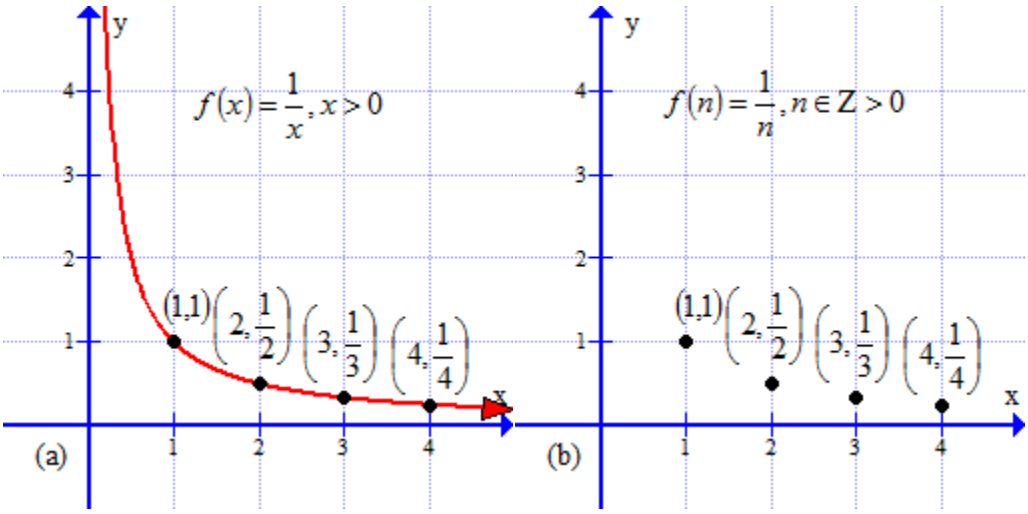
۱۲.۱ -دنباله ها Sequences

یک **دنباله A Sequence** یک تابع است که دامنه آن مجموعه اعداد صحیح مثبت است.

چون یک دنباله ، یک تابع است ، پس نمودار هم دارد. در شکل (a) نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}, x>۰$ را ملاحظه می کنید. اگر تمام نقاط روی نمودار را حذف کنیم ، بجز نقاطی که مختصات x آنها اعداد صحیح مثبت هستند ، آنگاه نمودار دنباله $f(n)=\frac{۱}{n}$ خواهیم داشت. شکل (b)



معمولا یک دنباله با درج فهرست وار مقادیر آن به ترتیب ، بیان می شود. مثلا شکل (b) در بالا را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$f(۱), f(۲), f(۳), f(۴) \ldots \quad \text{یا} \quad ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots$$

سه نقطه نمایانگر این است که لیست نا محدود است. هر کدام از اعداد در این لیست مرتب را **عضو یا جمله Term** دنباله می نامند. برای نام بردن هر یک از عضو های یک دنباله از حروف زیر نویس دار استفاده می کنیم. مثلا

جمله اول را $a_۱$ می نامیم

جمله دوم را $a_۲$ می نامیم و الی آخر

برای دنباله $f(n)=\frac{۱}{n}$ که در بالا ذکر شد ، می نویسیم

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$a_۱ = f(۱) = ۱ \quad a_۲ = f(۲) = \frac{۱}{۲} \quad a_۳ = f(۳) = \frac{۱}{۳} \quad a_۴ = f(۴) = \frac{۱}{۴} \dots a_n = f(n) = \frac{۱}{n} \dots$$

به عبارت دیگر ، معمولا برای یک دنباله نماد متداول تابع یعنی $f(n)$ را بکار نمی بریم. مثلا برای این دنباله بالا ، یک ضابطه و یا قاعده داریم و آن $a_n = \frac{۱}{n}$ است. پس آسان خواهد بود که هر جمله ای از این دنباله را پیدا کنیم.

وقتی که یک فرمول برای جمله انم $(enom)$ که آنرا **جمله عمومی General Term** مینامند ، داشته باشیم ، بجای نوشتن جمله های دنباله ، آن جمله عمومی را داخل اکولاد { } می گذاریم. مثلا برای یک دنباله که جمله انم آن $b_n = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n$ است ، می نویسیم

$$\{b_n\} = \left\{\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right\}$$

و یا

$$b_۱ = \frac{۱}{۲}, b_۲ = \frac{۱}{۴}, b_۳ = \frac{۱}{۸}, \dots b_n = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n, \dots$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱ – نوشتن چند جمله اول یک دنباله Writing the First Several Terms of a Sequence

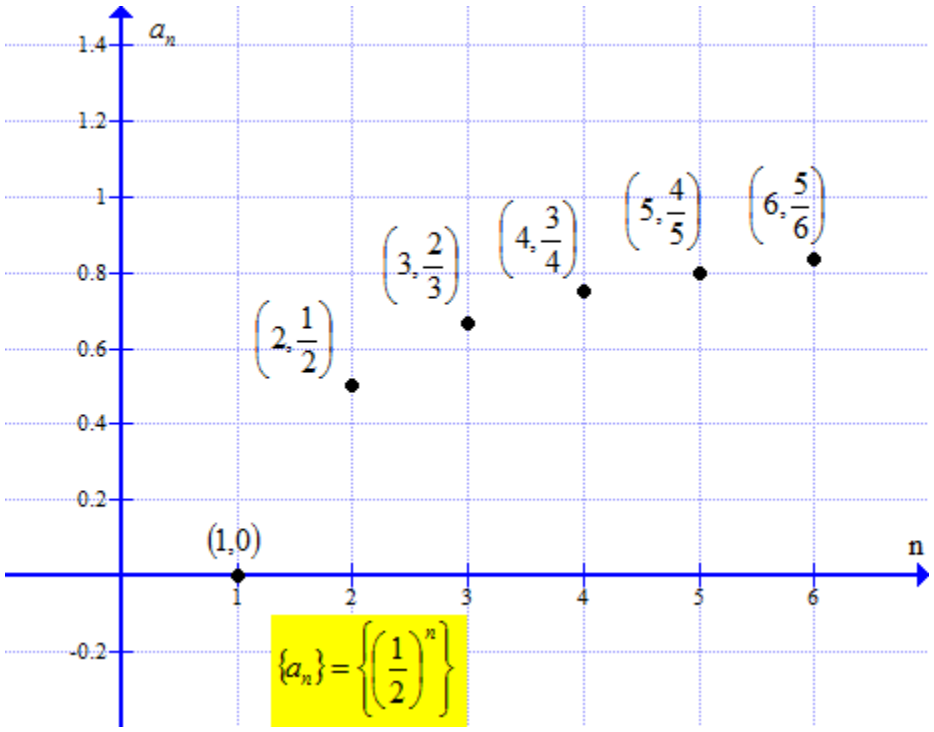
شش جمله اول دنباله زیر را بنویسید و نمودار آنرا رسم کنید.

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n-۱}{n}\right\}$$

پاسخ

$$a_۱ = ۰ \;،\; a_۲ = \frac{۱}{۲} \;،\; a_۳ = \frac{۲}{۳} \;،\; a_۴ = \frac{۳}{۴} \;،\; a_۵ = \frac{۴}{۵} \;،\; a_۶ = \frac{۵}{۶}$$

نمودار در ذیل ملاحظه می کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲

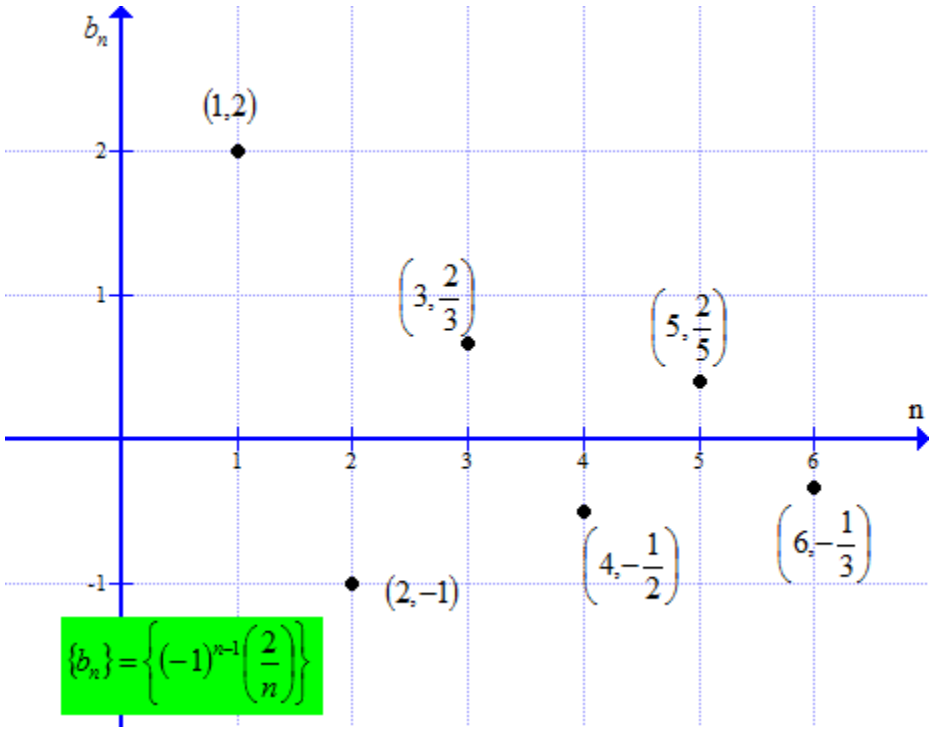
شش جمله اول دنباله زیر را بنویسیس و نمودار آنرا رسم کنید.

$$\{b_n\} = \left\{(-۱)^{n-۱}\left(\frac{۲}{n}\right)\right\}$$

پاسخ

$$b_۱ = ۲\ ,\quad b_۲ = -۱\ ,\quad b_۳ = \frac{۲}{۳}\ ,\quad b_۴ = -\frac{۱}{۲}\ ,\quad b_۵ = \frac{۲}{۵}\ , b_۶ = -\frac{۱}{۳}$$

نمودار دا ذیل ملاحظه می کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳

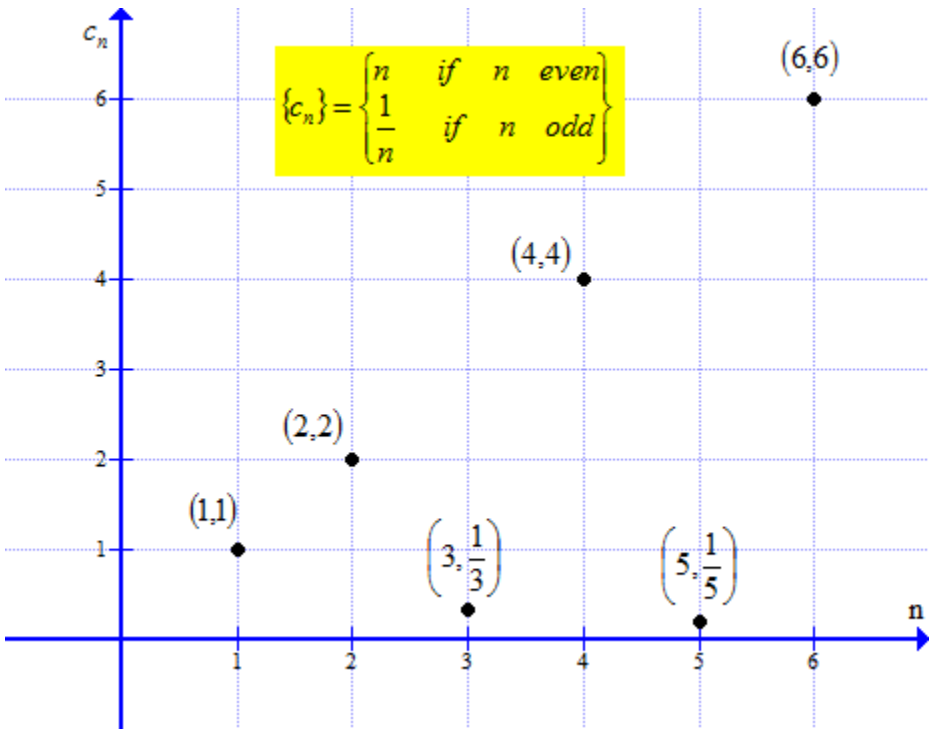
شش جمله اول دنباله زیر را بنویسید و نمودار آنرا رسم کنید.

$$c_n = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{۱}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

پاسخ

$$c_۱ = ۱ \ , \qquad c_۲ = ۲ \ , \qquad c_۳ = \frac{۱}{۳} \ , \qquad c_۴ = ۴ \ , \qquad c_۵ = \frac{۱}{۵} \ , \qquad c_۶ = ۶$$

نمودار در ذیل ملاحظه می کنید.



مثال ۴ – تشخیص یک دنباله از یک نمونه Determining a Sequence from a Pattern

$$(a) \quad e, \frac{e^۲}{۲}, \frac{e^۳}{۳}, \frac{e^۴}{۴}, \ldots \qquad a_n = \frac{e^n}{n}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(b)\quad ۱,\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۲۷},\ldots \qquad b_n=\frac{۱}{۳^{n-۱}}$$

$$(c)\quad ۱,۳,۵,۷,\ldots \qquad c_n=۲n-۱$$

$$(d)\quad ۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\ldots \qquad d_n=n^۲$$

$$(e)\quad ۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},\ldots \qquad e_n=(-۱)^{n+۱}\left(\frac{۱}{n}\right)$$

در مثال بالا به $\{e_n\}$ توجه کنید. علامت جمله ها **به تناوب Alternate** عوض می شود. در چنین مواردی فاکتور $(-۱)^{n+۱}$ بکار می بریم ، که اگر n فرد باشد -۱ نتیجه می شود ، و اگر n زوج باشد ۱ نتیجه می شود.

و یا $(-۱)^n$ بکار می بریم .در اینصورت اگر n زوج باشد نتیجه ۱ است و اگر n فرد باشد نتیجه -۱ است.

نماد فاکتوریل The Factorial Symbol

اگر $n\geq ۰$ یک عدد صحیح باشد ، نماد فاکتوریل $n!$ مطابق زیر تعریف می شود.

$$\mathbf{0!=1 \qquad 1!=1 \qquad n!=n(n-1)*\ldots 3*2*1,\ \ n\geq 2}$$

مثلا

$$۲!=۲*۱=۲$$

$$۳!=۳*۲*۱=۶$$

$$۴!=۴*۳*۲*۱=۲$$

چون

$$n!=n\underbrace{(n-۱)(n-۲)*\ldots*۳*۲*۱}_{(n-۱)!}$$

می توان فرمول زیر رابرای پیدا کردن فاکتوریل بعدی بکار برد.

$$n!=n(n-۱)!$$

مثلا ، چون $۶!=۷۲۰$ می توانیم بنویسیم $۷!=۷*۶!=۷(۷۲۰)=۵۰۴۰$ و

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۸! = ۸ * ۷! = ۸(۵۰۴۰) = ۴۰۳۲۰$$

فرمول های باز گشتی Recursive Formulas

طریق دیگر برای مشخص کردن یک دنباله این است که برای اولین و یا چند جمله اول دنباله یک کمیّت معین کنیم و سپس برای جمله انم یک فرمول و یا یک تساوی مشخص کنیم. دنباله ای که به این طریق بیان می شود را می گویند بطور **باز گشتی مشخص شده Defined Recursively** و آن فرمول را **فرمول باز گشتی Recursive Formula** می نامند.

مثال ۵ -نوشتن جمله های یک دنباله که بطور باز گشتی مشخص شده

Writing the Terms of a Recursively Defined Sequence

پنج جمله اول دنباله زیر را که بطور بازگشتی مشخص شده بنویسید.

$$s_۱ = ۱ \ , \quad s_n = ۴s_{n-۱}$$

پاسخ

جمله اول داده شده است $s_۱ = ۱$

برای پیدا کردن جمله دوم ، $n = ۲$ پس $s_۲ = ۴s_۱ = ۴ * ۱ = ۴$

برای پیدا کردن جمله سوم ، $n = ۳$ پس $s_۳ = ۴s_۲ = ۴ * ۴ = ۱۶$

بهمین ترتیب ادامه می دهیم و لذا خواهیم داشت

$$s_۱ = ۱$$

$$s_۲ = ۴s_۱ = ۴ * ۱ = ۴$$

$$s_۳ = ۴s_۲ = ۴ * ۴ = ۱۶$$

$$s_۴ = ۴s_۳ = ۴ * ۱۶ = ۶۴$$

$$s_۵ = ۴s_۴ = ۴ * ۶۴ = ۲۵۶$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۶

پنج جمله اول دنباله زیر را که بطور بازگشتی مشخص شده بنویسید.

$$f_۱ = ۱ \quad ، \quad f_n = nf_{n-۱}$$

پاسخ

$$f_۱ = ۱$$

$$f_۲ = ۲ * f_۱ = ۲ * ۱ = ۲$$

$$f_۳ = ۳f_۲ = ۳ * ۲ = ۶$$

$$f_۴ = ۴ * f_۳ = ۴ * ۶ = ۲۴$$

$$f_۵ = ۵ * f_۴ = ۵ * ۲۴ = ۱۲۰$$

مثال ۷

پنج جمله اول دنباله زیر را که بطور بازگشتی مشخص شده بنویسید.

$$u_۱ = ۱ \quad u_۲ = ۱ \quad u_{n+۲} = u_n + u_{n+۱}$$

پاسخ

$$u_۱ = ۱$$

$$u_۲ = ۱$$

$$u_۳ = u_۱ + u_۲ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$u_۴ = u_۲ + u_۳ = ۱ + ۲ = ۳$$

$$u_۵ = u_۳ + u_۴ = ۲ + ۳ = ۵$$

دنباله ای که در مثال ۷ مشخص شد به **دنباله فیبوناچی Fibonacci Sequence** معروف است و جمله های این دنباله را **اعداد فیبوناچی Fibonacci Numbers** می گویند.

این اعداد کاربرد زیادی دارند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نماد جمع Summation Notation

اغلب لازم می شود که **حاصل جمع چند جمله اول** $\boldsymbol{The\ Sum\ of\ the\ First\ n\ Terms\ of}$ یک دنباله $\{a_n\}$ را پیدا کنیم. یعنی

$$\boldsymbol{a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_n} \qquad (۱)$$

بجای نوشتن همه این جمله ها ، راه فشرده تری بکار می بریم که به نام **نماد جمع Summation Notation** موسوم است. با بکار بردن این نماد ، عبارت (۱) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\boldsymbol{a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_n} = \sum_{k=۱}^{n} a_k$$

نماد $\sum$ یعنی جمله ها را جمع بزنیم. عدد صحیح k بنام **شاخص Index** موسوم است و به ما می گوید که عمل جمع را از کجا شروع کنیم.

عبارت

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k \qquad (۲)$$

می گوید جمله های a_k مربوط به دنباله $\{a_n\}$ با هم جمع کنید. از $k = ۱$ شروع کنید تا $k = n$ عبارت (۲) خوانده می شود "مجموع a_k از $k = ۱$ تا $k = n$

مثال ۸ – بسط دادن نماد جمع Expanding Summation Notation

جمع های زیر را بسط دهید.

$$(a)\ \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k} \qquad\qquad (b)\ \sum_{k=۱}^{n} k!$$

پاسخ

$$(a)\ \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n} \qquad\qquad (b)\ \sum_{k=۱}^{n} k! = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + n!$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۹ – نوشتن یک افزانه به صورت نماد جمع Writing a Sum in Summation Notation

هر یک از افزنه های زیر را به صورت نماد جمع بنویسید.

$$(a)\quad ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+۹^۲ \qquad (b)\quad ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

پاسخ

$$(a)\quad ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+۹^۲=\sum_{k=۱}^{۹}k^۲ \qquad (b)\quad ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}=\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۲^{k-۱}}$$

شاخص k لزوما نباید حتما با یک شروع شود. می توان از صفر شروع کرد. مانند

$$\sum_{k=۰}^{n-۱}\frac{۱}{۲^k}=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

شاخص هم لزوما نباید حتما k باشد. مثلا

$$\sum_{j=۱}^{n}j! \quad ، \quad \sum_{i=۱}^{n}i!$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

جمع چند جمله اول یک دنباله Adding the First n Terms of a Sequence

در ذیل چند ویژگی دنباله ها را با استفاده از نماد جمع ملاحظه می‌کنید. این ویژگی ها برای جمع کردن جمله های یک دنباله مفید هستند.

قضیه -ویژگی های دنباله ها Theorem: Properties of Sequences

اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند و c یک عدد حقیقی ، پس

$$\sum_{k=۱}^{n} c = cn \qquad (۱)$$

$$\sum_{k=۱}^{n} (ca_k) = c\sum_{k=۱}^{n} a_k \qquad (۲)$$

$$\sum_{k=۱}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=۱}^{n} a_k + \sum_{k=۱}^{n} b_k \qquad (۳)$$

$$\sum_{k=۱}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k-۱}^{n} a_k - \sum_{k=۱}^{n} b_k \qquad (۴)$$

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k = \sum_{k=۱}^{j} a_k + \sum_{k=l+۱}^{n} a_k \quad ۱ < j < n \qquad (۵)$$

$$\sum_{k=۱}^{n} k = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲} \qquad (۶)$$

$$\sum_{k=۲}^{n} k^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ ۳^۲ + .. + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} \qquad (۷)$$

$$\sum_{k=۱}^{n} k^۳ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + n^۳ = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲ \qquad (۸)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱۰

پیدا کردن جمع یک دنباله Finding the Sum of a Sequence

مجموع هر یک از دنباله ها را پیدا کنید.

$$a)\ \sum_{k=۱}^{۵}(۳k) \qquad b)\ \sum_{k=۱}^{۳}\left(k^{۳}+۱\right) \qquad c)\ \sum_{k=۱}^{۴}\left(k^{۲}-۷k+۲\right)$$

پاسخ

$$a)\ \sum_{k=۱}^{۵}(۳k)=۳\sum_{k=۱}^{۵}k=۳\left(\frac{۵(۵+۱)}{۲}\right)=۳(۱۵)=۴۵$$

$$b)\ \sum_{k=۱}^{۳}\left(k^{۳}+۱\right)=\sum_{k=۱}^{۳}k^{۳}+\sum_{k=۱}^{۳}۱=\left(\frac{۳(۳+۱)}{۲}\right)^{۲}+۱(۳)=\ ۳۶+۳=۳۹$$

$$c)\ \ c)\ \ \sum_{k=۱}^{۴}\left(k^{۲}-۷k+۲\right)=\sum_{k=۱}^{۴}k^{۲}-\sum_{k=۱}^{۴}۷k+\sum_{k=۱}^{۴}۲$$

$$=\left(\frac{۴(۴+۱)(۲*۴+۱)}{۶}\right)^{۲}-۷\left(\frac{۴(۴+۱)}{۲}\right)+۲(۴)$$

$$=۳۰-۷۰+۸=-۳۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۲.۱

پنج جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

۱) $\{n\}$

۲) $\left\{n^{۲}+۱\right\}$

۳) $\left\{\frac{n}{n+۲}\right\}$

۴) $\left\{\frac{۲n+۱}{۲n}\right\}$

۵) $\left\{(-۱)^{n+۱}n^{۲}\right\}$

۶) $\left\{(-۱)^{n-۱}\left(\frac{n}{۲n-۱}\right)\right\}$

۷) $\left\{\frac{(-۱)^{n}}{(n+۱)(n+۲)}\right\}$

در تمرینات زیر الگو ها ادامه دارند. جمله انم دنباله ای که طرح آن داده شده بنویسید.

۸) $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\ldots$

۹) $\frac{۱}{۱*۲},\frac{۱}{۲*۳},\frac{۱}{۳*۴},\frac{۱}{۴*۵},\ldots$

۱۰) $۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\ldots$

۱۱) $\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۹},\frac{۸}{۲۷},\frac{۱۶}{۸۱},\ldots$

۱۲) $۱,-۱,۱,-۱,۱,-۱,\ldots$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳) $۱, \frac{۱}{۲}, ۳, \frac{۱}{۴}, ۵, \frac{۱}{۶}, ۷, \frac{۱}{۸}, \ldots$

در تمرینات زیر یک دنباله به طور باز گشتی مشخص شده. پنج جمله اول آنرا بنویسید.

۱۴) $a_۱ = ۲; \qquad a_n = ۳ + a_{n-۱}$

۱۵) $a_۱ = ۳; \qquad a_n = ۴ - a_{n-۱}$

۱۶) $a_۱ = -۲; \qquad a_n = n + a_{n-۱}$

۱۷) $a_۱ = ۱; \qquad a_n = n - a_{n-۱}$

۱۸) $a_۱ = ۵ \qquad a_n = ۲a_{n-۱}$

۱۹) $a_۱ = ۲ \qquad a_n = -a_{n-۱}$

۲۰) $a_۱ = ۱; \quad a_۲ = ۲; \quad a_n = a_{n-۱} * a_{n-۲}$

مجموع هر یک از دنباله ها را پیدا کنید.

۲۱) $\sum_{k=۱}^{۱۰} ۵$

۲۲) $\sum_{k=۱}^{۲۰} ۸$

۲۳) $\sum_{k=۱}^{۴} (-k)$

۲۴) $\sum_{k=۱}^{۵} (۵k + ۳)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵) $\sum_{k=۱}^{۳}\left(k^{۲}+۴\right)$

۲۶) $\sum_{k=۱}^{۴}\left(k^{۳}-۱\right)$

۲۷) $\sum_{k=۱}^{n}\left(k+۲\right)$

۲۸) $\sum_{k=۱}^{n}\frac{k^{۲}}{۲}$

۲۹) $\sum_{k=۱}^{n}\left(k+۱\right)^{۲}$

۳۰) $\sum_{k=۰}^{n-۱}\frac{۱}{۳^{k+۱}}$

هر یک از جمع های زیر را با استفاده از نماد جمع بنویسید.

۳۱) $۱+۲+۳+\cdots+۲۰$

۳۲) $۱^{۳}+۲^{۳}+۳^{۳}+\cdots+۸^{۳}$

۳۳) $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}+\cdots+\frac{۱۳}{۱۳+۱}$

۳۴) $۱+۳+۵+۷+\cdots+\left[۲\left(۱۲\right)-۱\right]$

۳۵) $۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۲۷}+\cdots+\left(-۱\right)^{۶}\left(\frac{۱}{۳^{۶}}\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۶ – آرش مبلغ سه هزار تومان به بانک بدهکار است. بانک هر ماه ۱% مانده پرداخت نشده را به عنوان سود محاسبه و به مانده اضافه می کند. آرش می تواند ماهیانه ۱۰۰ تومان به بانک بپردازد. مانده حساب او پس از پرداخت هر صد تومان مطابق دنباله باز گشتی زیر تعریف می شود.

$$b_{\circ} = ۳۰۰۰ ، \qquad b_n = ۱/۰۱ b_{n-۱} - ۱۰۰$$

مانده حساب آرش را بعد از پرداخت اولین صد تومان را پیدا کنید.

۳۷ – کشاورزی یک جفت خرگوش بالغ دارد که هر ماه یک جفت خرگوش (یک نر و یک ماده)تولید می کنند. فرض کنید که خر گوش ها یک ماهه بالغ می شوند و بعد از دو ماه یک جفت خرگوش (یک نر و یک ماده)تولید می کنند .

اگر فرض کنیم هیچ یک از خرگوش ها نمیرند ، این کشاورز بعد از ۷ ماه چند جفت خرگوش بالغ خواهد داشت؟

۳۸ – فرمول زیر جمله انم یک دنباله را مشخص می کند.

$$u_n = \frac{\left(۱+\sqrt{۵}\right)^n - \left(۱-\sqrt{۵}\right)^n}{۲^n\sqrt{۵}}$$

الف – نشان دهید $u_۱ = ۱$ و $u_۲ = ۱$

ب –نشان دهید $u_{n+۲} = u_{n+۱} + u_n$

ج –نتیجه بگیرید که $\{u_n\}$ یک دنباله فیبو نا چی است.

۳۹ – با استفاده از نتیجه تمرین شماره ۳۸ مسائل زیر را حل کنید.

الف –ده جمله اول دنباله فیبو نا چی را پیدا کنید.

ب –کسر زیر را برای ده جمله اول حساب کنید.

$$\frac{u_{n+۱}}{u_n}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –اگر n بزرگ تر و بزرگ تر شود ، این کسر به چه عددی نزدیک می شود؟ این عدد را **عدد طلایی** می نامند.

پاسخ تمرینات ۱۲.۱

پنج جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

۱) $\{n\}$

۱, ۲, ۳, ۴, ۵

۲) $\left\{n^{۲}+۱\right\}$

۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ۲۶

۳) $\left\{\frac{n}{n+۲}\right\}$

$\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۵}, \frac{۲}{۳}, \frac{۷}{۷}$

۴) $\left\{\frac{۲n+۱}{۲n}\right\}$

$\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۴}, \frac{۷}{۶}, \frac{۹}{۸}, \frac{۱۱}{۱۰}$

۵) $\left\{(-۱)^{n+۱}n^{۲}\right\}$

۱, –۴ ،۹، – ۲۵،۱۶

دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $\left\{(-۱)^{n-۱}\left(\frac{n}{۲n-۱}\right)\right\}$

$$۱ -\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۷},\frac{۵}{۹}$$

۷) $\left\{\frac{(-۱)^{n}}{(n+۱)(n+۲)}\right\}$

$$-\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۱۲},-\frac{۱}{۲۰},\frac{۱}{۳۰},-\frac{۱}{۴۲}$$

در تمرینات زیر الگو ها ادامه دارند. جمله انم دنباله ای که طرح آن داده شده بنویسید.

۸) $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\dots$

$$a_n=\frac{n}{n+۱}$$

۹) $\frac{۱}{۱*۲},\frac{۱}{۲*۳},\frac{۱}{۳*۴},\frac{۱}{۴*۵},\dots$

$$a_n=\frac{۱}{n(n+۱)}$$

۱۰) $۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots$

$$a_n=\frac{۱}{n^{n-۱}}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $\frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۹}, \frac{۸}{۲۷}, \frac{۱۶}{۸۱}, \ldots$

$$a_n = \left(\frac{۲}{۳}\right)^n$$

۱۲) $۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱ \ldots$

$$a_n = (-۱)^{n+۱}$$

۱۳) $۱, \frac{۱}{۲}, ۳, \frac{۱}{۴}, ۵, \frac{۱}{۶}, ۷, \frac{۱}{۸}, \ldots$

$$a_n = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \frac{۱}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

در تمرینات زیر یک دنباله به طور باز گشتی مشخص شده. پنج جمله اول آنرا بنویسید.

۱۴) $a_۱ = ۲; \qquad a_n = ۳ + a_{n-۱}$

$$۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴$$

۱۵) $a_۱ = ۳; \qquad a_n = ۴ - a_{n-۱}$

$$۳, ۱, ۳, ۱, ۳$$

۱۶) $a_۱ = -۲; \qquad a_n = n + a_{n-۱}$

$$-۲, ۰, ۳, ۷, ۱۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷) $a_۱ = ۱; \qquad a_n = n - a_{n-۱}$

۱, ۱, ۲, ۲, ۳

۱۸) $a_۱ = ۵ \qquad a_n = ۲a_{n-۱}$

۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, ۸۰

۱۹) $a_۱ = ۲ \qquad a_n = -a_{n-۱}$

۲, −۲, ۲, −۲, ۲

۲۰) $a_۱ = ۱; \quad a_۲ = ۲; \quad a_n = a_{n-۱} * a_{n-۲}$

۱, ۲, ۲, ۴, ۸

مجموع هر یک از دنباله ها را پیدا کنید.

۲۱) $\sum_{k=۱}^{۱۰} ۵ = ۵(۱۰) = ۵۰$

۲۲) $\sum_{k=۱}^{۲۰} ۸ = ۸(۲۰) = ۱۶۰$

۲۳) $\sum_{k=۱}^{۴} (-k) = (-۱) + (-۲) + (-۳) + (-۴) = -۱۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۴) $\sum_{k=۱}^{۵}(۵k+۳)=\sum_{k=۱}^{۵}۵k+\sum_{k=۱}^{۵}۳=۵(۱)+۵(۲)+۵(۳)+۵(۴)+۵(۳)+۳(۵)=۹۰$

۲۵) $\sum_{k=۱}^{۳}\left(k^{۲}+۴\right)=\sum_{k=۱}^{۳}k^{۲}+\sum_{k=۱}^{۳}۴=\frac{۳(۳+۱)(۲*۳+۱)}{۶}+۴(۳)=\frac{۸۴}{۶}+۱۲=۲۶$

۲۶) $\sum_{k=۱}^{۴}\left(k^{۳}-۱\right)=\sum_{k=۱}^{۴}k^{۳}-\sum_{k=۱}^{۴}۱=\left(\frac{۴(۴+۱)}{۲}\right)^{۲}-(۱)^{۴}=۱۰۰-۴=۹۶$

۲۷) $\sum_{k=۱}^{n}(k+۲)\sum_{k=۱}^{n}k+\sum_{k=۱}^{n}۲=۳+۴+۵+\cdots+(n+۲)$

۲۸) $\sum_{k=۱}^{n}\frac{k^{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}+۲+\frac{۹}{۲}+\cdots+\frac{n^{۲}}{۲}$

۲۹) $\sum_{k=۱}^{n}(k+۱)^{۲}=۴+۹+۱۶+\cdots+(n+۱)^{۲}$

۳۰) $\sum_{k=۰}^{n-۱}\frac{۱}{۳^{k+۱}}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots+\frac{۱}{۳^{n}}$

هر یک از جمع های زیر را با استفاده از نماد جمع بنویسید.

۳۱) $۱+۲+۳+\cdots+۲۰=\sum_{k=۱}^{۲۰}k$

۳۲) $۱^{۳}+۲^{۳}+۳^{۳}+\cdots+۸^{۳}=\sum_{k=۱}^{۸}k^{۳}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۳) $$\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}+\cdots+\frac{۱۳}{۱۳+۱}=\sum_{k=۱}^{۱۳}\frac{k}{k+۱}$$

۳۴) $$۱+۳+۵+۷+\cdots+[۲(۱۲)-۱]=\sum_{k=۱}^{۱۲}(۲k-۱)$$

۳۵) $$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۲۷}+\cdots+(-۱)^{۶}\left(\frac{۱}{۳^{۶}}\right)=\sum_{k=۰}^{۶}(-۱)^{k}\left(\frac{۱}{۳^{k}}\right)$$

۳۶ – آرش مبلغ سه هزار تومان به بانک بدهکار است. بانک هر ماه ۱% مانده پرداخت نشده را به عنوان سود محاسبه و به مانده اضافه می کند. آرش می تواند ماهیانه ۱۰۰ تومان به بانک بپردازد. مانده حساب او پس از پرداخت هر صد تومان مطابق دنباله باز گشتی زیر تعریف می شود.

$$b_{۰}=۳۰۰۰\text{،}\qquad b_{n}=۱/۰۱b_{n-۱}-۱۰۰$$

مانده حساب آرش را بعد از پرداخت اولین صد تومان را پیدا کنید.

پاسخ

$$b_{۱}=(۱/۰۱)(۳۰۰۰)-۱۰۰=۲۹۳۰$$

۳۷ – کشاورزی یک جفت خرگوش بالغ دارد که هر ماه یک جفت خرگوش (یک نر و یک ماده)تولید می کنند. فرض کنید که خر گوش ها یک ماهه بالغ می شوند و بعد از دو ماه یک جفت خرگوش (یک نر و یک ماده)تولید می کنند .

اگر فرض کنیم هیچ یک از خرگوش ها نمیرند ، این کشاورز بعد از ۷ ماه چند جفت خرگوش بالغ خواهد داشت؟

پاسخ

اگر R نماینده یک خرگوش بالغ باشد و r نماینده یک خرگوش نا بالغ باشد

ماه صفر یک جفت خرگوش بالغ RR

ماه اول خرگوش های بالغ اولیه دو خرگوش نا بالغ تولید می کنند. (از راست به چپ بخوانید.)

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$rr \quad RR$$

ماه دوم خرگوش های بالغ اولیه دو خرگوش نا بالغ تولید می کنند و خر گوش های نا بالغ ماه اول ، بالغ می شوند

$$RR \quad rr \quad RR$$

ماه سوم دو جفت خرگوش بالغ ماه دوم دو جفت خرگوش نا بالغ تولید می کنند و یک زوج نا بالغ ، بالغ میشوند.

$$rr \quad RR \quad RR \quad rr \quad RR$$

اگر به طرح بالا توجه کنید متوجه میشوید که

$$a_n = a_{n-۲} + a_{n-۱}$$

پس

$$a_۰ = ۱$$

$$a_۱ = ۱$$

$$a_۲ = a_۰ + a_۱ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$a_۳ = a_۱ + a_۲ = ۱ + ۲ = ۳$$

$$a_۴ = a_۲ + a_۳ = ۲ + ۳ = ۵$$

$$a_۵ = a_۳ + a_۴ = ۳ + ۵ = ۸$$

$$a_۶ = a_۴ + a_۵ = ۵ + ۸ = ۱۳$$

$$a_۷ = a_۵ + a_۶ = ۸ + ۱۳ = ۲۱$$

۳۸ – فرمول زیر جمله انم یک دنباله را مشخص می کند.

$$u_n = \frac{\left(۱ + \sqrt{۵}\right)^n - \left(۱ - \sqrt{۵}\right)^n}{۲^n \sqrt{۵}}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

الف – نشان دهید $u_۱ = ۱$ و $u_۲ = ۱$

پاسخ

$$u_۱ = \frac{\left(۱+\sqrt{۵}\right)^۱ - \left(۱-\sqrt{۵}\right)^۱}{۲^۱\sqrt{۵}} = \frac{۱+\sqrt{۵}-۱+\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}} = ۱$$

$$u_۲ = \frac{\left(۱+\sqrt{۵}\right)^۲ - \left(۱-\sqrt{۵}\right)^۲}{۲^۲\sqrt{۵}} = \frac{\left(۱+\sqrt{۵}+۱-\sqrt{۵}\right)\left(۱+\sqrt{۵}-۱+\sqrt{۵}\right)}{۴\sqrt{۵}}$$

$$= \frac{۲\left(۲\sqrt{۵}\right)}{۴\sqrt{۵}} = \frac{۴\sqrt{۵}}{۴\sqrt{۵}} = ۱$$

ب –نشان دهید $u_{n+۲} = u_{n+۱} + u_n$

پاسخ

فرض می کنیم $A = ۱+\sqrt{۵}$ و $B = ۱-\sqrt{۵}$ باشد.

$$u_{n+۲} = \frac{A^{n+۲} - B^{n+۲}}{۲^{n+۲}\sqrt{۵}}$$

$$= \frac{A^۲ * A^n - B^۲ * B^n}{۲^{n+۲}\sqrt{۵}}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$=\frac{\left(۱+\sqrt{۵}\right)^{۲}*A^{n}-\left(۱-\sqrt{۵}\right)^{۲}*B^{n}}{۲^{n+۲}\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{\left(۶+۲\sqrt{۵}\right)*A^{n}-\left(۶-۲\sqrt{۵}\right)*B^{n}}{۲^{n+۲}\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{\left(۳+\sqrt{۵}\right)*A^{n}-\left(۳-\sqrt{۵}\right)B^{n}}{۲^{n+۱}\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{۳A^{n}+A^{n}\sqrt{۵}-\left(۳B^{n}-B^{n}\sqrt{۵}\right)}{۲^{n+۱}\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{۲A^{n}+A^{n}+A^{n}\sqrt{۵}-\left(۲B^{n}+B^{n}-B^{n}\sqrt{۵}\right)}{۲^{n+۱}\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{۲A^{n}+\left(۱+\sqrt{۵}\right)A^{n}-۲B^{n}-\left(۱-\sqrt{۵}\right)B^{n}}{۲^{n+۱}\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{\left(۱+\sqrt{۵}\right)A^{n}-\left(۱-\sqrt{۵}\right)B^{n}+۲A^{n}-۲B^{n}}{۲^{n+۱}\sqrt{۵}}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$= \frac{AA^n - BB^n}{۲^{n+۱}\sqrt{۵}} + \frac{۲A^n - ۲B^n}{۲^{n+۱}\sqrt{۵}}$$

$$= \frac{A^{n+۱} - B^{n+۱}}{۲^{n+۱}\sqrt{۵}} + \frac{A^n - B^n}{۲^n\sqrt{۵}}$$

$$= u_{n+۱} + u_n$$

ج –نتیجه بگیرید که $\{u_n\}$ یک دنباله فیبو نا چی است.

پاسخ

این یک دنباله فیبو نا چی است. زیرا $u_۱ = ۱ = u_۲$ و $u_{n+۲} = u_{n+۱} + u_n$

۳۹ – با استفاده از نتیجه تمرین شماره ۳۸ مسائل زیر را حل کنید.

الف –ده جمله اول دنباله فیبو نا چی را پیدا کنید.

پاسخ

$$۱, ۱, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹$$

ب –کسر زیر را برای ده جمله اول حساب کنید.

$$\frac{u_{n+۱}}{u_n}$$

پاسخ

$$۱, ۳, \frac{۵}{۳}, \frac{۸}{۵}, \frac{۱۳}{۸}, \frac{۲۱}{۱۳}, \frac{۳۴}{۲۱}, \frac{۵۵}{۳۴}, \frac{۸۹}{۵۵}$$

ج –اگر n بزرگ تر و بزرگ تر شود ، این کسر به چه عددی نزدیک می شود؟ این عدد را **عدد طلایی** می نامند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

اثبات

فرض می کنیم $u_{n+۱}=F_{n+۱}$ و $u_n=F_n$ و همچنین فرض می کنیم که :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+۱}}{F_n}=L$$

یک عدد حقیقی L

می دانیم که

$$F_{n+۱}=F_n+F_{n-۱}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+۱}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n+F_{n-۱}}{F_n}=۱+\frac{۱}{L}$$

می توان نوشت

$$۱+\frac{۱}{L}=L\leftrightarrow L^۲-L-۱=۰$$

معادله $L^۲-L-۱=۰$ را حل می کنیم.

$$L=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۴}}{۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

اما ، چون مقدار مثبت را می خواهیم ، پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲.۲ -دنباله های حسابی Arithmetic Sequences

وقتی که تفاضل بین جمله های متوالی یک دنباله ، همیشه یک عدد است ، آن دنباله را **حسابی Arithmetic**می نامند.

یک دنباله حسابی را می توان بطور برگشتی بیان کرد. مثلا

$$\boldsymbol{a_۱ = a} \text{ ، } \quad \boldsymbol{a_n = a_{n-۱} + d} \qquad (۱)$$

در فرمول بالا a و d اعداد حقیقی هستند. عدد a جمله اول است ، و عدد d **تفاضل مشترک Common Difference** نامیده می شود.

جمله های یک دنباله حسابی با اولین جمله a_n و تفاضل مشترک d به صورت زیر خواهد بود.

$$a\,, \qquad a+d, \qquad a+۲d\,, \qquad a+۳d, \ldots$$

مثال ۱ – تشخیص آیا یک دنباله ، حسابی است Determining If a sequence Is Arithmetic

دنباله زیر یک دنبکه حسابی است.

$$۴, ۷, ۱۰, ۱۳, \ldots$$

زیرا تفاضل جمله های متوالی ۳ است. اولین جمله ۴ است و تفاضل مشترک ۳ است.

مثال ۲ –

نشان دهید که دنباله زیر حسابی است و اولین جمله و تفاضل مشترک را پیدا کنید.

$$\{s_n\} = \{۳n + ۵\}$$

پاسخ

اولین جمله $a_۱ = ۳ * ۱ + ۵ = ۸$ است ودومین جمله $a_۲ = ۳ * ۲ + ۵ = ۱۱$

جمله انم آن و جمله قبل از جمله انم مطابق زیر است.

$$s_n = ۳n + ۵ \quad \text{و} \quad s_{n-۱} = ۳(n-۱) + ۵ = ۳n + ۲$$

تفاضل آنها هم میشود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$a_۲ - a_۱ = ۱۱ - ۸ = ۳$$

$$s_n - s_{n-۱} = ۳n + ۵ - (۳n + ۲) = ۵ - ۲ = ۳$$

پس چون تفاضل دو جمله متوالی تک عدد ثابت ازت ، پس دنباله حسابی است و تفاضل مشترک $d = ۳$ است.

مثال ۳

نشان دهید که $\{t_n\} = \{۴ - n\}$ یک دنباله حسابی است. اولین جمله و تفاضل مشترک را پیدا کنید.

پاسخ

$$a_۱ = ۴ - ۱ = ۳$$

$$a_۲ = ۴ - ۲ = ۲$$

$$a_n = ۴ - n$$

$$a_{n-۱} = ۴ - (n - ۱) = ۵ - n$$

$$a_۲ - a_۱ = ۲ - ۳ = -۱$$

$$a_n - a_{n-۱} = ۴ - n - (۵ - n) = ۴ - ۵ = -۱$$

تفاضل دو جمله متوالی یک عدد ثابت است ، پس یک دنباله حسابی است و تفاضل مشترک $d = -۱$ است.

فرض کنید a اولین جمله یک دنباله حسابی است که تفاضل مشترک آن d است. می خواهیم یک فرمول برای جمله انم پیدا کنیم. برای این که یک الگو بدست آوریم ، چند جمله اول را می نویسیم.

$$a_۱ = a$$

$$a_۲ = a_۱ + d = a + (۱ * d)$$

$$a_۳ = a_۲ + d = (a + d) + d = a + ۲d$$

$$a_۴ = a_۳ + d = (a + ۲d) + d = a + ۳d$$

$$a_۵ = a_۴ + d = (a + ۳d) + d = a + ۴d$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-۱} + d = [a + (n-۲)d] + d = a + (n-۱)d$$

پس نتیجه می گیریم که

قضیه جمله انم یک دنباله حسابی Theorem nth Term of an Arithmetic Sequence

برای یک دنباله حسابی $\{a_n\}$ که اولین جمله اش a و تفاضل مشترکش d است ، جمله انم آن طبق فرمول زیر بدست می آید.

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-۱)d} \qquad (۲)$$

مثال ۴- پیدا کردن یک جمله خاص یک دنباله حسابی

Finding a Particular Term of an Arithmetic Sequence

سیزدهمین جمله دنباله زیر را پیدا کنید.

$$۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, \ldots$$

پاسخ

اولین جمله این دنباله حسابی $a = ۲$ است و تفاضل مشترک ۴ است. پس جمله انم طبق فرمول (۲) مطابق زیر است.

$$a_n = ۲ + (n-۱)۴$$

و لذا ، سیزدهمین جمله می شود

$$a_{۱۳} = ۲ + ۱۲ * ۴ = ۵۰$$

مثال ۵ – پیدا کردن یک فرمول باز گشتی برای یک دنباله حسابی

Finding a Recursive Formula for an Arithmetic Sequence

هشتمین جمله یک دنباله حسابی ۷۵ است ، بیستمین جمله ۳۹ است. اولین جمله و تفاضل مشترک را پیدا کنید و یک فرمول باز گشتی برای این دنباله بنویسید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

طبق فرمول (۲) می دانیم که $a_n = a + (n-۱)d$ پس می توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} a_۸ = a + ۷d = ۷۵ \\ a_{۲۰} = a + ۱۹d = ۳۹ \end{cases}$$

یک سیستم دو معادله خطی داریم با متغیر های d و a آنرا حل می کنیم.

$$\begin{cases} a + ۷d = ۷۵ \\ a + ۱۹d = ۳۹ \end{cases}$$

$$-۱۲ = ۳۶$$

$$d = -۳$$

پس

$$a = ۷۵ - ۷d = ۷۵ - ۷(-۳) = ۹۶$$

اولین جمله $a = ۹۶$ و $d = -۳$ لذا فرمول باز گشتی مطابق زیر است.

$$a_۱ = ۹۶ \qquad a_n = a_{n-۱} - ۳$$

بر اساس فرمول (۲) یک فرمول برای جمله انم دنباله $\{a_n\}$ مطابق ذیل است.

$$a_n = a + (n-۱)d = ۹۶ + (n-۱)(-۳) = ۹۹ - ۳n$$

جمع چند جمله اول یک دنباله حسابی Adding the First n Terms of an Arithmetic Sequence

قضیه –اگر $\{a_n\}$ یک دنباله حسابی باشد با a به عنوان اولین جمله و d تفاضل مشترک ، مجموع چند جمله اول $\{a_n\}$ طبق فرمول زیر بدست می آید.

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{۲}[۲a + (n-۱)d] = \frac{n}{۲}(a + a_n)} \qquad (۳)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

اثبات -

$$S_n = a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_n$$

$$= a + (a + d) + (a + ۲d) + (a + ۳d) + \cdots + [a + (n - ۱)d]$$

$$= \underbrace{(a + a + a + \cdots + a)}_{n\ terms} + [d + +۲d + \cdots + (n - ۱)d]$$

$$= na + d[۱ + ۲ + \cdots + (n - ۱)]$$

$$= na + d\left[\frac{(n - ۱)n}{۲}\right] \quad \text{زیرا} \quad \sum_{k=۱}^{n} \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

$$= na + \frac{n}{۲}(n - ۱)d$$

$$= \frac{n}{۲}[۲a + (n - ۱)d]$$

$$= \frac{n}{۲}[a + a + (n - ۱)d]$$

$$= \frac{n}{۲}(a + a_n) \quad \text{زیرا} \quad a_n = a + (n - ۱)d$$

مثال ۶ – مجموع چند جمله اول دنباله $۳n + ۵$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$a = a_۱ = ۳(۱) + ۵ = ۸$$

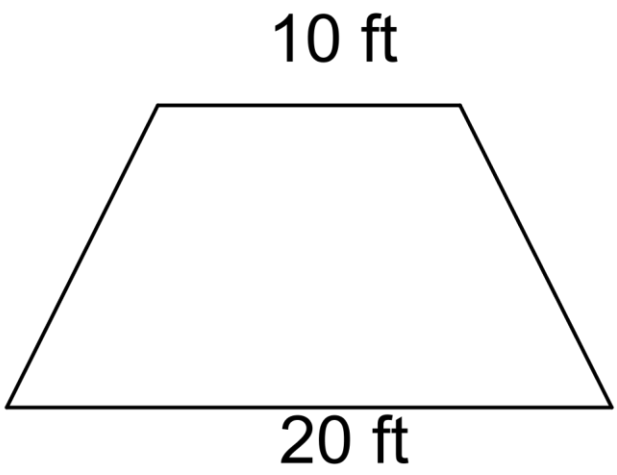
$$a_n = ۳n + ۵$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(a + a_n) = \frac{n}{۲}\left(۸ + (۳n + ۵)\right) = \frac{n}{۲}(۳n + ۱۱)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۷

یک اتاق به شکل ذوزنقه است که قاعده بزرگ تر آن ۲۰ فوت و قاعده کوچک تر ۱۰ فوت. می خواهیم آنرا با کاشی سرامیک فرش کنیم. کا شی ها به شک مربع هستند به اضلاع ۱۲ اینچ. از قاعده بزرگ تر شروع به چیدن کاشی ها می کنیم. ردیف های بعدی هر کدام یک کاشی کمتر از ردیف قبل می گذاریم تا تمام کف اتاق فرش شود. معین کیند چند کاشی لازم است. (هر فوت ۱۲ اینچ است)



پاسخ

واضح است که برای قاعده بزرگتر ۲۰کاشی و برای قاعده کوچک تر ۱۰کاشی لازم است. چون هر ردیف یک کاشی کمتر لازم است ، پس

$$S = ۲۰ + ۱۹ + ۱۸ + \cdots + ۱۱ + ۱۰$$

این جمع یک دنباله حسابی است با تفاضل مشترک $d = -۱$ و تعداد جمله ها که باید جمع شوند $n = ۱۱$ و اولین جمله $a = ۲۰$ و $a_{۱۱} = ۱۰$ پس

$$S = \frac{n}{۲}\left(a + a_{۱۱}\right) = \frac{۱۱}{۲}\left(۲۰ + ۱۰\right) = ۱۶۵$$

پس ۱۶۵ کاشی لازم است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۲.۲

در تمرینات ۷ – ۱ یک دنباله حسابی داده شده است. تفاضل مشترک را پیدا کنید و چهار جمله اول آنرا بنویسید.

۱) $\{n+۴\}$

۲) $\{n-۵\}$

۳) $\{۲n-۵\}$

۴) $\{۴-۲n\}$

۵) $\left\{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}n\right\}$

۶) $\left\{ln۳^n\right\}$

۷) $\left\{e^{\ln(n)}\right\}$

در تمرینات ۱۲ – ۸ اولین جمله و تفاضل مشترک یک دنباله حسابی داده شده است ، فرمولی برای جمله انم بنویسید و جمله پنجم را پیدا کنید.

۸) $a=۲; d=۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $a = -۲; d = ۴$

۱۰) $a = ۵; d = -۳$

۱۱) $a = \sqrt{۲}; d = \sqrt{۲}$

۱۲) $a = ۱; d = -\frac{۱}{۳}$

در تمرینات ۱۸ – ۱۳ جمله ای را که مشخص شده پیدا کنید.

۱۳) جمله دوازدهم $۲, ۴, ۶, \ldots$

۱۴) جمله هشتم $-۱, ۱, ۳, \ldots$

۱۵) جمله دهم $۱, -۲, -۵, \ldots$

۱۶) جمله نهم $۵, ۰, -۵, \ldots$

۱۷) جمله هشتم $a, a+b, a+۲b, \ldots$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸) $۲\sqrt{۵}, ۴\sqrt{۵}, ۶\sqrt{۵}, \ldots$ جمله هفتم

اولین جمله و تفاضل مشترک دنباله های حسابی زیر را پید کنید و یک فرمول بزگشتی برای آن دنباله بنویسید.

۱۹ – جمله هشتم ۸ است و جمله بیستم ۴۴ است.

۲۰ –

جمله چهارم ۳ است و جمله بیستم ۳۵ است.

۲۱ -جمله نهم ۵– است و جمله پانزدهم ۳۱ است.

۲۲ – جمله هشتم ۴ است و جمله هیجدهم ۹۶– است.

در تمرینات ۲۹ – ۲۳ جمع جملات را پیدا کنید.

۲۳) $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱)$

۲۴) $۲ + ۴ + ۶ + \cdots + ۲n$

۲۵) $۷ + ۱۲ + ۱۷ + \cdots + (۲ + ۵n)$

۲۶) $-۱ + ۳ + ۷ + \cdots + (۴n - ۵)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۷ – عددی برای x پیدا کنید به طوری که $x + ۳, ۲x + ۱, ۵x + ۲$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند.(از چپ به راست بخوانید)

۲۸– در یک سالن سخنرانی ، ردیف اول ۲۵ صندلی دارد. تعداد ردیف ها ۳۰ است. هر ردیف یک صندلی از ردیف قبلی بیشتر دارد. روی هم رفته در این سالن چند صندلی وجود دارد؟

۲۹ – یک گوشه زمین فوتبال ، در اولین ردیف ۱۵ صندلی دارد و روی هم رفته ۴۰ ردیف دراین گوشه هست. هر ردیف ، دو صندلی از ردیف قبلی بیشتر دارد. مجموعا چند صندلی در این گوشه موجود است؟

۳۰

میخواهیم یک پلکان آجری بسازیم که دارای ۳۰ پله است. برای پله تحتانی ۱۰۰ آجر لازم است. هر پله دو آجر کمتر از پله قبلی لازم دارد.

الف –پله بالایی چند آجر لازم دارد؟

ب –روی هم رفته چند آجر برای ساختن این پلکان لازم است؟

پاسخ تمرینات ۱۲.۲

در تمرینات ۷ – ۱ یک دنباله حسابی داده شده است. تفاضل مشترک را پیدا کنید و چهار جمله اول آنرا بنویسید.

۱) $\{n+۴\}$

$$a_۱ = ۱ + ۴ = ۵$$

$$a_۲ = ۲ + ۴ = ۶$$

$$d = a_۲ - a_۱ = ۶ - ۵ = ۱$$

$$۵, ۶, ۷, ۸$$

۲) $\{n-۵\}$

$$a_۱ = ۱ - ۵ = -۴$$

$$a_۲ = ۲ - ۵ = -۳$$

$$d = a_۲ - a_۱ = -۳ - (-۴) = ۱$$

$$-۴, -۳, -۲, -۱$$

۳) $\{۲n-۵\}$

$$a_۱ = ۲ - ۵ = -۳$$

$$a_۲ = ۴ - ۵ = -۱$$

$$d = a_۲ - a_۱ = -۱ - (-۳) = ۲$$

$$-،۳ - ۳،۱،۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $\{۴-۲n\}$

$$a_۱ = ۴-۲ = ۲$$

$$a_۲ = ۴-۴ = ۰$$

$$d = a_۲ - a_۱ = ۰ - ۲ = -۲$$

$$۲, ۰, -۲, -۴$$

۵) $\left\{\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}n\right\}$

$$a_۱ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

$$a_۲ = \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} = -\frac{۱}{۶}$$

$$d = a_۲ - a_۱ = -\frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۶} = -\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۶}, -\frac{۱}{۶}, -\frac{۱}{۲}, -\frac{۵}{۶}$$

۶) $\{ln۳^n\}$

$$a_۱ = ln۳$$

$$a_۲ = ln۳^۲ = ۲ln۳$$

$$d = a_۲ - a_۱ = ۲ln۳ - ln۳ = ۲$$

$$ln۳, ۲ln۳, ۳lm۳, ۴ln۳$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $\{e^{\ln(n)}\}$

$$a_۱ = ۱$$

$$a_۲ = e^{ln۲} = e^{log_e ۲} = ۲$$

$$d = a_۲ - a_۱ = ۲ - ۱ = ۱$$

$$۱, ۲, ۳, ۴$$

در تمرینات ۱۲ – ۸ اولین جمله و تفاضل مشترک یک دنباله حسابی داده شده است ، فرمولی برای جمله انم بنویسید و جمله پنجم را پیدا کنید.

۸) $a = ۲; d = ۳$

$$a_n = a + (n - ۱)d = ۲ + (n - ۱)۳ = ۲ + ۳n - ۳ = ۳n - ۱$$

$$a_۵ = ۱۴$$

۹) $a = -۲; d = ۴$

$$a_n = -۲ + (n - ۱)۴ = -۲ + ۴n - ۴ = ۴n - ۶$$

$$a_۵ = ۲۰ - ۶ = ۱۴$$

۱۰) $a = ۵; d = -۳$

$$a_n = ۵ + (n - ۱)(-۳) = ۵ - ۳n + ۳ = ۸ - ۳n$$

$$a_۵ = ۸ - ۳(۵) = -۷$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $a=\sqrt{۲}; d=\sqrt{۲}$

$$a_n=\sqrt{۲}+(n-۱)\sqrt{۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۲}\ n-\sqrt{۲}=\sqrt{۲}\ n$$

$$a_۵=۵\ \sqrt{۲}$$

۱۲) $a=۱; d=-\frac{۱}{۳}$

$$a_n=۱+(n-۱)\left(-\frac{۱}{۳}\right)=۱-\frac{۱}{۳}n+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}n$$

$$a_۵=\frac{۴}{۳}-\frac{۵}{۳}=-\frac{۱}{۳}$$

در تمرینات ۱۸ – ۱۳ جمله ای را که مشخص شده پیدا کنید.

۱۳) ۲, ۴, ۶, ... جمله دوازدهم

$$d=۴-۲=۲$$

$$a_{۱۲}=۲+(۱۱)۲=۲۴$$

۱۴) $-۱, ۱, ۳, ...$ جمله هشتم

$$d=۱-(-۱)=۲$$

$$a_۸=-۱+(۷)۲=۱۳$$

۱۵) $۱, -۲, -۵, ...$ جمله دهم

$$d=-۲-۱=-۳$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$a_{۱۰} = ۱ + (۹)(-۳) = -۲۶$$

۱۶) جمله نهم $۵, ۰, -۵, \ldots$

$$d = ۰ - ۵ = -۵$$

$$a_{۹} = ۵ + (۸)(-۵) = -۳۵$$

۱۷) جمله هشتم $a, a+b, a+۲b, \ldots$

$$d = b$$

$$a_{۸} = a + (۷)b = a + ۷b$$

۱۸) جمله هفتم $۲\sqrt{۵}, ۴\sqrt{۵}, ۶\sqrt{۵}, \ldots$

$$d = ۲\sqrt{۵}$$

$$a_{۷} = ۲\sqrt{۵} + ۶\left(۲\sqrt{۵}\right) = ۱۴\sqrt{۵}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

اولین جمله و تفاضل مشترک دنباله های حسابی زیر را پید کنید و یک فرمول بزگشتی برای آن دنباله بنویسید.

۱۹ – جمله هشتم ۸ است و جمله بیستم ۴۴ است.

$$\begin{cases} a_{۸} = a_{۱} + ۷d = ۸ \\ a_{۲۰} = a_{۱} + ۱۹d = ۴۴ \end{cases}$$

$$۱۲d = ۳۶$$

$$d = ۳$$

$$a_{۱} + ۷(۳) = ۸$$

$$a_{۱} = -۱۳$$

$$a_n = a_{n-۱} + ۳$$

– ۲۰

جمله چهارم ۳ است و جمله بیستم ۳۵ است.

$$\begin{cases} a_{۴} = a_{۱} + ۳d = ۳ \\ a_{۲۰} = a_{۱} + ۱۹d = ۳۵ \end{cases}$$

$$۱۶d = ۳۲$$

$$d = ۲$$

$$a_{۱} + ۶ = ۳$$

$$a_{۱} = -۳$$

$$a_n = a_{n-۱} + ۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۱ - جمله نهم ۵− است و جمله پانزدهم ۳۱ است.

$$\begin{cases} a_{۹} = a_{۱} + ۸d = -۵ \\ a_{۱۵} = a_{۱} + ۱۴d = ۳۱ \end{cases}$$

$$۶d = ۳۶$$

$$d = ۶$$

$$a_{۱} + ۸(۶) = -۵$$

$$a_{۱} = -۵۳$$

$$a_n = a_{n-۱} + ۶$$

۲۲ – جمله هشتم ۴ است و جمله هیجدهم ۹۶− است.

$$a_{۸} = a_{۱} + ۷d = ۴$$

$$a_{۱۸} = a_{۱} + ۱۷d = -۹۶$$

$$۱۰d = -۱۰۰$$

$$d = -۱۰$$

$$a_{۱} + ۷(-۱۰) = ۴$$

$$a_{۱} = ۷۴$$

$$a_n = a_{n-۱} - ۱۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات ۲۹ – ۲۳ جمع جملات را پیدا کنید.

۲۳) $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{n}{۲}(۱ + ۲n - ۱) = \frac{n}{۲} + n^۲ - \frac{n}{۲} = n^۲$

۲۴) $۲ + ۴ + ۶ + \cdots + ۲n = \frac{n}{۲}(۲ + ۲n) = n + n^۲ = n(n + ۱)$

۲۵) $۷ + ۱۲ + ۱۷ + \cdots + (۲ + ۵n) = \frac{n}{۲}(۷ + ۲ + ۵n) = \frac{n}{۲}(۹ + ۵n)$

۲۶) $-۱ + ۳ + ۷ + \cdots + (۴n - ۵) = \frac{n}{۲}(-۱ + ۴n - ۵) = \frac{n}{۲}(۴n - ۶) = n(۲n - ۳)$

۲۷ – عددی برای x پیدا کنید به طوری که $x + ۳, ۲x + ۱, ۵x + ۲$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند.(از چپ به راست بخوانید)

$$d = ۲x + ۱ - (x + ۳) = x - ۲$$

$$۲x + ۱ + (x - ۲) = ۵x + ۲$$

$$۳x - ۱ = ۵x + ۲$$

$$۲x = -۳$$

$$x = -\frac{۳}{۲}$$

۲۸– در یک سالن سخنرانی ، ردیف اول ۲۵ صندلی دارد. تعداد ردیف ها ۳۰ است. هر ردیف یک صندلی از ردیف قبلی بیشتر دارد. روی هم رفته در این سالن چند صندلی وجود دارد؟

$$d = ۱, n = ۳۰, a_۱ = ۲۵$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$a_{۳۰} = a_{۱} + (۳۰ - ۱)d = ۲۵ + ۲۹ = ۵۴$$

$$S = \frac{۳۰}{۲}(۲۵ + ۵۴) = ۱۱۸۵$$

۲۹ – یک گوشه زمین فوتبال ، در اولین ردیف ۱۵ صندلی دارد و روی هم رفته ۴۰ ردیف در این گوشه هست. هر ردیف ، دو صندلی از ردیف قبلی بیشتر دارد. مجموعا چند صندلی در این گوشه موجود است؟

$$a_{۱} = ۱۵, d = ۲, n = ۴۰$$

$$a_{۴۰} = ۱۵ + ۳۹(۲) = ۹۳$$

$$S = \frac{۴۰}{۲}(۱۵ + ۹۳) = ۲۱۶۰ \text{ صندلی}$$

۳۰

میخواهیم یک پلکان آجری بسازیم که دارای ۳۰ پله است. برای پله تحتانی ۱۰۰ آجر لازم است. هر پله دو آجر کمتر از پله قبلی لازم دارد.

الف –پله بالایی چند آجر لازم دارد؟

$$a_{۱} = ۱۰۰, n = ۳۰, d = -۲$$

$$a_{۳۰} = ۱۰۰ + ۲۹(-۲) = ۴۲ \text{ آجر}$$

ب –روی هم رفته چند آجر برای ساختن این پلکان لازم است؟

$$S = \frac{۳۰}{۲}(۱۰۰ + ۴۲) = ۲۱۳۰ \text{ آجر}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲.۳ – دنباله ها و سری های هندسی Geometric Sequences and Series

اگر در یک دنباله ، نسبت جمله های متوالی یک عدد ثابت غیر از صفر باشد ، آن دنباله را **دنباله هندسی** می نامند.

یک **دنباله هدسی A Geometric Sequence** را می توان به صورت **برگشتی Recursively** به صورت زیر بیان کرد.

$$\boldsymbol{a_۱ = a, \qquad \frac{a_n}{a_{n-۱}} = r}$$

و یا

$$\boldsymbol{a_۱ = a, \qquad a_n = r a_{n-۱}} \qquad (۱)$$

در فرمول بالا a و $r \neq ۰$ اعداد حقیقی هستند. عدد a اولین جمله است و r **نسبت مشترک Common Ratio** جمله های یک دنباله هندسی که اولین جمله آن a و نسبت مشترک r مطابق الگوی زیر است.

$$a, ar, ar^۲, ar^۳, \ldots$$

مثال ۱ –

دنباله

$$۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ۱۶۲, \ldots$$

یک دنباله هندسی است زیرا نسبت جمله های متوالی ۳ است.

$$\frac{۶}{۲} = \frac{۱۸}{۶} = \frac{۵۴}{۱۸} = \frac{۱۶۲}{۵۴} = ۳$$

مثال ۲ - تشخیص آیا یک دنباله ، هندسی است. Determining if a Sequence is Geometric

نشان دهید که دنباله زیر ، یک دنباله هندسی است و اولین جمله و نسبت مشترک را پیدا کنید.

$$s_n = ۲^{-n}$$

پاسخ

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$s_۱ = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$s_n = ۲^{-n}$$

$$s_{n-۱} = ۲^{-(n-۱)}$$

$$r = \frac{s_n}{s_{n-۱}} = \frac{۲^{-n}}{۲^{-(n-۱)}} = ۲^{-n+n-۱} = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$$

چون نسبت جمله های متوالی ثابت است ، پس دنباله $\{s_n\}$ یک دنباله حسابی است.

مثال ۳ - نشان دهید که دنباله زیر ، یک دنباله هندسی است و اولین جمله و نسبت مشترک را پیدا کنید.

$$\{t_n\} = \left\{۴^n\right\}$$

پاسخ

$$t_۱ = ۴^۱ = ۴$$

$$t_n = ۴^n$$

$$t_{n-۱} = ۴^{n-۱}$$

$$\frac{t_n}{t_{n-۱}} = \frac{۴^n}{۴^{n-۱}} = ۴^{n-(n-۱)} = ۴$$

پس دنباله $\{t_n\}$ یک دنباله هندسی است.

فرض می کنیم a اولین جمله یک دنباله هندسی باشد و $r \neq ۰$ نسبت مشترک. می خواهیم فرمولی برای جمله انم پیدا کنیم.

$$a_۱ = ^۱a = ar^۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$a_{۲} = ra_{۱} = ar^{۱}$$

$$a_{۳} = ra_{۲} = r(ar) = ar^{۲}$$

$$a_{۴} = ra_{۳} = r\left(ar^{۲}\right) = ar^{۳}$$

$$a_{۵} = ra_{۴} = r\left(ar^{۳}\right) = ar^{۴}$$

$$\vdots$$

$$a_n = ra_{n-۱} = r\left(ar^{n-۲}\right) = ar^{n-۱}$$

از الگویی بالا ، قضیه زیر نتیجه می شود.

قضیه جمله انم یک دنباله هندسی Theorem nth Term of a Geometric Sequence

برای دنباله هندسی $\{a_n\}$ که اولین جمله آن a است و نسبت مشترک r پس جمله انم از فرمول زیر بدست می آید.

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-۱}, r \neq ۰} \qquad (۲)$$

مثال ۴ – پیدا کردن یک جمله مشخص از یک دنباله هدندسی

Finding a Particular Term of a Geometric Sequence

الف –نهمین جمله دنباله هندسی زیر را پیدا کنید.

$$۱۰, ۹, \frac{۸۱}{۱۰}, \frac{۷۲۹}{۱۰۰}, \ldots$$

ب –یک فرمول باز گشتی برای این دنباله پیدا کنید.

پاسخ

$$a = ۱۰$$

$$r = \frac{۹}{۱۰} = \frac{\frac{۸۱}{۱۰}}{۹} = \frac{\frac{۷۲۹}{۱۰۰}}{\frac{۸۱}{۱۰}} = \frac{۹}{۱۰}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پس یک دنباله هندسی داریم.

$$a_n = ۱۰\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-۱}$$

نهمین جمله

$$a_۹ = ۱۰\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۸} = ۴/۳۰۴۶۷۲۱$$

ب –ملاحظه می کنید که اولین جمله ۱۰ و نسبت مشترک $r = \frac{۹}{۱۰}$ پس فرمول باز گشتی

$$a_n = \frac{۹}{۱۰}a_{n-۱}$$

جمع کردن چند جمله اول یک دنباله هندسی

Adding the First n Terms of a Geometric Sequence

قضیه –اگر $\{a_n\}$ یک دنباله هندسی باشد ، با اولین جمله a و نسبت مشترک $r \neq ۰, r \neq ۱$ مجموع چند جمله اول آن یعنی S_n یبق فرمول زیر بدست می آید.

$$\boldsymbol{S_n = a\frac{۱-r^n}{۱-r}، \quad r \neq ۰, r \neq ۱} \qquad (۳)$$

اثبات

$$S_n = a + ar + ar^۲ + ar^۳ + \cdots + ar^{n-۱} \qquad (۴)$$

$$rS_n = ar + ar^۲ + ar^۳ + ar^۴ + \cdots + ar^n \qquad (۵)$$

تساوی (۵) را از (۴) کم می کنیم.

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(۱-r)S_n = a(۱-r^n)$$

$$S_n = a\frac{۱-r^n}{۱-r}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۵ – جمع چند جمله اول دنباله هندسی زیر را پیدا کنید.

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

پاسخ

$$S_n=\sum_{k=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۲}\right)^k=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n}{۱-\frac{۱}{۲}}\right]$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n}{\frac{۱}{۲}}\right]$$

$$=۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

سری هندسی Geometric Series

جمع بی نهایت

$$a+ar+ar^۲+\cdots=ar^{n-۱}+\cdots$$

با اولین جمله a و نسبت مشترک r را **سری هندسی نا متناهی و یا بی نهایت Infinite Geometric Series** می نامند. و به صورت زیر بیان می شود.

$$\sum_{k=۱}^{\infty}ar^{k-۱}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

بر اساس فرمول (۳) جمع چند جمله اول یک سری هندسی می شود.

$$S_n = a\frac{۱ - r^n}{۱ - r} = \frac{a}{۱ - r} - \frac{ar^n}{۱ - r} \qquad (۶)$$

اگر این جمع متناهی S_n به یک عدد مانند L نزدیک شود ، هنگامی که $n \to \infty$ پس ما L را **جمع سری هندسی نا متناهی Sum of the Infinite Geometric Series** می نامیم و می نویسیم

$$L = \sum_{k=۱}^{\infty} ar^{k-۱}$$

قضیه جمع یک سری هندسی نا متناهی Sum of an Infinite Geometric Series Theorem

اگر $|r| < ۱$ باشد ، جمع سری هندسی نا متناهی

$$\sum_{k=۱}^{\infty} ar^{k-۱}$$

می شود

$$\sum_{k=۱}^{\infty} ar^{k-۱} = \frac{a}{۱ - r}$$

اثبات –چون $|r| < ۱$ پس هنگامی که $n \to \infty$ انوقت $|r^n|$ به صفر نزدیک می شود ، لذا بر اساس فرمول (۶) جمع S_n به $\frac{a}{۱-r}$ نزدیک می شود ، هنگامی که $n \to \infty$

مثال ۶ – پیدا کردن جمع یک سری هندسی Finding the Sum of a Geometric Series

حاصل جمع سری هندسی زیر را پیدا کنید.

$$۲ + \frac{۴}{۳} + \frac{۸}{۹} + \cdots$$

پاسخ

اولین جمله $a = ۲$ و نسبت مشترک

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$r = \frac{\frac{۴}{۳}}{۲} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

چون $|r| < ۱$ است پس

$$۲ + \frac{۴}{۳} + \frac{۸}{۹} + \cdots = \frac{۲}{۱ - \frac{۲}{۳}} = ۶$$

مثال ۷ – ارقام اعشاری مکرر Repeating Decimals

نشان دهید که ارقام اعشاری مکرر ... ۰/ ۹۹۹ مساوی یک است.

پاسخ

$$۰/ ۹۹۹ \ldots = \frac{۹}{۱۰} + \frac{۹}{۱۰۰} + \frac{۹}{۱۰۰۰} + \cdots$$

ارقام اعشاری ، سری هندسی است با اولین جمله $a = \frac{۹}{۱۰}$ و نسبت مشترک $r = \frac{۱}{۱۰}$ با استفاده از فرمول (۷) خواهیم داشت.

$$۰/ ۹۹۹ \ldots = \frac{\frac{۹}{۱۰}}{۱ - \frac{۱}{۱۰}} = ۱$$

مثال ۸ -نوسان پاندول Pendulum Swings

در آغاز ، یک پاندول در امتداد یک کمان به طول ۱۸ اینچ نوسان می کند. در هر نوسان متوالی ، طول کمان ۰/ ۹۸ طول نوسان قبلی است.

الف –طول کمان بعد از ۱۰ نوسان چقدر است؟

ب –در کدام نوسان ، طول کمان برای اولین مرتبه ، به کمتر از ۱۲ اینچ می رسد؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –بعد از ۱۵ نوسان ، روی هم رفته طول کمانی که پاندول نوسان کرده ، چقدر است؟

د –هنگامی که پاندول از نوسان می ایستاد ، چه طولی را پیموده است؟

پاسخ

الف –

طول اولین نوسان $a_۱ = ۱۸$ اینچ .

طول دومین نوسان $a_۲ = ۰/۹۸ = ۱۷/۶۴$ اینچ.

طول سومین نوسان $a_۳ = (۰/۹۸)(۰/۹۸)(۱۸) = \left(۰/۹۸^۲\right)(۱۸)$ اینچ.

طول کمان در دهمین نوسان طبق زیر خواهد بود.

$$\left(۰/۹۸^۹\right)(۱۸) = ۱۵/۰۰۷ \text{ اینچ}$$

ب –طول کمان در نوسان انم ، $(۰/۹۸)^{n-۱}(۱۸)$ است. بر اینکه این عبارت دقیقا ۱۲ اینچ باشد ، باید داشته باشیم

$$(۰/۹۸)^{n-۱}(۱۸) = ۱۲$$

معادله بالا را حل می کنیم.

$$(۰/۹۸)^{n-۱} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳}$$

$$n - ۱ = log_{۰/۹۸}\left(\frac{۲}{۳}\right)$$

$$n = ۱ + \frac{ln\left(\frac{۲}{۳}\right)}{ln(۰/۹۸)} \approx ۱ + ۲۰/۰۷ \approx ۲۱/۰۷$$

طول کمان در بیست و یکمین نوسان ، بیش از ۱۲ اینچ است. پس برای اولین مرتبه در نوسان بیست و دوم ، کمتر از ۱۲ اینچ خواهد بود.

ج –بعد از ۱۵ نوسان ، مجموع مسافت طی شده طبق عبارت زیر بدست می آید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$L = ۱۸ + (۰/۹۸)(۱۸) + (۰/۹۸)^{۲}(۱۸) + (۰/۹۸)^{۳}(۱۸) + \cdots + (۰/۹۸)^{۱۴}(۱۸)$$

این جمع یک دنباله هندسی است. $r = ۰/۹۸$ و $a_۱ = ۱۸$ و $n = ۱۵$

$$L = ۱۸\frac{۱ - (۰/۹۸)^{۱۵}}{۱ - ۰/۹۸} \approx ۱۸(۱۳/۰۷) \approx ۲۳۵/۲۹ \quad \text{اینچ}$$

د -وقتی که پاندل از حرکت باز می ایستد ، مجموع مسافتی که نوسان کرده مطابق زیر بدست می آید.

$$T = ۱۸ + (۰/۹۸)(۱۸) + (۰/۹۸)^{۲}(۱۸) + (۰/۹۸)^{۳}(۱۸) + \cdots$$

این یک سری هندسی نا متناهی است با $|r| = ۰/۹۸ < ۱$ پس یک سری **همگرا** **Convergent** است. پس خواهیم داشت.

$$T - \frac{a}{۱ - r} = \frac{۱۸}{۱ - ۰/۹۸} = ۹۰۰ \quad \text{اینچ}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۲.۳

در تمرینات ۵ – ۱ یک دنباله هندسی داده شده است. نسبت مشترک را پیدا کنید و چهار جمله اول را بنویسید.

۱) $\{۳^n\}$

۲) $\{(-۵)^n\}$

۳) $\left\{-۳\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right\}$

۴) $\left\{\left(\frac{۵}{۲}\right)^n\right\}$

۵) $\left\{\frac{۲^{n-۱}}{۴}\right\}$

در تمرینات ۱۲ – ۶ مشخص کنید آیا دنباله های داده شده ، حسابی یا هندسی است و یا هیچ کدام. اگر حسابی است تفاضل مشترک و اگر هندسی است نسبت مشترک را پیدا کنید.

۶) $\{n+۲\}$

۷) $\{۲n-۵\}$

۸) $\{۴n^۲\}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $\left\{۵n^{۲}+۱\right\}$

۱۰) $\left\{۳-\frac{۲}{۳}n\right\}$

۱۱) $۱,۳,۶,۱۰,\ldots$

۱۲) $۱,۱,۲,۳,۵,۸,\ldots$

در تمرینات ۱۸ – ۱۳ اولین جمله و نسبت مشترک یک دنباله هندسی داده شده است. پنجمین جمله و جمله انم آنرا پیداکنید .

۱۳) $a=۲, r-۳$

۱۴) $a=-۲, r=۴$

۱۵) $a=۵, r=-۱$

۱۶) $a=۶, r=-۲$

۱۷) $a=۰, r=\frac{۱}{۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸) $a = ۱, r = -\frac{۱}{۳}$

در تمرینات ۲۲ – ۱۹ جمله مشخص شده هر یک از دنباله های هندسی را پیدا کنید.

۱۹) هفتمین جمله $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \ldots$

۲۰) هشتمین جمله $۱, ۳, ۹, \ldots$

۲۱) نهمین جمله $۱, -۱, ۱, \ldots$

۲۲) دهمین جمله $۱, ۲, -۴, \ldots$

در تمرینات ۲۸ – ۲۳ حاصل جمع ها را پیدا کنید.

۲۳) $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \cdots$

۲۴) $۲ + \frac{۴}{۳} + \frac{۸}{۹} + \cdots$

۲۵) $۸ + ۴ + ۲ + \cdots$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۶) $۶ + ۲ + \frac{۲}{۳} + \cdots$

۲۷) $\sum_{k=۱}^{\infty} ۵\left(\frac{۱}{۴}\right)^{k-۱}$

۲۸) $\sum_{k=۱}^{\infty} ۸\left(\frac{۱}{۳}\right)^{k-۱}$

۲۹ – – برای x مقداری پیدا کنید بطوری که $x, x+۲, x+۳$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. (از چپ به راست بخوانید)

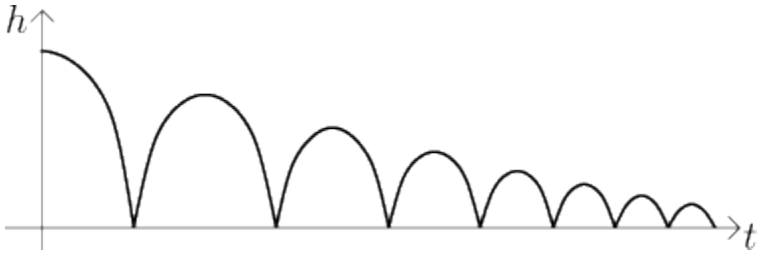
۳۰

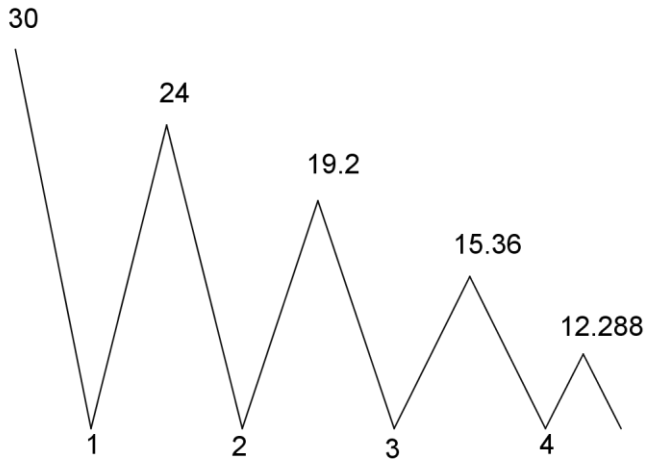
فرض کنید بتازگی استخدام شده اید با حقوق سالانه ۱۸۰۰۰ میلیون ریال . اگر سالانه ۵% به حقوق شما اضافه شود، هنگامیکه پنجمین سال را شروع می کنید ، حقوق شما چه مقدار خواهد بود؟

۳۱ – یک شرکت یک ماشین تحریر به مبلغ ۱۵۰۰۰ تومان میخرد. بمنظور پرداخت مالیات کمتر برای این ماشین ، هر سال ۱۵% از قیمت ماشین به عنوان استهلاک کم می کند. بعد از پنج سال قیمت ماشین چه مبلغ خواهد بود؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۲ – یک توپ از ارتفاع ۳۰ فوتی رها می شود. هر مرتبه که توپ به زمین برخورد می کند ، ۰/۸ ارتفاع قبلی به بالا می جهد.(یک فوت ۱۲ اینچ است)





الف –بعد از سومین بر خورد توپ به زمین ، ارتفاع توپ چقدر است؟

ب –ارتفاع توپ بعد از بر خورد انم چه قدر است؟

ج –توپ چند مرتبه باید به زمین بر خورد کند ، تا ارتفاع آن کمتر از ۶ اینچ باشد؟

د –روی هم رفته ، توپ چه مسافتی جهیده هنگامی که توپ از حرکت باز می ایستد؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۲.۳

در تمرینات ۵ – ۱ یک دنباله هندسی داده شده است. نسبت مشترک را پیدا کنید و چهار جمله اول را بنویسید.

۱) $\{۳^n\}$

$$r = ۳; a_۱ = ۳, a_۲ = ۹, a_۳ = ۲۷, a_۴ = ۸۱$$

۲) $\{(-۵)^n\}$

$$r = -۵; a_۱ = -۵, a_۲ = ۲۵, a_۳ = -۱۲۵, a_۴ = ۶۲۵$$

۳) $\left\{-۳\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right\}$

$$r = \frac{۱}{۲}; a_۱ = -\frac{۳}{۲}, a_۲ = -\frac{۳}{۴}, a_۳ = -\frac{۳}{۸}, a_۴ = -\frac{۳}{۱۶}$$

۴) $\left\{\left(\frac{۵}{۲}\right)^n\right\}$

$$r = \frac{۵}{۲}; a_۱ = \frac{۵}{۲}, a_۲ = \frac{۲۵}{۴}, a_۳ = \frac{۱۲۵}{۸}, a_۴ = \frac{۶۲۵}{۱۶}$$

۵) $\left\{\frac{۲^{n-۱}}{۴}\right\}$

$$r = ۲; a_۱ = \frac{۱}{۴}, a_۲ = \frac{۱}{۲}, a_۳ = ۱, a_۴ = ۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات ۱۲ – ۶ مشخص کنید آیا دنباله های داده شده ، حسابی یا هندسی است و یا هیچ کدام. اگر حسابی است تفاضل مشترک و اگر هندسی است نسبت مشترک را پیدا کنید.

۶) $\{n+۲\}$

دنباله حسابی و $d = ۱$

۷) $\{۲n-۵\}$

دنباله حسابی و $d = ۲$

۸) $\{۴n^۲\}$

هیچ کدام

۹) $\{۵n^۲+۱\}$

هیچ کدام

۱۰) $\left\{۳-\frac{۲}{۳}n\right\}$

دنباله حسابی و $d = -\frac{۲}{۳}$

۱۱) $۱, ۳, ۶, ۱۰, \ldots$

هیچ کدام

۱۲) $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, \ldots$

هیچ کدام

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات ۱۸ – ۱۳ اولین جمله و نسبت مشترک یک دنباله هندسی داده شده است. پنجمین جمله و جمله انم آنرا پیداکنید .

۱۳) $a = ۲, r - ۳$

$$a_۵ = ۱۶۲; a_n = ۲ * ۳^{n-۱}$$

۱۴) $a = -۲, r = ۴$

$$a_۵ = -۵۱۲; a_n = -۲ * ۴^{n-۱}$$

۱۵) $a = ۵, r = -۱$

$$a_۵ = ۵; a_n = ۵ * (-۱)^{n-۱}$$

۱۶) $a = ۶, r = -۲$

$$a_۵ = ۹۶; a_n = ۶ * (-۲)^{n-۱}$$

۱۷) $a = ۰, r = \frac{۱}{۲}$

$$a_۵ = ۰; a_n = ۰$$

۱۸) $a = ۱, r = -\frac{۱}{۳}$

$$a_۵ = \frac{۱}{۸۱}; a_n = \left(-\frac{۱}{۳}\right)^{n-۱}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات ۲۲ – ۱۹ جمله مشخص شده هر یک از دنباله های هندسی را پیدا کنید.

۱۹) هفتمین جمله $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \ldots$

$$a_{۷} = \frac{۱}{۶۴}$$

۲۰) هشتمین جمله $۱, ۳, ۹, \ldots$

$$a_{۸} = ۲۱۸۷$$

۲۱) نهمین جمله $۱, -۱, ۱, \ldots$

$$a_{۹} = ۱$$

۲۲) دهمین جمله $۱, ۲, -۴, \ldots$

$$a_{۱۰} = ۵۱۲$$

در تمرینات ۲۸ – ۲۳ حاصل جمع ها را پیدا کنید.

۲۳) $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \cdots = \frac{۳}{۲}$

۲۴) $۲ + \frac{۴}{۳} + \frac{۸}{۹} + \cdots = ۶$

۲۵) $۸ + ۴ + ۲ + \cdots = ۱۶$

۲۶) $۶ + ۲ + \frac{۲}{۳} + \cdots = ۹$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۷) $\sum_{k=۱}^{\infty} ۵\left(\frac{۱}{۴}\right)^{k-۱} = \frac{۲۰}{۳}$

۲۸) $\sum_{k=۱}^{\infty} ۸\left(\frac{۱}{۳}\right)^{k-۱} = ۱۲$

۲۹ – برای x مقداری پیدا کنید بطوری که $x, x+۲, x+۳$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. (از چپ به راست بخوانید)

پاسخ

فرض می کنیم $a_{n-۲} = x, a_{n-۱} = x+۲, a_n = x+۳$ باشد. پس خواهیم داشت

$$r = \frac{a_{n-۱}}{a_{n-۲}} = \frac{x+۲}{x}$$

لذا

$$a_n = ra_{n-۱}$$

$$x+۳ = \frac{x+۲}{x}(x+۲)$$

$$x+۳ = \frac{x^۲+۴x+۴}{x}$$

$$x^۲+۴x+۴ = x^۲+۳x$$

$$x = -۴$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۰

فرض کنید بتازگی استخدام شده اید با حقوق سالانه ۱۸۰۰۰ میلیون ریال . اگر سالانه ۵% به حقوق شما اضافه شود، هنگامیکه پنجمین سال را شروع می کنید ، حقوق شما چه مقدار خواهد بود؟

پاسخ

$$a_۱ = ۱۸۰۰۰$$

$$a_۲ = ۱۸۰۰۰ + (۰/۰۵)(۱۸۰۰۰) = ۱۸۹۰۰$$

$$r = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۱۸۹۰۰}{۱۸۰۰۰} = ۱/۰۵$$

$$a_۵ = ar^۴ = ۱۸۰۰۰\,(۱/۰۵)^۴ = ۲۱۸۷۹/۱۱$$ میلیون ریال

۳۱ – یک شرکت یک ماشین تحریر به مبلغ ۱۵۰۰۰ تومان میخرد. بمنظور پرداخت مالیات کمتر برای این ماشین ، هر سال ۱۵% از قیمت ماشین به عنوان استهلاک کم می کند. بعد از پنج سال قیمت ماشین چه مبلغ خواهد بود؟

پاسخ

$$a_۱ = ۱۵۰۰۰$$

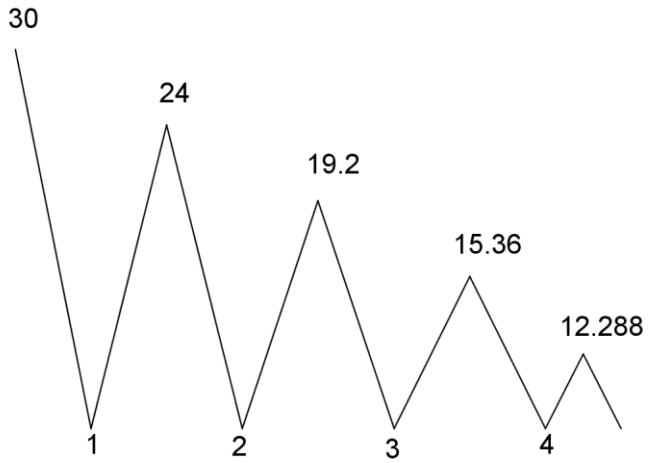
$$a_۲ = ۱۵۰۰۰ - (۰/۱۵)۱۵۰۰۰ = ۱۲۷۵۰$$

$$r = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۱۲۷۵۰}{۱۵۰۰۰} = ۰/۸۵$$

$$a_۶ = a_۱ r^۵ = ۱۵۰۰۰\,(۰/۸۵)^۵ = ۶۶۵۵/۵۸$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۳۲ – یک توپ از ارتفاع ۳۰ فوتی رها می شود. هر مرتبه که توپ به زمین برخورد می کند ، ۰/۸ ارتفاع قبلی به بالا می جهد. (یک فوت ۱۲ اینچ است)



الف –بعد از سومین بر خورد توپ به زمین ، ارتفاع توپ چقدر است؟

پاسخ

وقتی که توپ از ارتفاع ۳۰ فوتی رها می شود ، $a_۰ = ۳۰$

وقتی که توپ برای اولین مرتبه به زمین برخورد می کند و باز به طرف بالا می جهد، $a_۱ = ۳۰\left(۰/۸\right) = ۲۴$ یعنی پس از برخورد اول به زمین ، توپ ۲۴ فوت به طرف بالا می جهد.

پس از مرتبه سوم برخورد با زمین ، خواهیم داشت.

$$a_۳ = a_۰ r^۳ = ۳۰\left(۰/۸\right)^۳ = ۱۵/۳۶ \text{ فوت}$$

بعدً از برخورد سوم به زمین ، توپ ۱۵ / ۳۶ فوت به بالا می جهد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب –ارتفاع توپ بعد از بر خورد انم چه قدر است؟

پاسخ

$$a_n = ۳۰\left(۰/۸\right)^n$$

ج –توپ چند مرتبه باید به زمین بر خورد کند ، تا ارتفاع آن کمتر از ۶ اینچ باشد؟

پاسخ

شش اینچ یعنی نیم فوت. پس

$$۳۰\left(۰/۸\right)^n = \frac{۱}{۲}$$

$$\left(۰/۸\right)^n = \frac{\frac{۱}{۲}}{۳۰} = \frac{۱}{۶۰}$$

$$n = log_{۰/۸}\left(\frac{۱}{۶۰}\right)$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{۱}{۶۰}\right)}{ln\left(۰/۸\right)} \approx ۱۸/۳۵$$

پس بعد از نوزدهمین برخورد ، ارتفاع توپ برای اولین مرتبه به کمتر از شش اینچ می رسد.

د –هنگامی که توپ از حرکت باز می ایستد ، روی هم رفته چه مسافتی را طی کرده است؟

پاسخ

وقتی که توپ از حرکت باز می ایستد ، روی هم رفته مسافت T را طی کرده است . با توجه به اشکال بالا که در ابتدای طرح مساله آمده است ، ملاحظه می کنید که هنگام رها شدن ، توپ ۳۰ فوت را طی می کند تا به زمین برخورد کند یعنی $a_۰ = ۳۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پس بر خورد اول توپ ۲۴ فوت به بالا می جهد و ۲۴ فوت به طرف پایین حرکت می کند. لذا بعد از برخورد اول توپ به زمین و قبل از برخورد دوم ، توپ مسافت زیر را طی کرده است.

$$۳۰ + ۲(۲۴) = ۷۸ \text{ فوت}$$

پس مجموع مسافت طی شده هنگامی که توپ از حرکت باز می ایستد مطابق زیر بدست می آید.

$$T = ۳۰ + ۲(۰/۸)(۲۴) + ۲(۰/۸)^{۲}(۲۴) + ۲(۰/۸)^{۳}(۲۴) + \cdots$$

عبارت بالا یک سری هندسی است با $r = ۰/۸$ و $a = ۲۴$ پس مجموع

$$T = ۳۰ + ۲ \times \frac{a}{۱ - r} = ۳۰ + ۲ \times \frac{۲۴}{۱ - ۰/۸} = ۳۰ + ۲ \times \frac{۲۴}{۰/۲} = ۲۷۰ \text{ فوت}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲.۴ – تئوری دو جمله ای The Binomial Theorem

تئوری دو جمله ای فرمولی است برای بسط $(a+b)^n$

اینجا n یک عدد صحیح مثبت است. برای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ بسط $(a+b)^n$ آسان است.

$$(a+b)^۱ = a+b$$

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$

$$(a+b)^۴ = a^۴ + ۴a^۳b + ۶a^۲b^۲ + ۴ab^۳ + b^۴$$

ملاحظه می کنید که هر یک از بسط های $(a+b)^n$ با a^n شروع و با b^n ختم می شود. اگر از چپ به راست بخوانید ،از توان های a کم و به توان های b اضافه می شوند .همچنین تعداد جمله ها $n+۱$ است. و باز ملاحظه می کنید که درجه هر یک از یک جمله ای های بسط ، مساوی n است. بنا بر این می توانیم حدس بزنیم که بسط $(a+b)^n$ مانند فرم زیر باشد.

$$(a+b)^n = a^n + __a^{n-۱}b + __a^{n-۲}b^۲ + \cdots + __ab^{n-۱} + b^n$$

در تساوی بالا جاهای خالی را باید پیدا کنیم. این کار را بزودی انجام می دهیم.

ابتدا باید نماد زیر را معرفی کنیم.

$$\binom{n}{j}$$

نماد بالا را چنین تعریف می کنیم.

اگر n و j اعداد صحیح باشند و $۰ \le j \le n$ پس

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{j}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{j}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j})!} \qquad (۱)$$

نماد $\binom{n}{j}$ را می خوانیم (انتخاب j از n و یا انتخاب j شیی از n شیی

در بعضی از کتب این نماد ها را هم بکار می برند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$C(n,r) \qquad C_r^n$$

یاد آوری –نماد $n!$ را می گویند (ان فاکتوریل)

$$n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

مثلا

طبق توافق $0! = 1$

$$۱! = ۱$$

$$۲! = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

طبق تعریف فاکتوریل می‌توان کسر های زیر را ساده کرد.

$$\frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸ = ۷۲۰$$

$$\frac{۲۰!}{۱۸!} = \frac{۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸!}{۱۸!} = ۲۰ \times ۱۹ = ۳۸۰$$

مثال ۱ -مقادیر زیر را بدست آورید.

$$a)\ \binom{۳}{۱} \qquad b)\ \binom{۴}{۲} \qquad c)\ \binom{۸}{۷} \qquad d)\ \binom{۶۵}{۱۵}$$

پاسخ

$$a)\ \binom{۳}{۱} = \frac{۳!}{۱!\,(۳-۱)!} = \frac{۳!}{۱!\,(۲!)} = \frac{۳ * ۲ * ۱}{۲ * ۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$b)\ \binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!\,(۴-۲)!} = \frac{۴!}{۲!\,(۲!)} = \frac{۴ * ۳ * ۲ * ۱}{۲ * ۲} = ۳ * ۲ * ۱ = ۶$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$c)\quad \binom{۸}{۷} = \frac{۸!}{۷!\,(۸-۱)!} = \frac{۸!}{۷! * ۱!} = \frac{۸ \times ۷!}{۷!} = ۸$$

$$d)\quad \binom{۶۵}{۱۵} = \frac{۶۵!}{۱۵!\,(۶۵-۱۵)!} = \frac{۶۵!}{۱۵! \times ۵۰!} = \frac{(۶۵ \times ۶۴ \times \ldots \times ۴۹) \times ۵۰!}{۱۵! \times ۵۰!}$$

$$= \frac{(۶۵ \times ۶۴ \times \ldots \times ۴۹)}{۱۵!} = 207374699821536$$

چهار فرمول مفید برای نماد $\binom{n}{j}$

$$\binom{n}{۰} = ۱ \qquad \binom{n}{۱} = n \qquad \binom{n}{n-۱} = n \qquad \binom{n}{n} = ۱$$

فرض کنید مقادیر مختلف نماد $\binom{n}{j}$را در یک شکل مثلثی مرتب کنیم.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

مثلث مورد نظر ، به شکل زیر است که به **مثلث خیام -پاسکال** معروف است.

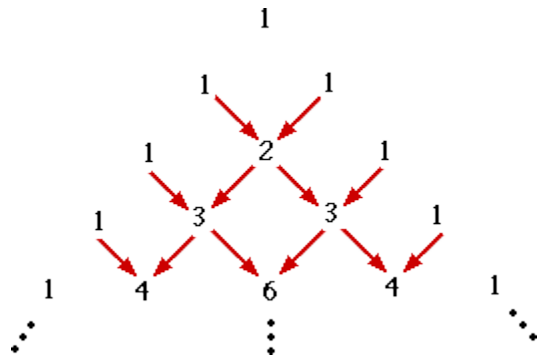
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 26 28 8 1

دانلود از سایت ریاضی سرا

ردیف اول که فقط یک ورودی دارد و آن ۱ است نماینده $n=۰$ است. ردیف دوم که دو ورودی دارد نماینده $n=۱$ است به همین ترتیب تا پایین

در هر ردیف ، از چپ به راست ، هر ورودی نماینده j است. دو مثلث بالا این موضوع را به وضوح نشان می دهد.

همان طور که ملاحظه می کنید ، در **مثلث خیام -پاسکال** در دو ضلع طرفین از بالا به پایین ۱ است. برای بدست آوردن اقلام دیگر ، دو قلم ردیف بالای آنرا با هم جمع کنید. شکل زیر این مطلب را نشان می دهد.



مثلث خیام -پاسکال نمایش جالبی از نماد $\binom{n}{j}$ است. و می توان برای پیدا کردن ضریب جمله های بسط $(a+b)^n$ بکار برد. مثلا اگر $n=۰$ باشد ، واضح است که $(a+b)^{۰}=۱$ که ورودی ردیف اول **مثلث خیام -پاسکال** است. اگر $n=۱$ باشد ، $(a+b)^{۱}=a+b$ است. ملاحظه می کنید که ضریب های a و b یک است و مطابق است با ورودی های ردیف دو. اگر $n=۲$ باشد ،

$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$ اینجا نیز ملاحظه می کنید که ضریب جمله های بسط به ترتیب از چپ به راست ۱, ۲, ۱ است که باز همان ورودی های ردیف سوم **مثلث خیام -پاسکال** است.

مثلث خیام- پاسکال را می توان برای پیدا کردن ضریب جمله های بسط $(a+b)^n$ بکار برد اگر n کوچک باشد. مثلا تا $n=۱۰$

اما برای مقادیر بزرگ تر، از تئوری زیر استفاده می کنیم.

تئوری دو جمله ای Binomial Theorem

فرض می کنیم a و b اعداد حقیقی باشند ، و n یک عدد صحیح مثبت. پس خواهیم داشت

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}a^n+\binom{n}{۱}a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^{۲}+\cdots+\binom{n}{j}a^{n-j}b^j+\cdots+\binom{n}{n}b^n$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j} \qquad (2)$$

حالا متوجه می شوید که چرا نماد $\binom{n}{j}$ را معرفی کردیم. این نماد ها ضریب عددی جمله های بسط $(a+b)^n$ هستند ولذا $\binom{n}{j}$ به **ضریب دو جمله ای Binomial Coefficient** موسوم است.

مثال ۲ – بسط یک دو جمله ای Expanding a Binomial

با استفاده از تئوری دو جمله ای $(x+2)^5$ را بسط دهید.

پاسخ

$$(x+2)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}2x^4 + \binom{5}{2}2^2x^3 + \binom{5}{3}2^3x^2 + \binom{5}{4}2^4x + \binom{5}{5}2^5$$

$$= 1 * x^5 + 5 * 2x^4 + 10 * 4x^3 + 10 * 8x^2 + 5 * 16x + 1 * 32$$

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

مثال ۳- $(2y-3)^4$ را بسط دهید.

پاسخ

$$(2y-3)^4 = [2y+(-3)]^4 = \binom{4}{0}(2y)^4 + \binom{4}{1}(-3)(2y)^3 + \binom{4}{2}(-3)^2(2y)^4$$

$$+ \binom{4}{3}(-3)^3(2y) + \binom{4}{4}(-3)^4$$

$$= 1 * 16y^4 + 4(-3)8y^3 + 6 * 9 * 4y^2 + 4(-27)2y + 1 * 81$$

$$= 16y^4 - 96y^3 + 216y^2 - 216y + 81$$

مثال ۴ – پیدا کردن یک ضریب مشخص در یک بسط دو جمله ای

Finding a Particular Coefficient in a Binomial Expansion

دانلود از سایت ریاضی سرا

ضریب $y^{۸}$ را در بسط $(۲y+۳)^{۱۰}$ پیدا کنید.

پاسخ

می توان از تئوری دو جمله ای استفاده کرد و دو جمله ای بالا را بسط داد و ضریب $y^{۲}$ را پیدا کرد. اما این روش طولانی است مخصوصا اگر n بیشتر از ۱۰ باشد.

اگر $(۲y+۳)^{۱۰}$ را با $(a+b)^n$ مقایسه کنیم ، می بینیم که $a=۲y$ و $n=۱۰$ است. همچنین اگر دو جمله ای داده شده را با فرمول (۲) مقایسه کنیم

$$(a+b)^n=\sum_{j=۰}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j$$

ملاحظه می کنیم که توان y باید $n-j=۸$ باشد. پس خواهیم داشت $۱۰-j=۸$ یا $j=۲$

لذا

$$\binom{۱۰}{۲}(۲y)^{۱۰-۲}(۳)^{۲}=\frac{۱۰!}{۲!\,۸!}\times ۹\times ۲^{۸}y^{۸}$$

$$=\frac{۱۰\times ۹\times ۸!}{۲!\times ۸!}\times ۹\times ۲^{۸}y^{۸}$$

$$=۴۵\times ۹\times ۲۵۶y^{۸}=۱۰۳۶۸۰y^{۸}$$

مثال ۵ – پیدا کردن یک جمله مشخص در یک بسط دو جمله ای

Finding a Particular term in a Binomial Expansion

ششمین جمله در بسط $(x+۲)^{۹}$ را پیدا کنید.

پاسخ

ششمین جمله یعنی $j=۵$ زیرا می دانیم که j از صفر شروع می شود. پس خواهیم داشت.

$$\binom{۹}{۵}x^{۹-۵}\times ۲^{۵}=\frac{۹!}{۵!\,۴!}\times ۲^{۵}x^{۴}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۵!\,۴!}\times ۳۲x^{۴}=۴۰۳۲x^{۴}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

دو فرمول زیر هم بخاطر بسپارید.

$$\binom{n}{n-j} = b^{n-j}a^{j} \qquad (۳)$$

فرمول زیر به جمع مثلثی ارقام مثلث پاسکال که در ابتدای این بخش دیدیم موسوم است.

$$\binom{n}{j-۱} + \binom{n}{j} = \binom{n+۱}{j} \qquad (۴)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۲.۴

مقدار عبارت های زیر را پیدا کنید.

۱) $\binom{۵}{۳}$

۲) $\binom{۷}{۳}$

۳) $\binom{۷}{۵}$

۴) $\binom{۹}{۷}$

۵) $\binom{۵۰}{۴۹}$

۶) $\binom{۱۰۰}{۹۸}$

۷) $\binom{۱۰۰۰}{۱۰۰۰}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $\begin{pmatrix} ۱ & ۰۰۰ \\ & ۰ \end{pmatrix}$

عبارت های زیر را بسط دهید.

۹) $(x+۱)^{۵}$

۱۰) $(x-۱)^{۵}$

۱۱) $(x-۲)^{۶}$

۱۲) $(x+۳)^{۵}$

۱۳) $(۳x+۱)^{۴}$

۱۴) $(x^{۲}-y^{۲})^{۶}$

۱۵) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{۲}\right)^{۶}$

۱۶) $(ax+by)^{۵}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات زیر ، ضریب خواسته شده را پیدا کنید.

۱۷ – ضریب $x^{۶}$ در بسط $(x+۳)^{۱۰}$

۱۸ - ضریب $x^{۳}$ در بسط $(x-۳)^{۱۰}$

۱۹ -ضریب $x^{۷}$ در بسط $(۲x \pm ۱)^{۱۲}$

۲۰

ضریب $x^{۲}$ در بسط $(۲x-۳)^{۹}$

۲۱ – پنجمین جمله $(x+۳)^{۷}$ را پیدا کنید.

۲۲ – سومین جمله $(x-۳)^{۷}$ را پیدا کنید.

۲۳ – سومین جمله $(۳x-۲)^{۹}$ را پیدا کنید.

۲۴ – ششمین جمله $(۳x+۲)^{۸}$ را پیدا کنید.

۲۵ – نشان دهید که

$$\binom{n}{n-۱} = n \quad و \quad \binom{n}{n} = ۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۶ – نشان دهید که

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$$

۲۷ – نشان دهید که

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

۲۸ – نشان دهید که

$$\binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} - \cdots + (-۱)^n \binom{n}{n} = ۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۲.۴

مقدار عبارت های زیر را پیدا کنید.

۱) $\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!\,۲!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۳! \times ۲!} = ۱۰$

۲) $\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!\,۴!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۳!\,۴!} = ۳۵$

۳) $\binom{۷}{۵} = \frac{۷!}{۵!\,۲!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!\,۲!} = ۲۱$

۴) $\binom{۹}{۷} = \frac{۹!}{۷!\,۲!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!\,۲!} = ۳۶$

۵) $\binom{۵۰}{۴۹} = \frac{۵۰ \times ۴۹!}{۴۹! \times ۱!} = ۵۰$

۶) $\binom{۱۰۰}{۹۸} = \frac{۱۰۰ \times ۹۹ \times ۹۸!}{۹۸!\,۲!} = ۴۹۵۰$

۷) $\binom{۱۰۰۰}{۱۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰!}{۱۰۰۰!\,(۰!)} = ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $$\binom{۱۰۰۰}{۰} = \frac{۱۰۰۰!}{(۰!)۱۰۰۰!} = ۱$$

عبارت های زیر را بسط دهید.

۹) $$(x+۱)^{۵} = \sum_{j=۰}^{۵} \binom{n}{j} x^{n-j} ۱^{j} = \binom{۵}{۰} x^{۵} ۱^{۰} + \binom{۵}{۱} x^{۴} ۱^{۱} + \binom{۵}{۲} x^{۳} ۱^{۲} \binom{۵}{۳} + x^{۲} a^{۳}$$

$$+ \binom{۵}{۴} x^{۱} ۱^{۴} + \binom{۵}{۵} ۱^{۵}$$

$$= \frac{۵!}{۵!} x^{۵} + \frac{۵!}{۱!\,۴!} x^{۴} + \frac{۵!}{۲!\,۳!} x^{۳} + \frac{۵!}{۳!\,۲!} x^{۲} + \frac{۵!}{۴!\,۱!} x + \frac{۵!}{۵!\,(۰!)} ۱$$

$$= x^{۵} + ۵x^{۴} + ۱۰x^{۳} + ۱۰x^{۲} + ۵x + ۱$$

۱۰) $$(x-۱)^{۵} = \sum_{j=۰}^{۵} \binom{n}{j} x^{n-j} (-۱)^{j} = x^{۵} - ۵x^{۴} + ۱۰x^{۳} - ۱۰x^{۲} + ۵x - ۱$$

۱۱) $$(x-۲)^{۶} = x^{۶} - ۱۲x^{۵} + ۶۰x^{۴} - ۱۶۰x^{۳} + ۲۴۰x^{۲} - ۱۹۲x + ۶۴$$

۱۲) $$(x+۳)^{۵} = x^{۵} + ۱۵x^{۴} + ۹۰x^{۳} + ۲۷۰x^{۲} + ۴۰۵x + ۲۴۳$$

۱۳) $$(۳x+۱)^{۴} = ۸۱x^{۴} + ۱۰۸x^{۳} + ۵۴x^{۲} + ۱۲x + ۱$$

۱۴) $$(x^{۲} - y^{۲})^{۶} = x^{۱۲} - ۶x^{۱۰}y^{۲} + ۱۵x^{۸}y^{۴} - ۲۰x^{۶}y^{۶} + ۱۵x^{۴}y^{۸} - x^{۲}y^{۱۰} + y^{۱۲}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{۲}\right)^{۶} = x^{۳} + ۶\sqrt{۲}x^{\frac{۵}{۲}} + ۳۰x^{۲} + ۴۰\sqrt{۲}x^{\frac{۳}{۲}} + ۶۰x + ۲۴\sqrt{۲}x^{\frac{۱}{۲}} + ۸$

۱۶) $(ax+by)^{۵} = a^{۵}x^{۵} + ۵a^{۴}bx^{۴}y + ۱۰a^{۳}b^{۲}x^{۳}y^{۲} + ۱۰a^{۲}b^{۳}x^{۲}y^{۳} + ۵ab^{۴}xy^{۴} + b^{۵}y^{۵}$

در تمرینات زیر ، ضریب خواسته شده را پیدا کنید.

۱۷ – ضریب $x^{۶}$ در بسط $(x+۳)^{۱۰}$

پاسخ

اینجا $n = ۱۰$ و $j = ۱۰ - ۶ = ۴$ پس خواهیم داشت

$$\binom{۱۰}{۴}x^{۱۰-۴}۳^{۴} = \frac{۱۰!}{۴!\,۶!}x^{۶}۳^{۴} = \frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۲۴\times ۶!}x^{۶}(۸۱) = ۱۷۰۱۰x^{۶}$$

پس ضریب $x^{۶}$ در دو جمله ای بالا ۲۷۰۱۰ است.

۱۸ - ضریب $x^{۳}$ در بسط $(x-۳)^{۱۰}$

پاسخ

$$n = ۱۰, j = ۱۰ - ۳ = ۷$$

پس خواهیم داشت.

$$\binom{۱۰}{۷}x^{۱۰-۷}(-۳)^{۷} = \frac{۱۰!}{۷!\,۳!}x^{۳}(-۲۱۸۷) = \frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷!}{۷!\,۳!}x^{۳}(-۲۱۸۷) = -۲۶۲۴۴۰x^{۳}$$

پس ضریب ۲۶۲۴۴۰– است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹ -ضریب $x^{۷}$ در بسط $(۲x-۱)^{۱۲}$

پاسخ

$$n=۱۲, j=۱۲-۷=۵$$

پس خواهیم داشت.

$$\binom{۱۲}{۵}(۲x)^{۱۲-۵}(-۱)^{۵}=\frac{۱۲!}{۵!\,۷!}(۲x)^{۷}(-۱)^{۵}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸\times ۷!}{۱۲۰\,(۷!)}۱۲۸x^{۷}(-۱)$$

$$=-۱۰۱۳۷۶x^{۷}$$

پس ضریب -۱۰۱۳۷۶ است.

۲۰

ضریب $x^{۲}$ در بسط $(۲x-۳)^{۹}$

پاسخ

$$n=۹, j=۹-۲=۷$$

پس خواهیم داشت.

$$\binom{۹}{۷}(۲x)^{۹-۷}(-۳)^{۷}=\frac{۹!}{۷!\,۲!}(۲x)^{۲}(-۲۱۸۷)=\frac{۹\times ۸\times ۷!}{۷!\,۲!}۴x^{۲}(-۲۱۸۷)=-۳۱۴۹۲۸x^{۲}$$

پس ضریب -۳۱۴۹۲۸ است.

۲۱ – پنجمین جمله $(x+۳)^{۷}$ را پیدا کنید.

پاسخ

چون j از صفر شروع می شود ، پس پنجمین جمله یعنی $j=۴$ پس خواهیم داشت.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\binom{۷}{۴}x^{۷-۴}۳^{۴}=\frac{۷!}{۴!\,۳!}x^{۳}(۸۱)=\frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۴!\,۳!}۸۱x^{۳}=۲۸۳۵x^{۳}$$

۲۲ – سومین جمله $(x-۳)^{۷}$ را پیدا کنید.

پاسخ

سومین جمله یعنی $j=۲$ پس

$$\binom{۷}{۲}x^{۷-۲}(-۳)^{۲}=\frac{۷!}{۲!\,۵!}x^{۵}(۹)=\frac{۷\times ۶\times ۵!}{۲!\,۵!}۹x^{۵}=۱۸۹x^{۵}$$

۲۳ – سومین جمله $(۳x-۲)^{۹}$ را پیدا کنید.

پاسخ

سومین جمله یعنی $j=۲$ پس

$$\binom{۹}{۲}(۳x)^{۹-۲}(-۲)^{۲}=\frac{۹!}{۲!\,۷!}(۳x)^{۷}(۴)=\frac{۹\times ۸\times ۷!}{۲!\,۷!}۸۷۴۸x^{۷}=۳۱۴۹۲۸x^{۷}$$

۲۴ – ششمین جمله $(۳x+۲)^{۸}$ را پیدا کنید.

پاسخ

ششمین جمله یعنی $j=۵$ پس

$$\binom{۸}{۵}(۳x)^{۸-۵}۲^{۵}=\frac{۸!}{۵!\,۳!}(۳x)^{۳}(۳۲)=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۵!\,۳!}۲۷x^{۳}(۳۲)=۴۸۳۸۴x^{۳}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵ – نشان دهید که

$$\binom{n}{n-۱} = n \quad و \quad \binom{n}{n} = ۱$$

پاسخ

$$\binom{n}{n-۱} = \frac{n!}{(n-۱)!\,[n-(n-۱)]!} = \frac{n \times (n-۱)!}{(n-۱)!\,۱!} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,(۰\,!)} = \frac{n!}{n!} = ۱$$

۲۶ – نشان دهید که

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$$

پاسخ

$$\binom{n}{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!\,(n-n+j)!} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} = \binom{n}{j}$$

۲۷ – نشان دهید که

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

پاسخ

$$۲^n = (۱+۱)^n = \binom{n}{۰}۱^n + \binom{n}{۱}(۱)^{n-۱}(۱) + \cdots + \binom{n}{n}۱^n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots + \binom{n}{n}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۸ – نشان دهید که

$$\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-\cdots+(-۱)^n\binom{n}{n}=۰$$

پاسخ

$$۰=۰^n=(۱-۱)^n=\binom{n}{۰}۱^n+\binom{n}{۱}(۱)^{n-۱}(-۱)+\binom{n}{۲}(۱)^{n-۲}(-۱)^۲+\cdots+\binom{n}{n}(-۱)^n$$

$$=\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-\cdots+(-۱)^n\binom{n}{n}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)