فصل یازدهم

توابع مجهول القوه ولگاریتم

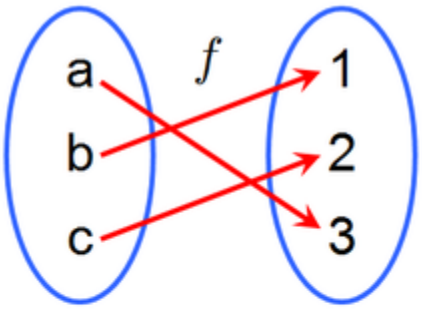
Exponential and Logarithmic Functions

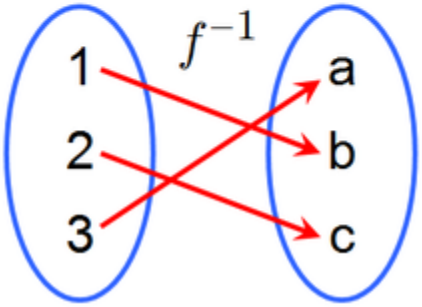
۱۱.۱ – توابع یک به یک ؛ توابع معکوس One-to-one Functions; Inverse Functions

می توان یک تابع f به یک ماشین مانند کرد که یک عدد ورودی مانند x دریافت می کند و تغییراتی به آن می دهد و نتیجه که $f(x)$ است به عنوان خروجی به ما می دهد.

معکوس f به عنوان ورودی عدد $f(x)$ را دریافت می کند ، آنرا تغییر می دهد و مقدار x را به عنوان خروجی به ما می دهد.

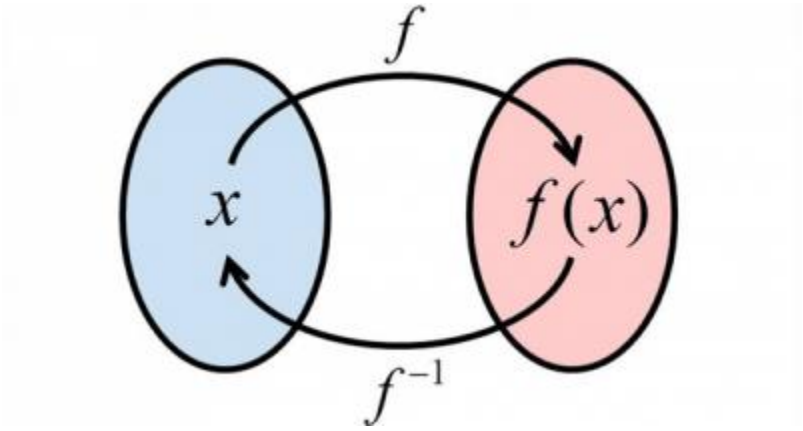
تابع f





معکوس f

دانلود از سایت ریاضی سرا



مثال ۱ – پیدا کردن معکوس یک تابع Finding the Inverse of a Function

معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

$a)\ \{(-۳,-۲۷),(-۲,-۸),(-۱,-۱),(۰,۰),(۱,۱),(۲,۸),(۳,۲۷)\}$

$b)\ \{(-۳,۹),(-۲,۴),(-۱,۱),(۰,۰),(۱,۱),(۲,۴),(۳,۹)\}$

پاسخ

معکوس توابع بالا با جابجا کردن اقلام در هر یک از زوج های مرتب بدست می آید.

$a)\ \{(-۲۷,-۳),(-۸,-۲),(-۱,-۱),(۰,۰),(۱,۱),(۸,۲),(۲۷,۳)\}$

$b)\ \{(۹,-۳),(۴,-۲),(۱,-۱),(۰,۰),(۱,۱),(۴,۲),(۹,۳)\}$

اگر به پاسخ مثال یک توجه کنید ، ملاحظه می کنید که معکوس بدست آمده در قسمت (a) یک تابع است اما معکوس بدست آمده در قسمت (b) یک تابع نیست.

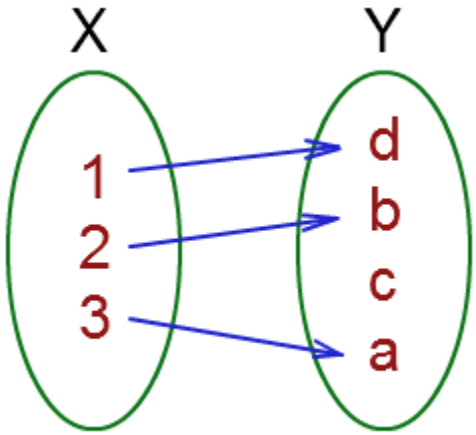
وقتی که معکوس یک تابع مانند f ، خود یک تابع است ، پس به f می گویند تابع یک به یک.

تعریف تابع یک به یک – تابع f یک تابع یک به یک است اگر برای هرانتخابی از عناصر $x_۱$ و $x_۲$ در دامنه f و $x_۱ \neq x_۲$ پس $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ با هم مساوی نیستند یعنی $f(x_۱) \neq f(x_۲)$

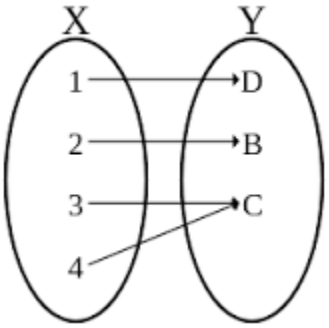
به عبارت دیگر تابع f یک به یک است ، اگر برای هر x در دمنه f فقط یک y در برد f وجود دارد ، و هیچ y در برد f باز تاب بیش از یک x در دامنه نیست.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تصویر زیر یک تابع یک به یک را نشان می دهد.



تابع زیر یک به یک نیست.

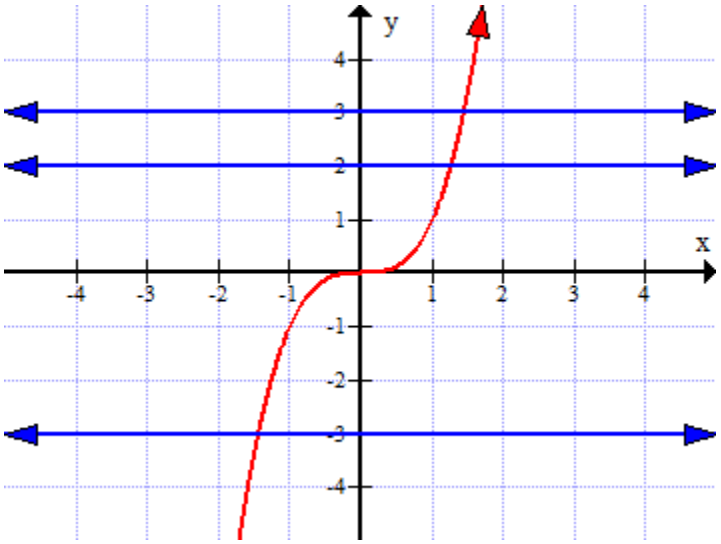


قضیه Theorem

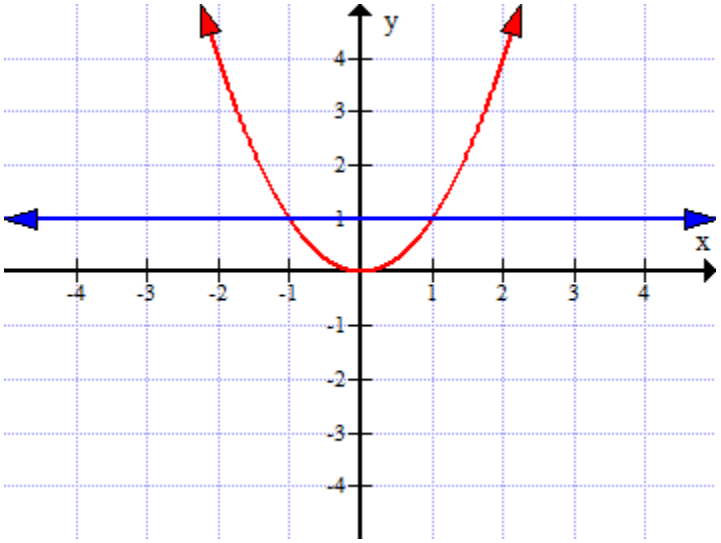
اگر هر خط افقی ، نمودار یک تابع را فقط در یک نقطه قطع کنند ، آن تابع یک به یک است.

نمودار زیر ، نمودار یک تابع یک به یک است.

دانلود از سایت ریاضی سرا



نمودار زیر ، نمودار یک تابع یک به یک نیست.



قضیه –اگر یک تابع برای تمام عناصر در دامنه اش صعودی باشد ، آن تابع یک به یک است.

اگر یک تابع برای تمام عناصر در دامنه اش نزولی باشد ، آن تابع یک به یک است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

معکوس تابع $y = f(x)$

اگر یک تابع ، یک به یک باشد ، معکوس آن هم یک تابع است. بنا بر این ، برای هر x در دامنه f فقط یک y در برد وجود دارد و برای هر y در برد f فقط یک x در دامنه موجود است.برگشت Correspondence از برد f به دامنه f را **تابع معکوس f می نامند. و با نماد f^{-1} نشان داده می شود.**

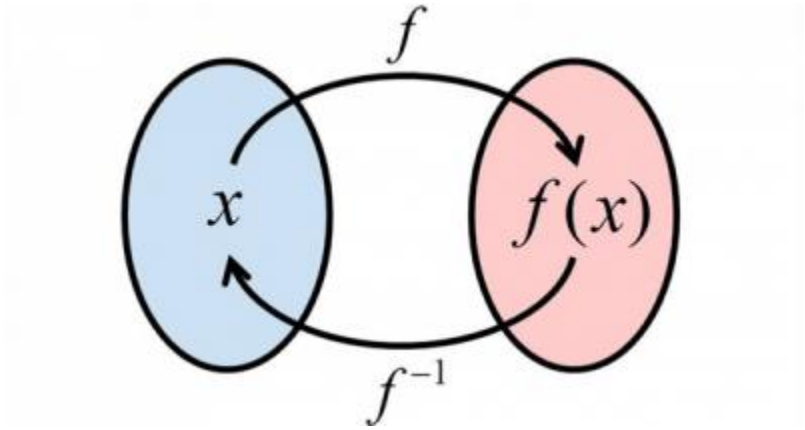
توجه :نماد f^{-1} نشانه برای تابع معکوس f است. -1 که در f^{-1} ملاحظه می کنید ، توان نیست. یعنی

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

دو نکته در مورد f و f^{-1} واضح است.

دامنه f^{-1} = برد f و برد f^{-1} = دامنه f

به تصویر زیر نگاه کنید. اگر از x شروع کنیم و f را بکار ببریم و سپس f^{-1} بکار ببریم ، باز به x بر می گردیم. اگر از x شروع کنیم و f^{-1} را بکار ببریم و سپس f را بکار ببریم باز x بدست می آوریم.



پس

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \text{ و } f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

مثلا تابع $f(x) = 2x$ شناسه x را در دو ضرب می کند. تابع معکوس f^{-1} آنچه را که f انجام داده خنثی می کند. بنا بر این تابع معکوس f میشود $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ یعنی شناسه x را بر دو تقسیم می کند. درستی این مطلب را می توان به صورت زیر نشان داد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x) = \frac{1}{2}(2x) \quad \text{و} \quad f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}x\right) = x$$

درستی توابع معکوس را ثابت کردن Verifying Inverse Functions

مثال ۲ –

الف –نشان دهید که $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ تابع معکوس $f(x) = x^3$ است.

پاسخ

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(x^3\right) = \sqrt[3]{x^3} = x \quad \text{و} \quad f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

ب –نشان دهید که $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$ تابع معکوس $h(x) = 3x$ است.

پاسخ

$$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(3x) = \frac{1}{3}(3x) = x \quad \text{و} \quad h\left(h^{-1}(x)\right) = h\left(\frac{1}{3}x\right) = 3\left(\frac{1}{3}x\right) = x$$

ج -نشان دهید که $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-3)$ تابع معکوس $f(x) = 2x + 3$ است.

پاسخ

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{1}{2}[(2x+3)-3] = \frac{1}{2}(2x) = x$$

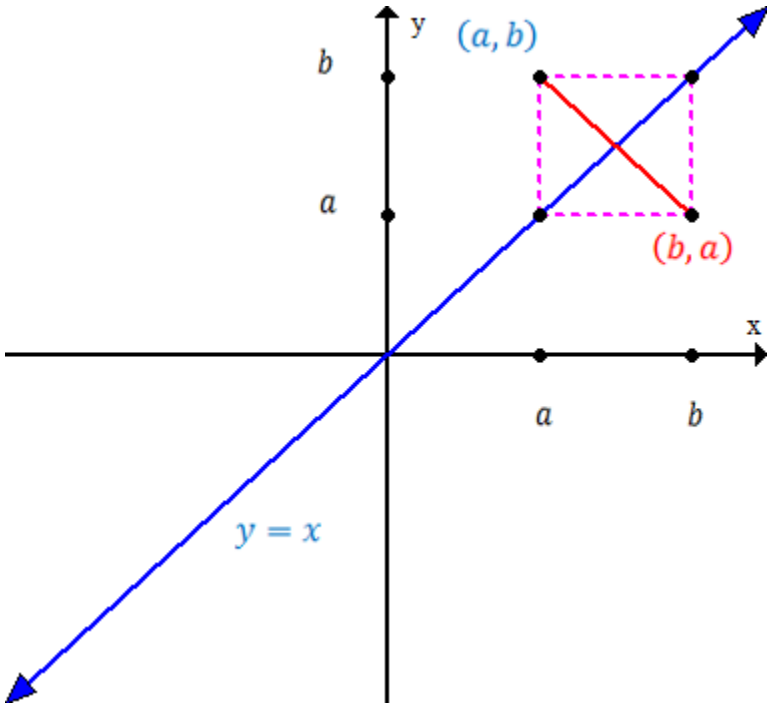
$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) = 2\left[\frac{1}{2}(x-3)\right] + 3 = (x-3) + 3 = x$$

تفسیر هندسی Geometric Interpretation

فرض کنید (a,b) یک نقطه روی نمودار یک تابع یک به یک $y = f(x)$؛ f است. پس $b = f(a)$ یعنی $a = f^{-1}(b)$ پس (b,a) یک نقطه روی نمودار تابع معکوس f^{-1} است. رابطه بین (a,b) روی f و (b,a) روی f^{-1} در شکل زیر نشان داده شده است. خط $y = x$ عمود منصف پاره خطی است که شامل نقاط

دانلود از سایت ریاضی سرا

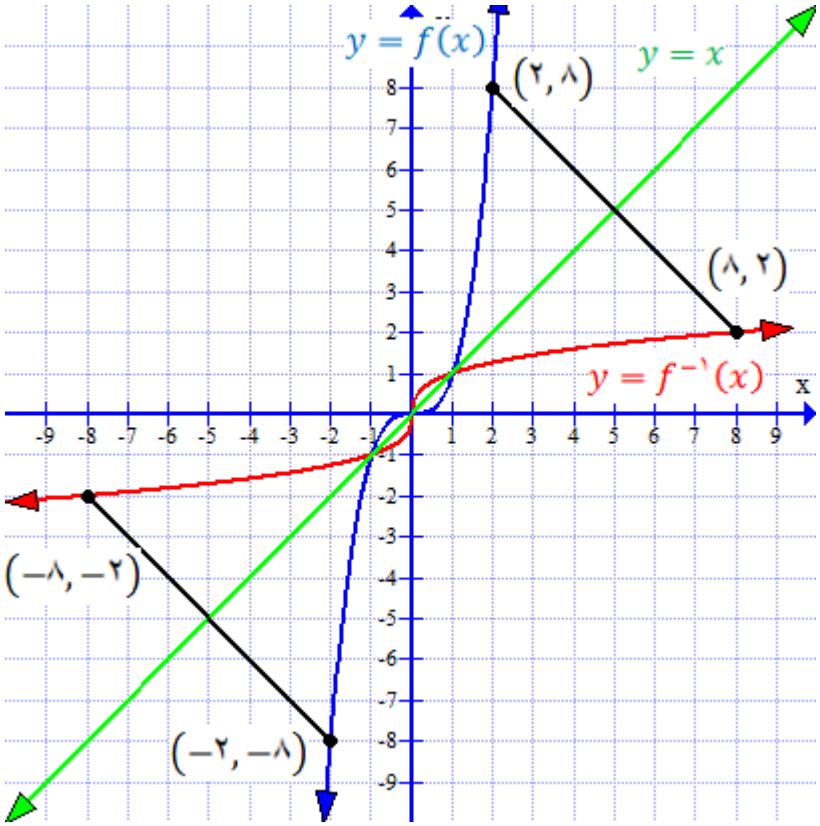
(a,b) و (b,a) می باشد. پس نتیجه می گیریم که نقطه (b,a) روی f^{-1} انعکاس نقطه (a,b) است حول خط $y=x$



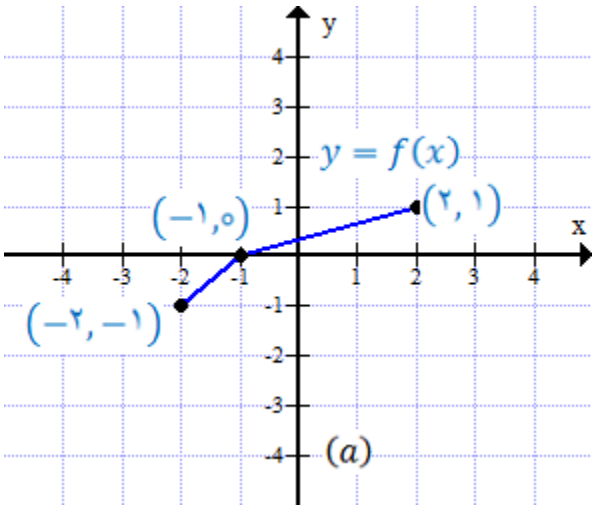
دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه –نمودار یک تابع مانند f و نمودار معکوس آن یعنی $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ قرینه هستند.

شکل زیر نمایش قضیه بالا است.



مثال ۳ – نمودار شکل (a) نمودار یک تابع یک به یک است. نمودار معکوس آنرا رسم کنید.

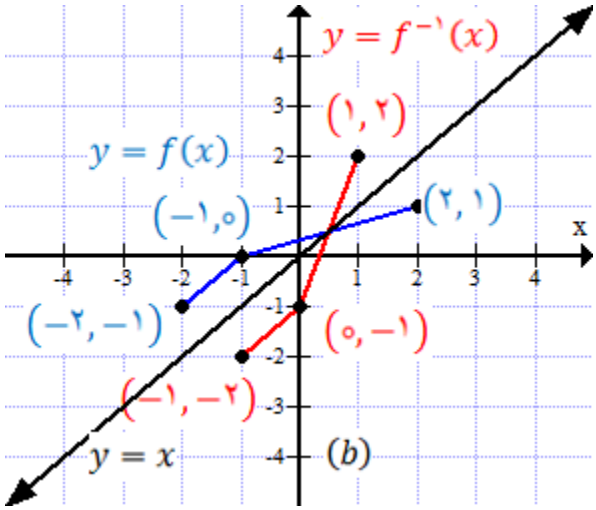


دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ :

چون نقاط $(۲,۱),(-۱,۰),(-۲,-۱)$ روی نمودار f است ، می دانیم که نقاط $(۱,۲),(۰,-۱),(-۱,-۲)$ باید روی نمودار $f^{-۱}$ باشد. همچنین به یاد داریم که نمودار $f^{-۱}$ انعکاس نمودار f است حول خط $y=x$

نمودار را در شکل (b) در ذیل ملاحظه می کنید.



پیدا کردن تابع معکوس $f^{-۱}$ Finding the Inverse Function

این حقیقت که نمودار یک تابع یک به یک f و معکوس آن $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ قرینه است ، جزئیات بیشتری به ما می گوید. می گوید که می توانیم با جا بجا کردن رول y و x در f به معکوس آن یعنی $f^{-۱}$ برسیم.

مثال ۴ – پیدا کردن تابع معکوس $f^{-۱}$

تابع معکوس $f(x)=۲x+۳$ را پیدا کنید. همچنین دامنه و برد هر دو تابع را پیدا کنید و هر دو را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

پاسخ

در تساوی $y=۲x+۳$ جای y و x را با هم عوض می کنیم. در نتیجه خواهیم داشت.

$$x=۲y+۳$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تساوی بالا تابع معکوس $f^{-۱}$ را بطور ضمنی Implicitly بیان می کند. برای بیان صریح Explicitly معادله بالا را برای y حل می کنیم.

$$۲y + ۳ = x$$

$$۲y = x - ۳$$

$$y = \frac{۱}{۲}(x - ۳)$$

پس شکل صریح $f^{-۱}$ به شکل زیر است.

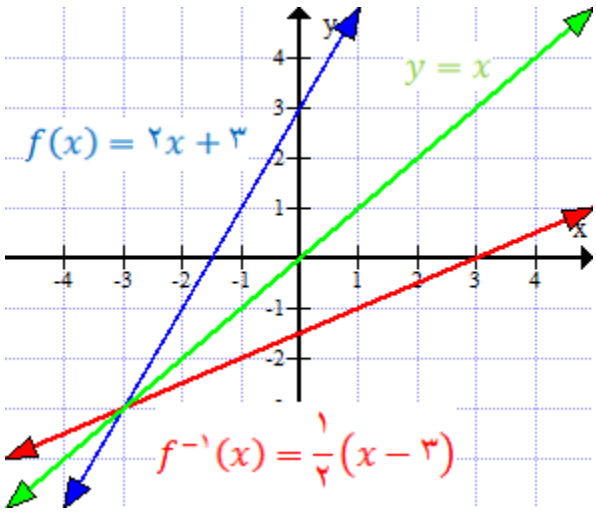
$$f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}(x - ۳)$$

حالا دامنه و برد هر یک را پیدا می کنیم.

$$\text{دامنه } f = \text{برد } f^{-۱} = (-\infty, \infty)$$

$$\text{برد } f = \text{دامنه } f^{-۱} = (-\infty, \infty)$$

نمودار f و $f^{-۱}$ را در ذیل ملاحظه می کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

روش پیدا کردن معکوس یک تابع یک به یک

Procedure for Finding the Inverse of a One-to-one Function

الف –در $y = f(x)$ جای متغیر های y و x را عوض کنید . و در نتیجه $x = f(y)$ بدست می آورید.

ب –اگر ممکن باشد ، معادله بدست آمده از مرحله الف ، را برای y حل کنید تا معادله زیر بدست آید.

$$y = f^{-۱}(x)$$

ج –نتیجه را امتحان کنید و نشان دهید

$$f^{-۱}\big(f(x)\big) = x \quad \text{و} \quad f\left(f^{-۱}(x)\right) = x$$

مثال ۵ –

تابع زیر یک تابع یک به یک است. معکوس آنرا پیدا کنید و نتجه را امتحان کنید.

$$f(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱} \qquad x \neq ۱$$

پاسخ

الف –در تساوی زیرمتغیر های y و x را جابجا می کنیم.

$$y = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$$

تا تساوی زیر را بدست آوریم.

$$x = \frac{۲y + ۱}{y - ۱}$$

ب –تساوی بدست آمده را برای y حل می کنیم.

$$x\big(y - ۱\big) = ۲y + ۱$$

$$xy - x = ۲y + ۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$xy - ۲y = x + ۱$$

$$y(x - ۲) = x + ۱$$

$$y = \frac{x + ۱}{x - ۲}$$

پس معکوس به شکل زیر است

$$f^{-۱}(x) = \frac{x + ۱}{x - ۲} \qquad x \neq ۲$$

ج –امتحان می کنیم.

$$f^{-۱}(f(x)) = f^{-۱}\left(\frac{۲x + ۱}{x - ۱}\right) = \frac{\frac{۲x + ۱}{x - ۱} + ۱}{\frac{۲x + ۱}{x - ۱} - ۲} = \frac{\frac{۲x + ۱ + x - ۱}{x - ۱}}{\frac{۲x + ۱ - ۲x + ۲}{x - ۱}} = \frac{۳x}{۳} = x$$

$$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f\left(\frac{x + ۱}{x - ۲}\right) = \frac{۲\left(\frac{x + ۱}{x - ۲}\right) + ۱}{\frac{x + ۱}{x - ۲} - ۱} = \frac{\frac{۲x + ۲ + x - ۲}{x - ۲}}{\frac{x + ۱ - x + ۲}{x - ۲}} = \frac{۳x}{۳} = x$$

مثال ۶ – پیدا کردن برد یک تابع Finding the Range of a Function

دامنه و برد تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$$

پاسخ

دامنه f شامل $\{x | x \neq ۱\}$ برای پیدا کردن برد ، باید اول معکوس تابع را یعنی $f^{-۱}$ پیدا کنیم. در مثال ۵ معکوس تابع را بدست آوردیم که به صورت زیر است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{x-۲}$$

دامنه $f^{-۱}$ شامل $\{x|x \neq ۲\}$ پس برد f شامل $\{y|y \neq ۲\}$ است.

مثال ۷ – پیدا کردن معکوس یک تابع با دامنه محدود

Finding the Inverse of a Domain-Restricted Function

معکوس تابع زیر را پیدا کنید اگر $x \geq ۰$ باشد.

$$y = f(x) = x^۲ \quad \text{اگر} \quad x \geq ۰$$

پاسخ

تابع $y = x^۲$ تابع یک به یک نیست ، اما اگر این تابع را محدود کنیم به آن قسمت از دامنه اش که در آن $x \geq ۰$ باشد ، انوقت یک تابع صعودی خواهیم داشت که یک به یک است. در نتیجه این تابع ، معکوس دارد.

اینک مراحل سه گانه را طی می کنیم.

الف –در تساوی $y = x^۲ \ , x \geq ۰$ جای متغیر ها را عوض می کنیم در نتیجه

$$x = y^۲ \ , y \geq ۰$$

ب –تساوی بالا را برای y حل می کنیم.

$$y = \sqrt{x}$$

پس

$$f^{-۱} = \sqrt{x}$$

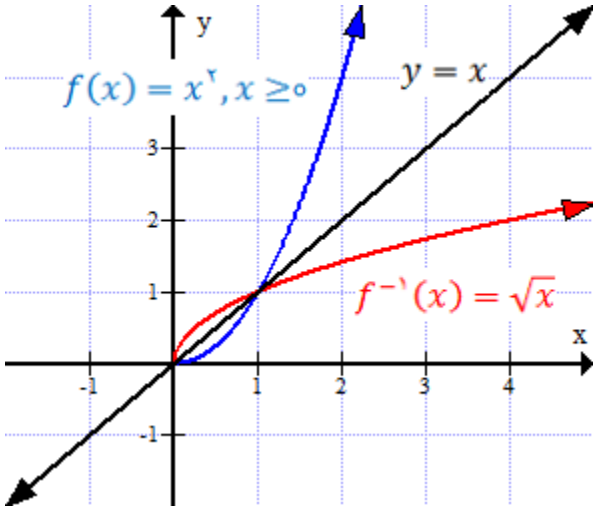
ج – امتحان می کنیم.

$$f^{-۱}\big(f(x)\big) = f^{-۱}\left(x^۲\right) = \sqrt{x^۲} = |x| = x$$

$$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^۲ = x$$

نمودار را هم رسم می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا



تمرینات ۱۱.۱

در تمرینات ۴-۱

الف –معکوس تابع را پید کنید.

ب –آیا معکوس هم یک تابع است؟

۱) $\{(۲,۶),(-۳,۶),(۴,۹),(۱,۱۰)\}$

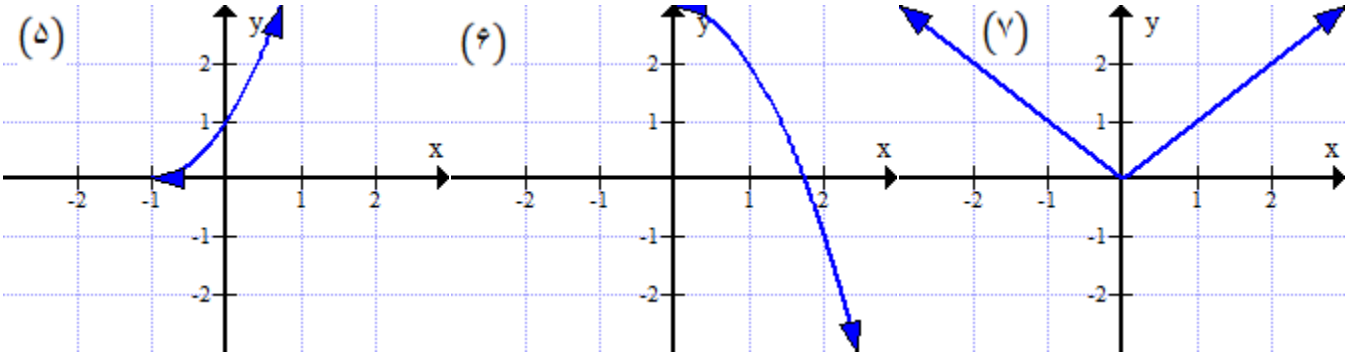
۲) $\{(-۲,-۵),(-۱,۳),(۳,۷),(۴,۱۲)\}$

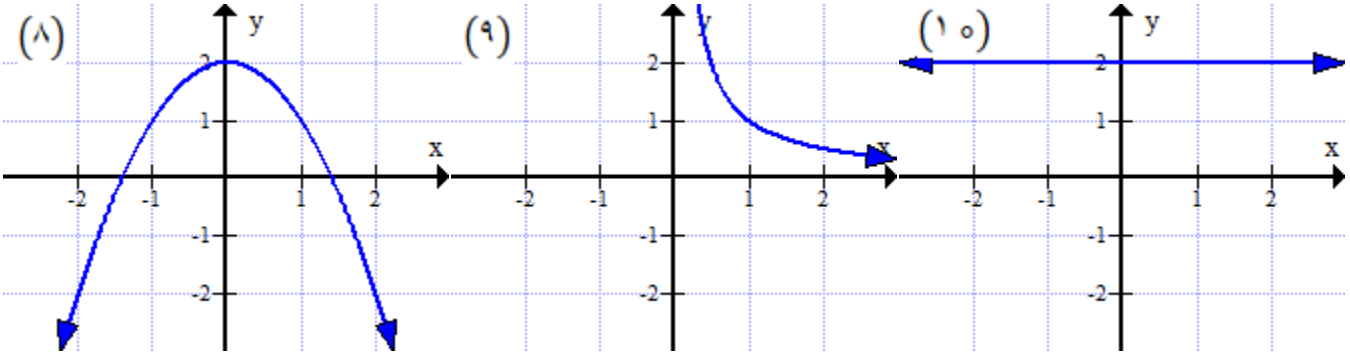
۳) $\{(۰,۰),(۱,۱)(۲,۱۶),(۳,۸۱)\}$

۴) $\{(۱,۲),(۲,۸),(۳,۱۸),(۴,۳۲)\}$

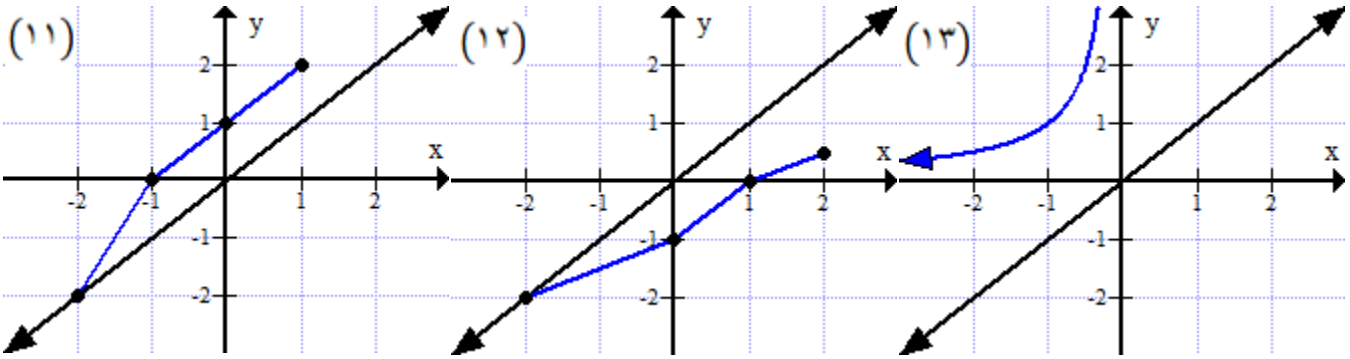
دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات ۵ – ۱۰ نمودار یک تابع f داده شده ، با استفاده از تست خط افقی ، مشخص کنید آیا f یک به یک است.



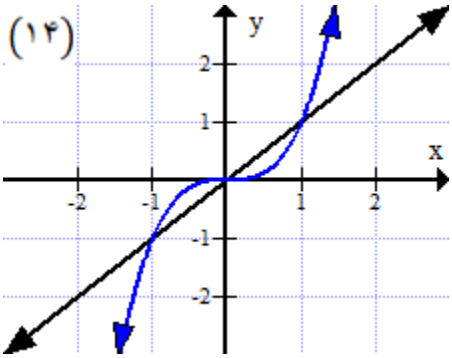


در تمرینات ۱۱ – ۱۴ نمودار یک تابع یک به یک داده شده است. نمودار تابع معکوس f^{-1} را رسم کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

(۱۴)



در تمرینات زیر نشان دهید که f و g معکوس یک دیگر هستند یا نه. یعنی نشان دهید که

$$f(g(x)) = x \quad \text{و} \quad g(f(x)) = x$$

۱۵) $f(x) = ۳x + ۴; g(x) = \frac{۱}{۳}(x - ۴)$

۱۶) $f(x) = ۳ - ۲x; g(x) = -\frac{۱}{۲}(x - ۳)$

۱۷) $f(x) = ۴x - ۸; g(x) = \frac{x}{۴} + ۲$

۱۸) $f(x) = ۲x + ۶; g(x) = \frac{۱}{۲}x - ۳$

۱۹) $f(x) = x^۳ - ۸; g(x) = \sqrt[۳]{x + ۸}$

۲۰) $f(x) = (x - ۲)^۲; x \geq ۲; g(x) = \sqrt{x} + ۲$

۲۱) $f(x) = \frac{۱}{x}; g(x) = \frac{۱}{x}$

۲۲) $f(x) = x; g(x) = x$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات زیر ، تابع f یک تابع یک به یک است. معکوس آنرا پیدا کنید و پاسخ را امتحان کنید. دامنه و برد f و $f^{-۱}$ را بیان کنید و هردو تابع را همراه $y = x$ روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

۲۳) $f(x) = ۳x$

۲۴) $f(x) = -۴x$

۲۵) $f(x) = ۴x + ۲$

۲۶) $f(x) = ۱ - ۳x$

۲۷) $f(x) = x^۳ - ۱$

۲۸) $f(x) = x^۳ + ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات۱.۱۱

در تمرینات ۴-۱

الف –معکوس تابع را پید کنید.

ب –آیا معکوس هم یک تابع است؟

۱) $\{(۲,۶),(-۳,۶),(۴,۹),(۱,۱۰)\}$

$a)$ $\{(۶,۲),(۶,-۳),(۹,۴),(۱۰,۱)\}$

$b)$ معکوس تابع نیست

۲) $\{(-۲,-۵),(-۱,۳),(۳,۷),(۴,۱۲)\}$

$a)$ $\{(-۵,-۲),(۳,-۱),(۷,۳),(۱۲,۴)\}$

$b)$ معکوس تابع است

۳) $\{(۰,۰),(۱,۱)(۲,۱۶),(۳,۸۱)\}$

$a)$ $\{(۰,۰),(۱,۱),(۱۶,۲),(۸۱,۳)\}$

$b)$ معکوس تابع است

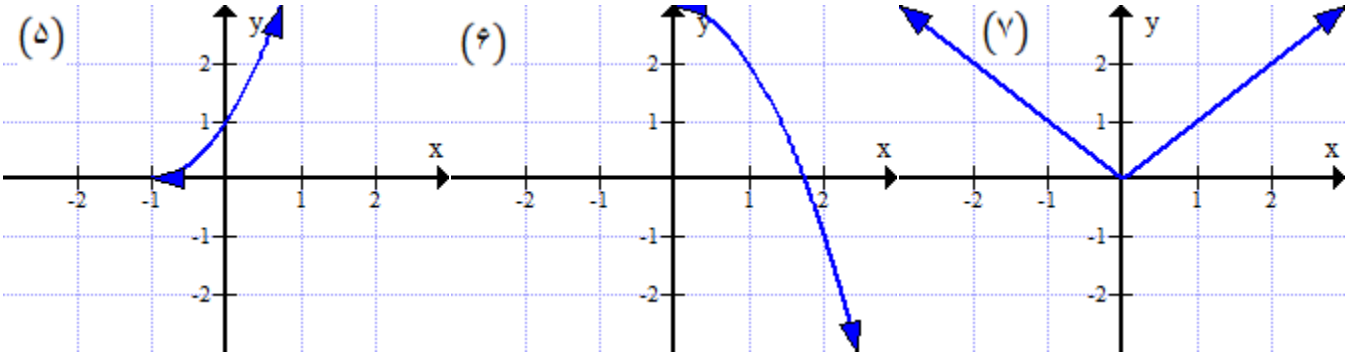
۴) $\{(۱,۲),(۲,۸),(۳,۱۸),(۴,۳۲)\}$

$a)$ $\{(۲,۱),(۸,۲),(۱۸,۳),(۳۲,۴)\}$

$b)$ معکوس تابع است

دانلود از سایت ریاضی سرا

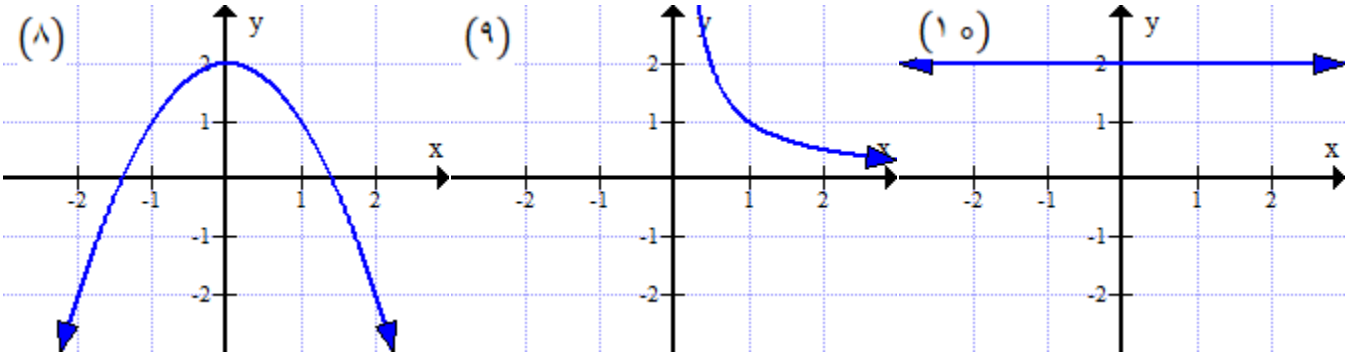
در تمرینات ۵ – ۱۰ نمودار یک تابع f داده شده ، با استفاده از تست خط افقی ، مشخص کنید آیا f یک به یک است.



۵) یک به یک است

۶) یک به یک است

۷) یک به یک نیست



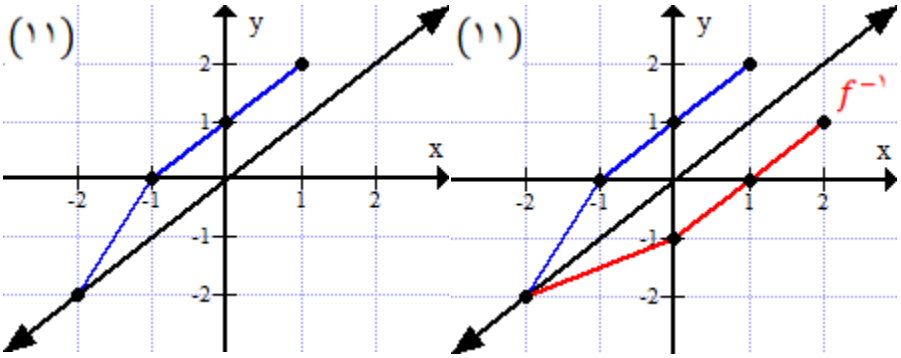
۸) یک به یک نیست

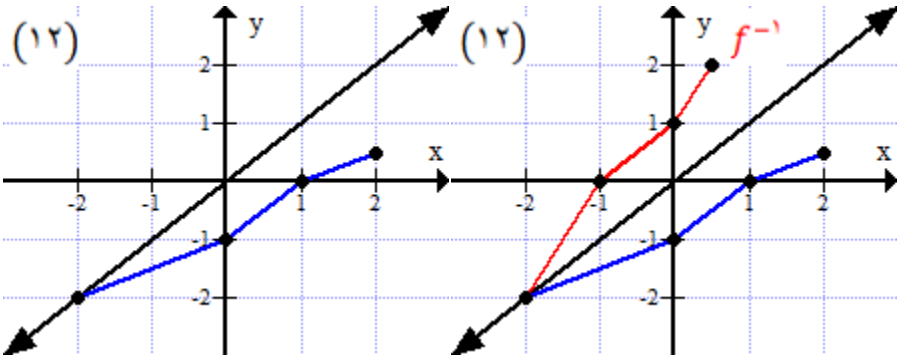
۹) یک به یک است

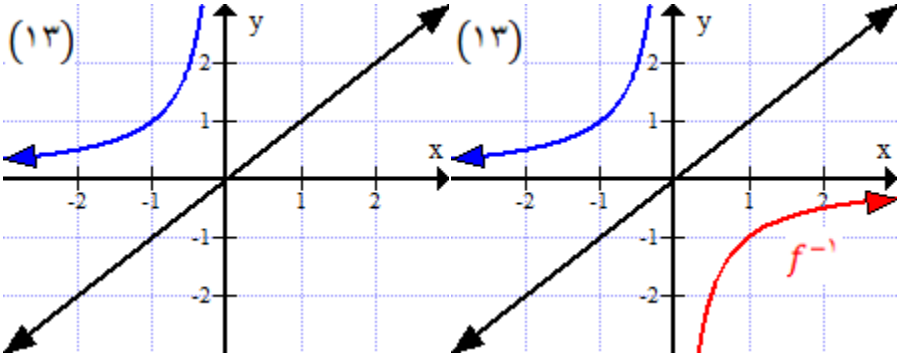
(۱۰) یک به یک نیست.

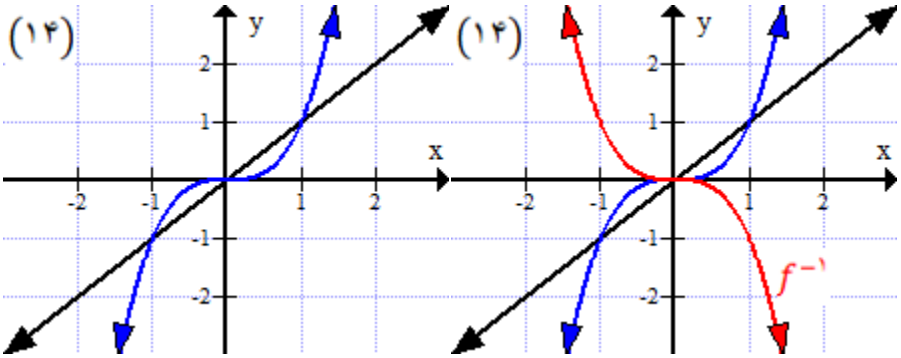
دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات ۱۴ – ۱۱ نمودار یک تابع یک به یک داده شده است. نمودار تابع معکوس f^{-1} را رسم کنید.









دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات زیر نشان دهید که f و g معکوس یک دیگر هستند یا نه. یعنی نشان دهید که

$$f(g(x)) = x \quad \text{و} \quad g(f(x)) = x$$

۱۵) $f(x) = ۳x + ۴; g(x) = \frac{۱}{۳}(x - ۴)$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{۱}{۳}(x - ۴)\right) = ۳\left[\frac{۱}{۳}(x - ۴)\right] + ۴ = (x - ۴) + ۴ = x$$

$$g(f(x)) = g(۳x + ۴) = \frac{۱}{۳}[(۳x + ۴) - ۴] = \frac{۱}{۳}(۳x) = x$$

۱۶) $f(x) = ۳ - ۲x; g(x) = -\frac{۱}{۲}(x - ۳)$

$$f(g(x)) = f\left(-\frac{۱}{۲}(x - ۳)\right) = ۳ - ۲\left(-\frac{۱}{۲}(x - ۳)\right) = ۳ + (x - ۳) = x$$

$$g(f(x)) = g(۳ - ۲x) = -\frac{۱}{۲}(۳ - ۲x - ۳) = -\frac{۱}{۲}(-۲x) = x$$

۱۷) $f(x) = ۴x - ۸; g(x) = \frac{x}{۴} + ۲$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{۴} + ۲\right) = ۴\left[\frac{x}{۴} + ۲\right] - ۸ = x + ۸ - ۸ = x$$

$$g(f(x)) = g(۴x - ۸) = \frac{۴x - ۸}{۴} + ۲ = (x - ۲) + ۲ = x$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸) $f(x) = ۲x + ۶; g(x) = \frac{۱}{۲}x - ۳$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{۱}{۲}x - ۳\right) = ۲\left[\left(\frac{۱}{۲}x - ۳\right)\right] + ۶ = (x - ۶) + ۶ = x$$

$$g(f(x)) = g(۲x + ۶) = \frac{۱}{۲}(۲x + ۶) - ۳ = (x + ۳) - ۳ = x$$

۱۹) $f(x) = x^۳ - ۸; g(x) = \sqrt[۳]{x + ۸}$

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt[۳]{x + ۸}\right) = \left(\sqrt[۳]{x + ۸}\right)^۳ - ۸ = (x + ۸) - ۸ = x$$

$$g(f(x)) = g\left(x^۳ - ۸\right) = \sqrt[۳]{x^۳ - ۸ + ۸} = \sqrt[۳]{x^۳} = x$$

۲۰) $f(x) = (x - ۲)^۲; x \geq ۲; g(x) = \sqrt{x} + ۲$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x} + ۲) = (\sqrt{x} + ۲ - ۲)^۲ = (\sqrt{x})^۲ = x$$

$$g(f(x)) = g\left((x - ۲)^۲\right) = \sqrt{(x - ۲)^۲} + ۲ = (x - ۲) + ۲ = x$$

۲۱) $f(x) = \frac{۱}{x}; g(x) = \frac{۱}{x}$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = x \qquad g(f(x)) = g\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = x$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۲) $f(x) = x; g(x) = x$

$f\big(g(x)\big) = f(x) \qquad g\big(f(x)\big) = g(x) = x$

در تمرینات زیر ، تابع f یک تابع یک به یک است. معکوس آنرا پیدا کنید و پاسخ را امتحان کنید. دامنه و برد f و $f^{-۱}$ را بیان کنید و هردو تابع را همراه $y = x$ روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

۲۳) $f(x) = ۳x$

$y = ۳x$

$x = ۳y$

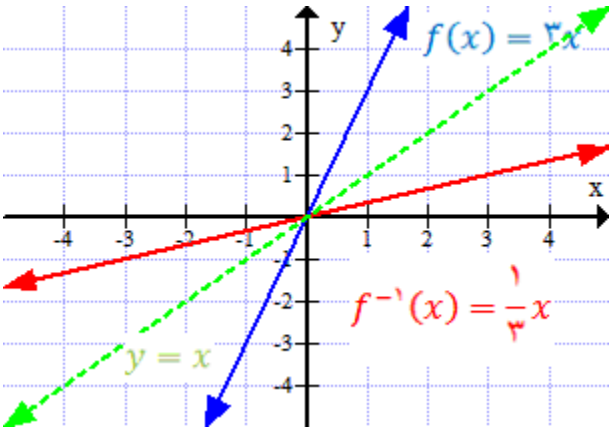
$y = \frac{۱}{۳}x$ پس $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۳}x$

امتحان می کنیم.

$$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f\left(\frac{۱}{۳}x\right) = ۳\left(\frac{۱}{۳}x\right) = x$$

$$f^{-۱}\big(f(x)\big) = f^{-۱}(۳x) = \frac{۱}{۳}(۳x) = x$$

دامنه f = برد $f^{-۱} = (-\infty, \infty)$; برد f = دامنه $f^{-۱} = (-\infty, \infty)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۴) $f(x) = -۴x$

$y = -۴x$

$x = -۴y$

$y = -\frac{x}{۴}$

پس

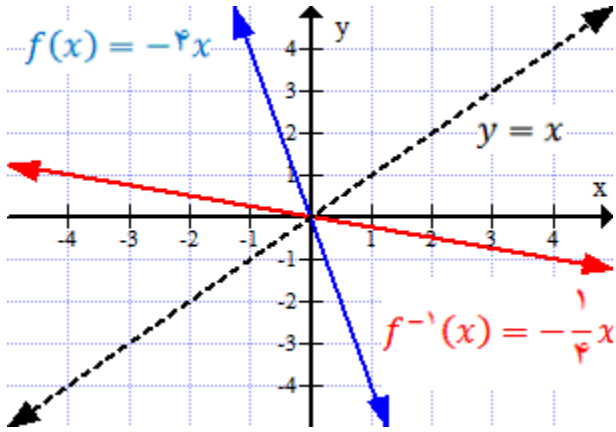
$f^{-۱}(x) = -\frac{x}{۴}$

امتحان می کنیم.

$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f\left(-\frac{۱}{۴}x\right) = -۴\left(-\frac{۱}{۴}x\right) = x$

$f^{-۱}\left(f(x)\right) = f^{-۱}(-۴x) = -\frac{۱}{۴}(-۴x) = x$

دامنه f = برد $f^{-۱}$ = $(-\infty, \infty)$; برد f = دامنه $f^{-۱}$ = $(-\infty, \infty)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵) $f(x) = ۴x + ۲$

$y = ۴x + ۲$

$x = ۴y + ۲$

$x - ۲ = ۴y$

$y = \frac{x - ۲}{۴} = \frac{x}{۴} - \frac{۱}{۲}$

پس

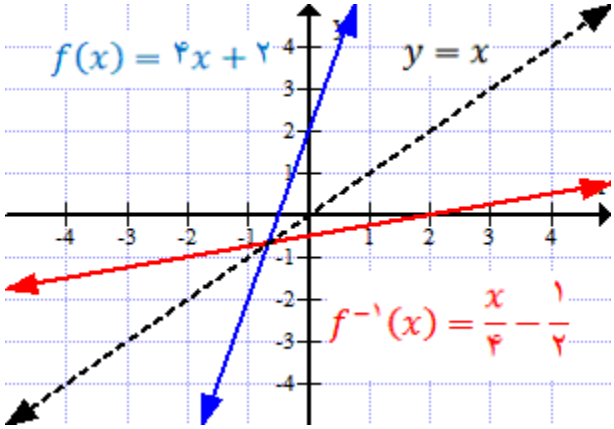
$f^{-۱}(x) = \frac{x}{۴} - \frac{۱}{۲}$

امتحان می کنیم.

$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f\left(\frac{x}{۴} - \frac{۱}{۲}\right) = ۴\left(\frac{x}{۴} - \frac{۱}{۲}\right) + ۲ = (x - ۲) + ۲ = x$

$f^{=۱}\left(f(x)\right) = f^{-۱}(۴x + ۲) = \frac{۴x + ۲}{۴} - \frac{۱}{۲} = x + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = x$

دامنه f = برد $f^{-۱}$ = $(-\infty, \infty)$; برد f = دامنه $f^{-۱}$ = $(-\infty, \infty)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۶) $f(x) = ۱ - ۳x$

$y = ۱ - ۳x$

$x = ۱ - ۳y$

$۳y = ۱ - x$

$y = \frac{۱ - x}{۳}$

پس

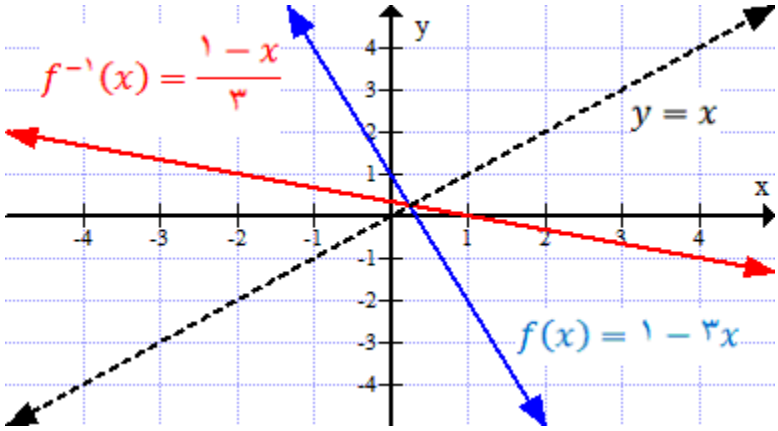
$f^{-۱}(x) = \frac{۱ - x}{۳}$

امتحان می کنیم.

$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f\left(\frac{۱ - x}{۳}\right) = ۱ - ۳\left(\frac{۱ - x}{۳}\right) = ۱ - (۱ - x) = x$

$f^{-۱}(f(x)) = f^{-۱}(۱ - ۳x) = \frac{۱ - (۱ - ۳x)}{۳} = \frac{۳x}{۳} = x$

دامنه f = برد $f^{-۱}$ $= (-\infty, \infty)$; برد f = دامنه $f^{-۱}$ $= (-\infty, \infty)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۷) $f(x) = x^{۳} - ۱$

$y = x^{۳} - ۱$

$x = y^{۳} - ۱$

$y^{۳} = x + ۱$

$y = \sqrt[۳]{x + ۱}$

پس

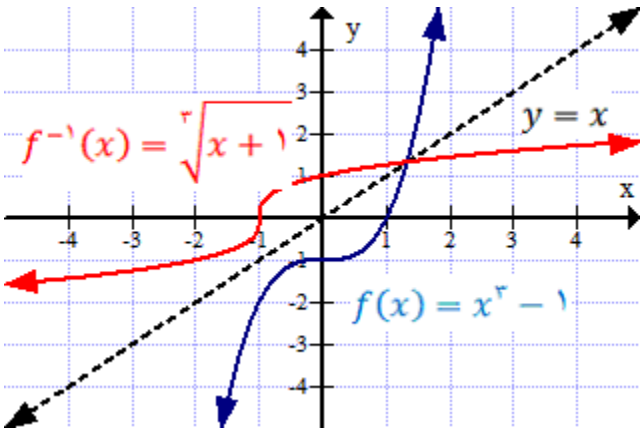
$f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x + ۱}$

امتحان می کنیم.

$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f\left(\sqrt[۳]{x + ۱}\right) = \left(\sqrt[۳]{x + ۱}\right)^{۳} - ۱ = x + ۱ - ۱ = x$

$f^{-۱}\left(f(x)\right) = f^{-۱}\left(x^{۳} - ۱\right) = \sqrt[۳]{x^{۳} + ۱ - ۱} = x$

دامنه f = برد $f^{-۱}$ = $(-\infty, \infty)$; برد f = دامنه $f^{-۱}$ = $(-\infty, \infty)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۸) $f(x) = x^{۳} + ۱$

$y = x^{۳} + ۱$

$x = y^{۳} + ۱$

$y^{۳} = x - ۱$

$y = \sqrt[۳]{x - ۱}$

پس

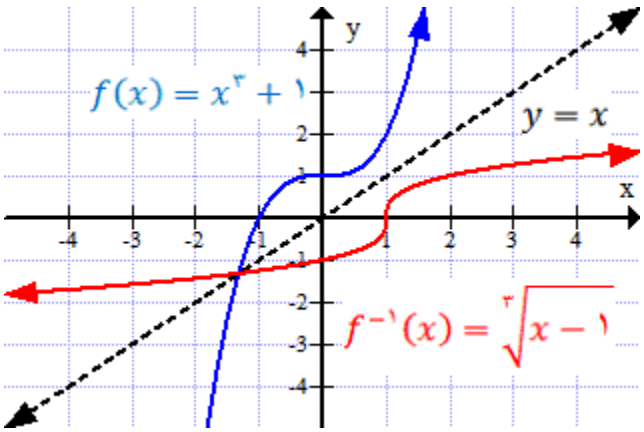
$f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x - ۱}$

امتحان می کنیم.

$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f\left(\sqrt[۳]{x - ۱}\right) = \left(\sqrt[۳]{x - ۱}\right)^{۳} + ۱ = x - ۱ + ۱ = x$

$f^{-۱}\left(f(x)\right) = f^{-۱}\left(x^{۳} + ۱\right) = \sqrt[۳]{x^{۳} - ۱ + ۱} = \sqrt[۳]{x^{۳}} = x$

دامنه f = برد $f^{-۱}$ = $(-\infty, \infty)$; برد f = دامنه $f^{-۱}$ = $(-\infty, \infty)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱.۲ – توابع مجهول القوه Exponential Functions

در بخش ۲ .۱۰ در مورد توابع توانی به شکل $f(x) = ax^n$ صحبت کردیم. x یک عدد حقیقی و n یک عدد صحیح نا منفی. اینجا پایه مجهول است.

تعریف تابع مجهول القوه –تابع مجهول القوه تابعی است به شکل زیر

$$f(x) = a^x$$

اینجا a یک عدد حقیقی مثبت غیر از صفر و یک. دننه و یا همان x کلیه اعداد حقیقی است.

قوانین توان ها

اگر s, t, a, b اعداد حقیقی باشند و $a > ۰, b > ۰$ پس

$$a^s * a^t = a^{s+t} \qquad (a^s)^t = a^{st} \qquad (ab)^s = a^s * b^s$$

$$۱^s = ۱ \qquad a^{-s} = \frac{۱}{a^s} = \left(\frac{۱}{a}\right)^s \qquad a^۰ = ۱$$

مثال ۱ – رسم نمودار یک تابع مجهول القوه Graphing an Exponential Function

نمودارتابع $f(x) = ۲^x$ را رسم کنید.

پاسخ

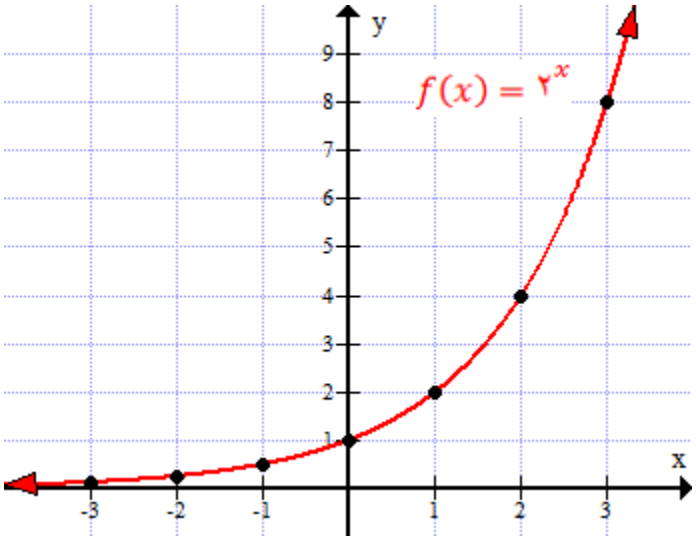
دامنه $f(x) = ۲^x$ کلیه اعداد حقیقی است. چند نقطه روی نمودار تابع را مطابق جدول زیر پیدا می کنیم. چون $۲^x > ۰$ است برای کلیه اعداد x پس برد تابع $f(x) = ۲^x$ بازه $(۰, \infty)$ است. پس نتیجه می گیریم که نمودار با محور x تلاقی نمی کند. در حقیقت نمودار بالای محور x قرار دارد. همان طور که جدول نشان می دهد ، محل تلاقی نمودار با محور y یک است. جدول همچنین نشان می دهد هنگامی که $x \longrightarrow -\infty$ مقدار $f(x) = ۲^x$ به صفر نزدیک و نزدیک تر می شود. نتیجه این که محور x خط مجانب افقی نمودار است هنگامی که $x \longrightarrow -\infty$

هنگامی که $x \longrightarrow \infty$ مقدار $f(x) = ۲^x$ به سرعت زیاد می شود. و در نتیجه نمودار خیلی سریع صعود می کند.واضح است که f یک تابع صعودی است و در نتیجه یک تابع یک به یک است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

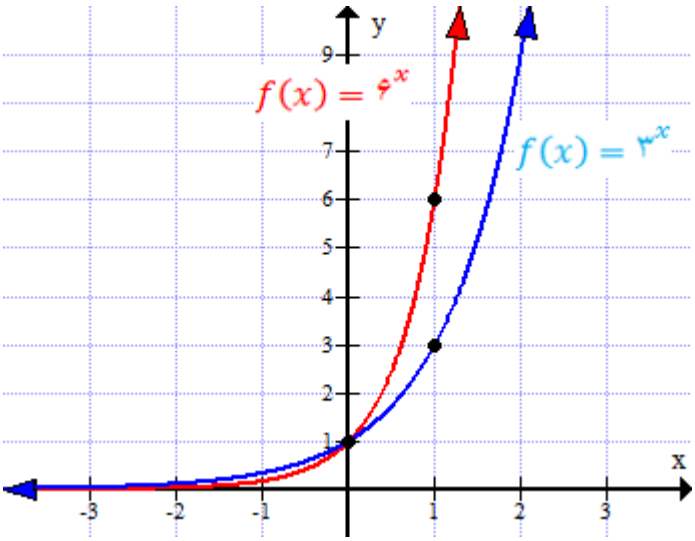
x	$f(x) = ۲^{x}$
-۱۰	$۲^{-۱۰} \approx ۰/۰۰۰\,۹۸$
-۳	$۲^{-۳} = \frac{۱}{۸}$
-۲	$۲^{-۲} = \frac{۱}{۴}$
-۱	$۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$
۰	$۲^{۰} = ۱$
۱	$۲^{۱} = ۲$
۲	$۲^{۲} = ۴$
۳	$۲^{۳} = ۸$
۱۰	$۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

نمودار را هم در ذیل مشاهده می کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

در ذیل دو نمودار دیگر از توابع مجهول القوه ملاحظه می کنید. هر چه پایه بزرگ تر می شود ، شیب نمودار هم تند تر می شود.



مشخصات تابع مجهول القوه $a > ۱$ ، $f(x) = a^x$ Properties of the Exponential Function

الف –دامنه کلیه اعداد حقیقی ، برد کلیه اعداد حقیقی مثبت.

ب – با محور x تلاقی نمی کند ، تلاقی به محور y یک است.

ج –محور x خط مجانب افقی است ، هنگامی که $x \longrightarrow \infty$

د –تابع یک به یک است و صعودی .

ه –نمودار f شامل نقاط $(۰,۱),(۱,a),\left(-۱,\frac{۱}{a}\right)$ است.

و –نمودار صاف و پیوسته است بدون گوشه یا فاصله.

مثال ۲ – نمودار $f(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را رسم کنید.

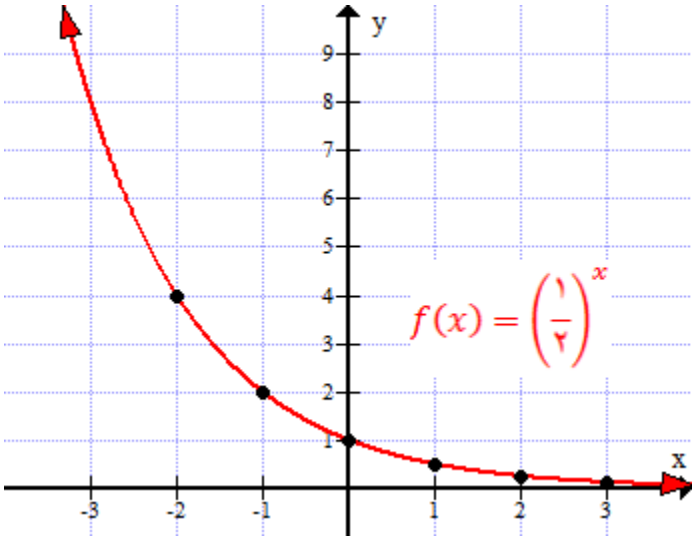
پاسخ

دامنه کلیه اعداد حقیقی است. چن نقطه روی نمودار را از طریق جدول زیر پیدا می کنیم. برد تابع $(۰,\infty)$ است. تابع نزولی است و در نتیجه یک به یک.

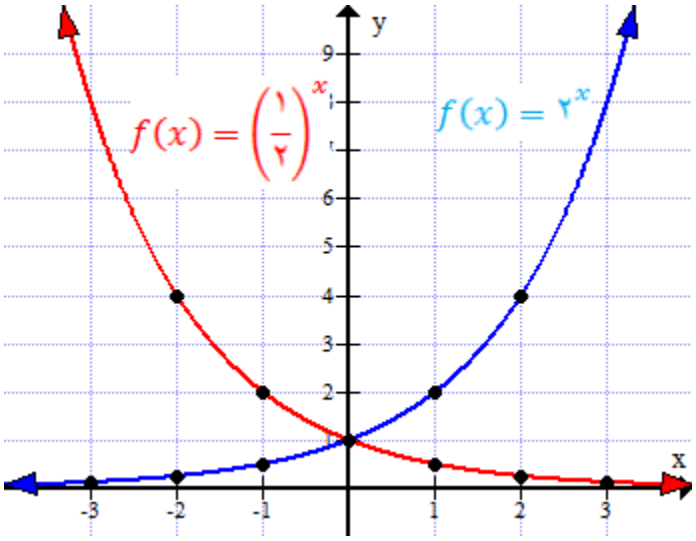
دانلود از سایت ریاضی سرا

x	$f(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$
-۱۰	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱۰}=۱۰۲۴$
-۳	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}=۸$
-۲	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}=۴$
-۱	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱}=۲$
۰	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰}=۱$
۱	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}=\frac{۱}{۲}$
۲	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=\frac{۱}{۴}$
۳	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۸}$
۱۰	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}=\frac{۱}{۱۰۲۴}$

دانلود از سایت ریاضی سرا



از طریق تبدیل می توان از نمودار $f(x) = ۲^x$ به نمودار $f(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ رسید.



مشخصات تابع مجهول القوه $a < ۱$ ، $۰ <$ Properties of the Exponential Function $f(x) = a^x$

الف -دامنه کلیه اعداد حقیقی ، برد کلیه اعداد حقیقی مثبت.

ب -با محور x تلاقی نمی کند ، تلاقی به محور y یک است.

ج -محور x خط مجانب افقی است ، هنگامی که $x \longrightarrow \infty$

د -تابع یک به یک است و نزولی .

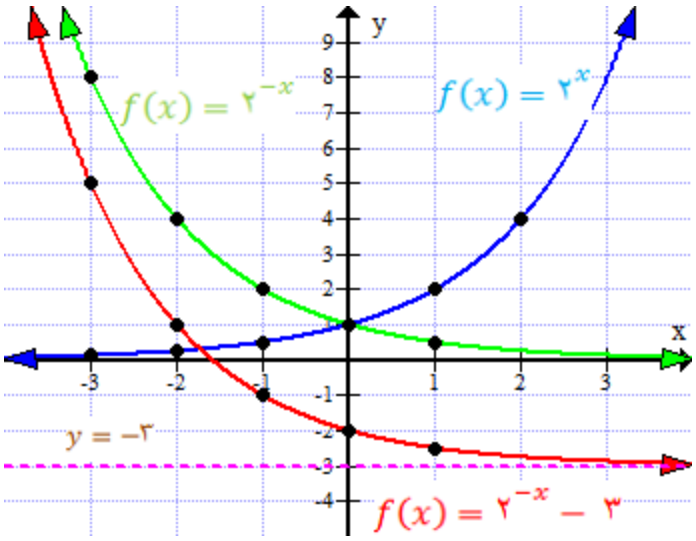
دانلود از سایت ریاضی سرا

ه – -نمودار f شامل نقاط $(۰,۱),(۱,a),\left(-۱,\frac{۱}{a}\right)$ است.

و -نمودار صاف و پیوسته است بدون گوشه یا فاصله.

رسم نمودار تابع مجهول القوه از طریق تبدیل Graphing Exponential Function Using Transformation

مثال ۳ – تابع $f(x)=۲^{-x}-۳$ را رسم کنید و دامنه ، برد و خط مجانب افقی را مشخص کنید.



دامنه $f(x)=۲^{-x}-۳$ کلیه اعداد حقیقی است و برد در بازه $(-۳,\infty)$ و خط مجانب افقی خط $y=-۳$ است.

پایه e The Base

بزودی خواهیم دید که بسیاری از مسائلی که درطبیعت رخ می دهد ، تابع مجهول القوه ای بکار می برد که پایه آن یک عدد گنگ با نماد حرف e است.

عدد e عددی است که عبارت زیر به آن نزدیک می شود ،

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} \quad \text{هنگامی که} \quad n\longrightarrow\infty$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در حسابان عدد e چنین تعریف می شود.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

جدول زیر نشان می دهد هنگامی که n زیاد می شود عبارت $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$ به چه عددی نزدیک می شود.

n	$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$
۱	۲
۲	۲ / ۲۵
۵	۲ / ۴۸۸۳۲
۱۰	۲ / ۵۹۳۷۴۲۴۶
۱۰۰	۲ / ۷۰۴۸۱۳۸۲۹
۱۰۰۰	۲ / ۷۱۶۹۲۳۹۳۲
۱۰۰۰۰	۲ / ۷۱۸۱۴۵۹۲۷

اگر $n = ۱۰^۹$ باشد ، $e = ۲ / ۷۱۸۲۸۱۸۲۷$

تابع مجهول القوه $f(x) = e^x$ آن قدر در مسائل بکار برده می شود که خود به همین نام مشهور است. یعنی به تابع $f(x) = e^x$ می گویند تابع مجهول القوه *The Exponential Function*

بیشتر ماشین حساب ها کلید e^x و یا $exp(e)$ دارد برای پیدا کردن مقدار تابع مجهول القوه با مقادیر مختلف x

حالابا ماشین حساب خود مقدار تقریبی e^x برای

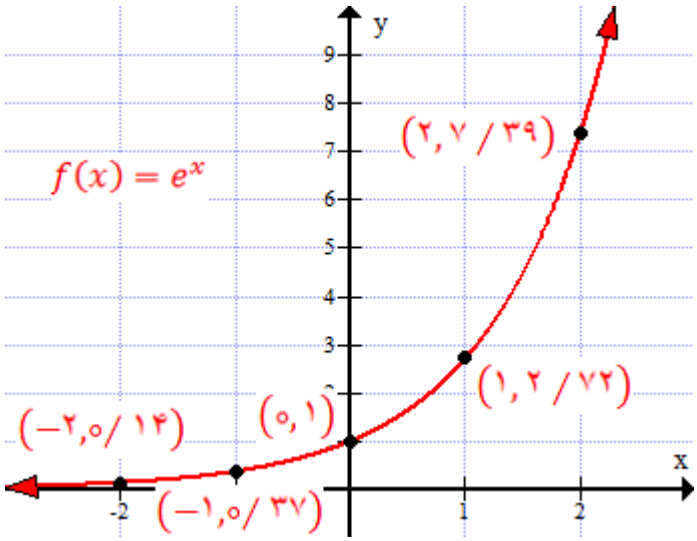
$$x = ۱, x = ۲, x = ۳, x = -۱, x = -۲, x - -۳$$

را پیدا کنید.

ما در جدول زیر این کار را برای چند مقدار x انجام داده ایم و سپس نمودار $f(x) = e^x$ برای آن جدول رسم می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

x	e^x
−۲	۰/ ۱۴
−۱	۰/ ۳۷
۰	۱
۱	۲ / ۷۲
۲	۷ / ۳۹



مثال ۴ – رسم نمودار توابع مجهول القوه از طریق تبدیل

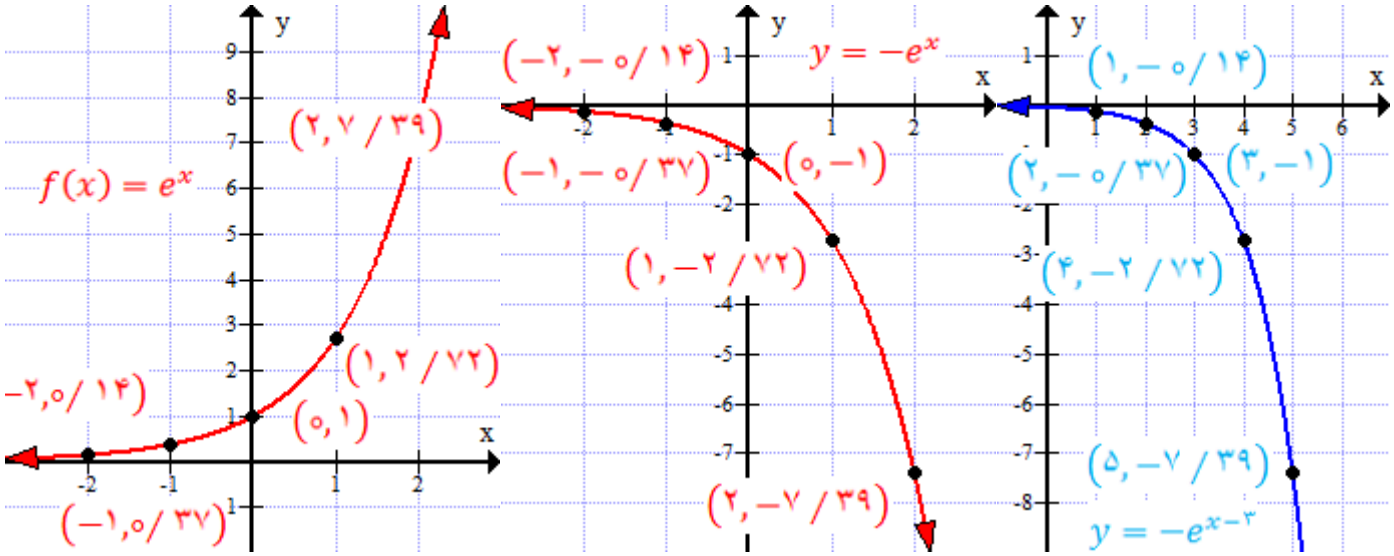
Graphing Exponential Functions Using Transformations

نمودار $f(x) = -e^{x-۳}$ را رسم کنید و دامنه ، برد ، و خط مجانب را مشخص کنید.

پاسخ

ابتدا $y = e^x$ را رسم می کنیم. سپس $y = -e^x$ و در نهایت $y = -e^{x-۳}$ را رسم می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا



در هر سه نمودار خط $y = ۰$ خط مجانب افقی است. دامنه $f(x) = -e^{x-۳}$ کلیه اعداد حقیقی است و یا $(-\infty, \infty)$

برد این تابع $(-\infty,۰)$ است.

معادلات مجهول القوه

معادلاتی به شکل $a^x, a > ۰, a \neq ۱$ را معادله های مجهول القوه Exponential Equations می نامند. این نوع معادلات را می توان با استفاده صحیح از قانون توان ها که در ابتدای این بخش تکرار کردیم و همچنین از این حقیقت که اگر $a^u = a^v$ پس $u = v$ است ، حل کرد.

مثال ۵ – معادله زیر را حل کنید.

$$۳^{x+۱} = ۸۱$$

پاسخ

می دانیم که $۸۱ = ۳^۴$

پس

$$۳^{x+۱} = ۸۱ = ۳^۴$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

هر دو طرف معادله داری پایه ۳ هستند. پس توان ها هم باید با هم مساوی باشند. یعنی $x + ۱ = ۴$ این تساوی را حل می کنیم. در نتیجه خواهیم داشت $x = ۳$

مثال ۶ – معادله زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{e^{-x^۲} = (e^x)^۲ \cdot \frac{۱}{e^۳}}$$

پاسخ

سمت راست معادله را ساده می کنیم.

$$(e^x)^۲ \cdot \frac{۱}{e^۳} = e^{۲x} \cdot e^{-۳} = e^{۲x-۳}$$

پس

$$e^{-x^۲} = e^{۲x-۳}$$

$$-x^۲ = ۲x - ۳$$

$$x^۲ + ۲x - ۳ = ۰$$

$$(x + ۳)(x - ۱) = ۰$$

$$x = -۳ \text{ یا } x = ۱$$

مجموعه جواب ها $\{۱, -۳\}$ است.

مثال ۷ – احتمال مجهول القوه Exponential Probability

بین ساعت ۹ و ۱۰ بعد از ظهر به طور متوسط ۱۲ اتومبیل در ساعت وارد پارکینگ بانک می شود. فرمول زیر را می توان برای پیدا کردن احتمال ورود یک اتومبیل به پارکینگ درعرض t دقیقه بعد از ساعت ۹ بکار برد.

$$F(t) = ۱ - e^{-۰/۲t}$$

الف -احتمال اینکه یک اتومبیل در عرض پنج دقیقه وارد پارکینگ شود چه قدر است؟(یعنی قبل از ۹:۰۵)

ب –احتمال ورود یک اتومبیل در عرض ۳۰ چه قدر است؟ (یعنی قبل از ۹:۳۰)

ج –اگر t بطور نا محدود به بی نهایت مثبت نزدیک شود ، F به چه مقداری نزدیک می شود؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

د –نمودار این تابع را برای $t > ۰$ رسم کنید.

پاسخ

الف –باید $F(t)$ را پیدا کنیم.

$$F(۵) = ۱ - e^{-۰/۲(۵)} \approx ۰/ ۶۳۲۱۲$$

یعنی احتمال ورود یک اتومبیل به پارکینگ در عرض پنج دقیقه ۶۳% است.

ب –باید $F(۳۰)$ را پیدا کنیم.

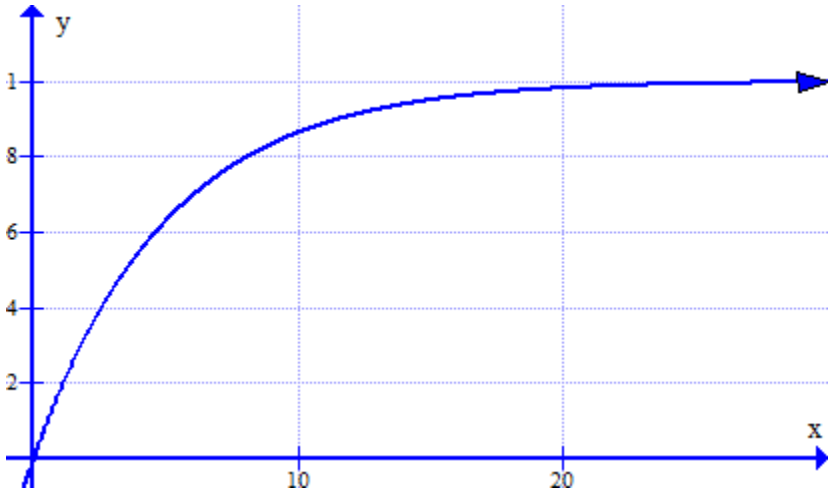
$$F(۳۰) = ۱ - e^{-۰/۲(۳۰)} \approx ۰/ ۹۹۷۵$$

یعنی احتمال ورود یک اتومبیل به پارکینگ در عرض ۳۰ دقیقه ۷۵ / ۹۹% است.

ج –

اگر فرض کنیم $t \longrightarrow \infty$ و چون $e^{-۰/۲t} = \frac{۱}{e^{۰/۲t}}$ پس نتیجه می گیریم که $e^{-۰/۲t} \longrightarrow ۰$ لذا F به یک نزدیک می شود .نمودار زیر هم همین موضوع را نشان می دهد. در نمودار می بینیم که F به یک نزدیک می شود.

د –



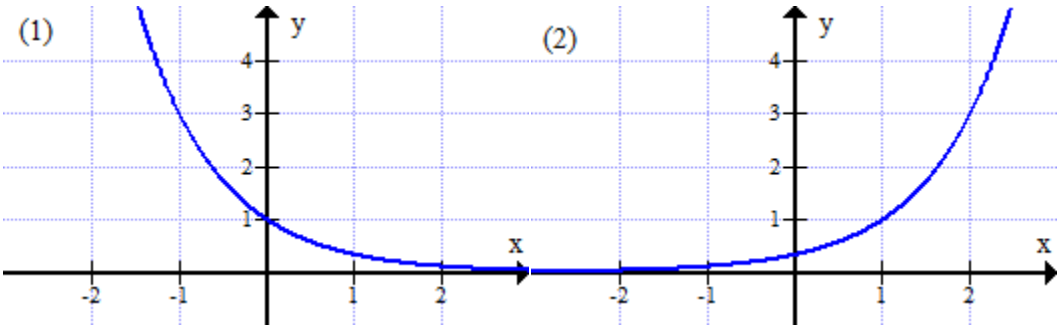
دانلود از سایت ریاضی سرا

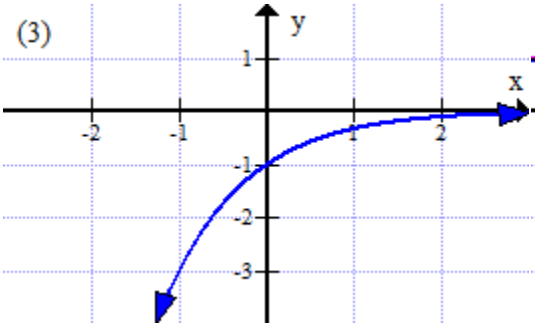
تمرینات ۱۱.۲

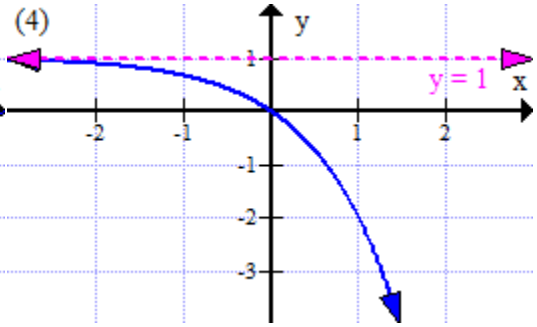
در تمرینات ۸ – ۱ نمودار یک تابع مجهول القوه داده شده است. آنها را با نمودار یکی از توابع زیر جور کنید.

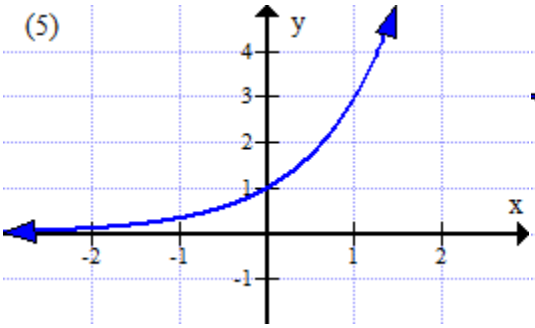
$A)\ \ y = ۳^{x}$ $\quad B)\ \ y = ۳^{-x}$ $\quad C)\ \ y = -۳^{x}$ $\quad D)\ \ y = -۳^{-x}$

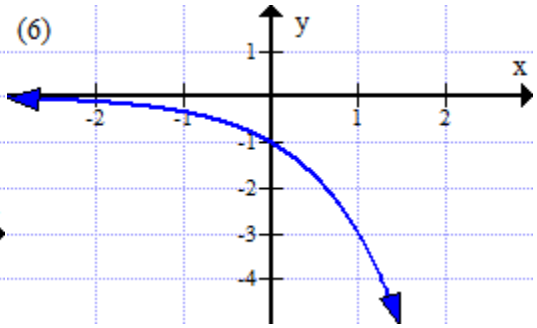
$E)\ \ y = ۳^{x} - ۱$ $\quad F)\ \ y = ۳^{x-۱}$ $\quad G)\ \ y = ۳^{۱-x}$ $\quad H)\ \ y = ۱ - ۳^{x}$



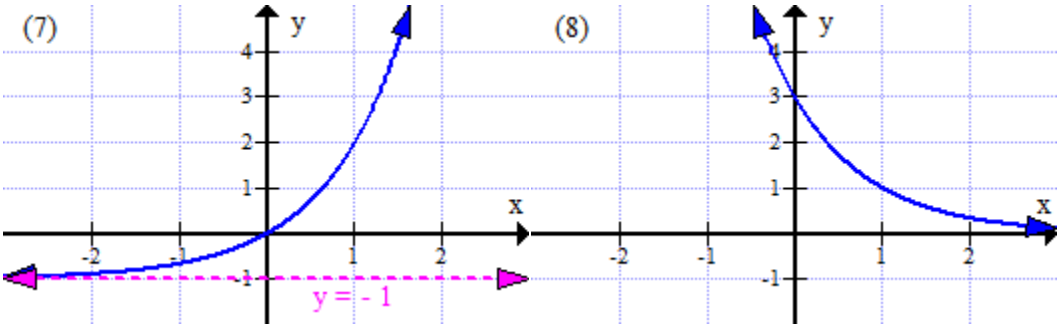








دانلود از سایت ریاضی سرا



در تمرینات ۱۲ – ۹ با استفاده از تبدیل ،نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه ، برد و خط مجانب را مشخص نمائید.

۹) $f(x) = ۲^{x} + ۱$

۱۰) $f(x) = ۲^{x+۲}$

۱۱) $f(x) = ۳^{-x} - ۲$

۱۲) $f(x) = -۳^{x} + ۱$

در تمرینات ۱۶ – ۱۳ با استفاده از تبدیل ،نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه ، برد و خط مجانب را مشخص نمائید.

۱۳) $f(x) = e^{-x}$

۱۴) $f(x) = -e^{x}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵) $f(x) = e^{x+۲}$

۱۶) $f(x) = e^{x} - ۱$

معادلات زیر را حل کنید.

۱۷) $۲^{۲x+۱} = ۴$

۱۸) $۵^{۱-۲x} = \frac{۱}{۵}$

۱۹) $۳^{x^{۳}} = ۹^{x}$

۲۰) $۴^{x^{۲}} = ۲^{x}$

۲۱) $۸^{x^{۲}-۲x} = \frac{۱}{۲}$

۲۲) $۹^{-x} = \frac{۱}{۳}$

۲۳) $e^{x^{۲}} = \left(e^{۳x}\right) \cdot \frac{۱}{e^{۲}}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۴) $\left(e^{۴}\right)^{x} \cdot e^{x^{۲}} = e^{۱۲}$

۲۵) اگر $۴^{x} = ۷$ پس $۴^{-۲x} = ?$

۲۶) اگر $۲^{x} = ۳$ پس $۴^{-x} = ?$

۲۷) اگر $۳^{-x} = ۲$ پس $۳^{۲x} = ?$

۲۸) اگر $۵^{-x} = ۳$ پس $۵^{۳x} = ?$

۲۹ – اگریک صفحه شیشه ۳% از نوری را که از آن عبور می کند ، محو کند ، پس در صد p نوری که از n صفحه ششه عبور می کند ، به طور تقریب از تابع زیر بدست می آید.

$$p(n) = ۱۰۰\, e^{-۰/۰۳n}$$

الف –از ده صفحه شیشه چند در صد از نور عبور می کند؟

ب –از ۲۵ صفحه شیشه چند در صد از نور عبور می کند؟

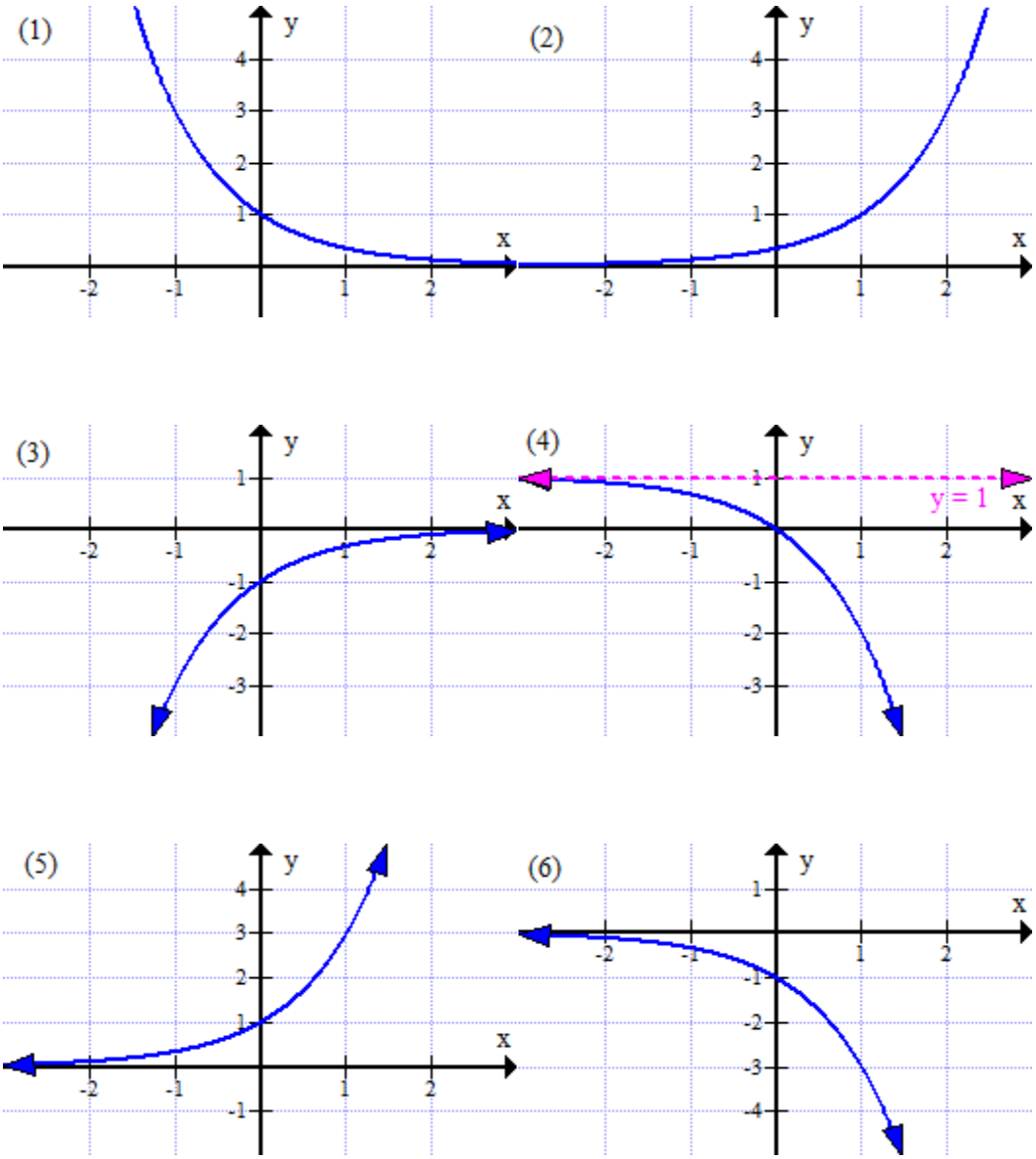
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۱.۲

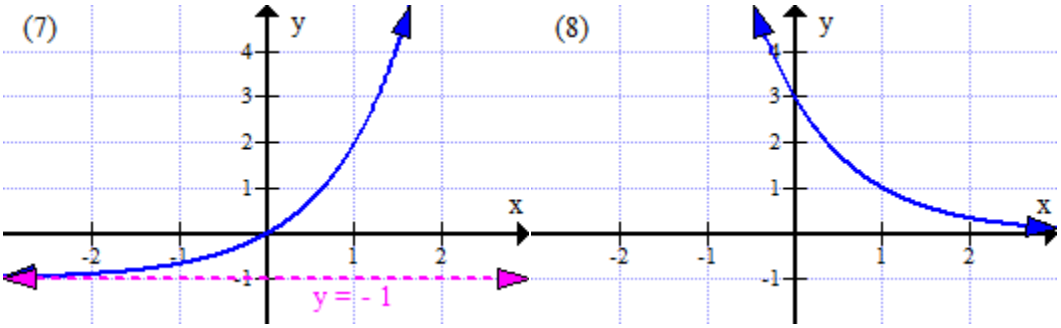
در تمرینات ۸ – ۱ نمودار یک تابع مجهول القوه داده شده است. آنها را با نمودار یکی از توابع زیر جور کنید.

$A)\ \ y = ۳^{x}$ $\quad B)\ \ y = ۳^{-x}$ $\quad C)\ \ y = -۳^{x}$ $\quad D)\ \ y = -۳^{-x}$

$E)\ \ y = ۳^{x} - ۱$ $\quad F)\ \ y = ۳^{x-۱}$ $\quad G)\ \ y = ۳^{۱-x}$ $\quad H)\ \ y = ۱ - ۳^{x}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

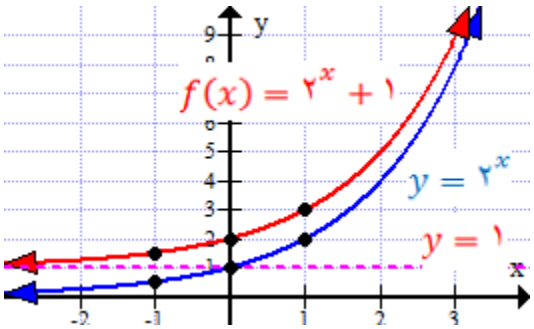


پاسخ

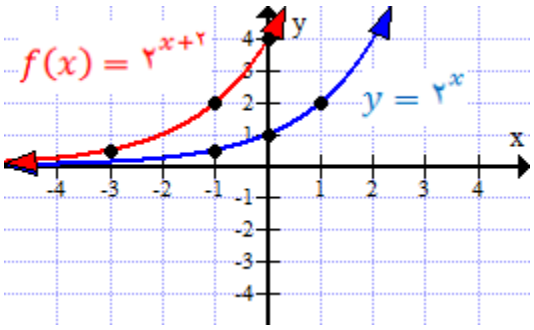
$۱ \longrightarrow B \quad ۲ \longrightarrow F \quad ۳ \longrightarrow D \quad ۴ \longrightarrow H \quad ۵ \longrightarrow A \quad ۶ \longrightarrow C \quad ۷ \longrightarrow E \quad ۸ \longrightarrow G$

در تمرینات ۱۲ – ۹ با استفاده از تبدیل ،نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه ، برد و خط مجانب را مشخص نمائید.

۹) $f(x) = ۲^x + ۱$

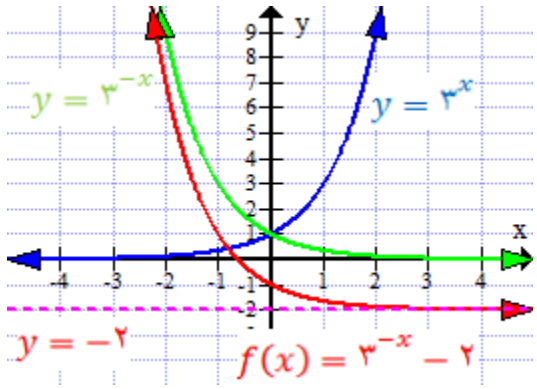


۱۰) $f(x) = ۲^{x+۲}$

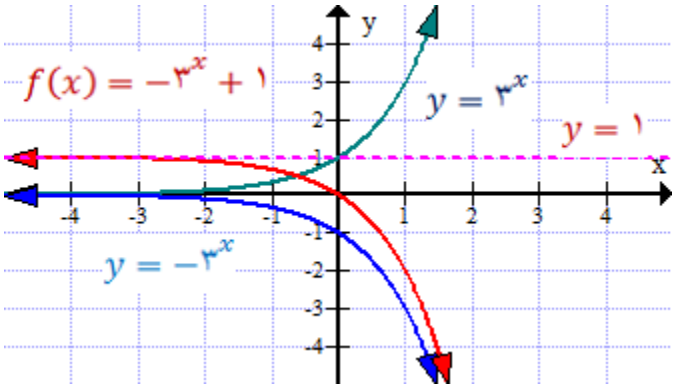


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $f(x) = ۳^{-x} - ۲$

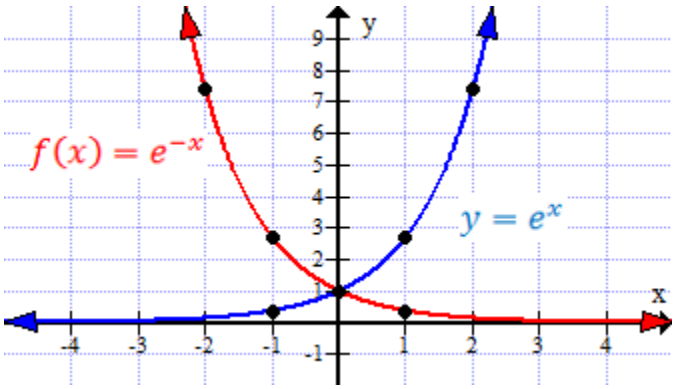


۱۲) $f(x) = -۳^{x} + ۱$



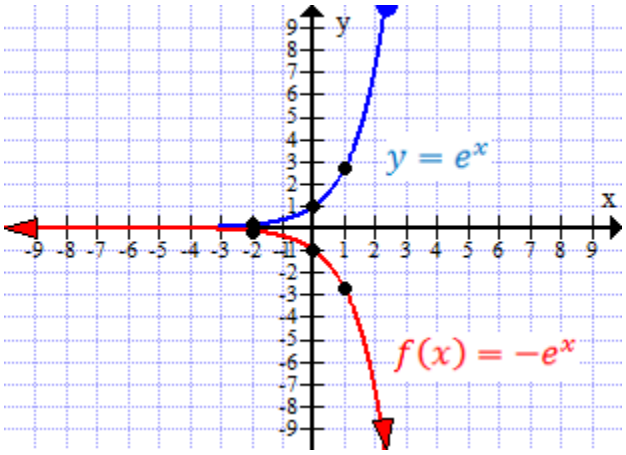
در تمرینات ۱۶ – ۱۳ با استفاده از تبدیل ،نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه ، برد و خط مجانب را مشخص نمائید.

۱۳) $f(x) = e^{-x}$

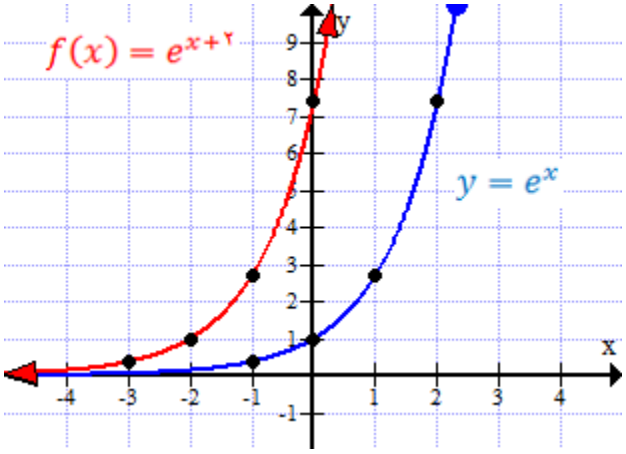


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴) $f(x) = -e^{x}$

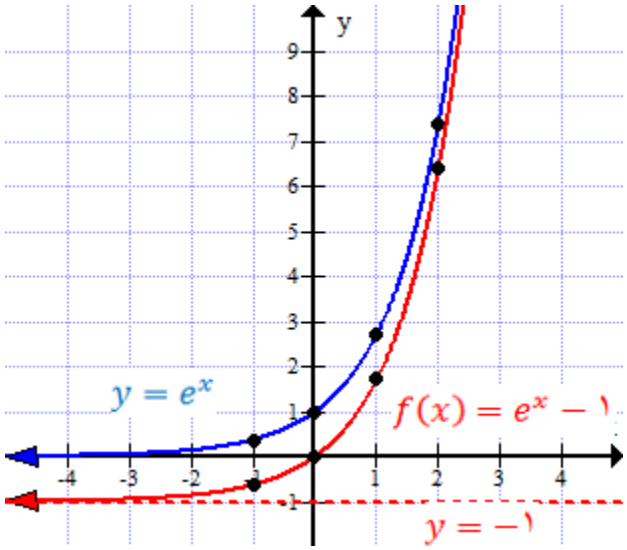


۱۵) $f(x) = e^{x+۲}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶) $f(x) = e^{x} - ۱$



معادلات زیر را حل کنید.

۱۷) $۲^{۲x+۱} = ۴$

$۲^{۲x+۱} = ۲^{۲}$

$۲x + ۱ = ۲$

$۲x = ۱$

$x = \frac{۱}{۲}$

۱۸) $۵^{۱-۲x} = \frac{۱}{۵}$

$۵^{۱-۲x} = ۵^{-۱}$

$۱ - ۲x = -۱$

$-۲x = -۲ \Rightarrow x = ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹) $۳^{x^۳} = ۹^{x}$

$۳^{x^۳} = ۳^{۲x}$

$x^۳ = ۲x$

$x^۳ - ۲x = ۰$

$x\left(x^۲ - ۲\right) = ۰$

$x = ۰ \qquad x^۲ - ۲ = ۰$

$x = ۰ \qquad x^۲ = ۲$

$x = ۰ \qquad x = \pm\sqrt{۲}$

$\left\{\sqrt{۲}, ۰, -\sqrt{۲}\right\}$

۲۰) $۴^{x^۲} = ۲^{x}$

$۲^{۲\left(x^۲\right)} = ۲^{x}$

$۲x^۲ = x$

$۲x^۲ - x = ۰$

$x\left(۲x - ۱\right) = ۰$

$x = ۰ \qquad ۲x - ۱ = ۰$

$x = ۰ \qquad x = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \left\{۰, \frac{۱}{۲}\right\}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۱) $۸^{x^۲-۲x}=\frac{۱}{۲}$

$۲^{۳\left(x^۲-۲x\right)}=۲^{-۱}$

$۳x^۲-۶x=-۱$

$۳x^۲-۶x+۱=۰$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\frac{۶\pm\sqrt{۳۶-۱۲}}{۶}=\frac{۶\pm۲\sqrt{۶}}{۶}=۱\pm\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

$$\left(۱-\frac{\sqrt{۶}}{۳},۱+\frac{\sqrt{۶}}{۳}\right)$$

۲۲) $۹^{-x}=\frac{۱}{۳}$

$۳^{۲(-x)}=۳^{-۱}$

$-۲x=-۱$

$x=\frac{۱}{۲}\quad\Rightarrow\left\{\frac{۱}{۲}\right\}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳) $e^{x^۲} = \left(e^{۳x}\right) \cdot \frac{۱}{e^۲}$

$e^{x^۲} = e^{۳x} * e^{-۲}$

$e^{x^۲} = e^{۳x-۲}$

$x^۲ = ۳x - ۲$

$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$

$(x-۲)(x-۱) = ۰$

$x = ۲ \qquad x = ۱$

$\{۱, ۲\}$

۲۴) $\left(e^۴\right)^x \cdot e^{x^۲} = e^{۱۲}$

$e^{۴x} * e^{x^۲} = e^{۱۲}$

$e^{x^۲+۴x} = e^{۱۲}$

$x^۲ + ۴x = ۱۲$

$x^۲ + ۴x - ۱۲ = ۰$

$(x+۶)(x-۲) = ۰$

$x = -۶ \qquad x = ۲$

$\{-۶, ۲\}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵) اگر $۴^{x} = ۷$ پس $۴^{-۲x} = ?$

$$۴^{-۲x} = ۴^{x(-۲)} = ۷^{-۲} = \frac{۱}{۷^{۲}} = \frac{۱}{۴۹}$$

۲۶) اگر $۲^{x} = ۳$ پس $۴^{-x} = ?$

$$۴^{-x} = ۲^{۲(-x)} = ۲^{x(-۲)} = ۳^{-۲} = \frac{۱}{۳^{۲}} = \frac{۱}{۹}$$

۲۷) اگر $۳^{-x} = ۲$ پس $۳^{۲x} = ?$

$$۳^{۲x} = ۳^{-x(-۲)} = ۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^{۲}} = \frac{۱}{۴}$$

۲۸) اگر $۵^{-x} = ۳$ پس $۵^{۳x} = ?$

$$۵^{۳x} = ۵^{-x(-۳)} = ۳^{-۳} = \frac{۱}{۳^{۳}} = \frac{۱}{۲۷}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۹ – اگریک صفحه شیشه ۳% از نوری را که از آن عبور می کند ، محو کند ، پس در صد p نوری که از n صفحه ششه عبور می کند ، به طور تقریب از تابع زیر بدست می آید.

$$p(n) = ۱۰۰\, e^{-۰/۰۳n}$$

الف –از ده صفحه شیشه چند در صد از نور عبور می کند؟

پاسخ

$$p(۱۰) = ۱۰۰\, e^{-۰/۰۳(۱۰)} = \%۷۴$$

ب –از ۲۵ صفحه شیشه چند در صد از نور عبور می کند؟

پاسخ

$$p(۲۵) = ۱۰۰\, e^{-۰/۰۳(۲۵)} = \%۴۷$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱.۳ توابع لگاریتمی Logarithmic Functions

یاد آوری –بخاطر دارید که گفتیم یک تابع یک به یک مانند $y = f(x)$ یک تابع معکوس دارد مانند $x = f(y)$

تابع مجهول القوه $y = f(x) = a^x , a > ۰, a \neq ۱$ یک به یک است و لذا یک تابع معکوس دارد که مطابق تساوی زیر تعریف می شود.

$$x = a^y \quad , a > ۰, a \neq ۱$$

این تابع معکوس آنقدر مهم است که به آن یک نام داده شده ، یعنی تابع لگاریتمی Logarithmic Function

تابع لگاریتمی پایه $a > ۰, a \neq ۱$ ، a با نماد $y = log_a x$ چنین تعریف می شود

$$y = log_a x \text{ اگر فقط و فقط } x = a^y$$

لگا ریتم را چنین می خوانیم. (لگاریتم x پایه a)

دامنه تابع لگاریتم $y = log_a x$ کلیه اعداد حقیقی بزرگ تر از صفر است.

مثال ۱ – رابطه لگاریتم ها با قوه ها Relating Logarithms to Exponents

الف –اگر $y = log_۳ x$ پس $x = ۳^y$ مثلا $۲ = log_۳ ۹$ معادل $۹ = ۳^۲$ است.

ب –اگر $y = log_۵ x$ پس $x = ۵^y$ مثلا $-۱ = log_۵ \left(\frac{۱}{۵}\right)$ معادل $\frac{۱}{۵} = ۵^{-۱}$ است.

مثال ۲ – تبدیل عبارت های توانی به عبارت های لگاریتمی

Changing Exponential Expressions to Logarithmic Expressions

هر یک از عبارت های توانی را به عبارت های لگاریتمی معادل تبدیل کنید.

$a)\ ۱ / ۲^۳ = m \qquad b)\ e^b = ۹ \qquad c)\ a^۴ = ۲۴$

پاسخ

$a)\ log_{\frac{۱}{۲}} m = ۳ \qquad b)\ log_e ۹ = b \qquad c)\ log_a ۲۴ = ۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳ – تبدیل عبارت های لگاریتمی به عبارت های توانی.

Changing Logarithmic Expressions to Exponential Expressions

هر یک از عبارت های لگاریتمی به عبارت های توانی معادل تبدیل کنید.

$a)\ \ log_a ۴ = ۵ \qquad b)\ \ log_e b = -۳ \qquad c)\ \ log_۳ ۵ = c$

پاسخ

$a)\ \ a^۵ = ۴ \qquad b)\ \ e^{-۳} = b \qquad c)\ \ ۳^c = ۵$

مثال ۴ -پیدا کردن مقدار دقیق یک عبارت لگاریتمی

Finding the Exact Value of a Logarithmic Expression

مقدار دقیق عبارت های زیر را پیدا کنید.

$a)\ \ log_۲ ۱۶ \qquad b)\ \ log_۳ \frac{۱}{۲۷}$

پاسخ

$a) \qquad y = log_۲ ۱۶$

$۲^y = ۱۶$

$۲^y = ۲^۴$

$y = ۴$

پس

$$log_۲ ۱۶ = ۴$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$b)\qquad y = log_{۳}\frac{۱}{۲۷}$

$$۳^{y} = \frac{۱}{۲۷}$$

$$۳^{y} = ۳^{-۳}$$

$$y = -۳$$

پس

$$log_{۳}\frac{۱}{۲۷} = -۳$$

دامنه یک تابع لگاریتمی Domain of a Logarithmic Function

گفتیم که تابع لگاریتمی $y = log_a x$ معکوس تابع مجهول القوه $y = a^x$ است. یعنی اگر $f(x) = a^x$ باشد ، پس $f^{-۱}(x) = log_a x$ است. بر اساس آنچه در مورد تابع معکوس گفتیم یعنی گفتیم

دامنه f = برد $f^{-۱}$ و برد f = دامنه $f^{-۱}$

پس نتیجه می گیریم که

دامنه تابع لگاریتمی = برد تابع مجهول القوه است و = $(۰.\infty)$

برد تابع لگاریتمی = دامنه تابع مجهول القوه است و = $(-\infty,\infty)$

لذا

دامنه $y = log_a x$ کلیه اعداد مثبت است یعنی $۰ < x < \infty$

برد $y = log_a x$ کلیه اعداد حقیقی است یعنی $(-\infty,\infty)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۵ –پیدا کردن دامنه یک تابع لگاریتمی Finding the Domain of a Logarithmic Function

دامنه هر یک از توابع لگاریتمی زیر را پیدا کنید.

$$a)\ \ F(x) = log_{۲}(۱ - x) \qquad b)\ \ g(x) = log_{۵}\left(\frac{۱ + x}{۱ - x}\right) \qquad c)\ \ h(x) = log_{\frac{۱}{۲}}|x|$$

پاسخ

$a)$

دامنه F شامل کلیه مقادیر x است به شرطی که $۱ - x > ۰$ باشد ، یعنی کلیه مقادیر $x < ۱$ و یا $(-\infty, ۱)$

$b)$

دامنه g محدود است به

$$\frac{۱ + x}{۱ - x} > ۰$$

نا معادله بالا را حال می کنیم.

$$(۱ + x)(۱ - x) > ۰$$

$$۱ + x > ۰ \qquad ۱ - x > ۰$$

$$x > -۱ \qquad x < ۱$$

پس دامنه g شامل کلیه مقادیر $-۱ < x < ۱$ و یا $(-۱, ۱)$

$c)$

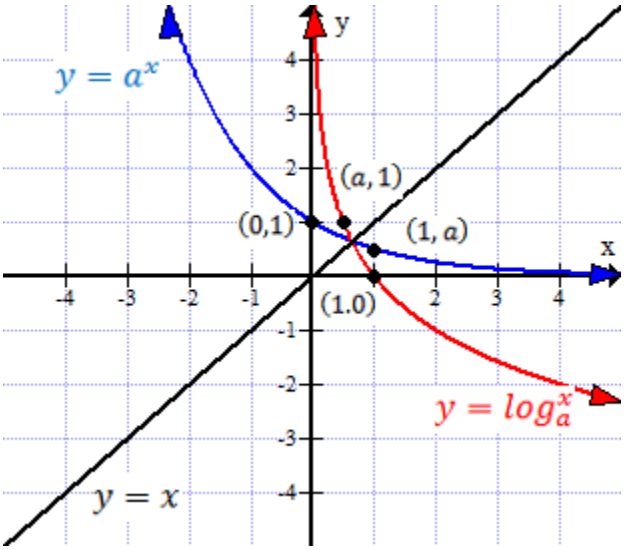
چون $|x| > ۰$ به شرطی که $x \neq ۰$ باشد ، پس دامنه h شامل کلیه اعداد حقیقی غیر از صفر است و یا

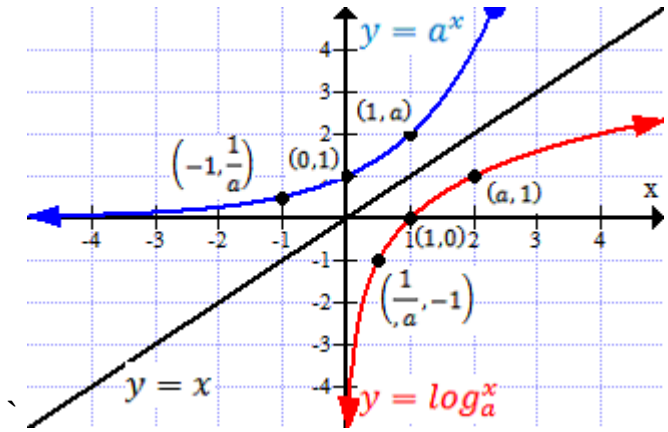
$$(-\infty, ۰) \cup (۰, \infty)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار های توابع لگاریتمی Graphs of Logarithmic Functions

چون توابع مجهول القوه و توابع لگاریتمی معکوس یک دیگر هستند ، پس نمودار یک تابع لگاریتمی $y = log_a x$ انعکاس تابع مجهول القوه $y = a^x$ است حول خط $y = x$ مانند اشکال زیر.





خصوصیات تابع لگاریتمی $f(x) = log_a x$ Properties of the logarithmic Function

الف –دامنه شامل کلیه اعداد حقیقی مثبت است و برد کلیه اعداد حقیقی.

ب -تلاقی نمودار با محور x نقطه $(۱,۰)$ است و با محور y تلاقی ندارد.

ج –یک تابع لگاریتمی نزولی است اگر $۰ < a < ۱$ و صعودی است اگر $a > ۱$ باشد.

د –نمودار f شامل نقاط $(۱,۰), (a, ۱), \left(\frac{۱}{a}, -۱\right)$ است.

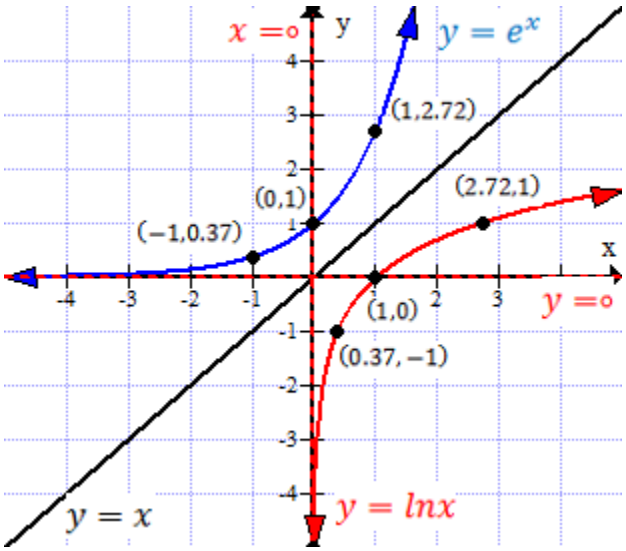
ه –نمودار صاف ، پیوسته و بدون گوشه یا فاصله است.

اگر پایه یک تابع لگاریتمی عدد e باشد ، پس **تابع لگاریتم طبیعی** داریم. این تابع بقدری کار برد دارد که به آن یک نماد مخصوص **ln** داده شده است. این نماد از کلمه لاتین *logarithmus naturalis* *گرفته شده است.*

$$y = log_e x = lnx \quad \text{اگر فقط و فقط} \quad x = e^y$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

چون $y = lnx$ و تابع مجهول القوه معکوس یک دیگر هستند ، پس می توان نمودار $y = lnx$ را با انعکاس نمودار $y = e^x$ حول خط $y = x$ بدست آورد. مانند شکل زیر.



مثال ۶ – رسم نمودار توابع لگاریتمی با استفاده از تبدیل ها

Graphing Logarithmic Functions Using Transformations

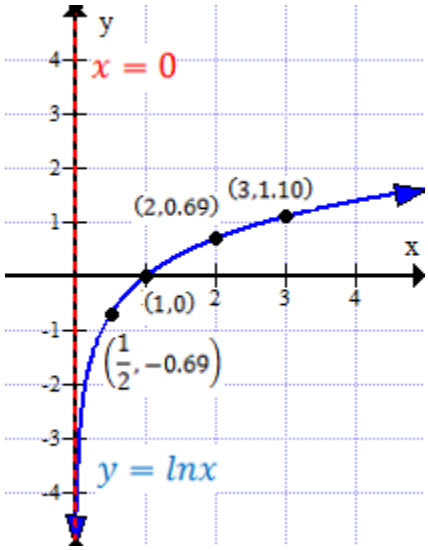
نمودار $f(x) = -\ln(x + ۲)$ را رسم کنید. با نمودار $y = \ln(x)$ شروع کنید. دامنه ، برد ، و خط مجانب عمودی را مشخص کنید.

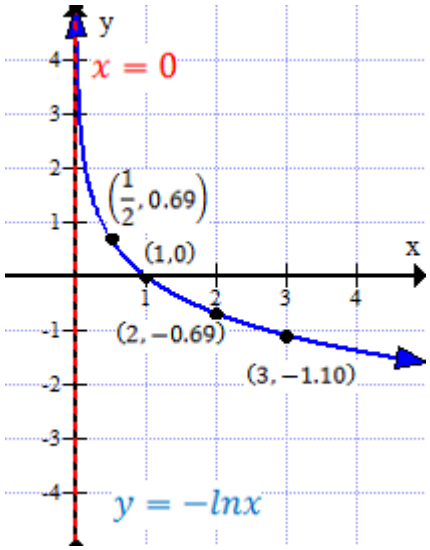
پاسخ

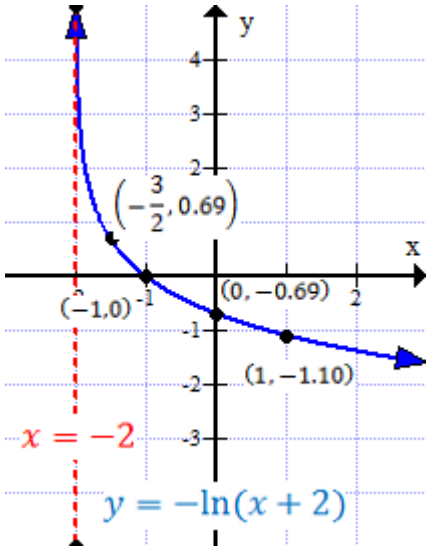
دامنه شامل کلیه مقادیر x است به شرطی که $x + ۲ > ۰$ و یا $x > -۲$ باشد.

رسم نمودار را در سه مرحله انجام می دهیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا





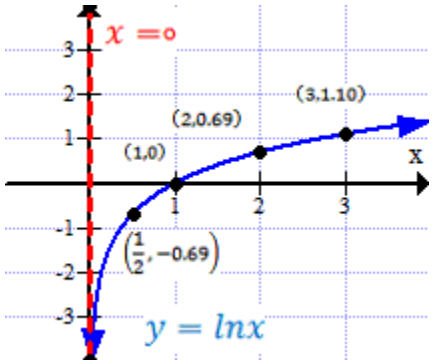


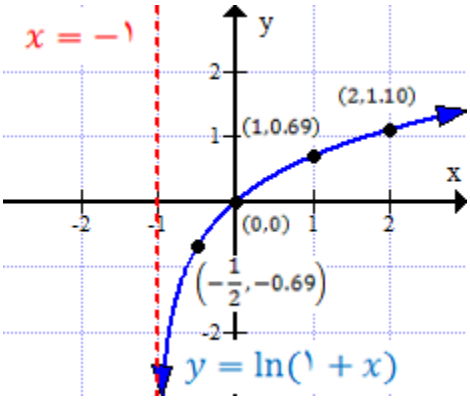
برد $f(x) = -\ln(x + ۲)$ کلیه اعداد حقیقی و یا $(-\infty, \infty)$ است. خط مجانب عمودی خط $x = -۲$ است. دو واحد از خط مجانب اولیه یعنی $x = ۰$ به سمت چپ جابجا شده است.

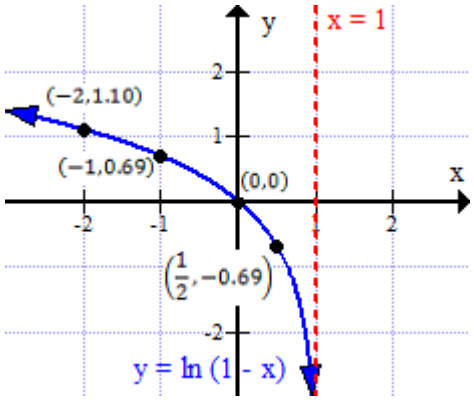
مثال ۷ - نمودار $f(x) = ln(x - ۱)$ را رسم کنید. دامنه ، برد و خط مجانب عمودی را مشخص کنید.

پاسخ –

دامنه شامل کلیه مقادیر x است به شرطی که $۱ - x > ۰$ و یا $x < ۱$ باشد. برای رسم نمودار سه مرحله را انجام می دهیم.







برد $f(x) = ln(۱ - x)$ کلیه اعداد حقیقی است و یا $(-\infty, \infty)$ خط مجانب عمودی خط $x = ۱$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله های لگاریتمی Logarithmic Equations

معادله هایی که شامل لگاریتم هستند را معادله های لگاریتمی می نامند. هنگام حل معادله های لگاریتمی از طریق جبری باید دقت شود. جواب های بدست آمده را در معادله اصلی امتحان کنید و جواب های نا مربوط را حذف کنید. بخاطر داشته باشد که در عبارت log_a^M مقادیر M و a مثبت است و $a \neq ۱$

مثال ۸ – حل یک تساوی لگاریتمی Solving a Logarithmic Equation

معادله های زیر را حل کنید.

$a)\ \ log_۳(۴x - ۷) = ۲$ $\qquad$ $b)\ \ log_x ۶۴ = ۲$

پاسخ

$a)\ \ log_۳(۴x - ۷) = ۲$

می‌توان با تبدیل معادله لگاریتمی به معادله توانی ، مقدار دقیق را بدست آورد.

$$۳^۲ = ۴x - ۷$$

$$۴x - ۷ = ۹$$

$$۴x = ۱۶$$

$$x = \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

$b)\ \ log_x ۶۴ = ۲$

می‌توان با تبدیل معادله لگاریتمی به معادله توانی ، مقدار دقیق را بدست آورد.

$$x^۲ = ۶۴$$

$$x = \pm\sqrt{۶۴} = \pm ۸$$

می دانیم که پایه لگاریتم همیشه مثبت است ، پس ۸– را کنار می گذاریم و ۸ را به عنوان جواب معادله قبول می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۹ - استفاده از لگاریتم ها برای حل معادله های مجهول القوه

Using Logarithms to Solve Exponential Equations

معادله $e^{۲x} = ۵$ را حل کنید.

پاسخ

$$e^{۲x} = ۵$$

$$ln(۵) = ۲x$$

$$x = \frac{ln(۵)}{۲} \approx ۰/۸۰۵$$

مثال ۱۰

الکل و رانندگی -غلظت الکل در خون شخص قابل اندازه گیری است. تحقیقات پزشکی نشان می دهد که در صد خطر یا ریسک تصادف یک ماشین را می توان از تساوی زیر بدست آورد.

$$R = ۶e^{kx}$$

در تساوی بالا x غلظت الکل در خون و k یک عدد ثابت است.

الف –فرض کنید که غلظت ۰/۰۴ الکل در خون ۱۰% خطر تصادف امکان پذیر است. ($R = ۱۰$)

عدد ثابت k را پیدا کنید.

ب – با استفاده از عدد بدست امده در قسمت الف ، چند در صد خطر تصادف وجود دارد اگر غلظت الکل ۰/۱۷ باشد؟

ج –با استفاده از همان k پیدا کنید چه مقدار غلظت الکل در خون صد در صد سبب تصادف می شود؟

د –اگر قانون بگوید در صورت امکان ۲۰% تصادف ، شخص نباید رانندگی کند ، معین کیند که غلظت الکل در خون چه مقدار باید باشد ، تا پلیس راننده را دستگیر کند؟

پاسخ

الف – طبق فرض مساله $x = ۰/۰۴$ و $R = ۱۰$ باید k را پیدا کنیم.

$$R = ۶e^{kx}$$

$$۱۰ = ۶e^{k(۰/۰۴)}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$e^{۰/۰۴k} = \frac{۱۰}{۶}$$

$$\ln\frac{۱۰}{۶} = ۰/۰۴k$$

$$k = \frac{ln\left(\frac{۱۰}{۶}\right)}{۰/۰۴} \approx ۱۲/۷۷$$

ب - $x = ۰/۱۷$ و $k = ۱۲/۷۷$ باید R را پیدا کنیم.

$$R = ۶e^{(۰/۱۷)(۱۲/۷۷)} = ۵۲/۶$$

ج - $R = ۱۰۰$ باید x را پیدا کنیم.

$$R = ۶e^{kx}$$

$$۱۰۰ = ۶e^{۱۲/۷۷x}$$

$$\frac{۱۰۰}{۶} = e^{۱۲/۷۷x}$$

$$\ln\left(\frac{۱۰۰}{۶}\right) = ۱۲/۷۷x$$

$$x = \frac{ln\left(\frac{۱۰۰}{۶}\right)}{۱۲/۷۷} \approx ۰/۲۲$$

برای غلظت ۰/۲۲ الکل در خون ، خطر تصادف صد در صد است.

د - $R = ۲۰$ باید x را پیدا کنیم.

$$R = ۶e^{kx}$$

$$۲۰ = ۶e^{۱۲/۷۷x}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$e^{۱۲/۷۷x} = \frac{۲۰}{۶}$$

$$ln\left(\frac{۲۰}{۶}\right) = ۱۲/۷۷x$$

$$x = \frac{ln\left(\frac{۲۰}{۶}\right)}{۱۲/۷۷} = ۰/۰۹۴$$

اگر غلظت الکل در خون یک راننده ۰/۰۹۴ و یا بیشتر باشد ، پلیس او را دستگیر می کند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۱.۳

عبارت های توانی زیر را به عبارت های لگاریتمی معادل تبدیل کنید.

۱) $۹ = ۳^{۲}$

۲) $۱۶ = ۴^{۲}$

۳) $a^{۲} = ۱ / ۶$

یاد آوری ۱ / ۶ یعنی یک و شش دهم در فارسی.

۴) $x^{۳} = ۲ / ۱$

۵) $۱ / ۱^{۲} = M$

۶) $۲ / ۲^{۳} = N$

۷) $۲^{x} = ۷ / ۲$

۸) $۳^{x} = ۴ / ۶$

۹) $x^{\sqrt{۲}} = \pi$

۱۰) $x^{\pi} = e$

دانلود از سایت ریاضی سرا

عبارت های لگاریتمی را به عبارت های توانی معادل تبدیل کنید.

۱۱) $log_{۲}۸ = ۳$

۱۲) $log_{۳}\left(\frac{۱}{۹}\right) = -۲$

۱۳) $log_{a}۳ = ۶$

۱۴) $log_{b}۴ = ۲$

۱۵) $log_{۳}۲ = x$

۱۶) $log_{۲}۶ = x$

۱۷) $log_{۲}M = ۱ / ۳$

۱۸) $log_{۳}N = ۲ / ۱$

۱۹) $log_{\sqrt{۲}}\pi = x$

۲۰) $log_{\pi}x = \frac{۱}{۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات زیر مقدار هر یک از لگاریتم ها را بدون ماشین حساب پیدا کنید.

۲۱) $log_{۲}۱$

۲۲) $log_{۸}۸$

۲۳) $log_{۵}۲۵$

۲۴) $log_{۳}\left(\frac{۱}{۹}\right)$

۲۵) $log_{\frac{۱}{۲}}۱۶$

۲۶) $log_{\frac{۱}{۳}}۹$

۲۷) $log_{۵}\sqrt[۳]{۲۵}$

۲۸) $log_{\sqrt{۲}}۴$

۲۹) $log_{\sqrt{۳}}۹$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۰) $ln\sqrt{e}$

۳۱) $lne^{۳}$

دامنه هر یک از توابع زیر را پیدا کنید.

۳۲) $f(x) = \ln(x - ۳)$

۳۳) $g(x) = \ln(x - ۱)$

۳۴) $F(x) = log_{۲}x^{۲}$

۳۵) $H(x) = log_{۵}x^{۳}$

۳۶) $h(x) = log_{\frac{۱}{۲}}\left(x^{۲} - ۲x + ۱\right)$

۳۷) $G(x) = log_{\frac{۱}{۲}}\left(x^{۲} - ۱\right)$

۳۸) $f(x) = ln\left(\frac{۱}{x + ۱}\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۹) $g(x) = ln\left(\frac{۱}{x-۵}\right)$

۴۰) $log_{۵}\left(\frac{x+۱}{x}\right)$

با استفاده از ماشین حساب ، مقادیر عبارت های زیر را پیدا کنید.

۴۱) $ln\frac{۵}{۳}$

۴۲) $\frac{ln۵}{۳}$

۴۳) $\frac{ln\left(\frac{۱۰}{۳}\right)}{۰/۰۴}$

۴۴) $\frac{ln\left(\frac{۲}{۳}\right)}{-۰/۱}$

۴۵ - برای a عددی پیدا کنید به طوری که نقطه $(۲,۲)$ روی نمودار $f(x) = log_a x$ باشد.

۴۶ - برای a عددی پیدا کنید به طوری که نقطه $\left(\frac{۱}{۲},-۴\right)$ روی نمودار $f(x) = log_a x$ باشد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

با استفاده از روش تبدیل ، نمودار توابع زیر را رسم کنید. دامنه ، برد و خط مجانب عمودی را مشخص کنید.

۴۷) $f(x) = ln(x + ۴)$

۴۸) $f(x) = ln(x - ۳)$

۴۹) $f(x) = ln(-x)$

۵۰) $f(x) = -ln(-x)$

۵۱) $g(x) = ln(۲x)$

۵۲) $h(x) = ln\left(\frac{۱}{۲}x\right)$

۵۳) $f(x) = ۳lnx$

۵۴) $f(x) = -۲lnx$

دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله های زیر را حل کنید.

۵۵) $log_{۳}x = ۲$

۵۶) $log_{۵}x = ۳$

۵۷) $log_{۲}(۲x + ۱) = ۳$

۵۸) $log_{۳}(۳x - ۲) = ۲$

۵۹) $log_{x}۴ = ۲$

۶۰) $log_{x}\left(\frac{۱}{۸}\right) = ۳$

۶۱) $lne^{x} = ۵$

۶۲) $lne^{-۲x} = ۸$

۶۳) $log_{۴}۶۴ = x$

۶۴) $log_{۵}۶۲۵ = x$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۱.۳

عبارت های توانی زیر را به عبارت های لگاریتمی معادل تبدیل کنید.

۱) $۹ = ۳^{۲}$

$log_{۳}۹ = ۲$

۲) $۱۶ = ۴^{۲}$

$log_{۴}۱۶ = ۲$

۳) $a^{۲} = ۱ / ۶$

$log_{a}۱/۶ = ۲$

یاد آوری ۶ / ۱ یعنی یک و شش دهم در فارسی.

۴) $x^{۳} = ۲ / ۱$

$log_{x}۲/۱ = ۳$

۵) $۱ / ۱^{۲} = M$

$log_{۱/۱}M = ۲$

۶) $۲ / ۲^{۳} = N$

$log_{۲/۲}N = ۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $۲^{x} = ۷ / ۲$

$log_{۲} ۷/۲ = x$

۸) $۳^{x} = ۴ / ۶$

$log_{۳} ۴/۶ = x$

۹) $x^{\sqrt{۲}} = \pi$

$log_{x} \pi = \sqrt{۲}$

۱۰) $x^{\pi} = e$

$log_{x} e = \pi$

عبارت های لگاریتمی را به عبارت های توانی معادل تبدیل کنید.

۱۱) $log_{۲} ۸ = ۳$

$۲^{۳} = ۸$

۱۲) $log_{۳} \left(\frac{۱}{۹}\right) = -۲$

$۳^{-۲} = \frac{۱}{۹}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳) $log_a ۳ = ۶$

$a^۶ = ۳$

۱۴) $log_b ۴ = ۲$

$b^۲ = ۴$

۱۵) $log_۳ ۲ = x$

$۳^x = ۳$

۱۶) $log_۲ ۶ = x$

$۲^x = ۶$

۱۷) $log_۲ M = ۱ / ۳$

$۲^{۱/۳} = M$

۱۸) $log_۳ N = ۲ / ۱$

$۳^{۲/۱} = N$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹) $log_{\sqrt{۲}}\pi = x$

$\left(\sqrt{۲}\right)^{x} = \pi$

۲۰) $log_{\pi}x = \frac{۱}{۲}$

$\pi^{\frac{۱}{۲}} = x$

در تمرینات زیر مقدار هر یک از لگاریتم ها را بدون ماشین حساب پیدا کنید.

۲۱) $log_{۲}۱$

$y = log_{۲}۱$

$۲^{y} = ۱$

$۲^{y} = ۲^{۰}$

$y = ۰$

$log_{۲}۱ = ۰$

۲۲) $log_{۸}۸$

$y = log_{۸}۸$

$۸^{y} = ۸$

$۸^{y} = ۸^{۱}$

$y = ۱$ پس $log_{۸}۸ = ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳) $log_{۵}۲۵$

$y = log_{۵}۲۵$

$۵^{y} = ۲۵$

$۵^{y} = ۵^{۲}$

$y = ۲$

$log_{۵}۲۵ = ۲$

۲۴) $log_{۳}\left(\frac{۱}{۹}\right)$

$y = log_{۳}\left(\frac{۱}{۹}\right)$

$۳^{y} = \frac{۱}{۹}$

$۳^{y} = ۳^{-۲}$

$y = -۲$

$log_{۳}\left(\frac{۱}{۹}\right) = -۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵) $log_{\frac{۱}{۲}}{۱۶}$

$y = log_{\frac{۱}{۲}}{۱۶}$

$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{y} = ۱۶$

$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{y} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۴}$

$y = -۴$

$log_{\frac{۱}{۲}}{۱۶} = -۴$

۲۶) $log_{\frac{۱}{۳}}{۹}$

$y = log_{\frac{۱}{۳}}{۹}$

$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{y} = ۹$

$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{y} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲}$

$y = -۲$

$log_{\frac{۱}{۳}}{۹} = -۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۷) $log_{۵}\sqrt[۳]{۲۵}$

$y = log_{۵}\sqrt[۳]{۲۵}$

$۵^{y} = \sqrt[۳]{۲۵}$

$۵^{y} = ۵^{\frac{۲}{۳}}$

$y = \frac{۲}{۳}$

$log_{۵}\sqrt[۳]{۲۵} = \frac{۲}{۳}$

۲۸) $log_{\sqrt{۲}}{۴}$

$y = log_{\sqrt{۲}}{۴}$

$\left(\sqrt{۲}\right)^{y} = ۴$

$\left(\sqrt{۲}\right)^{y} = \left(\sqrt{۲}\right)^{۴}$

$y = ۴$

$log_{\sqrt{۲}}{۴} = ۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۹) $log_{\sqrt{۳}}{}^{۹}$

$y = log_{\sqrt{۳}}{}^{۹}$

$\left(\sqrt{۳}\right)^{y} = ۹$

$\left(\sqrt{۳}\right)^{y} = \left(\sqrt{۳}\right)^{۴}$

$y = ۴$

$log_{\sqrt{۳}}{}^{۹} = ۴$

۳۰) $ln\sqrt{e}$

$y = ln\sqrt{e}$

$e^{y} = \sqrt{e}$

$e^{y} = e^{\frac{۱}{۲}}$

$y = \frac{۱}{۲}$

$ln\sqrt{e} = \frac{۱}{۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۱) $lne^{۳}$

$y = lne^{۳}$

$e^{y} = e^{۳}$

$y = ۳$

$lne^{۳} = ۳$

دامنه هر یک از توابع زیر را پیدا کنید.

۳۲) $f(x) = \ln(x - ۳)$

$x - ۳ > ۰$

$x > ۳$

دامنه $(۳, \infty)$

۳۳) $g(x) = \ln(x - ۱)$

$x - ۱ > ۰$

$x > ۱$

دامنه $(۱, \infty)$

۳۴) $F(x) = log_{۲}x^{۲}$

$x^{۲} > ۰$

دامنه کلیه اعداد حقیقی بجز صفر.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۵) $H(x) = log_{۵} x^{۳}$

$x^{۳} > ۰$

دامنه $(۰, \infty)$

۳۶) $h(x) = log_{\frac{۱}{۲}} \left(x^{۲} - ۲x + ۱\right)$

$x^{۲} - ۲x + ۱ > ۰$

$\left(x - ۱\right)^{۲} > ۰$

دامنه کلیه اعداد حقیقی بجز یک .

۳۷) $G(x) = log_{\frac{۱}{۲}} \left(x^{۲} - ۱\right)$

$x^{۲} - ۱ > ۰$

$\left(x + ۱\right)\left(x - ۱\right) > ۰$

دامنه $\left(-\infty, -۱\right) \cup \left(۱, \infty\right)$

۳۸) $f(x) = ln\left(\frac{۱}{x + ۱}\right)$

$x + ۱ > ۰$

$x > -۱$

دامنه $\left(-۱, \infty\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۹) $g(x) = ln\left(\frac{۱}{x-۵}\right)$

$x - ۵ > ۰$

$x > ۵$

دامنه $(۵, \infty)$

۴۰) $log_{۵}\left(\frac{x+۱}{x}\right)$

$\frac{x+۱}{x} > ۰$

$(x+۱)(x) > ۰$

دامنه $(-\infty, -۱) \cup (۱, \infty)$

با استفاده از ماشین حساب ، مقادیر عبارت های زیر را پیدا کنید.

۴۱) $ln\frac{۵}{۳} = ۰/۵۱۱$

۴۲) $\frac{ln۵}{۳} = ۰/۵۳۶$

۴۳) $\frac{ln\left(\frac{۱۰}{۳}\right)}{۰/۰۴} = ۳۰/۰۹۹$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۴) $\frac{ln\left(\frac{۲}{۳}\right)}{-۰/۱} = ۴/۰۵۵$

۴۵ - برای a عددی پیدا کنید به طوری که نقطه $(۲,۲)$ روی نمودار $f(x) = log_a x$ باشد.

پاسخ

برای اینکه نقطه $(۲,۲)$ روی نمودار $f(x) = log_a x$ باشد ، یعنی باید $x = ۲$ و $log_a x = ۲$ باشد.

$$log_a ۲ = ۲$$

$$a^۲ = ۲$$

$$a^۲ = \left(\sqrt{۲}\right)^۲$$

$$a = \sqrt{۲}$$

۴۶ - برای a عددی پیدا کنید به طوری که نقطه $\left(\frac{۱}{۲}, -۴\right)$ روی نمودار $f(x) = log_a x$ باشد.

پاسخ

برای اینکه نقطه $\left(\frac{۱}{۲}, -۴\right)$ روی نمودار $f(x) = log_a x$ باشد ، یعنی باید $x = \frac{۱}{۲}$ و $log_a x = -۴$ باشد.

$$log_a \frac{۱}{۲} = -۴$$

$$a^{-۴} = \frac{۱}{۲}$$

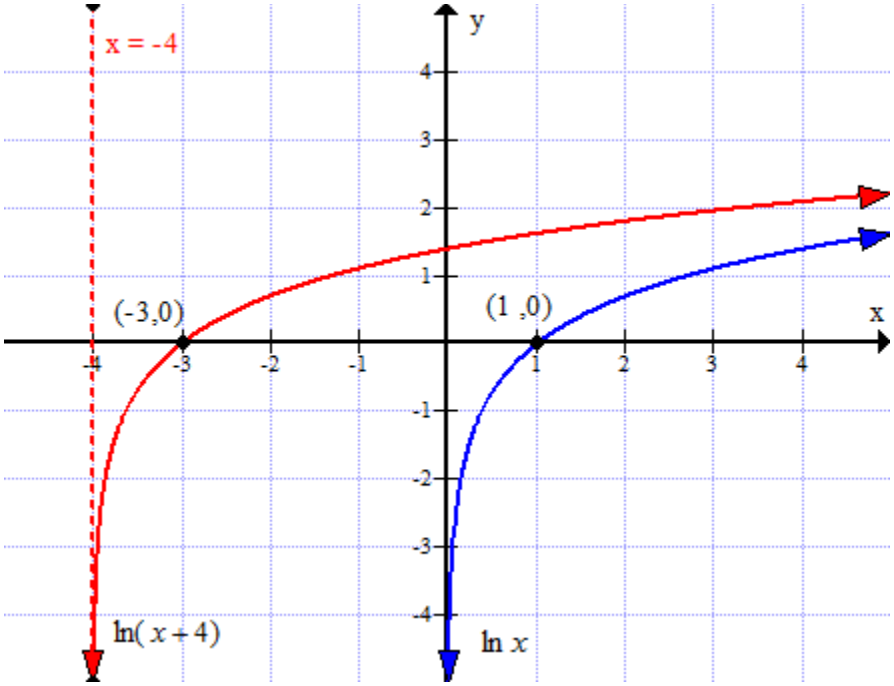
$$a^{-۴} = \left(۲^{\frac{۱}{۴}}\right)^{-۴}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

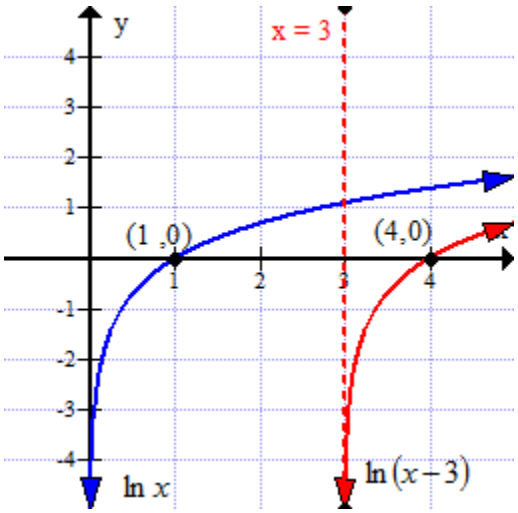
$$a = ۲^{\frac{۱}{۴}}$$

با استفاده از روش تبدیل ، نمودار توابع زیر را رسم کنید. دامنه ، برد و خط مجانب عمودی را مشخص کنید.

۴۷) $f(x) = ln(x + ۴)$

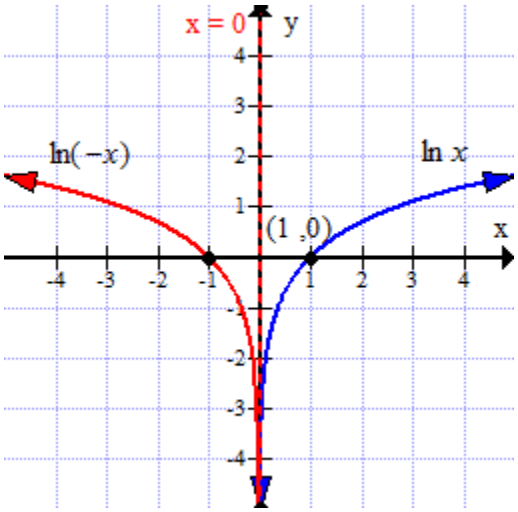


۴۸) $f(x) = ln(x - ۳)$

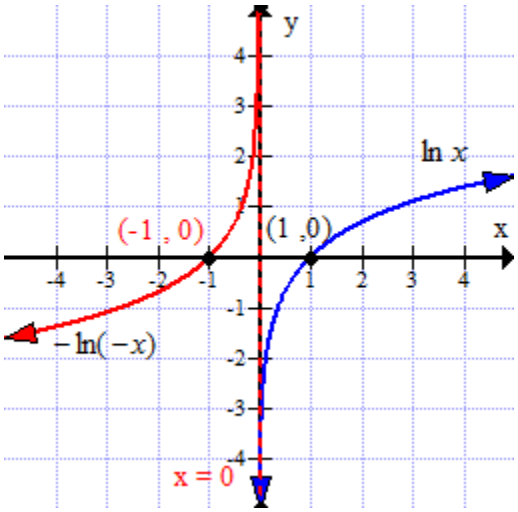


دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۹) $f(x) = ln(-x)$

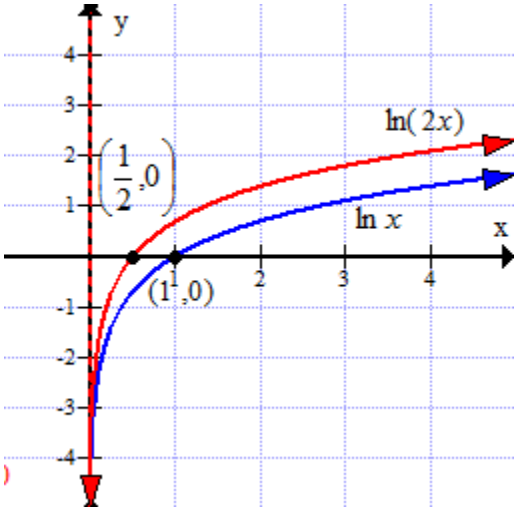


۵۰) $f(x) = -ln(-x)$

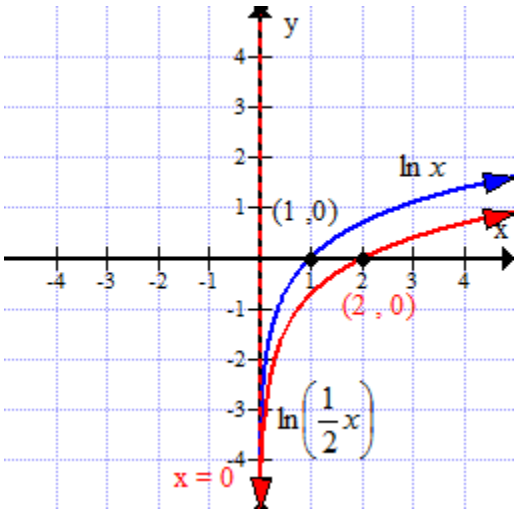


دانلود از سایت ریاضی سرا

۵۱) $g(x) = ln(۲x)$

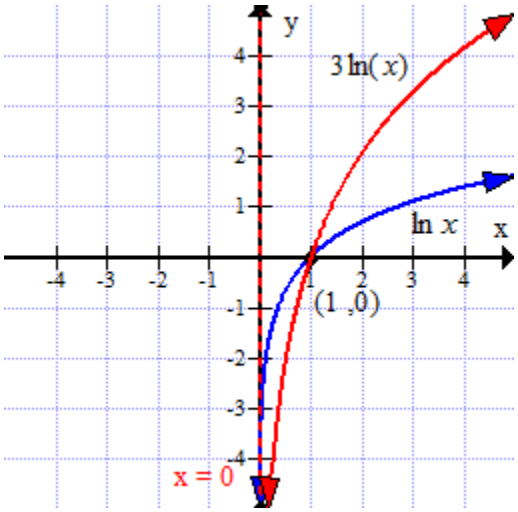


۵۲) $h(x) = ln\left(\frac{۱}{۲}x\right)$

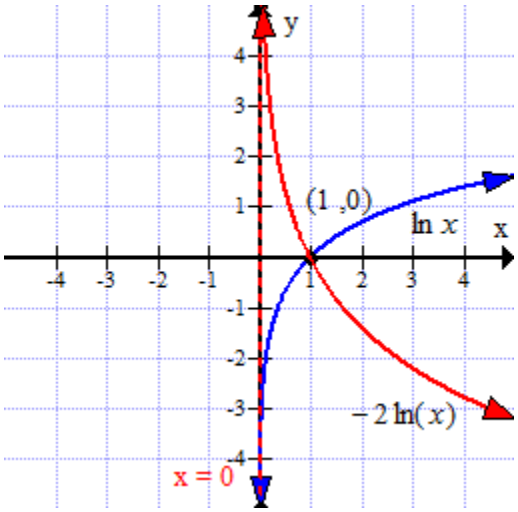


دانلود از سایت ریاضی سرا

۵۳) $f(x) = ۳lnx$



۵۴) $f(x) = -۲lnx$



معادله های زیر را حل کنید.

۵۵) $log_{۳}x = ۲$

$۳^{۲} = x \quad \Rightarrow \quad x = ۹$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵۶) $log_{۵}x = ۳$

$۵^{۳} = x \quad \Rightarrow x = ۱۲۵$

۵۷) $log_{۲}(۲x + ۱) = ۳$

$۲^{۳} = ۲x + ۱$

$۲x + ۱ = ۸$

$۲x = ۷ \quad \Rightarrow x = \frac{۷}{۲}$

۵۸) $log_{۳}(۳x - ۲) = ۲$

$۳^{۲} = ۳x - ۲$

$۳x - ۲ = ۹$

$۳x = ۱۱ \quad \Rightarrow x = \frac{۱۱}{۳}$

۵۹) $log_{x}۴ = ۲$

$x^{۲} = ۴$

$x = \pm ۲$

اما -۲ را کنار می گذاریم ، زیرا دامنه لگاریتم کلیه اعداد میسبت است. پس جواب $x = ۲$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۰) $log_x\left(\frac{۱}{۸}\right) = ۳$

$x^۳ = \frac{۱}{۸}$

$x = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲}$

۶۱) $lne^x = ۵$

$log_e e^x = ۵$

$e^۵ = e^x$

$x = ۵$

۶۲) $lne^{-۲x} = ۸$

$log_e e^{-۲x} = ۸$

$e^۸ = e^{-۲x}$

$-۲x = ۸ \quad \Rightarrow x = \frac{۸}{-۲} = -۴$

۶۳) $log_۴ ۶۴ = x$

$۴^x = ۶۴$

$۴^x = ۴^۳$

$x = ۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۴) $log_{۵}۶۲۵ = x$

$۵^{x} = ۵^{۴}$

$x = ۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱.۴ -خصوصیات لگاریتم ها ؛ مدل های مجهول القوه و لگاریتمی

Properties of Logarithms; Exponential and Logarithmic Models

مثال ۱ – ثابت کردن خصوصیات لگاریتم ها Establishing Properties of Logarithms

الف - نشان دهید که $log_a ۱ = ۰$

ب - نشان دهید که $log_a a = ۱$

برهان

الف این حقیقت را در بخش ۱۱.۳ هنگام رسم نمودار $y = log_a x$ نشان دادیم. حالا از طریق جبر نشان می دهیم.

فرض می کنیم $y = log_a ۱$ پس خواهیم داشت.

$$y = log_a ۱$$

$$a^y = ۱$$

$$a^y = a^۰$$

$$y = ۰$$

$$log_a ۱ = ۰$$

ب فرض می کنیم $y = log_a a$ پس خواهیم داشت.

$$y = log_a a$$

$$a^y = ۱$$

$$a^y = a$$

$$a^y = a^۱$$

$$y = ۱$$

$$log_a a = ۱$$

خلاصه

$$\boldsymbol{log_a ۱ = ۰ \qquad log_a a = ۱}$$

قضیه –اگر M و a اعداد حقیقی مثبت باشند و $a \neq ۱$ و r یک عدد حقیقی . پس

الف –

$$\boldsymbol{a^{log_a M} = M} \qquad (۱)$$

ب –

$$\boldsymbol{log_a a^r = r} \qquad (۲)$$

اثبات

میدانیم که $y = a^x$ و $y = log_a x$ معکوس یک دیگر هستند. پس

الف –میدانیم که برای توابع معکوس رابطه زیر بر قرار است.

$$f\left(f^{-۱}(x)\right) = x$$

حال اگر فرض کنیم $f(x) = a^x$ و $f^{-۱}(x) = log_a x$ پس خواهیم داشت

$$f\left(f^{-۱}(x)\right) = f(log_a x) = a^{log_a x} = x$$

حالا فرض کنید $x = M$ پس خواهیم داشت

$$a^{log_a M} = M$$

ب –میدانیم که

$$f^{-۱}\big(f(x)\big) = x$$

اگر $f(x) = a^x$ و $f^{-۱}(x) = log_a x$ فرض کنیم , خواهیم داشت.

$$f^{-۱}\big(f(x)\big) = f^{-۱}(a^x) = log_a a^x = x$$

اگر فرض کنیم $x = r$ پس خواهیم داشت

$$log_a a^r = r$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ – استفاده از خاصیت (۱) و (۲)

$a)\ \ ۲^{log_۲ \pi} = \pi \qquad b)\ \ log_{۰/۲}\, ۰/۲^{-\sqrt{۲}} = -\sqrt{۲} \qquad c)\ \ lne^{kt} = kt$

قضیه –اگر M, N, a اعداد حقیقی مثبت باشند و $a \neq ۱$ و r یک عدد حقیقی ، پس

$$\boldsymbol{log_a(MN) = log_a M + log_a N} \qquad (۳)$$

$$\boldsymbol{log_a\left(\frac{M}{N}\right) = log_a M - log_a N} \qquad (۴)$$

$$\boldsymbol{log_a M^r = r log_a M} \qquad (۵)$$

اثبات

خصوصیات (۳) و (۵) را ثابت می کنیم و شماره (۴) را به عهده شما می گذاریم.

اثبات شماره (۳)

فرض می کنیم $A = log_a M$ و $B = log_a N$ پس خواهیم داشت

$$a^A = M \quad و \quad a^B = N$$

پس

$$log_a(MN) = log_a(a^A a^B) = log_a a^{A+B} = A + B = log_a M + log_a N$$

اثبات شماره (۵)

فرض می کنیم $A = log_a M$ پس خواهیم داشت

$$a^A = M$$

حال

$$log_a M^r = log_a (a^A)^r = log_a a^{Ar} = rA = r log_a M$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳ – عبارت $\boldsymbol{log_a\left(x\sqrt{x^{۲}+۱}\right)}$ به صورت مجموع لگاریتم ها بنویسید.

پاسخ

$$log_a\left(x\sqrt{x^{۲}+۱}\right)=log_a x+log_a\sqrt{x^{۲}+۱} \qquad Property\ (۳)$$

$$=log_a x+log_a\left(x^{۲}+۱\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$=log_a x+\frac{۱}{۲}log_a\left(x^{۲}+۱\right) \qquad Propert\ (۵)$$

مثال ۴ – عبارت زیر را به صورت تفاضل لگاریتم ها بنویسید.

$$\boldsymbol{ln\frac{x^{۲}}{(x-۱)^{۳}}}$$

پاسخ

$$ln\frac{x^{۲}}{(x-۱)^{۳}}=lnx^{۲}-ln(x-۱)^{۳}=۲lnx-۳ln(x-۱)$$

مثال ۵ – عبارت زیر را به صورت جمع و تفاضل لگاریتم ها بنویسید.

$$\boldsymbol{log_a\frac{x^{۳}\sqrt{x^{۲}+۱}}{(x+۱)^{۴}}}$$

پاسخ

$$log_a\frac{x^{۳}\sqrt{x^{۲}+۱}}{(x+۱)^{۴}}=log_a\left(x^{۳}\sqrt{x^{۲}+۱}\right)-log_a(x+۱)^{۴}$$

$$=log_a x^{۳}+log_a\sqrt{x^{۲}+۱}-log_a(x+۱)^{۴}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$= log_a x^{۳} + log_a \left(x^{۲}+۱\right)^{\frac{۱}{۲}} - log_a\left(x+۱\right)^{۴}$$

$$= ۳log_a x + \frac{۱}{۲} log_a \left(x^{۲}+۱\right) - ۴log_a\left(x+۱\right)$$

مثال ۶ – نوشتن عبارت ها به صورت یک لگاریتم Writing Expressions as a Single Logarithm

هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

$\boldsymbol{a)\ \ log_a ۷ + ۴log_a ۳}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b)\ \ \frac{۲}{۳} ln ۸ - ln\left(۳^{۴} - ۸\right)}$

$\boldsymbol{c)\ \ log_a x + log_a ۹ + log_a\left(x^{۲}+۱\right) - log_a ۵}$

پاسخ

$a)\ \ log_a ۷ + ۴log_a ۳ = log_a ۷ + log_a ۳^{۴} = log_a ۷ + log_a ۸۱ = log_a\left(۷ * ۸۱\right) = log_a ۵۶۷$

$b)\ \ \frac{۲}{۳} ln ۸ - ln\left(۳^{۴} - ۸\right) = ln ۸^{\frac{۲}{۳}} - ln ۷۳ = ln ۴ - ln ۷۳ = ln\frac{۴}{۷۳}$

$c)\ \ log_a x + log_a ۹ + log_a\left(x^{۲}+۱\right) - log_a ۵ = log_a ۹x + log_a\left(x^{۲}+۱\right) - log_a ۵$

$$= log_a\left[۹x\left(x^{۲}+۱\right)\right] - log_a ۵ = log_a\left[\frac{۹x\left(x^{۲}+۱\right)}{۵}\right]$$

قضیه

(۶) $\boldsymbol{log_a M = log_a N}$ پس $\boldsymbol{M = N}$ اگر

(۷) $\boldsymbol{M = N}$ پس $\boldsymbol{log_a M = log_a N}$ اگر

نکته مهم - کلید log روی ماشین حساب ، لگاریتم با پایه ۱۰ است.

کلید lnبا پایه e است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۷ – پید کردن مقدار تقریبی لگاریتم هایی که پایه آنها نه ۱۰ است و نه e

مقدار تقریبی $log_{۲}۷$ را پیدا کنید. با چهار رقم اعشاری

پاسخ

فرض می کنیم $y = log_{۲}۷$ پس خواهیم داشت

$$۲^{y} = ۷$$

$$ln۲^{y} = ln۷ \qquad Property\ (۶)$$

$$yln۲ = ln۷ \qquad Property\ (۷)$$

$$y = \frac{ln۷}{ln۲} \approx ۲/۰۸۷۴$$

مثال ۷ نشان می دهد که میتوان مقدار تقریبی لگاریتم هایی که پایه آنها ۱۰ نیست با تغییر پایه آن به e را پیدا کرد.

قضیه –فرمول تغییر پایه Change-of-Base Formula Theorem

اگر a, b و M اعداد حقیقی مثبت باشند و $a \neq ۱, b \neq ۱$ پس

$$log_{a}M = \frac{log_{b}M}{log_{b}a} \qquad (۸)$$

اثبات

فرض می کنیم $y = log_{a}M$ پس خواهیم داشت

$$a^{y} = M$$

$$log_{b}a^{y} = log_{b}M \qquad Property\ (۶)$$

$$ylog_{b}a = log_{b}M \qquad Property\ (۵)$$

$$y = \frac{log_{b}M}{log_{b}a}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پس

$$log_a M = \frac{log_b M}{log_b a}$$

همان طور که گفتیم ماشین حساب لگاریتم پایه ۱۰ و پایه e را به ما می دهد. از قضیه بالا می توان استفاده کرد و با تغییر پایه و استفاده از ماشین حساب ، لگاریتم هر پایه ای را بدست آورد.

مثال۸– لگاریتم های زیر را با چهار مرتبه اعشاری پیدا کنید.

$$\boldsymbol{a)\ \ log_{۵}{}^{۸۹} \qquad b)\ \ log_{\sqrt{۲}}\sqrt{۵}}$$

پاسخ

اگر پایه لگاریتم نوشته نشده باشد ، منظور لگاریتم پایه ۱۰ است. هچنین $\boldsymbol{ln}$ منظور پایه $\boldsymbol{e}$ است.

$$a)\ \ log_{۵}{}^{۸۹} = \frac{log^{۸۹}}{log^{۵}} \approx \frac{۱/۹۴۹۳۹\ ۰۰۰\ ۷}{۰/۶۹۸۹۷\ ۰۰۰\ ۴۳} \approx ۲/۷۸۸۹$$

یا

$$log_{۵}{}^{۸۹} = \frac{ln^{۸۹}}{ln^{۵}} \approx \frac{۴/۴۸۸۶۳۶۳۷}{۱/۶۰۹۴۳۷۹۱۲} \approx ۲/۷۸۸۹$$

$$b)\ \ log_{\sqrt{۲}}\sqrt{۵} = \frac{log_{\sqrt{}}\sqrt{۵}}{log_{\sqrt{}}\sqrt{۲}} = \frac{\frac{۱}{۲}log^{۵}}{\frac{۱}{۲}log^{۲}} \approx ۲/۳۲۱۹$$

یا

$$log_{\sqrt{۲}}\sqrt{۵} = \frac{ln_{\sqrt{}}\sqrt{۵}}{ln_{\sqrt{}}\sqrt{۲}} = \frac{\frac{۱}{۲}ln^{۵}}{\frac{۱}{۲}ln^{۲}} \approx ۲/۳۲۱۹$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۱.۴

با استفاده از قوانین لگاریتم ، مقادیر عبارت های زیر را پیدا کنید. بدون استفاده از ماشین حساب.

۱) $log_{۳}۳^{۷۱}$

۲) $log_{۲}۲^{-۱۳}$

۳) $lne^{-۴}$

۴) $lne^{\sqrt{۲}}$

۵) $۲^{log_{۲}۷}$

۶) $e^{ln۸}$

۷) $log_{۸}۲ + log_{۸}۴$

۸) $log_{۶}۹ + log_{۶}۴$

۹) $log_{۶}۱۸ - log_{۶}۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $log_{۸}۱۶ - log_{۸}۲$

۱۱) $log_{۲}۶ * log_{۶}۴$

۱۲) $log_{۳}۸ * log_{۸}۹$

۱۳) $۳^{log_{۳}۵ - log_{۳}۴}$

۱۴) $۵^{log_{۵}۶ + log_{۵}۷}$

۱۵) $e^{log_{e^{۲}}۱۶}$

۱۶) $e^{log_{e^{۲}}۹}$

فرض کنید $ln۲ = a$ و $ln۳ = b$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b بنویسید.

۱۷) $ln۶$

۱۸) $ln\frac{۲}{۳}$

۱۹) $ln۱/۵$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۰) $ln\,۰/۵$

۲۱) $ln۸$

۲۲) $ln۲۷$

۲۳) $ln\sqrt[۵]{۶}$

۲۴) $ln\sqrt[۴]{\frac{۲}{۳}}$

عبارت های زیر را به صورت جمع یا تفریق لگاریتم ها بنویسید.

۲۵) $log_a\left(u^۲v^۲\right)$

۲۶) $log_۲\left(\frac{a}{b^۲}\right)$

۲۷) $log\frac{۱}{M^۳}$

۲۸) $log\left(۱۰u^۲\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۹) $log_{۵}\sqrt{\frac{a^{۳}}{b}}$

۳۰) $log_{۶}\left(\frac{ab^{۴}}{\sqrt[۳]{c^{۲}}}\right)$

۳۱) $ln\left(x^{۲}\sqrt{۱-x}\right)$

۳۲) $ln\left(x\sqrt{۱+x^{۲}}\right)$

۳۳) $log_{۲}\left(\frac{x^{۳}}{x-۳}\right)$

۳۴) $log_{۵}\left(\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}}{x^{۲}-۱}\right)$

۳۵) $log\left[\frac{x(x+۲)}{(x+۳)^{۲}}\right]$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۶) $log\left[\frac{x^{۳}\sqrt{x+۱}}{(x-۲)^{۲}}\right]$

۳۷) $ln\left[\frac{x^{۲}-x-۲}{(x+۴)^{۲}}\right]^{\frac{۱}{۳}}$

۳۸) $ln\left[\frac{(x-۴)^{۲}}{x^{۲}-۱}\right]^{\frac{۲}{۳}}$

۳۹) $ln\frac{۵x\sqrt{۱-۳x}}{(x-۴)^{۳}}$

۴۰) $ln\left[\frac{۵x^{۲}\sqrt[۳]{۱-x}}{۴(x+۱)^{۲}}\right]$

عبارت های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۴۱) $۳log_{۵}u+۴log_{۵}v$

۴۲) $log_{۳}u^{۲}-log_{۳}v$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۳) $log_{\frac{۱}{۲}}\sqrt{x} - log_{\frac{۱}{۲}}x^{۳}$

۴۴) $log_{۲}\left(\frac{۱}{x}\right) + log_{۲}\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)$

۴۵) $ln\left(\frac{x}{x-۱}\right) + ln\left(\frac{x+۱}{x}\right) - ln\left(x^{۲}-۱\right)$

۴۶) $log\left(\frac{x^{۲}+۲x-۳}{x^{۲}-۴}\right) - log\left(\frac{x^{۲}+۷x+۶}{x+۲}\right)$

۴۷) $۸log_{۲}\sqrt{۳x-۲} - log_{۲}\left(\frac{۴}{x}\right) + log_{۲}۴$

۴۸) $۲۱log_{۳}\sqrt[۳]{x} + log_{۳}\left(۹x^{۲}\right) - log_{۳}۲۵$

۴۹) $۲log_{a}\left(۵x^{۳}\right) - \frac{۱}{۲}\ log_{a}(۲x+۳)$

۵۰) $\frac{۱}{۳}log\left(x^{۲}+۱\right) + \frac{۱}{۲}log\left(x^{۲}+۱\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

با استفاده از تغییر پایه و ماشین حساب ، مقادیر لگاریتم های زیر را پیدا کنید.

۵۱) $log_{۳}۲۱$

۵۲) $log_{۵}۱۸$

۵۳) $log_{\frac{۱}{۳}}۷۱$

۵۴) $log_{\frac{۱}{۲}}۱۵$

۵۵) $log_{\sqrt{۲}}۷$

۵۶) $log_{\sqrt{۵}}۸$

۵۷) $log_{\pi}e$

۵۸) $log_{\pi}\sqrt{۲}$

بدون استفاده از ماشین حساب ، مقدار دقیق لگاریتم های زیر را پیدا کنید.

۵۹) $log_{۲}۳ * log_{۳}۴ * log_{۴}۵ * log_{۵}۶ * log_{۶}۷ * log_{۷}۸$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۰) $log_{۲}۴ * log_{۴}۶ * log_{۶}۸$

۶۱) $log_{۲}۳ * log_{۳}۴ \circ \ldots * log_{n}(n+۱) * log_{n+۱}۲$

۶۲) $log_{۲}۲ \circ log_{۲}۴ * log_{۲}۸ * \ldots * log_{۲}۲^{n}$

با استفاده از تغییر پایه و ابزار رسم نمودار ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۶۳) $y = log_{۴}x$

۶۴) $y = log_{۵}x$

۶۵) $y = log_{۲}(x+۲)$

۶۶) $y = log_{۴}(x-۳)$

۶۷) $y = log_{x-۱}(x+۱)$

۶۸) $y = log_{x+۲}(x-۲)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات زیر y را بر حسب تابعی از x بنویسید. عدد ثابت C یک عدد مثبت است.

۶۹) $lny = lnx + lnC$

۷۰) $lny = ln(x + C)$

۷۱) $lny = lnx + ln(x + ۱) + lnC$

۷۲) $lny = ۲lnx - ln(x + ۱) + lnC$

۷۳) $lny = ۳x + lnC$

۷۴) $lny = -۲x + lnC$

نشان دهید که

۷۵) $log_a\left(x + \sqrt{x^۲ - ۱}\right) + log_a\left(x - \sqrt{x^۲ - ۱}\right) = ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۶ - یک شیمی دان مقدار ۱۰۰ از یک نوع ماده رادیو اکتیو دارد. برای مدت شش هفته مقدار ماده رادیو اکتیو را در ابتدای هر هفته ثبت می کنند و اطلاعات زیر را بدست می آورد.

هفته	وزن بر حسب گرم
۰	۱۰۰
۱	۸۸/۳
۲	۷۵/۹
۳	۶۹/۴
۴	۵۹/۱
۵	۵۱/۸
۶	۴۵/۵

الف –نمودار پراکندگی این اطلاعات را رسم کنید. هفته را متغیر مستقل فرض کنید.

ب –تابع مجهول القوه زیر ، یک تابع مناسب این اطلاعات تشخیص داده شده است.

$$y = ۱۰۰\left(۰/۸۸\right)^{x}$$

تابع بالا را به صورت تابع زیر بنویسید. اینجا $x = t$ است.

$$A = A_{\circ}e^{kt}$$

ج –با استفاده از تابع بدست آمده از قسمت ب ، حدس بزنید که چه مدت طول می کشد تا ۵۰ گرم از ماده رادیو اکتیو باقی مانده باشد. این زمان را **نیمه عمر Half-life** آن ماده رادیو اکتیو می گویند.

د –با استفاده از تابع قسمت ب پیش بینی کنید که بعد از ۵۰ هفته ، چه مقدار از ماده رادیو اکتیو باقی مانده است.

ه –با استفاده از ابزار رسم نمودار ، درستی تابع مجهول القوه قسمت ب را نشان دهید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۱.۴

با استفاده از قوانین لگاریتم ، مقادیر عبارت های زیر را پیدا کنید. بدون استفاده از ماشین حساب.

۱) $log_{۳}۳^{۷۱} = ۷۱log_{,۳}۳ = ۷۱ * ۱ = ۷۱$

۲) $log_{۲}۲^{-۱۳} = -۱۳log_{۲}۲ = -۱۳$

۳) $lne^{-۴} = log_{e}e^{-۴} = -۴log_{e}e = -۴lne = -۴$

۴) $lne^{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$

۵) $۲^{log_{۲}۷} = ۷$

۶) $e^{ln۸} = ۸$

۷) $log_{۸}۲ + log_{۸}۴ = log_{۸}(۲ * ۴) = log_{۸}۸ = ۱$

۸) $log_{۶}۹ + log_{۶}۴ = log_{۶}۳۶ = log_{۶}۶^{۲} = ۲log_{۶}۶ = ۲$

۹) $log_{۶}۱۸ - log_{۶}۳ = log_{۶}\left(\frac{۱۸}{۳}\right) = log_{۶}۶ = ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $log_{۸}۱۶ - log_{۸}۲ = log_{۸}\left(\frac{۱۶}{۲}\right) = log_{۸}۸ = ۱$

۱۱) $log_{۲}۶ * log_{۶}۴ = \frac{log۶}{log۲} * \frac{log۴}{log۶} = \frac{log۴}{log۲} = \frac{log۲^{۲}}{log۲} = \frac{۲log۲}{log۲} = ۲$

۱۲) $log_{۳}۸ * log_{۸}۹ = \frac{log۸}{log۳} * \frac{log۹}{log۸} = \frac{log۹}{log۳} = \frac{log۳^{۲}}{log۳} = \frac{۲log۳}{log۳} = ۲$

۱۳) $۳^{log_{۳}۵ - log_{۳}۴} = ۳^{log_{۳}\left(\frac{۵}{۴}\right)} = \frac{۵}{۴}$

۱۴) $۵^{log_{۵}۶ + log_{۵}۷} = ۵^{log_{۵}۶*۷} = ۶ * ۷ = ۴۲$

۱۵) $e^{log_{e^{۲}}۱۶}$

ابتدا $log_{e^{۲}}۱۶$ را ساده می کنیم.

$$log_{e^{۲}}۱۶ = \frac{ln۱۶}{lne^{۲}} = \frac{ln۴^{۲}}{۲lne} = \frac{۲ln۴}{۲lne} = \frac{ln۴}{lne} = \frac{ln۴}{۱} = ln۴$$

پس

$$e^{log_{e^{۲}}۱۶} = e^{ln۴} = ۴$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶) $e^{log_{e^{۲}}{}^{۹}}$

ابتدا $log_{e^{۲}}{}^{۹}$ را ساده می کنیم.

$$log_{e^{۲}}{}^{۹} = \frac{ln۹}{lne^{۲}} = \frac{ln۳^{۲}}{۲lne} = \frac{۲ln۳}{۲} = ln۳$$

پس

$$e^{log_{e^{۲}}{}^{۹}} = e^{ln۳} = ۳$$

فرض کنید $ln۲ = a$ و $ln۳ = b$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b بنویسید.

۱۷) $ln۶ = ln۲ * ۳ = ln۲ + ln۳ = a + b$

۱۸) $ln\frac{۲}{۳} = ln۲ - ln۳ = a - b$

۱۹) $ln۱/۵ = ln\frac{۳}{۲} = ln۳ - ln۲ = b - a$

۲۰) $ln\,۰/۵ = ln\frac{۱}{۲} = ln۲^{-۱} = -ln۲ = -a$

۲۱) $ln۸ = ln۲^{۳} = ۳ln۲ = ۳a$

۲۲) $ln۲۷ = ln۳^{۳} = ۳ln۳ = ۳b$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳) $ln\sqrt[۵]{۶} = ln۶^{\frac{۱}{۵}} = \frac{۱}{۵}ln۶ = \frac{۱}{۵}ln۲ * ۳ = \frac{۱}{۵}\left(ln۲ + ln۳\right) = \frac{۱}{۵}(a+b)$

۲۴) $ln\sqrt[۴]{\frac{۲}{۳}} = ln\left(\frac{۲}{۳}\right)^{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۴}\left(ln۲ - ln۳\right) = \frac{۱}{۴}(a-b)$

عبارت های زیر را به صورت جمع یا تفریق لگاریتم ها بنویسید.

۲۵) $log_a\left(u^۲v^۲\right) = log_a u^۲ + log_a v^۲ = ۲log_a u + ۲log_a v$

۲۶) $log_۲\left(\frac{a}{b^۲}\right) = log_۲ a - log_۲ b^۲ = log_۲ a - ۲log_۲ b$

۲۷) $log\frac{۱}{M^۳} = log۱ - logM^۳ = ۰ - ۳logM = -۳logM$

۲۸) $log\left(۱۰u^۲\right) = log۱۰ + logu^۲ = ۱ + ۲logu$

۲۹) $log_۵\sqrt{\frac{a^۳}{b}} = log_۵ a^{\frac{۳}{۲}} - log_۵ b^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۲}log_۵ a - \frac{۱}{۲}log_۵ b = \frac{۱}{۲}\left[۳log_۵ a - log_۵ b\right]$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۰) $log_{۶}\left(\frac{ab^{۴}}{\sqrt[۳]{c^{۲}}}\right) = log_{۶}ab^{۴} - log_{۶}c^{\frac{۲}{۳}} = log_{۶}a + log_{۶}b^{۴} - \frac{۲}{۳}log_{۶}c$

$= log_{۶}a + ۴log_{۶}b - \frac{۲}{۳}log_{۶}c$

۳۱) $ln\left(x^{۲}\sqrt{۱-x}\right) = lnx^{۲} + ln(۱-x)^{\frac{۱}{۲}} = ۲lnx + \frac{۱}{۲}ln(۱-x)$

۳۲) $ln\left(x\sqrt{۱+x^{۲}}\right) = lnx + ln\left(۱+x^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = lnx + \frac{۱}{۲}ln\left(۱+x^{۳}\right)$

۳۳) $log_{۲}\left(\frac{x^{۳}}{x-۳}\right) = log_{۲}x^{۳} - log_{۲}(x-۳) = ۳log_{۲}x - log_{۲}(x-۳)$

۳۴) $log_{۵}\left(\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}}{x^{۲}-۱}\right) = log_{۵}\left(x^{۲}+۱\right)^{\frac{۱}{۳}} - log_{۵}\left(x^{۲}-۱\right)$

$= \frac{۱}{۳}log_{۵}\left(x^{۲}+۱\right) - log_{۵}(x+۱)(x-۱)$

$= \frac{۱}{۳}log_{۵}\left(x^{۲}+۱\right) - log_{۵}(x+۱) - log_{۵}(x-۱)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۵) $$log\left[\frac{x(x+۲)}{(x+۳)^{۲}}\right]=logx(x+۲)-log(x+۳)^{۲}=logx+log(x+۲)-۲log(x+۳)$$

۳۶) $$log\left[\frac{x^{۳}\sqrt{x+۱}}{(x-۲)^{۲}}\right]=logx^{۳}\left(log(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}\right)-log(x-۲)^{۲}$$

$$=۳logx+\frac{۱}{۲}log(x+۱)-۲log(x-۲)$$

۳۷) $$ln\left[\frac{x^{۲}-x-۲}{(x+۴)^{۲}}\right]^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\left[ln\left(x^{۲}-x-۲\right)-۲ln(x+۴)\right]$$

$$=\frac{۱}{۳}\left[ln(x-۲)(x+۱)-۲ln(x+۴)\right]$$

$$=\frac{۱}{۳}\left[ln(x-۲)+ln(x+۱)-۲ln(x+۴)\right]$$

۳۸) $$ln\left[\frac{(x-۴)^{۲}}{x^{۲}-۱}\right]^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{۳}\left[ln(x-۴)^{۲}-ln\left(x^{۲}-۱\right)\right]=\frac{۴}{۳}ln(x-۴)-\frac{۲}{۳}ln(x+۱)(x-۱)$$

$$=\frac{۴}{۳}ln(x-۴)-\frac{۲}{۳}\left[ln(x+۱)+ln(x-۱)\right]$$

$$=\frac{۴}{۳}ln(x-۴)-\frac{۲}{۳}ln(x+۱)-\frac{۲}{۳}ln(x-۱)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۹) $ln\frac{۵x\sqrt{۱-۳x}}{(x-۴)^{۳}} = ln۵x(۱-۳x)^{\frac{۱}{۲}} - ln(x-۴)^{۳} = ln۵x + ln(۱-۳x)^{\frac{۱}{۲}} - ۳ln(x-۴)$

$$= ln۵ + lnx + \frac{۱}{۲}ln(۱-۳x) - ۳ln(x-۴)$$

۴۰) $ln\left[\frac{۵x^{۲}\sqrt[۳]{۱-x}}{۴(x+۱)^{۲}}\right] = ln۵x^{۲}(۱-x)^{\frac{۱}{۳}} - ln۴(x+۱)^{۲}$

$$= ln۵ + ۲lnx + \frac{۱}{۳}ln(۱-x) - ln۴ - ۲ln(x+۱)$$

عبارت های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۴۱) $۳log_{۵}u + ۴log_{۵}v = log_{۵}u^{۳} + log_{۵}v^{۴} = log_{۵}u^{۳}v^{۴}$

۴۲) $log_{۳}u^{۲} - log_{۳}v = log_{۵}\frac{u^{۲}}{v}$

۴۳) $log_{\frac{۱}{۲}}\sqrt{x} - log_{\frac{۱}{۲}}x^{۳} = log_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^{۳}}\right) = log_{\frac{۱}{۲}}x^{-\frac{۵}{۲}} = -\frac{۵}{۲}log_{\frac{۱}{۲}}x$

۴۴) $log_{۲}\left(\frac{۱}{x}\right) + log_{۲}\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right) = log_{۲}\left(\frac{۱}{x} * \frac{۱}{x^{۲}}\right) = log_{۲}\left(\frac{۱}{x^{۳}}\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۵) $$ln\left(\frac{x}{x-۱}\right)+ln\left(\frac{x+۱}{x}\right)-ln\left(x^{۲}-۱\right)=ln\left(\frac{x}{x-۱}*\frac{x+۱}{x}\right)-ln\left(x^{۲}-۱\right)$$

$$=ln\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)-ln\left(x^{۲}-۱\right)=ln\left(\frac{\frac{x+۱}{x-۱}}{x^{۲}-۱}\right)=ln\left(\frac{x+۱}{(x-۱)(x+۱)(x-۱)}\right)$$

$$=ln\left(\frac{۱}{(x-۱)^{۲}}\right)=ln(x-۱)^{-۲}=-۲ln(x-۱)$$

۴۶) $$log\left(\frac{x^{۲}+۲x-۳}{x^{۲}-۴}\right)-log\left(\frac{x^{۲}+۷x+۶}{x+۲}\right)=log\left(\frac{\frac{x^{۲}+۲x-۳}{(x-۲)(x+۲)}}{\frac{x^{۲}+۷x+۶}{x+۲}}\right)$$

$$=log\left(\frac{\left(x^{۲}+۲x-۳\right)(x+۲)}{(x-۲)(x+۲)(x^{۲}+۷x+۶)}\right)=log\left(\frac{x^{۲}+۲x-۳}{(x-۲)(x^{۲}+۷x+۶)}\right)$$

۴۷) $$۸log_{۲}\sqrt{۳x-۲}-log_{۲}\left(\frac{۴}{x}\right)+log_{۲}۴=log_{۲}\left(\left(۳x-۲\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{۸}-log_{۲}\left(\frac{۴}{x}\right)+log_{۲}۴$$

$$=log_{۲}\left(۳x-۲\right)^{۴}-log_{۲}\left(\frac{۴}{x}\right)+log_{۲}۴$$

$$=log_{۲}\left(\frac{\left(۳x-۲\right)^{۴}}{\frac{۴}{x}}*۴\right)=log_{۲}\left[x\left(۳x-۲\right)^{۴}\right]$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴۸) $۲۱log_{۳}\sqrt[۳]{x}+log_{۳}\left(۹x^{۲}\right)-log_{۳}۲۵=log_{۳}\left(x^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲۱}+log_{۳}\left(۹x^{۲}\right)-log_{۳}۲۵$

$$=log_{۳}x^{۷}+log_{۳}\left(۹x^{۲}\right)-log_{۳}۲۵=log_{۳}\left(\frac{x^{۷}*۹x^{۲}}{۲۵}\right)=log_{۳}\left(\frac{۹x^{۹}}{۲۵}\right)$$

۴۹) $۲log_{a}\left(۵x^{۳}\right)-\frac{۱}{۲}\ log_{a}(۲x+۳)\ =log_{a}\left(۵x^{۳}\right)^{۲}-log_{a}(۲x+۳)^{\frac{۱}{۲}}$

$$=log_{a}\left(\frac{۲۵x^{۶}}{\sqrt{۲x+۳}}\right)$$

۵۰) $\frac{۱}{۳}log\left(x^{۲}+۱\right)+\frac{۱}{۲}log\left(x^{۲}+۱\right)=log\left(\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}*\sqrt{x^{۲}+۱}\right)$

با استفاده از تغییر پایه و ماشین حساب ، مقادیر لگاریتم های زیر را پیدا کنید.

۵۱) $log_{۳}۲۱=\frac{log۲۱}{log۳}\approx\frac{۱/۳۲۲۲۱۹}{۰/۴۷۷۱۲۱}\approx ۲/۷۷۱$

۵۲) $log_{۵}۱۸=\frac{log۱۸}{log۵}\approx\frac{۱/۲۵۵۲۷}{۰/۶۹۸۹۷}\approx ۱/۷۹۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵۳) $log_{\frac{۱}{۳}}۷۱ = \frac{log۷۱}{log\left(\frac{۱}{۳}\right)} \approx \frac{۱/۸۵۱۲۵۸}{-۰/۴۷۷۱۲۱} \approx -۳/۸۸۰$

۵۴) $log_{\frac{۱}{۲}}۱۵ = \frac{log۱۵}{log\left(\frac{۱}{۲}\right)} \approx \frac{۱/۱۷۶۰۹۱}{-۰/۳۰۱۰۲۹۹} \approx -۳/۹۰۷$

۵۵) $log_{\sqrt{۲}}۷ = \frac{log۷}{log\sqrt{۲}} \approx ۵/۶۱۵$

۵۶) $log_{\sqrt{۵}}۸ = \frac{log۸}{log\sqrt{۵}} \approx ۲/۵۸۴$

۵۷) $log_{\pi}e = \frac{loge}{log\pi} \approx ۰/۸۷۴$

۵۸) $log_{\pi}\sqrt{۲} = \frac{log\sqrt{۲}}{log\pi} \approx ۰/۳۰۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

بدون استفاده از ماشین حساب ، مقدار دقیق لگاریتم های زیر را پیدا کنید.

۵۹) $log_{۲}۳ * log_{۳}۴ * log_{۴}۵ * log_{۵}۶ * log_{۶}۷ * log_{۷}۸$

$$= \frac{log۳}{log۲} * \frac{log۴}{log۳} * \frac{log۵}{log۴} * \frac{log۶}{log۵} * \frac{log۷}{log۶} * \frac{log۸}{log۷} = \frac{log۸}{log۲} = \frac{log۲^{۳}}{log۲} = \frac{۳log۲}{log۲} = ۳$$

۶۰) $log_{۲}۴ * log_{۴}۶ * log_{۶}۸ = \frac{log۴}{log۲} * \frac{log۶}{log۴} * \frac{log۸}{log۶} = \frac{log۸}{log۲} = \frac{log۲^{۳}}{log۲} = \frac{۳log۲}{log۲} = ۳$

۶۱) $log_{۲}۳ * log_{۳}۴ * \dots * log_{n}(n+۱) * log_{n+۱}۲$

$$= \frac{log۳}{log۲} * \frac{log۴}{log۳} * \cdots * \frac{log(n+۱)}{logn} * \frac{log۲}{log(n+۱)} = \frac{log۲}{log۲} = ۱$$

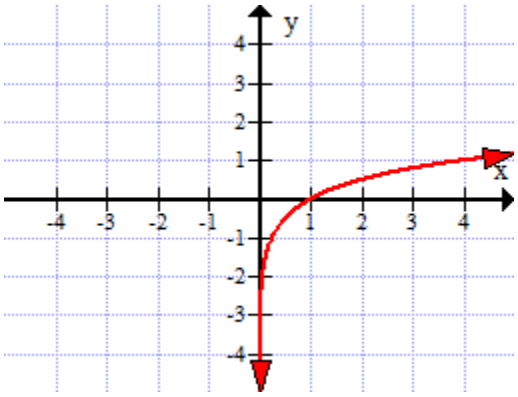
۶۲) $log_{۲}۲ * log_{۲}۴ * log_{۲}۸ * \dots * log_{۲}۲^{n} = \frac{log۲}{log۲} * \frac{۲log۲}{log۲} * \frac{۳log۲}{log۲} * \cdots * \frac{nlog۲}{log۲}$

$۱ * ۲ * ۳ * ۴ * \cdots * n = n!$

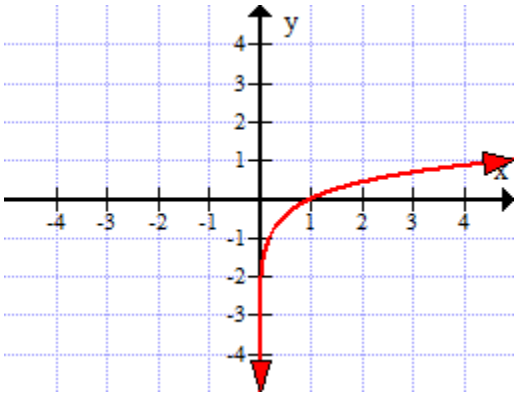
دانلود از سایت ریاضی سرا

با استفاده از تغییر پایه و ابزار رسم نمودار ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۶۳) $y = log_{۴}x = \frac{logx}{lo۴} = \frac{lnx}{ln۴}$

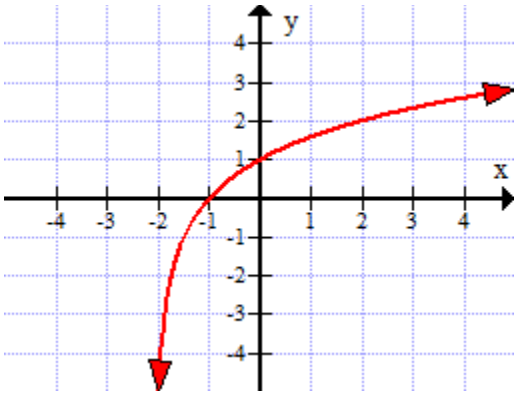


۶۴) $y = log_{۵}x = \frac{lnx}{ln۵} = \frac{logx}{log۵}$

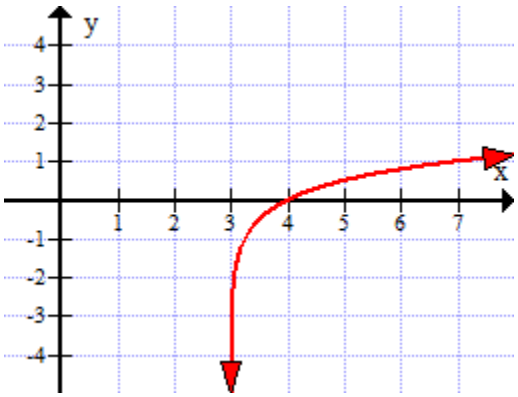


دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۵) $y = log_{۲}(x+۲) = \frac{log(x+۲)}{log۲} = \frac{ln(x+۲)}{ln۲}$

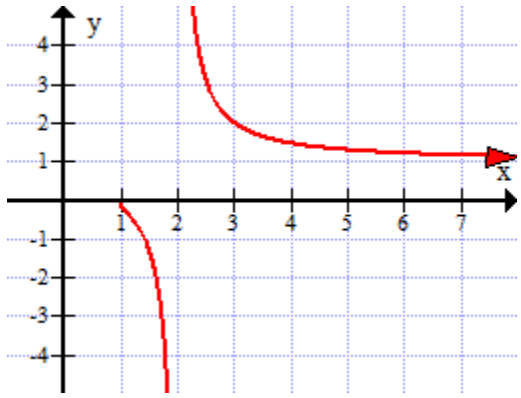


۶۶) $y = log_{۴}(x-۳) = \frac{log(x-۳)}{log۴} = \frac{ln(x-۳)}{ln۴}$

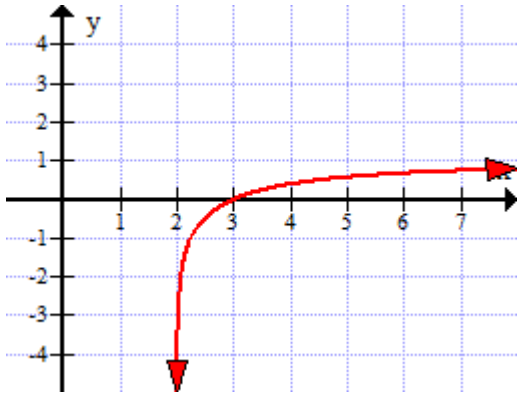


دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۷) $y = log_{x-۱}(x+۱) = \frac{log(x+۱)}{log(x-۱)} = \frac{ln(x+۱)}{ln(x-۱)}$



۶۸) $y = log_{x+۲}(x-۲) = \frac{log(x-۲)}{log(x+۲)} = \frac{ln(x-۲)}{ln(x+۲)}$



در تمرینات زیر y را بر حسب تابعی از x بنویسید. عدد ثابت C یک عدد مثبت است.

۶۹) $lny = lnx + lnC$

$lny = ln(Cx)$

$y = Cx$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۰) $lny = ln(x + C)$

$y = x + C$

۷۱) $lny = lnx + ln(x + ۱) + lnC$

$lny = ln\left(Cx(x + ۱)\right)$

$y = Cx(x + ۱)$

۷۲) $lny = ۲lnx - ln(x + ۱) + lnC$

$lny = ln\left(\frac{Cx^{۲}}{x + ۱}\right)$

$y = \frac{Cx^{۲}}{x + ۱}$

۷۳) $lny = ۳x + lnC$

می دانیم که $lne = ۱$ پس می توان نوشت

$۳x = ۳x * ۱ = ۳xlne = lne^{۳x}$

پس

$lny = lne^{۳x} + lnC = ln\left(Ce^{۳x}\right)$

$y = Ce^{۳x}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۴) $lny = -۲x + lnC$

$-۲x = -۲xlne = lne^{-۲x}$

$lny = lne^{-۲x} + lnC$

$lny = ln\left(Ce^{-۲x}\right)$

$y = Ce^{-۲x}$

نشان دهید که

۷۵) $log_a\left(x + \sqrt{x^۲ - ۱}\right) + log_a\left(x - \sqrt{x^۲ - ۱}\right) = ۰$

$log_a\left(x + \sqrt{x^۲ - ۱}\right) + log_a\left(x - \sqrt{x^۲ - ۱}\right)$

$= log_a\left[\left(x + \sqrt{x^۲ - ۱}\right)\left(x - \sqrt{x^۲ - ۱}\right)\right] = log_a\left(x^۲ - \left(\sqrt{x^۲ - ۱}\right)^۲\right)$

$log_a\left(x^۲ - x^۲ + ۱\right) = log_a ۱ = ۰$

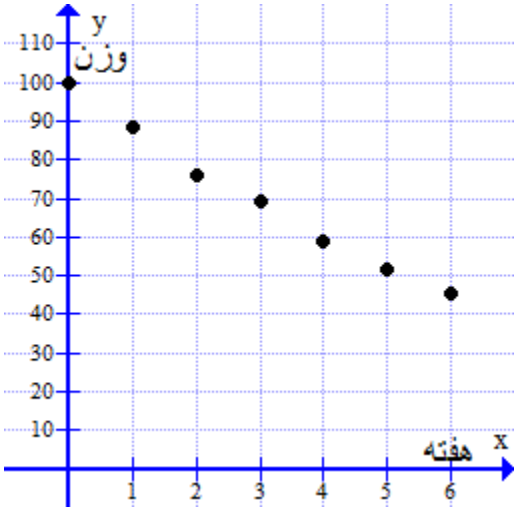
دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۶ - یک شیمی دان مقدار ۱۰۰ از یک نوع ماده رادیو اکتیو دارد. برای مدت شش هفته مقدار ماده رادیو اکتیو را در ابتدای هر هفته ثبت می کنند و اطلاعات زیر را بدست می آورد.

وزن بر حسب گرم	هفته
۱۰۰	۰
۸۸/۳	۱
۷۵/۹	۲
۶۹/۴	۳
۵۹/۱	۴
۵۱/۸	۵
۴۵/۵	۶

الف –نمودار پراکندگی این اطلاعات را رسم کنید. هفته را متغیر مستقل فرض کنید.

پاسخ



ب –تابع مجهول القوه زیر ، یک تابع مناسب این اطلاعات تشخیص داده شده است.

$$y = ۱۰۰\left(۰/۸۸\right)^{x}$$

تابع بالا را به صورت تابع زیر بنویسید. اینجا $x = t$ است.

$$A = A_{۰}e^{kt}$$

پاسخ

دانلود از سایت ریاضی سرا

در فرمول بالا $A_{\circ}$ یعنی مقدار اولیه ماده رادیو اکتیو که در این مساله ۱۰۰ می باشد. فرض مساله این است که $x = t$ می باشد. پس باید $e^k = ۰/۸۸$ باشد.

$$e^k = ۰/۸۸$$

$$lne^k = ln(۰/۸۸)$$

$$klne = ln(۰/۸۸)$$

$$k = \frac{ln(۰/۸۸)}{lne} = ln(۰/۸۸) = -۰/۱۲۸$$

لذا خواهیم داشت

$$A = A_{\circ}e^{-۰/۱۲۸t}$$

ج –با استفاده از تابع بدست آمده از قسمت ب ، حدس بزنید که چه مدت طول می کشد تا ۵۰ گرم از ماده رادیو اکتیو باقی مانده باشد. این زمان را **نیمه عمر** **Half-life** آن ماده رادیو اکتیو می گویند.

پاسخ

مقدار باقی مانده بعد از t هفته A گرم است. می خواهیم پیدا کنیم بعد از چند هفته $A = ۵۰$ گرم می شود.

$$۵۰ = ۱۰۰\, e^{-۰/۱۲۸t}$$

$$\frac{۵۰}{۱۰۰} = \frac{۱۰۰\, e^{-۰/۱۲۸t}}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱}{۲} = e^{-۰/۱۲۸t}$$

$$ln\left(\frac{۱}{۲}\right) = ln\left(e^{-۰/۱۲۸t}\right)$$

$$ln\left(\frac{۱}{۲}\right) = -۰/۱۲۸tlne$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$t = \frac{ln\left(\frac{۱}{۲}\right)}{-۰/۱۲۸lne} = \frac{ln\left(\frac{۱}{۲}\right)}{-۰/۱۲۸} = ۵/۴ \quad \text{هفته}$$

د –با استفاده از تابع قسمت ب پیش بینی کنید که بعد از ۵۰ هفته ، چه مقدار از ماده رادیو اکتیو باقی مانده است.

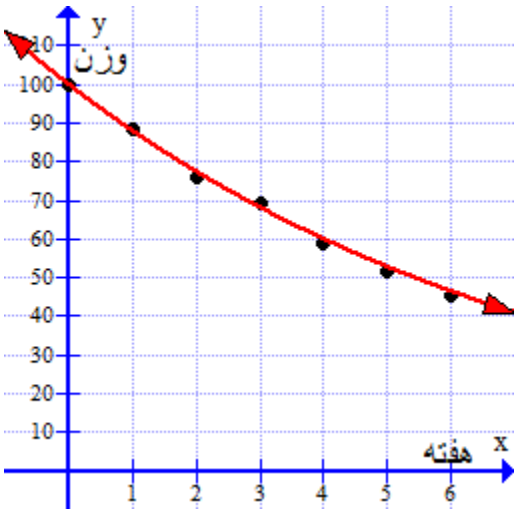
پاسخ

$$A = A_{\circ}e^{-۰/۱۲۸t}$$

$$A = ۱۰۰\, e^{-۰/۱۲۸(۵۰)}$$

$$A = ۰/۱۷۸۸ \text{گرم}$$

ه –با استفاده از ابزار رسم نمودار ، درستی تابع مجهول القوه قسمت ب را نشان دهید.



ملاحظه می کنید که نمودار مطابق نمودار پراکندگی قسمت الف است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱.۵ – معادله های لگاریتمی و مجهول القوه Logarithmic and Exponential Equations

در بخش ۱۱.۳ معادله لگاریتمی را با تبدیل آن به معادله مجهول القوه حل کردیم. اما بیشتر اوقات لازم است ابتدا تغییراتی به معادله بدهیم تا بتوانیم آنرا به معادله مجهول القوه تبدیل کنیم.

البته هدف این است که تا حد امکان با عملیات جبری معادله را حل کنیم. اما اگر ممکن نشود ، جواب تقریبی را از طریق رسم نمودار پیدا می کنیم.

مثال ۱ – حل یک معادله لگاریتمی Solving a Logarithmic Equation

معادله $۲log_۵x = log_۵۹$ را حل کنید.

پاسخ

$۲log_۵x = log_۵۹$

$log_۵x^۲ = log_۵۹$ زیرا $log_aM^r = rlog_aM$

$x^۲ = ۹$ زیرا $log_aM = log_aN$ پس $M = N$

$x = \pm\sqrt{۹} = \pm۳$

اما لگاریتم عدد منفی تعریف شدنی نیست ، به عبارت دیگر دامنه لگاریتم کلیه اعداد مثبت است. پس معادله یک جواب دارد و آن هم $x = ۳$ است.

مثال ۲ –

معادله $log_۴(x+۳) + log_۴(۲-x) = ۱$ را حل کنید.

پاسخ

$log_۴(x+۳) + log_۴(۲-x) = ۱$

$log_۴(x+۳)(۲-x) = ۱$ زیرا $log_aM + log_aN = log_aMN$

$(x+۳)(۲-x) = ۴^۱ = ۴$ تبدیل به عبارت توانی

دانلود از سایت ریاضی سرا

$-x^{۲} - x + ۶ = ۴$

$x^{۲} + x - ۲ = ۰$

$(x + ۲)(x - ۱) = ۰$

$x = -۲ \qquad x = ۱$

چون شناسه هر یک از عبارت های لگاریتمی با هر دو جواب بدست آمده مثبت است ، پس جواب معادله $\{-۲, ۱\}$ است.

مثال ۳ – حل یک معادله مجهول القوه Solving an Exponential Equation

معادله زیر را حل کنید.

$$۴^{x} - ۲^{x} - ۱۲ = ۰$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که $۴^{x} = \left(۲^{۲}\right)^{x} = ۲^{۲x} = \left(۲^{x}\right)^{۲}$ پس معادله بالا را می توان به شکل زیر نوشت.

$$\left(۲^{x}\right)^{۲} - ۲^{x} - ۱۲ = ۰$$

فرض می کنیم $u = ۲^{x}$ پس خواهیم داشت.

$$u^{۲} - u - ۱۲ = ۰$$

$$(u - ۴)(u + ۳) = ۰$$

$$\left(۲^{x} - ۴\right)\left(۲^{x} + ۳\right) = ۰$$

$$۲^{x} = ۴ \quad \text{یا} \quad ۲^{x} = -۳$$

جواب معادله سمت چپ $x = ۲$ است ، زیرا $۲^{x} = ۴ = ۲^{۲}$

معادله سمت راست جوابی ندارد ، زیر $۲^{x} > ۰$ برای هر مقدار x

پس جواب معادله اصلی ۲ است. یعنی مجموعه جواب های معادله $\{۲\}$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

در مثال ۳ معادله را با عملیات جبری حل کردیم. اما اگر از این طریق نتوانیم معادله را حل کنیم ، ممکن است با استفاده از لگاریتم ها مساله را حل کرد.

مثال ۴

معادله $۲^x = ۵$ را حل کنید.

پاسخ

$$۲^x = ۵$$

$$x = log_۲ ۵$$

$$\frac{log ۵}{log ۲} \approx ۲ / ۳۲۲$$

راه حل دیگر

$$۲^x = ۵$$

$$ln ۲^x = ln ۵$$

$$x ln ۲ = ln ۵$$

$$x = \frac{ln ۵}{ln ۲} \approx ۲ / ۳۲۲$$

مثال ۵

معادله $۸ * ۳^x = ۵$ را حل کنید.

پاسخ

$$۸ * ۳^x = ۵$$

$$۳^x = \frac{۵}{۸}$$

$$x = log_۳ \left(\frac{۵}{۸}\right)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x = \frac{ln\left(\frac{۵}{۸}\right)}{ln۳} \approx -۰/۴۲۸$$

مثال ۶

معادله $۵^{x-۲} = ۳^{۳x+۲}$ را حل کنید.

پاسخ

$$۵^{x-۲} = ۳^{۳x+۲}$$

$$ln۵^{x-۲} = ln۳^{۳x+۲}$$

$$(x-۲)ln۵ = (۳x+۲)ln۳$$

$$xln۵ - ۲ln۵ = ۳xln۳ + ۲ln۳$$

$$xln۵ - ۳xln۳ = ۲ln۳ + ۲ln۵$$

$$x(ln۵ - ۳ln۳) = ۲(ln۳ + ln۵)$$

$$x = \frac{۲(ln۳ + ln۵)}{ln۵ - ۲ln۳} \approx -۳/۲۱۲$$

مثال ۷ – حل معادلات با استفاده از ابزار رم نمودار

Solving Equations Using a Graphing Utility

معادله زیر را با استفاده از ابزار رسم نمودار حل کنید.

$$log_۳x + log_۴x = ۴$$

پاسخ

نمودار

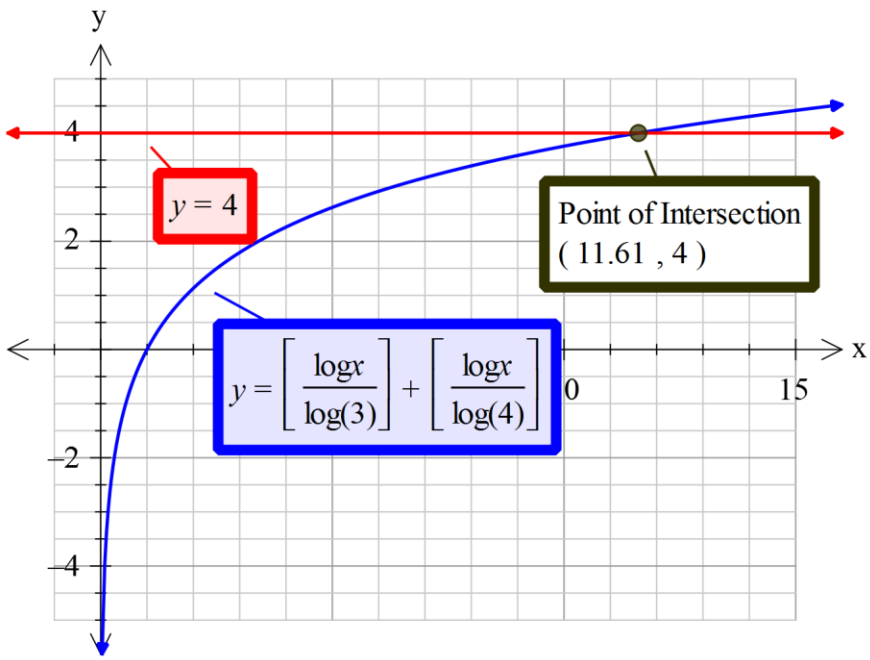
$$Y_۱ = log_۳x + log_۴x = \frac{logx}{log۳} + \frac{logx}{log۴}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

و

$$Y_۲ = ۴$$

را رسم می کنیم. ملاحظه می کنید که برای رسم $Y_۱$ از خاصیت تغییر پایه استفاده کردیم.



ملاحظه می کنید که محل تلاقی دو نمودار $(۱۱/۶۱ , ۴)$ است یا به عبارت دیگر جواب معادله $x = ۱۱ / ۶۱$ است.

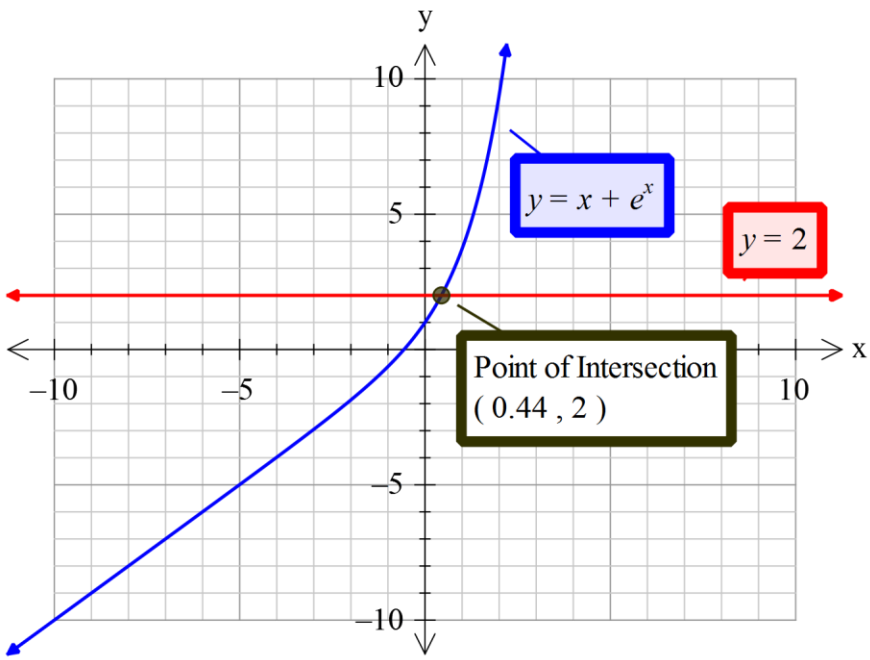
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۸

معادله $x + e^x = ۲$ را حل کنید.

پاسخ

$$Y_۱ = x + e^x \quad , \quad Y_۲ = ۲$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۱.۵

معادله های زیر را حل کنید.

۱) $log_{۴}(x+۲) = log_{۴}۸$

۲) $log_{۵}(۲x+۳) = log_{۵}۳$

۳) $\frac{۱}{۲}log_{۳}x = ۲log_{۳}۲$

۴) $-۲log_{۴}x = log_{۴}۹$

۵) $۲log_{۵}x = ۳log_{۵}۴$

۶) $۳log_{۲}x = -log_{۲}۲۷$

۷) $۳log_{۲}(x-۱) + log_{۲}۴ = ۵$

۸) $۲log_{۳}(x+۴) - log_{۳}۹ = ۲$

۹) $logx + log(x+۱۵) = ۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $log_{۴}x + log_{۴}(x - ۳) = ۱$

۱۱) $lnx + ln(x + ۲) = ۴$

۱۲) $ln(x + ۱) - lnx = ۲$

۱۳) $۲^{۲x} + ۲^{x} - ۱۲ = ۰$

۱۴) $۳^{۲x} + ۳^{x} - ۲ = ۰$

۱۵) $۳^{۲x} + ۳^{x+۱} - ۴ = ۰$

۱۶) $۲^{۲x} + ۲^{x+۲} - ۱۲ = ۰$

۱۷) $۲^{x} = ۱۰$

۱۸) $۳^{x} = ۱۴$

۱۹) $۸^{-x} = ۱/۲$ یا $8^{-x} = 1.2$

۲۰) $۲^{-x} = ۱/۵$ $2^{-x} = 1.5$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۱) $۳^{۱-۲x} = ۴^{x}$

۲۲) $۲^{x+۱} = ۵^{۱-۲x}$

۲۳) $\left(\frac{۳}{۵}\right)^{x} = ۷^{۱-x}$

۲۴) $\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۱-x} = ۵^{x}$

۲۵) $۱ / ۲^{x} = (۰/ ۵)^{-x}$ یا $1.2^{x} = (0.5)^{-x}$

۲۶) $(۰/ ۳)^{۱+x} = ۱ / ۷^{۲x-۱}$ یا $(0.3)^{1+x} = 1.7^{2x-1}$

۲۷) $\pi^{۱-x} = e^{x}$

۲۸) $e^{x+۳} = \pi^{x}$

۲۹) $۵\left(۲^{۳x}\right) = ۸$

۳۰) $۰/ ۳\left(۴^{۰/۲x}\right) =۰/ ۲$ یا $0.3(4^{0.2x}) = 0.2$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۱) $log_a(x-۱) - log_a(x+۶) = log_a(x-۲) - log_a(x+۳)$

۳۲) $log_a x + log_a(x-۲) = log_a(x+۴)$

۳۳) $log_{\frac{۱}{۳}}\left(x^۲ + x\right) - log_{\frac{۱}{۳}}\left(x^۲ - x\right) = -۱$

۳۴) $log_۴\left(x^۲ - ۹\right) - log_۴(x+۳) = ۳$

۳۵) $log_۲(x+۱) - log_۴ x = ۱$

۳۶) $log_۲(۳x+۲) - log_۴ x = ۳$

۳۷) $log_{۱۶} x + log_۴ x + log_۲ x = ۷$

۳۸) $log_۹ x + ۳log_۳ x = ۱۴$

۳۹) $\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^{۲-x} = ۲^{x^۲}$

با استفاده از ابزار رسم نمودار ، معادله زیر را حل کنید.

۴۰) $log_۵ x + log_۳ x = ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۱.۵

معادله های زیر را حل کنید.

۱) $log_{۴}(x+۲) = log_{۴}۸$

$x + ۲ = ۸$

$x = ۶$

۲) $log_{۵}(۲x+۳) = log_{۵}۳$

$۲x + ۳ = ۳$

$۲x = ۰$

$x = ۰$

۳) $\frac{۱}{۲} log_{۳}x = ۲log_{۳}۲$

$log_{۳}x^{\frac{۱}{۲}} = log_{۳}۲^{۲}$

$\sqrt{x} = ۴$

$x = ۱۶$

۴) $-۲log_{۴}x = log_{۴}۹$

$log_{۴}x^{-۲} = log_{۴}۹$

$\frac{۱}{x^{۲}} = ۹$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x^{۲} = \frac{۱}{۹}$$

$$x = \pm\frac{۱}{۳}$$

اما $x = -\frac{۱}{۳}$ را قبول نمی کنیم. پس جواب مساله $x = \frac{۱}{۳}$ است.

۵) $$۲log_{۵}x = ۳log_{۵}۴$$

$$log_{۵}x^{۲} = log_{۵}۴^{۳}$$

$$x^{۲} = ۶۴$$

$$x = \pm ۸$$

اما $x = -۸$ را کنار می گذاریم. پس جواب مساله $x = ۸$ است.

۶) $$۳log_{۲}x = -log_{۲}۲۷$$

$$log_{۲}x^{۳} = log_{۲}۲۷^{-۱}$$

$$x^{۳} = \frac{۱}{۲۷}$$

$$x = \frac{۱}{۳}$$

۷) $$۳log_{۲}(x-۱) + log_{۲}۴ = ۵$$

$$log_{۲}(x-۱)^{۳} + log_{۲}۴ = ۵$$

$$log_{۲}۴(x-۱)^{۳} = ۵$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۲^{۵} = ۴(x-۱)^{۳}$$

$$۴(x-۱)^{۳} = ۳۲$$

$$(x-۱)^{۳} = ۸$$

$$x-۱ = ۲$$

$$x = ۳$$

۸) $$۲log_{۳}(x+۴) - log_{۳}۹ = ۲$$

$$log_{۳}\frac{(x+۴)^{۲}}{۹} = ۲$$

$$۳^{۲} = \frac{(x+۴)^{۲}}{۹}$$

$$(x+۴)^{۲} = ۸۱$$

$$x+۴ = \pm ۹$$

$$x = ۵ \quad \text{یا} \quad x = -۱۳$$

تنها جواب مساله $x = ۵$ است.

۹) $$logx + log(x+۱۵) = ۲$$

$$logx(x+۱۵) = ۲$$

$$۱۰^{۲} = x(x+۱۵)$$

$$x^{۲} + ۱۵x = ۱۰۰$$

$$x^{۲} + ۱۵x - ۱۰۰ = ۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(x+۲۰)(x-۵)=۰$$

$$x=-۲۰ \quad \text{یا} \quad x=۵$$

تنها جواب $x=۵$ است.

۱۰) $log_۴x+log_۴(x-۳)=۱$

$$log_۴x(x-۳)=۱$$

$$۴^۱=x(x-۳)$$

$$x^۲-۳x=۴$$

$$x^۲-۳x-۴=۰$$

$$(x-۴)(x+۱)=۰$$

$$x=۴ \quad \text{یا} \quad x=-۱$$

تنها جواب $x=۴$ است.

۱۱) $lnx+ln(x+۲)=۴$

$$lnx(x+۲)=۴$$

$$e^۴=x^۲+۲x$$

$$x^۲+۲x-e^۴=۰$$

$$x=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۴e^۴}}{۲}=\frac{-۲\pm۲\sqrt{۱+e^۴}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۱+e^۴}$$

جواب مساله $x=-۱+\sqrt{۱+e^۴}\approx ۶/۴۵۶$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲) $ln(x+۱) - lnx = ۲$

$$ln\left(\frac{x+۱}{x}\right) = ۲$$

$$e^{۲} = \frac{x+۱}{x}$$

$$x+۱ = e^{۲}x$$

$$x - e^{۲}x = -۱$$

$$x\left(۱ - e^{۲}\right) = -۱$$

$$x = \frac{-۱}{۱-e^{۲}} = \frac{۱}{e^{۲}-۱} \approx ۰/۱۵۷$$

۱۳) $۲^{۲x} + ۲^{x} - ۱۲ = ۰$

فرض می کنیم $u = ۲^{x}$ پس خواهیم داشت.

$$\left(۲^{x}\right)^{۲} + ۲^{x} - ۱۲ = ۰$$

$$u^{۲} + u - ۱۲ = ۰$$

$$(u+۴)(u-۳) = ۰$$

$$\left(۲^{x}+۴\right)\left(۲^{x}-۳\right) = ۰$$

$$۲^{x} + ۴ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۲^{x} - ۳ = ۰$$

$$۲^{x} = -۴ \quad \text{یا} \quad ۲^{x} = ۳$$

تساوی سمت چپ را نمی توانیم قبول کنیم ، زیر برای هر مقدار x عبارت $۲^{x} > ۰$ است. پس خواهیم داشت.

$$۲^{x} = ۳$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$ln۲^{x} = ln۳$$

$$xln۲ = ln۳$$

$$x = \frac{ln۳}{ln۲} \approx ۱ / ۵۸۵$$

۱۴) $۳^{۲x} + ۳^{x} - ۲ = ۰$

فرض می کنیم $u = ۳^{x}$ پس خواهیم داشت.

$$\left(۳^{x}\right)^{۲} + ۳^{x} - ۲ = ۰$$

$$u^{۲} + u - ۲ = ۰$$

$$(u + ۲)(u - ۱) = ۰$$

$$\left(۳^{x} + ۲\right)\left(۳^{x} - ۱\right) = ۰$$

$$۳^{x} = -۲ \text{ یا } ۳^{x} = ۱$$

تساوی سمت چپ را قبول نمی کنیم. پس خواهیم داشت.

$$۳^{x} = ۱$$

$$ln۳^{x} = ln۱$$

$$xln۳ = ۰$$

$$x = \frac{۰}{ln۳} = ۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵) $۳^{۲x} + ۳^{x+۱} - ۴ = ۰$

$$\left(۳^{x}\right)^{۲} + ۳^{x} * ۳^{۱} - ۴ = ۰$$

$$\left(۳^{x}\right)^{۲} + ۳ * ۳^{x} - ۴ = ۰$$

فرض می کنیم $u = ۳^{x}$ پس

$$u^{۲} + ۳u - ۴ = ۰$$

$$(u + ۴)(u - ۱) = ۰$$

$$۳^{x} + ۴ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۳^{x} - ۱ = ۰$$

$$۳^{x} = -۴ \quad \text{یا} \quad ۳^{x} = ۱$$

تساوی سمت چپ را نمی توانیم قبول کنیم ، زیرا $۳^{x} > ۰$ است برای هر مقدار از x پس

$$۳^{x} = ۱$$

$$log۳^{x} = log۱$$

$$xlog۳ = log۱$$

$$x = \frac{log۱}{log۳} = \frac{۰}{log۳} = ۰$$

۱۶) $۲^{۲x} + ۲^{x+۲} - ۱۲ = ۰$

$$\left(۲^{x}\right)^{۲} + ۲^{x} * ۲^{۲} - ۱۲ = ۰$$

$$\left(۲^{x}\right)^{۲} + ۴ * ۲^{x} - ۱۲ = ۰$$

$$u^{۲} + ۴u - ۱۲ = ۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(u+۶)(u-۲)=۰$$

$$\left(۲^x+۶\right)\left(۲^x-۲\right)=۰$$

$$۲^x=-۶ \quad \text{یا} \quad ۲^x=۲$$

تساوی سمت چپ را قبول نمی کنیم. پس

$$۲^x=۲$$

$$log۲^x=log۲$$

$$xlog۲=log۲$$

$$x=\frac{log۲}{log۲}=۱$$

۱۷) $۲^x=۱۰$

$$log۲^x=log۱۰$$

$$xlog۲=log۱۰$$

$$x=\frac{log۱۰}{log۲}\approx ۳/۳۲۲$$

۱۸) $۳^x=۱۴$

$$log۳^x=log۱۴$$

$$xlog۳=log۱۴$$

$$x=\frac{log۱۴}{log}\approx ۲/۴۰۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹) $۸^{-x} = ۱/۲$ یا $8^{-x} = 1.2$

$$log_{۸} ۱/۲ = -x$$

$$x = -\frac{log ۱/۲}{log ۸} \approx -۰/۰۸۸$$

۲۰) $۲^{-x} = ۱/۵$ یا $2^{-x} = 1.5$

$$۲^{-x} = \frac{۳}{۲}$$

$$log_{۲}\left(\frac{۳}{۲}\right) = -x$$

$$x = -\frac{log\left(\frac{۳}{۲}\right)}{log ۲} \approx -۰/۵۸۵$$

۲۱) $۳^{۱-۲x} = ۴^{x}$

$$log ۳^{۱-۲x} = log ۴^{x}$$

$$(۱ - ۲x) log ۳ = x log ۴$$

$$log ۳ - ۲x log ۳ = x log ۴$$

$$log ۳ = ۲x log ۳ + x log ۴$$

$$log ۳ = x(۲ log ۳ + log ۴)$$

$$x = \frac{log ۳}{۲ log ۳ + log ۴} \approx ۰/۳۰۷$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۲) $۲^{x+۱} = ۵^{۱-۲x}$

$$log۲^{x+۱} = log۵^{۱-۲x}$$

$$(x+۱)log۲ = (۱-۲x)log۵$$

$$xlog۲ + log۲ = log۵ - ۲xlog۵$$

$$۲xlog۵ + xlog۲ = log۵ - log۲$$

$$x(۲log۵ + log۲) = log۵ - log۲$$

$$x = \frac{log۵ - log۲}{۲log۵ + log۲} = \frac{log\left(\frac{۵}{۲}\right)}{log۵^{۲} + log۲} = \frac{\log(۲ / ۵)}{log(۵۰)} \approx ۰/۲۳۴$$

۲۳) $\left(\frac{۳}{۵}\right)^{x} = ۷^{۱-x}$

$$log\left(\frac{۳}{۵}\right)^{x} = log۷^{۱-x}$$

$$xlog\left(\frac{۳}{۵}\right) = (۱-x)log۷$$

$$xlog\left(\frac{۳}{۵}\right) = log۷ - xlog۷$$

$$xlog\left(\frac{۳}{۵}\right) + xlog۷ = log۷$$

$$x\left[log\left(\frac{۳}{۵}\right) + log۷\right] = log۷$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x = \frac{log۷}{log(۰/۶) + log۷} \approx ۱/۳۵۶$$

۲۴) $$\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۱-x} = ۵^{x}$$

$$log\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۱-x} = log۵^{x}$$

$$(۱ - x)log\left(\frac{۴}{۳}\right) = xlog۵$$

$$log\left(\frac{۴}{۳}\right) - xlog\left(\frac{۴}{۳}\right) = xlog۵$$

$$xlog\left(\frac{۴}{۳}\right) + xlog۵ = log\left(\frac{۴}{۳}\right)$$

$$x\left[log\left(\frac{۴}{۳}\right) + log۵\right] = log\left(\frac{۴}{۳}\right)$$

$$xlog\left(\frac{۴}{۳}\right)۵ = log\left(\frac{۴}{۳}\right)$$

$$xlog\left(\frac{۲۰}{۳}\right) = log\left(\frac{۴}{۳}\right)$$

$$x = \frac{log\left(\frac{۴}{۳}\right)}{log\left(\frac{۲۰}{۳}\right)} \approx ۰/۱۵۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵) $۱/۲^{x} = (۰/۵)^{-x}$ یا $1.2^{x} = (0.5)^{-x}$

$$log(۱/۲)^{x} = log(۰/۵)^{-x}$$

$$xlog(۱/۲) = -xlog(۰/۵)$$

$$xlog(۱/۲) + xlog(۰/۵) = ۰$$

$$x[log(۱/۲) + log(۰/۵)] = ۰$$

$$x\left(log(۰/۶)\right) = ۰$$

$$x = \frac{۰}{log(۰/۶)} = ۰$$

۲۶) $(۰/۳)^{۱+x} = ۱/۷^{۲x-۱}$ یا $(0.3)^{1+x} = 1.7^{2x-1}$

$$log(۰/۳)^{۱+x} = log(۱/۷)^{۲x-۱}$$

$$(۱+x)log(۰/۳) = (۲x-۱)log(۱/۷)$$

$$log(۰/۳) + xlog(۰/۳) = ۲xlog(۱/۷) - log(۱/۷)$$

$$log(۰/۳) + log(۱/۷) = xlog(۱/۷)^{۲} - xlog(۰/۳)$$

$$log[(۰/۳)(۱/۷)] = x[log(۲/۸۹) - log(۰/۳)]$$

$$log(۰/۵۱) = xlog\left(\frac{۲/۸۹}{۰/۳}\right)$$

$$x = \frac{log(۰/۵۱)}{log(۹/۶۳۳۳)} \approx -۰/۲۹۷$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۷) $\pi^{۱-x} = e^{x}$

$ln(\pi)^{۱-x} = lne^{x}$

$(۱ - x)ln\pi = xlne$

$ln\pi - xln\pi = x$

$ln\pi = x + xln\pi$

$ln\pi = x(۱ + ln\pi)$

$x = \frac{ln\pi}{۱ + ln\pi} \approx ۰/۵۳۴$

۲۸) $e^{x+۳} = \pi^{x}$

$lne^{x+۳} = ln\pi^{x}$

$(x + ۳)lne = xln\pi$

$xlne + ۳lne = xln\pi$

$x + ۳ = xln\pi$

$۳ = xln\pi - x$

$۳ = x(ln\pi - ۱)$

$x = \frac{۳}{ln\pi - ۱} \approx ۲۰/۷۲۸$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۹) $۵\left(۲^{۳x}\right) = ۸$

$ln۵ + ln۲^{۳x} = ln۸$

$۳xln۲ = ln۸ - ln۵$

$x = \frac{ln۸ - ln۵}{۳ln۲} = \frac{ln(۱/۶)}{۳ln۳} \approx ۰/۲۲۶$

۳۰) $۰/۳\left(۴^{۰/۲x}\right) = ۰/۲$ یا $0.3(4^{0.2x}) = 0.2$

$ln(۰/۳) + ln۴^{۰/۲x} = ln(۰/۲)$

$۰/۲xln۴ = ln(۰/۲) - ln(۰/۳)$

$x = \frac{ln\left(\frac{۲}{۳}\right)}{۰/۲ln۴} \approx -۱/۴۶۲$

۳۱) $log_a(x-۱) - log_a(x+۶) = log_a(x-۲) - log_a(x+۳)$

$log_a\left(\frac{x-۱}{x+۶}\right) = log_a\left(\frac{x-۲}{x+۳}\right)$

$\left(\frac{x-۱}{x+۶}\right) = \left(\frac{x-۲}{x+۳}\right)$

$(x-۱)(x+۳) = (x-۲)(x+۶)$

$x^۲ + ۳x - x - ۳ = x^۲ + ۶x - ۲x - ۱۲$

$۲x - ۳ = ۴x - ۱۲$

$-۲x = -۹$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x = \frac{۹}{۲}$$

۳۲) $log_a x + log_a(x - ۲) = log_a(x + ۴)$

$$log_a x(x - ۲) = log_a(x + ۴)$$

$$x(x - ۲) = x + ۴$$

$$x^۲ - ۲x = x + ۴$$

$$x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$$

$$(x - ۴)(x + ۱) = ۰$$

$$x = ۴ \qquad x = -۱$$

تساوی سمت راست را قبول نمی کنیم. پس $x = ۴$ جواب مساله است.

۳۳) $log_{\frac{۱}{۳}}\left(x^۲ + x\right) - log_{\frac{۱}{۳}}\left(x^۲ - x\right) = -۱$

$$log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{x^۲ + x}{x^۲ - x}\right) = -۱$$

$$log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{x(x + ۱)}{x(x - ۱)}\right) = -۱$$

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱} = \frac{x + ۱}{x - ۱}$$

$$۳ = \frac{x + ۱}{x - ۱}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۳x - ۳ = x + ۱$$

$$۲x = ۴$$

$$x = ۲$$

۳۴) $log_{۴}\left(x^{۲} - ۹\right) - log_{۴}\left(x + ۳\right) = ۳$

$$log_{۴}\left(\frac{x^{۲} - ۹}{x + ۳}\right) = ۳$$

$$۴^{۳} = x - ۳$$

$$x = ۶۷$$

۳۵) $log_{۲}\left(x + ۱\right) - log_{۴}x = ۱$

$$log_{۲}\left(x + ۱\right) - log_{۲^{۲}}x = ۱$$

$$\frac{log\left(x + ۱\right)}{log۲} - \frac{logx}{log۲^{۲}} = ۱$$

$$\frac{log\left(x + ۱\right)}{log۲} - \frac{logx}{۲log۲} = ۱$$

$$\frac{۲log\left(x + ۱\right) - logx}{۲log۲} = ۱$$

$$۲log۲ = log\left(x + ۱\right)^{۲} - logx$$

$$log۴ = log\left(\frac{\left(x + ۱\right)^{۲}}{x}\right)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{(x+۱)^{۲}}{x}=۴$$

$$x^{۲}+۲x+۱=۴x$$

$$x^{۲}-۲x+۱=۰$$

$$(x-۱)^{۲}=۰$$

$$x=۱$$

۳۶) $log_{۲}(۳x+۲)-log_{۴}x=۳$

$$log_{۲}(۳x+۲)-log_{۲^{۲}}x=۳$$

$$\frac{log(۳x+۲)}{log۲}-\frac{logx}{log۲^{۲}}=۳$$

$$\frac{log(۳x+۲)}{log۲}-\frac{logx}{۲log۲}=۳$$

$$\frac{۲log(۳x+۲)-logx}{log۴}=۳$$

$$۳log۴=log\left(\frac{(۳x+۲)^{۲}}{x}\right)$$

$$log۶۴=log\left(\frac{(۳x+۲)^{۲}}{x}\right)$$

$$\frac{(۳x+۲)^{۲}}{x}=۶۴$$

$$۹x^{۲} + ۱۲x + ۴ = ۶۴x$$

$$۹x^{۲} - ۵۲x + ۴ = ۰$$

$$x = \frac{۵۲ \pm \sqrt{۲۷۰۴ - ۱۴۴}}{۱۸} = \frac{۵۲ \pm \sqrt{۲۵۶۰}}{۱۸} = \frac{۵۲ \pm ۲۵۶\sqrt{۱۰}}{۱۸} = \frac{۲۶ \pm ۸\sqrt{۱۰}}{۹}$$

$$\left\{\frac{۲۶ + ۸\sqrt{۱۰}}{۹}, \frac{۲۶ - ۸\sqrt{۱۰}}{۹}\right\}$$

۳۷) $log_{۱۶}x + log_{۴}x + log_{۲}x = ۷$

لگاریتم ها را به پایه دو تبدیل کنید و مطابق تمرینات ۳۵ و ۳۶ عمل کنید. پاسخ $x = ۱۶$

۳۸) $log_{۹}x + ۳log_{۳}x = ۱۴$

لگاریتم ها را به پایه سه تبدیل کنید و مطابق تمرینات ۳۵ و ۳۶ عمل کنید. پاسخ $x = ۸۱$

۳۹) $\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^{۲-x} = ۲^{x^{۲}}$

$$\left(۲^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲-x} = ۲^{x^{۲}}$$

$$\left(۲^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲-x} = ۲^{x^{۲}}$$

$$۲^{\frac{۲-x}{۳}} = ۲^{x^{۲}}$$

$$\frac{۲-x}{۳}=x^{۲}$$

$$۳x^{۲}=۲-x$$

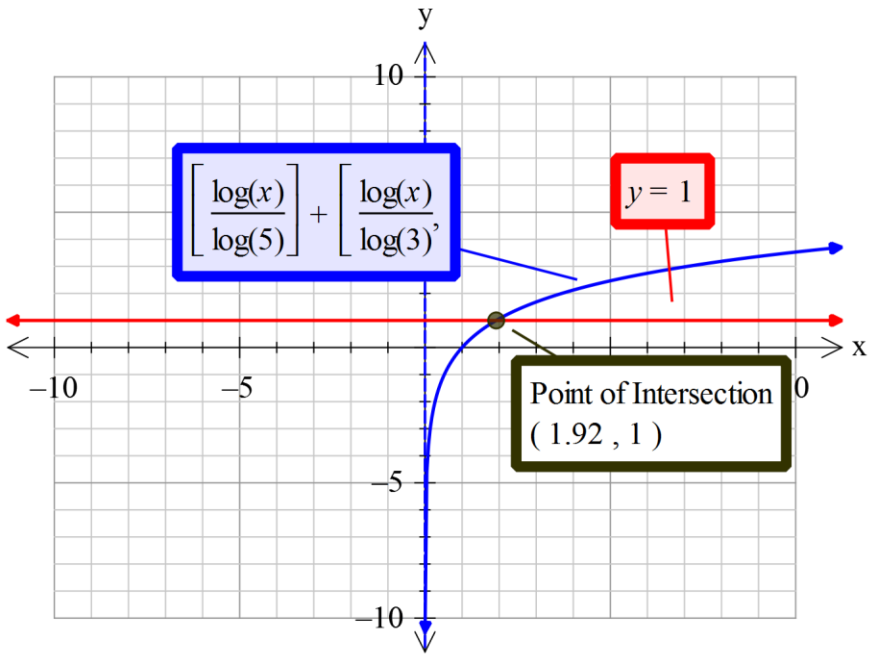
$$۳x^{۲}+x-۲=۰$$

$$x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{۶}=\frac{-۱\pm۵}{۶}$$

$$\left\{-۱,\frac{۲}{۳}\right\}$$

با استفاده از ابزار رسم نمودار ، معادله زیر را حل کنید.

۴۰) $log_{۵}x+log_{۳}x=۱$



۱۱.۶ - ربح مرکب Compound Interest

در بخش ۲.۳ در مورد ربح صحبت کردیم. اینجا مفصل تر بحث می کنیم.

پولی که وام‌گیرنده از بابت استفاده کردن از پول‌های وام‌دهنده به او پرداخت می‌کند را **بهره Interest** می‌گویند

نرخ بهره Interest rate : عبارت است از نرخی که بابت جلوگیری از کاهش ارزش پول پرداختی در امروز و دریافتی در آینده (به دلیل ارزش زمانی پول و نرخ تورم) از وام‌گیرنده دریافت می‌شود. برخ بهره به صورت در صد بیان می شود.

پول قرض گرفته شده را سرمایه Principalمی گویند .

فرمول ربح ساده –اگر P مبلغ وام ، t مدت بر حسب سال و r نرخ بهره به صورت اعشاری باشد ، مجموع بهره I با فرمول زیر بدست می آید.

$$\boldsymbol{I = Prt} \qquad (۱)$$

بهره ای که با فرمول بالا حساب می شود را **ربح ساده Simple Interest** می نامند. در ربح ساده بهره در آخر هر سال به مبلغ اولیه وام تعلق می گیرد.

مثال ۱ – اگر مبلغ ۱ ۰۰۰ تومان با نرخ ۸% در سال به مدت یک سا ل با ربح ساده دریک حساب بانکی ذخیره شود ، در آخر سال چه مبلغ سود به آن تعلق می گیرد ؟

پاسخ

$$I = Prt$$

$$I = (۱\ ۰۰۰)(۰/۰\ ۸)(۱) = ۸\ ۰ \text{ تومان}$$

مثال ۲- اگر مبلغ ۱ ۰۰۰ تومان با نرخ ۸% در سال به مدت ۵ سا ل با ربح ساده دریک حساب بانکی ذخیره شود ، در آخر سال پنجم چه مبلغ سود به آن تعلق می گیرد ؟

پاسخ

$$I = Prt$$

$$I = (۱\ ۰۰۰)(۰/۰\ ۸)(۵) = ۴\ ۰۰ \text{ تومان}$$

ملاحظه می کنید که $(۸\ ۰)۵ = ۴\ ۰۰$ یعنی سود در آخر هر سال به مبلغ اولیه پرداخت می شود. حتی اگر در آخر هر سال سود حاصل را از حساب برداشت نکنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

وقتی که سود در آخرهر دوره به سرمایه اولیه اضافه می شود ، به طوری که در آخر دوره بعد سود بر اساس سرمایه جدید (سرمایه قدیم به اضافه سود)حساب می شود ، به آن **ربح مرکب Compound Interest** می گویند.

دوره های پرداخت Payment Period

Compounded Annually

سود مرکب با پرداخت سود به صورت سالیانه (سود آخر هر سال پرداخت می شود.)

Compounded Monthly

سود مرکب با پرداخت سود به صورت ماهیانه (سود آخر هر سال پرداخت می شود.)

Compounded Semiannually

سود مرکب با پرداخت سود به صورت شش ماهه (سود آخر هر شش ماه پرداخت می شود.)

Compounded Daily

سود مرکب با پرداخت سود به صورت روزانه (سود آخر هر روز پرداخت می شود.)

Compounded Quarterly

سود مرکب با پرداخت سود به صورت سه ماهه (سود در آخر هر سه ماه یعنی چهار مرتبه در سال پرداخت می شود.)

مثال ۳ - حالا اگر این مبلغ را با همان نرخ ۸% با ربح مرکب سه ماهه Compounded Quarterly برای یک سال دریک حساب بانکی ذخیره شود ، در آخر سال چه مبلغ سود به آن تعلق می گیرد ؟

پاسخ

فرمول ربح ساده را بکار می بریم. بعد از سه ماه اول ، زمان $t = \frac{۱}{۴}$ است. پس سود حاصل مطابق زیر بدست می آوریم.

$$I = Prt = (۱\,۰۰۰)(۰/۰\,۸)\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۲\,۰ \text{ تومان}$$

حالا سرمایه جدید

$$P + I = ۱\,۰۰۰ + ۲\,۰ = ۱\,۰\,۲\,۰ \text{ تومان}$$

است. پس آخر سه ماه دوم ، سود این سرمایه مطابق زیر بدست می آوریم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$I = (۱۰۲۰)(۰/۰۸)\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۲۰/۴۰ \text{ تومان}$$

است. حالا سرمایه جدید

$$۱۰۲۰ + ۲۰/۴۰ = ۱۰۴۰/۴۰ \text{ تومان}$$

است. آخر سه ماه سوم ، سود این سرمایه جدید مطابق زیر خواهد بود.

$$I = (۱۰۴۰/۴۰)(۰/۰۸)\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۲۰/۸۱ \text{ تومان}$$

است. حالا سرمایه جدید

$$(۱۰۴۰/۴۰) + (۲۰/۸۱) = ۱۰۶۱/۲۱ \text{ تومان}$$

است. بالاخره در آخر سه ماه چهارم سود این سر مایه مطابق زیر است.

$$I = (۱۰۶۱/۲۱)(۰/۰۸)\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۲۱/۲۲ \text{ تومان}$$

است. در نهایت ، بعد از یک سال

$$(۱۰۶۱/۲۱) + (۲۱/۲۲) = ۱۰۸۲/۴۳ \text{ تومان}$$

در حساب موجود است. پس ۴۳ / ۸۲ تومان سود عاید می شود.

اما این روش محاسبه طولانی است. فرمول زیر را برای محاسبه ربح مرکب بکار می بریم.

فرمول ربح مرکب

اگر مبلغ P تومان با نرخ r در سال و ربح مرکب n مرتبه در سال سرمایه گذاری شود ، بعد از t سال مبلغ A تومان در حساب موجود خواهد بود.

$$\boldsymbol{A = P\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt}} \qquad (۲)$$

مثال ۳ را با فرمول بالا تکرار می کنیم.

$$A = ۱۰۰۰\left(۱ + \frac{۰/۰۸}{۴}\right)^{۴} = ۱۰۸۲/۴۳ \text{ تومان}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در فرمول (۲) به حرف A می گویند **مقدار جمع شده (در حساب) Accumulated Value**

و یا **ارزش آینده Future Value**

در فرمول (۲) به حرف P می گویند **ارزش کنونی Present Value**

مثال ۴ – مقایسه سرمایه گذاری ها با ربح های مرکب مختلف

Comparing Investments Using Different Compounding Periods

اگر مبلغ ۱۰۰۰ تومان با نرخ ۱۰% را در یک حساب پس انداز کنیم ، پس از یک سال موجودی حساب

الف –با پرداخت سود بصورت سالیانه مطابق زیر خواهد بود. Annual Compounding

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = ۱۰۰۰\left(۱+\frac{۰/۱}{۱}\right)^{۱} = ۱۰۰۰\left(۱+۰/۱\right) = ۱۱۰۰ \text{ تومان}$$

ب –با پرداخت سود بصورت سه ماهه مطابق زیر خواهد بود. Quarterly Compounding

$$A = P\left(۱+\frac{r}{n}\right)^{nt} = ۱۰۰۰\left(۱+\frac{۰/۱}{۴}\right)^{۴} = \left(۱۰۰۰\right)\left(۱+۰/۰۲۵\right)^{۴} = ۱۱۰۳/۸۱ \text{ تومان}$$

ج –با پرداخت سود بصورت ماهیانه مطابق زیر خواهد بود. Monthly Compounding

$$A = P\left(۱+\frac{r}{n}\right)^{nt} = ۱۰۰۰\left(۱+\frac{۰/۱}{۱۲}\right)^{۱۲} = ۱۰۰۰\left(۱+۰/۰۰۸۳۳\right)^{۱۲} = ۱۱۰۴/۷۱ \text{ تومان}$$

ج –با پرداخت سود بصورت روزانه مطابق زیر خواهد بود. Daily Compounding

$$A = P\left(۱+\frac{r}{n}\right)^{nt} = ۱۰۰۰\left(۱+\frac{۰/۱}{۳۶۵}\right)^{۳۶۵} = ۱۰۰۰\left(۱+۰/۰۰۰۲۷۴\right)^{۳۶۵} = ۱۱۰۵/۱۶ \text{ تومان}$$

از مثال بالا نتیجه می گیریم که هر چه تعداد پرداخت سود در سال بیشتر شود ، مبلغ موجود در حساب بیشتر می شود.
حال اگر **تعداد پرداخت سود بطور نا محدود بیشتر شود** ، چه پیش خواهد امد؟ **نتیجه قضیه زیر** خواهد بود که بدون اثبات بیان می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه –ربح مرکب پیوسته Continuous Compounding

اگر مبلغ P تومان در یک حساب با نرخ r با ربح مرکب پیوسته در یک حساب ذخیره کنیم ، پس از t سال ، مبلغ A تومان در حساب موجود خواهد بود که مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$\boldsymbol{A = Pe^{rt}} \quad (۳)$$

مثال ۴ را با فرمول ربح پیوسته مجددا عمل می کنیم.

$$A = Pe^{rt} = ۱\,۰۰۰\, e^{(۰/۱)(۱)} = (۱\,۰۰۰)(۱/۱\,۰۵۱۷) = ۱۱\,۰۵/۱۷ \text{ تومان}$$

مثال ۵ – محاسبه موجودی حساب باز نشستگی شخصی Computing the Value of an IRA

آقای راستگو اول اردیبهشت سال ۱۳۸۰ مبلغ ۲۰۰۰ تومان را در یک

حساب باز نشستگی شخصی An Individual Retirement Account

با نرخ ۱۰% در سال و **ربح مرکب پیوسته** ذخیره کرد. حساب کنید اول اردیبهشت ۱۴۰۰ چه مبلغی در حساب آقای راستگو خواهد بود.

پاسخ

$$A = Pe^{rt} = ۲\,۰۰۰\, e^{(۰/۱)(۲۰)} = ۱۴۷۸۸/۱۱ \text{ تومان}$$

در امور مالی **ارزش زمانی پول Time Value of Money** منظور **ارزش کنونی Present Value of Money** است.

قضیه -فرمول ارزش کنونی Present Value Formulas

اگر بخواهیم بعد از t سال مبلغ A تومان دریافت کنیم باید اکنون P تومان در یک موسسه مالی ذخیره کنیم درصورتی که نرخ بهره در سال r باشد و سالی n مرتبه سود حساب و پرداخت شود.

$$\boldsymbol{P = A\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{-nt}} \qquad (۴)$$

و اگر بهره با ربح مرکب پیوسته پرداخت شود

$$\boldsymbol{P = Ae^{-rt}} \quad (۵)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۶

الف - اگر ده سال دیگر به هزار میلیون تومان احتیاج داشته باشیم ، اکنون چه مبلغی را باید در یک حساب پس انداز با نرخ ۸% در سال و ربح مرکب ماهانه بگذاریم؟

ب –اگر نرخ ۷% در سال باشد با ربح مرکب پیوسته ، چه مبلغ اکنون باید به حساب بگذاریم تا ده سال دیگر مبلغ هزار میلیون تومان داشته باشیم؟

پاسخ

الف

$$P = A\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{-nt} = \text{۱ ۰۰۰ میلیون تومان}\left(۱ + \frac{۰/۰۸}{۱۲}\right)^{-(۱۲)(۱۰)} = \text{۴۵ ۰/ ۵۲ میلیون تومان}$$

باید اکنون مبلغ ۵۲ /۰ ۴۵ میلیون تومان به حساب بگذاریم.

ب –

$$P = Ae^{-rt} = \text{۱ ۰۰۰ میلیون تومان}\ e^{-(۰/۰۷)(۱۰)} = \text{۴۹۶/۵۹ میلیون تومان}$$

باید اکنون مبلغ ۵۹ / ۴۹۶ میلیون تومان به حساب بگذاریم.

مثال ۷ –

اگر بخواهیم سپرده ما در بانک بعد از ۵ سال با ربح مرکب سالیانه دو برابر شود باید با چه نرخی موافقت کنیم؟

پاسخ

اگر P سپرده ما باشد و بخواهیم این P دو برابر شود ، پس مقدار A باید بشود $۲P$ پس خواهیم داشت.

$$۲P = P\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$۲ = \left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt} = (۱ + r)^{۵}$$

$$۱ + r = \sqrt[۵]{۲}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$r = \sqrt[۵]{۲} - ۱ = ۱/۱۴۸۶۹۸ - ۱ = ۰/۱۴۸۶۹۸$$

پس نرخ باید ۸۷ / ۱۴% باشد تا سرمایه و یا سپرده ما بعد از ۵ سال با ربح مرکب سالیانه ,دو برابر شود.

مثال ۸ –

الف –چند سال طول میکشد تا سرمایه ای با نرخ ۵% و ربح مرکب پیوسته ، دو برابر شود؟

ب –چند سال طول میکشد تا سرمایه با این نرخ سه برابر شود؟

پاسخ

الف –

$$A = Pe^{rt}$$

$$۲P = Pe^{rt}$$

$$۲ = e^{(۰/۰۵)t}$$

$$۰/۰۵t = ln۲$$

$$t = \frac{ln۲}{۰/۰۵} = ۱۳/۸۶$$

پس ۱۴ طول می کشد تا سرمایه ما با این نرخ دو برابر شود.

ب –

$$A = Pe^{rt}$$

$$۳P = Pe^{(۰/۰۵)t}$$

$$۳ = e^{(۰/۰۵)t}$$

$$۰/۰۵t = ln۳$$

$$t = \frac{ln۳}{۰/۰۵} = ۲۱/۹۷$$

پس ۲۲ سال طول می کشد تا سرمایه ما سه برابر شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۱.۶

مقدار جمع شده در حساب با سرمایه گذاری های زیر را پیدا کنید.(تمرینات ۳-۱)

۱ – صد میلیون تومان با نرخ ۴% و ربح مرکب سه ماهه بعد از ۲ سال.

۲ – شش صد میلیون تومان با نرخ ۵% و ربح مرکب روزانه بعد از ۳ سال.

۳ – صد میلیون تومان با نرخ ۱۰% و ربح مرکب پیوسته بعد از دو سال و سه ماه.

معین کنید که چه مبلغی را باید امروز سرمایه گذاری کنیم تا مبالغ زیر را بدست آوریم. (تمرینات ۵-۴)

۴ – برای بدست آوردن صد میلیون تومان بعد از دو سال با نرخ ۶% و ربح مرکب ماهانه.

۵ - برای بدست آوردن ۸۰ میلیون تومان بعد از سه سال و سه ماه با نرخ ۹% و ربح مرکب پیوسته .

۶ – برای اینکه پس انداز ما بعد از سه سال و ربح مرکب سالیانه دو برابر شود ، چه نرخی لازم است؟

۷ – چند سال طول می کشد تا پس انداز ما دو برابر شود با نرخ بهره ۸% در سال و ربح مرکب ماهیانه ؟

۸ – اگر امروز ۱۰۰ میلیون تومان داشته باشید و آنرا در یک حساب پس انداز با نرخ ۸% در سال و ربح مرکب ماهانه ذخیره کنید ، چند سال طول می کشد تا مبلغ ۱۵۰ میلیون تومان در حساب شما موجود باشد؟

۹ – چند سال طول می کشد تا ۱۰۰۰۰ تومان به ۲۵۰۰۰ برسد ، با فرض این که نرخ ۶% در سال و ربح مرکب پیوسته باشد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۱.۶

مقدار جمع شده در حساب با سرمایه گذاری های زیر را پیدا کنید.(تمرینات ۳-۱)

۱ – صد میلیون تومان با نرخ ۴% و ربح مرکب سه ماهه بعد از ۲ سال.

$$A = P\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt} = ۱۰۰ \text{ میلیون تومان} \left(۱ + \frac{۰/۰۴}{۴}\right)^{(۴)(۲)} = ۱۰۸/۲۸ \text{ میلیون تومان}$$

۲ – شش صد میلیون تومان با نرخ ۵% و ربح مرکب روزانه بعد از ۳ سال.

$$A = P\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt} = ۶۰۰ \text{ میلیون تومان} \left(۱ + \frac{۰/۰۵}{۳۶۵}\right)^{(۳۶۵)(۳)} = ۶۹۷/۰۹ \text{ میلیون تومان}$$

۳ – صد میلیون تومان با نرخ ۱۰% و ربح مرکب پیوسته بعد از دو سال و سه ماه.

$$A = Pe^{rt} = ۱۰۰ \text{ میلیون تومان} \; e^{(۰/۱)(۲/۲۵)} = ۱۲۵/۲۳ \text{ میلیون تومان}$$

معین کنید که چه مبلغی را باید امروز سرمایه گذاری کنیم تا مبالغ زیر را بدست آوریم. (تمرینات ۵-۴)

۴ – برای بدست آوردن صد میلیون تومان بعد از دو سال با نرخ ۶% و ربح مرکب ماهانه.

$$P = A\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{-nt} = ۱۰۰ \text{ میلیون تومان} \left(۱ + \frac{۰/۰۶}{۱۲}\right)^{-(۱۲)(۲)} = ۸۸/۷۲ \text{ میلیون تومان}$$

۵ - برای بدست آوردن ۸۰ میلیون تومان بعد از سه سال و سه ماه با نرخ ۹% و ربح مرکب پیوسته .

$$P = Ae^{-rt} = ۸۰ \text{ میلیون تومان} \; e^{-(۰/۰۹)(۳/۲۵)} = ۵۹/۱۷ \text{ میلیون تومان}$$

۶ – برای اینکه پس انداز ما بعد از سه سال و ربح مرکب سالیانه دو برابر شود ، چه نرخی لازم است؟

$$۲P = P\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$۲ = \left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۲ = \left(۱ + \frac{r}{۱}\right)^{۳}$$

$$۱ + r = \sqrt[۳]{۲}$$

$$r = \sqrt[۳]{۲} - ۱ = ۰/۲۶ = \%۲۶$$

۷ – چند سال طول می کشد تا پس انداز ما دو برابر شود با نرخ بهره ۸% در سال و ربح مرکب ماهیانه ؟

$$۲P = P\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$۲ = \left(۱ + \frac{۰/۰۸}{۱۲}\right)^{(۱۲)(t)}$$

$$۲ = \left(۱/۰۰۶۷\right)^{۱۲t}$$

$$ln۲ = ln\left(۱/۰۰۶۷\right)^{۱۲t}$$

$$ln۲ = ۱۲tln\left(۱/۰۰۶۷\right)$$

$$t = \frac{ln۲}{۱۲ln\left(۱/۰۰۶۷\right)} \approx ۸/۷ \text{ سال}$$

۸ – اگر امروز ۱۰۰ میلیون تومان داشته باشید و آنرا در یک حساب پس انداز با نرخ ۸% در سال و ربح مرکب ماهانه ذخیره کنید ، چند سال طول می کشد تا مبلغ ۱۵۰ میلیون تومان در حساب شما موجود باشد؟

$$A = P\left(۱ + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$۱۵۰ \text{ میلیون} = ۱۰۰ \text{ میلیون}\left(۱ + \frac{۰/۰۸}{۱۲}\right)^{۱۲t}$$

$$۱/۵ = \left(۱/۰۰۶۷\right)^{۱۲t}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$ln(۱/۵) = ln(۱/۰۰۶۷)^{۱۲t}$$

$$ln(۱/۵) = ۱۲tln(۱/۰۰۶۷)$$

$$t = \frac{ln(۱/۵)}{۱۲ln(۱/۰۰۶۷)} = ۵/۰۵۹۹۷ \text{ سال}$$

و یا ۶۰/۷۲ ماه

۹ – چند سال طول می کشد تا ۱۰۰۰۰ تومان به ۲۵۰۰۰ برسد ، با فرض این که نرخ ۶% در سال و ربح مرکب پیوسته باشد.

$$A = Pe^{rt}$$

$$۲۵۰۰۰ = ۱۰۰۰۰\, e^{(۰/۰۶)t}$$

$$۲/۵ = e^{(۰/۰۶)t}$$

$$ln۲/۵ = ۰/۰۶t$$

$$t = \frac{ln۲/۵}{۰/۰۶} = ۱۵/۲۷ \text{ سال}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱.۷ -رشد و فرو کاست Growth and Decay

بسیاری از پدیده های طبیعی از قانون زیر تبعیت می کنند

$$A(t) = A_{\circ}e^{kt} \qquad (۱)$$

یعنی مقدار A تابع زمان است و یا به عبارت دیگر مقدار A در طول زمان تغییر می کند.

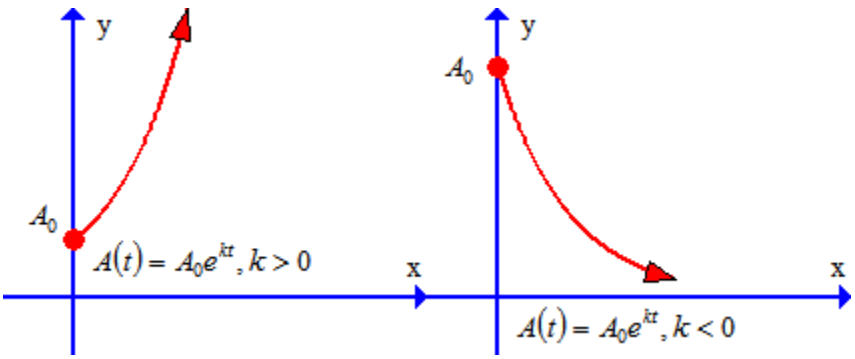
در فرمول بالا $A_{\circ}$ مقدار اولیه است و یا مقدار در زمان صفر $t = \circ$

و $k \neq \circ$ یک ضریب ثابت است.

اگر $k > \circ$ باشد ، مقدار A در طول زمان افزایش پیدا می کند.

اگر $k < \circ$ باشد ، مقدار A در طول زمان نقصان پیدا می کند.

در هر دو حالت ، وقتی که مقدار A در طول زمان طبق فرمول (۱) تغییر می کند ، گفته می شود که از قانون توانی تبعیت می کند.



مثلا در بخش ۱۱.۶ دیدیم که ربح مرکب پیوسته از قانون رشد نا محدود Uninhibited Growth تبعیت می کند. در این بخش در مورد سه پدیده دیگر که از قانون توانی تبعیت می کنند صحبت می کنیم.

رشد نا محدود Uninhibited Growth

تقسیم سلول یکی از این نوع رشد نا محدود است. در یک موقعیت ایده ال ، مثلا اگر هیچ سلولی نمیرد و هیچ حاصل فرعی تولید نشود ، تعداد سلول های موجود در یک زمان مشخص تابع قانون رشد نا محدود است. اما در حقیقت بعد از سپری شدن زمان کافی ، رشد نا محدود به علت عواملی مانند کمبود جا و یا کمبود غذا متوقف می شود. قانون رشد نا محدود فقط در مراحل اولیه تقسیم سلولی آشکار می شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تقسیم سلولی با کشت تعداد $N_\circ$ شروع می شود. هر سلول تا یک زمان میانی رشد می کند و سپس سلول بالغ به دو سلول همسان تقسیم می شود. فرض بر این است که زمان لازم برای بالغ شدن سلول و تقسیم آن تغییر نمی کند. این سلول های جدید رشد می کنند و پس از بالغ شدن تقسیم می شوند .این تقسیم شدن ادامه می یابد .

فرمولی که تعداد سلول ها N در محیط کشت بعد از گذشت زمان t (در مراحل اولیه رشد) نشان می دهد ، فرمول زیر است.

رشد نا محدود سلول ها Uninhibited Growth of Cells

$$\boldsymbol{N(t) = N_\circ e^{kt}, k > \circ} \qquad (۲)$$

در فرمول بالا $N_\circ$ تعداد اولیه سلول ها و k یک عدد مثبت است که سرعت و یا میزان و یا نرخ r رشد سلول ها را نشان می دهد.

توجه داشته باشید که بازده فرمول بالا یک عدد حقیقی مثبت است که می تواند عددی اعشاری باشد ، گر چه شمارش تعداد سلول ها باید یک عدد صحیح باشد.

مثال ۱

یک نوع سلول طبق معادله زیر افزایش می یابد.

$$N(t) = ۷۵e^{\circ/۳۲t}$$

حرف t زمان بر حسب ساعت است.

الف –تعداد اولیه سلول ها را در این کشت مشخص کنید.

ب –نرخ یا میزان رشد این کشت سلولی در ساعت چه قدر است؟

ج –بعد از ۴ ساعت چند عدد سلول در کشت است؟

پاسخ

الف –

$$N_\circ = N(\circ) = ۷۵e^{(\circ/۳۲)(\circ)} = ۷۵$$

تعداد اولیه سلول ها ۷۵ است.

ب –با مقایسه $N(t) = N_\circ e^{kt}$ با $N(t) = ۷۵e^{\circ/۳۲t}$ نتیجه می گیریم که $k = \circ/۳۲$ است. یعنی نرخ رشد ۳۲% در ساعت است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –بعد از ۴ ساعت یعنی $t = ۴$ پس

$$N(۴) = e^{(۰/۳۲)(۴)} \approx ۲۶۹ / ۷۵$$

بعد از ۴ ساعت تید ۲۷۰ سلول موجود است.

مثال ۲

یک نوع باکتری طبق قانون رشد نا محدود ، افزایش می یابد.

الف –اگر در هر سه ساعت تعداد باکتریها دو برابر میشود ، k را در فرمول (۲) پیدا کنید و N را به صورت تابعی از t بنویسید.

ب –چه مدت طول می کشد تا تعداد باکتریها سه برابر شود؟

ج –چه مدت طول می کشد تا تعداد باکتریها مجددا دو برابر شود؟ یعنی چهار برابر تعداد اولیه.

پاسخ

الف

$$N(t) = N_۰ e^{kt}$$

$$۲N_۰ = N_۰ e^{۳k}$$

$$۲ = e^{۳k}$$

$$ln۲ = lne^{۳k}$$

$$ln۲ = ۳k$$

$$k = \frac{ln۲}{۳} \approx ۰/ ۲۳۱$$

پس

$$N(t) = N_۰ e^{۰/۲۳۱t}$$

ب –

$$۳N_۰ = N_۰ e^{۰/۲۳۱t}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۳ = e^{۰/۲۳۱t}$$

$$ln۳ = lne^{۰/۲۳۱t}$$

$$ln۳ = ۰/۲۳۱t$$

$$t = \frac{ln۳}{۰/۲۳۱} \approx ۴/۷۵۶ \text{ ساعت}$$

ج –اگر تعداد باکتریها در مدت ۳ ساعت دو برابر میشود ، پس در مدت ۶ ساعت چهار برابر می شود.

فرو کاست رادیو اکتیو Radioactive Decay

مواد رادیو اکتیو از قانون فرو کاست نا محدود Uninhibited Decay تبعیت می کنند. مقدار یک ماده رادیو اکتیو موجود در زمان t مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$\boldsymbol{A(t) = A_۰ e^{kt} \ , k < ۰} \qquad (۳)$$

در فرمول بالا $A_۰ = A(۰)$ مقدار اولیه رادیو اکتیو است و k یک عدد منفی و میزان یا نرخ کم شدن ماده رادیو اکتیو را نشان می دهد. همه مواد رادیو اکتیو ها یک **نیم عمر Half-life** مشخص دارند.

برای **تعیین قدمت اجسام کربن دار Carbon Dating** این حقیقت را بکار می بریم که کلیه ارگان های زنده دارای دو نوع کربن هستند ، کربن ۱۲ که یک ماده با ثبات است و کربن ۱۴ که یک کربن رادیو اکتیو است با نیم عمر ۵۶۰۰ سال. وقتی که یک ارگان زنده است ، نسبت کربن ۱۲ به کربن ۱۴ ثابت است. وقتی که یک موجود میمیرد ، مقدار اولیه کربن ۱۲ ثابت می ماند ، اما مقدار کربن ۱۴ کم میشود. این تغییر درمقدار کربن ۱۴ موجود نسبت به مقدار کربن ۱۲ موجود امکان میدهد که زمان مرگ موجود را حساب کنیم.

مثال ۳ – تخمین عمر ابزار قدیمی Estimating the Age of Ancient Tools

در حفاری ها در شیلی ، باستان شناسان باقی مانده ای از چوب های سوخته شده پیدا کردند که در آنها ۱/۶۷ % از کربن ۱۴ اولیه موجود بود. اگر نیم عمر کربن رادیو اکتیو ۵۶۰۰ سال باشد ، حدس بزنید که چه زمانی درخت قطع و سوخته شده است.

پاسخ

$$A(t) = A_۰ e^{rt}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{۱}{۲}A_{\circ} = A_{\circ}e^{k(۵۶۰۰)}$$

$$\frac{۱}{۲} = e^{۵۶۰۰k}$$

$$۵۶\ ۰۰\ k = ln\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$k = \frac{ln\left(\frac{۱}{۲}\right)}{۵۶\ ۰۰} \approx -\ ۰/۰۰۰\ ۱۲۴$$

پس خواهیم داشت

$$A(t) = A_{\circ}e^{-۰/۰۰۰۱۲۴t}$$

اگر مقدار کربن ۱۴ موجود ۱/۶۷ % مقدار اولیه است ، پس

$$۰/۰\ ۱۶۷A_{\circ} = A_{\circ}e^{-۰/۰۰۰۱۲۴t}$$

$$۰/۰\ ۱۶۷ = e^{-۰/۰۰۰۱۲۴t}$$

$$-\ ۰/۰۰۰\ ۱۲۴t = ln(۰/۰\ ۱۶۷)$$

$$t = \frac{ln(۰/۰\ ۱۶۷)}{-\ ۰/۰۰۰\ ۱۲۴} \approx ۳۳\ ۰۰۰ \quad \text{سال}$$

درخت تقریبا ۳۳ ۰۰۰ پیش بریده و سوخته شده است. پس باستان شناسان فکر می کنند که ۳۳ ۰۰۰ پیش انسان در آن قاره زندگی می کرده است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۱.۷

۱ – رشد جمعیت P یک نوع حشره طبق فرمول زیر بدست می آید. در فرمول زیر t بر حسب روز است.

$$P(t) = ۵۰۰\, e^{۰/۰۲t}$$

حساب کنید بعد از چند روز تعداد حشره ها به ۱۰۰۰ می رسد

۲ – تعداد N باکتری های موجود در یک کشت تابع فرمول زیر است. در فرمول t بر حسب ساعت است.

$$N(t) = ۱۰۰۰\, e^{۰/۰۱t}$$

حساب کنید بعد از چند ساعت تعداد باکتریها به ۱۵۰۰ می رسد.

۳ – استرانتیم ۹۰ یک ماده رادیو اکتیو است که طبق فرمول زیر نقصان پیدا می کند. در فرمول t بر حسب سال است و $A_۰$ مقدار اولیه ماده رادیو اکتیو

$$A(t) = A_۰ e^{-۰/۰۲۴۴t}$$

الف –نیم عمر این ماده رادیو اکتیو چند سال است؟

ب –حساب کنید چند سال طول می کشد تا ۱۰۰ گرم از این ماده به ۱۰ برسد.

۴ – رشد جمعیت یک نوع پشه تابع قانون رشد نا محدود Uninhabited است. اگر در ابتدای آزمایش تعداد ۱۰۰۰ پشه موجود باشد ، و بعد از یک روز تعداد آنها به ۱۸۰۰ برسد ، بعد از سه روز تعداد پشه ها چند عدد است؟ چند روز طول می کشد تا تعداد آنها به ۱۰۰۰۰ برسد؟

۵ – رشد جمعیت یک شهر تابع قانون رشد نا محدود است. اگر جمعیت این شهر بعد از ۱۸ ماه دو برابر شود ، و تعداد افراد این شهر اکنون ۱۰۰۰۰ نفرباشد ، بعد از ۲ سال جمعیت این شهر چه تعداد خواهد بود؟

۶ – نیم عمر رادیم ۱۶۹۰ سال است. اگر اکنون ۱۰ گرم رادیم داشته باشیم ، بعد از ۵۰ سال چند گرم رادیم موجود خواهد بود.

۷ – در یک فسیل مقدار ۷۰% از کربن ۱۴ اولیه اش موجود است. قدمت این فسیل چقدر است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۱.۷

۱ – رشد جمعیت P یک نوع حشره طبق فرمول زیر بدست می آید. در فرمول زیر t بر حسب روز است.

$$P(t) = ۵\,۰۰\, e^{۰/۰۲t}$$

حساب کنید بعد از چند روز تعداد حشره ها به ۱ ۰۰۰ می رسد

پاسخ

$$۱\,۰۰۰ = ۵\,۰۰\, e^{۰/۰۲t}$$

$$۲ = e^{۰/۰۲t}$$

$$ln۲ = ۰/۰\,۲t$$

$$t = \frac{ln۲}{۰/۰\,۲} \approx ۳۴/۷ \text{ روز}$$

۲ – تعداد N باکتری های موجود در یک کشت تابع فرمول زیر است. در فرمول t بر حسب ساعت است.

$$N(t) = ۱\,۰۰۰\, e^{۰/۰۱t}$$

حساب کنید بعد از چند ساعت تعداد باکتریها به ۱۵ ۰۰ می رسد.

پاسخ

$$۱۵\,۰۰ = ۱\,۰۰۰\, e^{۰/۰۱t}$$

$$۱/۵ = e^{۰/۰۱t}$$

$$ln(۱/۵) = ۰/۰\,۱t$$

$$t = \frac{ln(۱/۵)}{۰/۰\,۱} \approx ۴۰/۵۵ \text{ ساعت}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳ – استرانتیم ۹۰ یک ماده رادیو اکتیو است که طبق فرمول زیر نقصان پیدا می کند. در فرمول t بر حسب سال است و $A_{\circ}$ مقدار اولیه ماده رادیو اکتیو

$$A(t) = A_{\circ}e^{-۰/۰۲۴۴t}$$

پاسخ

الف –نیم عمر این ماده رادیو اکتیو چند سال است؟

$$\frac{۱}{۲}A_{\circ} = A_{\circ}e^{-۰/۰۲۴۴t}$$

$$\frac{۱}{۲} = e^{-۰/۰۲۴۴t}$$

$$ln\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\,۰/۰\,۲۴۴t$$

$$t = \frac{ln\left(\frac{۱}{۲}\right)}{-\,۰/۰\,۲۴۴} \approx ۲۸/۴ \text{ سال}$$

ب –حساب کنید چند سال طول می کشد تا ۱۰۰ گرم از این ماده به ۱۰ برسد.

$$۱۰ = ۱۰۰\, e^{-۰/۰۲۴۴t}$$

$$۰/۱ = e^{-۰/۰۲۴۴t}$$

$$ln(۰/۱) = -\,۰/۰\,۲۴۴t$$

$$t = \frac{ln(۰/۱)}{-\,۰/۰\,۲۴۴} \approx ۹۴/۴ \text{ سال}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴ – رشد جمعیت یک نوع پشه تابع قانون رشد نا محدود Uninhabited است. اگر در ابتدای آزمایش تعداد ۱۰۰۰ پشه موجود باشد ، و بعد از یک روز تعداد آنها به ۱۸۰۰ برسد ، بعد از سه روز تعداد پشه ها چند عدد است؟ چند روز طول می کشد تا تعداد آنها به ۱۰۰۰۰ برسد؟

پاسخ

انتدا باید k را پید ا کنیم.

$$N(t) = N_{\circ}e^{kt}$$

$$۱۸۰۰ = ۱۰۰۰\, e^{k(۱)}$$

$$۱/۸ = e^{k}$$

$$ln(۱/۸) = k$$

$$k \approx ۰/۵۸۷۸$$

$$N(۳) = ۱۰۰۰\, e^{۰/۵۸۷۸(۳)}$$

$$N(۳) = ۵۸۳۲$$

بعد از سه روز تعداد پشه ها به ۵۸۳۲ می‌رسد.

$$۱۰۰۰۰ = ۱۰۰۰\, e^{۰/۵۸۷۸t}$$

$$۱۰ = e^{۰/۵۸۷۸t}$$

$$t = \frac{ln۱۰}{۰/۵۸۷۸} = ۳/۹ \text{ روز}$$

مدت ۳/۹ روز طول می کشد تا تعداد پشه ها به ۱۰۰۰۰ برسد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵ – رشد جمعیت یک شهر تابع قانون رشد نا محدود است. اگر جمعیت این شهر بعد از ۱۸ ماه دو برابر شود ، و تعداد افراد این شهر اکنون ۱۰۰۰۰ نفرباشد ، بعد از ۲ سال جمعیت این شهر چه تعداد خواهد بود؟

پاسخ

ابتدا باید k را پیدا کنیم.

$$۲P_{\circ} = P_{\circ}e^{kt}$$

$$۲ = e^{۱۸k}$$

$$k = \frac{ln۲}{۱۸} = ۰/۰۳۸۵۱$$

بعد از دو سال یعنی ۲۴ ماه

$$P(۲۴) = ۱۰۰۰۰\, e^{(۰/۰۳۸۵۱)(۲۴)} = ۲۵۱۹۹$$

بعد از دو سال جمعیت این شهر ۲۵۱۹۹ نفر خواهد بود.

۶ – نیم عمر رادیم ۱۶۹۰ سال است. اگر اکنون ۱۰ گرم رادیم داشته باشیم ، بعد از ۵۰ سال چند گرم رادیم موجود خواهد بود.

پاسخ

ابتدا k را پیدا می کنیم.

$$A(t) = A_{\circ}e^{kt}$$

$$\frac{۱}{۲}A_{\circ} = A_{\circ}e^{۱۶۹۰k}$$

$$\frac{۱}{۲} = e^{۱۶۹۰k}$$

$$ln\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱۶۹۰\, k$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$k = \frac{ln\left(\frac{۱}{۲}\right)}{۱۶۹۰} = -۰/۰۰۰۴۱$$

$$A(t) = A_{\circ}e^{kt}$$

$$A(۵۰) = ۱۰\, e^{-۰/۰۰۰۴۱(۵۰)} = ۹/۷۹۷ \text{ گرم}$$

بعد از ۵۰ سال ۹/۷۹۷ گرم رادیوم موجود خواهد بود.

۷ – در یک فسیل مقدار ۷۰% از کربن ۱۴ اولیه اش موجود است. قدمت این فسیل چقدر است؟

پاسخ

$$A(t) = A_{\circ}e^{kt}$$

بر اساس توضیحات این بخش برای کربن ۱۴ ضریب ثابت $k = -۰/۰۰۰۱۲۴$ است. پس

$$۰/۷A_{\circ} = A_{\circ}e^{-۰/۰۰۰۱۲۴t}$$

$$۰/۷ = e^{-۰/۰۰۰۱۲۴t}$$

$$ln(۰/۷) = -۰/۰۰۰۱۲۴t$$

$$t = \frac{ln(۰/۷)}{-۰/۰۰۰۱۲۴} \text{ سال } ۲۸۷۶$$

قدمت این فسیل ۲۸۷۶ سال است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)