فصل سیزدهم

شمارش و احتمالات

Counting and Probability

۱۳.۱ – مجموعه ها و شمارش Sets and Counting

در بخش ۱.۱ در مورد مجموعه ها صحبت کردیم. در این بخش مطالب بیشتری که در بخش های آینده لازم می شود ، بحث می کنیم.

یک **مجموعه A Set** عبارت است از جمعی از اشیأ متمایز است. اشیأ یک مجموعه را **اعضا و یا عناصر Elements** می نامند. اگر یک مجموعه عنصری نداشته باشد ، آنرا **مجموعه تهی Empty Set** می نامند. و با نماد $\emptyset$ نشان داده می شود.

چون عناصر یک مجموعه متمایز هستند ، هیچ وقت عناصر را تکرار نمی کنیم. مثلا هرگز نمی نویسیم $\{۱, ۲, ۳, ۲\}$

بلکه می نویسیم $\{۱, ۲, ۳\}$

چون یک مجموعه جمعی از عناصر است ، پس ترتیب قرار گرفتن آنها مهم نیست. مثلا ، مجموأه بالا را می توان به صورت $\{۲, ۱, ۳\}$ و یا $\{۳, ۲, ۱\}$ نوشت.

مثال ۱– نوشتن عناصر یک مجموعه Writing the Elements of a Set

یک مجموعه بنویسید که شامل نتایج ممکن **شیر خط کردن Tossing** دومرتبه یک سکه باشد. برای **شیر یا سر Heads** حرف H و برای **خط tails** حرف T بکار ببرید.

پاسخ

هنگام شیر خط کردن یک سکه برای دو مرتبه ، ممکن است هر دو مرتبه شیر باشد یعنی HH یا هر دو مرتبه خط باشد یعنی TT یا ممکن است مرتبه اول شیر و مرتبه دوم خط باشد یعنی HT و یا بر عکس یعنی TH پس مجموعه نتایج به صورت زیر خواهد بود.

$$\{HH, TT, HT, TH\}$$

اگر دو مجموعه A و B عیناً همان عناصر را داشته باشند ، می گوییم A و B با هم برابر هستند و می نویسیم

$$A = B$$

اگر هر کدام از عناصر مجموعه A عناصر B هم باشند ، می گوییم A **زیر مجموعه** B است و می نویسیم

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$A \subseteq B$$

اگر $A \subseteq B$ باشد و $A \neq B$ پس می گوییم A **زیر مجموعه حقیقی** B است و می نویسیم

$$A \subset B$$

اگر $A \subseteq B$ باشد ، یعنی هر یک از عناصر A هم عنصری از B هم هست اما عکس آن ممکن است صادق باشد و یا نباشد. یعنی B ممکن است عناصر دیگری هم داشته باشد و یا نداشته باشد.

اگر $A \subset B$ باشد ، یعنی هر یک از عناصر A در B هم هست ، اما حد اقل یک عنصر در B هست که در A نیست.

طبق قرار داد مجموعه تهی ، زیر مجموعه هر مجموعه ای است. یعنی اگر A یک مجموعه باشد ،

$$\emptyset \subseteq A$$

مثال ۲ – پیدا کردن تمام زیر مجموعه های یک مجموعه Finding All Subsets of a Set

کلیه زیر مجموعه های $\{a, b, c\}$ را بنویسید.

پاسخ

سه عضوی	دو عضوی	یک عضوی	مجموعه تهی
$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}, \{b, c\}\{a, c\}$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\emptyset$

اگر A و B دو مجموعه باشند ، **فصل مشترک** یا **اشتراک Intersection** آنها که با نماد $A \cap B$ نشان داده می شود ، عبارت است ازمجموعه ای که عناصر آن هم در A هست و هم در B

اتحاد Union دو مجموعه A و B که با نماد $A \cup B$ نشان داده می شود ، عبارت از مجموعه ای که عناصر آن یا در A هست یا در B و یا در هر دو.

مثال ۳ – پیدا کردن اشتراک و اتحاد مجموعه ها Finding the Intersection and Union of Sets

اگر مجموعه های زیر را داشته باشیم.

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۸\} \quad B = \{۳, ۵, ۷\} \quad C = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$$

مجموعه های زیر را پیدا کنید.

$$a)\ A \cap B \qquad b)\ A \cup B \qquad c)\ B \cap (A \cup B)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

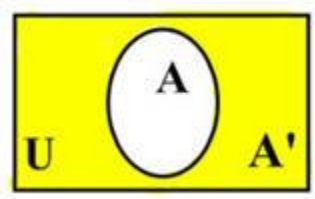
$a)\ \ A \cap B = \{۱,۳,۵,۸\} \cap \{۳,۵,۷\} = \{۳,۵\}$

$b)\ \ A \cup B = \{۱,۳,۵,۸\} \cup \{۳,۵,۷\} = \{۱,۳,۵,۷,۸\}$

$c)\ \ B \cap (A \cup C) = \{۳,۵,۷\} \cap [\{۱,۳,۵,۸\} \cup \{۲,۴,۶,۸\}] = \{۳,۵,۷\} \cap \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸\} = \{۳,۵\}$

معمولا هنگامی که با مجموعه ها کار می کنیم ، یک **مجموعه جامع A Universal Set** را درنظر می گیریم .
مجموعه جامع را با نماد S یا U نشان می دهیم. مجموعه جامع عبارت است از مجموعه ای که شامل تمام عناصری است که می خواهیم مورد مطالعه قرار دهیم . هنگامی که مجموعه جامع مشخص شد ، می توانیم عناصری از مجموعه جامع که در مجموعه مورد نظر نیست را مشخص کنیم.

اگر A یک مجموعه باشد ، متمم Complementآن که با نماد $\overline{A}$ نمایش داده می شود ، عبارت است از مجموعه عناصری که در مجموعه جامع هست اما در A نیست. در بعضی از کتب نماد A' را بکار می برند.



قسمت زرد رنگ متمم A است. A و $\overline{A}$ با هم مجموعه جامع است.

مثال ۴ – پیدا کردن متمم یک مجموعه Finding the Complement of a Set

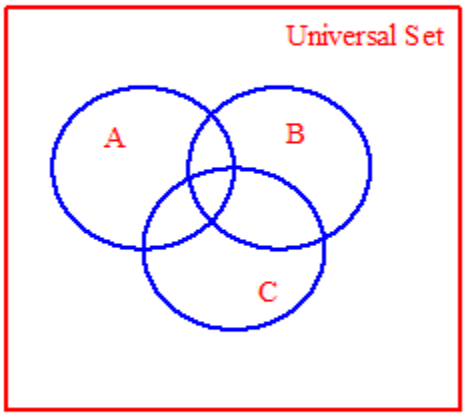
اگر مجموعه جامع $U = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و $A = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$ باشد ، پس $\overline{A} = \{۲,۴,۶,۸\}$ است.

بنا بر این نتیجه می گیریم که

$$\overline{A} \cup A = U \quad \text{و} \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

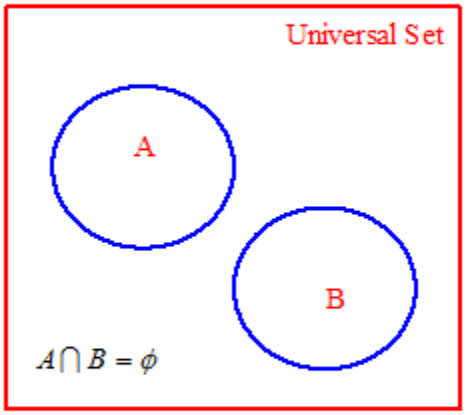
دانلود از سایت ریاضی سرا

معمولا هنگام مطالعه مجموعه ها ، تصویر آنها را رسم می کنیم. این تصویر را **طرح های ون Venn Diagrams** می نامند. در طرح های ون ، مجموعه ها را به شکل دائره داخل یک مستطیل نشان می دهیم. مستطیل هم نشان دهنده مجموعه جامع است. این طرح ها اغلب به ما کمک می کنند که روابط مختلف مجموعه ها را نسبت به هم در ذهن خود تصور نماییم. مانند شکل زیر



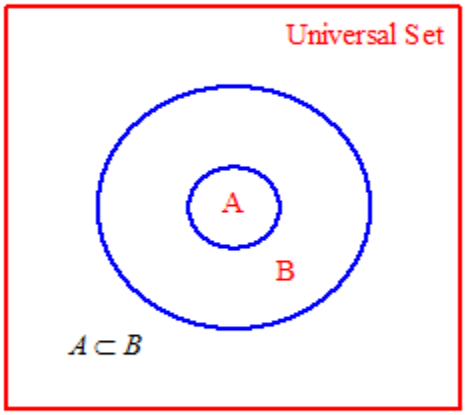
دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر A و B هیچ عنصر مشترکی نداشته باشند ، یعنی $A \cap B = \emptyset$ شکل زیر را بکار می بریم دراین صورت می گوییم B و A مجموعه های **منفصل Disjoint** هستند.



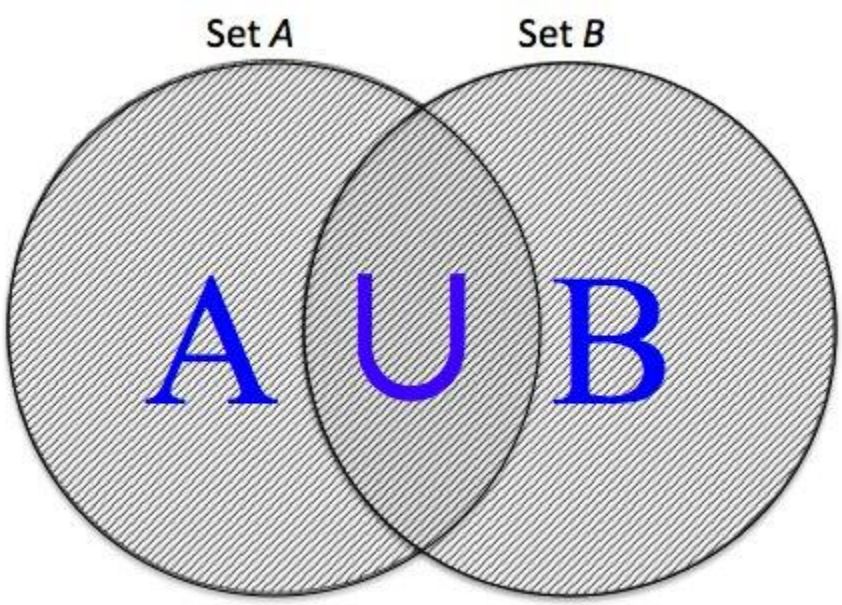
دانلود از سایت ریاضی سرا

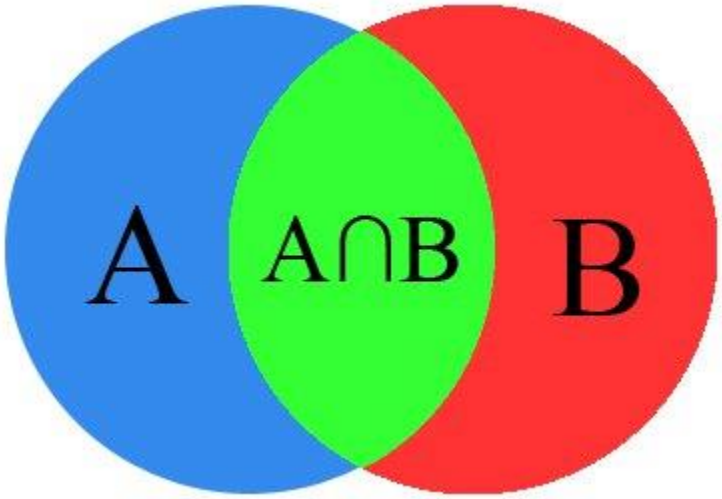
و یا مثلا اگر $A \subset B$ باشد ، مانند شکل زیر نشان می دهیم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

دو شکل زیر اتحاد و اشتراک دو مجموعه را نشان می دهند.





شمارش Counting

وقتی که مثلا تعداد دانش آموزان کلاس را می شماریم در حقیقت یک همانندی ایجاد می کنیم بین هر شئی که شمرده می شود و اعداد حسابی $۱, ۲, ۳, \dots, n$

اگر یک مجموعه A با مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \dots ۲۵\}$ همانند شود می گوییم در مجموعه A بیست و پنج عضو وجود دارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نماد $n(A) = ۲۵$ یعنی مجموعه A دارای ۲۵ عضو است.

چون مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد ، می نویسیم.

$$n(\emptyset) = ۰$$

اگر تعداد اعضای یک مجموعه ، یک عدد صحیح غیر منفی است ، می گوییم آن مجموعه **محدود Finite** است. در غیر اینصورت می گوییم مجموعه **نا محدود Infinite** است. ما در مورد مجموعه های محدود بحث می‌کنیم.

به مثال ۲ مجددا نگاه کنید. یک مجموعه با ۳ عضو ، دارای $۲^{۳} = ۸$ زیر مجموعه دارد. پس

اگر A یک مجموعه با n عضو باشد ، پس A دارای ۲^{n} زیر مجموعه است.

مثال ۵ – تجزیه و تحلیل یک بر رسی Analyzing a Survey

در یک بررسی ۱۰۰ دانشجوی دانشگاه ، ۳۵ دانشجو در کلاس جبر ثبت نم کرده بودند و ۵۲ دانشجو در کلاس کامپیوتر و ۱۸ دانشجو در هر دو کلاس.

الف –چند دانشجو در کلاس جبر و یا در کلاس کامپیوتر ثبت نام کرده اند؟

ب –چد دانشجو در هیچ کدام از این کلاس ها ثبت نام نکرده اند؟

پاسخ

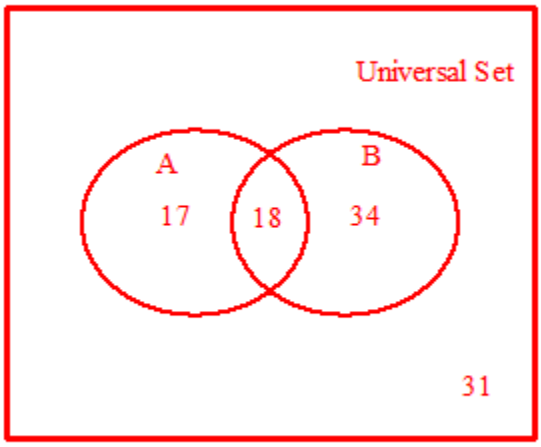
فرض می کنیم A مجموعه دانشجویان در کلاس جبر باشد. و B نجموأه دانشجویان در کلاس کامپیوتر باشد. پس طبق اطلاعات داده شده در صورت مساله

$$n(A) = ۳۵ \qquad n(B) = ۵۲ \qquad n(A \cap B) = ۱۸$$

به شکل زیرتوجه کنید. چون طبق فرض مساله $n(A \cap B) = ۱۸$ می دانیم که قسمت مشترک مجموعه A و B دارای ۱۸ عضو است. علاوه بر این میدانیم که بقیه دایره که مجموعه A را نمایندگی می کند ، دارای $۱۷ = ۱۸ - ۳۵$ عضو است. به همین ترتیب می دانیم که بقیه دائره که مجموعه B را نمایندگی می کند ، دارای $۳۴ = ۱۸ - ۵۲$ عضو دارد. پس نتیجه می گیریم که $۱۷ + ۱۸ + ۳۴ = ۶۹$ دانشجو در کلاس جبر و یا کامپیوتر ثبت نام کرده اند.

ب -چون ۱۰۰ دانشجو مورد بررسی قرار گرفته اند پس $۱۰۰ - ۶۹ = ۳۱$ دانشجو در هیچ کدام از این دو کلاس ثبت نام نکرده اند.

دانلود از سایت ریاضی سرا



از مثال ۵ نتیجه جالبی در مورد شمارش بدست می آوریم. اگر در مثال ۵ برای بدست اودن تعداد دانشجویان که در کلاس جبر و یا در کلاس کامپیوتر ثبت نام کرده اند ، تعداد اعضای مجموعه A و B را با هم جمع می کردیم ، در حقیقت اعضای مشترک در هر دو مجموعه را دو مرتبه به حساب می آوردیم. یعنی $A \cap B$ را دو مرتبه حساب می کردیم. پس برای شمارش صحیح عناصری که در A و یا در B هستند ، یعنی بر بدست آوردن $n\ (A \cup B)$ باید عناصر $A \cap B$ را از $n(\ A) + n(B\ )$ کسر کنیم.

قضیه فرمول شمارش Counting Formula Theorem

اگر A و B دو مجموعه محدود باشند ، پس

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)} \qquad (۱)$$

پس اگر بخواهیم مثال ۵ را مطابق فرمول (۱) حل کنیم خواهیم داشت.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۳۵ + ۵۲ - ۱۸ = ۶۹$$

حالت مخصوص فرمول (۱) هنگامی اتفاق می افتد که دو مجموعه A و B هیچ فصل مشترکی نداشته باشند ، یعنی $A \cap B = \emptyset$ و لذا $n(A \cap B) = ۰$ پس در این صورت خوهیم داشت

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)} \qquad (۲)$$ اگر $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$ پس

دانلود از سایت ریاضی سرا

قضیه اصل کلی جمع در شمارش General Addition Principle of Counting Theorem

اگر n مجموعه $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ هیچ دو مجموعه فصل مشترکی نداشته باشند ، پس

$$n(A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n) = n(A_۱) + n(A_۲) + \cdots + n(A_n) \qquad (۳)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۳.۱

اگر $A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ **و** $B = \{۱, ۵, ۶, ۷\}$ **و** $C = \{۱, ۲, ۴, ۶, ۸, ۹\}$ **باشد ، مجموعه های زیر را پیدا کنید.**

۱) $A \cup B$

۲) $A \cup C$

۳) $A \cap B$

۴) $A \cap C$

۵) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

۶) $(A \cap B) \cup C$

اگر مجموعه جامع $U = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ **و** $A = \{۱, ۳, ۴, ۵, ۹\}$ **و** $B = \{۲, ۴, ۶, ۷, ۸\}$ **و** $C = \{۱, ۳, ۴, ۶\}$ **باشد ، مجموعه های زیر را پیدا کنید.**

۷) $\overline{A}$

۸) $\overline{C}$

۹) $\overline{A \cap B}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $\overline{B \cup C}$

۱۱) $\overline{A} \cup \overline{B}$

۱۲) $\overline{B} \cap \overline{C}$

۱۳) $\overline{A \cap \overline{C}}$

۱۴ – کلیه زیر مجموعه های $\{a, b, c, d\}$ را بنویسید.

۱۵ – اگر $n(A \cup B) = ۱۰, n(A \cap B) = ۲۰, n(B) = ۱۵$ باشد ، $n(A \cup B)$ را پیدا کنید.

۱۶ – اگر $n(A \cap B) = ۳۵, n(B) = ۴۰, n(A) = ۲۰$ باشد ، $n(A \cap B)$ را پیدا کنید.

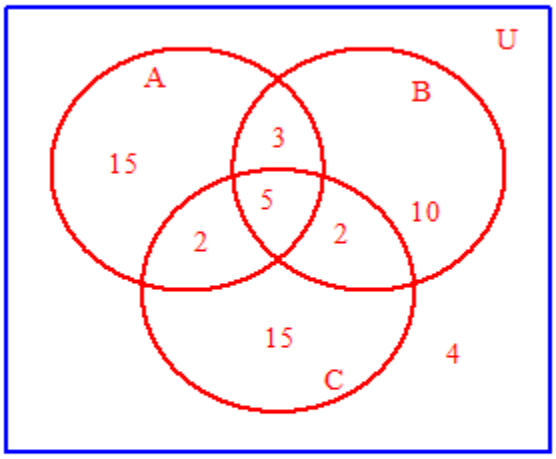
۱۷ – اگر $n(A) = ۲۰, n(B) = ۱۰, n(A \cap B) = ۵۰, n(A \cup B)$ باشد ، $n(A)$ را پیدا کنید.

برای تمرینات ۲۵ – ۱۸ از شکل زیر استفاده کنید.

۱۸ - مجموعه A چند عضودارد؟

۱۹ - مجموعه B چند عضودارد؟

دانلود از سایت ریاضی سرا



۲۰

در مجموعه A یا B چند عنصر وجود دارد؟

۲۱ -در مجموعه A و B چند عنصر وجود دارد؟

۲۲ – چند عضو در A وجود دارد اما در C وجود ندارد؟

۲۳ – چند عنصر در A نیست؟

۲۴ – چند عنصر هم در A هم در B و هم در C هست؟

۲۵ – چند عنصر یا در A یا در B و یا در C است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۶ – در یک بر رسی از ۵۰۰ نفر ، ۲۰۰ نفر گفتند تصمیم دارند یک لباس شویی بخرند. ۱۵۰ نفر گفتند تصمیم دارند یک اتومبیل بخرند. ۲۵ نفر گفتند تصمیم دارند هم لباس شویی بخرند و هم اتومبیل.

الف –چند نفر نه لباس شویی میخرند و نه اتومبیل؟

ب –چند نفر فقط اتومبیل خواهند خرید؟

۲۷ – در یک بر رسی از ۱۰۰ نفر نتایج زیر بدست آمد.

تعداد ۵۰ نفر دارای سهام در IBM بودند.

تعداد ۴۰ نفر دارای سهام در ATT بودند.

تعداد ۴۵ نفر دارای سهام در GE بودند.

تعداد ۲۰ نفر دارای سهام هم در IBM و هم در GE بودند.

تعداد ۱۵ دارای سهم هم در ATT و هم در GE بودند.

تعداد ۲۰ نفر دارای سهام هم در IBM و هم در ATT بودند.

تعداد ۵ نفر دارای سهام در هر سه شرکت بودند.

الف –چند نفر از این افراد که مورد مطالعه قرار گرفتند در هیچ کدام از این شرکت ها سهام نداشتند؟

ب –چند نفر فقط در IBM سهام داشتند؟

ج -چند نفر فقط در GE سهام داشتند؟

د –چند نفر نه در IBM و نه در GE سهام نداشتند ؟

ه –چند نفر یا در IBM و یا در ATT سهام داشتند ، اما در GE سهام نداشتند؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۳.۱

اگر $A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۶,۷\}$ و $C=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ باشد ، مجموعه های زیر را پیدا کنید.

۱) $A\cup B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}\cup\{۱,۵,۶,۷\}=\{۱,۳,۵,۶,۷,۹\}$

۲) $A\cup C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}\cup\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

۳) $A\cap B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}\cap\{۱,۵,۶,۷\}=\{۱,۵,۷\}$

۴) $A\cap C\ \{۱,۳,۵,۷,۹\}\cap\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}=\{۱,۹\}$

۵) $(A\cap C)\cup(B\cap C)=(\{۱,۳,۵,۷,۹\}\cap\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\})\cup(\{۱,۵,۶,۷\}\cap\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\})$

$=\{۱,۹\}\cup\{۱,۶\}=\{۱,۶,۹\}$

۶) $(A\cap B)\cup C=\{۱,۵,۷\}\cup\ \{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

اگر مجموعه جامع $U=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و $A=\{۱,۳,۴,۵,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۷,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۴,۶\}$ باشد ، مجموعه های زیر را پیدا کنید.

۷) $\overline{A}=\{۰,۲,۶,۷,۸\}$

۸) $\overline{C}=\{۰,۲,۵,۷,۸,۹\}$

۹) $\overline{A\cap B}=\overline{\{۴\}}=\{۰,۱,۲,۳,۵,۶,۷,۸,۹\}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $\overline{B \cup C} = \overline{\{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۸\}} = \{۰, ۵, ۹\}$

۱۱) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{۰, ۲, ۶, ۷, ۸\} \cup \{۰, ۱, ۳, ۵, ۹\} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$

۱۲) $\overline{B} \cap \overline{C} = \{۰, ۱, ۳, ۵, ۹\} \cap \{۰, ۲, ۵, ۷, ۸, ۹\} = \{۰, ۵, ۹\}$

۱۳) $\overline{A \cap \overline{C}} = \overline{\{۱, ۳, ۴, ۵, ۹\} \cap \{۰, ۲, ۵, ۷, ۸, ۹\}} = \overline{\{۵, ۹\}} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۸\}$

۱۴ – کلیه زیر مجموعه های $\{a, b, c, d\}$ را بنویسید.

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\},$$
$$\{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$$

۱۵ – اگر $n(A) = ۱۵, n(B) = ۲۰, n(A \cap B) = ۱۰$ باشد ، $n(A \cup B)$ را پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۱۵ + ۲۰ - ۱۰ = ۲۵$$

۱۶ – اگر $n(A) = ۲۰, n(B) = ۴۰, n(A \cup B) = ۳۵$ باشد ، $n(A \cap B)$ را پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۳۵ = ۲۰ + ۴۰ - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = ۲۰ + ۴۰ - ۳۵ = ۲۵$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷ – اگر $n(A \cup B) = ۵۰, n(A \cap B) = ۱۰, n(B) = ۲۰$ باشد ، $n(A)$ را پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

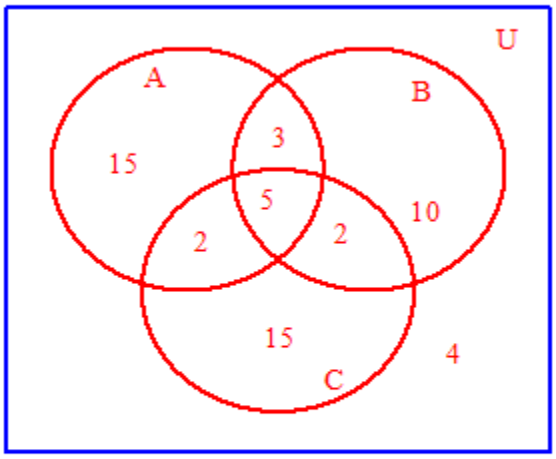
$$۵۰ = n(A) + ۲۰ - ۱۰$$

$$n(A) = ۵۰ - ۱۰ = ۴۰$$

برای تمرینات ۲۵ – ۱۸ از شکل زیر استفاده کنید.

۱۸ - مجموعه A چند عضودارد؟ $n(A) = ۱۵ + ۵ + ۳ + ۲ = ۲۵$

۱۹ - مجموعه B چند عضودارد؟ $n(B) = ۱۰ + ۵ + ۳ + ۲ = ۲۰$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۰

در مجموعه A یا B چند عنصر وجود دارد؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = ۲۵ + ۲۰ - ۸ = ۳۷$$

۲۱ -در مجموعه A و B چند عنصر وجود دارد؟

$$n(A \cap B) = ۸$$

۲۲ – چند عضو در A وجود دارد اما در C وجود ندارد؟

طبق اطلاعات شکل $n(A \cap C) = ۲ + ۵ = ۷$ پس $n(A) - n(A \cap C) = ۲۵ - ۷ = ۱۸$

۲۳ – چند عنصر در A نیست؟

$$n(\overline{A}) = ۱۰ + ۲ + ۱۵ + ۴ = ۳۱$$

۲۴ – چند عنصر هم در A هم در B و هم در C هست؟

$$n(A \cap B \cap C) = ۵$$

۲۵ – چند عنصر یا در A یا در B و یا در C است؟

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= ۲۵ + ۲۰ + ۲۴ - ۸ - ۷ - ۷ + ۵ = ۵۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۶ – در یک بر رسی از ۵۰۰ نفر ، ۲۰۰ نفر گفتند تصمیم دارند یک لباس شویی بخرند. ۱۵۰ نفر گفتند تصمیم دارند یک اتومبیل بخرند. ۲۵ نفر گفتند تصمیم دارند هم لباس شویی بخرند و هم اتومبیل.

پاسخ

فرض می کنیم مجموعه افرادی که لباس شویی میخرند A و مجموعه افرادی که اتومبیل میخرند B باشد.

$$n(A) = ۲۰۰, n(B) = ۱۵۰, n(A \cap B) = ۲۵, U = ۵۰۰$$

الف –چند نفر نه لباس شویی میخرند و نه اتومبیل؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۲۰۰ + ۱۵۰ - ۲۵ = ۳۲۵$$

$$U - n(A \cup B) = ۵۰۰ - ۳۲۵ = ۱۷۵ \text{ نفر}$$

پس ۱۷۵ نفر نه لباس شویی میخرند و نه اتومبیل .

ب –چند نفر فقط اتومبیل خواهند خرید؟

$$n(B) - n(A \cap B) = ۱۵۰ - ۲۵ = ۱۲۵ \text{ نفر}$$

پس ۱۲۵ نفر فقط اتومبیل خواهند خرید.

۲۷ – در یک بر رسی از ۱۰۰ نفر نتایج زیر بدست آمد.

تعداد ۵۰ نفر دارای سهام در IBM بودند.

تعداد ۴۰ نفر دارای سهام در ATT بودند.

تعداد ۴۵ نفر دارای سهام در GE بودند.

تعداد ۲۰ نفر دارای سهام هم در IBM و هم در GE بودند.

تعداد ۱۵ دارای سهم هم در ATT و هم در GE بودند.

تعداد ۲۰ نفر دارای سهام هم در IBM و هم در ATT بودند.

تعداد ۵ نفر دارای سهام در هر سه شرکت بودند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

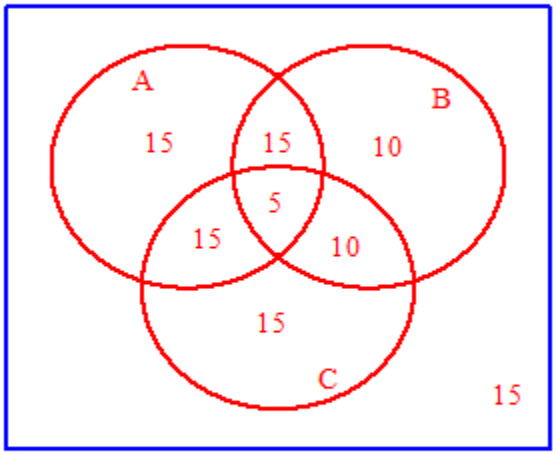
فرض می کنیم A مجموعه سهام دارن IBM و B مجموعه سهام دارن ATT و C مجموعه سهام دارن GE باشد.

پس

$$U = ۱۰۰, n(A) = ۵۰, n(B) = ۴۰, n(C) = ۴۵, n(A \cap C) = ۲۰،$$

$$n(B \cap C) = ۱۵, n(A \cap B) = ۲۰, n(A \cap B \cap C) = ۵$$

شکل زیر طرح ون برای این مساله است.



الف –چند نفر از این افراد که مورد مطالعه قرار گرفتند در هیچ کدام از این شرکت ها سهام نداشتند؟

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= ۵۰ + ۴۰ + ۴۵ - ۲۰ - ۱۵ - ۲۰ + ۵ = ۸۵$$

$$U - n(A \cup B \cup C) = ۱۰۰ - ۸۵ = ۱۵$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پس ۱۵ نفر از این ۱۰۰ در هیچ کدام از این سه شرکت ، سهام نداشتند.

ب –چند نفر فقط در IBM سهام داشتند؟

با توجه به شکل بالا ، ۱۵ نفر فقط در IBM سهام داشتند.

ج -چند نفر فقط در GE سهام داشتند؟

با توجه به شکل بالا ، ۱۵ نفر فقط در GE سهام داشتند.

د –چند نفر نه در IBM و نه در GE سهام نداشتند ؟

با توجه به شکل بالا ، ۱۰ نفر فقط در ATT سهام داشتند. همچنین در قسمت الف پیدا کردیم که ۱۵ نفر در هیچ کدام از این سه شرکت سهام نداشتند ، پس

$$۱۰ + ۱۵ = ۲۵$$

تعداد ۲۵ نفر نه در IBM و نه در GE سهام نداشتند.

ه –چند نفر یا در IBM و یا در ATT سهام داشتند ، اما در GE سهام نداشتند؟

$$۱۵ + ۱۵ + ۱۰ = ۴۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳.۲ -جایگشت ها و ترکیبات Permutations and Combinations

شمارش نقش مهمی در بسیاری از پژوهش ها و زمینه ها بازی می کند. برای مثال در احتمالات ، آمار ، علوم کمپیوتری

روش های شمارش یک رشته از ریاضیات است موسوم به **Combinations**

در این بخش در مورد یک نوع شمارش مخصوص بحث می کنیم.

با یک مثال شروع می کنیم. این مثال اصول کلی شمارش را نشان می دهد.

مثال ۱ – شمارش تعداد غذا های ممکن Counting the Number of Possible Meals

در یک رستوران شام با قمت ثابت ، انتخاب های زیر را عرضه می کند.

پیش غذا : شامل سوپ یا سالاد

غذای اصلی : شامل مرغ ، کباب ، جگر ، و یا همبرگر

دسر : شامل بستنی و یا کیک

چند نوع مختلف غذا می توان سفارش داد ؟

پاسخ

برای پیش غذا دو انتخاب داریم. یا سوپ سفارش می دهیم و یا سالاد.

اگر سوپ سفارش بدهیم ، برای غذای اصلی ، چهار انتخاب داریم.

اگر مثلا مرغ سفارش دهیم باز دو انتخاب برای دسر داریم

پس خلاصه

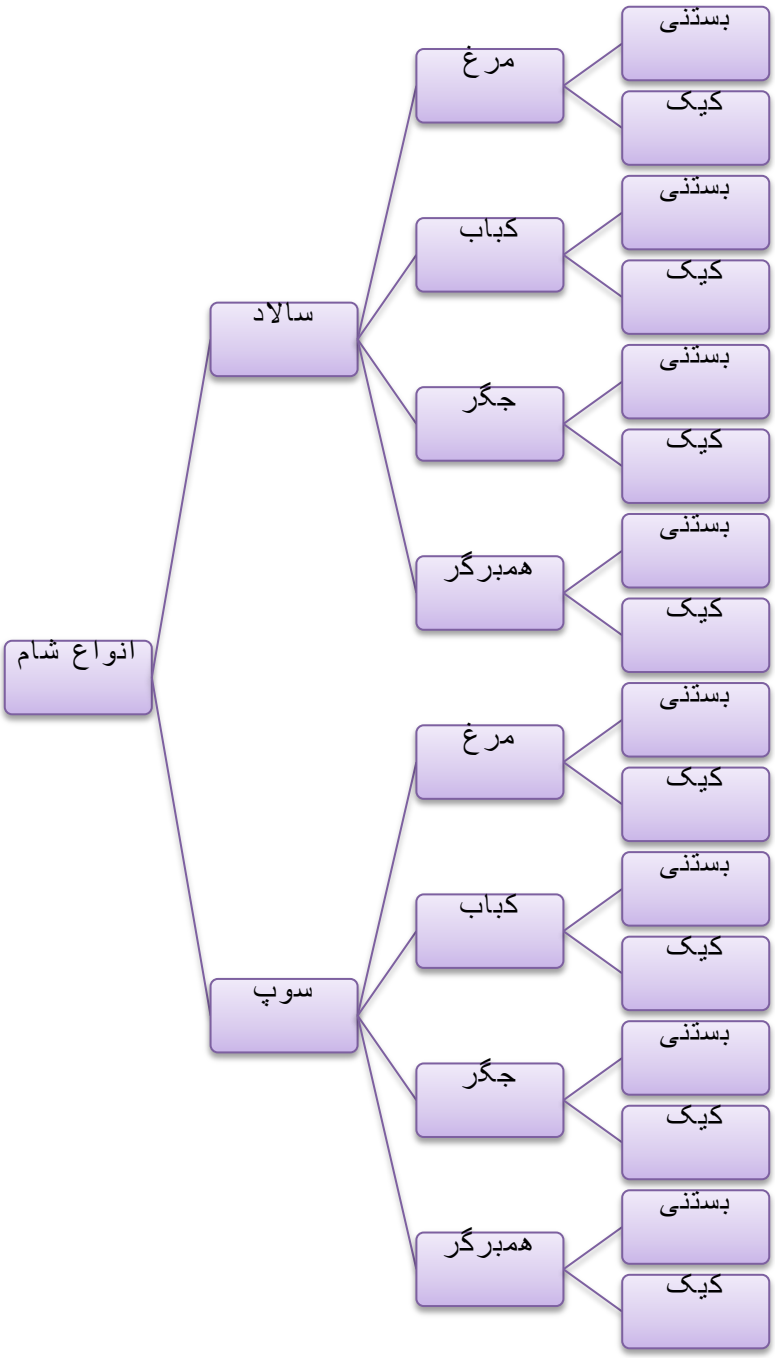
تعداد انتخاب پیش غذا	**تعداد انتخاب غذای اصلی**	**تعداد انتخاب دسر**
دو انتخاب	چهار انتخاب	دو انتخاب

پس

$$۲ * ۴ * ۲ = ۱۶$$

لذا ۱۶ نوع انتخاب داریم. به دیاگرام زیر توجه کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا



قضیه اصل ضرب در شمارش Multiplication Principle of Counting Theorem

اگر انجام یک کار شامل دنباله ای از انتخاب ها باشد ، که در آن برای انتخاب اول p انتخاب وجود داشته باشد ، و برای دومین انتخاب q انتخاب وجود داشته باشد ، و برای انتخاب سوم r انتخاب و به همین ترتیب تا اتمام کار پس

$$p * q * r * \ldots$$

طریق مختلف می توان آن کار را انجام داد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ –

اگر بخواهیم یک کد بسازیم که فقط شامل دو نماد باشد. اولین نماد یکی از حروف بی صدای الفبای فارسی باشد و دومین نماد یکی از ارقام از صفر تا نه باشد، چند نوع کد می توان ساخت؟ الفبای فارسی شامل ۳۲ حرف بیصدا است.

پاسخ

کار ما شامل دو انتخاب است. اولین انتخاب یعنی انتخاب یک حرف الفبا خود شامل ۳۲ انتخاب است. پس برای انتخاب اول ۳۲ انتخاب داریم. و برای هریک از ۳۲ انتخاب اول ، ده انتخاب برای ارقام داریم .لذا

۳۲ ∗ ۱ ۰= ۳۲ ۰

تعداد ۰ ۳۲ نوع کد دو نمادی می توان ساخت.

جا یگشت ها Permutations

جا یگشت هاعبارت است از آرایش یا قرار دادن مرتب r شئی از n شئی

سه نوع جایگشت مورد بر ریسی قرار می دهیم.

۱- n شئی با هم **متفاوت Distinct** هستند و تکرار مجاز است.

۲ – n شئی با هم **متفاوت Distinct** هستند و تکرار مجاز نیست.

۳- n شئی با هم متفاوت نیستند.

فعلا دو نوع اول را مورد مطالعه قرار می دهیم.

مثال ۳ – جایگشت ;متفاوت ;با تکرار Permutation; Distinct; with Repetitions

اگر بخواهیم برای فرود گاه های ایران در شهر های مختلف یک کد با سه حرف از حروف الفبای فارسی بسازیم ، چند نوع کد ممکن است اگر تکرار حروف جایزباشد؟

پاسخ

میخواهیم سه حرف از ۳۲ حروف الفبا را انتخاب کنیم و آنها را بترتیب مرتب کنیم و تکرار حروف هم مجاز است. این مثالی است که در آن انتخاب سه شئی از ۳۲ شئی متفاوت است با امکان تکرار .

دانلود از سایت ریاضی سرا

اینجا سه انتخاب داریم و در هر انتخاب ۳۲ انتخاب مو جود است. پس طبق اصل ضرب داریم.

$$۳۲ * ۳۲ * ۳۲ = ۳۲۷۶۸$$

لذا ۳۲۷۶۸ نوع کد مختلف می توان ساخت.

مثال ۳ را می توان مطابق ذیل خلاصه کرد.

قضیه :جایگشت ها :اشیائ مختلف :با امکان تکرار

Theorem Permutations : Distinct Objects: with Repetition

تعداد آرایش های مرتب r شئی از n شئی متفاوت با امکان تکرار n^r است.

مثال ۴ – جایگشت ها :متفاوت :بدون تکرار Permutations: Distinct: without Repetition

فرض کنید می خواهیم یک کد سه حرفی از حروف الفبای فارسی بسازیم که در آن حروف تکرار نشده باشند. چند نوع کد می توان ساخت ؟

پاسخ

کار ما شامل سه انتخاب است. اولین انتخاب ، لازم است از ۳۲ حروف الفبا ، یکی را انتخاب کنیم. چون یک حرف نمی تواند بیش از یک مرتبه بکار برده شود ، پس برای انتخاب دوم ۳۱ حرف داریم. برای انتخاب سوم ۳۰ حرف داریم. پس طبق اصل ضرب خواهیم داشت.

$$۳۲ * ۳۱ * ۳۰ = ۲۹۷۶۰$$

لذا ۲۹۷۶۰ نوع کد سه حرفی بدون تکرار حروف می توان ساخت.

برای جایگشت نوع دوم نماد زیر را بکار می بریم.

نماد $P(n,r)$ نمایش تعداد آرایش های r شئی از n شئی متفاوت با $r \leq n$ و بدون تکرار است.

پس مثال شماره ۴ را می توان به صورت زیر حل کرد.

$$P(۳۲,۳) = ۳۲ * ۳۱ * ۳۰ = ۲۹۷۶۰$$

مثال ۵ – به صف کردن اشخاص Lining Up People

به چند طریق می توان پنج نفر را به صف کرد؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

مسلم است که پنج نفر با هم متفاوت هستند. وقتی که یک نفر را در صف قرار دادیم نمی توانیم او را تکرار کنیم. همچنین ترتیب قرار دادن افراد مهم است. پس ما جایگشت پنج شئی از پنج شئی داریم.

$$P(۵,۵) = ۵ \circ ۴ \circ ۳ \circ ۲ \circ ۱ = ۱۲۵$$

پس به ۱۲۰ طریق می توان پنج نفر را به صف کرد.

قضیه جایگشت های r شئی از n شئی متفاوت بدون تکرار از فرمول زیر بدست می آید. ترتیب مهم است.

Permutations of r Objects Chosen from n distinct Objects without Repetition is given

Order Is Important

$$\boldsymbol{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}} \qquad (۱)$$

مثال ۶ محاسبه جایگشت ها Computing Permutations

مقادیر زیر را پیدا کنید.

$a)\ \ P(۷,۳) \qquad b)\ \ P(۶,۱)$

پاسخ

$$a)\ \ P(۷,۳) = \frac{۷!}{۴!} = \frac{۷ * ۶ * ۵ * ۴!}{۴!} = ۷ * ۶ * ۵ = ۲۱۰$$

یا

$$P(۷,۳) = ۷ * ۶ * ۵ = ۲۱۰$$

$$b)\ \ P(۶,۱) = \frac{۶!}{۵!} = \frac{۶ * ۵!}{۵!} = ۶$$

یا

دانلود از سایت ریاضی سرا

$P(۶,۱) = ۶$

مثال ۷ – مساله روز تولد. The Birthday Problem

می دانیم که روز های تولد آرمان ، آرش ، و هومن متفاوت است. اگر بخواهیم همه راه های ممکن را بنویسیم ، چند طریق ممکن است باشد؟ سال را ۳۶۵ روز حساب کنید.

پاسخ

$$P(۳۶۵,۳) = \frac{۳۶۵!}{۳۶۲!} = \frac{۳۶۵ * ۳۶۴ * ۳۶۳ * ۳۶۲!}{۳۶۲!} = ۳۶۵ * ۳۶۴ * ۳۶۳ = ۴۸۲۲۸۱۸۰$$

ترکیبات Combinations

در یک جایگشت ، ترتیب مهم است. مثلا آرایش های ABC و CAB و BAC سه آرایش مختلف حروف A و B و C است. در بسیاری از مورد ، ترتیب قرار گرفتن اشیا مهم نیست.

یک **ترکیب A Combination** عبارت است از قرار دادن r شئی از n شئی مختلف بدون تکرار و بدون در نظر داشتن ترتیب قرار گرفتن آنها. اینجا $r \leq n$ است و نماد $C(n,r)$ برای نمایش ترکیبات r شئی از n شئی متفاوت بکار می رود.

مثال ۸ – اگر بخواهیم از حروف a, b, c, d دو تای آنها را انتخاب کنیم ، کلیه ترکیبات ممکن را بنویسید.

پاسخ

چون در ترکیب ، ترتیب قرار گرفتن اشیا مهم نیست ، پس ab و ba با هم تفاوتی ندارند و لذا فقط یکی از آنها را مینویسیم. پس خواهیم داشت.

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd$$

پس $C(۴,۲) = ۶$

قضیه تعداد ترکیبا ت r شئی از n شئی متفاوت بدون در نظر گرفتن ترتیب از فرمول زیر بدست می آید.

Number of Combinations of r Objects from n Distinct Objects , Order Is not Important

دانلود از سایت ریاضی سرا

Is given

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (۲)$$

مثال ۹ مقادیر زیر را پیدا کنید.

$a)\ \ C(۳,۱) \qquad b)\ \ C(۶,۳) \qquad c)\ \ C(n,n) \qquad d)\ \ C(n,۰)$

پاسخ

$$a)\ \ C(۳,۱)=\frac{۳!}{۱!\,۲!}=\frac{۳*۲!}{۱!\,۲!}=۳$$

$$b)\ \ C(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!\,۳!}=\frac{۶*۵*۴*۳!}{۳!\,۳!}=۵*۴=۲۰$$

$$c)\ \ C(n,n)=\frac{n!}{n!\,۰!}=۱$$

$$d)\ \ C(n,۰)=\frac{n!}{۰!\,n!}=۱$$

مثال ۱۰

به چند طریق می توان سه نفر را از بین هفت نفر برای شرکت در یک جلسه انتخاب کرد؟

پاسخ

واضح است که ۷ نفر با هم متفاوت هستند. اما ترتیب انتخاب این افراد مهم نیست. پس مساله از ما می خواهد تعداد ترکیبات سه شئی از هفت شئی را پیدا کنیم.

$$C(۷,۳)=\frac{۷!}{۳!\,۴!}=\frac{۷*۶*۵*۴!}{۳!\,۴!}=\frac{۷*۶*۵}{۶}=۷*۵=۳۵$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱۱ – به چند طریق می توان یک کمیته شامل ۲ استاد و ۳ دانشجو تشکیل داد اگر ۶ استاد و ۱۰ دانشجو واجد شرایط باشند؟

پاسخ

مساله را می توان به دو قسمت تقسیم کرد. تعداد طرقی که استادان را می توان انتخاب کرد ، $C(۶,۲)$ و تعداد طرقی که دانشجویان را می توان انتخاب کرد ، $C(۱۰,۳)$ و طبق اصل ضرب تعداد کمیته هایی را که می توان تشکیل داد به صورت زیر بدست می آید.

$$C(۶,۲)*C(۱۰,۳)=\frac{۶!}{۲!\,۴!}*\frac{۱۰!}{۳!\,۷!}=\frac{۶*۵*۴!}{۴!\,۲!}*\frac{۱۰*۹*۸*۷!}{۳!\,۷!}=\frac{۳۰}{۲}*\frac{۷۲۰}{۶}=۱۸۰۰$$

قضیه

جایگشت هایی که شامل n شئی نا متمایز هستند.

Permutations Involving n Objects That are Not Distinct

فرمول زیر را بدون اثبات برای قضیه بالا بکار می بریم.

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n}_۱!*\boldsymbol{n}_۲!*\ldots*\boldsymbol{n}_k!} \qquad (۳)$$

در فرمول بالا $n=n_۱+n_۲+\cdots+n_k$ است.

مثال ۱۲ – به چند طریق می توان ۸ پرچم را به طور عمودی کنار هم نهاد ، اگر ۴ پرچم سفید ، ۳ پرچم آبی و یک پرچم سفید باشد؟

پاسخ

میخواهیم تعداد ممکن قرار دادن ۸ شئی که ۴ عدد آن یک نوع هستند ، ۳ عدد آن یک نوع و یکی هم نوع دیگر پیدا کنیم.

$$\frac{۸!}{۴!\,۳!\,۱!}=\frac{۸*۷*۶*۵*۴!}{۴!\,۳!\,۱!}=۲۸۰$$

پس ۲۸۰ نوع مختلف قرار دادن پرچم ها ممکن است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۱۳.۲

مقادیر زیر را پیدا کنید.

۱) $P(۶,۲)$

۲) $P(۷,۲)$

۳) $P(۴,۴)$

۴) $P(۷,۰)$

۵) $P(۸,۳)$

۶) $C(۸,۲)$

۷) $C(۸,۶)$

۸) $C(۱۵,۱۵)$

۹) $C(۱۸,۱)$

۱۰) $C(۲۶,۱۳)$

۱۱- مردی پنج دست لباس و سه جفت کفش دارد. چند نوع مختلف لباس و کفش می تواند بپوشد؟

۱۲ – چندنوع کد با دو حرف از حروف A,B,C,D می توان ساخت ؟ تکرار حروف مجاز است.

۱۳ – چند نوع عدد سه رقمی را می توان با ارقام صفر و یک ساخت ؟ تکرار ارقام مجاز است.

۱۴ - چند نوع عدد سه رقمی را می توان با ارقام صفر تا نه ساخت ؟ تکرار ارقام مجاز است.

۱۵ – به چند طریق می توان چهار نفر را در یک صف قرار داد؟

۱۶ – به چند طریق می توان پنج جعبه متفاوت را روی هم گذاشت؟

۱۷ – چند نوع کد سه حرفی می توان با حروف A,B,C,D,E ساخت ؟ بدون تکرار حروف .

۱۸ – به چند طریق می‌توان یک کمیته چهار نفره را از بین هفت نفر تشکیل داد ؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹ – چند نوع جواب ممکن است به یک تست صحیح یا غلط داده شود اگر تعداد سوالها ۱۰ باشد؟

۲۰

چند نوع جواب ممکن است به پنج سئوال چهار جوابه داده شود؟

۲۱ – چند نوع عدد چهار رقمی می توان از ارقام صفر تا نه ساخت ، اگر رقم اول نباید صفر باشد و تکرار مجاز است؟

۲۲ – میخواهیم پنج کتاب مختلف را در قفسه کتاب بگذاریم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

۲۳ – اداره راهنمایی و رانندگی می خواهد پلاک اتومبیل سفارش بدهد. این پلاک ها باید از چپ به راست از دو حرف از ۳۲ حروف الفبای فارسی و سپس چهار رقم از ارقام صفر تا نه تشکیل شده باشد. چند نوع از این پلاک ها ممکن است ساخته شود؟ اگر

الف –حروف و ارقام میتواند تکرار شوند.

ب -حروف می توانند تکرار شوند ، اما تکرار ارقام مجاز نیست.

ج –تکرار نه حروف و نه ارقام مجاز نیست.

۲۴ – یک قفل رمز دار دارای ۵۰ عدد است. برای باز کردن آن ، اول آنرا موافق حرکت عقربه ساعت می چرخانیم تا روی اولین عدد رمزقرار گیرد . سپس مخالف حرکت عقربه ساعت روی دومین عدد رمز و در نهایت موافق حرکت عقربه ساعت روی سومین عدد رمز می چرخانیم. اگر ارقام تکرار نمی شوند ، چند نوع مختلف رمز ممکن است؟

۲۵ - می خواهیم یک کمیته متشکل از ۲ عضو اداری ، سه استاد و پنج دانشجو تسکیل دهیم. اگر چهار عضو اداری ، هشت استاد و بیست دانشجو واجد شرایط باشند ، چند نوع کمیته مختلف می توان تشکیل داد؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۶ – چند کلمه یازده حرفی (حقیقی یا غیر حقیقی)می توان از حروف کلمه $MATHEMATICS$ ساخت ؟

۲۷ – در یک کیسه هفت توپ سفید و سه توپ قرمز وجود دارد. چند طریق می توان سه توپ از کیسه بیرون بیاوریم اگر

الف –دو توپ سفید و یک توپ قرمز باشد

ب –هر سه توپ سفید باشد.

ج –هر سه توپ قرمز باشد.

پاسخ تمرینات ۱۳.۲

مقادیر زیر را پیدا کنید.

۱) $$P(۶,۲)=\frac{۶!}{۴!}=\frac{۶*۵*۴!}{۴!}=۳۰$$

۲) $$P(۷,۲)=\frac{۷!}{۵!}=\frac{۷*۶*۵!}{۵!}=۴۲$$

۳) $$P(۴,۴)=\frac{۴!}{(۴-۴)!}=\frac{۴!}{۰!}=\frac{۴*۳*۲*۱}{۱}=۲۴$$

۴) $$P(۷,۰)=\frac{۷!}{(۷-۰)!}=\frac{۷!}{۷!}=۱$$

۵) $$P(۸,۳)=\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸*۷*۶*۵!}{۵!}=۳۳۶$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $C(۸,۲) = \frac{۸!}{۲!\,۶!} = \frac{۸ * ۷ * ۶!}{۲!\,۶!} = ۲۸$

۷) $C(۸,۶)\ \frac{۸!}{۶!\,۲!} = \frac{۸ * ۷ * ۶!}{۶!\,۲!} = ۲۸$

۸) $C(۱۵,۱۵) = \frac{۱۵!}{۱۵!\,(۱۵-۱۵)!} = \frac{۱۵!}{۱۵!\,*۰!} = ۱$

۹) $C(۱۸,۱) = \frac{۱۸!}{۱!\,(۱۸-۱)!} = \frac{۱۸ * ۱۷!}{۱ * ۱۷!} = ۱۸$

۱۰) $C(۲۶,۱۳) = \frac{۲۶!}{۱۳!\,(۲۶-۱۳)!} = \frac{۲۶!}{۱۳!\,۱۳!} = \frac{۲۶ * ۲۵ * ۲۴ * \ldots * ۱۴ * ۱۳!}{۱۳!\,۱۳!}$

$= \frac{۲۵ * ۲۵ * \ldots * ۱۴}{۱۳ * ۱۲ * \ldots * ۲ * ۱} = ۱۰۴۰۰۶۰۰$

۱۱- مردی پنج دست لباس و سه جفت کفش دارد. چند نوع مختلف لباس و کفش می تواند بپوشد؟

$۵ * ۳ = ۱۵$

۱۲ – چندنوع کد با دو حرف از حروف A, B, C, D می توان ساخت ؟ تکرار حروف مجاز است.

$n^r = ۴^۲ = ۱۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳ – چند نوع عدد سه رقمی را می توان با ارقام صفر و یک ساخت ؟ تکرار ارقام مجاز است.

$$n^r = ۲^۳ = ۸$$

۱۴ - چند نوع عدد سه رقمی را می توان با ارقام صفر تا نه ساخت ؟ تکرار ارقام مجاز است.

$$n^r = ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$$

۱۵ – به چند طریق می توان چهار نفر را در یک صف قرار داد؟

برای قرار دادن شخص اول ، چهار انتخاب داریم. مسلم است که یک نفر را تکرار کرد. پس برای قرار دادن نفر دوم در صف ، سه انتخاب داریم. بهمین ترتیب تا نفر آخر.پس

$$n! = ۴! = ۴ * ۳ * ۲ * ۱ = ۲۴$$

۱۶ – به چند طریق می توان پنج جعبه متفاوت را روی هم گذاشت؟

مانند مثال ۱۵ عمل می کنیم.

$$n! = ۵! = ۵ \circ ۴ \circ ۳ \circ ۲ \circ ۱ = ۱۲۰$$

۱۷ – چند نوع کد سه حرفی می توان با حروف A, B, C, D, E ساخت ؟ بدون تکرار حروف .

$$P(۵,۳) = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵ * ۴ * ۳ * ۲!}{۲!} = ۶۰$$

۱۸ – به چند طریق می‌توان یک کمیته چهار نفره را از بین هفت نفر تشکیل داد ؟

برای انتخاب چهار نفر از هفت نفر ، ترتیب انتخاب اشخاص مهم نیست. هر یک از هفت نفر را می توان اول انتخاب کرد. اما اشخاص با هم مغایر هستند. مساله از ما می خواهد تعداد ترکیبات انتخاب چهار نفر از هفت نفر را پیدا کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$C(۷,۴)=\frac{۷!}{۴!\,(۷-۴)!}=\frac{۷*۶*۵*۴!}{۴!\,۳!}=\frac{۷*۶*۵}{۶}=۳۵$$

۱۹ – چند نوع جواب ممکن است به یک تست صحیح یا غلط داده شود اگر تعداد سوالها ۱۰ باشد؟

برای سوال اول دو جواب ممکن است داده شود. یعنی یا صحیح را انتخاب می کنیم و یا غلط را. برای سوال دوم هم دو انتخاب و به همین ترتیب تا سوال دهم. پس

$$۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

۲۰

چند نوع جواب ممکن است به پنج سئوال چهار جوابه داده شود؟

مانند تمرین ۱۹ عمل می کنیم.

$$۴^{۵}=۱۰۲۴$$

۲۱ – چند نوع عدد چهار رقمی می توان از ارقام صفر تا نه ساخت ، اگر رقم اول نباید صفر باشد و تکرار مجاز است؟

چون رقم اول نمی تواند صفر باشد ، پس برای رقم اول نه انتخاب داریم. برای سه رقم دیگر ، ده انتخاب داریم با امکان تکرار. پس

$$۹*۱۰*۱۰*۱۰=۹*۱۰^{۳}=۹۰۰۰$$

۲۲ – میخواهیم پنج کتاب مختلف را در قفسه کتاب بگذاریم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

$$P(۵,۵)=\frac{۵!}{(۵-۵)}=\frac{۵!}{۰!}=۵!=۱۲۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳ – اداره راهنمایی و رانندگی می خواهد پلاک اتومبیل سفارش بدهد. این پلاک ها باید از چپ به راست از دو حرف از ۳۲ حروف الفبای فارسی و سپس چهار رقم از ارقام صفر تا نه تشکیل شده باشد. چند نوع از این پلاک ها ممکن است ساخته شود؟ اگر

الف –حروف و ارقام میتواند تکرار شوند.

چون ۳۲ حرف داریم که میتوانند تکرار شوند. و همچنین ۱۰ رقم داریم که باز تکرار مجاز است. پس

$$۳۲^{۲} * ۱۰^{۴} = ۱۰۲۴۰۰۰۰$$

ب -حروف می توانند تکرار شوند ، اما تکرار ارقام مجاز نیست.

$$۳۲^{۲} * ۱۰ * ۹ * ۸ * ۷ = ۵۱۶۰۹۶۰$$

ج –تکرار نه حروف و نه ارقام مجاز نیست.

$$۳۲ * ۳۱ * ۱۰ * ۹ * ۸ * ۷ = ۴۹۹۹۶۸۰$$

۲۴ – یک قفل رمز دار دارای ۵۰ عدد است. برای باز کردن آن ، اول آنرا موافق حرکت عقربه ساعت می چرخانیم تا روی اولین عدد رمزقرار گیرد . سپس مخالف حرکت عقربه ساعت روی دومین عدد رمز و در نهایت موافق حرکت عقربه ساعت روی سومین عدد رمز می چرخانیم. اگر ارقام تکرار نمی شوند ، چند نوع مختلف رمز ممکن است؟

$$۵۰ * ۴۹ * ۴۸ = ۱۱۷۶۰۰$$

۲۵ - می خواهیم یک کمیته متشکل از ۲ عضو اداری ، سه استاد و پنج دانشجو تسکیل دهیم. اگر چهار عضو اداری ، هشت استاد و بیست دانشجو واجد شرایط باشند ، چند نوع کمیته مختلف می توان تشکیل داد؟

$$C(۴,۲) * C(۸,۳) * C(۲۰,۵) = ۶ * ۵۶ * ۱۵۵۰۴ = ۵۲۰۹۳۴۴$$

۲۶ – چند کلمه یازده حرفی (حقیقی یا غیر حقیقی)می توان از حروف کلمه $MATHEMATICS$ ساخت ؟

درکلمه $MATHEMATICS$ حروف M, A, T دو مرتبه تکرار شده است و بقیه حروف فقط یک مرتبه ، پس

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{n!}{n_۱! * n_۲! * \dots n_k!} = \frac{۱۱!}{۲!\,۲!\,۲!\,۱!\,۱!\,۱!\,۱!\,۱!\,۱!} = \frac{۱۱!}{۸} = ۴۹۸۹۶\,۰۰$$

۲۷ – در یک کیسه هفت توپ سفید و سه توپ قرمز وجود دارد. چند طریق می توان سه توپ از کیسه بیرون بیاوریم اگر

الف –دو توپ سفید و یک توپ قرمز باشد

$$C(۷,۲) * C(۳,۱)) = \frac{۷!}{۲!\,۵!} * \frac{۳!}{۱!\,۲!} = \frac{۷ * ۶ * ۵!}{۲!\,۵!} * \frac{۶}{۲} = ۶۳$$

ب –هر سه توپ سفید باشد.

$$C(۷,۳) = \frac{۷!}{۳!\,۴!} = \frac{۷ * ۶ * ۵ * ۴!}{۳!\,۴!} = ۳۵$$

ج –هر سه توپ قرمز باشد.

$$C(۳,۳) = \frac{۳!}{۳!\,(۳-۳)!} = ۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳.۳ -احتمال Probability

احتمال رشته ای ازریاضیات است که به آزمایش هایی می پردازد که **نتایج تصادفی Random Outcome** دارند. اما در عین حال نظم وقاعده های مشخصی را پیروی می کند . این آزمایش ها همیشه نتایج یکسان به بار نمی آورند. پس نتیجه یک مشاهده قابل پیش بینی نیست.

ولی نتیجه آزمایش طی یک **پروسه طولانی Long Period الگو های منظمی Regular Patterns** را ارائه می دهند که بتوانیم نتایج را با **صحت قابل توجهی Remarkable Accuracy** پیش بینی کنیم.

مثال ۱ – شیر یا خط با یک سکه بی عیب Tossing a Fair Coin

هنگام شیر یا خط کردن یک سکه بی عیب ، میدانیم که نتیجه یا **شیر Head** است و یا **خط Tail**

نکته – معمولا در هر کجای دنیا از جمله ایران یک طرف سکه یک عکس انسان و یا پرنده و یا حیوان است که در ایران از قدیم الایام شیر خوانده میشد و در انگلیسی Head

طرف دیگر سکه معمولا نوشته ای که دلالت بر ارزش سکه و یا مناسبت آن سکه دارد و در ایران خط نامیده میشد و در انگلیسی Tail

هر مرتبه که سکه را به طرف بالا پرتاب می کنیم ، نمی توانیم پیش بینی کنیم که چه اتفاقی می افتاد. اما اگر چندین مرتبه سکه را به بالا پرتاب کنیم ، مشاهده می کنیم که تعداد دفعاتی که شیر می آید تقریبا مساوی تعداد دفعاتی است که خط می آید. پس **منطقی Reasonable** است اگر احتمال شیر آمدن را $\frac{1}{2}$ و احتمال خط آمدن را هم $\frac{1}{2}$ **قلمداد کنیم Assign**

مدل های احتمال Probability Models

بحث مثال ۱ لزوم ساختن یک مدل احتمال برای یک مرتبه شیر یا خط کردن یک سکه بی عیب را نشان می دهد . مدل احتمال شامل دو **مولفه Component** است. یکی **فضای نمونه Sample Space**

و دیگری **تعیین احتمالات Assignment of Probabilities**

یک **فضای نمونه Sample Space** که با حرف S نشان می دهیم عبارت است از مجموعه تمام احتمالاتی که ممکن است در یک آزمایش رخ بدهد. هر عضو فضای نمونه نتیجه یا پیش آمد نامیده می شود. برای هر **نتیجه یا پیش آمد Outcome** یک عدد **اختصاص میدهیم Assign** و آنرا **احتمالProbability** وقوع آن پیش آمد می نامیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

این احتمال دو **خصوصیات Properties** دارد.

۱ - احتمالی که به هر پیش آمداختصاص داده می شود نا منفی است.

۲ – مجموع همه احتمالات مساوی یک است.

اگر یک مدل احتمال دارای فضای نمونه

$$S = \{e_{۱,} e_{۲}, \dots, e_n\}$$

باشد ، $e_{۱}, e_{۲}, \dots, e_n$ نتایج ممکن هستند ، و اگر $P(e_{۱}), P(e_{۲}), \dots, P(e_n)$ دلالت بر احتمالات مربوط به این نتایج کنند ، پس

$$\boldsymbol{P(e_{۱}) \geq ۰, P(e_{۲}) \geq ۰, \dots, P(e_n) \geq ۰} \qquad (۱)$$

$$\sum_{i=۱}^{n} \boldsymbol{P(e_i) = P(e_{۱}) + P(e_{۲}) + \cdots + P(e_n) = ۱} \qquad (۲)$$

مثال ۲ – ساختن یک مدل احتمال Constructing a Probability Model

دریک **آزمایش An Experiment** یک طاس بی عیب می اندازیم . یک مدل احتمال برای این آزمایش بسازید.

یک طاس یا تاس عبارت است از یک مهره استخوانی مکعب که در شش طرف آن نقطه هایی از یک تا شش دارد و در بازی نرد بکار میرود . و در عمل می گوییم طاس می ریزیم یا طاس می اندازیم.

پاسخ – میدانیم که یک فضای نمونه S شامل تمام احتمالاتی است که می تواند رخ بدهد. چون وقتی که یک طاس میریزیم ، یکی از شش سطح طاس نمایان می شود. پس فضای نمونه شامل

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

است. چون فرض بر این است که طاس ما بی عیب است ، پس احتمال نمایان شدن هر یک از شش سطح طاس با هم برابر است. پس احتمالات زیر را خواهیم داشت.

$$P(۱)=\frac{۱}{۶},P(۲)=\frac{۱}{۶},P(۳)=\frac{۱}{۶},P(۶)=\frac{۱}{۶},P(۵)=\frac{۱}{۶},P(۶)=\frac{۱}{۶}$$

یعنی احتمال این که روی صفحه نمایان شده ، یک نقطه باشد ، $\frac{۱}{۶}$ است. برای صفحات دیگر هم همین احتمال وجود دارد.

حال اگر طاس را دستکاری کنیم یعنی یک یا دو یا سه طرف را سنگین تر کنیم بطوری که احتمالات زیر را داشته باشیم.

$$P(۱)=۰,P(۲)=۰,P(۳)=\frac{۱}{۳},P(۴)=\frac{۲}{۳},P(۵)=۰,P(۶)=۰$$

این تخصیص احتمال هنگامی ممکن است که طاس دستکاری شده باشد بطوری که فقط ۳ و یا ۴ نمایان شود و احتمال آمدن ۴ دو برابر احتمال آمدن ۳ باشد. این تخصیص احتمال هم با تعریف ما که در بالا گفتیم ، همخوانی دارد. چون هر یک از احتمالات نا منفی هستند و مجموع احتمالات هم برابر یک است.

مثال ۳ – یک سکه به بالا پرتاب می کنیم. سکه دستکاری شده است. بطوری که احتمال آمدن شیر Head سه برابر احتمال آمدن خط Tail است. یک مدل احتمال برای این آزمایش بسازید.

پاسخ

فضای نمونه $S=\{H,T\}$ است. اگر فرض کنیم x دلالت بر احتمال آمدن خط باشد ، پس

$$P(T)=x \quad و \quad P(H)=۳x$$

چون مجموع احتمالات نتایج ممکن باید مساوی یک باشد ، پس

$$P(T)+P(H)=x+۳x=۱$$

$$۴x=۱$$

$$x=\frac{۱}{۴}$$

پس احتمالات را مطابق زیر مشخص می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$P(T) = \frac{۱}{۴} \qquad P(H) = \frac{۳}{۴}$$

یک اتفاق An Event یک زیر مجموعه فضای نمونه است که با حرف E نشان می دهیم . برای درک مفهوم کلمه **اتفاق Event** به مثال شماره ۴ مراجعه کنید

.

احتمال یک اتفاق Probability of an Event که با نماد $P(E)$ نشان داده می شود ، اگر $E \neq \emptyset$ باشد ، عبارت است از جمع احتمالات پیش آمدها در E

اگر $E = \emptyset$ پس $P(E) = ۰$

اگر $E = S$ باشد ، پس $P(E) = P(S) = ۱$ است.

پیش آمد های با شانس مساوی Equally Likely Outcomes

وقتی که هر یک از اعضای فضای نمونه شانس مساوی برای وقوع داشته باشند ، می گوییم آن آزمایش دارای عناصر با شانس مساوی است.

قضیه احتمال وقوع پیش آمد های با شانس مساوی یا هم شانس

Theorem Probability for Equally Likely Outcomes

اگر یک آزمایش n پیش آمد هم شانس داشته باشد ، و اگر تعداد دفعاتی که اتفاق E می تواند رخ دهد m باشد ، پس احتمال E مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$\boldsymbol{P(E)} = \frac{\text{تعداد دفعاتی که } \boldsymbol{E} \text{ میتواند روی دهد}}{\text{تعداد همه احتمالات منطقی}} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} \qquad (۳)$$

اگر S فضای نمونه این آزمایش باشد ، پس

$$\boldsymbol{P(E)} = \frac{\boldsymbol{n(E)}}{\boldsymbol{n(S)}} \qquad (۴)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۴ – محاسبه احتمالات اتفاقاتی که شامل پیش آمد های هم شانس هستند

Calculating Probabilities of Events Involving Equally Likely Outcomes

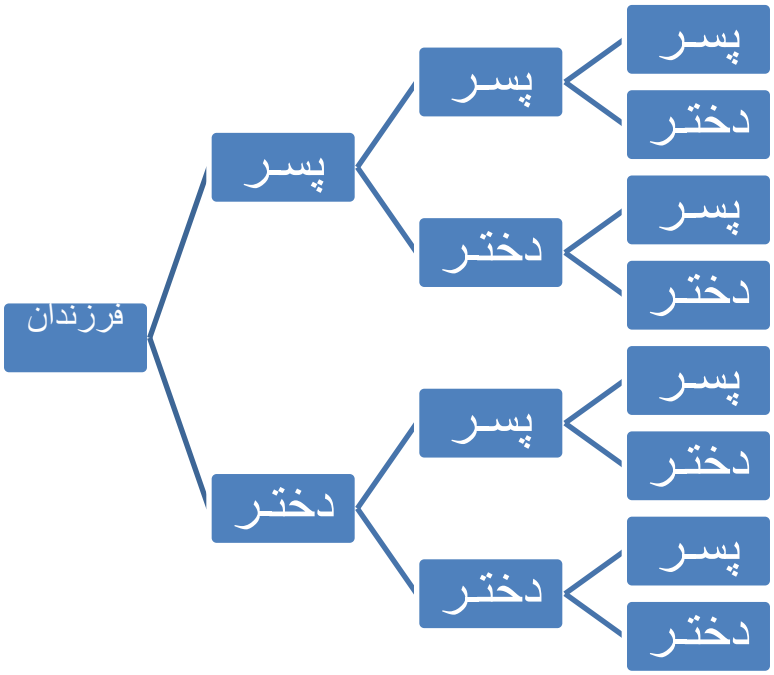
احتمال این که در یک خانواده سه فرزندی ، دو پسر و یک دختر وجود داشته باشد ، را حساب کنید. فرض کنید پیش آمد ها هم شانس هستند.

پاسخ

برای دختر حرف G و برای پسر حرف B بکار می بریم. فضای نمونه این آزمایش مطابق زیر است.

$$S = \{BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG\}$$

اولین فرزند ممکن است پسر یا دختر باشد. اگر اولین فرزند پسر بود ممکن است دومین فرزند یا پسر باشد یا دختر. اگر اولین و دومین فرزند ها پسر بودند ، سومین فرزند ممکن است پسر یا دختر باشد. به همین ترتیب مانند دیاگرام زیر پیش میرویم.



پس $n(S) = ۸$

میخواهیم احتمال وقوع اتفاق E یعنی داشتن دو پسر و یک دختر ,را بدانیم. از دیاگرام بالا نتیجه می گیریم که

$$E = \{BBG, BGB, GBB\}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پس $n(E) = ۳$ چون پیش آمد ها هم شانس هستند ، احتمال وقوع E مطابق زیر خواهد بود.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

مثال ۵ – محاسبه احتمالات مرکب Computing Compound Probabilities

آزمایش ریختن یک تاس بی عیب را در نظر بگیرید. فرض کنید E اتفاق آمدن یک عدد فرد باشد و F اتفاق آمدن یک یا دو باشد.

الف –اتفاق E و F را بنویسید.

ب –اتفاق E یا F را بنویسید.

ج- $P(E)$ و $P(F)$ را محاسبه کنید.

د - $P(E \cap F)$ را محاسبه کنید.

ه - $P(E \cup F)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

فضای نمونه $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ پس $n(S) = ۶$

چون تاس بی عیب است ، پس پیش آمد ها هم شانس هستند. اتفاق E یعنی آمدن یک عدد فرد ، $E = \{۱, ۳, ۵\}$ است. اتفاق F یعنی آمدن یک یا دو ، $F = \{۱, ۲\}$ است. پس $n(E) = ۳$ و $n(F) = ۲$ است.

الف –کلمه " و " در احتمالات یعنی اشتراک دو اتفاق. پس

$$E \cap F = \{۱, ۳, ۵\} \cap \{۱, ۲\} = \{۱\}$$

و لذا $n(E \cap F) = ۱$

ب –کلمه " یا " در احتمالات یعنی اتحاد دو اتفاق ، پس

$$E \cup F = \{۱, ۳, ۵\} \cup \{۱, ۲\} = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$$

و لذا $n(E \cup F) = ۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –فرمول شماره ۴ را بکار می بریم.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

د –

$$P(E\cap F)=\frac{n(E\cap F)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

ه –

$$P(E\cup F)=\frac{n(E\cup F)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

قاعده جمع Addition Rule را می توان برای پیدا کردن احتمال اتحاد دو اتفاق بکار برد.

قضیه اگر E و F دو اتفاق باشند ،

$$\boldsymbol{P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)} \qquad (۵)$$

مثلا در مثال ۵ قسمت ه می توان نوشت.

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۶}+\frac{۲}{۶}-\frac{۱}{۶}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۶ – اگر داشته باشیم $P(E)=۰/۲$ و $P(F)=۰/۳$ و $P(E\cap F)=۰/۱$

مطلوب است $P(E\cup F)$

پاسخ

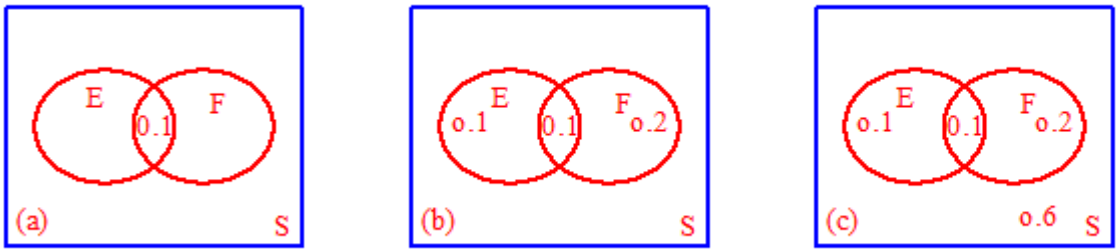
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = ۰/۲ + ۰/۳ - ۰/۱ = ۰/۴$$

برای مثال بالا می توان از دیاگرام ون استفاده کرد. ابتدا از $P(E \cap F) = ۰/۱$ شروع می کنیم , شکل (a) سپس در دائره مربوط به E می نویسیم $۰/۲ - ۰/۱ = ۰/۱$ و برای دائره مربوط به F می نویسیم

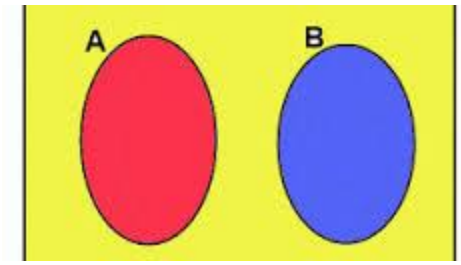
$$۰/۳ - ۰/۱ = ۰/۲$$

ب - در نهایت $۱ - [۰/۱ + ۰/۱ + ۰/۲ = ۰/۶]$ برای شکل (c)



یاد آوری –اگر دو مجموعه هیچ فصل مشترکی با هم نداشته باشند ، می گوییم آن دو مجموعه **مجزا Disjoint** هستند.

مانند شکل زیر $A \cap B = \emptyset$



اگر دو اتفاق E و F مجزا باشند ، بطوری که $E \cap F = \emptyset$ می گوییم آنها **نا سازگار Mutually Exclusive** هستند. در این صورت $P(E \cap F) = ۰$ و قاعده جمع به شکل زیر تغییر می کند.

قضیه اتفاق های نا سازگار Mutually Exclusive Events Theorem

اگر E و F اتفاق های نا سازگار باشند ، پس

$$\boldsymbol{P(E \cup F) = P(E) + P(F)} \qquad (۶)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۷ ـ محاسبه احتمالات مرکب اتفاق های نا سازگار

Computing Compound Probabilities of Mutually Exclusive Events

اگر $P(E) =۰/۴$ و $P(F) =۰/۲۵$ و E و F اتفاق های نا سازگار هستند ، مطلوب است $P(E \cup F)$

پاسخ

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) =۰/۴ +۰/۲۵ =۰/۶۵$$

متمم ها Complements

یاد آوری – اگر A یک مجموعه باشد ، متمم A که با نماد $\overline{A}$ نشان داده می شود ، عبارت است از مجموعه کلیه اعضای مجموعه جامع U که در A نیست.به همین طریق متمم یک اتفاق را تعریف می کنیم.

متمم یک اتفاق Complement of an Event

فرض می کنیم S فضای نمونه یک آزمایش باشد و E یک اتفاق. **متمم** $\boldsymbol{E}$ که با نماد $\overline{\boldsymbol{E}}$ نمایش داده می شود ، عبارت است از مجموعه کلیه پیش آمد های در فضای نمونه S که پیش آمد های دراتفاق E نیستند.

متمم یک اتفاق E یعنی $\overline{E}$ در یک فضای نمونه S دارای دو خصوصیت زیر است.

$$E \cap \overline{E} = \emptyset \qquad E \cup \overline{E} = S$$

چون E و $\overline{E}$ نا سازگار هستند ، بر اساس فرمول (۶) خواهیم داشت.

$$P\left(E \cup \overline{E}\right) = P(S) = ۱ \quad P(E) + P\left(\overline{E}\right) = ۱ \quad P\left(\overline{E}\right) = ۱ - P(E)$$

پس نتیجه زیر را خواهیم داشت.

قضیه محاسبه احتمالات اتفاق های متمم Computing Probabilities of Complementary Events

اگر E یک اتفاق باشد و $\overline{E}$ متمم آن ، پس

$$\boldsymbol{P\left(\overline{E}\right) = ۱ - P(E)} \qquad (۷)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۸ – محاسبه احتمالات با استفاده از متمم ها

Computing Probabilities Using Complements

گزارشگر هوا اظهار داشت که احتمال باران فردا ۴۰% است. احتمال باران نیامدن چقدر است؟

پاسخ

فرض می کنیم متمم **باران** بشود **باران نه**

$$P(\text{باران نه}) = ۱ - P(\text{باران}) = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶$$

پس احتمال باران نیامدن فردا ۶۰% است.

مثال ۹ – مساله روز تولد Birthday Problem

احتمال این که در یک گروه ۱۰ نفره حد اقل دو نفر یک روز تولد داشته باشند چقدر است؟ سال را ۳۶۵ روز حساب کنید.

پاسخ

فرض می کنیم همه افرد شانس مساوی داشته باشند یعنی احتمال اینکه فلان شخص در روز بیستم ماه فروردین متولد شده باشد ، بهمان شخص هم همان شانس را داشته باشد.

ابتدا تعداد پیش آمد ها را در فضای نمونه مشخص می کنیم. ۳۶۵ احتمال برای روز تولد هر شخص وجود دارد. چون در گروه تعداد ۱۰ نفر وجود دارد ، پس $۳۶۵^{۱۰}$ احتمال برای روز های تولد وجود دارد. پس

$$n(S) = ۳۶۵^{۱۰}$$

می خواهیم احتمال اتفاق E را پیدا کنیم. یعنی حد اقل دو نفر در یک روز متولد شده باشند. شمارش اعضای این مجموعه مشکل است . خیلی آسان تر است اگر اعضای متمم E یعنی $\overline{E}$ را شمارش کنیم.

تعداد عناصر $\overline{E}$ را یعنی $n(\overline{E})$ به طریق زیر پیدا می کنیم. یک نفر را **بطور تصادفی At Random** انتخاب می کنیم. ۳۶۵ احتمال برای روز تولد این شخص وجود دارد. نفر دوم را انتخاب می کنیم. ۳۶۴ احتمال برای روز تولد شخص دوم وجود دارد، زیرا قرار نیست دو نفر یک روز تولد داشته باشد. شخص سومی را انتخاب می کنیم.
۳۶۳ احتمال برای روز تولد این شخص سوم وجود دارد. تا در نهایت به نفر دهم می رسیم. ۳۵۶ احتمال بر این شخص دهم وجود دارد. بر اساس اصل ضرب تعداد احتمالا ت مطابق زیر بدست می آید.

$$n(\overline{E}) = ۳۶۵ * ۳۶۴ * ۳۶۳ * ... * ۳۵۶$$

لذا احتمال اتفاق $\overline{E}$ می شود.

$$P(\overline{E}) = \frac{۳۶۵ * ۳۶۴ * ۳۶۳ * ... * ۳۵۶}{۳۶۵^{۱۰}} \approx ۰/ ۸۸۳$$

پس احتمال این که هیچ دو نفری در این گروه در یک روز تولد نشده باشند

$$P(E) = ۱ - P(\overline{E}) = ۱ - ۰/ ۸۸۳ = ۰/ ۱۱۷$$

احتمالات شامل ترکیبات و جایگشت ها

مثال ۱۰ محاسبه احتمالات Computing Probabilities

بخاطر یک اشتباه ، ۵ تلفن معیوب با ۱۵ تلفن سالم بسته ببدی شدند. تمام تلفن ها یک شکل هستند و همگی برای انتخاب شانس مساوی دارند. سه تلفن را انتخاب می کنیم.

الف –احتمال این که هر سه تلفن معیوب باشند چقدر است؟

ب –احتمل این که فقط دو تای آنها معیوب باشد چقدر است؟

ج –احتمال این که حد اقل دو تای آنها معیوب باشد چقدر است؟

پاسخ

تعداد پیش آمد ها در فضای نمونه S شامل تعداد راه هایی است که سه شی را می‌توان از بیست شی انتخاب کرد. یعنی تعداد ترکیبات انتخاب سه شی از بیست شی. پس

$$n(S) = C(۲۰,۳) = \frac{۲۰!}{۳!\,۱۷!} = \frac{۲۰ * ۱۹ * ۱۸ * ۱۷!}{۶ * ۱۷!} = ۱۱۴۰$$

هر کدام از این پیش آمد ها دارای شانس مساوی هستند.

الف –اگر E اتفاق "سه تلفن معیوب "باشد تعداد اعضای E شامل تعداد راه هایی است که سه تلفن معیوب از پنج تلفن معیوب انتخاب می شوند. یعنی $C(۵,۳) = ۱۰$ لذا احتمال E مطابق زیر خواهد بود.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(۵,۳)}{C(۲۰,)} = \frac{۱۰}{۱۱۴۰} \approx ۰/۰۰۸۸$$

ب –اگر F اتفاق ‘‘فقط دو تلفن معیوب ’’ باشد ، و سه تلفن انتخاب می شود ، پس تعداد اعضای F عبارت است از تعداد راه هایی که دو تلفن معیوب از پنج تلفن معیوب و یک تلفن سالم از ۱۵ تلفن سالم انتخاب می شود. پس

$$C(۵,۲)*C(۱۵,۱)=\frac{!۵}{!۳\,!۲}*\frac{۱۵!}{!۱۴\,!۱}=۱۰*۱۵=۱۵۰ \text{ راه}$$

احتمال F مطابق زیر بدست می آید.

$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{C(۵,۲)*C(۱۵,۱)}{C(۲۰,۳)}=\frac{۱۵۰}{۱۱۴۰}\approx ۰/۱۳۱۶$$

ج –اگر G اتفاق ‘‘حد اقل دو تلفن معیوب ’’ باشد ، و سه تلفن انتخاب می شود ، مثل این است که بگوییم یا فقط دو تلفن معیوب انتخاب می شود و یا سه تلفن معیوب انتخاب می شود. به عبارت دیگر $G=E\cup F$ پس

$$P(G)=P(E)+P(F)=۰/۰۰۸۸+۰/۱۳۱۶=۰/۱۴۰۴$$

مثال ۱۱ – با یک سکه سالم شش مرتبه شیر یا خط می کنیم. (شش مرتبه سکه را به بالا می اندازیم)

الف –احتمال این که دقیقا پنج شیر و یک خط بیاید چقدر است؟

ب –احتمال این که بین چهار و شش شیر بیاید چقدر است؟

پاسخ

الف –تعداد اعضای فضای نمونه از طریق اصل ضرب بدست می آوریم. در هر مرتبه که سکه را به بالا می اندازیم یا شیر Head می آید و یا خط Tail

چون شش مرتبه سکه را به بالا می اندازیم ، پس

$$n(S)=\underbrace{۲*۲*...*۲}_{\text{مرتبه شش}}=۲^{۶}=۶۴$$

چون سکه بی عیب است پس همه پیش آمد ها هم شانس هستند. تعداد راه هایی که می توانیم پنج شیر داشته باشیم از فرمول $C(۶,۵)=۶$ بدست می آید. پس احتمال اتفاق E یعنی آمدن دقیقا پنج شیر و یک خط می شود

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(s)}=\frac{C(۶,۵)}{۲^{۶}}=\frac{۶}{۶۴}\approx ۰/۰۹۳۸$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

نکته مهم –کلمه پیش آمد Outcome و اتفاق Event با هم فرق دارند. پیش آمد یک عضو از یک مجموعه است. در صورتی که اتفاق یک مجموعه است.

ب -فرض می کنیم F اتفاق آمدن "بین چهار و شش شیر " باشد. بدست آوردن بین چهار و شش شیر معادل است یا اتفاق یا چهار یا پنج یا شش شیر. زیرا هر یک از این اتفاق ها با هم **نا سازگار Mutually Exclusive**هستند. (غیر ممکن است هم چهار شیر و هم پنج شیر داشته باشیم ، هنگامی که یک سکه را شش مرتبه به هوا می اندازیم)

پس داریم.

$$P(F) = P(\text{چهار شیر یا پنج شیر یا شش شیر})$$

$$= P(\text{شش شیر}) + P(\text{پنج شیر}) + P(\text{چهار شیر})$$

مانند قسمت الف پیش می رویم.

$$P(F) = \frac{C(۶,۴)}{۲^۶} + \frac{C(۶,۵)}{۲^۶} + \frac{C(۶,۶)}{۲^۶} = \frac{۱۵}{۶۴} + \frac{۶}{۶۴} + \frac{۱}{۶۴} \approx ۰/۳۴۳۸$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینا ت ۱۳.۳

۱ ۰ در یک مدل احتمال ، کدام یک از اعداد زیر می تواند احتمال یک پیش آمد An Outcome باشد؟

۰ ، ۰/۰۱ ۰/۳۵ −۰/۴ ، ۱ ۱/۴

در تمرینات ۶ – ۲ یک مدل احتمال برای هر کدام از آزمایش ها بسازید.

۲ – دو مرتبه شیر یا خط کردن با یک سکه سالم.

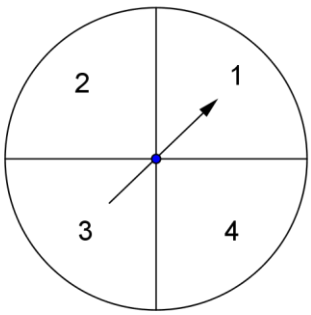
۳ – دو مرتبه شیر یا خط کردن با یک سکه سالم و سپس ریختن یک تاس سالم.

۴ -شیر یا خط با یک سکه سالم ، ریختن یک تاس سالم ، و سپس شیر یا خط با یک سکه سالم.

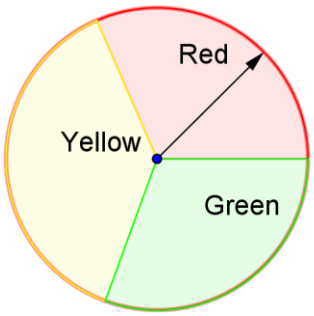
۵ - یک مرتبه شیر یا خط کردن با سه سکه سالم.

۶ - سه مرتبه شیر یا خط با یک سکه سالم .

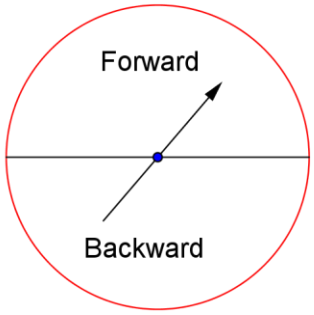
در تمرینات ۱۲ – ۷ از صفحات چرخان زیر برای ساختن یک مدل احتمال برای هر یک از آزمایش ها استفاده کنید.



Spinner 1



Spinner 2



Spinner 3

۷ – صفحه یک را میچرخانیم ، سپس صفحه دو. احتمال آمدن عدد ۲ یا ۴ و بدنبال آن قرمز چقدر است؟

۸ – صفحه سه را میچرخانیم ، و سپس صفحه دو. احتمال آمدن کلمه $Forward$ و بدنبال آن زرد یا سبز چقدر است؟

۹– اول صفحه یک ، سپس صفحه دو و در نهایت صفحه سه را میچرخانیم. احتمال آمدن عدد ۱ و بدنبال آن قرمز یا سبز و در نهایت کلمه $Backward$ چقدر است؟

۱۰

صفحه دو ، سپس صفحه یک و در نهایت صفحه سه را می چرخانیم. احتمال آمدن زرد سپس ا رقام ۲ یا ۴ و سپس کلمه $Forward$ چقدر است؟

۱۱ - صفحه یک را دو مرتبه می چرخانیم ، و سپس صفحه دو. احتمال آمد رقم ۲ و سپس ارقام ۲ یا ۴ و سپس قرمز یا سبز چقدر است؟

۱۲ – صفحه سه را می چرخانیم و سپس صفحه یک را دو مرتبه. احتمال آمدن کلمه $Forward$ و سپس ارقام ۱ یا ۳ و سپس ۲ یا ۴ چقدر است؟

۱۳ – یک سکه دستکاری شده است بطوری که احتمال آمدن شیر چهار برابر احتمال آمدن خط است. چه احتمالی می توان به شیر داد ؟ به خط؟

۱۴ – یک تاس دستکاری شده بطوری که احتمال آمدن یک عدد فرد دو برابر آمدن یک عدد زوج است. چه احتمالی به هر یک از این دو مورد می توان داد؟

در تمرینات ۱۷ – ۱۵ فضای نمونه $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ است. فرض کنید همه پیش آمد ها شانس مساوی دارند.

۱۵ – احتمال اتفاق $E = \{۱, ۲, ۳\}$ را حساب کنید.

۱۶ – احتمال اتفاق $F = \{۳, ۵, ۹, ۱۰\}$ را حساب کنید.

۱۷ – احتمال اتفاق "یک عدد زوج است " E را حساب کنید.

۱۸ – احتمال داشتن سه پسر در یک خانواده سه فرزندی را بدست آورید. فرض کنید پسر و دختر داری شانس مساوی برای تولد شدن دارند.

۱۹ – احتمال داشتن یک دختر و سه پسر در یک خانواده چهار فرزندی را بدست آورید.

در تمرینات ۲۵– ۲۰ احتمال اتفاق مشخص شده را پیدا کنید. فرض کنید $P(A) = ۰/۲۵, P(B) = ۰/۴۵$

۲۰

اگر $P(A \cap B) = ۰/۱۵$ باشد, $P(A \cup B)$ را پیدا کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۱ - اگر $P(A \cup B) = ۰/۶$ باشد ، $P(A \cap B)$ را پیدا کنید.

۲۲ – اگر A و B مجموعه های نا سازگار باشند ، $P(A \cup B)$ را پیدا کنید.

۲۳ – اگر ۳ / ۲۵% از سرقت ها مربوط به سرقت اتومبیل باشد و یک نفر را که قربانی سرقت است بطور تصادفی انتخاب کنیم ، احتمال اینکه این شخص قربانی سرقت اتومبیل نباشد ، چقدر است؟

یک توپ بطور تصادفی از یک جعبه بیرون می آوریم. اگر در این جعبه ۹ توپ سفید ۸ توپ سبز و ۳ توپ نارنجی باشد ، احتمال اتفاق های زیر را پیدا کنید.

۲۴– توپ یا سفید است یا سبز.

۲۵ – توپ یا سفید است یا نارنجی.

۲۶ – توپ سفید نیست.

۲۷– توپ سبز نیست.

۲۸ – در یک کلاس جبر دانشگاه ، ۱۸ دانشجوی سال اول و ۱۵ دانشجوئ سال دوم هست. از ۱۸ دانشجوئ سال اول ، ۱۰ نفرمذکر و از ۱۵ دانشجوی سال دوم ، ۸ نفر مذکر هستند. اگر یک دانشجو را بطور تصادفی انتخاب کنیم.

الف –احتمال این که آن دانشجو یک سال اولی و یا مونث باشد چقدر است؟

ب -احتمال این که آن دانشجو یک سال دومی و یا مذکر باشد چقدر است؟

۲۹ – استادان دپارتمان ریاضی دانشگاه شامل ۴ مونث و ۹ مذکر است. از ۴ استاد مونث ، دو نفر زیر ۴۰ سال و از استادان مذکر سه نفر زیر ۴۰ سال هستند. یک نفر را به طورتصادفی انتخاب می کنیم.

الف –احتمال این که استاد انتخاب شده مونث و یا زیر ۴۰ سال باشد ، چقدر است؟

ب -احتمال این که استاد انتخاب شده مذکر و یا بالای ۴۰سال باشد ، چقدر است؟

۳۰

میخواهیم یک کمیته شش نفره از بین یک گروه ۱۴ نفر ه انتخاب کنیم. در این گروه ، دو نفر سر کارگر ، پنج نفر کارگر ماهر و هفت نفر کارگر غیر ماهر هستند. احتمال این که در این کمیته انتخاب شده ، دو نفر کارگر ماهر و چهار نفر کار گر غیر ماهر باشند چقدر است؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۱۳.۳

۱ ۰ در یک مدل احتمال ، کدام یک از اعداد زیر می تواند احتمال یک پیش آمد An Outcome باشد؟

۰ ، ۰/۰۱ ۰/۳۵ −۰/۴ ، ۱ ۱/۴

پاسخ –اعداد

۰ ۰/۰۱ ۰/۳۵ ۱

در تمرینات ۶ – ۲ یک مدل احتمال برای هر کدام از آزمایش ها بسازید.

۲ – دو مرتبه شیر یا خط کردن با یک سکه سالم.

برای شیر حرف H و برای خط حرف T بکار می بریم.

$$S=\{HH,HT,TH,TT\},P(HH)=\frac{۱}{۴},P(HT)=\frac{۱}{۴},P(TH)=\frac{۱}{۴},P(TT)=\frac{۱}{۴}$$

۳ – دو مرتبه شیر یا خط کردن با یک سکه سالم و سپس ریختن یک تاس سالم.

$$S=\begin{Bmatrix}HH1,HH2,HH3,HH4,HH5,HH6,HT1,HT2,HT3,HT4,HT5,HT6,\\ TH1,TH2,TH3,TH4,TH5,TH6,TT1,TT2,TT3,TT4,TT5,TT6\end{Bmatrix}$$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۲۴}$ دارد.

۴ -شیر یا خط با یک سکه سالم ، ریختن یک تاس سالم ، و سپس شیر یا خط با یک سکه سالم.

$$S=\begin{Bmatrix}H1H,H2H,H3H,H4H,H5H,H6H,H1T,H2T,H3T,H4T,H5T,H6T,\\ T1H,T2H,T3H,T4H,T5H,T6H,T1T,T2T,T3T,T4T,T5T,T6T\end{Bmatrix}$$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۲۴}$ دارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵ - یک مرتبه شیر یا خط کردن با سه سکه سالم.

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

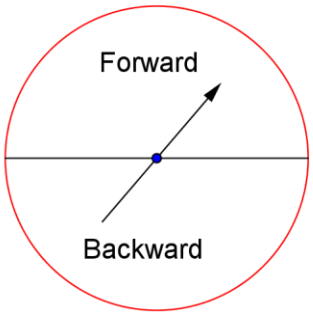
هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۸}$ دارد.

۶ - سه مرتبه شیر یا خط با یک سکه سالم .

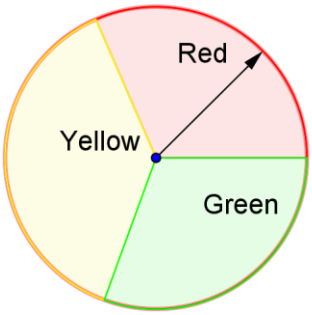
$$S = \{HHH, HTH, HHT, HTT, THH, TTH, THT, TTT\}$$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۸}$ دارد.

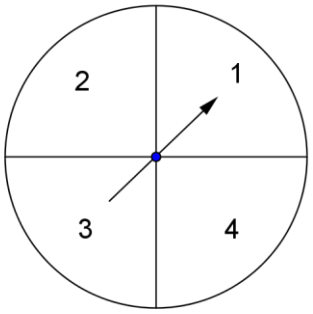
در تمرینات ۱۲ – ۷ از صفحات چرخان زیر برای ساختن یک مدل احتمال برای هر یک از آزمایش ها استفاده کنید. بجای کلمات انگلیسی ، حرف اول آنها را بکار ببرید.



Spinner 3



Spinner 2



Spinner 1

۷ – صفحه یک را میچرخانیم ، سپس صفحه دو. احتمال آمدن عدد ۲ یا ۴ و بدنبال آن قرمز چقدر است؟

$$S = \{1Y, 1R, 1G, 2Y, 2R, 2G, 3Y, 3R, 3G, 4Y, 4R, 4G\}$$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۸}$ دارد. احتمال آمدن عدد ۲ یا ۴ و بدنبال آن قرمز، دو اتفاق نا سازگار هستند.

پس

$$P(2R) + P(4R) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۸ – صفحه سه را میچرخانیم ، و سپس صفحه دو. احتمال آمدن کلمه $Forward$ و بدنبال آن زرد یا سبز چقدر است؟

$S = \{FY, FG, FR, BY, BG, BR\}$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۶}$ دارد.اینجا نیز دو اتفاق نا سازگار داریم. پس

$$P(FY) + P(FG) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

۹– اول صفحه یک ، سپس صفحه دو و در نهایت صفحه سه را میچرخانیم. احتمال آمدن عدد ۱ و بدنبال آن قرمز یا سبز و در نهایت کلمه $Backward$ چقدر است؟

$$S = \{1YF, 1YB, 1RF, 1RB, 1GF, 1GB, 2YF, 2YB, 2RF, 2RB, 2GF, 2GB, 3YF, 3YB,$$
$$3RF, 3RB, 3GF, 3GB, 4YF, 4YB, 4RF, 4RB, 4GF, 4GB\}$$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۲۴}$ دارد. اینجا نیز دو اتفاق نا سازگار داریم. پس

$$P(1RB) + P(1GB) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

۱۰

صفحه دو ، سپس صفحه یک و در نهایت صفحه سه را می چرخانیم. احتمال آمدن زرد سپس ا رقام ۲ یا ۴ و سپس کلمه $Forward$ چقدر است؟

$$S = \{Y1F, Y1B, Y2F, Y2B, Y3F, Y3B, Y4F, Y4B, G1F, G1B, G2F, G2B, G3F, G3B,$$
$$G4F, G4B, R1F, R1B, R2F, R2B, R3F, R3B, R4F, R4B\}$$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۲۴}$ دارد. اینجا نیز دو اتفاق نا سازگار داریم. پس

$$P(Y2F) + P(Y4F) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱ - صفحه یک را دو مرتبه می چرخانیم ، و سپس صفحه دو. احتمال آمد رقم ۲ و سپس ارقام ۲ یا ۴ و سپس قرمز یا سبز چقدر است؟

$$S = \{11R, 11Y, 11G, 12R, 12Y, 12G, 13R, 13Y, 13G, 14R, 14Y, 14G, 21R, 21Y, 21G, 22R, 22Y, 22G, 23R, 23Y, 23G, 24R, 24Y, 24G, 31R. 31Y, 31G, 32R, 32Y, 32G, 33R, 33Y, 33G, 34R, 34Y, 34G, 41R, 41Y, 41G, 42R, 42Y, 42G, 43R, 43Y, 43G, 44R, 44Y, 44G\}$$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۴۱}$ دارد. پس

$$E = \{22R, 22G, 24R, 24G\}; P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

۱۲ – صفحه سه را می چرخانیم و سپس صفحه یک را دو مرتبه. احتمال آمدن کلمه $Forward$ و سپس ارقام ۱ یا ۳ و سپس ۲ یا ۴ چقدر است؟

$$S = \{F11, F12, F13, F14, F21, F22, F23, F24, F31, F32, F33, F34, F41, F42, F43, F44, B11, B12, B13, B14, B21, B22, B23, B24, B31, B32, B33, B34, B41, B42, B43, B44\}$$

هر کدام از این پیش آمد ها احتمال $\frac{۱}{۳۲}$ دارد. پس

$$P(F12) + P(F14) + P(F32) + P(F34) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

۱۳ – یک سکه دستکاری شده است بطوری که احتمال آمدن شیر چهار برابر احتمال آمدن خط است. چه احتمالی می توان به شیر داد ؟ به خط؟

$$P(H) = \frac{۴}{۵}; P(T) = \frac{۱}{۵}$$

۱۴ – یک تاس دستکاری شده بطوری که احتمال آمدن یک عدد فرد دو برابر آمدن یک عدد زوج است. چه احتمالی به هر یک از این دو مورد می توان داد؟

$$P(۱) = P(۳) = P(۵) = \frac{۲}{۹}; P(۲) = P(۴) = P(۶) = \frac{۱}{۹}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات ۱۷ – ۱۵ فضای نمونه $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ است. فرض کنید همه پیش آمد ها شانس مساوی دارند.

۱۵ – احتمال اتفاق $E = \{۱, ۲, ۳\}$ را حساب کنید.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۰}$$

۱۶ – احتمال اتفاق $F = \{۳, ۵, ۹, ۱۰\}$ را حساب کنید.

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

۱۷ – احتمال اتفاق "یک عدد زوج است" E را حساب کنید.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

۱۸ – احتمال داشتن سه پسر در یک خانواده سه فرزندی را بدست آورید. فرض کنید پسر و دختر داری شانس مساوی برای تولد شدن دارند.

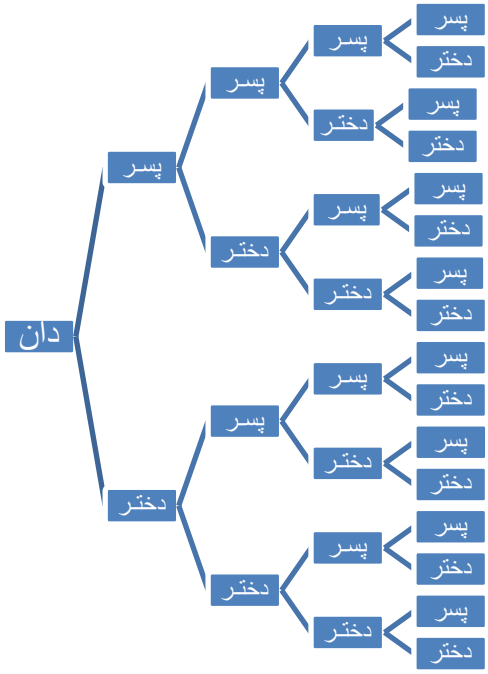
با توجه به مثال ۴ ملاحظه می کنید که $n(S) = ۸$ و $n(E) = ۱$ پس

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۱}{۸}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹ – احتمال داشتن یک دختر و سه پسر در یک خانواده چهار فرزندی را بدست آورید.

دیاگرام مثال ۴ را برای داشتن چهار فرزند بسط می دهیم. اگر E اتفاق "یک دختر و سه پسر "باشد.



ملاحظه می کنید که $n(S) = ۱۶$ و $n(E) = ۴$ پس

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

در تمرینات ۲۵– ۲۰ احتمال اتفاق مشخص شده را پیدا کنید. فرض کنید $\boldsymbol{P(A)} = ۰/۲۵, \boldsymbol{P(B)} = ۰/۴۵$

۲۰

اگر $P(A \cap B) = ۰/۱۵$ باشد, $P(A \cup B)$ را پیدا کنید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۲۵ + ۰/۴۵ - ۰/۱۵ = ۰/۵۵$$

۲۱ - اگر $P(A \cup B) = ۰/۶$ باشد ، , $P(A \cap B)$ را پیدا کنید.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = ۰/۲۵ + ۰/۴۵ - ۰/۶ = ۰/۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۲ – اگر A و B مجموعه های نا سازگار باشند ، $P(A \cup B)$ را پیدا کنید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = ۰/۲۵ + ۰/۴۵ = ۰/۷۰$$

۲۳ – اگر ۳ / ۲۵% از سرقت ها مربوط به سرقت اتومبیل باشد و یک نفر را که قربانی سرقت است بطور تصادفی انتخاب کنیم ، احتمال اینکه این شخص قربانی سرقت اتومبیل نباشد ، چقدر است؟

$$۱ - ۰/۲۵۳ = ۰/۷۴۷$$

یک توپ بطور تصادفی از یک جعبه بیرون می آوریم. اگر در این جعبه ۹ توپ سفید ۸ توپ سبز و ۳ توپ نارنجی باشد ، احتمال اتفاق های زیر را پیدا کنید.

۲۴– توپ یا سفید است یا سبز.

اگر فرض کنیم E اتفاق "توپ سفید است یا سبز" باشد ، و میدانیم $n(S) = ۲۰$ پس

$$P(E) = \frac{C(۹,۱)}{۲۰} + \frac{C(۸,۱)}{۲۰} = \frac{۹}{۲۰} + \frac{۸}{۲۰} = \frac{۱۷}{۲۰}$$

۲۵ – توپ یا سفید است یا نارنجی.

اگر فرض کنیم F اتفاق "توپ سفید یا نارنجی" باشد پس

$$P(F) = \frac{C(۹.۱)}{۲۰} + \frac{C(۳,۲)}{۲۰} = \frac{\frac{۹!}{۸!\,۱!}}{۲۰} + \frac{\frac{۳!}{۲!\,۱!}}{۲۰} = \frac{۹}{۲۰} + \frac{۳}{۲۰} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$$

۲۶ – توپ سفید نیست.

توپ سفید نیست یعنی توپ یا سبز است و یا نارنجی. فرض می کنیم G اتفاق "توپ سبز است یا نارنجی" پس

$$P(G) = \frac{C(۸,۱)}{۲۰} + \frac{C(۳,۱)}{۲۰} = \frac{۸}{۲۰} + \frac{۳}{۲۰} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۷– توپ سبز نیست.

توپ سبز نیست یعنی توپ یا سفید است و یا نارنجی. فرض می کنیم H اتفاق "توپ سفید است یا نارنجی" پس

$$P(H)=\frac{C(۹,۱)}{۲۰}+\frac{C(۳,۱)}{۲۰}=\frac{۹}{۲۰}+\frac{۳}{۲۰}=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

۲۸ – در یک کلاس جبر دانشگاه ، ۱۸ دانشجوی سال اول و ۱۵ دانشجوئ سال دوم هست. از ۱۸ دانشجوئ سال اول ، ۱۰ نفرمذکر و از ۱۵ دانشجوی سال دوم ، ۸ نفر مذکر هستند. اگر یک دانشجو را بطور تصادفی انتخاب کنیم.

الف –احتمال این که آن دانشجو یک سال اولی و یا مونث باشد چقدر است؟

میدانیم که $n(S)=۱۸+۱۵=۳۳$

تعداد دانشجویان مونث سال اول $۱۸-۱۰=۸$ و تعداد دانشجویان مونث سال دوم $۱۵-۸=۷$ است. فرض کنیم E اتفاق "سال اولی یا مونث " باشد پس

$$P(E)=\frac{C(۱۸,۱)}{۳۳}+\frac{C(۷,۱)}{۳۳}=\frac{۱۸}{۳۳}+\frac{۷}{۳۳}=\frac{۲۵}{۳۳}$$

ملاحظه می کنید که از ۱۸ دانشجوی سال اول هشت نفر مونث هستند و لذا هفت مونث سال دوم را اضافه کردیم.

ب -احتمال این که آن دانشجو یک سال دومی و یا مذکر باشد چقدر است؟

فرض می کنیم G اتفاق "یک سال دومی و یا مذکر " باشد.

$$P(G)=\frac{C(۱۵,۱)}{۳۳}+\frac{C(۱۰,۱)}{۳۳}=\frac{۲۵}{۳۳}$$

اینجا نیز دانشجویان مذکر سال دوم را اضافه نکردیم بلکه دانشجویان مذکر سال اول را اضافه کردیم.

۲۹ – استادان دپارتمان ریاضی دانشگاه شامل ۴ مونث و ۹ مذکر است. از ۴ استاد مونث ، دو نفر زیر ۴۰ سال و از استادان مذکر سه نفر زیر ۴۰ سال هستند. یک نفر را به طورتصادفی انتخاب می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

الف –احتمال این که استاد انتخاب شده مونث و یا زیر ۴۰ سال باشد ، چقدر است؟

$$n(S) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

اگر اتفاق " مونث یا زیر چهل " را E فرض کنیم. پس

$$P(E) = \frac{C(۴,۱)}{۱۳} + \frac{C(۳,۱)}{۱۳} = \frac{۴}{۱۳} + \frac{۳}{۱۲} = \frac{۷}{۱۳}$$

ب -احتمال این که استاد انتخاب شده مذکر و یا بالای ۴۰سال باشد ، چقدر است؟

اگر اتفاق "مذکر یا بالای چهل " را G فرض کنیم. پس

$$P(G) = \frac{C(۹,۱)}{۱۳} + \frac{C(۲,۱)}{۱۳} = \frac{۹}{۱۳} + \frac{۲}{۱۳} = \frac{۱۱}{۱۳}$$

۳۰

میخواهیم یک کمیته شش نفره از بین یک گروه ۱۴ نفر ه انتخاب کنیم. در این گروه ، دو نفر سر کارگر ، پنج نفر کارگر ماهر و هفت نفر کارگر غیر ماهر هستند. احتمال این که در این کمیته انتخاب شده ، دو نفر کارگر ماهر و چهار نفر کار گر غیر ماهر باشند چقدر است؟

$$n(S) = C(۱۴,۶) = \frac{۱۴!}{۶!\,۸!} = \frac{۱۴ * ۱۳ * ۱۲ * ۱۱ * ۱۰ * ۹ * ۸!}{۶!\,۸!} = \frac{۲۱۶۲۱۶۰}{۷۲۰} = ۳۰۰۳$$

اگر اتفاق "دو ماهر و چهار غیر ماهر " را E فرض کنیم تعداد اعضای E عبارت است از تعداد راه های انتخاب دو کارگر ماهر از پنج کارگر ماهر و تعداد راه های انتخاب چهار کارگر غیر ماهر از هفت کارگر غیر ماهر , پس

$$n(E) = C(۵,۲) * C(۷,۴) = \frac{۵!}{۲!\,۳!} * \frac{۷!}{۴!\,۳!} = ۱۰ * ۳۵ = ۳۵۰$$

و لذا

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۳۵۰}{۳۰۰۳} \approx ۱۱۷$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)