^{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲} = \frac{۳۲x - ۶x^{۲} + \sqrt{۳}\ x^{۲}}{۴} = ۸x + \left(\frac{-۶ + \sqrt{۳}}{۴}\right)x^{۲}$$

معادله بالا یک معادله درجه دوم است. ملاحظه می کنید که ضریب متغیر درجه دوم یک عدد منفی است یعنی

$$a = \left(\frac{-۶ + \sqrt{۳}}{۴}\right) = \frac{-۶}{۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۴} = -۱/۵ + ۰/۴۳ = -۱/۰۶۷ < ۰$$

پس نمودار سهمی به طرف پایین باز می شود و لذا حد اکثری خواهیم داشت. می دانیم که مختصات راس مطابق زیر است.

$$Vertex\left(\frac{-b}{۲a}, f\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)$$

در نتیجه

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۸}{۲\left(\frac{-۶ + \sqrt{۳}}{۴}\right)} = \frac{-۸}{\frac{-۶ + \sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-۱۶}{-۶ + \sqrt{۳}}$$

پس مقدار ضلع x را بدست آوردیم. حالا باید مقادیر ارتفاع مستطیل و ارتفاع مثلث را بدست آوریم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

قبلا ارتفاع مستطیل را بر حسب x بدست آوردیم. چون حالا مقدار x را هم بدست آورده ایم پس می توانیم مقدار ارتفاع مستطیل را بدست بیاوریم.

$$h_{Rec}=\frac{۱۶-۳x}{۲}=\frac{۱۶-۳\left(\frac{-۱۶}{-۶+\sqrt{۳}}\right)}{۲}=۸+\frac{\frac{۴۸}{-۶+\sqrt{۳}}}{۲}=۸+\frac{۲۴}{-۶+\sqrt{۳}}$$

می دانیم که مساحت مثلث مساوی است با نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع. یعنی

$$A_{Tri}=\frac{۱}{۲}xh_{Tri}$$

مساحت مثلث متساوی الاضلاع هم می دانیم .پس

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}\ x^{۲}=\frac{۱}{۲}xh_{Tri}$$

$$\sqrt{۳}\ x^{۲}=۲xh_{Tri}$$

$$h_{Tri}=\frac{\sqrt{۳}\ x^{۲}}{۲x}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}*\frac{-۱۶}{-۶+\sqrt{۳}}=\frac{-۸\sqrt{۳}}{-۶+\sqrt{۳}}$$

ارتفاع مستطیل را قبلا بدست آوردیم. حالا هر دو ارتفاع را با هم جمع می کنیم تا ارتفاع تمام پنجره بدست آید.

$$h_{Total}=h_{Rec}+h_{Tri}=۸+\frac{۲۴}{-۶+\sqrt{۳}}-\frac{۸\sqrt{۳}}{-۶+\sqrt{۳}}$$

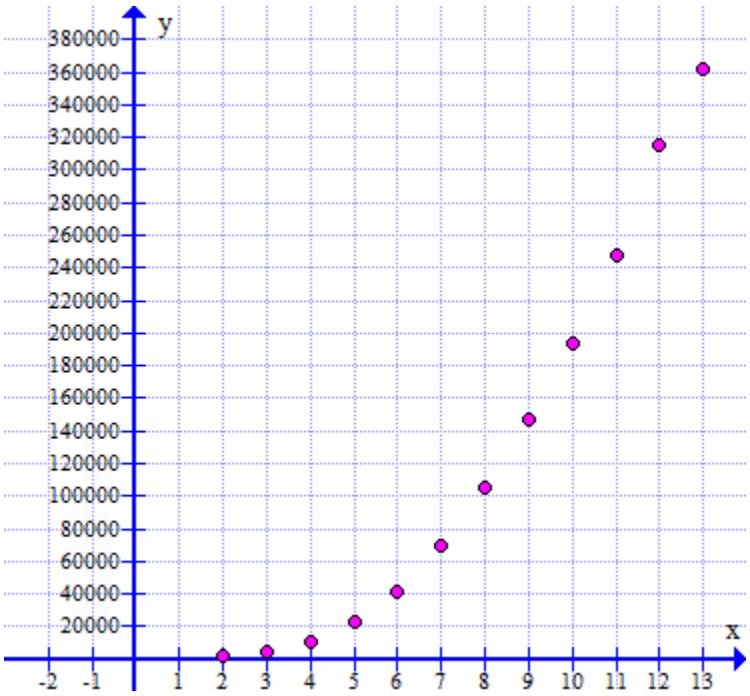
دانلود از سایت ریاضی سرا

۵ – جدول زیر تعداد افراد مبتلا به ایدز در آمریکا از سال ۱۹۸۲ تا ۱۹۹۳ را نشان می دهد.

افراد مبتلا به ایدز	سال
۱۵۶۳	۱۹۸۲
۴۶۴۷	۱۹۸۳
۱۰۸۴۵	۱۹۸۴
۲۲۶۲۰	۱۹۸۵
۴۱۶۶۲	۱۹۸۶
۷۰۲۲۲	۱۹۸۷
۱۰۵۴۸۹	۱۹۸۸
۱۴۷۱۷۰	۱۹۸۹
۱۹۳۲۴۵	۱۹۹۰
۲۴۸۰۲۳	۱۹۹۱
۳۱۵۳۲۹	۱۹۹۲
۳۶۱۵۰۹	۱۹۹۳

الف –این اطلاعات را روی صفحه مختصات نقطه گذاری کنید. فرض کنید $x = ۰$ مربوط می شود به سال ۱۹۸۰

پاسخ



دانلود از سایت ریاضی سرا

ب –آیا یک تابع خطی مناسب این اطلاعات است و یا یک تابع درجه دوم؟ توضیح دهید.

می توان دید که این نمودار ، خطی نیست بلکه نمودار قسمت سمت راست یک سهمی است که به طرف بالا باز می شود.

ج –یک تابع درجه دوم برای این اطلاعات بنویسید.

نمودار قسمت الف نشان می دهد که هر سال بر تعداد مبتلایان اضافه می شود و لذا کمترین تعداد مبتلا مربوط است به سال ۱۹۸۲ . پس این سال را راس قرار می دهیم. نقطه دیگری هم برای نوشتن تابع لازم داریم. اطلاعات مربوط به سال ۱۹۹۳ را هم نقطه دیگر قرار می دهیم. پس دو نقطه $(۲,۱۵۶۳)$ و $(۱۳,۳۶۱۵۰۹)$ را بکار می بریم.

شکل استاندارد تابع درجه دوم $f(x) = a(x-h)^۲ + k$ است. پس $h = ۲$ و $k = ۱۵۶۳$ است. تا اینجا داریم

$$f(x) = a(x-۲)^۲ + ۱۵۶۳$$

برای پیدا کردن a از $(۱۳,۳۶۱۵۰۹)$ استفاده می کنیم. مختصات این نقطه یعنی $f(۱۳) = ۳۶۱۵۰۹$ پس خواهیم داشت.

$$۳۶۱۵۰۹ = a(۱۳-۲)^۲ + ۱۵۶۳$$

$$۳۶۱۵۰۹ = ۱۲۱a + ۱۵۶۳$$

$$۱۲۱a = ۳۵۹۹۴۶$$

$$a = \frac{۳۵۹۹۴۶}{۱۲۱} = ۲۹۷۴.۷۶$$

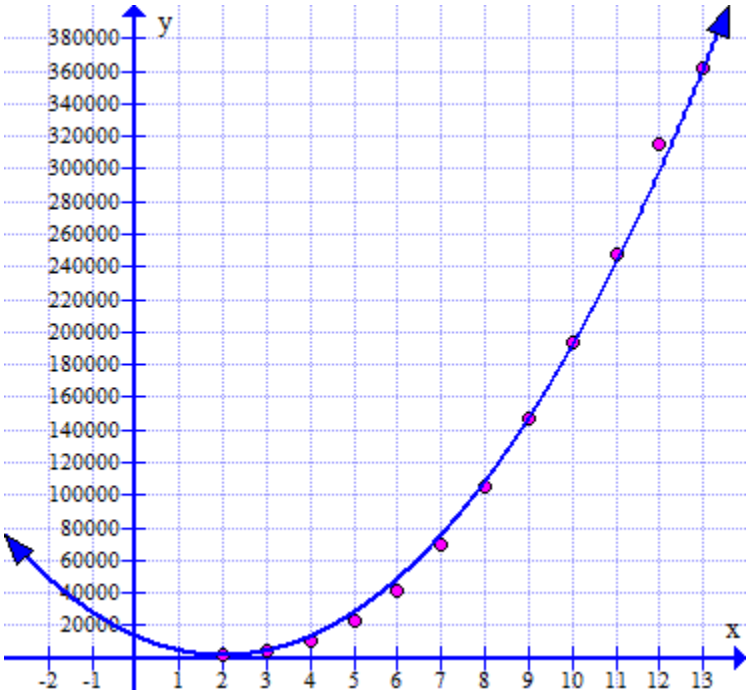
در نهایت

$$f(x) = ۲۹۷۴.۷۶(x-۲)^۲ + ۱۵۶۳$$

د –نمودار تابعی را که در قسمت ج پیدا کردید ، روی همان صفحه مختصات در قسمت الف رسم کنید، آیا این نمودار با نمودار قسمت الف هم آهنگ است؟

نمودار تابع بدست امده را رسم می کنیم. ملاحظه می کنید که تا حد زیادی نمودار قسمت الف و نمودار تابع بدست آمده خوب با هم مطابقت دارند.

دانلود از سایت ریاضی سرا



ه –با استفاده از تابع بدست انده در قسمت ج پیش بینی کنید در سال های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۰ چه تعدادی مبتلا به ایدز خواهند بود.

برای پیدا کردن تعداد بیماران مبتلا به ایدز در سال ۱۹۹۹یعنی $x = ۱۹$ و در سال ۲۰۰۰ یعنی $x = ۲۰$

لذا باید $f(۱۹)$ و $f(۲۰)$ را پیدا کنیم. نتجه $(۱۹۹۹,۸۶۲۶۹۱)$ و $(۲۰۰۰,۹۶۵۳۸۵)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰.۲

توابع چند جمله ای Polynomial Functions

در بخش ۷.۷ مقدمه ای بر رسم نمودار توابع چند جمله ای صحبت کردیم. در این بخش مطالب پیشرفته تری در مورد این توابع بحث می کنیم.

توابع چند جمله ای از جمله ساده ترین عبارت جبری هستند. به اسانی می توان مقدار عددی آنها را پیدا کرد. Evaluate

به همین علت ، این توابع برای پیدا کردن مقدار تخمینی توابع دیگر بکار می روند. در این بخش ، خصوصیت این طبقه از توابع را مورد بر رسی قرار می دهیم.

یاد آواری –در بخش ۳.۱ گفتیم

چند جمله ای Polynomial عبارت است از جمع تعداد محدودی Finite sum از جملات Terms که در آن متغیر ها به توان های اعداد صحیح نا منفی رسیده باشند و هیچ متغیری در مخرج کسر وجود نداشته باشد. مثال

عبارت های زیر هر کدام چند جمله ای هستند .

$$۵x^{۵}y + ۷xz \qquad -۵x^{۳} + ۲x + \frac{۲}{۳}$$

اما عبارت های زیر چند جمله ای نیستند

$۵x^{-۳} + ۲x$ توان عدد صحیح منفی

$\frac{۶}{x} - ۵x + ۱$ متغیر در مخرج کسر

اگر یک چند جمله ای شامل فقط یک متغیر باشد ، آنرا چند جمله ای یک متغیر ی Polynomial in one variable می نامند. مانند

$$۴x^{۳} - ۷x^{۲} + ۵ \qquad y^{۲} - ۴ \qquad ۸a^{۴} - ۷a^{۳} + ۴a$$

مثال های بالا به ترتیب نزولی Descending Order نوشته شده اند زیرا متغیر ها به ترتیب نزولی توان های آنها در عبارت ها آمده اند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

یک **تابع چند جمله ای ، تابعی است به صورت**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

در تابع بالا $a_n, a_{n-۱}, \dots, a_۱, a_۰$ اعداد حقیقی هستند و n یک عدد صحیح نا منفی است. دامنه کلیه توابع چند جمله ای تمام اعداد حقیقی است. یک تابع چند جمله ای ، تابعی است با یک متغیر. درجه یک تابع چند جمله ای بزرگ ترین توان همان یک متغیر یعنی x است.

مثال ۱

مشخص کنید کدام یک از توابع زیر ، یک تابع چند جمله ای است و آن که تابع چند جمله ای است ، درجه آنرا بیان کنید ، و آن تابع که تابع چند جمله ای نیست علت آنرا بگویید.

$a)\ \ f(x) = ۲ - ۳x^۴$

$b)\ \ g(x) = \sqrt{x}$

$c)\ \ h(x) = \dfrac{x^۲ - ۲}{x^۳ - ۱}$

$d)\ \ F(x) = ۰$

$e)\ \ G(x) = ۸$

$f)\ \ H(x) = -۲x^۳(x-۱)^۲$

پاسخ

$a)\ f$ یک تابع چند جمله ای است با درجه چهار

$b)\ g$ یک تابع چند جمله ای نیست

زیرا x به توان $\frac{۱}{۲}$ رسیده که یک عدد صحیح نیست.

$c)\ h$ یک تابع چند جمله ای نیست

زیرا یک کسر است با صورت و مخرج چند جمله ای و توان متغیر مخرج عدد صحیح مثبت است.

$d)\ F$ یک تابع صفر جمله ای است . درجه ای ندارد

$e)\ G$ یک عدد ثابت غیر صفر است . یک تابع چند جمله ای است با درجه صفر

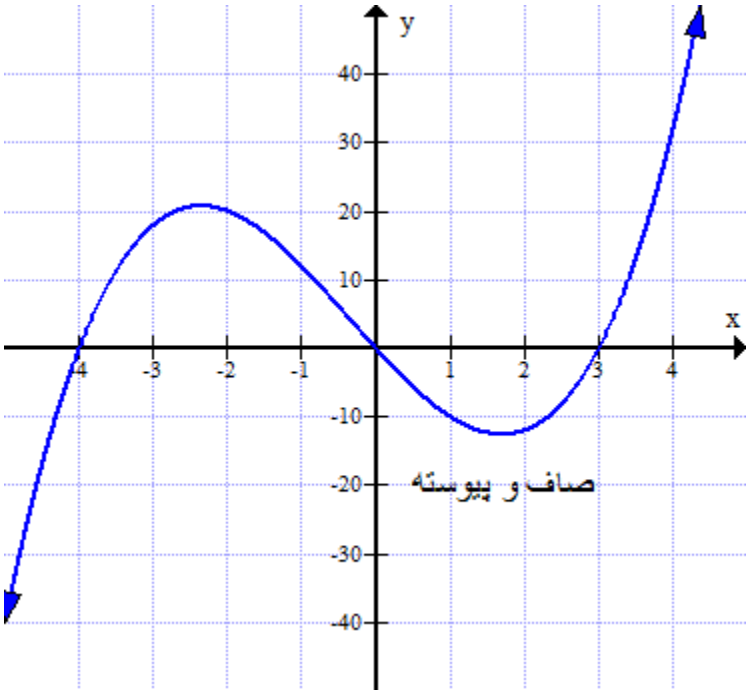
$f)\ H$ یک تابع چند جمله ای است با درجه پنج

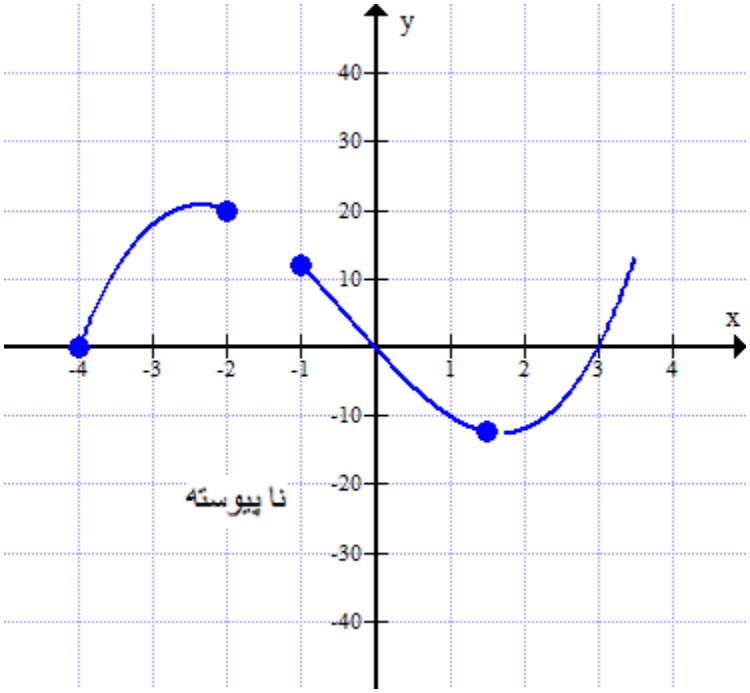
دانلود از سایت ریاضی سرا

تاکنون در مورد توابع درجه صفر ، درجه یک و درجه دوم مفصلا صحبت کرده ایم.

نمودار توابع چند جمله ای صاف Smooth و پیوسته Continuous است.

به اشکال زیر توجه کنید.





دانلود از سایت ریاضی سرا

برای تجزیه و تحلیل توابع چند جمله ای ، ابتدا با تابع توانی ، که خود یک نوع تابع چند جمله ای است ، بحث می کنیم.

تابع توانی Power Function

یک تابع توانی با درجه n تابعی است به شکل زیر

$$f(x) = ax^n$$

اینجا a یک عدد حقیقی‌غیراز صفر است و n یک عدد صحیح بزرگ تر از صفر.

بنا بر این ، یک تابع توانی ، یک تابع یک جمله ای است. نمودار تابع توانی با درجه یک یعنی $f(x) = ax$ یک خط مستقیم است با شیب a که از مبدا محور های مختصات می گذرد. نمودار تابع توانی درجه دوم $f(x) = ax^۲$ یک سهمی است که راس آن روی مبدا محور های مختصات قرار دارد با مشخصاتی که قبلا مفصل صحبت کردیم.

اگر بدانیم چگونه نمودار تابع توانی $f(x) = x^n$ را رسم کنیم، پس تراکم Compression گسترش Stretch و شاید انعکاس Reflection نسبت به محور ها ، به ما کمک می کند تا نمودار $g(x) = ax^n$ را بدست آوریم. لذا فعلا روی توابع به شکل $f(x) = x^n$ متمرکز می شویم.

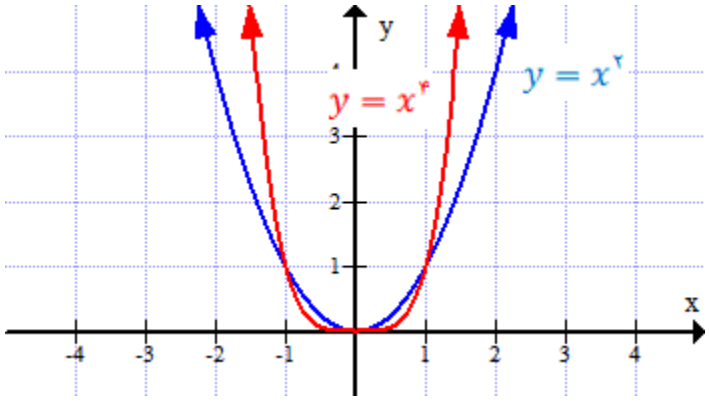
ابتدا با توابع $f(x) = x^n$ با توان های زوج شروع می کنیم. دامنه این نوع تابع ها ، کلیه اعداد حقیقی هستند و برد آنها مجموعه اعداد حقیقی نا منفی. این نوع تابع ها ، توابع زوج هستند. بنا بر این نسبت به محور y قرینه هستند. نمودار آنها همیشه شامل مبدا مختصات و نقاط $(-۱,۱)$ و $(۱,۱)$ هستند.

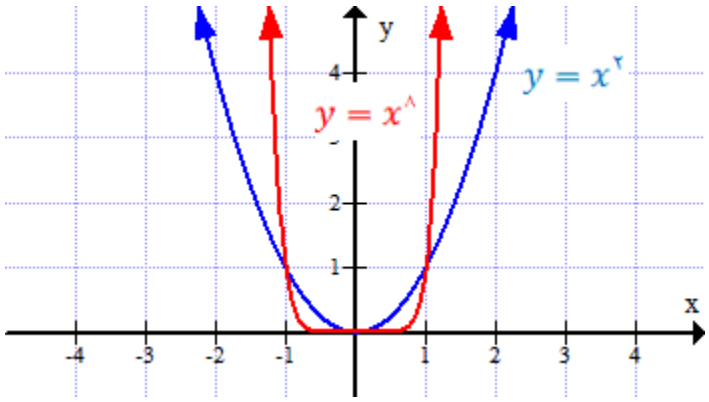
اگر $n = ۲$ باشد ، با نمودار آن که یک سهمی است کاملا آشنا هستید. و می دانید که این سهمی به طرف بالا باز می شود و راس آن مبدا مختصات است. اگر $n \geq ۴$ و زوج باشد ، و $-۱ < x < ۱$ نمودار به محور x نزدیک تر است از نمودار $y = x^۲$

اگر $x < -۱$ و یا $x > ۱$ باشد ، نمودار از محور x دورتر است از نمودار $y = x^۲$

به نمودار های زیر توجه کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا





خواص توابع توانی $y = x^n$ وقتی که n یک عدد صحیح زوج است

۱ – نمودار نسبت به محور y قرینه است.

۲ – دامنه ، کلیه اعداد حقیقی و برد ، مجموعه اعداد حقیقی نا منفی.

۳ – نمودار همیشه شامل مبدا مختصات و نقاط $(-۱,۱)$ و $(۱,۱)$ است.

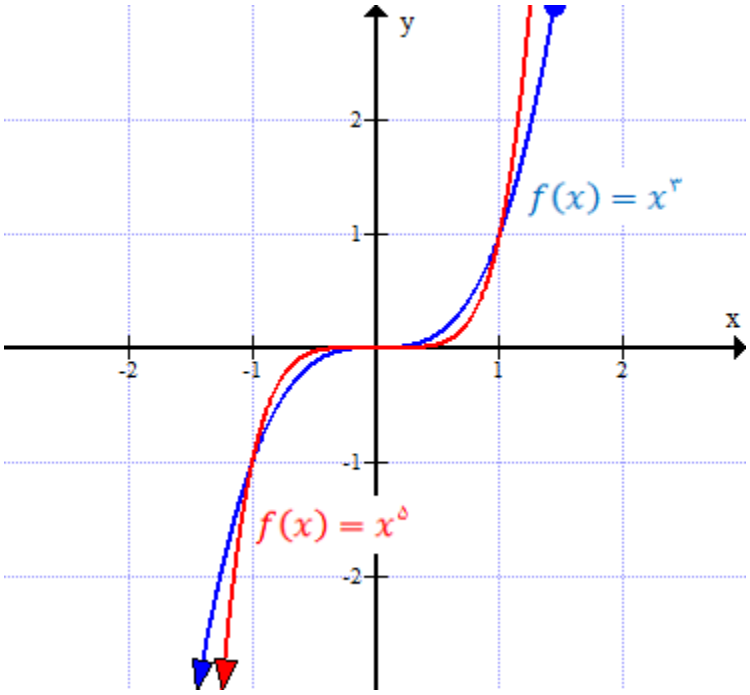
۴ – هر چه مقدار n بیشتر می شود ، نمودار عمودی تر میشود وقتی که $x < -۱$ یا $x > ۱$ اما برای x نزدیک مبدا نمودار پهن Flatten و به محور x نزدیک تر می شود.

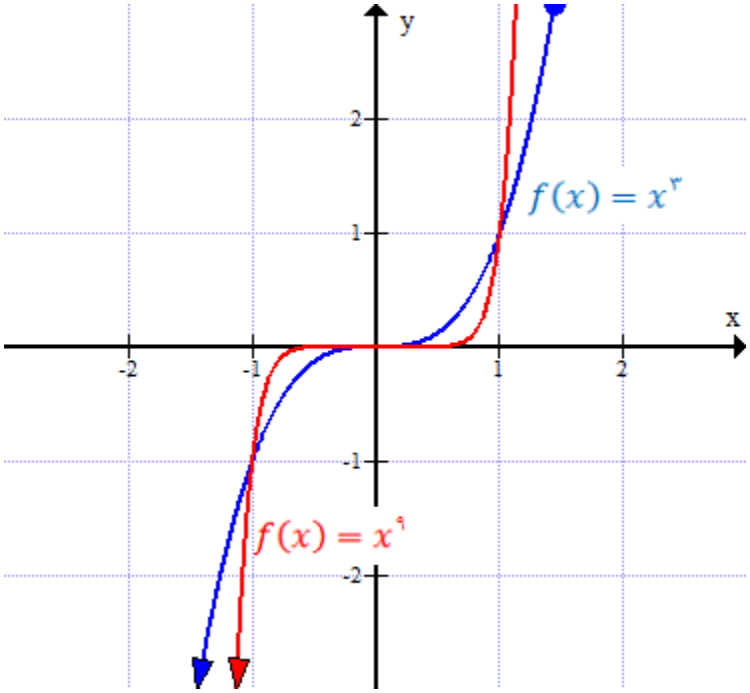
حالا به توابع توانی $f(x) = x^n$ با توان فرد مساوی و یا بزرگ تر از ۳ می پردازیم. دامنه و برد این توابع کلیه اعداد حقیقی است. این توابع ، توابع فرد هستند و لذا نمودار آنها نسبت به مبدا مختصات قرینه است. نمودار آنها همیشه شامل مبدا مختصات و نقاط $(-۱,-۱)$ و $(۱,۱)$ هستند.

قبلا نمودار $f(x) = x^۳$ دیده ایم. اگر $n \geq ۵$ و فرد باشد و $-۱ < x < ۱$ نمودار $f(x) = x^n$ به محور x نزدیک تر است از نمودار $y = x^۳$ و اگر $x < -۱$ یا $x > ۱$ باشد ، از محور x دور تر است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

به نمودار های زیر توجه کنید.





دانلود از سایت ریاضی سرا

خواص توابع توانی $y = x^n$ وقتی که n یک عدد صحیح فرد است

۱ – نمودار نسبت به مبدا مختصات قرینه است.

۲ – دامنه و برد کلیه اعداد حقیقی است.

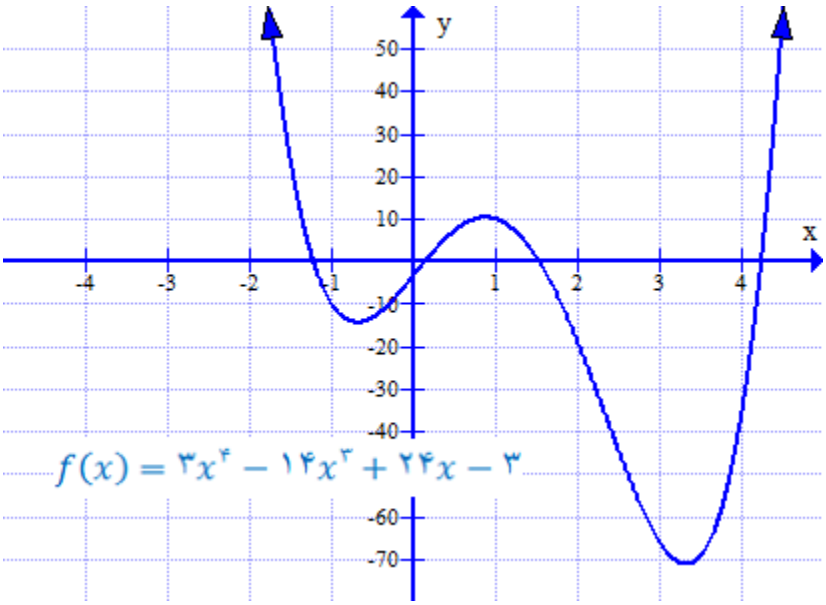
۳ – نمودار همیشه شامل مبدا مختصات و نقاط $(۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ است.

۴ – هر چه مقدار توان بیشتر می شود ، نمودار عمودی تر می شود ، اگر $x < -۱$ یا $x > ۱$ باشد. اما برای x نزدیک مبدا ، نمودار پهن تر می شود و به محور x نزدیک تر میشود.

رسم نمودار دیگر چند جمله ای ها Graphing Other Polynomials

برای رسم بیشتر چند جمله ای های درجه سه و یا بالا تر ، احتیاج به تکنیک های پیشرفته دارد. اما اگر بتوانیم محل تلاقی نمودار با محور x را مشخص کنیم ، آنوقت روش های جبری را می‌توان برای رسم نمودار بکار برد. نمودار زیر ، نمودار یک تابع چند جمله ای است با چهار نقطه تلاقی با محور x

البته باید توجه داشت که منظور از تلاقی با محور ، این است که نمودار ممکن است محور را قطع کند و یا با آن مماس باشد. در نتیجه بین دو تلاقی متوالی با محور x نمودار ممکن است یا بالای محور x باشد و یا زیر آن محور. بزودی از این خاصیت نمودار چند جمله ای استفاده خواهیم کرد.



دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر بتوان از چند جمله ای کاملا فاکتور بگیریم ، آنوقت حل کردن معادله $f(x)=۰$ آسان خواهد بود .در نتیجه می توان محل تلاقی نمودار با محور x را پیدا کرد. مثلا اگر $f(x)=(x-۱)^۲(x+۳)$ داشته باشیم ، آن وقت جواب معادله

$$f(x)=(x-۱)^۲(x+۳)=۰$$

اعداد ۱ و ۳– است. و در نتیجه می توان قانون زیر را ساخت .

اگر f یک تابع چند جمله ای باشد و r یک عدد حقیقی ، به طوری که $f(r)=۰$ پس r را صفر حقیقی f و یا ریشه f می نامیم.

در این صورت

الف - r یک نقطه تلاقی f با محور x است.

ب - $(x-r)$ یک فاکتور f است.

مثال ۱ - پیدا کردن یک چند جمله ای از صفر های آن Finding a Polynomial from Its Zeros

الف –یک چند جمله ای درجه سه پیدا کنید که صفر هایش ۳, ۲, ۵– باشد.

ب –نمودار چند جمله ای که در قسمت الف پیدا کردید ، رسم کنید.

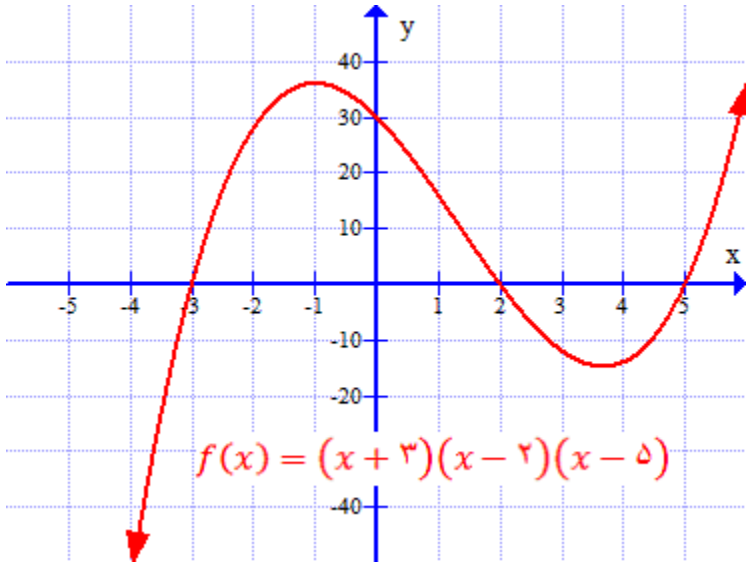
پاسخ

الف –اگر r یک صفر یک چند جمله ای است پس $x-r$ یک فاکتور f است. پس $x+۳$ و $x-۲$ و $x-۵$ فاکتور های f هستند. هر چند جمله ای به شکل

$$f(x)=a(x+۳)(x-۲)(x-۵)$$

در صورتی که $a\neq ۰$ باشد می تواند تابع دلخواه باشد. مقدار a سبب فشردگی ، کشش و یا انعکاس می شود ، اما در تلاقی نمودار با x تاثیری ندارد. ما $a=۱$ را انتخاب می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا



اگر همان فاکتور $x - r$ بیش از یک مرتبه تکرار شود ، r صفر مکرر و یا صفر متعدد f نامیده می شود. یا بهتر است بگویم

اگر $(x-r)^m$ یک فاکتور چند جمله ای f باشد و $(x-r)^{m+۱}$ فاکتور f نیست , پس r ، m مرتبه صفر مکرر f است.

صفر مکرر Repeated Zero

صفر متعدد Multiple Zero

ام مرتبه صفر مکرر Zero of Multiplicity m

مثال ۲

برای چند جمله ای

$$f(x) = ۵(x-۲)(x+۳)^۲\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۴$$

۲ صفر یک مکرری است.

۳– صفر دو مکرری است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$\frac{۱}{۲}$ صفر چهار مکرری است.

رسم نمودار یک چند جمله ای با استفاده از محل تلاقی آن با محور x

مثال ۳ – برای چند جمله ای

$$f(x) = x^{۲}(x - ۲)$$

الف –محل تلاقی نمودار با هر دو محور ها را پید کنید.

ب –با استفاده از محل تلاقی با محور x پیدا کنید ، در کدام بازه نمودار بالای محور x است و در کدام بازه نمودار زیر محور x است.

ج –چند نقطه دیگر هم روی نمودار پیدا کنید ، و نقاط را با منحنی صاف و پیوسته به هم وصل کنید.

پاسخ

الف –برای پیدا کردن محل تلاقی با محور y باید $f(۰)$ را پیدا کنیم.

$f(۰) = ۰^{۲}(۰ - ۲) = ۰$

برای پیدا کردن محل تلاقی با محور x باید $f(x) = ۰$ را پیدا کنیم.

$f(x) = x^{۲}(x - ۲) = ۰$

$x^{۲} = ۰$ یا $x - ۲ = ۰$

$x = ۰$ یا $x = ۲$

ب –محل تلاقی با محور x نقاط $(۲,۰)$ ، $(۰,۰)$ هستند. این دو نقطه محور x را به سه بازه تقسیم می کند.

$$(-\infty,۰) \qquad (۰,۲) \qquad (۲,\infty)$$

چون نمودار در نقاط $x = ۰$ و $x = ۲$ محور x را یا قطع می کند و یا مماس است ، پس نمودار در این سه بازه یا بالای این محور است یعنی $f(x) > ۰$ و یا زیر این محور است یعنی $f(x) < ۰$

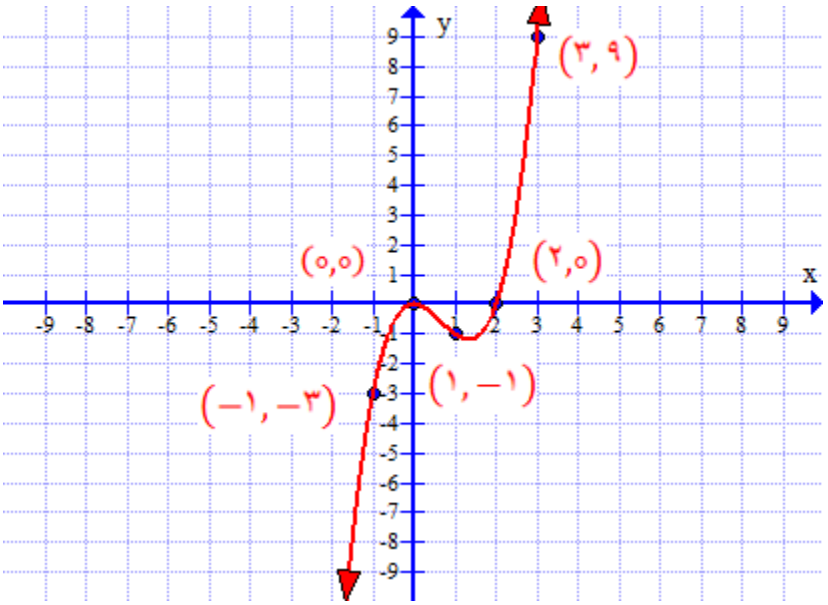
برای این که بدانیم نمودار کجا قرار دارد ، کافی است یک عدد در هر یک از این سه بازه انتخاب کنیم و ببینیم مقدار تابع مثبت است (بالای محور) و یا منفی است (زیر محور)

دانلود از سایت ریاضی سرا

به جدول زیر توجه کنید.

	$-\infty$	۰	۲ ∞
بازه	$(-\infty,۰)$	$(۰,۲)$	$(۲,\infty)$
عدد انتخابی	-۱	۱	۳
مقدار f	$f(-۱)=-۳$	$f(۱)=-۱$	$f(۳)=۹$
محل نمودار	زیر محور x	زیر محور x	بالای محور x
نقطه روی نمودار	$(-۱,-۳)$	$(۱,-۱)$	$(۳,۹)$

ج



به جدول بالا و نمودار بالا مربوط به مثال ۳ توجه کنید.

چون نمودار f در هر دو طرف صفر زیر محور x است ، و مماس است با محور x در $x=۰$ ،و صفردو مرتبه مکرر

چون نمودار f برای $x<۲$ زیر محور x ،و برای $x>۲$ بالای محور x ،نمودار در نقطه $x=۲$ محور x را قطع می کند ، صفر یک مرتبه مکرر

پس نتیجه زیر حاصل می شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر r صفر تابع f و تکرارآن یک عدد زوج باشد ، علامت $f(x)$ در هر دو طرف r تغیر نمی کند ، و نمودار در r مماس است با محور x

اگر r صفر تابع f و تکرارآن یک عدد فرد باشد ، علامت $f(x)$ از یک طرف به طرف دیگر تغیر می کند ، و نمودار محور x را در r قطع می کند.

مجددا به نمودار بالا مثال ۹ نگاه کنید. نمی توانیم مطمئن شویم که نمودار بین $x=۰$ و $x=۲$ چه قدر پایین میرود. اما می دانیم که جایی در بازه $(۰,۲)$ نمودار باید تغیر جهت بدهد (از سیر نزولی به سیر صعودی)نقطه ای که در آن نمودار تغیر جهت می دهد ، به نقطه انحنا یا نقطه چرخش Turning Pointموسوم است. در حسابان Calculus به نقطه ماکزیمم محلی Local Maximaیا نقطه مینیمم محلی Local Minima موسوم است. بنا بر این در این کتاب نمی خواهیم در مورد محل این نقاط بحث کنیم اما می دانیم که

قضیه Theorem اگر f یک تابع چند جمله ای با درجه n باشد ، پس f حد اکثر $n-۱$ نقاط چرخش دارد.

مثلا نمودار $f(x)=x^۲(x-۲)$ در مثال ۹ دارای درجه سه است و لذا دو نقطه چرخش دارد. یکی در $(۰,۰)$ و دگر جایی بین $x=۰$ و $x=۲$

موضوع دیگر این که نمودار مثال ۳ تقریبا شبیه نمودار $f(x)=x^۳$ است. در حقیقت برای مقادیر بزرگ x اختلاف کم است. وضع نمودار تابع برای مقادیر زیاد x خواه مثبت و خواه منفی ، به وضع انتهایی موسوم است.

وضع انتهایی End Behavior

قضیه Theorem

وضع انتهایی

برای مقادیر زیاد x خواه کم و خواه زیاد ، نمودار تابع چند جمله ای

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$$

شبیه نمودار تابع توانی

$$y=a_nx^n$$

است.

خلاصه

برای یک تابع چند جمله ای

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰ \quad ، a_n\neq ۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

درجه چند جمله ای : n

حد اکثر نقطه چرخش : $n-۱$

اگر تعداد صفر مکرر زوج باشد ، نمودار مماس با محور x است.

اگر تعداد صفر مکرر فرد باشد ، نمودار محور x را قطع می کند.

بین صفر ها ، نمودار یا بالای محور x است و یا زیر آن .

وضع انتهایی ، مانند $y = ax^n$ است.

مثال ۴

تجزیه و تحلیل نمودار یک تابع چند جمله ای .

برای چند جمله ای $f(x) = x^۳ + x^۲ - ۱۲x$

الف –محل تقاطع با هر دو محور را پید کنید.

ب –مشخص کنید که آیا نمودار با محور x مماس است و یا آنرا قطع می کند.

ج –تابع توانی را پیدا کنید که وضع انتهایی نمودار f برای مقادیر زیاد x به آن شبیه است.

د –حد اکثر تعداد نقاط چرخش را پید کنید.

ه - با استفاده از محل تلاقی نمودار با محور x مشخص کنید که در کدام بازه ، نمودار بالای محور x است و در کدام بازه زیر آن محور.

ز –با استفاده از اطلاعات بدست امده ، نقاط را با منحنی صاف و پیوسته به هم متصل کنید ، تا نمودار تابع بدست آید.

پاسخ

الف –محل تلاقی با محور y باید $f(۰)$ را پیدا کنیم.

$$f(۰) = ۰^۳ + ۰^۲ - ۱۲(۰) = ۰$$

برای پیدا کردن محل تلاقی با محور x باید معادله زیر را حل کنیم.

$$f(x) = x^۳ + x^۲ - ۱۲x = ۰$$

پس

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x^{۳}+x^{۲}-۱۲x=x\left(x^{۲}+x-۱۲\right)=x(x+۴)(x-۳)=۰$$

$$x=۰ \qquad x=-۴ \qquad x=۳$$

پس محل تلاقی با محور x و یا صفر های f عبارتند از ۳ ، ۴ − ، ۰

ب –چون کلیه صفر های تابع یک مرتبه تکرار می شوند ، پس نمودار محور x را قطع می کند.

ج –وضع نمودار f برای مقادیر زیاد x شبیه $y=x^{۳}$ است.

د –نمودار ، حد اکثر دو نقطه چرخش دارد.

ه –سه محل تقاطع با محور x محور را به چهار بازه تقسیم می کند.

$$(-\infty,-۴) \quad (-۴,۰) \quad (۰,۳) \quad (۳,\infty)$$

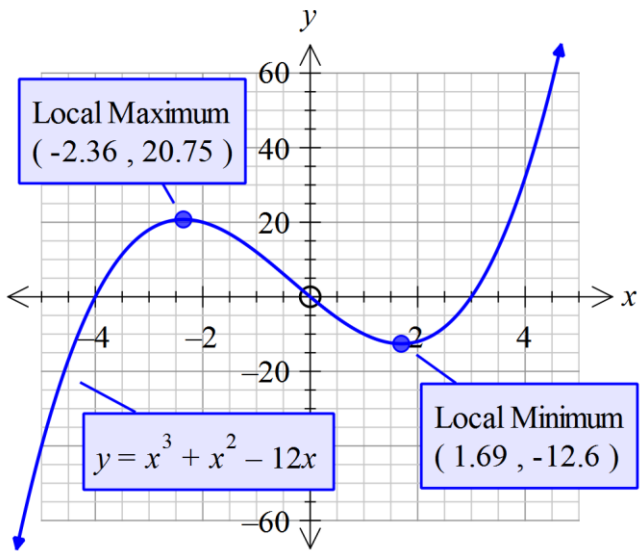
برای پیدا کردن محل نمودار $f(x)$ در هر یک از بازه ها ، یک جدول می سازیم.

x	۳	۰	−۴	

بازه	$(-\infty,-۴)$	$(-۴,۰)$	$(۰,۳)$	$(۳,\infty)$
عدد انتخابی	−۵	−۲	۱	۴
مقدار f	$f(-۵)=-۴۰$	$f(-۲)=۲۰$	$f(۱)=-۱۰$	$f(۴)=۳۲$
مکان نمودار	زیر محور x	بالای محور x	زیر محور x	بالای محور x
نقطه روی نمودار	$(-۵,-۴۰)$	$(-۲,۲۰)$	$(۱,-۱۰)$	$(۴,۳۲)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ز –نمودار



مثال ۵ – برای تابع زیر مانند مثال ۴ عمل کنید.

$$f(x) = x^{۲}(x-۴)(x+۱)$$

پاسخ

الف -تلاقی با محور y صفر است زیرا $f(۰) = ۰^{۲}(۰-۴)(۰+۱) = ۰$

برای پیدا کردن محل تلاقی با محور x

$$f(x) = x^{۲}(x-۴)(x+۱) = ۰$$

$$x = ۰ \qquad x = ۴ \qquad x = -۱$$

پس تلاقی با محور x در ۱ – ۴، ، ۰

ب –صفر تکرار دو مرتبه ای است. بنا بر این ، نمودار محور x را لمس می کند. (مماس است)

۱ – و ۴صفر با تکرار یک مرتبه ای است پس نمودار در این دو نقطه محور x را قطع می کند

ج –وضع نمودار برای مقادیر زیاد x شبیه $y = x^{۴}$ است.

د –نمودار حد اکثر سه نقطه چرخش دارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

ه مکان تلاقی با محور x این محور را به چهار بازه تقسیم می کند.

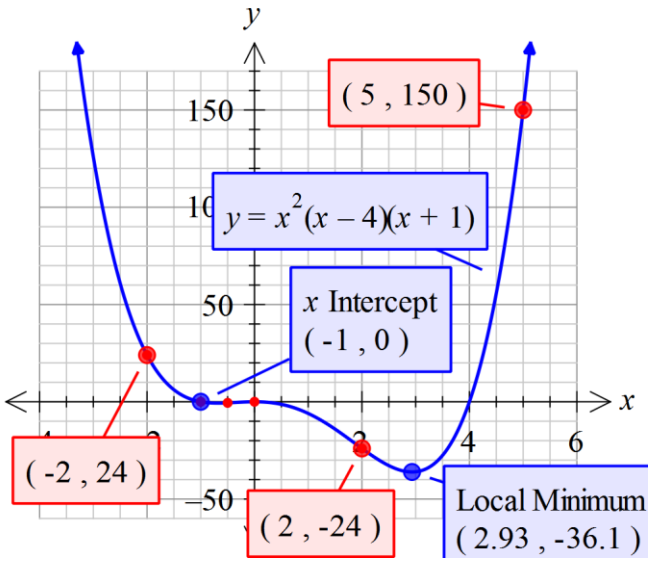
$$(-\infty,-۱) \qquad (-۱,۰) \qquad (۰,۴) \qquad (۴,\infty)$$

پس جدولی می سازیم.

x	۴	۰	-۱

بازه	$(-\infty,-۱)$	$(-۱,۰)$	$(۰,۴)$	$(۴,\infty)$
عدد انتخابی	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	۲	۵
مقدار f	$f(-۲)=۲۴$	$f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۹}{۱۶}$	$f(۲)=-۲۴$	$f(۵)=۱۵۰$
مکان نمودار	بالای محور x	زیر محور x	زیر محور x	بالای محور x
نقطه روی نمودار	$(-۲,-۲۴)$	$\left(-\frac{۱}{۲},-\frac{۹}{۱۶}\right)$	$(۲,-۲۴)$	$(۵,۱۵۰)$

و ـنمودار



دانلود از سایت ریاضی سرا

خلاصه

مراحل تجزیه و تحلیل نمودار یک چند جمله ای

۱ – از طریق حل معادله $f(x)=0$ مکان تلاقی با محور x را پیدا کنید.

با پیدا کردن $f(0)$ مکان تلاقی با محور y را پیدا کنید.

۲ – مشخص کنید که آیا نمودار با محور x مماس است و یا آنرا قطع می کند.

۳ – یک تابع توانی پیدا کنید که وضع نمودار f برای مقادیر زیاد x شبیه آن باشد.

۴ – مشخص کنید نمودار f چند نقطه چرخش دارد.

۵ – با استفاده از مکان تلاقی نمودار با محور x پیدا کنید که نمودار f در کدام بازه زیر محور x است و در کدام بازه بالای آن قرار دارد.

۶ نمودار را رسم کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۲.۵ ۱

مشخص کنید کدام یک از توابع زیر ، توابع چند جمله ای هستند. آنها که هستند ، درجه انها را بگویید ، و آنها که نیستند ، بگویید چرا.

۱) $f(x) = ۴x + x^۳$

۲) $f(x) = ۵x^۲ + ۴x^۴$

۳) $f(x) = ۱ - \frac{۱}{x}$

۴) $h(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - ۱\right)$

۵) $F(x) = ۵x^۴ - \pi x^۳ + \frac{۱}{۲}$

با تبدیل نمودار $y = x^۴$ و یا $y = x^۵$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۶) $f(x) = \left(x + ۱\right)^۴$

۷) $f(x) = \left(x - ۲\right)^۲$

۸) $f(x) = x^۵ - ۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $f(x) = (x - ۱)^{۵} + ۲$

۱۰) $f(x) = ۳ - (x + ۲)^{۴}$

برای هر یک از تمرینات زیر که صفر های آنها و درجه آنها داده شده یک چند جمله ای بسازید.

۱۱ – صفر ها :۳, ۲, ۲– درجه سه

۱۲ – صفر ها :۴, ۰, ۳– درجه سه

۱۳ – صفر ها :۳, ۲, ۱– , ۴–درجه چهار

برای هر یک از توابع چند جمله ای زیر

الف –صفر ها و تکرار انها را بنیویسید.

ب –بگویید که آیا نمودار برای هر یک از مکان های تلاقی به محور x آنرا قطع می کند و یا مماس است.

ج -یک تابع توانی پیدا کنید که نمودار f برای مقادیر زیاد وضع انتهایی شبیه آن است.

۱۴) $f(x) = ۳(x - ۷)(x + ۳)^{۲}$

۱۵) $f(x) = ۴(x + ۴)(x + ۳)^{۳}$

۱۶) $f(x) = ۳\left(x^{۲} + ۸\right)\left(x^{۲} + ۹\right)^{۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای هر یک از توابع چند جمله ای زیر تمام مراحل مثال ۴ را انجام دهید.

۱۷) $f(x) = (x - ۱)^{۲}$

۱۸) $f(x) = x^{۲}(x - ۳)$

۱۹ $f(x) = x(x - ۲)(x + ۴)$

۲۰) $f(x) = x - x^{۳}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۲ .۱۰

مشخص کنید کدام یک از توابع زیر ، توابع چند جمله ای هستند. آنها که هستند ، درجه انها را بگویید ، و آنها که نیستند ، بگویید چرا.

۱) $f(x) = ۴x + x^۳$

اری ، تابع چند جمله ای است با درجه سه.

۲) $f(x) = ۵x^۲ + ۴x^۴$

اری ، تابع چند جمله ای است با درجه چهار .

۳) $f(x) = ۱ - \frac{۱}{x}$

نه ، تابع خد جمله ای نیست زیرا x به توان -۱ رسیده است.

۴) $h(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - ۱\right)$

نه ، تابع خد جمله ای نیست زیرا x به توان $\frac{۱}{۲}$ رسیده است.

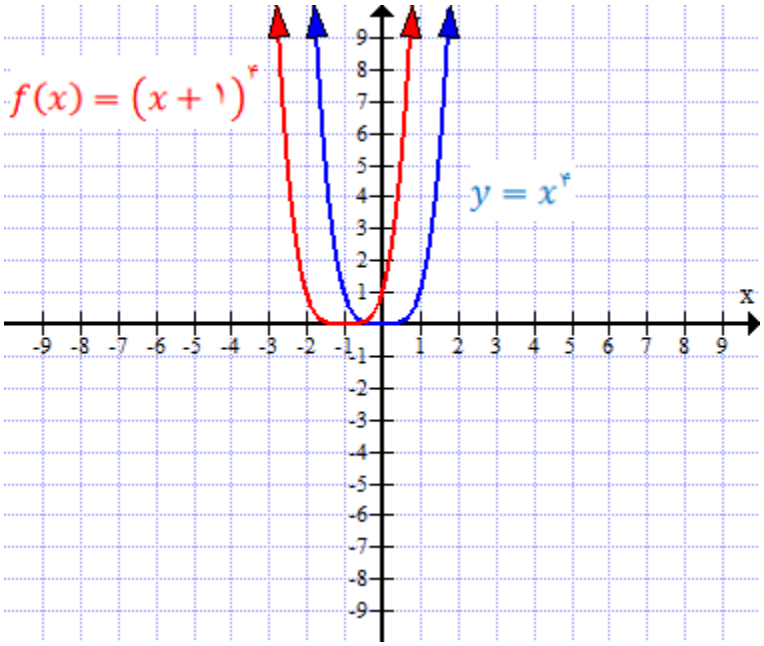
۵) $F(x) = ۵x^۴ - \pi x^۳ + \frac{۱}{۲}$

اری ، تابع چند جمله ای است با درجه چهار .

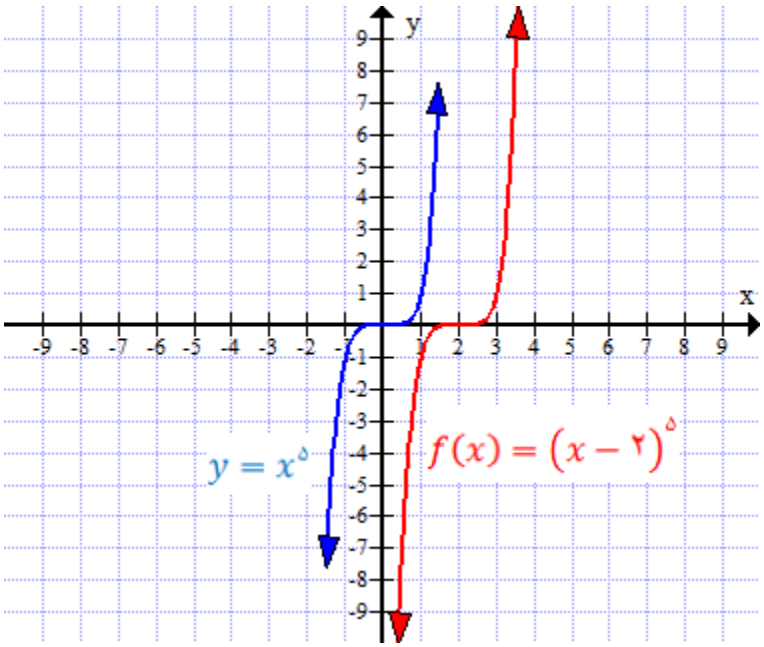
دانلود از سایت ریاضی سرا

با تبدیل نمودار $y = x^{۴}$ و یا $y = x^{۵}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۶) $f(x) = (x + ۱)^{۴}$

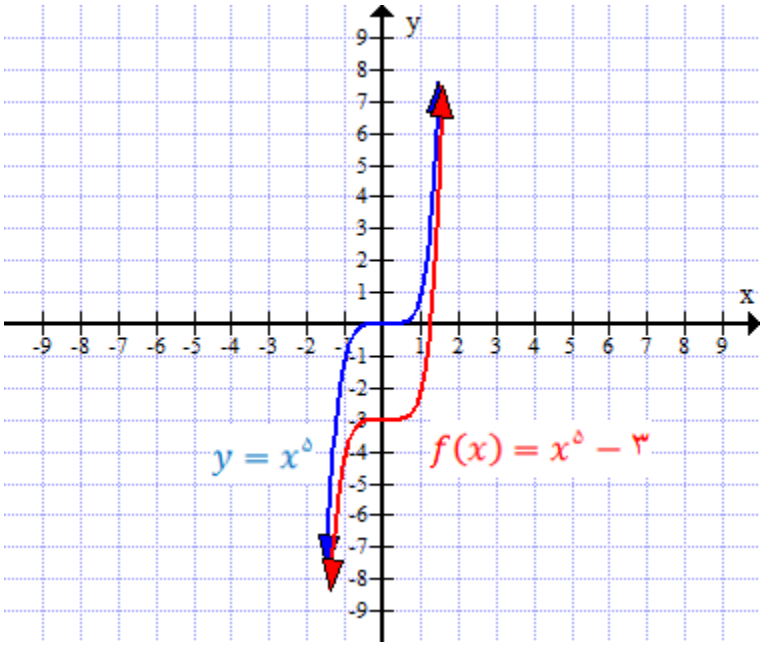


۷) $f(x) = (x - ۲)^{۲}$

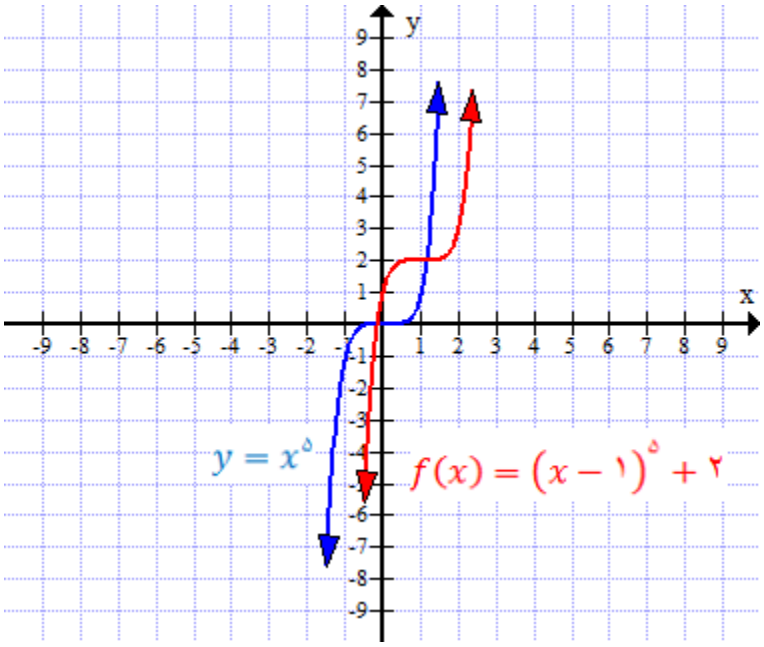


دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $f(x) = x^{۵} - ۳$

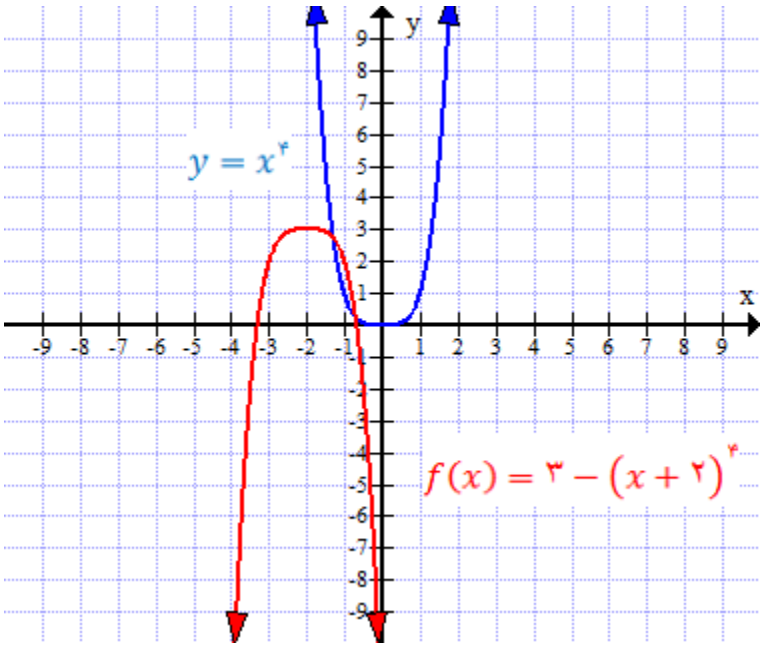


۹) $f(x) = (x - ۱)^{۵} + ۲$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $f(x) = ۳ - (x + ۲)^{۴}$



برای هر یک از تمرینات زیر که صفر های آنها و درجه آنها داده شده یک چند جمله ای بسازید.

۱۱ – صفر ها :۳, ۲, ۲– درجه سه

$$f(x) = (x + ۲)(x - ۲)(x - ۳) = x^{۳} - ۳x^{۲} - ۴x + ۱۲ \quad ، \quad a = ۱$$

۱۲ – صفر ها :۴, ۰, ۳– درجه سه

$$f(x) = (x + ۳)(x - ۰)(x - ۴) = x^{۳} - x^{۲} - ۱۲x \quad , \quad a = ۱$$

۱۳ – صفر ها :۳, ۲, ۱–, ۴–درجه چهار

$$f(x) = (x + ۴)(x + ۱)(x - ۲)(x - ۳) = x^{۴} - ۱۵x^{۲} + ۱۰x + ۲۴ \quad , \quad a = ۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای هر یک از توابع چند جمله ای زیر

الف –صفر ها و تکرار انها را بنیویسید.

ب –بگویید که آیا نمودار برای هر یک از مکان های تلاقی به محور x آنرا قطع می کند و یا مماس است.

ج -یک تابع توانی پیدا کنید که نمودار f برای مقادیر زیاد وضع انتهایی شبیه آن است.

۱۴) $f(x) = ۳(x-۷)(x+۳)^{۲}$

الف –۷ یک مرتبه تکرار ، ۳– دو مرتبه تکرار

ب – نمودار در ۳–مماس است و در ۷ آنرا قطع می کند.

ج - $y = ۳x^{۳}$

۱۵) $f(x) = ۴(x+۴)(x+۳)^{۳}$

الف - ۴– یک مرتبه تکرار ، ۳– سه مرتبه تکرار.

ب –نمودار در هر دو مورد محور x را قطع می کند.

ج - $y = ۴x^{۴}$

۱۶) $f(x) = ۳\left(x^{۲}+۸\right)\left(x^{۲}+۹\right)^{۲}$

الف –هیچ صفر حقیقی وجود ندارد

ب –نمودار نه محور x را قطع می کند و نه مماس بر آن است.

ج - $۳ = ۳x^{۶}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای هر یک از توابع چند جمله ای زیر تمام مراحل مثال ۴ را انجام دهید.

۱۷) $f(x) = (x - ۱)^۲$

الف - تلاقی با محور x درنقطه ۱

تلاقی با محور y درنقطه ۱

ب –نمودار در نقطه ۱ با محور x مماس است.

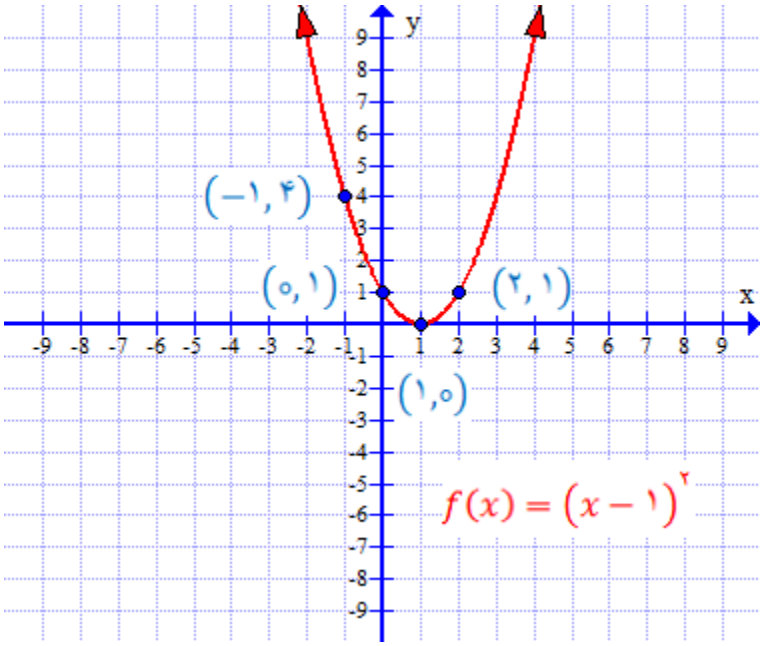
ج - $y = x^۲$

د –یک نقطه چرخش

ه –

بازه	$(-\infty, ۱)$	$(۱, \infty)$
عدد انتخابی	-۱	۲
مقدار f	$f(-۱) = ۴$	$f(۲) = ۱$
مکان نمودار	بالای محور x	بالای محور x
نقطه روی نمودار	$(-۱, ۴)$	$(۲, ۱)$

و –



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸) $f(x) = x^{۲}(x - ۳)$

الف -تلاقی با محور x در نقاط ۳ ، ۰

تلاقی با محور y در نقطه ۰

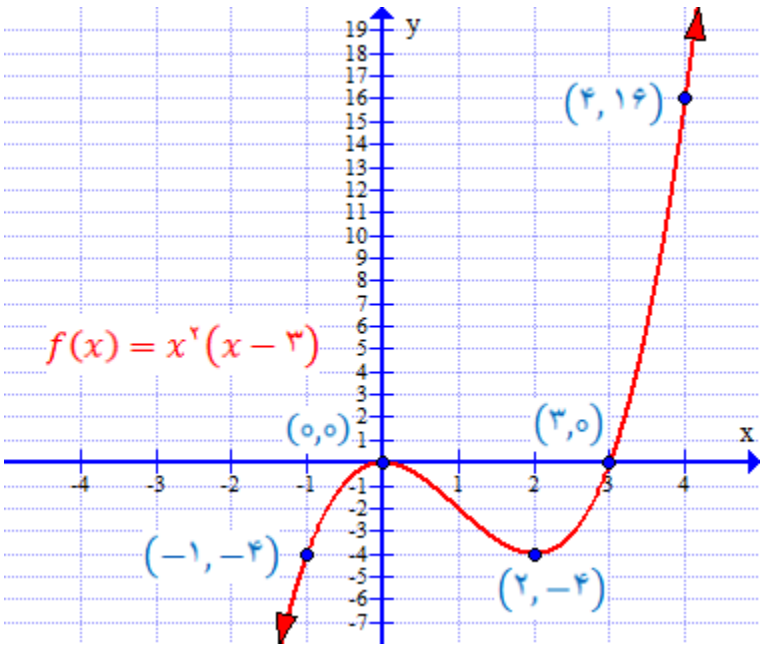
ب –در نقطه صفر با محور x مماس است ودر نقطه ۳ محور را قطع می کند.

ج - $y = x^{۳}$

د –دو نقطه چرخش

ه –

بازه	$(-\infty,۰)$	$(۰,۳)$	$(۳,\infty)$
عدد انتخابی	-۱	۲	۴
مقدار f	$f(-۱) = -۴$	$f(۲) = -۴$	$f(۴) = ۱۶$
مکان نمودار	زیر محور x	زیر محور x	بالای محور x
نقطه روی نمودار	$(-۱,-۴)$	$(۲,-۴)$	$(۴,۱۶)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹ $f(x) = x(x-۲)(x+۴)$

الف -تلاقی با محور x در نقاط ۲، ۰ و ۴،–

تلاقی با محور y در نقطه ۰

ب –در نقاط ۲,۰,۴– محور x را قطع می کند.

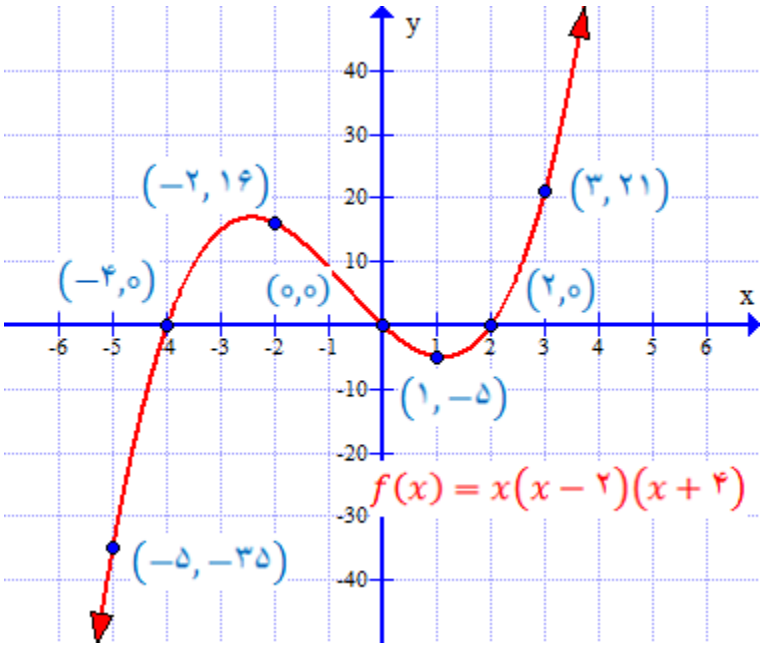
ج - $y = x^۳$

د -دو نقطه چرخش

ه –

بازه	$(-\infty,-۴)$	$(-۴,۰)$	$(۰,۲)$	$(۲,\infty)$
عدد انتخابی	۵–	۲–	۱	۳
مقدار f	$f(-۵) = -۳۵$	$f(-۲) = ۱۶$	$f(۱) = -۵$	$f(۳) = ۲۱$
مکان نمودار	زیر محور x	بالای محور x	زیر محور x	بالای محور x
نقطه روی نمودار	$(-۵,-۳۵)$	$(-۲,۱۶)$	$(۱,-۵)$	$(۳,۲)$

و



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۰) $f(x) = x - x^{۳} = -x\left(x^{۲} - ۱\right) = -x(x-۱)(x+۱)$

الف -تلاقی با محور x در نقاط $-۱,۰,۱$

تلاقی با محور y در نقطه ۰

ب –نمودار در نقاط $-۱,۰,۱$ محور x را قطع می کند.

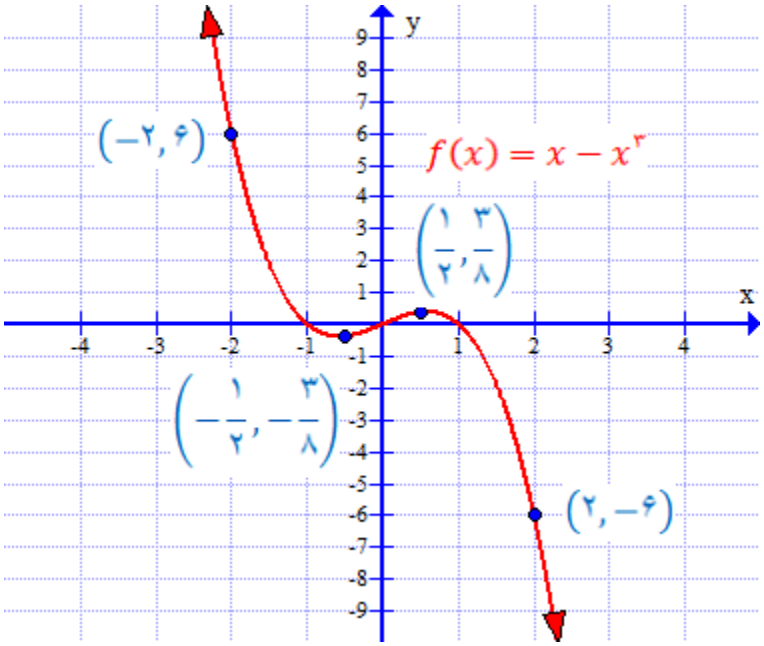
ج - $y = -x^{۳}$

د –دو نقطه چرخش

ه -

بازه	$(-\infty,-۱)$	$(-۱,۰)$	$(۰,۱)$	$(۱,\infty)$
عدد انتخابی	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۲
مقدار f	$f(-۲) = ۶$	$f\left(-\frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۳}{۸}$	$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳}{۸}$	$f(۴) = -۶$
مکان نمودار	بالای محور x	زیر محور x	بالای محور x	زیر محور x
نقطه روی نمودار	$(-۲,۶)$	$\left(-\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۸}\right)$	$\left(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۸}\right)$	$(۲,-۶)$

دانلود از سایت ریاضی سرا



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰.۳

توابع گویا Rational Functions

توضیح :وقتی که می گویم یک کسر به صورت ساده ترین شکل است ، یعنی صورت و مخرج فاکتور مشترک ندارند. مثلا تابع

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^{۲} - ۴}{x - ۲}}$$

به صورت ساده ترین شکل نیست. زیرا $x^{۲} - ۴ = (x - ۲)(x + ۲)$ است و ملاحظه می کنید که صورت و مخرج دارای فاکتور مشترک $x - ۲$ هستند.

یک **تابع گویا** ، تابعی است به شکل

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

q و p هر کدام یه تابع چند جمله ای هستند و q صفر نیست. دامنه این توابع ، کلیه اعداد حقیقی هستند بجز آنهایی که مخرج را صفر می کنند.

پیدا کردن دامنه یک تابع گویا

مثال ۱ –

الف - دامنه تابع

$$f(x) = \frac{۲x^{۲} - ۴}{x + ۵}$$

کلیه اعداد حقیقی است بجز -۵ یعنی $\{x | x \neq -۵\}$

ب –دامنه تابع

$$R(x) = \frac{۱}{x^{۲} - ۴}$$

کلیه اعداد حقیقی است بجز اعداد ۲ و -۲ یعنی $\{x | x \neq -۲, x \neq ۲\}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –دامنه تابع

$$R(x)\ \frac{x^{۳}}{x^{۲}+۱}$$

کیله اعداد حقیقی است. زیر مخرج هرگز صفر نمی شود.

د –دامنه تابع

$$R(x)=\frac{-x^{۲}}{۳}$$

کلیه اعداد حقیقی است.

ه –دامنه تابع

$$R(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}$$

کلیه اعداد حقیقی است بجز ۱ و یا $\{x|x\neq ۱\}$

نکته مهم در مورد تابع قسمت ه

ممکن است بگو ایم صورت تابع را فاکتور می گیریم و سپس دو جمله ای صورت و دو جمله ای مخرج حذف می کنیم. یعنی بنویسیم

$$R(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=x+۱$$

زیرا

$$R(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}\quad \text{و}\quad f(x)=x+۱$$

مساوی نیستند. زیرا دامنه $R(x)$ عبارت است از $\{x|x\neq ۱\}$ اما دامنه $f(x)$ کلیه اعداد حقیقی است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ – نمودار $f(x) = y = \frac{۱}{x}$ را رسم کنید.

پاسخ –ساده ترین تابع گویا همین تابع است.

ابتدا مکان تقاطع نمودار این تابع با محور ها را پید می کنیم. اگر $x = ۰$ قرار دهیم ، مخرج صفر می شود، و می دانیم که تقسیم بر صفر عملی نیست و قبلا گفتیم تعریف نشدنی است. No Defined

نتیجه می گیریم که نمودار با محور y تلاقی نمی کند.

اگر $f(x) = ۰$ قرار دهیم ، ملاحظه می کنید که معادله $\frac{۱}{x} = ۰$ جوابی ندارد. در نتیجه نمودار با محور x هم تلاقی نمی کند.

نمودار $f(x) = \frac{۱}{x}$ نه با محور ها مماس است و نه آنها را قطع می کند.

حالا برای قرینه بودن نمودار امتحان می کنیم.

اگر بجای y بگذاریم $-y$ خواهیم داشت $-y = \frac{۱}{x}$ که مساوی $y = \frac{۱}{x}$ نیست.

اگر بجای x بگذاریم $-x$ خواهیم داشت $y = \frac{۱}{-x}$ که مساوی $y = \frac{۱}{x}$ نیست .در نتیجه نمودار این تابع نسبت به محور ها قرینه نیست.

اگر بجای y بگذاریم $-y$ و بجای x بگذاریم $-x$ خواهیم داشت

$$-y = \frac{۱}{-x}$$

معادله بدست آمده بالا معادل

$$y = \frac{۱}{x}$$

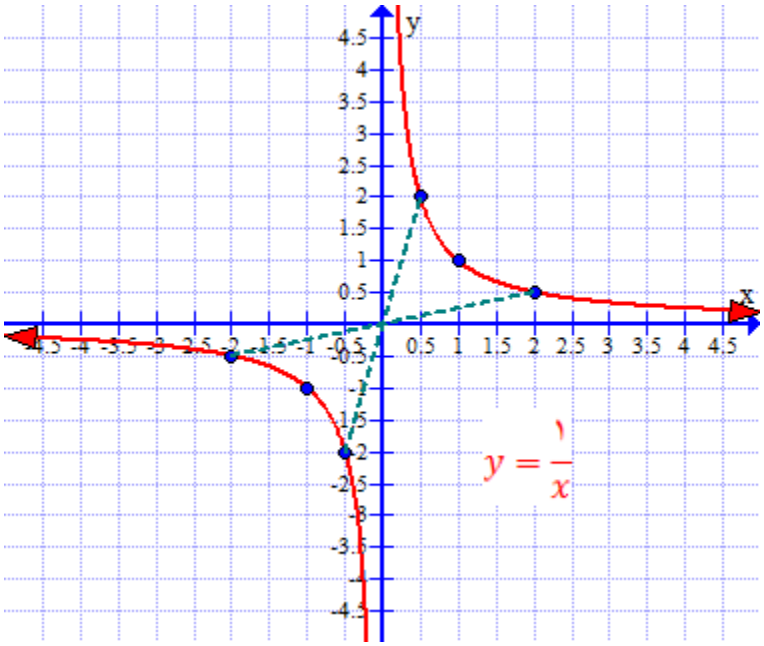
است و لذا نمودار این تابع نسبت به مبدا محور های مختصات قرینه است.

حالا جدولی تشکیل می دهیم .یعنی مقادیری به x می دهیم تا مقادیری برای y بدست آید. چون نمودار نسبت به مبدا قرینه است ، فقط اعداد مثبت برای x در بازار می گیریم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

x	y	(x,y)
$\frac{۱}{۱۰}$	۱۰	$\left(\frac{۱}{۱۰},۱۰\right)$
$\frac{۱}{۳}$	۳	$\left(\frac{۱}{۳},۳\right)$
$\frac{۱}{۲}$	۲	$\left(\frac{۱}{۲},۲\right)$
۱	۱	$(۱,۱)$
۲	$\frac{۱}{۲}$	$\left(۲,\frac{۱}{۲}\right)$
۳	$\frac{۱}{۳}$	$\left(۳,\frac{۱}{۳}\right)$
۱۰	$\frac{۱}{۱۰}$	$\left(۱۰,\frac{۱}{۱۰}\right)$

جدول بالا نشان می دهد که اگرمقدار x زیاد و مثبت باشد ، پس $y=\frac{۱}{x}$ یک عدد مثبت است و به صفر نزدیک است. هنچنین اگر x یک عدد مثبت و نزدیک صفر باشد ، پس $y=\frac{۱}{x}$ یک عدد مثبت و بزرگ است. با داشتن این اطلاعات می توانیم نمودار را رسم کنیم. به نمودار و اینکه چگونه قرینه بودن نسبت به مبدا مختصات را نشان داده ایم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳ – نمودار تابع زیر را تجزیه و تحلیل کنید و آنرا رسم نمائید.

$$\boldsymbol{H(x) = y = \frac{۱}{x^{۲}}}$$

پاسخ

دامنه این تابع شامل کلیه اعداد حقیقی است بجز صفر. نمودار با محور y تلاقی نمی کند ، زیرا x هرگز نمی تواند صفر باشد. همچنین نمودار با محور x تلاقی نمی کند ، زیرا معادله $H(x) = ۰$ هیچ جوابی ندارد. بنا بر این نمودار H با هیچ یک از محور ها تلاقی نمی کند. چون

$$H(-x) = \frac{۱}{(-x)^{۲}} = \frac{۱}{x^{۲}} = H(x)$$

پس H یک تابع زوج است و لذا نسبت به محور y قرینه است. جدول زیر عمل کرد Behavior تابع H

را برای عدد مثبت x نشان می دهد. برای مقادیر منفی x از خاصیت قرینه این تابع استفاده می کنیم. از سه ردیف اول جدول زیر ملاحظه می کنید که هر چه مقدار x به صفر نزدیک تر می شود ، مقدار $H(x)$ در جهت مثبت بیشتر و بیشتر می شود. در چنین حالتی ، می گوییم H **در جهت مثبت نا محدود است.**

Is Unbounded in the Positive Direction

این حالت را با نماد $H \to \infty$ نشان می دهیم و خوانده می شود H **به بی نهایت نزدیک می شود.**

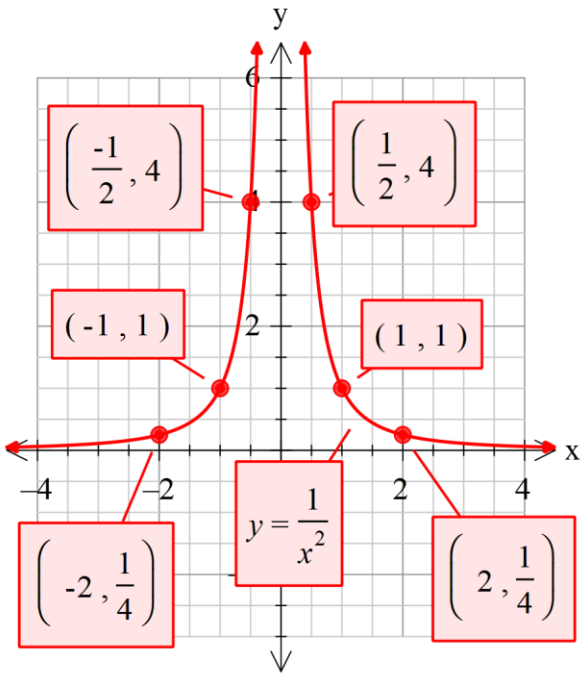
H Approaches Infinity

به چهار ردیف آخر جدول نگاه کنید. ملاحظه می کنید ، هنگامی که $x \to \infty$ مقدار $H(x)$ به صفر نزدیک می شود.

$H(x) = \frac{۱}{x^{۲}}$	x
۴	$\frac{۱}{۲}$
۱۰۰	$\frac{۱}{۱۰}$
۱۰۰۰۰	$\frac{۱}{۱۰۰}$
۱	۱
$\frac{۱}{۴}$	۲

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰	$\frac{۱}{۱۰۰}$
۱۰۰	$\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$



مثال ۴ – بکار بردن تبدیل ها برای رسم یک تابع گویا

Using Transformations to Graph a Rational Function

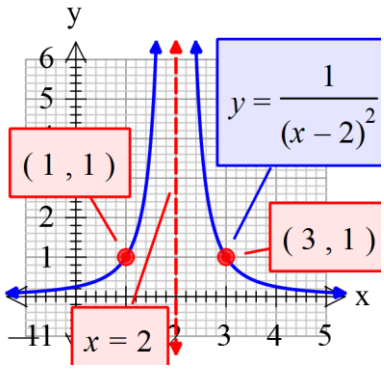
نمودار تابع زیر را رسم کنید.

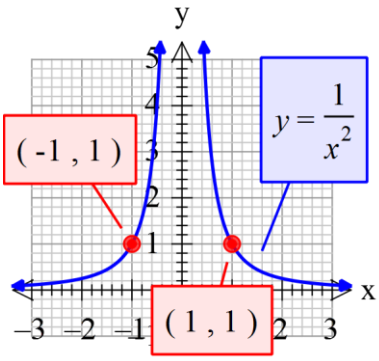
$$R(x) = \frac{۱}{(x-۲)^{۲}} + ۱$$

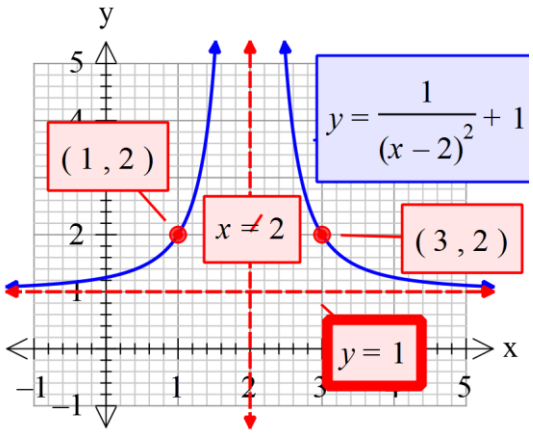
پاسخ

اول باید توجه داشت که دامنه این تابع شامل کلیه اعداد حقیقی است بجز $x = ۲$ برای رسم این تابع اول با نمودار $y = \frac{۱}{x^{۲}}$ شروع می کنیم و در سه مرحله تابع اصلی را رسم می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا







خط های مجانب Asymptotes

در مثال ۴ نمودار $y = \frac{۱}{(x-۲)^۲} + ۱$ ملاحظه می کنید که هنگامی که مقادیر x بیشتر و بیشتر منفی میشود ، یعنی

هنگامی که x در جهت منفی نا محدود میشود Becomes Unbounded in the Negative Direction

$x \to -\infty$ **بخوانید هنگامی که x به بی نهایت منفی نزدیک می شود** ، مقادیر $R(x)$ به یک نزدیک میشود.

در حقیقت از نمودار بالا در مثال ۴ نتایج زیر را بدست آوریم.

۱ - هنگامی که $x \to -\infty$ مقادیر $R(x)$ به یک نزدیک می شوند.

۲ - هنگامی که x به ۲ نزدیک می شود ، مقادیر $R(x) \to \infty$

۳ - هنگامی که $x \to \infty$ مقادیر $R(x)$ به ۱ نزدیک می شوند.

این رفتار نمودار را با خط عمودی $x = ۲$ و خط افقی $y = ۱$ نشان داده ایم. این خط ها را خط های مجانب نمودار می نامند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

خلاصه:

فرض کنید R یک تابع باشد

اگرهنگامی که $x \to -\infty$ و یا $x \to \infty$ پس مقادیر $R(x)$ به یک عدد ثابت L نزدیک شوند ، خط $y = L$ را خط مجانب افقی می نامند. نمودار R ممکن است خط مجانب افقی را قطع کند.

اگر هنگامی که x به یک عدد c نزدیک میشود ، مقادیر $|R(x)| \to \infty$ پس خط $x = c$ یک خط مجانب عمودی نمودار R است. نمودار R هرگز خط مجانب عمودی را قطع نمی کند.

اگر خط مجانب نه عمودی باشد و نه افقی به آن خط مجانب مورب Oblique می گویند. نمودار ممکن است خط مجانب مورب را قطع کند.

گر چه خطوط مجانب قسمتی از نمودار نیستند ،اما اطلاعاتی به ما می دهند تا بدانیم نمودار چگونه به نظر می رسد

پیدا کردن خطوط مجانب Finding Asymptotes

خط مجانب عمودی ،(اگر وجود داشته باشد) ، یک تابع گویای $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (کسر به صورت ساده ترین شکل)، در صفر های مخرج یعنی $q(x)$ قرار دارد.

فرض کنید r یک صفر $q(x)$ باشد ، پس $x - r$ یک فاکتور است. حالا هنگامی که x به r نزدیک می شود یعنی $x \to r$, مقادیر $x - r$ به صفر نزدیک می شوند. و سبب می شوند کسر نا محدود شود ، یعنی

$$|R(x)| \to \infty$$

لذا بنا به تعریف ، نتیجه می گیریم که $x = r$ یک خط مجانب عمودی است.

قضیه :پیدا کردن خطوط مجانب عمودی Theorem: Locating Vertical Asymptotes

یک تابع گویا $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (در ساده ترین شکل)خط مجانب عمودی $x = r$ خواهد داشت ، اگر r یک صفر حقیقی مخرج یعنی q باشد.

اخطار :اگر تابع گویا در ساده ترین شکل نباشد ، بکار بردن قضیه بالا سبب میشود که خطوط مجانب عمودی غلط بدست آید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۵ – پیدا کردن خطوط مجانب عمودی

خطوط مجانب عمودی توابع زیر را ، اگر وجود داشته باشند ، پیدا کنید.

$(a)\quad R(x)=\dfrac{x}{x^{۲}-۴}$ $\qquad$ $(b)\ F(x)=\dfrac{x+۳}{x-۱}$

$(c)\quad H(x)=\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}$ $\qquad$ $(d)\ G(x)=\dfrac{x^{۲}-۹}{x^{۲}+۴x-۲۱}$

پاسخ

(a)

تابع R در ساده ترین شکل است. یعنی صورت و مخرج عامل مشترک ندارند.

$$x^{۲}-۴=(x-۲)(x+۲)$$

بنا بر این خطوط مجانب عمودی خطوط $x=۲$ و $x=-۲$ هستند.

(b)

تابع F در ساده ترین شکل است و تنها صفر حقیقی مخرج ۱ است. پس خط $x=۱$ خط مجانب عمودی F است.

(c)

تابع H در ساده ترین شکل است و مخرج هیچ صفر حقیقی ندارد ، پس این تابع خط مجانب عمودی ندارد.

(d)

$$G(x)=\frac{x^{۲}-۹}{x^{۲}+۴x-۲۱}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{(x-۳)(x+۷)}=\frac{x+۳}{x+۷}\quad ،x\neq ۳$$

لذا $x=-۷$ خط مجانب عمودی G است.

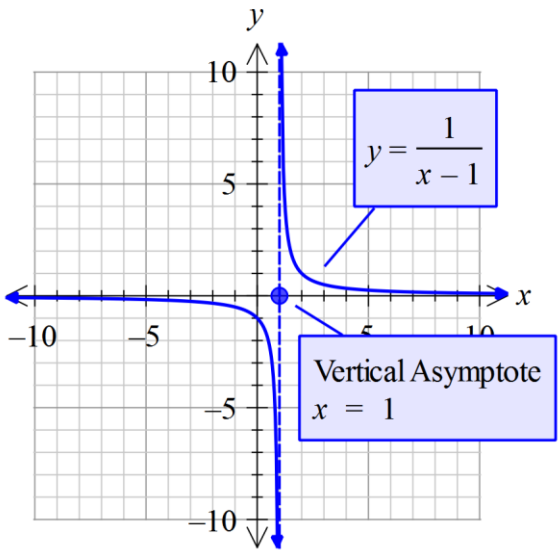
از مثال ۵ نتیجه می گیریم که یک تابع گویا ممکن است هیچ خط مجانب عمودی نداشته باشد ، و یا یک خط مجانب عمودی و یا بیشتر.

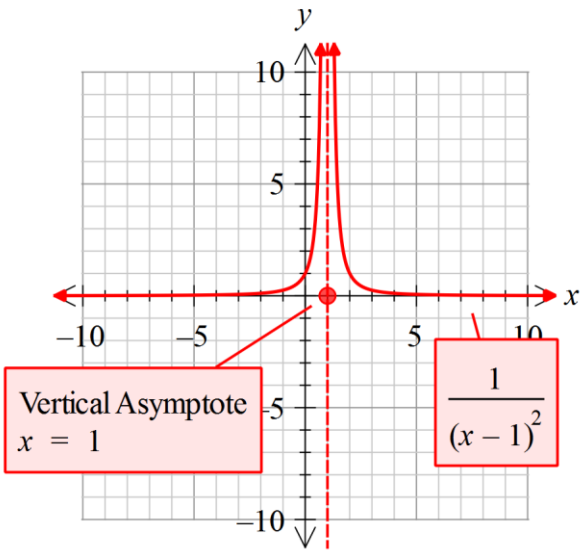
دانلود از سایت ریاضی سرا

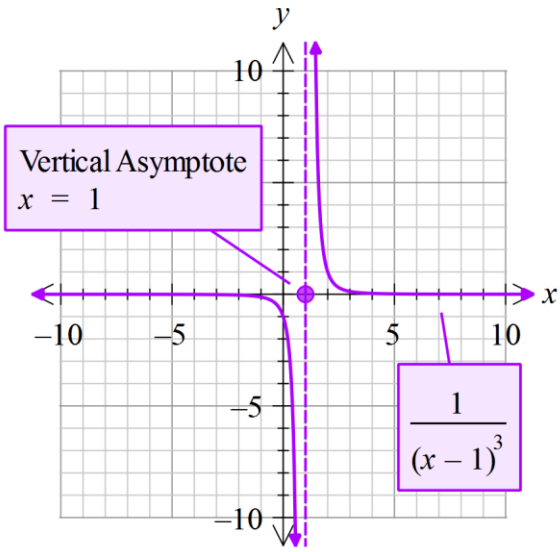
مثال ۶ - توابع زیر را رسم کنید.

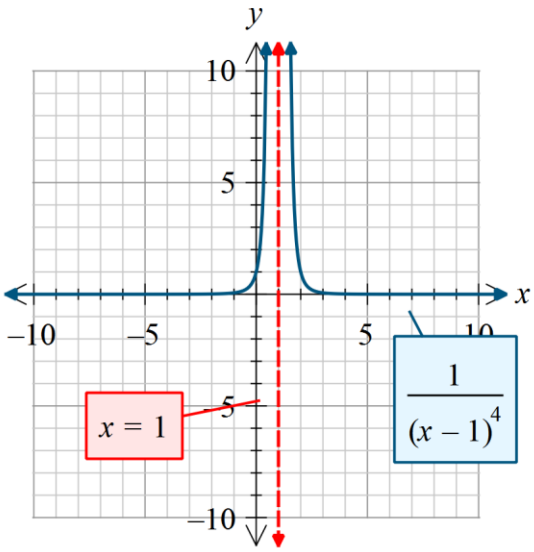
$$R(x)=\frac{۱}{x-۱} \qquad R(x)=\frac{۱}{(x-۱)^{۲}} \qquad R(x)=\frac{۱}{(x-۱)^{۳}} \qquad R(x)=\frac{۱}{(x-۱)^{۴}}$$

پاسخ









ملاحظه می کنید :

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱ – خط مجانب عمودی هر کدام $x = ۱$ است.

۲ – اگر تکرار صفر های مخرج زوج باشد ، نمودار نسبت به خط مجانب عمودی قرینه است. ا گر فرد باشد ، نمودار نسبت به مبدا مختصات ، قرینه است.

۳ – اگر تکرار صفر های مخرج زوج باشد ، هنگامی که x به یک نزدیک می شود ، $R(x)$ به بی نهایت مثبت نزدیک می شود ،(خواه از طرف راست و خواه از طرف چپ).

۴ – اگر تکرار صفر های مخرج فرد باشد ، هنگامی که x از طرف راست به یک نزدیک می شود مقدار $R(x)$ به بی نهایت مثبت نزدیک می شود. اما اگر از طرف چپ به یک نزدیک شود ، مقدار $R(x)$ به بی نهایت منفی نزدیک میشود.

پیدا کردن خط مجانب افقی و مورب تا حدی پیچیده تر است.

قضیه Theorem

اگر تابع گویا ، حقیقی Proper باشد ، یعنی درجه صورت از درجه مخرج کوچک تر باشد ، خط $y = ۰$ یعنی محور x خط مجانب افقی است.

مثال ۷ – خط مجانب افقی تابع زیر را پیدا کنید. (اگر وجود داشته باشد)

$$\boldsymbol{R(x) = \frac{x - ۱۲}{۴x^۲ + x + ۱}}$$

پاسخ

چند نکته مهم در جبر و حسابان

اگر کسر $\frac{۱}{x}$ **داشته باشیم و** $x \to \infty$ و یا $x \to -\infty$ پس $\frac{۱}{x} = ۰$

زیر وقتی که $|x|$ بی نهایت بزرگ باشد ، وقتی که عدد یک و یا هر عدد دیگری حتی میلیون ها بر این عدد بی نهایت بزرگ تقسیم میشود ، حاصل آن تقسیم آنقدر کوچک است ، که به صفر خیلی نزدیک است. پس موارد زیر رابخاطر داشته باشد. هم در جبر و هم در حسابان زیاد بر خورد خواهید کرد.

وقتی که $x \to \pm\infty$ ، $\frac{۱}{x} \to ۰$

وقتی که $x \to \pm\infty$, $x + ۱ \to x$ ۰۰۰۰۰۰۰۰

وقتی که $x \to \pm\infty$ ، $\frac{x}{x^۲} = \frac{۱}{x} \to ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

از این نوع مثال ها در آینده زیاد خواهید دید.

اینک بر میگردیم به پاسخ مثال ۷

تابع گویای

$$\boldsymbol{R(x)=\frac{x-۱۲}{۴x^{۲}+x+۱}}$$

یک تابع حقیقی است. چون درجه صورت که یک است از درجه مخرج که دو است کمتر است و لذا طبق قضیه ، خط مجانب افقی این تابع $y=۰$ است. یعنی محور x

چرا؟

وقتی که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ صورت R که $x-۱۲$ است ، می توان تخمین زد $y=x$

مخرج R که $۴x^{۲}+x+۱$ است ، می توان تخمین زد $y=۴x^{۲}$

در نهایت وقتی که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ خواهیم داشت

$$R(x)=\frac{x-۱۲}{۴x^{۲}+x+۱}\approx\frac{x}{۴x^{۲}}\approx\frac{۱}{۴x}\to۰$$

این نشان می دهد که $y=۰$ یعنی محور x خط مجانب افقی این تابع است.

اگر تابع گویای

$$R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

غیر حقیقی Improper باشد ، یعنی درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد ، باید صورت را بر مخرج تقسیم کنیم تا تابع گویا به صورت مجموع یک چند جمله ای $f(x)$ و یک تابع گویای حقیقی $\frac{r(x)}{q(x)}$ نوشته شود. یعنی بنویسیم

$$R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=f(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

اینجا $f(x)$ یک چند جمله ای است و $\frac{r(x)}{q(x)}$ یک تابع گویای حقیقی است.

حال چون $\frac{r(x)}{q(x)}$ یک تابع گویای حقیقی است، پس

دانلود از سایت ریاضی سرا

$\frac{r(x)}{q(x)} \to ۰$ وقتی که $x \to \pm\infty$

و در نتیجه

$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \to f(x)$ وقتی که $x \to \pm\infty$

در این صورت امکانات زیر پیش می آید.

۱ – اگر $f(x) = b$ یعنی یک عدد ثابت ، پس خط $y = b$ خط مجانب افقی R است.

۲ -اگر $a \neq ۰$ ، $f(x) = ax + b$ باشد ، پس خط $y = ax + b$ خط مجانب مورب R است.

۳ – اگر دو مورد بالا پیش نیاید ، نمودار R به نمودار f نزدیک می شود ، و خط مجانب افقی یا مورب وجود ندارد.

مثال ۸ – خط مجانب افقی یا مورب تابع زیر را پیدا کنید.

$$\boldsymbol{H(x) = \frac{۳x^۴ - x^۲}{x^۳ - x^۲ + ۱}}$$

پاسخ

$$\begin{array}{r|l} & 3x+3 \\ \hline x^3 - x^2 + 1 & 3x^4 - x^2 \\ & \underline{3x^4 - 3x^3 + 3x} \\ & 3x^3 - x^2 - 3x \\ & \underline{3x^3 - 3x^2 + 3} \\ & 2x^2 - 3x - 3 \end{array}$$

در نتیجه

$$H(x) = \frac{۳x^۴ - x^۲}{x^۳ - x^۲ + ۱} = ۳x + ۳ + \frac{۲x^۲ - ۳x - ۳}{x^۳ - x^۲ + ۱}$$

پس

$x \to \pm\infty$ وقتی که

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{۲x^۲ - ۳x - ۳}{x^۳ - x^۲ + ۱} \approx \frac{۲x^۲}{x^۳} = \frac{۲}{x} \to ۰$$

پس

$x \to \pm\infty$ وقتی که ، $H(x) \to ۳x + ۳$

نتیجه می گیریم H خط مجانب مورب $y = ۳x + ۳$ دارد.

مثال ۹ – خط مجانب افقی یا مورب را پیدا کنید.

$$\boldsymbol{R(x)\ \frac{۸x^۲ - x + ۲}{۴x^۲ - ۱}}$$

پاسخ

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ 4x^2 - 1 & 8x^2 - x + 2 \\ & \underline{8x^2 - 2} \\ & -x + 4 \end{array}$$

لذا

$$R(x) = \frac{۸x^۲ - x + ۲}{۴x^۲ - ۱} = ۲ + \frac{-x + ۴}{۴x^۲ - ۱}$$

پس خط $y = ۲$ خط مجانب افقی R است.

مثال ۱۰

خط مجانب افقی یا مورب را پیدا کنید.

$$\boldsymbol{G(x) = \frac{۲x^۵ - x^۳ + ۲}{x^۳ - ۱}}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 1 \\
\hline
x^3 - 1 & 2x^5 - x^3 - 2 \\
 & \underline{2x^5 - 2x^2} \\
 & -x^3 + 2x^2 + 2 \\
 & \underline{-x^3 + 1} \\
 & 2x^2 + 1
\end{array}
$$

لذا

$$G(x) = \frac{۲x^۵ - x^۳ + ۲}{x^۳ - ۱} = ۲x^۲ - ۱ + \frac{۲x^۲ + ۱}{x^۳ - ۱}$$

اما $y = ۲x^۲ - ۱$ معادله خطی نیست ، لذا G نه خط مجانب افقی دارد و نه مورب.

دانلود از سایت ریاضی سرا

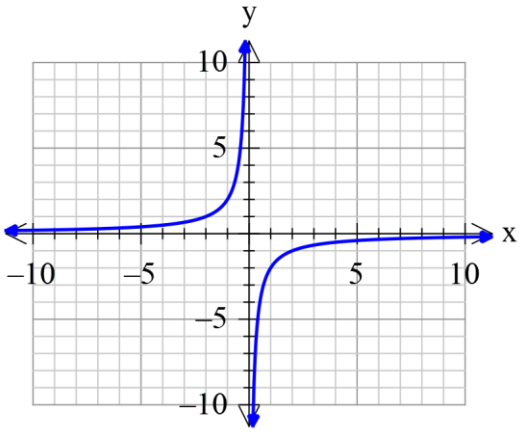
تمرینات ۳ .۵ ۱

با استفاده از نمودار های زیر

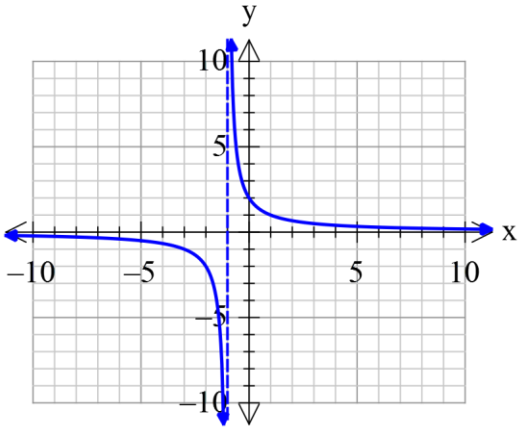
الف –دامنه و برد تابع را پیدا کنید.

ب –خطوط مجانب را نام ببرید. (اگر وجود داشته باشد)

۱)

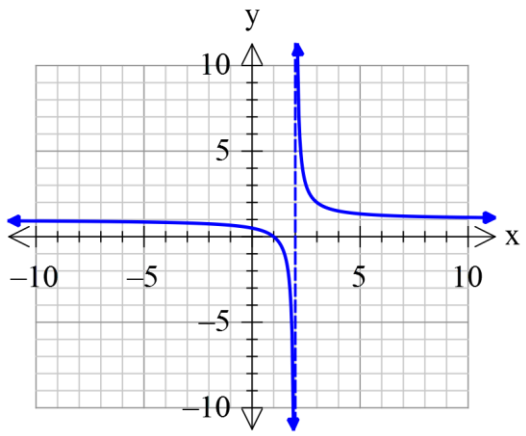


۲)



دانلود از سایت ریاضی سرا

۳)



نمودار توابع زیر را از طریق تبدیل رسم کنید. (ابتدا یک تابع پایه مربوط پیدا کنید و آنرا رسم نموده و سپس از طریق تبدیل نمودار مورد نظر را پیدا کنید.)

۴) $F(x) = ۲ + \frac{۱}{x}$

۵) $Q(x) = ۳ + \frac{۱}{x^{۲}}$

۶) $R(x) = \frac{۱}{(x-۱)^{۲}}$

۷) $R(x) = \frac{۳}{x}$

۸) $H(x) = \frac{-۲}{x+۱}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $G(x) = \dfrac{۲}{(x+۲)^{۲}}$

۱۰) $\dfrac{-۱}{x^{۲}+۴x+۴}$

۱۱) $R(x) = \dfrac{۱}{x-۱} + ۱$

خطوط مجانب (اگر وجود داشته باشد) توابع زیر را پیدا کنید. (عمودی ، افقی ، یا مورب)

۱۲) $R(x) = \dfrac{۳x}{x+۴}$

۱۳) $R(x) = \dfrac{۳x+۵}{x-۶}$

۱۴) $H(x) = \dfrac{x^{۴}+۲x^{۲}+۱}{x^{۲}-x+۱}$

۱۵) $G(x) = \dfrac{-x^{۲}+۱}{x+۵}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

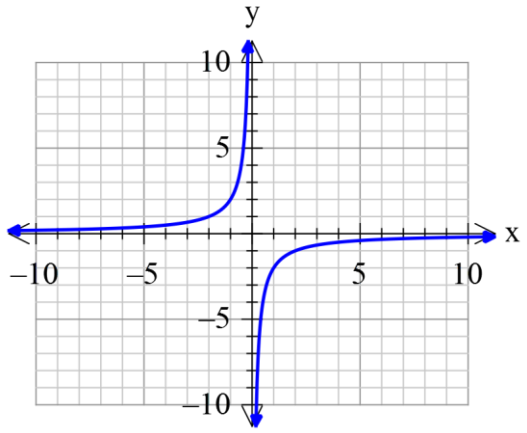
پاسخ تمرینات ۳ .۱۰

با استفاده از نمودار های زیر

الف –دامنه و برد تابع را پیدا کنید.

ب –خطوط مجانب را نام ببرید. (اگر وجود داشته باشد)

۱)



دامنه :کلیه اعداد حقیقی بجز صفر.

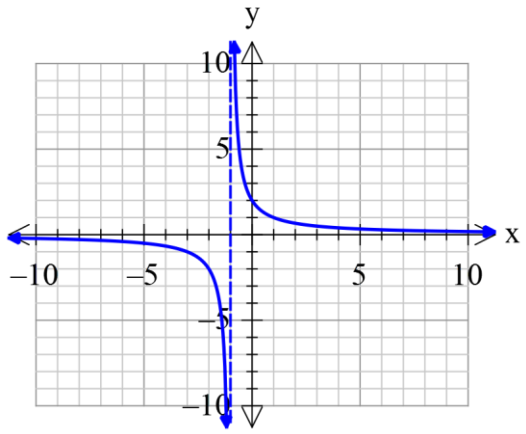
برد :کلیه اعداد حقیقی بجز صفر.

مجانب افقی محور x

مجانب عمودی محور y

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲)



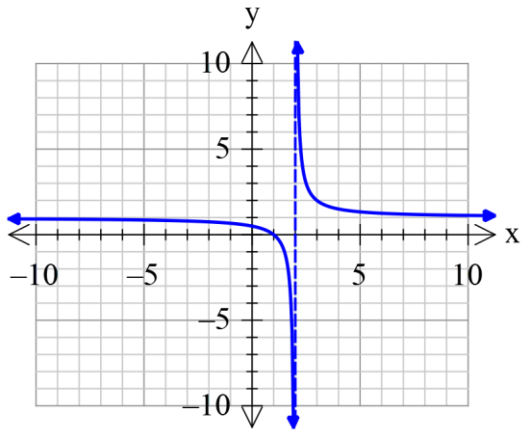
دامنه :کلیه اعداد حقیقی بجز ۱−

برد کلیه اعداد حقیقی بجز صفر

مجانب افقی محور x

مجانب عمودی خط $x = -۱$

۳)



دامنه کلیه اعداد حقیقی بجز ۲.

برد کلیه اعداد حقیقی بجز ۱ .

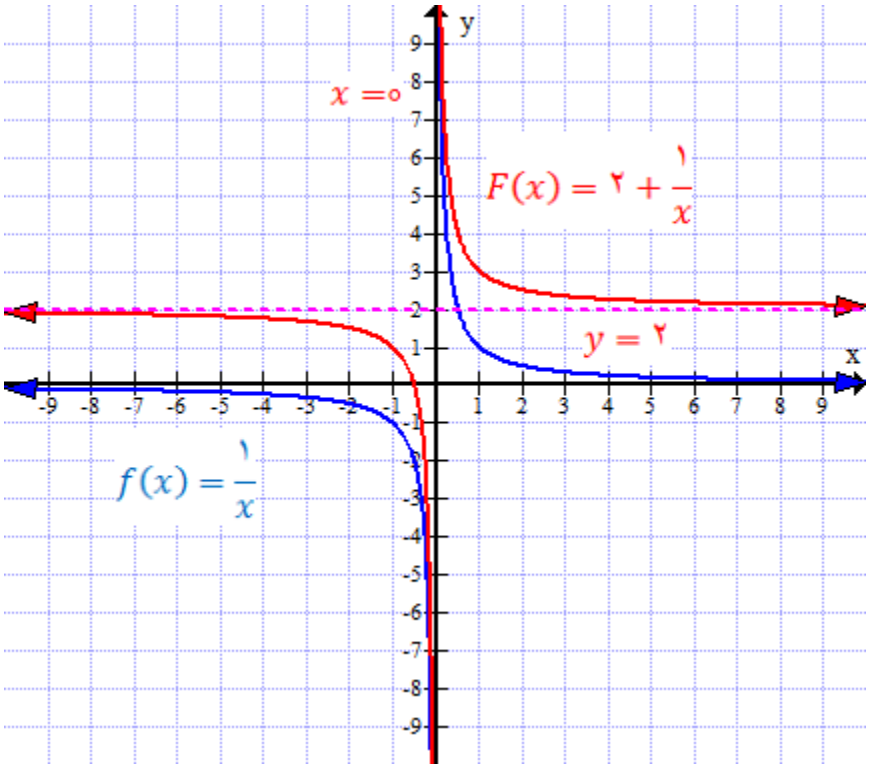
مجانب افقی خط $y = ۱$

مجانب عمودی خط $x = ۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا

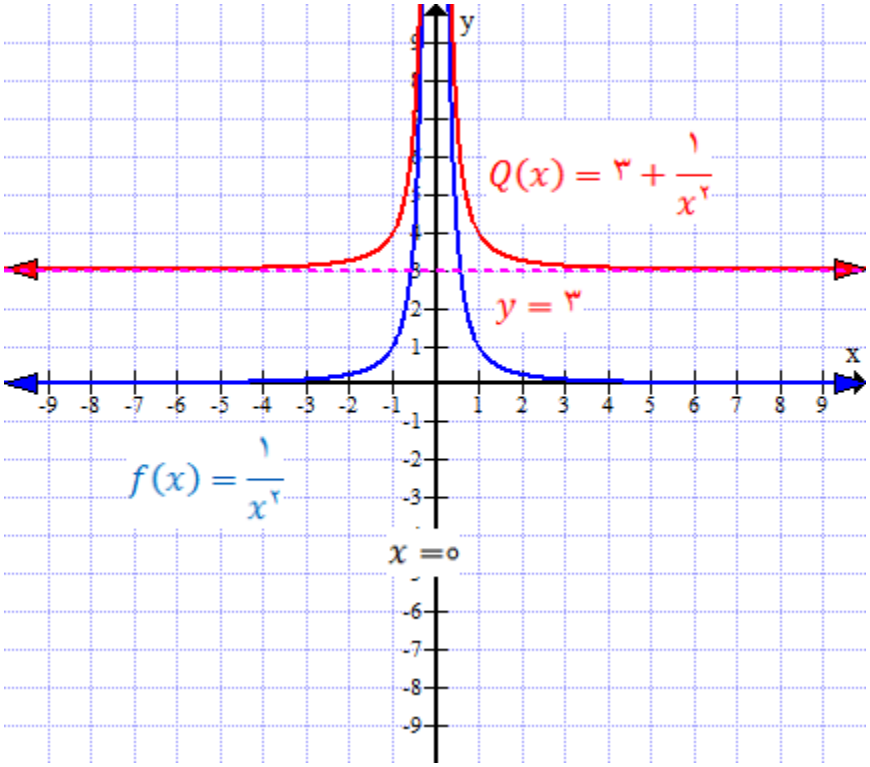
نمودار توابع زیر را از طریق تبدیل رسم کنید. (ابتدا یک تابع پایه مربوط پیدا کنید و آنرا رسم نموده و سپس از طریق تبدیل نمودار مورد نظر را پیدا کنید.)

۴) $F(x) = ۲ + \frac{۱}{x}$

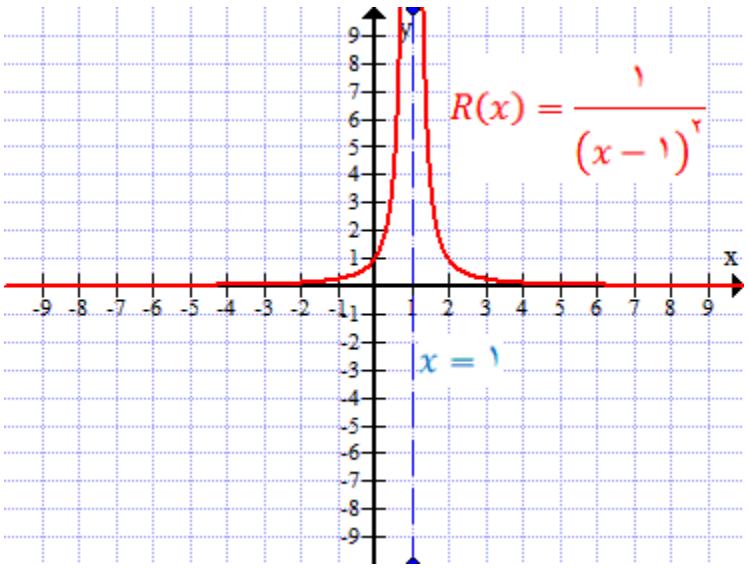


دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $Q(x) = ۳ + \frac{۱}{x^۲}$

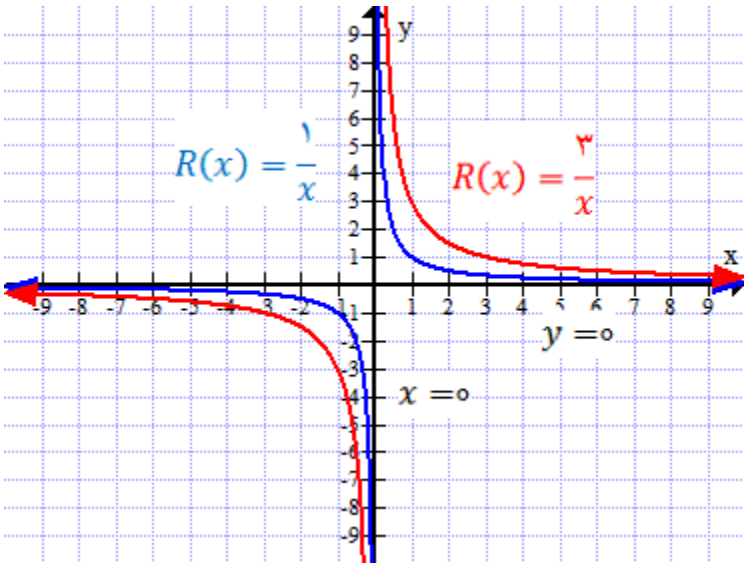


۶) $R(x) = \frac{۱}{(x-۱)^۲}$

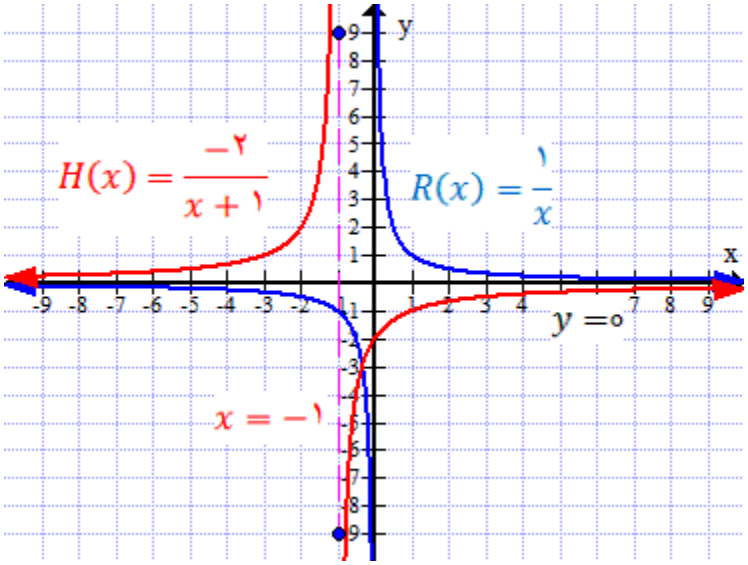


دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $R(x) = \frac{۳}{x}$

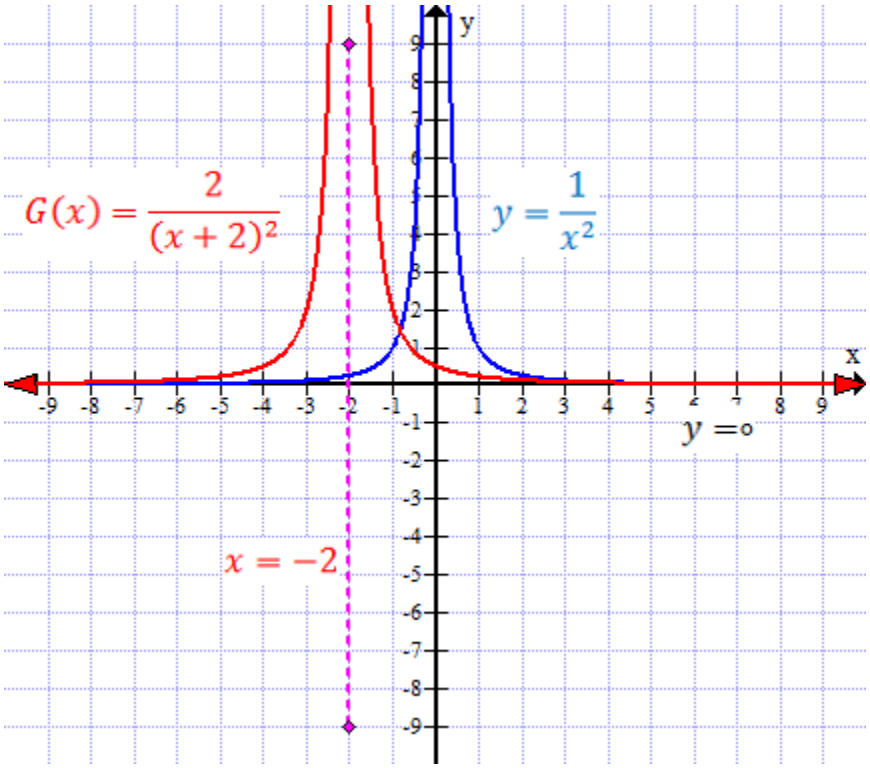


۸) $H(x) = \frac{-۲}{x+۱}$



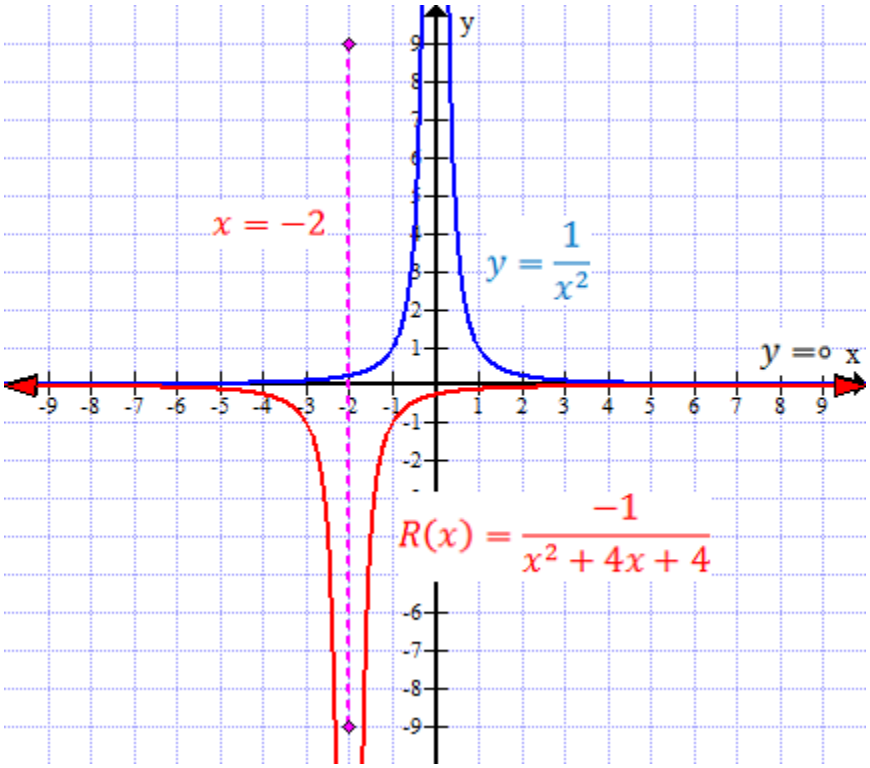
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $G(x) = \dfrac{۲}{(x+۲)^{۲}}$



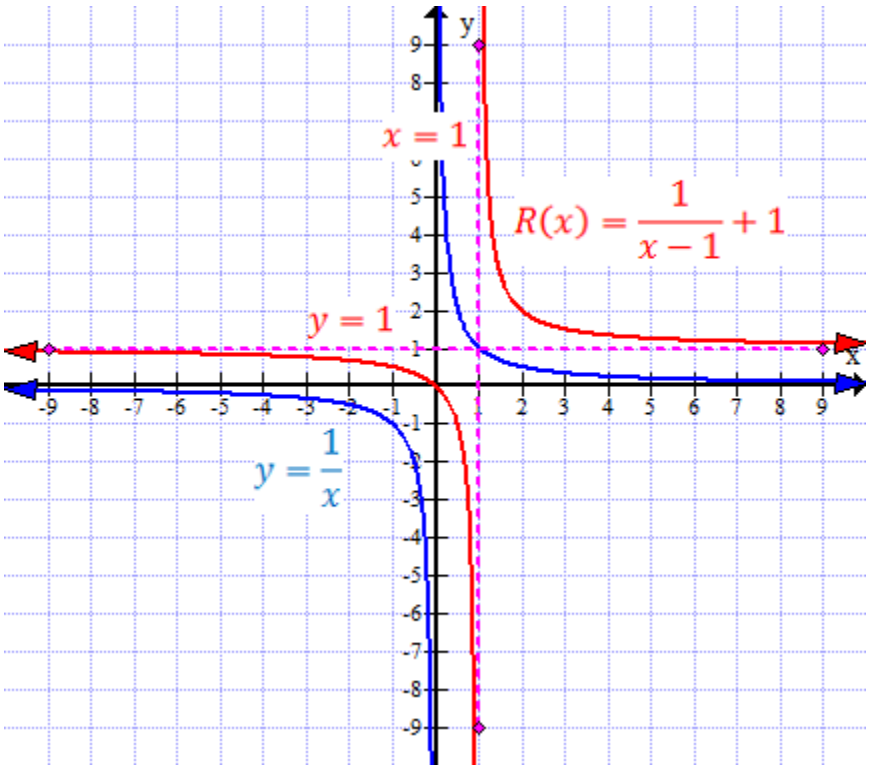
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $\dfrac{-۱}{x^{۲}+۴x+۴}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $R(x) = \frac{۱}{x - ۱} + ۱$



دانلود از سایت ریاضی سرا

خطوط مجانب (اگر وجود داشته باشد) توابع زیر را پیدا کنید. (عمودی ، افقی ، یا مورب)

۱۲) $R(x) = \dfrac{۳x}{x+۴}$

$x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۴$

پس مجانب عمودی $x = -۴$

```
x + 4 | 3
      |-------
      | 3x
      | 3x + 12
      |-------
      |     - 12
```

پس

$$R(x) = \frac{۳x}{x+۴} = ۳ + \frac{-۱۲}{x+۴}$$

مجانب افقی $y = ۳$

۱۳) $R(x) = \dfrac{۳x+۵}{x-۶}$

مجانب عمودی $x = ۶$

```
x - 6 | 3
      |-------
      | 3x + 5
      | 3x - 18
      |-------
      |     23
```

پس

$$R(x) = \frac{۳x+۵}{x-۶} = ۳ + \frac{۲۳}{x-۶}$$

مجانب افقی $y = ۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۱۴)\quad H(x)=\frac{x^{۴}+۲x^{۲}+۱}{x^{۲}-x+۱}$$

مجانب عمودی ندارد زیرا معادله زیر جواب حقیقی ندارد.

$$x^{۲}-x+۱=۰$$

مجانب افقی هم ندارد زیرا

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 2 \\ \hline
x^2 - x + 1 & x^4 + 2x^2 + 1 \\
 & x^4 - x^3 + x^2 \\ \hline
 & x^3 + x^2 + 1 \\
 & x^3 - x^2 + x \\ \hline
 & 2x^2 - x + 1 \\
 & 2x^2 - 2x + 2 \\ \hline
 & x - 1
\end{array}$$

پس

$$H(x)=\frac{x^{۴}+۲x^{۲}+۱}{x^{۲}-x+۱}=x^{۲}+x+۲+\frac{x-۱}{x^{۲}-x+۱}$$

$$f(x)=x^{۲}+x+۲$$

یک خط مستقیم نیست.

$$۱۵)\quad G(x)=\frac{-x^{۲}+۱}{x+۵}$$

مجانب عمودی خط $x=-۵$

$$\begin{array}{r|l}
 & -x + 5 \\ \hline
x + 5 & -x^2 + 1 \\
 & -x^2 - 5x \\ \hline
 & 5x + 1 \\
 & 5x + 25 \\ \hline
 & -24
\end{array}$$

پس

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$G(x) = \frac{-x^{۲} + ۱}{x + ۵} = -x + ۵ + \frac{-۲۴}{x + ۵}$$

مجانب مورب خط $y = -x + ۵$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)