

## فصل دوم

## معادلات ، نا معادله ها و حل مسائل

## Equations, Inequalities and Problem Solving

ریاضیات وسیله ای است برای حل مسائل در زمینه های گوناگون مانند مهندسی، اقتصاد، پزشکی، بازرگانی، و زیست شناسی. با استفاده از معادلات و نا معادله ها، مدل هایی از زندگی حقیقی می سازیم و آنها را حل می کنیم. پس توانایی ما در حل مسائل بستگی به توانایی ما در حل معادله ها و نا معادله ها دارد. در این فصل در مورد حل معادله ها و نا معادله ها بحث می کنیم.

## ۲.۱ – معادله های خطی یک مجهولی Linear Equations in one Variable

**تعریف** – معادله بیان مساوی بودن دو عبارت است. معادله می گوید که دو عبارت با هم مساوی هستند.

برای حل مسائل لازم است که بتوانیم معادله ها را حل کنیم. در این بخش یک نوع مخصوص معادله یعنی معادله خطی یک مجهولی را حل می کنیم.

## معادله خطی یک مجهولی

معادله خطی یک مجهولی، معادله ای است که بتوان آنرا به شکل زیر نوشت.

$$ax + b = c$$

اینجا  $a$  و  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی هستند و  $a \neq 0$  مانند

$$5x = -15 \quad 7 - y = 3y \quad 4n - 9n + 6 = 0 \quad z = -2$$

هنگامی که یک عدد بجای مجهول معادله قرار می دهیم و نتیجه یک تساوی درست است، می گوییم این عدد حل یا جواب Solution آن معادله است. مثلاً عدد یک جواب معادله  $3x + 4 = 7$  است. زیرا  $3(1) + 4 = 7$  یک جمله صحیح است. مجموعه جواب های یک معادله را مجموعه جواب های آن معادله می گویند. مثلاً مجموعه جواب های  $3x + 4 = 7$  به این طریق نشان می دهیم  $\{1\}$

مثال ۱ تعیین کنید که آیا  $-15$  جواب معادله  $x - 9 = -24$  است.

**پاسخ** – بجای  $x$  می گذاریم  $-15$  تا ببینیم آیا یک جمله صحیح بدست می آید.

$$x - 9 = -24$$

$$-24 - 9 \stackrel{?}{=} -15$$

$$\text{صحیح } -24 = -24$$

چون یک جمله صحیح بدست آمد ، پس می گوییم  $-15$  یک جواب است.

مثال ۲ تعیین کنید که آیا ۵ جواب  $x + 3 = 2x - 3$  است.

پاسخ

$$2x - 3 = x + 3$$

$$2(5) - 3 \stackrel{?}{=} 5 + 3$$

$$7 = 8 \quad \text{غلط}$$

چون یک جمله غلط بدست آمد ، پس می گوییم ۵ جواب معادله نیست.

هدف حل یک معادله **Solve an Equation** پیدا کردن مجموعه جواب های آن معادله است .

معادله هایی که مجموعه جواب های یکسان دارند را معادله های هم ارز **Equivalent Equations** می نامند. مثلاً

$$x = 1 \quad 3x = 3 \quad 3x + 4 = 7$$

معادله های هم ارز هستند ، زیر همه آنها یک مجموعه جواب یعنی  $\{1\}$  دارند .

برای حل یک معادله با مجهول  $x$ ، از معادله داده شده شروع می کنیم و معادله های ساده تر و هم ارز پیدا می کنیم تا به یک معادله به شکل عدد  $x =$  برسیم

برای پیدا کردن معادله های هم ارز ، از دو خاصیت مهم استفاده می کنیم .

**خاصیت جمع تساوی The Addition Property of Equality**

اگر  $c$  و  $b$  و  $a$  اعداد حقیقی باشند ، پس

$$a = b \text{ و } a + c = b + c$$

معادله های هم ارز هستند .

**خاصیت ضرب تساوی The Multiplication Property of Equality**

اگر  $c \neq 0$  باشد پس  $ac = bc$  و  $a = b$  معادله های هم ارز هستند .

**خاصیت جمع تساوی** می گوید اگر یک عدد The Same Number به دو طرف معادله اضافه کنیم و یا از دو طرف کم کنیم ، نتیجه یک معادله هم ارز است.

**خاصیت ضرب تساوی** می گوید اگر دو طرف معادله را در یک عدد غیر از صفر Nonzero ضرب و یا بر یک عدد غیر از صفر تقسیم کنیم ، نتیجه یک معادله هم ارز است .

**مثال** - معادله زیر را حل کنید.

$$3) \quad 2x + 5 = 9$$

ابتدا با استفاده از خاصیت جمع تساوی ، عدد ۵ را از هر دو طرف معادله کم می کنیم .

$$2x + 5 - 5 = 9 - 5$$

$$2x = 4$$

با استفاده از خاصیت ضرب تساوی ، هر دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم می کنیم.

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

پس مجموعه جواب های این معادله  $\{2\}$  است.

$$4) \quad 0/6 = 2 - 3/5c$$

$$0/6 - 2 = 2 - 3/5c - 2$$

$$-1/6 = -3/5c$$

$$\frac{-1/6}{-3/5} = \frac{-3/5c}{-3/5}$$

$$0/6 = c$$

$$\{0/6\}$$

حل معادلات خطی بوسیله ادغام جملات متشابه

مثال - حل کنید.

$$۵) \quad -۶x - ۱ + ۵x = ۳$$

$$-۶x - ۱ + ۵x = ۳$$

$$-x - ۱ = ۳$$

$$-x - ۱ + ۱ = ۳ + ۱$$

$$-x = ۴$$

$$\frac{-x}{-۱} = \frac{۴}{-۱}$$

$$x = -۴$$

$$\{-۴\}$$

$$۶) \quad ۲(x - ۳) = ۵x - ۹$$

$$۲x - ۶ = ۵x - ۹$$

$$۲x - ۶ - ۵x = ۵x - ۹ - ۵x$$

$$-۳x - ۶ = -۹$$

$$-۳x - ۶ + ۶ = -۹ + ۶$$

$$-۳x = -۳$$

$$\frac{-۳x}{-۳} = \frac{-۳}{-۳}$$

$$x = ۱$$

$$\{۱\}$$

حل معادله هایی که دارای کسر و اعداد اعشاری هستند.

اگر معادله ای دارای کسر هست اول هر دو طرف معادله را در کوچک ترین مخرج مشترک همه کسر ها ضرب می‌کنیم تا کسر ها حذف شوند

مثال - حل کنید.

$$۷) \quad \frac{y}{3} - \frac{y}{4} = \frac{1}{6}$$

$$۱۲ \left( \frac{y}{3} - \frac{y}{4} \right) = ۱۲ \left( \frac{1}{6} \right)$$

$$۴y - ۳y = ۲$$

$$y = ۲$$

$$\{۲\}$$

$$۸) \quad \frac{x+5}{2} + \frac{1}{2} = ۲x - \frac{x-3}{8}$$

$$۸ \left( \frac{x+5}{2} + \frac{1}{2} \right) = ۸ \left( ۲x - \frac{x-3}{8} \right)$$

$$۴(x+5) + ۴ = ۱۶x - (x-3)$$

$$۴x + ۲۰ + ۴ = ۱۶x - x + ۳$$

$$۴x + ۲۴ = ۱۵x + ۳$$

$$۴x + ۲۴ - ۲۴ - ۱۵x = ۱۵x + ۳ - ۲۴ - ۱۵x$$

$$-۱۱x = -۲۱$$

$$\frac{-۱۱x}{-۱۱} = \frac{-۲۱}{-۱۱}$$

$$x = \frac{۲۱}{۱۱} \quad \left\{ \frac{۲۱}{۱۱} \right\}$$

$$9) \quad 0/3x + 0/1 = 0/27x - 0/02$$

هر دو طرف معادله را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم. در نتیجه ممیز یا همان نماد اعشاری دو مکان به سمت راست حرکت می‌کند.

$$100(0/3x + 0/1) = 100(0/27x - 0/02)$$

$$30x + 10 = 27x - 2$$

$$30x + 10 - 27x = 27x - 2 - 27x$$

$$3x + 10 - 10 = -2 - 10$$

$$3x = -12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-12}{3}$$

$$x = -4 \quad \{-4\}$$

### خلاصه حل یک معادله خطی یک مجهولی

الف - اگر معادله دارای کسر باشد، دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مخرج کلیه کسر ها ضرب کنید، تا کسر ها حذف شوند.

ب - با استفاده از خاصیت پخش پذیری پرانتز ها، کرشه ها و اکولاد ها را حذف کنید.

ج - جمله های متشابه را ادغام کنید.

د - با استفاده از خاصیت جمع تساوی ها، معادله اصلی را به صورت معادله هم ارز بنویسید بطوری که مجهول یک طرف و عدد طرف دیگر معادله باشد.

ه - با استفاده از خاصیت ضرب تساوی ها، مجهول را به تنهایی یک طرف معادله قرار دهید.

### معادله بدون جواب و معادله های با بی نهایت جواب

تا بحال معادله هایی را که حل کرده ایم فقط یک جواب داشتند.

یک معادله ممکن است هیچ جوابی نداشته باشد به این نوع معادله ها می گویند **تناقض Contradiction**

همچنین معادله هایی هستند که بی نهایت جواب دارند و یا به عبارت دیگر جواب آنها مجموعه اعداد حقیقی هستند. به این

نوع معادله می گویند این **همانی یا اتحاد Identity**

## مثال

$$۱۰) \quad 3x + 5 = 3(x + 2)$$

$$3x + 5 = 3x + 6$$

$$3x + 5 - 3x = 3x + 6 - 3x$$

$$5 = 6$$

ملاحظه می کنید که در جریان حل این معادله ، به یک جمله یا بیان غلط رسیدیم. اگر بجای متغیر هر عددی قرار دهیم به یک نتیجه غلط می رسیم. پس این معادله هیچ جوابی ندارد. این معادله یک تناقض است. پس مجموعه جواب های این معادله  $\phi$  یا  $\{\}$  است.

$$۱۱) \quad 6x - 4 = 2 + 6(x - 1)$$

$$6x - 4 = 2 + 6x - 6$$

$$6x - 4 - 6x = 2 + 6x - 6 - 6x$$

$$-4 = -4$$

در اینجا می بینید که دو طرف معادله یکی است. بنا بر این اگر بجای  $x$  هر عدد حقیقی قرار دهیم یک جمله صحیح بدست می آید. پس مجموعه جواب های این معادله ، کلیه اعداد حقیقی است. و می نویسیم  $\mathbb{R}$  و یا  $\{x: \text{یک عدد حقیقی است}\}$

به این نوع معادله می گویند این همانی Identity و یا اتحاد

به معادله های خطی ، معادله درجه یک First Degree Equation هم گفته می شود. زیرا همان طور که ملاحظه کرده اید بزرگ ترین توان متغیر یا مجهول یک است.

## تمرینات ۲.۱

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) - 5x = -30$$

$$۲) 10 = x + 12$$

$$۳) x + 2/8 = 1/9$$

$$۴) 5x - 4 = 26$$

$$۵) -4/1 - 7z = 3/6$$

$$۶) 5y + 12 = 2y - 3$$

$$۷) 8x - 5x + 3 = x - 7 + 10$$

$$۸) 5x + 12 = 2(2x + 7)$$

$$۹) 3(x - 6) = 5x$$

$$۱۰) 3x - 4 - 5x = x + 4 + x$$



$$۱۱) -۲(۵y - ۱) - y = -۴(y - ۳)$$

$$۱۲) y + ۵/۲ = ۵/۶(y + ۳)$$

$$۱۳) \frac{x}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۳}{۴}$$

$$۱۴) \frac{n - ۳}{۴} + \frac{n + ۵}{۷} = \frac{۵}{۱۴}$$

$$۱۵) ۵/۶x - ۱۵ = ۱/۴x - ۱۴$$

$$۱۶) \frac{۳x - ۱}{۹} + x = \frac{۳x + ۱}{۳} + ۴$$

$$۱۷) ۴(n + ۳) = ۲(۶ + ۲n)$$

$$۱۸) ۵(x - ۲) + ۲x = ۷(x + ۴)$$

پاسخ تمرینات ۲.۱

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) - ۵x = -۳۰$$

$$\frac{-۵x}{-۵} = \frac{-۳۰}{-۵}$$

$$x = ۶ \quad \{۶\}$$

$$۲) ۱۰ = x + ۱۲$$

$$۱۰ - ۱۲ = x + ۱۲ - ۱۲$$

$$-۲ = x \quad \{-۲\}$$

$$۳) x + ۲/۸ = ۱/۹$$

$$x + ۲/۸ - ۲/۸ = ۱/۹ - ۲/۸$$

$$x = -۵/۹ \quad \{-۵/۹\}$$

$$۴) ۵x - ۴ = ۲۶$$

$$۵x - ۴ + ۴ = ۲۶ + ۴$$

$$۵x = ۳۰$$

$$\frac{۵x}{۵} = \frac{۳۰}{۵}$$

$$x = ۶ \quad \{۶\}$$

$$۵) -۴/۱ - ۷z = ۳ / ۶$$

$$۱ \circ (-۴/۱ - ۷z) = ۱ \circ (۳ / ۶)$$

$$-۴۱ - ۷ \circ z = ۳۶$$

$$-۴۱ - ۷ \circ z + ۴۱ = ۳۶ + ۴۱$$

$$-۷ \circ z = ۷۷$$

$$\frac{-۷ \circ z}{-۷ \circ} = \frac{۷۷}{-۷ \circ}$$

$$z = -۱/۱ \quad \{۱ / ۱\}$$

$$۶) ۵y + ۱۲ = ۲y - ۳$$

$$۵y + ۱۲ - ۱۲ = ۲y - ۳ - ۱۲$$

$$۵y = ۲y - ۱۵$$

$$۵y - ۲y = ۲y - ۱۵ - ۲y$$

$$۳y = -۱۵$$

$$\frac{۳y}{۳} = \frac{-۱۵}{۳}$$

$$y = -۵ \quad \{-۵\}$$

$$۷) ۸x - ۵x + ۳ = x - ۷ + ۱ \circ$$

$$۳x + ۳ = x + ۳$$

$$۳x + ۳ - ۳ = x + ۳ - ۳$$

$$۳x = x$$

$$3x - x = x - x$$

$$2x = 0$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x = 0 \quad \{0\}$$

$$۸) \quad 5x + 12 = 2(2x + 7)$$

$$5x + 12 = 4x + 14$$

$$5x + 12 - 12 = 4x + 14 - 12$$

$$5x = 4x + 2$$

$$5x - 4x = 4x + 2 - 4x$$

$$x = 2 \quad \{2\}$$

$$۹) \quad 3(x - 6) = 5x$$

$$3x - 18 = 5x$$

$$3x - 18 + 18 = 5x + 18$$

$$3x = 5x + 18$$

$$3x - 5x = 5x + 18 - 5x$$

$$-2x = 18$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{18}{-2}$$

$$x = -9 \quad \{-9\}$$

$$۱۰) \quad 3x - 4 - 5x = x + 4 + x$$

$$-2x - 4 = 2x + 4$$

$$-2x - 4 + 4 = 2x + 4 + 4$$

$$-2x = 2x + 8$$

$$-2x - 2x = 2x + 8 - 2x$$

$$-4x = 8$$

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{8}{-4}$$

$$x = -2 \quad \{-2\}$$

$$۱۱) \quad -2(5y - 1) - y = -4(y - 3)$$

$$-10y + 2 - y = -4y + 12$$

$$-11y + 2 = -4y + 12$$

$$-11y + 2 - 2 = -4y + 12 - 2$$

$$-11y = -4y + 10$$

$$-11y + 4y = -4y + 10 + 4y$$

$$-7y = 10$$

$$\frac{-7y}{-7} = \frac{10}{-7}$$

$$y = -\frac{10}{7} \quad \left\{ -\frac{10}{7} \right\}$$

$$۱۲) \quad y + ۵/۲ = ۵/۶(y + ۳)$$

$$۱ \circ (y + ۵/۲) = ۱ \circ (۵/۶y + ۱/۸)$$

$$۱ \circ y + ۲ = ۶y + ۱۸$$

$$۱ \circ y + ۲ - ۲ = ۶y + ۱۸ - ۲$$

$$۱ \circ y = ۶y + ۱۶$$

$$۱ \circ y - ۶y = ۶y + ۱۶ - ۶y$$

$$۴y = ۱۶$$

$$\frac{۴y}{۴} = \frac{۱۶}{۴}$$

$$y = ۴ \quad \{۴\}$$

$$۱۳) \quad \frac{x}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۳}{۴}$$

$$۱۲ \left( \frac{x}{۲} + \frac{۲}{۳} \right) = ۱۲ \left( \frac{۳}{۴} \right)$$

$$۶x + ۸ = ۹$$

$$۶x + ۸ - ۸ = ۹ - ۸$$

$$۶x = ۱$$

$$\frac{۶x}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

$$x = \frac{1}{6} \quad \left\{ \frac{1}{6} \right\}$$

$$۱۴) \quad \frac{n-3}{4} + \frac{n+5}{7} = \frac{5}{14}$$

$$۲۸ \left( \frac{n-3}{4} + \frac{n+5}{7} \right) = ۲۸ \left( \frac{5}{14} \right)$$

$$۷(n-3) + ۴(n+5) = ۲(5)$$

$$۷n - ۲۱ + ۴n + ۲۰ = ۱۰$$

$$۱۱n - ۱ = ۱۰$$

$$۱۱n - ۱ + ۱ = ۱۰ + ۱$$

$$۱۱n = ۱۱$$

$$\frac{۱۱n}{۱۱} = \frac{۱۱}{۱۱}$$

$$n = ۱ \quad \{1\}$$

$$۱۵) \quad \frac{1}{6}x - ۱۰ = \frac{1}{4}x - ۱۴$$

$$۱۰ \left( \frac{1}{6}x - ۱۰ \right) = ۱۰ \left( \frac{1}{4}x - ۱۴ \right)$$

$$\frac{1}{6}x - ۱۰۰ = \frac{1}{4}x - ۱۴۰$$

$$\frac{1}{6}x - ۱۰۰ + ۱۰۰ = \frac{1}{4}x - ۱۴۰ + ۱۰۰$$

$$\frac{1}{6}x = \frac{1}{4}x - ۴۰$$

$$\frac{1}{6}x - \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x - ۴۰ - \frac{1}{4}x$$

$$-\frac{1}{12}x = -۴۰$$

$$\frac{-8x}{-8} = \frac{-40}{-8}$$

$$x = 5 \quad \{5\}$$

$$۱۶) \quad \frac{3x-1}{9} + x = \frac{3x+1}{3} + 4$$

$$9\left(\frac{3x-1}{9}\right) + 9(x) = 9\left(\frac{3x+1}{3}\right) + 9(4)$$

$$3x - 1 + 9x = 9x + 3 + 36$$

$$12x - 1 = 9x + 39$$

$$12x - 1 + 1 = 9x + 39 + 1$$

$$12x = 9x + 40$$

$$12x - 9x = 9x + 40 - 9x$$

$$3x = 40$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{40}{3}$$

$$x = \frac{40}{3} \quad \left\{\frac{40}{3}\right\}$$

$$۱۷) \quad 4(n+3) = 2(6+2n)$$

$$4n + 12 = 12 + 4n$$

$$4n + 12 - 4n = 12 + 4n - 4n$$

$$12 = 12 \quad \mathbb{R} \quad \text{کلیه اعداد حقیقی}$$



$$۱۸) \quad ۵(x - ۲) + ۲x = ۷(x + ۴)$$

$$۵x - ۱۰ + ۲x = ۷x + ۲۸$$

$$۷x - ۱۰ = ۷x + ۲۸$$

$$۷x - ۱۰ - ۷x = ۷x + ۲۸ - ۷x$$

$$-۱۰ = ۲۸ \quad \text{غلط} \quad \text{پس} \quad \{ \} \quad \text{یا} \quad \phi \quad \text{جوابی ندارد}$$

## ۲.۲ مقدمه ای بر حل مسائل An Introduction to Problem Solving

## Solving Problems حل مسائل

هدف اصلی مطالعه جبر ، حل کردن مسائل است.

## تدابیر کلی حل مسائل

الف - مساله را بفهمید. برای این کار

- چند مرتبه مساله را بخوانید.
- یک متغیر برای مجهول مساله انتخاب کنید.
- اگر مجهول های دیگر هم هست، آنها را در رابطه با مجهول اول بیان کنید.
- اگر لازم باشد یک شکل رسم کنید.

ب - مسالہ را بہ صورت یک معادلہ بنویسید۔

ج - معادله را حل کنید.

### مثال ۱

دو عدد پیدا کنید بطوری که دومین عدد سه رقم از دو برابر عدد اول بیشتر باشد و مجموع آن دو عدد ۷۲ است.

## حل مساله

الف پس از خواندن صورت مساله متوجه می شویم که باید دو مجهول را پیدا کنیم. پس فرض می کنیم

عدد اول =  $x$

مساله می گوید عدد دوم سه رقم از دو برابر عدد اول بیشتر است پس

$$\text{عدد دوم} = 2x + 3$$

ب. مساله را به شکل یک معادله می نویسیم. می دانیم که مجموع دو عدد باید ۷۲ باشد پس

۷۲	میشود	عدد دوم	به اضافه	عدد اول
۷۲	=	$(2x + 3)$	+	$x$

معادله بدست آمده را حل می کنیم.

$$x + (\imath x + \imath) = \imath \imath$$

$$x + 2x + 3 = 72$$

$$3x + 3 = 72$$

$$3x + 3 - 3 = 72 - 3$$

$$3x = 69$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{69}{3}$$

$$x = 23 \text{ عدد اول}$$

$$2x + 3 = 2(23) + 3 = 46 + 3 = 49 \text{ عدد دوم}$$

امتحان می کنیم.

$$23 + 49 = 72$$

پس ، پاسخ های بدست آمده صحیح هستند.

مثال ۲ – شانزده در صد ۲۵ را پیدا کنید.

پاسخ

شانزده در صد نوشته می شود ۱۶٪

شانزده در صد به صورت اعشاری می شود ۰/۱۶

$$۱۶\% = \frac{16}{100} = 0/16 \text{ یا می توان گفت } ۱۶\% = \frac{16}{100}$$

پس

$$۱۶\% \times ۲۵ = 0/16 \times ۲۵ = ۴$$

مثال ۳

فرض کنید یک فروشگاه کامپیوتر ، آگهی کرده است که کلیه کامپیوتر هایش را با تخفیف ۸٪ به فروش می رساند. اگر یک کامپیوتر بعد از تخفیف به قیمت ۲۱۶۲۰۰۰ تومان به فروش برسد ، قیمت اصلی کامپیوتر را پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم

$$x = \text{قیمت اصلی کامپیوتر}$$

پس هشت درصد تخفیف میشود

$$\text{مبلغ تخفیف} = 0.08x$$

معادله مربوطه را می نویسیم

قیمت جدید	میشود	مبلغ تخفیف	منهای	قیمت اصلی کامپیوتر
۲۱۶۲۰۰۰	=	$0.08x$	-	$x$

معادله را حل می کنیم.

$$x - 0.08x = 2162000$$

$$0.92x = 2162000$$

$$x = \frac{2162000}{0.92}$$

$$x = 2350000 \text{ تومان}$$

## مثال ۳-

یک مدرسه می خواهد یک پرچم قهرمانی برای انجمن ورزش بسازد و آنرا برای جمع آوری پول برای کمک به دانش آموزان بی بضاعت بفروش برساند. این پرچم قرار است به شکل مثلث متساوی الساقین Isosceles Triangle باشد. شرکت سازنده بر اساس محیط Perimeter مثلث قیمت پرچم را محاسبه می کند. انجمن ورزش به این نتیجه می رسد که اگر محیط مثلث ۱۴۹ سانتی متر باشد، می تواند از فروش پرچم سود ببرد. اگر طول هر کدام از ساق های مثلث ۱۲ سانتی متر بیش از دو برابر ضلع Side سوم باشد. طول اضلاع مثلث را پیدا کنید.

پاسخ

$$x = \text{ضلع}$$

ضلع	دو برابر	بیشتر از	۱۲ سانتی متر	=	ساق اول
$x$	$\times 2$	+	۱۲	=	

پس

$$\text{ساق اول} = 12 + 2x$$

$$\text{ساق دوم} = \text{ضلع} = 12 + 2x$$

معادله را می نویسیم

$$\text{ساق اول} + \text{ساق دوم} + \text{ضلع} = 149$$

$$(12 + 2x) + (12 + 2x) + x = 149$$

معادله را حل می کنیم.

$$(12 + 2x) + (12 + 2x) + x = 149$$

$$12 + 2x + 12 + 2x + x = 149$$

$$5x + 24 = 149$$

$$5x = 125$$

$$x = 25 \text{ ضلع}$$

$$62 = 12 + 50 = 12 + 2(25) = 12 + 2x = 12 + 2x = \text{هر کدام از ساق ها}$$

مثال ۴

آرمان می گفت نمرات دو تست جبر او دو عدد صحیح زوج Even متوالی Consecutive است و مجموع آنها ۱۷۴ است. نمره هر کدام از تست ها چند است؟

پاسخ

$$x = \text{اولین عدد صحیح}$$

$$\text{عدد صحیح زوج متوالی بعدی} = x + 2$$

$$174 = \text{عدد زوج بعدی} + \text{اولین عدد صحیح}$$

$$x + (x + 2) = 174$$

معادله را حل می کنیم.

$$x + x + 2 = 174$$

$$2x + 2 = 174$$

$$2x = 172$$

$$x = \frac{172}{2} = 86 \text{ اولین عدد}$$

$$x + 2 = 86 + 2 = 88 \text{ دومین عدد}$$

## تمرینات ۲.۲

## مسائل زیر را حل کنید.

- ۱ – چهار برابر اختلاف یک عدد و دو مثل این است که دو رقم به شش برابر آن عدد اضافه کنیم. آن عدد را پیدا کنید.
- ۲ – یک عدد ۵ برابر عدد دیگر است. اگر مجموع آن دو عدد ۲۷۰ باشد، آن دو عدد را پیدا کنید.
- ۳ – تخمین زده می شود که ۴۷٪ از خانواده های ایرانی صاحب کامپیوتر هستند. اگر یکی از شهر های ایران شامل ۱۱۰,۰۰۰ خانوار باشد، چند خانوار در این شهر کامپیوتر دارند ؟
- ۴ – یک هوا پیما ۱۰۴ صندلی بیش از هوا پیمای دیگری دارد . اگر مجموع صندلی های هر دو هوا پیما ۳۲۸ عدد باشد ، تعداد صندلی های هر کدام را پیدا کنید.
- ۵ – یک دستگاه ماشین فکس به مبلغ ۴۶۴۴۰ تومان خریداری شده است. این مبلغ شامل مالیات خرید هم هست. اگر نرخ مالیات خرید ۸٪ باشد ، قیمت ماشین فکس را قبل از مالیات پیدا کنید.
- ۶ – دو قاب عکس لازم داریم با محیط های مساوی .یکی به شکل مربع Square و دیگری به شکل مثلث متساوی الاضلاع Equilateral Triangle . طول هر کدام از اضلاع مثلث ۶ سانتی متر بیشتر از طول هر کدام از اضلاع مربع است. طول اضلاع هر کدام از قاب ها را پیدا کنید.
- ۷ – طول یک مربع مستطیل ۲ سانتی متر بیشتر از دو برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۴۰ سانتی متر باشد ، اضلاع آن را پیدا کنید.
- ۸ – تولید کنندگان دیسک های سی دی ادعا می کنند که طول عمر دیسک ها ۲۰ سال است. اما موسسه استاندارد می گوید طول عمر دیسک ها ۷۵٪ کمتر از ادعای تولید کنندگان است. طول عمر حقیقی دیسک ها چند سال است ؟

۹ – یک محفظه خارجی در سفینه فضا نورد سوخت مورد نیاز برای  $8/5$  دقیقه اول پرواز را در بر می گیرد. اگر ارتفاع این محفظه پنج برابر عرض آن باضافه یک، و مجموع ارتفاع و عرض  $55/4$  متر باشد، ابعاد این محفظه را حساب کنید.

۱۰ – میدانید که مجموع اندازه های زوایای Angle Measure یک مثلث  $180$  درجه است. اگر اندازه یکی از زوایا دو برابر اندازه زاویه دوم و اندازه زاویه سوم  $12$  درجه کمتر از سه برابر اندازه زاویه دوم باشد، مطلوب است اندازه های زوایای این مثلث

۱۱ – مجموع دو عدد صحیح متوالی  $151$  است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۱۲ – در یک مثلث دو زاویه با هم برابر هستند. زاویه سوم  $10$  درجه کمتر از سه برابر یکی از زاویه های برابر است. اندازه زاویه های این مثلث را بدست آورید.

### چالش

۱۳ – یک اتومبیل و یک وانت بار  $120$  کیلو متر در یک جاده مستقیم از هم فاصله دارند. راننده ها ساعت  $12$  با سرعت  $40$  کیلو متر در ساعت به طرف یک دیگر شروع به حرکت می کنند. درست در همین ساعت یک مگس از سپر جلوی وانت بار به طرف سپر اتومبیل شروع به پرواز می کند. و سپس بلا فاصله از سپر اتومبیل به طرف سپر وانت بار بر می گردد. و مجدداً از سپر وانت بار به طرف سپر اتومبیل، تا زمانی که اتومبیل و وانت بار به هم می رسند. اگر سرعت مگس  $100$  کیلو متر در ساعت باشد، این مگس روی هم رفته چه مسافتی را پیموده است؟

۱۴ – یک امیب از طریق تقسیم مستقیم تکثیر می کند. هر تقسیم هم سه دقیقه طول می کشد تا کامل شود، یعنی اگر در دقیقه صفر یک امیب داشته باشیم، بعد از سه دقیقه دو امیب، بعد از  $6$  دقیقه  $4$  امیب. حال اگر یک چنین امیبی در یک ظرف آزمایشگاه با غذایی کافی قرار دهیم، بعد از یک ساعت آن ظرف پر از امیب میشود. اگر بجای یک امیب، دو امیب در ظرف آزمایشگاه و غذای کافی قرار دهیم، چه مدت طول می کشد تا ظرف پر از امیب شود؟



۱۵ - فرض کنید  $x + y = 1$  و  $x^2 + y^2 = 4$  مطلوب است  $x^3 + y^3$

راهنمایی -

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

۱۶ - راننده ای با اتومبیل خود، سفری را شروع می کند. نیمه اول مسافت را با سرعت ۳۰ کیلو متر در ساعت رانندگی می کند. و نیمه دوم مسافت را با سرعت ۶۰ کیلو متر در ساعت. سرعت متوسط این راننده را در طول این مسافرت پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۲.۲

مسائل زیر را حل کنید.

۱ - چهار برابر اختلاف یک عدد و دو مثل این است که دو رقم به شش برابر آن عدد اضافه کنیم. آن عدد را پیدا کنید.

پاسخ

آن عدد  $x =$

چهار برابر اختلاف آن عدد و دو  $4(x - 2) =$

دو رقم به شش برابر آن عدد اضافه کنیم  $2 + 6x =$

معادله را می نویسیم و آنرا حل می کنیم.

$$4(x - 2) = 2 + 6x$$

$$4x - 8 = 2 + 6x$$

$$4x - 8 + 8 = 2 + 6x + 8$$

$$4x = 10 + 6x$$

$$4x - 6x = 10 + 6x - 6x$$

$$-2x = 10$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{10}{-2}$$

$$x = -5$$

۲- یک عدد ۵ برابر عدد دیگر است. اگر مجموع آن دو عدد ۲۷ باشد، آن دو عدد را پیدا کنید.

پاسخ

$$x = \text{عدد اول}$$

$$5x = \text{عدد دوم}$$

$$x + 5x = 27$$

$$6x = 27$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{27}{6}$$

$$x = 4.5$$

$$5x = 5(4.5) = 22.5$$

۳- تخمین زده می شود که ۴۷٪ از خانواده های ایرانی صاحب کامپیوتر هستند. اگر یکی از شهر های ایران شامل ۱۱۰,۰۰۰ خانوار باشد، چند خانوار در این شهر کامپیوتر دارند ؟

پاسخ

$$0.47 \times 110,000 = 51,700$$

۴ - یک هوا پیمای ۱۰۴ صندلی بیش از هوا پیمای دیگری دارد. اگر مجموع صندلی های هر دو هوا پیمای ۳۲۸ عدد باشد، تعداد صندلی های هر کدام را پیدا کنید.

پاسخ

تعداد صندلی های هواپیمای دوم  $x =$

تعداد صندلی های هواپیمای اول  $x + 104 =$

$$x + (x + 104) = 328$$

$$x + x + 104 = 328$$

$$2x + 104 = 328$$

$$2x + 104 - 104 = 328 - 104$$

$$2x = 224$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{224}{2}$$

تعداد صندلی های هواپیمای دوم  $x = 112$

تعداد صندلی های هواپیمای اول  $x + 104 = 112 + 104 = 216$

۵ - یک دستگاه ماشین فکس به مبلغ ۴۶۴۴۰ تومان خریداری شده است. این مبلغ شامل مالیات خرید هم هست. اگر نرخ مالیات خرید ۸٪ باشد، قیمت ماشین فکس را قبل از مالیات پیدا کنید.

پاسخ

قیمت ماشین فکس قبل از مالیات  $x =$

مبلغ مالیات  $8\%x$

$$x + 0.08x = 46,440$$

$$1.08x = 46,440$$

$$x = 43,000 \text{ تومان}$$

۶ - دو قاب عکس لازم داریم با محیط های مساوی. یکی به شکل مربع Square و دیگری به شکل مثلث متساوی الاضلاع Equilateral Triangle. طول هر کدام از اضلاع مثلث ۶ سانتی متر بیشتر از طول هر کدام از اضلاع مربع است. طول اضلاع هر کدام از قاب ها را پیدا کنید.

پاسخ

$$x = \text{طول هر کدام از اضلاع مربع}$$

$$x + 6 = \text{طول هر کدام از اضلاع مثلث}$$

$$\text{چهار برابر طول یک ضلع} = \text{محیط مربع}$$

$$\text{سه برابر طول یک ضلع} = \text{محیط مثلث}$$

$$\text{محیط مربع} = \text{محیط مثلث}$$

$$3(x + 6) = 4x$$

$$3x + 18 = 4x$$

$$3x + 18 - 3x = 4x - 3x$$

$$18 = x$$

$$x = 18 \text{ طول هر کدام از اضلاع مربع}$$

$$x + 6 = 18 + 6 = 24 \text{ طول هر کدام از اضلاع مثلث}$$

۷ - طول یک مربع مستطیل ۲ سانتی متر بیشتر از دو برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۴۰ سانتی متر باشد، اضلاع آن را پیدا کنید.

پاسخ

عرض مربع مستطیل  $x =$

طول مربع مستطیل  $2x + 2$

دو برابر طول + دو برابر عرض = محیط مستطیل

$$40 = 2(x) + 2(2x + 2)$$

$$40 = 2x + 4x + 4$$

$$40 = 6x + 4$$

$$40 - 4 = 6x + 4 - 4$$

$$36 = 6x$$

$$\frac{36}{6} = \frac{6x}{6}$$

عرض مستطیل  $x = 6$

$$2x + 2 = 2(6) + 2 = 12 + 2 = 14 \text{ طول مستطیل}$$

۸ - تولید کنندگان دیسک های سی دی ادعا می کنند که طول عمر دیسک ها ۲۰ سال است. اما موسسه استاندارد می گوید طول عمر دیسک ها ۷۵٪ کمتر از ادعای تولید کنندگان است. طول عمر حقیقی دیسک ها چند سال است؟

پاسخ

هفتاد و پنج درصد بیست سال  $20 \times \frac{75}{100} =$

$$20 - 15 = 5 \text{ طول عمر حقیقی دیسک}$$

۹ - یک محفظه خارجی در سفینه فضا نورد سوخت مورد نیاز برای  $۸/۵$  دقیقه اول پرواز را در بر می گیرد. اگر ارتفاع این محفظه پنج برابر عرض آن باضافه یک، و مجموع ارتفاع و عرض  $۵۵/۴$  متر باشد، ابعاد این محفظه را حساب کنید.

پاسخ

$$x = \text{عرض محفظه}$$

$$۵(x + ۱) = \text{ارتفاع محفظه}$$

$$x + ۵(x + ۱) = ۵۵ / ۴$$

$$x + ۵x + ۵ = ۵۵ / ۴$$

$$۶x + ۵ = ۵۵ / ۴$$

$$۶x + ۵ - ۵ = ۵۵/۴ - ۵$$

$$۶x = ۵۰ / ۴$$

$$\frac{۶x}{۶} = \frac{۵۰/۴}{۶}$$

$$x = ۸/۴ \text{ عرض محفظه}$$

$$۵(x + ۱) = ۵(۸/۴ + ۱) = ۴۲ + ۵ = ۴۷ \text{ ارتفاع محفظه}$$

۱۰ - میدانید که مجموع اندازه های زوایای Angle Measure یک مثلث  $۱۸۰$  درجه است. اگر اندازه یکی از زوایا دو برابر اندازه زاویه دوم و اندازه زاویه سوم  $۱۲$  درجه کمتر از سه برابر اندازه زاویه دوم باشد، مطلوب است اندازه های زوایای این مثلث

پاسخ -

$$x = \text{اندازه زاویه دوم}$$

$$۲x = \text{اندازه زاویه اول}$$

$$۳x - ۱۲ = \text{اندازه زاویه سوم}$$

$$2x + x + (3x - 12) = 180$$

$$2x + x + 3x - 12 = 180$$

$$6x - 12 = 180$$

$$6x - 12 + 12 = 180 + 12$$

$$6x = 192$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{192}{6}$$

$$x = 32 \text{ اندازه زاویه دوم}$$

$$2x = 2(32) = 64 \text{ اندازه زاویه اول}$$

$$3x - 12 = 3(32) - 12 = 96 - 12 = 84 \text{ اندازه زاویه سوم}$$

۱۱ - مجموع دو عدد صحیح متوالی ۱۵۱ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

پاسخ

$$x = \text{عدد اول}$$

$$x + 1 = \text{عدد دوم}$$

$$x + (x + 1) = 151$$

$$x + x + 1 = 151$$

$$2x = 150$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{150}{2}$$

$$x = 75 \text{ عدد اول}$$

$$75 + 1 = 76 \text{ عدد دوم}$$

۱۲ – در یک مثلث دو زاویه با هم برابر هستند. زاویه سوم  $۱۰$  درجه کمتر از سه برابر یکی از زاویه های برابر است. اندازه زاویه های این مثلث را بدست آورید.

پاسخ

یکی از زاویه های برابر  $x =$

زاویه سوم  $3x - 10 =$

$$x + x + (3x - 10) = 180$$

$$x + x + 3x - 10 = 180$$

$$5x = 190$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{190}{5}$$

یکی از زاویه های برابر  $x = 38$

زاویه سوم  $3x - 10 = 3(38) - 10 = 114 - 10 = 104$

چالش

۱۳ – یک اتومبیل و یک وانت بار  $۱۲۰$  کیلو متر در یک جاده مستقیم از هم فاصله دارند. راننده ها ساعت  $۱۲$  با سرعت  $۴۰$  کیلو متر در ساعت به طرف یک دیگر شروع به حرکت می کنند. درست در همین ساعت یک مگس از سپر جلوی وانت بار به طرف سپر اتومبیل شروع به پرواز می کند. و سپس بلا فاصله از سپر اتومبیل به طرف سپر وانت بار بر می گردد. و مجدداً از سپر وانت بار به طرف سپر اتومبیل، تا زمانی که اتومبیل و وانت بار به هم می رسند. اگر سرعت مگس  $۱۰۰$  کیلو متر در ساعت باشد، این مگس روی هم رفته چه مسافتی را پیموده است؟

پاسخ

$$d = rt$$

$d = distance$  مسافت



سرعت متوسط  $r = rate$

زمان  $t = time$

هر دو راننده ۱۲۰ کیلو متر از هم فاصله دارند و چون هر دو با سرعت ثابت ۴۰ کیلو متر در ساعت به طرف یک دیگر شروع به حرکت می کنند ، پس هر کدام  $60 = 120 \div 2$  کیلو متر مسافت طی می کنند. این مقدار مسافت را در فرمول بالا می گذاریم تا زمان طی شده بدست آید.

$$d = rt$$

$$60 = 40 \cdot t$$

$$\frac{60}{40} = \frac{40 \cdot t}{40}$$

زمان طی شده  $t = 1/5$

حال این زمان را در فرمول مسافت می گذاریم ، اما این مرتبه سرعت مگس را بجای  $r$  می گذاریم تا مسافت طی شده توسط مگس بدست آید.

$$d = rt = 100 \left( \frac{1}{5} \right) = 150 \text{ کیلو متر}$$

مگس در این مدت ۱۵۰ کیلو متر می پیماید.

۱۴ – یک امیب از طریق تقسیم مستقیم تکثیر می کند. هر تقسیم هم سه دقیقه طول می کشد تا کامل شود ، یعنی اگر در دقیقه صفر یک امیب داشته باشیم، بعد از سه دقیقه دو امیب ، بعد از ۶ دقیقه ۴ امیب. حال اگر یک چنین امیبی در یک ظرف آزمایشگاه با غذایی کافی قرار دهیم ، بعد از یک ساعت آن ظرف پر از امیب میشود. اگر بجای یک امیب ، دو امیب در ظرف آزمایشگاه و غذای کافی قرار دهیم ، چه مدت طول می کشد تا ظرف پر از امیب شود؟

پاسخ

اگر یک امیب داشته باشیم طبق فرض مساله بعد از سه دقیقه دو امیب خواهیم داشت. بعد از شش دقیقه چهار امیب ، بعد از نه دقیقه هشت امیب. پس می توانیم جدول زیر را تنظیم کنیم.

$$\text{امیب داریم } 1 = 2^0 \text{ دقیقه صفر}$$

$$\text{امیب داریم } 1 = 2^1 \text{ دقیقه سوم}$$

آمیپ داریم  $2^2 = 4$  دقیقه ششم

آمیپ داریم  $2^3 = 8$  دقیقه نهم

به همین ترتیب

آمیپ داریم  $2^{20}$  دقیقه شصتم

و در این زمان ظرف آزمایشگاه پر از آمیب است .

زیرا یک ساعت ۶۰ دقیقه است و  $20 = 3 \div 60$  یعنی در مدت یک ساعت ، بیست مرتبه عمل تقسیم انجام می شود.

حال اگر در شروع آزمایش بجای یک آمیب ، دو آمیب داشته باشیم .

آمیپ داریم  $2^1 = 2$  دقیقه صفر

آمیپ داریم  $2^2 = 4$  دقیقه سوم

آمیپ داریم  $2^3 = 8$  دقیقه ششم

آمیپ داریم  $2^4 = 16$  دقیقه نهم

این دو سری اطلاعات را در یک جدول قرار می دهیم تا ببینیم مراحل تقسیم در دو آزمایش به چه صورت پیش می رود.

دقیقه ۶۰	دقیقه ۵۷	دقیقه ۵۴	....	دقیقه ۱۲	دقیقه ۹	دقیقه ۶	دقیقه ۳	دقیقه صفر
آمیپ $2^{20}$	آمیپ $2^{19}$	آمیپ $2^{18}$		آمیپ $2^4$	آمیپ $2^3 = 8$	آمیپ $2^2 = 4$	آمیپ $2^1 = 2$	آمیپ $2^0 = 1$
آمیپ $2^{20}$	آمیپ $2^{19}$	....	آمیپ $2^5$	آمیپ $2^4$	آمیپ $2^3 = 8$	آمیپ $2^2 = 4$	آمیپ $2^1 = 2$	

ملاحظه می کنید که اگر در ابتدای آزمایش بجای یک آمیب ، دو آمیب داشته باشیم بعد از ۵۷ دقیقه ظرف آزمایشگاه پر می شود

۱۵ - فرض کنید  $x + y = 1$  و  $x^2 + y^2 = 4$  مطلوب است  $x^3 + y^3$

راهنمایی -

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

پاسخ

طبق فرض مساله  $x + y = 1$  حال دو طرف این تساوی و یا معادله را به توان دو می‌رسانیم. پس خواهیم داشت

$$(x + y)^2 = (1)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 1 \quad (1)$$

طبق فرض مساله  $x^2 + y^2 = 4$  پس رابطه (۱) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$4 + 2xy = 1$$

$$2xy = 1 - 4$$

$$2xy = -3$$

$$xy = -\frac{3}{2} \quad (2)$$

بر اساس راهنمایی

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad (3)$$

در رابطه (۳) مقادیری را که از فرض مساله داریم و همچنین در رابطه (۲) بدست آوردیم، می‌گذاریم.

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (1) \left[ 4 - \left( -\frac{3}{2} \right) \right] = 4 - \left( -\frac{3}{2} \right) = 4 + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{8}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8+3}{2} = \frac{11}{2}$$

۱۶ – راننده ای با اتومبیل خود، سفری را شروع می کند. نیمه اول مسافت را با سرعت ۳۰ کیلو متر در ساعت رانندگی می کند. و نیمه دوم مسافت را با سرعت ۶۰ کیلو متر در ساعت. سرعت متوسط این راننده را در طول این مسافت پیدا کنید.

**پاسخ**

**تصور اولیه** – در حله اول فکر می کنیم که اگر معدل سرعت ها را پیدا کنیم، سرعت متوسط تمام طول مسافت را بدست آورده ایم. یعنی

$$\frac{30 + 60}{2} = 45 \text{ کیلو متر در ساعت}$$

اما این ساده انگاری صحیح است؟

فرض کنید که مسافت طی شده در این سفر ۱۲۰ کیلو متر باشد. چون ۶۰ کیلو متر اول با سرعت ۳۰ کیلو متر در ساعت طی شده پس این مسافت در مدت دو ساعت طی شده است. ۶۰ کیلو متر دوم با سرعت ۶۰ کیلو متر در ساعت پس این قسمت در مدت یک ساعت طی شده است. بنا بر این کل زمان طی شده  $3 = 2 + 1$  ساعت است و سرعت متوسط

$$\frac{120}{3} = 40 \text{ کیلو متر در ساعت}$$

بنا بر این حدس ما در مورد ۴۵ کیلو متر در ساعت، غلط است.

**پاسخ صحیح**

باید با دقت بیشتری به مفهوم سرعت متوسط نگاه کنیم.

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان طی شده}}$$

فرض می کنیم مسافت طی شده در هر نیمه مسافت  $d$  باشد. و فرض می کنیم  $t_1$  و  $t_2$  زمان های طی شده در نیمه های اول و دوم باشند. حالا می توانیم اطلاعاتی که داده شده بنویسیم. برای نیمه اول سفر، داریم

$$30 = \frac{d}{t_1} \quad (1)$$

و برای نیمه دوم داریم.

$$60 = \frac{d}{t_2} \quad (2)$$

حالا مجهول مساله را که باید پیدا کنیم، مشخص می کنیم.

$$\text{سرعت متوسط تمام سفر} = \frac{\text{کل مسافت}}{\text{زمان طی شده}} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$$

برای مقدار بالا باید  $t_1$  و  $t_2$  را بدانیم چه مقدار است. بنا بر این معادله های (1) و (2) را حل می کنیم.

$$t_1 = \frac{d}{30} \quad t_2 = \frac{d}{60}$$

حالا همه مقادیر لازم را داریم.

$$\begin{aligned} \text{سرعت متوسط} &= \frac{2d}{t_1 + t_2} \\ &= \frac{2d}{\frac{d}{30} + \frac{d}{60}} \\ &= \frac{60(2d)}{60\left(\frac{d}{30} + \frac{d}{60}\right)} \\ &= \frac{120d}{2d + d} = \frac{120d}{3d} = 40 \end{aligned}$$

پس سرعت متوسط تمام سفر 40 کیلو متر در ساعت است. متوسط سرعت

## ۲.۳ فرمول ها و حل مساله Formulas and Problem Solving

## حل فرمول ها برای متغیر های مشخص Solving Formulas for Specified Variables

در زندگی حقیقی ، هنگام حل مسائل ، گاهی اوقات لازم می شود که ارتباط بین کمیت های قابل اندازه گیری را تبیین کنیم. فرمول معادله ایست که ارتباط شناخته شده بین پدیده ها مثل زمان ، مساحت ، جاذبه را بیان می کند. چند مثال :

$$I = PRT \quad \text{Interest} = \text{Principal} \times \text{Rate} \times \text{Time} \quad \text{مدت} \times \text{نرخ} \times \text{سرمایه} = \text{سود}$$

$$A = lw \quad \text{Area} = \text{Length} \times \text{Width} \quad \text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت}$$

$$d = rt \quad \text{Distance} = \text{Rate} \times \text{Time} \quad \text{زمان} \times \text{سرعت متوسط} = \text{مسافت}$$

$$C = 2\pi r \quad \text{Circumference of a circle} = 2 \times \pi \times \text{Radius} \quad \text{شعاع} \times \text{پی} \times 2 = \text{محیط دایره}$$

$$V = lwh \quad \text{Volume of a rectangular Solid} = \text{Length} \times \text{Width} \times \text{Height}$$

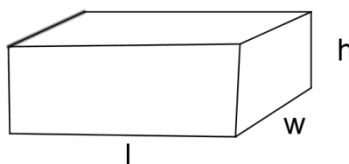
$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم جسم سه بعدی مستطیلی}$$

فرض کنید حجم یک جسم سه بعدی مستطیلی و همچنین طول و عرض را میدانیم و می خواهیم ارتفاع آنرا پیدا کنیم. یک راه این است که فرمول  $V = lwh$  را برای بدست آوردن  $h$  حل کنیم.

مثال ۱ – فرمول  $V = lwh$  را برای  $h$  حل کنید.

پاسخ

برای این کار باید سعی کنیم  $h$  را به تنهایی در یک طرف تساوی قرار دهیم. پس باید هر دو طرف معادله را بر  $lw$  تقسیم کنیم.



$$V = lwh$$

$$\frac{V}{lw} = \frac{lw h}{lw}$$

$$\frac{V}{lw} = h$$

$$h = \frac{V}{lw}$$

### حل یک معادله برای یک متغیر مشخص

۱ اگر در معادله کسر وجود داشته باشد ، هر دو طرف معادله را در کوچک ترین مخرج مشترک ضرب کنید تا کسر ها حذف شوند .

۲ با استفاده از خاصیت پخش پذیری پرانتزها را حذف کنید.

۳ جمله های مشترک را ادغام کنید.

۴ با استفاده از خاصیت جمع تساوی ، معادله اصلی را به معادله های هم ارز بنویسید تا آن متغیر مشخص در یک طرف قرار گیرد.

۵ با استفاده از خاصیت ضرب تساوی ، متغیر مشخص را به تنهایی در یک طرف قرار دهید.

### مثال ۲

معادله  $3y - 2x = 7$  را برای  $y$  حل کنید.

$$3y - 2x = 7$$

$$3y - 2x + 2x = 7 + 2x$$

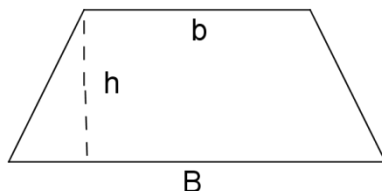
$$3y = 7 + 2x$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{7 + 2x}{3}$$

$$y = \frac{7 + 2x}{3}$$

## مثال ۳

معادله  $A = \frac{1}{2}(B + b)h$  برای  $b$  حل کنید.



این فرمول برای پیدا کردن مساحت دوزنقه است.  $B$  قاعده بزرگ تر و  $b$  قاعده کوچک تر.

$$A = \frac{1}{2}(B + b)h$$

$$2 \times A = 2 \times \frac{1}{2}(B + b)h$$

$$2A = (B + b)h$$

$$2A = Bh + bh$$

$$2A - Bh = bh$$

$$\frac{2A - Bh}{h} = \frac{bh}{h}$$

$$\frac{2A - Bh}{h} = b$$

$$b = \frac{2A - Bh}{h}$$

## استفاده از فرمول ها برای حل مسائل

بیشتر اوقات مسائل را با استفاده از فرمول های شناخته شده ، حل می کنیم. مثلاً فرمول زیر که بنام ربح ساده معروف است برای محاسبه سود بانکی یک حساب بکار می رود. از این نظر به آن ربح ساده می گویند که ، سود پس انداز را در آخر سال حساب می کنند.



$$I = PRT$$

در مورد حرف بکار برده شده در این فرمول در ابتدای همین بخش توضیح دادیم.

فرمول دیگری هم که بیشتر در محاسبات بانکی بکار می رود و بنام فرمول ربح مرکب معروف است در ذیل می آید. از این نظر به آن ربح مرکب می گویند که محاسبه سود در مدت یک سال، چندین مرتبه تکرار میشود. و همچنین سود به آنچه در حساب موجود است تعلق می گیرد.

$A =$  مبلغ موجود در حساب

$P = Principal$  سرمایه

$r = rate$  (بهره در سال) نرخ

$n = number$  تعداد دفعاتی که سود در سال حساب میشود

$t = time$  (بر حسب سال) زمان

#### مثال ۴

مبلغ ۱۰,۰۰۰ میلیون ریال به سامان به ارث رسیده است و می خواهد در یک حساب پس انداز ذخیره کند با سود ۵٪ که چهار مرتبه در سال سود مرکب به آن تعلق می گیرد. معین کنید پس از سه سال چه مبلغ در حساب ساسان خواهد بود.

#### پاسخ

$P = ۱۰,۰۰۰$  میلیون ریال

$r = ۵\%$

$t = ۳$  سال

$n = ۴$  تعداد دفعاتی در سال که سود حساب میشود

$A =$  باید پیدا کنیم

$$A = P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} = ۱۰,۰۰۰ \left( 1 + \frac{۰/۰۵}{۴} \right)^{۴ \times ۳}$$

$$= 10,000 (1 / 0.125)^{12}$$

$$= 10,000 (1 / 0.160754518)$$

$$\approx 11,607/55 \text{ میلیون ریال}$$

مساله مربوط به محلول ها

مثال ۵ - محسن ۲۰ سی سی محلول آب نمک ۲۰٪ دارد. چه مقدار نمک باید به آن اضافه کند تا محلول ۲۵٪ داشته باشد؟

پاسخ

برای حل این نوع مسائل بهتر است یک جدول تهیه کنیم.

نتیجه	اضافه شود	محلول اولیه	
۲۵٪	۱۰۰٪	۲۰٪	غلظت
$20 + x$	$x$	۲۰	مقدار
$0.25(20 + x)$	$1(x)$	$0.2(20)$	ضرب ستون ها

اینک معادله را با استفاده از ردیف آخر جدول بالا می نویسیم و آنرا حل می کنیم.

$$0.2(20) + x = 0.25(20 + x)$$

$$4 + x = 5 + 0.25x$$

$$0.75x = 1$$

$$x = \frac{1}{0.75}$$

$$x = \frac{1}{0.75} \approx 1/33 \text{ سی سی}$$

**مثال ۶-** در یک مخزن ۱۰ گالن محلول آب نمک ۱۵٪ وجود دارد. چند گالن باید از این مخزن برداشته شود و بجای آن محلول ۸۰٪ آب نمک اضافه شود تا ۱۰ گالن آب نمک ۷۰٪ داشته باشیم؟

**پاسخ -**

باز جدولی ترسیم می کنیم. اما اینجا باید مقداری از محلول را برداریم و مقداری از محلول دیگر جایگزین کنیم.

نتیجه	اضافه شود	کم شود	محلول اولیه	
۷۰٪	۸۰٪	۱۵٪	۱۵٪	غلظت
۱۰	$x$	$x$	۱۰	مقدار
$(۱۰) \cdot ۷ / ۱۰$	$(x) \cdot ۸ / ۱۰$	$(x) \cdot ۱۵ / ۱۰$	$(۱۰) \cdot ۱۵ / ۱۰$	ضرب ستون ها

معادله ای با مقادیر ردیف آخر می نویسیم.

$$۱/۵ - ۱۵x/۱۰ + ۸۰x/۱۰ = ۷$$

$$۵/۶۵x = ۵/۱۰$$

$$x = \frac{۵/۱۰}{۵/۶۵} \approx ۸/۴۶ \text{ گالن}$$

نوع دیگری از مسائل مربوط است به انجام کاری توسط دو یا چند نفر.

**مثال ۷-** یک مکانیک ماهر می تواند کاری را در مدت ۳ ساعت انجام دهد. اما یک مکانیک غیر ماهر همان کار را در مدت ۶ ساعت انجام می دهد. چند ساعت طول می کشد اگر هر دو همان کار را با هم انجام دهند؟

**پاسخ**

مکانیک ماهر کار را در ۳ ساعت انجام می دهد. پس در یک ساعت  $\frac{1}{3}$  کار را انجام می دهد.

مکانیک غیر ماهر همان کار را در ۶ ساعت انجام می دهد. پس در یک ساعت  $\frac{1}{6}$  کار را انجام می دهد.

اگر هر دو مکانیک با هم کار کنند، و کار را در  $t$  ساعت تمام کنند، پس در یک ساعت  $\frac{1}{t}$  از کار را انجام می دهند.

پس

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{t}$$

$$t = 3 \text{ ساعت}$$

بطور کلی برای حل مسائلی مانند مثال بالا از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$\frac{1}{t_1} \pm \frac{1}{t_2} \pm \frac{1}{t_3} \pm \dots = \frac{1}{t}$$

در فرمول بالا نماد  $\pm$  را بکار بردیم زیرا ممکن است شخصی یا شیی ، بجای انجام کار ، عکس آن را انجام دهد. مثال زیر یک نمونه از این قبیل مسائل است.

**مثال ۸** - اگر شیر آب باز باشد، وان خالی حمام در مدت ۲۰ دقیقه پر میشود. اگر زیر آب باز باشد ، وان پر حمام در مدت ۱۵ دقیقه خالی می شود. حال اگر وان حمام پر باشد ، هم شیر آب و هم زیر آب باز باشند ، چه مدت طول میکشد که وان خالی شود؟

**پاسخ**

اگر شیر آب بسته باشد و فقط زیر آب باز باشد ، وان در مدت ۱۵ دقیقه خالی می شود ، پس در یک دقیقه  $\frac{1}{15}$  وان خالی میشود. اما چون شیر آب باز است، عکس زیر آب عمل می کند، یعنی در هر دقیقه  $\frac{1}{20}$  وان به آب اضافه می شود. پس معادله ما به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{15} \times \frac{4}{4} - \frac{1}{20} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{4}{60} - \frac{3}{60} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{t}$$

$$t = 60 \text{ دقیقه}$$

پس ۶۰ دقیقه طول می کشد تا وان خالی شود.

**مثال ۹-** حمید ساعت ۲ بعد از ظهر از خانه خارج شد و با دوچرخه با سرعت ۱۲ کیلو متر در ساعت به طرف مدرسه رفت. ده دقیقه بعد دوستش مجید به خانه حمید رفت و مادرش گفت که او به مدرسه رفته است. بلا فاصله مجید با دو چرخه با سرعت ۱۶ کیلو متر در ساعت به دنبال حمید راه افتاد. معین کنید، در چه ساعتی مجید به دوستش می رسد.

پاسخ

زمانی که طول میکشد (بر حسب ساعت) تا مجید به حمید برسد  $x =$

چون حمید ۱۰ دقیقه یا  $\frac{1}{6}$  ساعت جلو تر است، پس  $t + \frac{1}{6}$  ساعت دو چرخه می راند. در مسائل مربوط به حرکت بیشتر اوقات بهتر است که اطلاعات را در یک جدول تنظیم کنیم. میدانیم که

زمان  $\times$  سرعت = مسافت

$$distance = Rate \times time$$

$$d = r \times t$$

چون سرعت حمید و مجید را میدانیم، پس اول ستون مربوط به سرعت را پر می کنیم. در مرحله بعد ستون زمان را پر می کنیم. چون زمان را بر حسب  $t$  می دانیم. و در آخر این ستون ها را در هم ضرب می کنیم تا اقلام ستون مربوط به مسافت پیدا شود.

زمان (ساعت)	سرعت (کیلو در ساعت متر)	مسافت (کیلو متر)	
$t$	۱۶	$16t$	مجید
$t + \frac{1}{6}$	۱۲	$12\left(t + \frac{1}{6}\right)$	حمید

زمانی که مجید به حمید می رسد، هر دو یک مسافت را پیموده اند. پس

$$\text{مسافتی که حمید پیموده} = \text{مسافتی که مجید پیموده}$$

$$۱۶t = ۱۲\left(t + \frac{۱}{۶}\right)$$

$$۱۶t = ۱۲t + ۲$$

$$۴t = ۲$$

$$t = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \text{ ساعت}$$

مجید بعد از نیم ساعت و یا ۳۰ دقیقه به حمید می رسد و چون مجید ساعت ۱۰:۲۰ به دنبال حمید راه افتاده پس در ساعت ۱۰:۴۰ به او می رسد.

### تمرینات ۲.۳

معادله های زیر را برای متغیری که مشخص شده حل کنید. (متغیر بعد از نماد : و با حرف درشت نوشته می شود.)

$$۱) \quad d = rt : t$$

$$۲) \quad I = PRT : R$$

$$۳) \quad P = a + b + c : c$$

$$۴) \quad ۹x - ۴y = ۱۶ : y$$

$$۵) \quad P = ۲l + ۲w : l$$

$$۶) \quad E = I(r + R) : r$$

$$۷) S = ۲LW + ۲LH + ۲WH : H$$

مسائل زیر را حل کنید.

- ۸ - جاوید می خواهد به شهری در ۹۰ کیلومتری تهران برود و برگردد. معین کنید که اگر با سرعت متوسط ۵۰ کیلو متر در ساعت رانندگی کند، مسافت او چند ساعت طول می کشد.
- ۹ - در یک جعبه ۲۴ عدد کاشی وجود دارد، هر کدام به مساحت ۱۴۴ سانتی متر مربع. معین کنید برای فرش کردن یک اتاق مربع شکل به ابعاد ۷/۶۸ متر چند جعبه از این نوع کاشی لازم است.
- ۱۰ - اگر مساحت یک مثلث ۱۸ سانتی متر مربع باشد، و قاعده آن ۴ سانتی متر، ارتفاع آن چند سانتی متر است؟
- ۱۱ - یک قوطی رنگ می تواند ۵۰۰ متر مربع را بپوشاند. حساب کنید چند قوطی رنگ لازم است که یک اتاق به ابعاد ۱۴ در ۱۶ متر و ارتفاع ۸ را متر نقاشی کنیم، در صورتی که بخواهیم دو لایه رنگ بزنیم. (سقف را به حساب نیاورید.)
- ۱۲ - مخزن سوخت مایع یک سفینه فضایی بشکل زیر است. همان طور که ملاحظه می کنید دو انتهای مخزن به شکل نیم کره است. حجم این مخزن را حساب کنید. جواب ها را تا دو رقم اعشاری حساب کنید.

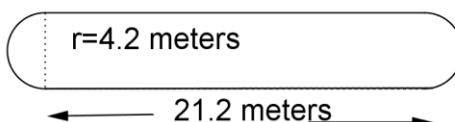
راهنمایی

دو نیم کره را روی هم می توانید یک کره کامل در نظر بگیرید.

**نکته** - برای بدست آوردن پاسخ صحیح از ماشین حساب علمی و یا کامپیوتر استفاده کنید تا مقدار عدد  $\pi$  دقیق تر محاسبه شود. در غیر اینصورت  $\pi = ۳/۱۴۱۵$  بکار برید که البته با پاسخ صحیح کمی اختلاف پیش می آید.

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h$$



کره Sphere

نیم کره Hemisphere

استوانه Cylinder

۱۳ – در سال ۱۹۴۵ دانشمندی بنام آرتور کلارک پیش بینی کرد که اگر یک سفینه مصنوعی در ارتفاع ۲۲,۲۴۸ مایلی درست بالای خط استوا قرار داده شود، با همان سرعتی که زمین بدور خود می چرخد، اطراف کره زمین می گردد. این کمر بند موازی خط استوا به کمر بند کلارک معروف است. با استفاده از فرمول محیط دایره، طول کمر بند کلارک را حدس بزنید. شعاع کره زمین تقریباً ۴,۰۰۰ مایل است.

**نکته** – برای بدست آوردن پاسخ صحیح از ماشین حساب علمی و یا کامپیوتر استفاده کنید تا مقدار عدد  $\pi$  دقیق تر محاسبه شود. در غیر اینصورت  $\pi = 3/1415$  بکار برید که البته با پاسخ صحیح کمی اختلاف پیش می آید.

$$2\pi r = \text{محیط دایره}$$

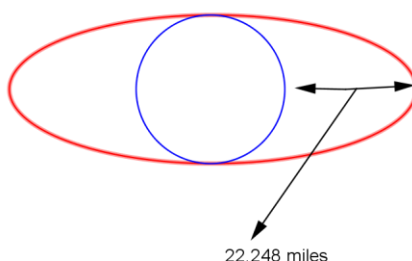
کره زمین Globe

استوا Equator

سفینه Satellite

چرخیدن – دور زدن Orbit

بر محور خود گردیدن Rotate



۱۴ – عمیق ترین حفره در کف اقیانوس کبیر نزدیک ساحل اکوادور قرار دارد و بنام حفره  $B 405$  معروف است. دانشمندان مشغول حفاری در این حفره هستند تا اطلاعات بیشتری از تاریخ کره خاکی پیدا کنند. این حفره در حال حاضر به شکل یک استوانه است که حجم آن تقریباً ۳۸۰۰ فوت مکعب و طول آن تقریباً  $1/3$  مایل است. شعاع این حفره را با دورقم اعشاری پیدا کنید.



۱۷۶۰ یارد = مایل

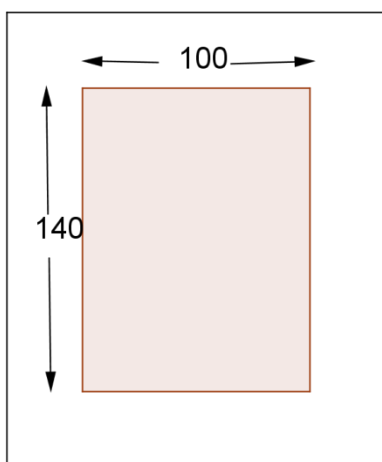
۳ فوت = یارد

۱۵ - حقوق سالانه جاوید در سال ۱۳۹۳ ۵٪ افزایش یافت. همچنین بخاطر انجام یک پروژه ، مبلغ ۲,۵۰۰,۰۰۰ تومان پاداش گرفت. اگر مجموع دریافتی او در سال ۱۳۹۳ بالغ بر ۴۰,۳۰۰,۰۰۰ تومان باشد، حقوق سالانه او در سال ۱۳۹۲ چه مبلغ بوده است؟

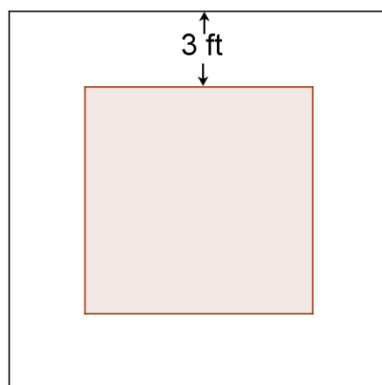
۱۶ - مریم مبلغی پول به عنوان عیدی به دو نوه اش داد. مراد ، برادر کوچک تر ، از برادرش ، فرشاد، پرسید که چند تومان عیدی گرفته است. فرشاد که نمی خواست بگوید دقیقاً چه مبلغ پول گرفته ، گفت “اگر ۱۰,۰۰۰ تومان بیشتر گرفته بودم و سپس آنرا دو برابر می کردم آنوقت ۵۰,۰۰۰ تومان بیشتر از آنچه واقعاً گرفته ام ، داشتم “معین کنید فرشاد چند تومان از مادر بزرگش عیدی گرفته است.

۱۷ - مبلغ ۱۰۰,۰۰۰۰ تومان به بهنام به ارث رسیده است. و می خواهد آنرا در دو حساب پس انداز کند. یکی از حساب ها سالانه ۶٪ و دیگری ۵ / ۴٪ بهره ساده می پردازد. اگر مجموع سودی که در سال عاید بهنام میشود ۵۰۲۵ تومان باشد، معین کنید چه مبلغ در هر کدام از حساب ها سرمایه گذاری شده است

۱۸ - یک پوستر داریم که قسمت چاپ شده آن به شکل مستطیلی است به ابعاد ۱۰۰ سانتی متر در ۱۴۰ سانتی متر با حاشیه سفید و عرض یکسان اطراف هر چهار ضلع. محیط پوستر ۱/۵ برابر محیط قسمت چاپ شده است. عرض حاشیه سفید و همچنین ابعاد پوستر را حساب کنید.

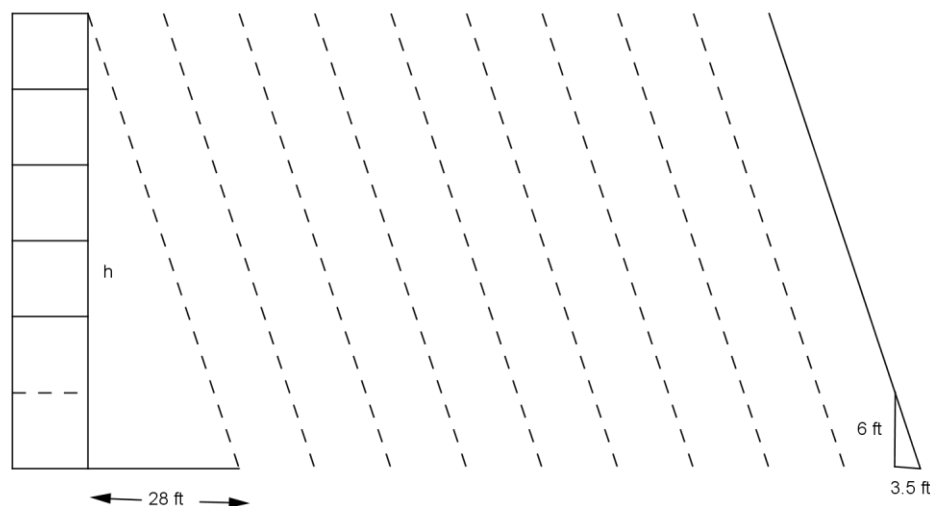


۱۹ - یک باغچه مربع شکل داریم که اطراف آن برای عابر پیاده در نظر گرفته شده. عرض قسمت عابر پیاده ۳ فوت است. اگر مساحت تمام باغچه ۱۸,۰۰۰ فوت مربع باشد، ابعاد قسمت گل کاری شده چه قدر است؟



۲۰ - شخصی با قامت ۶ فوت می خواهد ارتفاع یک ساختمان بلند را اندازه گیری کند. برای این کار ، سایه ساختمان را اندازه می گیرد و متوجه میشود که ۲۸ فوت طول دارد. همچنین طول سایه خودش را هم اندازه می گیرد و متوجه میشود که سایه اش ۳/۵ فوت است. ارتفاع ساختمان چقدر است؟

راهنمایی - از خاصیت مثلث های متشابه استفاده کنید. در دو مثلث متشابه نسبت های Ratios اضلاع متناظر Corresponding مساوی هستند. مثلث تشکیل شده از ساختمان و سایه اش با مثلث تشکیل شده از آن شخص و سایه اش با هم متشابه هستند. زیرا زاویه های هم نظیر با هم برابرند.



۲۱ - یک کارخانه نوشابه سازی آگهی کرده است که آب پرتغال تولیدی آن کارخانه کاملاً طبیعی است. در صورتیکه نوشابه تولیدی این کارخانه فقط ۵٪ آب پرتغال دارد. اما موسسه استاندارد می گوید برای اینکه نوشابه ای طبیعی نامیده شود باید ۱۰٪ آن آب پرتغال باشد. معین کنید چه مقدار آب پرتغال خالص باید این کارخانه به ۹۰۰ گالن آب پرتغال تولید شده اضافه کند تا مقررات موسسه استاندارد رعایت شده باشد.

۲۲ - پیش بینی شده است که بارش شدید باران در راه است. به این جهت باید مخزن آب نزدیک شهر یک فوت پایین تر رود. اگر پمپ A را روشن کنیم، این کار در ۴ ساعت انجام میشود. اگر پمپ B را روشن کنیم، این کار در مدت ۶ ساعت انجام میشود. معین کنید اگر هر دو پمپ روشن باشند، در چه مدت سطح مخزن یک فوت پایین میرود.

۲۳ - مهندس یک شرکت در ماه اسفند مبلغ ۸,۵۰۰,۰۰۰ ریال پاداش گرفت. اگر آن سال روی هم رفته ۳,۰۰,۰۰۰ ریال دریافت کرده باشد، حقوق ماهانه او چه مبلغ است؟

۲۴ - پدر امید مبلغی پول به او داده تا کمکی برای مخارج دانشگاه او باشد. امید میگفت اگر ۲۲,۰۰۰ تومان دیگر هم مادرش به او میداد و همه این پول ها در یک سرمایه گذاری دو برابر میشد، آنوقت ۱۳۴,۰۰۰ تومان پول داشت. حساب کنید، پدر امید چه مبلغی پول به او داده است؟

۲۵ - یک خانواده ۴ فرزند دارند. مسن ترین فرزند دو برابر جوان ترین فرزند سن دارد. دو فرزند وسطی یکی ده ساله و دیگری یازده ساله است. اگر متوسط سن چهار فرزند  $10\frac{5}{5}$  سال باشد، سن جوان ترین فرزند چقدر است؟

۲۶ - طول یک اطاق یک و نیم برابر عرض آن است. اگر محیط اطاق ۸۰ متر باشد، عرض اطاق چقدر است؟

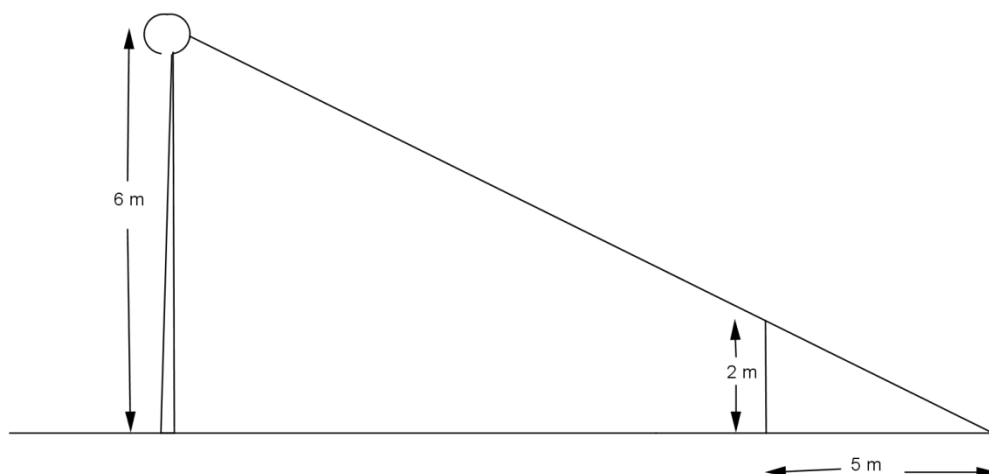
۲۷ - یک لوله کش و شاگردش در یک خانه کار می کنند. مزد لوله کش ۴۵,۰۰۰ ریال در ساعت است و مزد شاگرد ۲۵,۰۰۰ ریال در ساعت است. ساعتی که استاد در این خانه کار می کند دو برابر ساعتی است که شاگردش کار می کند. اگر پس از پایان کار، لوله کش مبلغ ۴,۰۲۵,۰۰۰ ریال صورت حساب برای صاحب خانه بفرستد، استاد و شاگرد هر کدام چند ساعت در این خانه کار کرده اند؟

۲۸ - چه مقدار اسید  $60\%$  باید به یک محلول اسید  $30\%$  اضافه کرد تا  $300$  میلی لیتر محلول  $50\%$  بدست آید؟

۲۹ - یک جواهر فروش ۵ انگشتر هر کدام به وزن ۱۸ گرم دارد. این انگشترها از آلیاژی با  $10\%$  نقره و  $90\%$  طلا ساخته شده اند. او تصمیم دارد آنها را ذوب کرده و آنقدر نقره به آن اضافه کند تا در صد طلای آلیاژ به  $75\%$  تقلیل یابد. حساب کنید چند گرم نقره باید اضافه کند تا آلیاژ مورد نظر بدست آورد؟

۳۰ - رادیاتور یک اتومبیل پر از مخلوطی از  $60\%$  ضد یخ و  $40\%$  آب است. تولید کننده ضد یخ توصیه می کند که در تابستان باید فقط  $50\%$  مخلوط، ضد یخ باشد. اگر گنجایش رادیاتور  $3/6$  لیتر باشد، حساب کنید چه مقدار از محتویات رادیاتور تخلیه و سپس آب در آن ریخته شود، تا مخلوط داخل رادیاتور  $50\%$  آب و  $50\%$  ضد یخ داشته باشد.

۳۱ - مردی در حال دور شدن از یک تیر چراغ برق است که ۶ متر ارتفاع دارد. قد آن مرد ۲ متر است. اگر سایه اش ۵ متر باشد، فاصله آن مرد تا تیر چراغ برق چند متر است؟



۳۲ - جلال کاری را در ۷۰ دقیقه انجام می دهد. جمال همان کار را در مدت ۸۰ دقیقه انجام می دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، آن کار را در چه مدت انجام می دهند؟

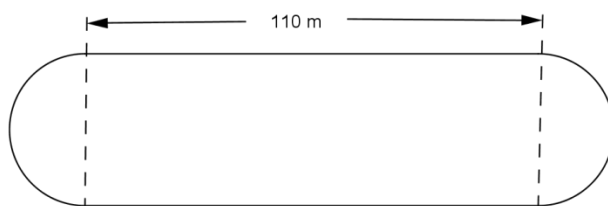
۳۳ - یک هوا پیمای جت تجارتي مشهد را به قصد بندر عباس ترک می کند و با سرعت ۸۰۰ کیلو متر در ساعت پرواز می کند. در همین ساعت یک جت شخصی از بندر عباس به طرف مشهد با سرعت ۹۰۰ کیلو متر در ساعت پرواز می کند. اگر مسافت بین این دو شهر ۲۵۵۰ کیلو متر فرض کنیم، چند ساعت بعد از شروع پرواز این دو جت از هم عبور می کنند؟

۳۴ - آقای راستی برای دیدن دوستش در اصفهان با سرعت متوسط ۵۰ کیلو متر در ساعت رانندگی کرد و پس از ۱۰ ساعت توقف به طرف تهران به راه افتاد. سرعت متوسط او در برگشت به تهران ۴۵ کیلو متر در ساعت بود. اگر از زمان حرکت از تهران تا رسیدن مجدد به تهران ۲۹ ساعت طول کشیده باشد، مسافت بین تهران و اصفهان چند کیلو متر است؟

۳۵ - آقای مهربان از تهران به شهری در ۳۰۰ کیلو متری می رود. قسمتی را با اتوبوس می پیماید و درست سر ساعت به ایستگاه ترن می رسد و بلا فاصله سفر خود را با ترن شروع می کند. اگر سرعت متوسط اتوبوس ۴۰ کیلو متر در ساعت و سرعت متوسط ترن ۶۰ کیلو متر در ساعت باشد و تمام مسافت ۵/۵ ساعت طول کشیده باشد، آقای مهربان چند ساعت را در ترن گذرانده است؟

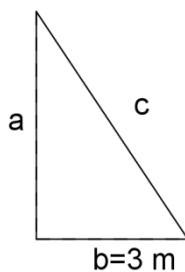
۳۶ - عرض یک قطعه زمین مستطیل شکل ۵۰ متر است. اندازه یک قطر آن ۱۰ متر بیشتر از طول مستطیل است. طول مستطیل چند متر است؟

۳۷ - لبه باریکه مخصوص دویدن در اطراف زمین فوتبال به شکل زیر است با دو طرف مستقیم و دو انتهای نیم دایره. اگر طول تمام باریکه ۴۴۰ و قسمت های مسقیم هر کدام ۱۱۰ متر باشند، شعاع قسمت نیم دایره چند متر است؟ (پاسخ را به نزدیک ترین عدد صحیح بنویسید)



۳۸ - در مثلث قائم الزویه زیر اگر  $b = 3$  متر و  $a + c = 10$  متر باشد، مطلوب است طول  $a$

برگرفته از یک کتاب چینی که در سال ۲۵۰ قبل از میلاد نوشته شده است.



## پاسخ تمرینات ۲.۳

معادله های زیر را برای متغیری که مشخص شده حل کنید. (متغیر بعد از نماد : و با حرف درشت نوشته می شود.)

$$۱) \quad d = rt : t$$

$$\frac{d}{r} = \frac{rt}{r}$$

$$t = \frac{d}{r}$$

$$۲) \quad I = PRT : R$$

$$\frac{I}{PT} = \frac{PRT}{PT}$$

$$R = \frac{I}{PT}$$

$$۳) \quad P = a + b + c : c$$

$$c = P - a - b$$

$$۴) \quad ۹x - ۴y = ۱۶ : y$$

$$۹x - ۱۶ = ۴y$$

$$\frac{۹x - ۱۶}{۴} = \frac{۴y}{۴}$$

$$y = \frac{۹x - ۱۶}{۴}$$

$$۵) \quad P = ۲l + ۲w : l$$

$$P - ۲w = ۲l$$

$$\frac{P - ۲w}{۲} = \frac{۲l}{۲}$$

$$l = \frac{P - ۲w}{۲}$$

$$۶) \quad E = I(r + R) : r$$

$$E = Ir + IR$$

$$E - IR = Ir$$

$$\frac{E - IR}{I} = \frac{Ir}{I}$$

$$r = \frac{E - IR}{I} = \frac{E}{I} - R$$

$$۷) \quad S = ۲LW + ۲LH + ۲WH : H$$

$$S - ۲LW = ۲LH + ۲WH$$

$$S - 2LW = H(2L + 2W)$$

$$\frac{S - 2LW}{2L + 2W} = \frac{H(2L + 2W)}{2L + 2W}$$

$$H = \frac{S - 2LW}{2L + 2W}$$

۸ - جاوید می خواهد به شهری در ۹۰ کیلومتری تهران برود و برگردد. معین کنید که اگر با سرعت متوسط ۵۰ کیلو متر در ساعت رانندگی کند، مسافرت او چند ساعت طول می کشد.

$$d = rt$$

$$\text{کیلومتر} = 2(90) = 180$$

$$t = \frac{d}{r} = \frac{180}{50} = 3\frac{3}{5}$$

و یا ۳ ساعت و ۳۶ دقیقه

۹ - در یک جعبه ۲۴ عدد کاشی وجود دارد، هر کدام به مساحت ۱۴۴ سانتی متر مربع. معین کنید برای فرش کردن یک اتاق مربع شکل به ابعاد ۷/۶۸ متر چند جعبه از این نوع کاشی لازم است.

$$\text{ابعاد اتاق به سانتی متر} = 768 = 7/68 \times 1000$$

$$\text{سانتی متر مربع} = 589,824 = (768)^2 = (\text{یک ضلع})^2 = \text{مساحت اتاق مربع شکل}$$

$$\text{سانتی متر مربع} = 3,456 = 24 \times 144 = \text{کل مساحت کاشی های داخل جعبه}$$

$$170/66 = 589,824 \div 3,456 = \text{تعداد جعبه های لازم}$$

چون باید جعبه ها باید بطور کامل خرید، پس ۱۷۱ جعبه لازم است.

۱۰ - اگر مساحت یک مثلث ۱۸ سانتی متر مربع باشد، و قاعده آن ۴ سانتی متر، ارتفاع آن چند سانتی متر است؟



$$(\text{ارتفاع})(\text{قاعده}) = \frac{1}{2} \text{مساحت مثلث}$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$2A = bh$$

$$h = \frac{2A}{b} = \frac{2 \times 18}{4} = 9 \text{ سانتی متر}$$

۱۱ - یک قوطی رنگ می تواند ۵۰۰ متر مربع را بپوشاند. حساب کنید چند قوطی رنگ لازم است که یک اتاق به ابعاد ۱۴ در ۱۶ متر و ارتفاع ۸ متر را نقاشی کنیم، در صورتی که بخواهیم دو لایه رنگ بزنیم. (سقف را به حساب نیاورید.)

پاسخ

الف - دو دیوار به ابعاد ۱۶ × ۸ پس مساحت آنها میشود

$$2(16 \times 8) = 2 \times 128 = 256 \text{ متر مربع}$$

ب - دو دیوار به ابعاد ۱۴ × ۸ پس مساحت آنها میشود

$$2(14 \times 8) = 2 \times 112 = 224 \text{ متر مربع}$$

ج - مساحت کل چهار دیوار

$$256 + 224 = 480 \text{ متر مربع}$$

د - مساحت دو لایه رنگ

$$2 \times 480 = 960 \text{ متر مربع}$$

$$960 \div 500 = 1.92 \text{ قوطی رنگ}$$

پس ۲ قوطی رنگ لازم است.

۱۲ – مخزن سوخت مایع یک سفینه فضایی بشکل زیر است. همان طور که ملاحظه می کنید دو انتهای مخزن به شکل نیم کره است. حجم این مخزن را حساب کنید. جواب ها را تا دو رقم اعشاری حساب کنید.

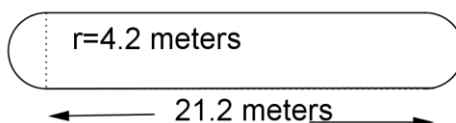
راهنمایی

دو نیم کره را روی هم می توانید یک کره کامل در نظر بگیرید.

**نکته** – برای بدست آوردن پاسخ صحیح از ماشین حساب علمی و یا کامپیوتر استفاده کنید تا مقدار عدد  $\pi$  دقیق تر محاسبه شود. در غیر اینصورت  $\pi = 3/1415$  بکار برید که البته با پاسخ صحیح کمی اختلاف پیش می آید.

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h$$



کره Sphere

نیم کره Hemisphere

استوانه Cylinder

$$\text{Volume of Sphere} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (4.2)^3 = 31.5 / 34 \text{ متر مکعب}$$

$$\text{Volume of Cylinder} = \pi r^2 h = \pi (4.2)^2 (21.2) = 1174.82 \text{ متر مکعب}$$

$$1174.82 + 31.5 / 34 = 1485.16 \text{ متر مکعب}$$

۱۳ – در سال ۱۹۴۵ دانشمندی بنام آرتور کلارک پیش بینی کرد که اگر یک سفینه مصنوعی در ارتفاع ۲۲,۲۴۸ مایلی درست بالای خط استوا قرار داده شود، با همان سرعتی که زمین بدور خود می چرخد، اطراف کره زمین می گردد. این

کمر بند موازی خط استوا به کمر بند کلارک معروف است. با استفاده از فرمول محیط دایره، طول کمر بند کلارک را حدس بزنید. شعاع کره زمین تقریباً ۴,۰۰۰ مایل است.

**نکته** – برای بدست آوردن پاسخ صحیح از ماشین حساب علمی و یا کامپیوتر استفاده کنید تا مقدار عدد  $\pi$  دقیق تر محاسبه شود. در غیر اینصورت  $\pi = 3/1415$  بکار برید که البته با پاسخ صحیح کمی اختلاف پیش می آید.

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r$$

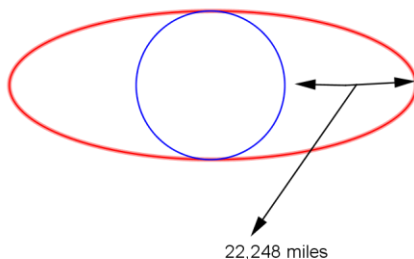
کره زمین Globe

استوا Equator

سفینه Satellite

چرخیدن – دور زدن Orbit

بر محور خود گردیدن Rotate



پاسخ

$$\text{شعاع کمر بند کلارک بر حسب مایل} = 4000 + 22248 = 26248$$

$$\text{مایل} = 164921 = 2\pi(26248) = 2\pi r = \text{محیط کمر بند} = C$$

۱۴ – عمیق ترین حفره در کف اقیانوس کبیر نزدیک ساحل اکوادور قرار دارد و بنام حفره  $504B$  معروف است. دانشمندان مشغول حفاری در این حفره هستند تا اطلاعات بیشتری از تاریخ کره خاکی پیدا کنند. این حفره در حال حاضر

به شکل یک استوانه است که حجم آن تقریباً ۳۸۰۰ فوت مکعب و طول آن تقریباً  $\frac{1}{3}$  مایل است. شعاع این حفره را با دورقم اعشاری پیدا کنید.

$$۱۷۶۰ \text{ یارد} = \text{مایل}$$

$$۳ \text{ فوت} = \text{یارد}$$

پاسخ

$$\text{طول حفره بر حسب فوت} = ۶۸۶۴ = (۳)(۱۷۶۰)\left(\frac{1}{3}\right) = \text{مایل} \frac{1}{3} = \text{تبدیل مایل به فوت}$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$r^2 = \frac{V}{\pi h} = \frac{۳۸۰۰}{\pi(۶۸۶۴)}$$

$$r = \sqrt{\frac{۳۸۰۰}{\pi(۶۸۶۴)}} = ۰/۴۲ \text{ فوت}$$

۱۵ - حقوق سالانه جاوید در سال ۱۳۹۳ ۵٪ افزایش یافت. همچنین بخاطر انجام یک پروژه، مبلغ ۲,۵۰۰,۰۰۰ تومان پاداش گرفت. اگر مجموع دریافتی او در سال ۱۳۹۳ بالغ بر ۴۰,۳۰۰,۰۰۰ تومان باشد، حقوق سالانه او در سال ۱۳۹۲ چه مبلغ بوده است؟

حل

$$x = \text{حقوق سالانه جاوید در سال } ۱۳۹۲$$

$$۰/۰۵x = \text{پنج درصد افزایش حقوق سالانه}$$

$$x + ۰/۰۵x = \text{حقوق جاوید در سال } ۱۳۹۳$$

$$x + ۰/۰۵x + ۲,۵۰۰,۰۰۰ = ۴۰,۳۰۰,۰۰۰$$

$$۱/۰۵x + ۲,۵۰۰,۰۰۰ = ۴۰,۳۰۰,۰۰۰$$

$$۱/۰۵x = ۳۷,۸۰۰,۰۰۰$$

$$x = \frac{۳۷,۸۰۰,۰۰۰}{۱/۰۵} = ۳۶۰۰۰,۰۰۰ \text{ تومان}$$

۱۶ – مریم مبلغی پول به عنوان عیدی به دو نوه اش داد. مراد، برادر کوچک تر، از برادرش، فرشاد، پرسید که چند تومان عیدی گرفته است. فرشاد که نمی خواست بگوید دقیقاً چه مبلغ پول گرفته، گفت «اگر ۱۰,۰۰۰ تومان بیشتر گرفته بودم و سپس آنرا دو برابر می کردم آنوقت ۵۰,۰۰۰ تومان بیشتر از آنچه واقعاً گرفته ام، داشتم» معین کنید فرشاد چند تومان از مادر بزرگش عیدی گرفته است.

**حل**

مقدار عیدی فرشاد  $x =$

ده هزار تومان بیشتر از عیدی  $x + 10,000$

دو برابر آن مبلغ  $2(x + 10,000)$

پنجاه هزار تومان بیشتر از عیدی  $x + 50,000$

$$2(x + 10,000) = x + 50,000$$

$$2x + 20,000 = x + 50,000$$

$$x = 30,000 \text{ تومان}$$

فرشاد ۳۰,۰۰۰ تومان عیدی گرفته است.

۱۷ – مبلغ ۱۰۰,۰۰۰ تومان به بهنام به ارث رسیده است. و می خواهد آنرا در دو حساب پس انداز کند. یکی از حساب ها سالانه ۶٪ و دیگری ۵/۴٪ بهره ساده می پردازد. اگر مجموع سودی که در سال عاید بهنام میشود ۵۰۲۵ تومان باشد، معین کنید چه مبلغ در هر کدام از حساب ها سرمایه گذاری شده است.

**حل**

مبلغی که در حساب با بهره شش در صد سرمایه گذاری شده  $x =$

مبلغی که در حساب با بهره چهار و نیم در صد سرمایه گذاری شده  $100,000 - x =$

سودی که با بهره شش در صد عاید میشود  $0.06x =$

سودی که با بهره چهار و نیم در صد عاید میشود  $0.045(100,000 - x) =$

$$0.06x + 0.045(100,000 - x) = 5025$$

$$0.06x + 4,500 - 0.045x = 5025$$

$$\%15x + 4,500 = 5,250$$

$$\%15x = 525$$

$$x = \frac{525}{\%15}$$

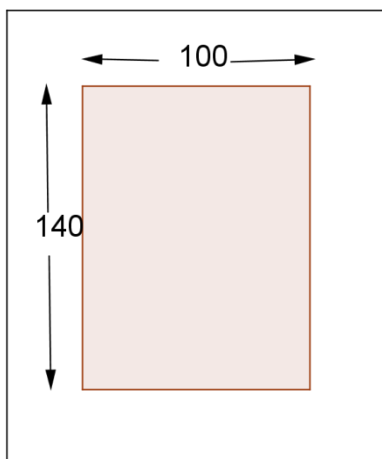
$$x = 35,000 \text{ تومان}$$

پس بهنام مبلغ ۳۵ ۰۰۰ تومان در حساب با بهره شش در صد سرمایه گذاری کرده و بقیه یعنی

$$100,000 - 35,000 = 65,000 \text{ تومان}$$

در حساب با بهره چهار و نیم در صد سرمایه گذاری کرده است.

۱۸ - یک پوستر داریم که قسمت چاپ شده آن به شکل مستطیلی است به ابعاد ۱۰۰ سانتی متر در ۱۴۰ سانتی متر با حاشیه سفید و عرض یکسان اطراف هر چهار ضلع. محیط پوستر ۱/۵ برابر محیط قسمت چاپ شده است. عرض حاشیه سفید و همچنین ابعاد پوستر را حساب کنید.



پاسخ

$$x = \text{عرض حاشیه سفید}$$

$$2(100) + 2(140) = 480 = \text{محیط قسمت چاپ شده}$$

$$2x + 100 = \text{عرض پوستر}$$

$$\text{طول پوستر} = 140 + 2x$$

$$\text{محیط پوستر} = 2(100 + 2x) + 2(140 + 2x)$$

میدانیم که محیط پوستر  $1/5$  برابر محیط قسمت چاپ شده است. پس

$$\text{محیط قسمت چاپ شده} = \frac{3}{4} \times \text{محیط پوستر}$$

$$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x) = \frac{3}{4} \times 480$$

$$200 + 4x + 280 + 4x = 360$$

$$8x = 240$$

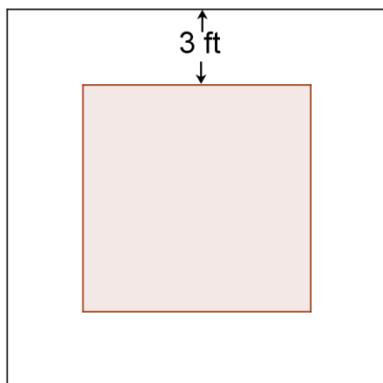
$$x = 30 \text{ سانتی متر}$$

پس حاشیه سفید 30 سانتی متر است. بنا بر این ابعاد پوستر

$$\text{عرض پوستر} = 100 + 30 + 30 = 160 \text{ متر}$$

$$\text{طول پوستر} = 140 + 30 + 30 = 200 \text{ متر}$$

۱۹ - یک باغچه مربع شکل داریم که اطراف آن برای عابر پیاده در نظر گرفته شده. عرض قسمت عابر پیاده ۳ فوت است. اگر مساحت تمام باغچه ۱۸,۰۰۰ فوت مربع باشد، ابعاد قسمت گل کاری شده چه قدر است؟



پاسخ

طول قسمت گلکاری شده  $x =$

طول تمام باغچه  $x + 6 =$

مساحت تمام باغچه  $(x + 6)^2 =$

فوت مربع  $18000 =$  مساحت تمام باغچه

$$(x + 6)^2 = 18000$$

$$x + 6 = \sqrt{18000}$$

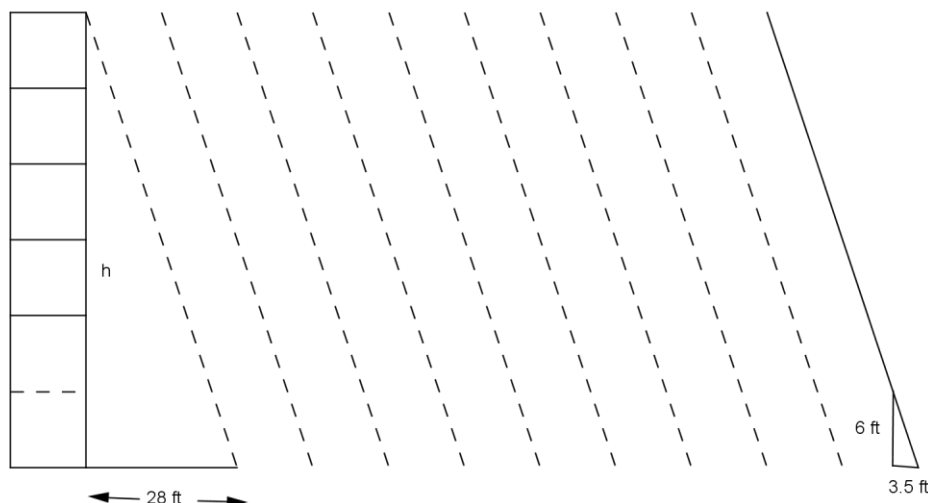
$$x = \sqrt{18000} - 6$$

$$x \approx 128 \text{ فوت}$$

۲۰- شخصی با قامت ۶ فوت می خواهد ارتفاع یک ساختمان بلند را اندازه گیری کند. برای این کار ، سایه ساختمان را اندازه می گیرد و متوجه میشود که ۲۸ فوت طول دارد. همچنین طول سایه خودش را هم اندازه می گیرد و متوجه میشود که سایه اش ۳/۵ فوت است. ارتفاع ساختمان چقدر است؟



راهنمایی - از خاصیت مثلث های متشابه استفاده کنید. در دو مثلث متشابه نسبت های Ratios اضلاع متناظر Corresponding مساوی هستند. مثلث تشکیل شده از ساختمان و سایه اش با مثلث تشکیل شده از آن شخص و سایه اش با هم متشابه هستند. زیرا زاویه های هم نظیر با هم برابرند.



پاسخ

ارتفاع ساختمان  $x =$

$$\text{نسبت ارتفاع به قاعده در مثلث بزرگ} = \frac{h}{28}$$

$$\text{نسبت ارتفاع به قاعده در مثلث کوچک} = \frac{6}{3/5}$$

نسبت ارتفاع به قاعده در مثلث کوچک = نسبت ارتفاع به قاعده در مثلث بزرگ

$$\frac{h}{28} = \frac{6}{3/5}$$

$$3/5h = 6 \times 28$$

$$h = \frac{6 \times 28}{3/5} = 48 \text{ فوت}$$

ساختمان ۴۸ فوت است.

۲۱ - یک کارخانه نوشابه سازی آگهی کرده است که آب پرتغال تولیدی آن کارخانه کاملاً طبیعی است. در صورتیکه نوشابه تولیدی این کارخانه فقط ۵٪ آب پرتغال دارد. اما موسسه استاندارد می گوید برای اینکه نوشابه ای طبیعی نامیده شود باید ۱۰٪ آن آب پرتغال باشد. معین کنید چه مقدار آب پرتغال خالص باید این کارخانه به ۹۰۰ گالن آب پرتغال تولید شده اضافه کند تا مقررات موسسه استاندارد رعایت شده باشد.

پاسخ

نتیجه	اضافه شود	آب پرتغال اولیه	
۱۰٪	۱۰۰٪	۵٪	غلظت
$900 + x$	$x$	۹۰۰	مقدار
$0/1(900 + x)$	$1(x)$	$0/0.5(900)$	ضرب ستون ها

با استفاده از کمیت های ردیف آخر جدول بالا ، معادله ای می نویسیم و آنرا حل می کنیم.

$$0/0.5(900) + x = 0/1(900 + x)$$

$$450 + x = 900 + 0/1x$$

$$0/9x = 450$$

$$x = \frac{450}{0/9} = 50 \text{ گالن}$$

این کارخانه باید ۵۰ گالن آب پرتغال خالص به نوشابه ۵٪ اضافه کند.

۲۲ - پیش بینی شده است که بارش شدید باران در راه است. به این جهت باید مخزن آب نزدیک شهر یک فوت پایین تر رود. اگر پمپ A را روشن کنیم ، این کار در ۴ ساعت انجام میشود. اگر پمپ B را روشن کنیم، این کار در مدت ۶ ساعت انجام میشود. معین کنید اگر هر دو پمپ روشن باشند ، در چه مدت سطح مخزن یک فوت پایین میرود.

پاسخ

پمپ  $A$  در یک ساعت  $\frac{1}{4}$  کار را انجام میدهد. پمپ  $B$  در تک ساعت  $\frac{1}{6}$  کار را انجام میدهد. و  $t$  مدت زمان لازم برای انجام کار در صورتی که هر دو پمپ باز باشد.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{t}$$

$$5t = 12$$

$$t = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \text{ ساعت}$$

زمان لازم برای اینکه سطح آب یک فوت پایین رود ۲ ساعت و ۲۴ دقیقه لازم است اگر هر دو پمپ باز باشد.

۲۳ - مهندس یک شرکت در ماه اسفند مبلغ ۸,۵۰۰,۰۰۰ ریال پاداش گرفت. اگر آن سال روی هم رفته ۹۷,۳۰۰,۰۰۰ ریال دریافت کرده باشد، حقوق ماهانه او چه مبلغ است؟

پاسخ

$$x = \text{حقوق ماهانه مهندس}$$

$$12x + 8,500,000 = 97,300,000$$

$$12x = 88,800,000$$

$$x = 4,700,000$$

۲۴ - پدر امید مبلغی پول به او داده تا کمکی برای مخارج دانشگاه او باشد. امید میگفت اگر ۲۲,۰۰۰ تومان دیگر هم مادرش به او میداد و همه این پول ها در یک سرمایه گذاری دو برابر میشد، آنوقت ۱۳۴,۰۰۰ تومان پول داشت. حساب کنید، پدر امید چه مبلغی پول به او داده است؟

پاسخ

پولی که پدر امید به او داد  $x =$

باضافه پول مادرش  $x + ۲۲,۰۰۰$

$$۲(x + ۲۲,۰۰۰) = ۱۳۴,۰۰۰$$

$$۲x + ۴۴,۰۰۰ = ۱۳۴,۰۰۰$$

$$۲x = ۹۰,۰۰۰$$

$$x = ۴۵,۰۰۰ \text{ تومان}$$

۲۵ - یک خانواده ۴ فرزند دارند. مسن ترین فرزند دو برابر جوان ترین فرزند سن دارد. دو فرزند وسطی یکی ده ساله و دیگری یازده ساله است. اگر متوسط سن چهار فرزند ۱۰/۵ سال باشد، سن جوان ترین فرزند چقدر است؟

پاسخ

سن جوان ترین بچه  $x =$

سن مسن ترین بچه  $۲x =$

$$\frac{x + ۲x + ۱۰ + ۱۱}{۴} = ۱۰/۵$$

$$x + ۲x + ۱۰ + ۱۱ = ۴۲$$

$$۳x = ۲۱$$

$$x = \frac{۲۱}{۳} = ۷ \text{ سال}$$

سن جوان ترین بچه ۷ سال است.

۲۶ - طول یک اطاق یک و نیم برابر عرض آن است. اگر محیط اطاق ۸۰ متر باشد، عرض اطاق چقدر است؟

پاسخ

$$x = \text{عرض اطاق}$$

$$1/5x = \text{طول اطاق}$$

$$2x + 2(1/5x) = 80$$

$$2x + 2/5x = 80$$

$$5x = 80$$

$$x = \frac{80}{5} = 16 \text{ متر}$$

عرض اطاق ۱۶ متر است.

۲۷ - یک لوله کش و شاگردش در یک خانه کار می کنند. مزد لوله کش ۴۵,۰۰۰ ریال در ساعت است و مزد شاگرد ۲۵,۰۰۰ ریال در ساعت است. ساعاتی که استاد در این خانه کار می کند دو برابر ساعاتی است که شاگردش کار می کند. اگر پس از پایان کار، لوله کش مبلغ ۴,۰۲۵,۰۰۰ ریال صورت حساب برای صاحب خانه بفرستد، استاد و شاگرد هر کدام چند ساعت در این خانه کار کرده اند؟

$$x = \text{ساعاتی که شاگرد لوله کش کار کرده است}$$

$$2x = \text{ساعاتی که لوله کش کار کرده است}$$

$$25(x) = \text{کارکرد شاگرد به تومان}$$

$$45(2x) = \text{کارکرد استاد به تومان}$$

$$25x + 45(2x) = 4,025,000$$

$$25x + 90x = 4,025,000$$

$$115x = 4,025,000$$

$$x = \frac{4025}{115} = 35 \text{ ساعات کار شاگرد}$$

$$2(35) = 70 \text{ ساعات کار استاد}$$

۲۸ - چه مقدار اسید ۶۰٪ باید به یک محلول اسید ۳۰٪ اضافه کرد تا ۳۰۰ میلی لیتر محلول ۵۰٪ بدست آید؟

پاسخ

نتیجه	اضافه شود	محلول اولیه	
۵۰٪	۶۰٪	۳۰٪	غلظت
۳۰۰	$x$	$300 - x$	مقدار
$5(300)$	$6(x)$	$3(300 - x)$	ضرب ستون ها

با استفاده از کمیت های ردیف آخر معادله ای می نویسیم و آنرا حل می کنیم.

$$5(300) + 6x = 3(300 - x)$$

$$1500 + 6x = 900 - 3x$$

$$9x = 600$$

$$x = \frac{600}{9} = 200 \text{ میلی لیتر}$$

۲۹ - یک جواهر فروش ۵ انگشتر هر کدام به وزن ۱۸ گرم دارد. این انگشتر ها از آلیاژی با ۱۰٪ نقره و ۹۰٪ طلا ساخته شده اند. او تصمیم دارد آنها را ذوب کرده و آنقدر نقره به آن اضافه کند تا در صد طلای آلیاژ به ۷۵٪ تقلیل یابد. حساب کنید چند گرم نقره باید اضافه کند تا آلیاژ مورد نظر بدست آورد؟

پاسخ

$$18 \times 5 = 90 \text{ آلیاژ اولیه بر حسب گرم}$$

اگر باید عیار طلا از ۹۰٪ به ۷۵٪ کاهش پیدا کند، به این معنی است که عیار نقره باید از ۱۰٪ به ۲۵٪ افزایش یابد.

نتیجه	اضافه شود	آلیاژ اولیه	
۲۵٪	۱۰۰٪	۱۰٪	عیار
$۹۰ + x$	$x$	۹۰	مقدار
$۰/۲۵(۹۰ + x)$	$۱(x)$	$۰/۱(۹۰)$	ضرب ستون ها

با استفاده از کمیت های ردیف آخر جدول بالا معادله ای می نویسیم و آنرا حل می کنیم.

$$۰/۱(۹۰) + ۱(x) = ۰/۲۵(۹۰ + x)$$

$$۹ + x = ۲۲/۵ + ۰/۲۵x$$

$$۰/۷۵x = ۱۳/۵$$

$$x = \frac{۱۳/۵}{۰/۷۵} = ۱۸ \text{ گرم}$$

جواهر فروش باید ۱۸ گرم نقره خالص به آلیاژ اضافه کند تا در صد طلای آن به ۷۵٪ تقلیل یابد.

۳۰ – رادیاتور یک اتومبیل پر از مخلوطی از ۶۰٪ ضد یخ و ۴۰٪ آب است. تولید کننده ضد یخ توصیه می کند که در تابستان باید فقط ۵۰٪ مخلوط، ضد یخ باشد. اگر گنجایش رادیاتور ۳/۶ لیتر باشد، حساب کنید چه مقدار از محتویات رادیاتور تخلیه و سپس آب در آن ریخته شود، تا مخلوط داخل رادیاتور ۵۰٪ آب و ۵۰٪ ضد یخ داشته باشد.

پاسخ

محتویات بدست آمده	آب اضافه شود	از رادیاتور تخلیه شود	محتویات اولیه رادیاتور	
۵۰٪	۱۰۰٪	۴۰٪	۴۰٪	غلظت
لیتر ۳/۶	$x$	$x$	لیتر ۳/۶	مقدار به لیتر
$۰/۵(۳/۶)$	$۱(x)$	$۰/۴(x)$	$۰/۴(۳/۶)$	ضرب ستون ها

با استفاده از کمیت های ردیف آخر معادله ای می نویسیم و آنرا حل می کنیم.

$$۰/۴(۳/۶) - ۰/۴(x) + ۱(x) = ۰/۵(۳/۶)$$

$$۱/۴۴ - ۰/۴x + x = ۱/۸$$

$$0/6x = 0/36$$

$$x = \frac{0/36}{0/6} = 0/6 \text{ لیتر}$$

باید ۰/۶ لیتر از آب رادیاتور را تخلیه کرد و بجای آن آب ریخت تا مخلوط مورد نظر بدست آید.

۳۱ - مردی در حال دور شدن از یک تیر چراغ برق است که ۶ متر ارتفاع دارد. قد آن مرد ۲ متر است. اگر سایه اش ۵ متر باشد، فاصله آن مرد تا تیر چراغ برق چند متر است؟

پاسخ

$$x = \text{فاصله مرد تا تیر چراغ برق}$$

طبق قضیه فیثاغورث داریم

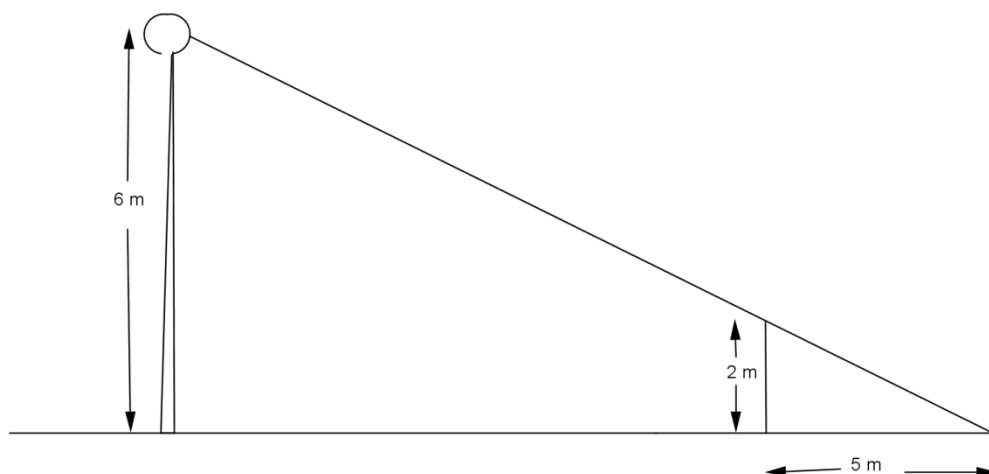
$$\frac{6}{x+5} = \frac{2}{5}$$

$$2x + 10 = 30$$

$$2x = 20$$

$$x = \frac{20}{2} = 10 \text{ متر}$$





۳۲- جلال کاری را در ۷۰ دقیقه انجام می دهد. جمال همان کار را در مدت ۸۰ دقیقه انجام می دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، آن کار را در چه مدت انجام می دهند؟

پاسخ

جلال کار را در مدت ۷۰ دقیقه انجام می دهد، پس در یک دقیقه  $\frac{1}{70}$  کار را انجام می دهد. و جمال در یک دقیقه  $\frac{1}{80}$  کار را. حال اگر  $t$  مدت زمان لازم برای انجام کار باشد در صورتی که هر دو با هم کار می کنند. پس خواهیم داشت .

$$\frac{1}{70} + \frac{1}{80} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{70} \times \frac{8}{8} + \frac{1}{80} \times \frac{7}{7} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{8}{560} + \frac{7}{560} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{15}{560} = \frac{1}{t}$$

$$15t = 560$$

$$t = \frac{560}{15} = 37\frac{1}{3} \text{ دقیقه}$$

اگر هر دو با هم کار کنند، ۳۷ دقیقه و ۲۰ ثانیه طول می کشد تا کار تمام شود.

۳۳ - یک هوا پیمای جت تجارتی مشهد را به قصد بندر عباس ترک می کند و با سرعت ۸۰۰ کیلو متر در ساعت پرواز می کند. در همین ساعت یک جت شخصی از بندر عباس به طرف مشهد با سرعت ۹۰۰ کیلو متر در ساعت پرواز می کند. اگر مسافت بین این دو شهر ۲۵۵۰ کیلو متر فرض کنیم، چند ساعت بعد از شروع پرواز این دو جت از هم عبور می کنند؟

پاسخ

جدولی ترسیم می کنیم. و اطلاعات داده شده را در آن وارد می کنیم. صورت هر دو هوا پیمای را داریم، پس اول این دو را در ستون سرعت یعنی  $r$  وارد می کنیم. حال اگر مسافت پیموده شده توسط جت شخصی را  $x$  فرض کنیم، پس مسافت پیموده شده توسط جت تجارتی  $2550 - x$  کیلو متر خواهد بود. این دو را هم در ستون مسافت یعنی  $d$  وارد می کنیم.

با اطلاعاتی که در این دو ستون داریم می توانیم ستون زمان یعنی  $t$  را هم پر کنیم. چون میدانیم

$$d = rt$$

پس

$$t = \frac{d}{r}$$

$$d = r \times t$$

جت شخصی $x$	۹۰۰	$\frac{x}{900}$
جت تجارتی $2550 - x$	۸۰۰	$\frac{2550 - x}{800}$

چون زمان پرواز برای هر دو جت یکسان است، پس خواهیم داشت

$$\frac{x}{900} = \frac{2550 - x}{800}$$

$$900(2550 - x) = 800(x)$$

$$2295000 - 900x = 800x$$

$$2295000 = 1700x$$

$$x = \frac{2295000}{1700} = 1350 \text{ کیلو متر}$$

جت شخصی مسافت ۱۳۵۰ کیلو متر پیموده است. برای پیدا کردن مدت زمان سپری شده از فرمول  $t = \frac{d}{r}$  استفاده می کنیم.

$$t = \frac{d}{r} = \frac{1350}{900} = 1.5 \text{ ساعت}$$

این دو جت پس از ۱/۵ از یک دیگر عبور می کنند.

۳۴ - آقای راستی برای دیدن دوستش در اصفهان با سرعت متوسط ۵۰ کیلو متر در ساعت رانندگی کرد و پس از ۱۰ ساعت توقف به طرف تهران به راه افتاد. سرعت متوسط او در برگشت به تهران ۴۵ کیلو متر در ساعت بود. اگر از زمان حرکت از تهران تا رسیدن مجدد به تهران ۲۹ ساعت طول کشیده باشد، مسافت بین تهران و اصفهان چند کیلو متر است؟

پاسخ

چون آقای راستی ۱۰ ساعت توقف داشته، پس  $19 = 29 - 10$  ساعت رانندگی کرده است. اگر مدت زمان طی شده هنگام رفتن به طرف اصفهان را  $x$  فرض کنیم. مدت زمان طی شده هنگام برگشت  $19 - x$  خواهد بود. با این اطلاعات جدولی ترسیم می کنیم.

$$d = r \times t$$

رفت	$50x$	۵۰ کیلو متر در ساعت	$x$
برگشت	$45(19 - x)$	۴۵ کیلو متر در ساعت	$19 - x$

میدانیم که

$$\text{مسافت برگشت} = \text{مسافت رفت}$$

$$50x = 45(19 - x)$$

$$50x = 855 - 45x$$

$$95x = 855$$

$$x = \frac{855}{95} = 9 \text{ ساعت}$$

هنگام رفتن ۹ طول کشیده تا آقای راستی به اصفهان برسد. پس

$$d = rt = 50(9) = 450 \text{ کیلو متر}$$

مسافت بین تهران و اصفهان ۴۵۰ کیلو متر است.

۳۵ - آقای مهربان از تهران به شهری در ۳۰۰ کیلو متری می رود. قسمتی را با اتوبوس می پیماید و درست سر ساعت به ایستگاه ترن می رسد و بلافاصله سفر خود را با ترن شروع می کند. اگر سرعت متوسط اتوبوس ۴۰ کیلو متر در ساعت و سرعت متوسط ترن ۶۰ کیلو متر در ساعت باشد و تمام مسافت ۵/۵ ساعت طول کشیده باشد، آقای مهربان چند ساعت را در ترن گذرانده است؟

پاسخ

مدت زمان طی شده با ترن  $x =$

مدت زمان طی شده با اتوبوس  $5/5 - x =$

$$d = r \times t$$

ترن	$60x$	$60$	$x$
اتوبوس	$40(5/5 - x)$	$40$	$5 - x$

مسافت طی شده با ترن و اتوبوس روی هم ۳۰۰ کیلو متر است. پس

$$60x + 40(5/5 - x) = 300$$

$$60x + 220 - 40x = 300$$

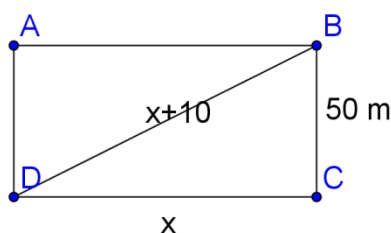
$$20x = 80$$

$$x = \frac{80}{20} = 4 \text{ ساعت}$$

آقای مهربان ۴ ساعت در ترن گذرانده است.

۳۶ - عرض یک قطعه زمین مستطیل شکل ۵۰ متر است. اندازه یک قطر آن ۱۰۰ متر بیشتر از طول مستطیل است. طول مستطیل چند متر است؟

پاسخ



مثلث قائم الزویه  $BCD$  را در نظر بگیرید. طبق قضیه فیثاغورث داریم.

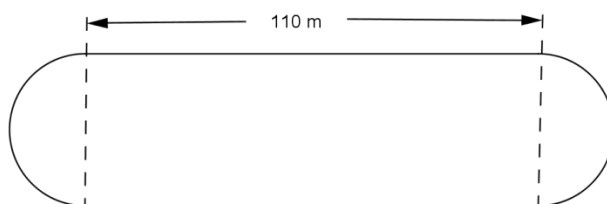
$$x^2 + 50^2 = (x + 100)^2$$

$$x^2 + 2500 = x^2 + 200x + 10000$$

$$2400 = 200x$$

$$x = \frac{2400}{200} = 120 \text{ متر}$$

۳۷ - لبه باریکه مخصوص دویدن در اطراف زمین فوتبال به شکل زیر است با دو طرف مستقیم و دو انتهای نیم دایره. اگر طول تمام باریکه ۴۴۰ و قسمت های مسقیم هر کدام ۱۱۰ متر باشند، شعاع قسمت نیم دایره چند متر است؟ (پاسخ را به نزدیک ترین عدد صحیح بنویسید)



پاسخ

دو نیم دایره را یک دایره کامل به حساب می آوریم. میدانیم کاک محیط دایره مساوی است با پی ضرب در قطر ، یعنی

$$\text{Circumference} = C = 2\pi r$$

پس

$$2(110) + 2\pi r = 440$$

$$220 + 2\pi r = 440$$

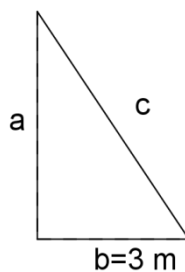
$$2\pi r = 440 - 220$$

$$2\pi r = 220$$

$$r = \frac{220}{2\pi} \approx 35 \text{ متر}$$

۳۸- در مثلث قائم الزویه زیر اگر  $b = 3$  متر و  $a + c = 10$  متر باشد ، مطلوب است طول  $a$

برگرفته از یک کتاب چینی که در سال ۲۵۰ قبل از میلاد نوشته شده است.



پاسخ

طبق قضیه فیثاغورث داریم

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

طبق فرض مساله

$$a + c = 10$$

پس

$$c = 10 - a$$

در رابطه (1) بجای  $c$  می نویسیم  $10 - a$  پس

$$a^2 + b^2 = (10 - a)^2$$

$$a^2 + 3^2 = 100 - 20a + a^2$$

می توانیم  $a^2$  را از هر دو طرف حذف کنیم.

$$9 = 100 - 20a$$

$$20a = 91$$

$$a = \frac{91}{20} = 4 \frac{11}{20}$$





## ۲.۴ - نا معادله های خطی و حل مسائل Linear Inequalities and Problem Solving

روابط میان کمیت های قابل اندازه گیری همیشه بوسیله معادله ها بیان نمی شوند. مثلا اگر بخواهیم بگویم درآمد فلان شخص حد اقل یک میلیون تومان است، به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\text{درآمد} \geq 1,000,000$$

یک نا معادله خطی شبیه یک معادله خطی است، اما بجای نماد  $=$  نماد های  $\geq$  یا  $\leq$  یا  $>$  یا  $<$  را بکار می بریم.

## نا معادله خطی یک مجهولی

یک معادله خطی یک مجهولی، نا معادله ای است که می توان آنرا به صورت زیر نوشت.

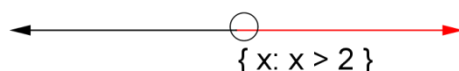
$$ax + b < c$$

اینجا  $a, b, c$  اعداد حقیقی هستند و  $a \neq 0$  مانند

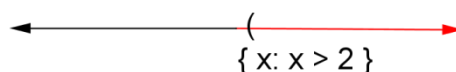
$$\frac{x}{3} \leq 5 \quad 3(x - 4) < 5x \quad 4n \geq n - 3 \quad 2y < 0 \quad 3x + 5 \geq 4$$

## استفاده از نماد بازه Using Interval Notation

**جواب Solution** یک نا معادله کمیتی از متغیر است که نا معادله را یک نامعادله صحیح بسازد. **مجموعه جواب های Solution Set** یک نا معادله مجموعه همه جواب ها است. مثلا مجموعه جواب های نا معادله  $x > 2$  شامل کلیه اعداد بزرگ تر از ۲ است. نمودار آن هم یک بازه روی محور اعداد است، زیرا بی نهایت عدد می تواند جانشین متغیر شود و یک نا معادله صحیح بدست آید. پس نمودار مجموعه  $\{x : x > 2\}$  مطابق شکل زیر است.



نمودار بالا، یک بازه باز است. بجای یک دایره تو خالی می توان از یک پرانتز ( استفاده کرد. برای نمایش یک بازه بسته هم می توانیم از یک کرشه [ استفاده کنیم.



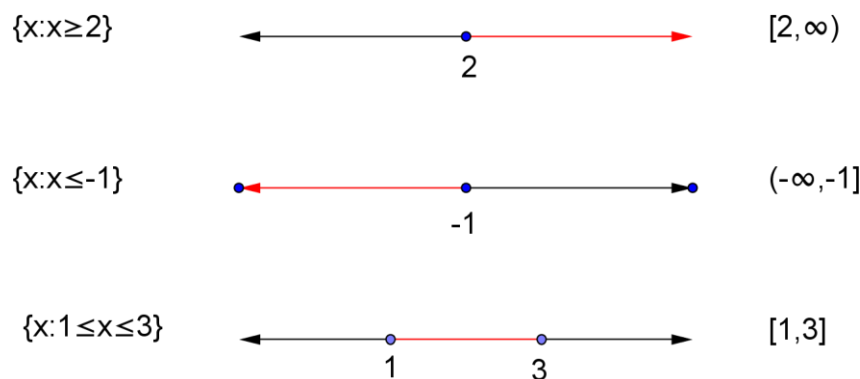
مجموعه جواب های نا معادله بالا را می توانیم با **نماد بازه** نمایش دهیم یعنی می توانیم بنویسیم  $(2, \infty)$  نماد  $\infty$  که خوانده می شود بی نهایت ، نشان دهنده این است که بازه شامل کلیه اعداد بزرگ تر از ۲ می شود. پرانتز سمت چپ نشان می دهد که عدد ۲ در بازه گنجانده نشده است. اگر نماد  $[$  بکار ببریم ، نشان دهنده این است که عدد ۲ داخل بازه است.

جدول زیر سه روش توصیف بازه را نشان می دهد.

نماد بازه	نمودار	نماد مجموعه
$(-\infty, a)$		$\{x: x < a\}$
$(a, \infty)$		$\{x: x > a\}$
$(-\infty, a]$		$\{x: x \leq a\}$
$[a, \infty)$		$\{x: x \geq a\}$
$(a, b)$		$\{x: a < x < b\}$
$[a, b]$		$\{x: a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$		$\{x: a < x \leq b\}$
$[a, b)$		$\{x: a \leq x < b\}$

مثال - مجموعه های زیر را روی محور اعداد ترسیم کنید و سپس با نماد بازه بنویسید.

- ۱)  $\{x: x \geq 2\}$
- ۲)  $\{x: x \leq -1\}$
- ۳)  $\{x: 1 \leq x \leq 3\}$



**حل نا معادله ها** — حل نا معادله ها شبیه حل معادله ها است. برای حل یک نا معادله از خواص جمع و ضرب نا معادله ها استفاده می کنیم. برای نوشتن جواب های یک نا معادله هم از نماد بازه استفاده می کنیم.

### خاصیت جمع نا معادله

اگر  $a, b, c$  اعداد حقیقی باشند، پس

$$a < b \text{ و } a + c < b + c$$

نا معادله های هم ارز هستند. یعنی می توانیم یک عدد حقیقی را به هر دو طرف یک نا معادله اضافه کنیم و یا از هر دو طرف یک نا معادله کم کنیم، بدون اینکه در جواب های نا معادله تغییری حاصل شود.

خاصیت جمع نا معادله در مورد تقریق هم صادق است

### خاصیت ضرب نا معادله

اگر  $a, b, c$  اعداد حقیقی باشند و  $c$  یک عدد مثبت، پس  $a < b$  و  $ac < bc$  نا معادله های هم ارز هستند.

اگر  $a, b, c$  اعداد حقیقی باشند و  $c$  یک عدد منفی، پس  $a < b$  و  $ac > bc$  نا معادله های هم ارز هستند.

به عبارت دیگر می توانیم هر دو طرف یک نا معادله را در یک عدد مثبت ضرب کنیم بدون اینکه در جواب های نا معادله تغییری حاصل شود.

اما اگر دو طرف یک نا معادله را در یک عدد منفی ضرب کنیم، باید جهت نماد نا مساوی را تغییر دهیم تا جواب های هر دو نا معادله یکسان باشند.

خاصیت ضرب نا معادله در مورد تقسیم هم صادق است.

مثال نا معادله های زیر را حل کنید و مجموعه جواب ها را با نماد بازه بنویسید .

$$۴) \quad x - ۲ < ۵$$

$$x - ۲ + ۲ < ۵ + ۲$$

$$x < ۷ \quad (-\infty, ۷)$$

$$۵) \quad ۴x - ۲ < ۵x$$

$$۴x - ۲ + ۲ < ۵x + ۲$$

$$۴x < ۵x + ۲$$

$$۴x - ۵x < ۵x + ۲ - ۵x$$

$$-x < ۲$$

$$\frac{-x}{-۱} > \frac{۲}{-۱}$$

$$x > -۲$$

$$۶) \quad ۳x + ۴ \geq ۲x - ۶$$

$$۳x + ۴ - ۴ \geq ۲x - ۶ - ۴$$

$$۳x \geq ۲x - ۱۰$$

$$۳x - ۲x \geq ۲x - ۱۰ - ۲x$$

$$x \geq -۱۰ \quad [-۱۰, \infty)$$

$$۷) \quad \frac{1}{4}x \leq \frac{3}{2}$$

$$۴ \left( \frac{1}{4}x \right) \leq ۴ \left( \frac{3}{2} \right)$$

$$x \leq ۶ \quad (-\infty, ۶]$$

$$۸) \quad -۲/۳x < ۶/۹$$

$$\frac{-۲/۳x}{-۲/۳} > \frac{۶/۹}{-۲/۳}$$

$$x > -۳ \quad (-۳, \infty)$$

### حل نا معادله خطی یک مجهولی

الف — اگر در نا معادله کسر وجود داشته باشد ، هر دو طرف نا معادله را در کوچک ترین مخرج مشترک ضرب کنید.

ب — با استفاده از خاصیت پخش پذیری ، پرانتز ها را حذف کنید.

ج — جمله های متشابه در هر طرف با هم ادغام کنید.

د — با استفاده از خاصیت جمع نا معادله ، نا معادله را به نا معادله های هم ارز بنویسید ، تا اینکه جمله ای که متغیر دارد به تنهایی در یک طرف نا معادله قرار گیرد.

ه — با استفاده از خاصیت ضرب نا معادله ، متغیر را به تنهایی در یک طرف قرار دهید.

مثال — نا معادله ها را حل کنید و مجموعه جواب ها را با نماد بازه بنویسید.

$$۹) \quad ۵ - x \leq ۴x - ۱۵$$

$$۵ - x - ۴x \leq ۴x - ۱۵ - ۴x$$

$$۵ - ۵x \leq -۱۵$$

$$5 - 5x - 5 \leq -15 - 5$$

$$-5x \leq -20$$

$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{-20}{-5}$$

$$x \geq 4 \quad [4, \infty)$$

$$1 \circ) \quad \frac{2}{5}(x - 6) \geq x - 1$$

$$5 \left[ \frac{2}{5}(x - 6) \right] \geq 5(x - 1)$$

$$2(x - 6) \geq 5x - 5$$

$$2x - 12 \geq 5x - 5$$

$$-3x \geq 7$$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{7}{-3}$$

$$x \leq -\frac{7}{3} \quad \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right]$$

نا معادله های خطی و حل مسائل

مسائلی که شامل کلماتی مانند حد اقل at least ، حد اکثر at most ، ما بین between ،

نه بیشتر از no more than ، نه کمتر از no less than ، باشد معمولاً با استفاده از نا معادله ها حل می شوند.

مساله زیر را حل کنید.

۱۱- یک فروشنده ماهانه ۶۰۰ هزار تومان حقوق می گیرد به اضافه ۲۰٪ حق العمل فروش. معین کنید این فروشنده حد اقل چه مبلغی باید فروش داشته باشد تا حد اقل ۱۵۰۰۰۰۰ تومان در ماه در آمد داشته باشد.

حل

$x$  = مبلغ فروش

$۰/۲ \times x$  = حق العمل بیست در صد فروش

$$۶۰۰۰۰۰ + ۰/۲x \geq ۱۵۰۰۰۰۰$$

$$۶۰۰۰۰۰ + ۰/۲x - ۶۰۰۰۰۰ \geq ۱۵۰۰۰۰۰ - ۶۰۰۰۰۰۰$$

$$۰/۲x \geq ۹۰۰۰۰۰$$

$$\frac{۰/۲x}{۰/۲} = \frac{۹۰۰۰۰۰}{۰/۲}$$

$$x \geq ۴۵۰۰۰۰۰ \text{ تومان}$$

پس اگر میزان فروش مساوی یا بیشتر از ۴۵۰۰۰۰۰ تومان باشد، فروشنده حد اقل ماهانه ۱۵۰۰۰۰۰ تومان در آمد خواهد داشت

## تمرینات ۲.۴

نا معادله های زیر را حل کنید. و مجموعه جواب ها را با نماد بازه بنویسید.

$$۱) -۲x + ۷ \geq ۹$$

$$۲) ۱۵ + ۲x \geq ۴x - ۷$$

$$۳) ۳(x - ۵) < ۲(۲x - ۱)$$

$$۴) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \geq \frac{x}{6}$$

$$۵) \quad -5x + 4 \leq -4(x - 1)$$

$$۶) \quad \frac{1}{4}(x - 7) \geq x + 2$$

$$۷) \quad 5/8x + 5/6x \geq 4/2$$

$$۸) \quad 4(2x + 1) > 4$$

$$۹) \quad \frac{5x + 1}{7} - \frac{2x - 6}{4} \geq -4$$

$$۱۰) \quad 4(x - 6) + 2x - 4 \geq 3(x - 7) + 1 \circ x$$

مسائل زیر را حل کنید.

۱۱ - سامان در درس جبر نمرات ۷۹، ۸۲، ۶۷، ۷۲ دارد. نمره او در امتحان آخر ترم حد اقل باید چه باشد تا معدل نمراتش ۶۰ یا بیشتر بشود. در نظر داشته باشید که نمره آخر ترم ضریب ۲ دارد.



۱۲ - یک هوا پیمای کوچک می تواند حد اکثر ۲۰۰۰ پوند حمل کند. اگر در این هوا پیمایشش مسافر با متوسط وزن ۱۶۰ پوند باشد، چند پوند دیگر می تواند به عنوان بار و اثاثیه حمل کند؟

۱۳ - اگر برای اولین اونس یک پاکت معمولی ۲۴ تومان تمبر لازم باشد، و برای هر اونس اضافی ۲۳ تومان تمبر لازم باشد، معین کنید اگر فقط ۴۰۰ تومان تمبر داشته باشیم، پاکت ما حد اکثر چند اونس می تواند باشد.

۱۴ - یک شرکت تلفن همراه دو نوع نرخ دارد. نرخ اول ماهی ۲۵۰۰ تومان با مکالمه نامحدود. نرخ دوم ماهی ۱۳۰۰ تومان به اضافه ۶ تومان برای هر مکالمه. معین کنید برای چند مکالمه در ماه، نرخ اول با صرفه تر از نرخ دوم است.

#### پاسخ تمرینات ۲.۴

نا معادله های زیر را حل کنید. و مجموعه جواب ها را با نماد بازه بنویسید.

$$۱) -2x + 7 \geq 9$$

$$-2x + 7 - 7 \geq 9 - 7$$

$$-2x \geq 2$$

$$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{2}{-2}$$

$$x \leq -1 \quad (-\infty, -1]$$

$$۲) 15 + 2x \geq 4x - 7$$

$$15 + 2x - 15 \geq 4x - 7 - 15$$

$$2x \geq 4x - 22$$

$$2x - 4x \geq 4x - 22 - 4x$$

$$-2x \geq -22$$

$$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{-22}{-2}$$

$$x \leq 11 \quad (-\infty, 11]$$

$$3) \quad 3(x - 5) < 2(2x - 1)$$

$$3x - 15 < 4x - 2$$

$$3x - 15 + 15 < 4x - 2 + 15$$

$$3x < 4x + 13$$

$$3x - 4x < 4x + 13 - 4x$$

$$-x < 13$$

$$\frac{-x}{-1} > \frac{13}{-1}$$

$$x > -13 \quad (-13, \infty)$$

$$4) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \geq \frac{x}{6}$$

$$6 \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right] \geq 6 \left( \frac{x}{6} \right)$$

$$3 + 4 \geq x$$

$$7 \geq x$$

$$x \leq 7 \quad (-\infty, 7]$$

$$۵) \quad -5x + 4 \leq -4(x - 1)$$

$$-5x + 4 - 4 \leq -4x + 4 - 4$$

$$-5x \leq -4x$$

$$-5x + 4x \leq -4x + 4x$$

$$-x \leq 0$$

$$\frac{-x}{-1} \geq \frac{0}{-1}$$

$$x \geq 0 \quad [0, \infty)$$

$$۶) \quad \frac{1}{4}(x - 7) \geq x + 2$$

$$4 \left[ \frac{1}{4}(x - 7) \geq (x + 2) \right]$$

$$x - 7 \geq 4x + 8$$

$$x - 7 + 7 \geq 4x + 8 + 7$$

$$x \geq 4x + 15$$

$$x - 4x \geq 4x + 15 - 4x$$

$$-3x \geq 15$$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{15}{-3}$$

$$x \leq -5 \quad (-\infty, -5]$$

$$۷) \quad ۰/۸x + ۰/۶x \geq ۴/۲$$

$$۱ \circ (۰/۸x + ۰/۶x \geq ۴/۲)$$

$$۸x + ۶x \geq ۴۲$$

$$۱۴x \geq ۴۲$$

$$\frac{۱۴x}{۱۴} \geq \frac{۴۲}{۱۴}$$

$$x \geq ۳ \quad [۳, \infty)$$

$$۸) \quad ۴(۲x + ۱) > ۴$$

$$۸x + ۴ > ۴$$

$$۸x + ۴ - ۴ > ۴ - ۴$$

$$۸x > ۰$$

$$\frac{۸x}{۸} > \frac{۰}{۸}$$

$$x > ۰ \quad (۰, \infty)$$

$$۹) \quad \frac{۵x + ۱}{۷} - \frac{۲x - ۶}{۴} \geq -۴$$

$$۲۸ \left[ \frac{۵x + ۱}{۷} - \frac{۲x - ۶}{۴} \geq -۴ \right]$$

$$۴(۵x + ۱) - ۷(۲x - ۶) \geq -۱۱۲$$

$$۲۰x + ۴ - ۱۴x + ۴۲ \geq -۱۱۲$$

$$6x + 46 \geq -112$$

$$6x + 46 - 46 \geq -112 - 46$$

$$6x \geq -158$$

$$\frac{6x}{6} \geq \frac{-158}{6}$$

$$x \geq -\frac{158}{6}$$

$$x \geq -\frac{79}{3} \quad \left[ -\frac{79}{3}, \infty \right)$$

$$۱ \circ) \quad 4(x - 6) + 2x - 4 \geq 3(x - 7) + 1 \circ x$$

$$4x - 24 + 2x - 4 \geq 3x - 21 + 1 \circ x$$

$$6x - 28 \geq 13x - 21$$

$$6x - 28 + 28 \geq 13x - 21 + 28$$

$$6x \geq 13x + 7$$

$$6x - 13x \geq 13x + 7 - 13x$$

$$-7x \geq 7$$

$$\frac{-7x}{-7} \leq \frac{7}{-7}$$

$$x \leq -1 \quad (-\infty, -1]$$

مسائل زیر را حل کنید.

۱۱ - سامان در درس جبر نمرات ۷۲، ۶۷، ۸۲، ۷۹ دارد. نمره او در امتحان آخر ترم حد اقل باید چه باشد تا معدل نمراتش ۶۰ یا بیشتر بشود. در نظر داشته باشید که نمره آخر ترم ضریب ۲ دارد.

حل

حد اقل نمره آخر ترم  $x =$

$$\frac{72 + 67 + 82 + 79 + 2x}{6} \geq 60$$

$$\left[ \frac{72 + 67 + 82 + 79 + 2x}{6} \geq 60 \right]$$

$$72 + 67 + 82 + 79 + 2x \geq 6(60)$$

$$300 + 2x \geq 360$$

$$2x \geq 60$$

$$x \geq 30$$

حد اقل نمره آخر ترم  $x \geq 30$

۱۲ - یک هواپیمای کوچک می تواند حد اکثر ۲۰۰۰ پوند حمل کند. اگر در این هواپیما شش مسافر با متوسط وزن ۱۶۰ پوند باشد، چند پوند دیگر می تواند به عنوان بار و اثاثیه حمل کند؟

حل

حد اکثر بار  $x =$

$$6(160) = 960$$

وزن مسافران  $= 960$

$$960 + x \leq 2000$$

$$x \leq 1040$$

پوند  $1040$

پس حد اکثر بار می تواند  $1040$  پوند باشد

۱۳ - اگر برای اولین اونس یک پاکت معمولی ۳۲ تومان تمبر لازم باشد، و برای هر اونس اضافه وزن ۲۳ تومان تمبر لازم باشد، معین کنید اگر فقط ۴۰۰ تومان تمبر داشته باشیم، پاکت ما حد اکثر چند اونس می تواند باشد.

**حل**

وزن اضافی پاکت  $x =$

تومان برای اونس اول پاکت  $32 =$

تمبر لازم برای اونس های اضافی  $23(x) =$

$$32 + 23x \leq 400$$

$$23x \leq 368$$

حد اکثر وزن اضافی  $x \leq 16$

اونس  $16 + 1 = 17$

پس با ۴۰۰ تومان تمبر می توانیم یک پاکت به وزن ۱۷ اونس ارسال کنیم.

۱۴ - یک شرکت تلفن همراه دو نوع نرخ دارد. نرخ اول ماهی ۲۵۰۰ تومان با مکالمه نامحدود. نرخ دوم ماهی ۱۳۰۰ تومان به اضافه ۶ تومان برای هر مکالمه. معین کنید برای چند مکالمه در ماه، نرخ اول با صرفه تر از نرخ دوم است.

**حل**

تعداد تلفن ها برای نرخ دوم  $x =$

$$1300 + 6(x) \geq 2500$$

$$6x \geq 1200$$

مکالمه  $x \geq 200$

پس برای ۲۰۰ مکالمه یا بیشتر، نرخ اول با صرفه تر از نرخ دوم است

## ۲.۵ - مجموعه ها و نا معادله های مرکب Sets and Compound Inequalities

دو نا معادله که بوسیله کلمات “and” یا “or” به هم مرتبط شده باشند ، را نا معادله های مرکب می نامند.

$$x + 3 < 8 \text{ و } x > 2$$

$$\frac{2x}{3} \geq 5 \text{ یا } -x + 1 < 7$$

**پیدا کردن اشتراک دو مجموعه :** مجموعه جواب های یک نا معادله مرکب که بوسیله کلمه “and” درست شده باشد ، اشتراک مجموعه جواب های آن دو نا معادله است.

**اشتراک دو مجموعه (یاد آوری )**

اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  عبارت است از کلیه عناصری که در هر دو مجموعه مشترک هستند. اشتراک دو مجموعه به طریق زیر نشان داده می شود.

$$A \cap B$$

**مثال - اشتراک مجموعه مرکب زیر را پیدا کنید.**

$$1) \quad \{2, 4, 6, 8\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$$

**حل نا معادله های مرکب که دارای کلمه “و” هستند**

## Solving Compound Inequalities Containing “AND”

کمیت  $x$  جواب نا معادله مرکبی که دارای کلمه “و” است ، می باشد ، اگر  $x$  جواب هر دو نا معادله باشد.

**مثال - نا معادله های زیر را حل کنید.**

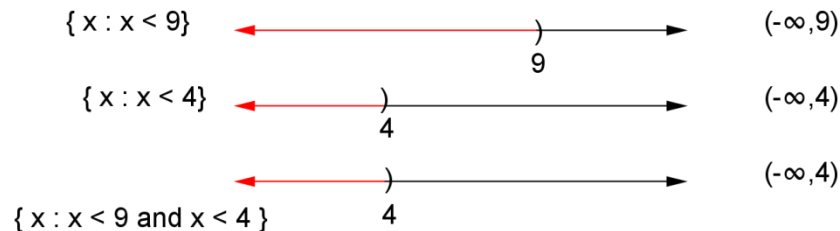
$$2) \quad x - 7 < 2 \text{ و } 2x + 1 < 9$$

$$x < 9 \text{ و } 2x < 8$$

$$x < 4 \text{ و } x < 9$$

اینک دو بازه را روی محور اعداد ترسیم می کنیم و سپس اشتراک آنها را پیدا می کنیم.



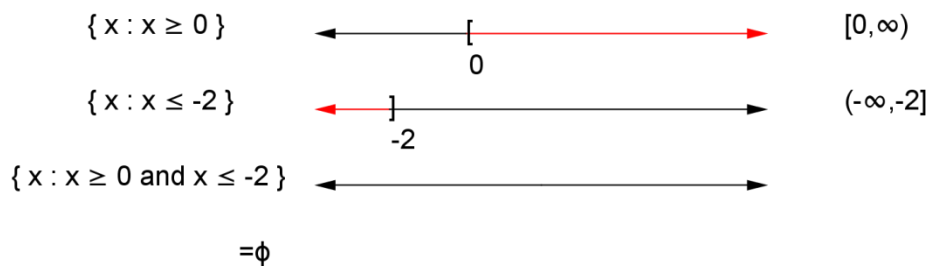


مجموعه جواب ها  $(-\infty, 4)$  است.

۳)  $2x \geq 0$  و  $4x - 1 \leq -9$

$x \geq 0$  و  $4x \leq -8$

$x \geq 0$  و  $x \leq -2$



هیچ عددی نیست که بزرگ تر یا مساوی صفر باشد و در عین حال کم تر یا مساوی  $-2$  باشد. مجموعه جواب ها  $\emptyset$  است.

بعضی از نا معادله های مرکب که شامل کلمه “ و ” هستند، را می توان به شکل فشرده تر نوشت. مثلاً نا معادله مرکب  $x \leq 6$  و  $2 \leq x$  را به صورت  $2 \leq x \leq 6$  می توان نوشت.

به یاد بیاورید که نمودار  $2 \leq x \leq 6$  شامل کلیه اعداد بین ۲ و ۶ است.



برای حل نا معادله های مرکب مانند نا معادله بالا ، مجهول را به تنهایی در وسط قرار می دهیم. چون این نوع نا معادله در حقیقت دو نا معادله است، باید روی هر سه طرف عملیات انجام دهیم.

مثال - حل کنید.

$$4) \quad 2 < 4 - x < 7$$

$$2 - 4 < 4 - x - 4 < 7 - 4$$

$$-2 < -x < 3$$

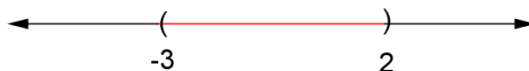
$$\frac{-2}{-1} > \frac{-x}{-1} > \frac{3}{-1}$$

$$2 > x > -3$$

یا

$$-3 < x < 2$$

مجموعه جواب ها  $(-3, 2)$  است و نمودار طبق شکل زیر است.



$$5) \quad -1 \leq \frac{2x}{3} + 5 \leq 2$$

$$3(-1) \leq 3\left(\frac{2x}{3} + 5\right) \leq 3(2)$$

$$-3 \leq 2x + 15 \leq 6$$

$$-3 - 15 \leq 2x + 15 - 15 \leq 6 - 15$$

$$-18 \leq 2x \leq -9$$

$$\frac{-18}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{-9}{2}$$

$$-9 \leq x \leq -\frac{9}{2}$$

مجموعه جواب ها و نمودار در ذیل مشاهده می کنید.

$$\left[ -9, -\frac{9}{2} \right]$$



**پیدا کردن اتحاد دو مجموعه Finding The Union of Two Sets** مجموعه جواب های یک نا معادله مرکب که بوسیله “یا” ساخته شده است، عبارت است از اتحاد مجموعه جواب های هر دو نا معادله.

### اتحاد دو مجموعه Union of Two Sets

اتحاد دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجموعه ای از عناصر است که در هر کدام از مجموعه های  $A$  و  $B$  یافت می شود. و به صورت زیر نوشته می شود.

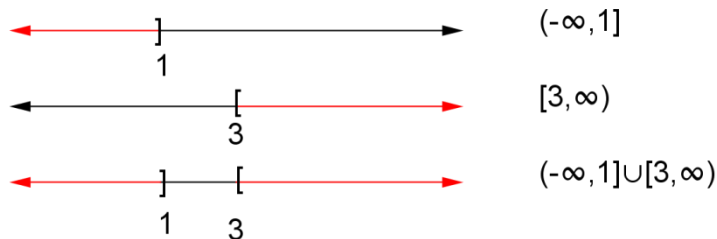
$$A \cup B$$

مثال

$$6) \quad \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

**حل نا معادله های مرکب که دارای “یا” هستند.**

یک کمیت مانند  $x$  جواب یک نا معادله مرکبی که بوسیله “یا” درست شده است، می باشد، اگر  $x$  جواب هر یک از نا معادله ها و یا هر دوی آنها باشد. مثلاً مجموعه جواب های نا معادله مرکب  $x \geq 3$  یا  $x \leq 1$  شامل کلیه اعدادی که کوچک تر یا مساوی یک و یا بزرگ تر یا مساوی سه هستند، می باشد.



حل کنید.

$$۷) \quad ۵x - ۳ \leq ۱۰ \quad \text{یا} \quad x + ۱ \geq ۵$$

$$۵x \leq ۱۳ \quad \text{یا} \quad x \geq ۴$$

$$x \leq \frac{۱۳}{۵} \quad \text{یا} \quad x \geq ۴$$

مجموعه جواب ها عبارت است از

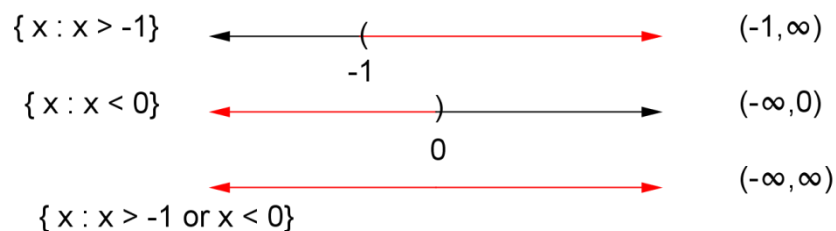
$$\left(-\infty, \frac{۱۳}{۵}\right] \cup [۴, \infty)$$

$$۸) \quad -۲x - ۵ < -۳ \quad \text{یا} \quad ۶x < ۰$$

$$-۲x < ۲ \quad \text{یا} \quad x < ۰$$

$$\frac{-۲x}{-۲} > \frac{۲}{-۲} \quad \text{یا} \quad x < ۰$$

$$x > -۱ \quad \text{یا} \quad x < ۰$$



مجموعه جواب ها کلیه اعداد حقیقی است.

$$(-\infty, \infty)$$

## تمرینات ۲.۵

نا معادله های مرکب زیر را حل کنید ، مجموعه جواب ها را با نماد بازه نشان دهید.

$$۱) \quad x + ۱ \geq ۷ \quad \text{و} \quad ۳x - ۱ \geq ۵$$

$$۲) \quad ۴x + ۲ \leq -۱ \quad \text{و} \quad ۲x \leq ۰$$

$$۳) \quad x + ۳ \geq ۳ \quad \text{و} \quad x + ۳ \leq ۲$$

$$۴) \quad ۵ < x - ۶ < ۱۱$$

$$۵) \quad -۲ \leq ۳x - ۵ \leq ۷$$

$$۶) \quad ۱ \leq \frac{۲}{۳}x + ۳ \leq ۴$$

$$۷) \quad -۵ \leq \frac{x+۱}{۴} \leq -۲$$

$$۸) \quad ۰ \leq ۲x - ۳ \leq ۹$$

$$۹) \quad -۶ < ۳(x-۲) \leq ۸$$

$$۱۰) \quad x < -۱ \quad \text{یا} \quad x > ۰$$

$$۱۱) \quad -۲x \leq -۴ \quad \text{یا} \quad ۵x - ۲ \geq ۵$$

$$۱۲) \quad ۳(x-۱) < ۱۲ \quad \text{یا} \quad x+۷ > ۱۰$$

$$۱۳) \quad ۳x+۲ \leq ۵ \quad \text{یا} \quad ۷x > ۲۹$$

$$۱۴) \quad ۳x \geq ۵ \quad \text{یا} \quad -x-۶ < ۱$$

$$۱۵) \quad ۶x-۴ > ۲x \quad \text{یا} \quad ۴x-۱ < x+۵$$

## پاسخ تمرینات ۲.۵

نا معادله های مرکب زیر را حل کنید ، مجموعه جواب ها را با نماد بازه نشان دهید.

$$۱) \quad x + ۱ \geq ۷ \quad \text{و} \quad ۳x - ۱ \geq ۵$$

$$x \geq ۶ \quad \text{و} \quad ۳x \geq ۶$$

$$x \geq ۶ \quad \text{و} \quad x \geq ۲$$

$$[۶, \infty)$$

$$۲) \quad ۴x + ۲ \leq -۱۰ \quad \text{و} \quad ۲x \leq ۰$$

$$۴x \leq -۱۲ \quad \text{و} \quad x \leq ۰$$

$$x \leq -۳ \quad \text{و} \quad x \leq ۰$$

$$(-\infty, -۳]$$

$$۳) \quad x + ۳ \geq ۳ \quad \text{و} \quad x + ۳ \leq ۲$$

$$x \geq ۰ \quad \text{و} \quad x \leq -۱$$

$$\phi$$

$$۴) \quad ۵ < x - ۶ < ۱۱$$

$$۵ + ۶ < x - ۶ + ۶ < ۱۱ + ۶$$

$$۱۱ < x < ۱۷$$

$$(۱۱, ۱۷)$$

$$۵) \quad -۲ \leq ۳x - ۵ \leq ۷$$

$$-۲ + ۵ \leq ۳x - ۵ + ۵ \leq ۷ + ۵$$

$$۳ \leq ۳x \leq ۱۲$$

$$۱ \leq x \leq ۴$$

$$[۱, ۴]$$

$$۶) \quad ۱ \leq \frac{۲}{۳}x + ۳ \leq ۴$$

$$۳(۱) \leq ۳\left(\frac{۲}{۳}x + ۳\right) \leq ۳(۴)$$

$$۳ \leq ۲x + ۹ \leq ۱۲$$

$$۳ - ۹ \leq ۲x + ۹ - ۹ \leq ۱۲ - ۹$$

$$-۶ \leq ۲x \leq ۳$$

$$-۳ \leq x \leq \frac{۳}{۲}$$

$$\left[-۳, \frac{۳}{۲}\right]$$

$$۷) \quad -۵ \leq \frac{x+۱}{۴} \leq -۲$$

$$۴(-۵) \leq ۴\left(\frac{x+۱}{۴}\right) \leq ۴(-۲)$$

$$-۲۰ \leq x + ۱ \leq -۸$$



$$-2 \circ -1 \leq x + 1 - 1 \leq -8 - 1$$

$$-21 \leq x \leq -9$$

$$[-21, -9]$$

$$۸) \quad 0 \leq 2x - 3 \leq 9$$

$$0 + 3 \leq 2x - 3 + 3 \leq 9 + 3$$

$$3 \leq 2x \leq 12$$

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 6$$

$$\left[ \frac{3}{2}, 6 \right]$$

$$۹) \quad -6 < 3(x - 2) \leq 8$$

$$-6 < 3x - 6 \leq 8$$

$$-6 + 6 < 3x - 6 + 6 \leq 8 + 6$$

$$0 < 3x \leq 14$$

$$0 < x \leq \frac{14}{3}$$

$$\left( 0, \frac{14}{3} \right]$$

$$۱) \quad x < -1 \quad \text{یا} \quad x > 0$$

$$(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

$$\begin{array}{lll}
 ۱۱) & ۵x - ۲ \geq ۵ & \text{یا} & -۲x \leq -۴ \\
 & ۵x - ۲ \geq ۵ + ۲ & \text{یا} & x \geq ۲ \\
 & ۵x \geq ۷ & \text{یا} & x \geq ۲ \\
 & x \geq ۵ & \text{یا} & x \geq ۲ \\
 & & & [۲, \infty)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 ۱۲) & x + ۷ > ۱۰ & \text{یا} & ۳(x - ۱) < ۱۲ \\
 & x > ۳ & \text{یا} & ۳x - ۳ < ۱۲ \\
 & x > ۳ & \text{یا} & ۳x < ۱۵ \\
 & x > ۳ & \text{یا} & x < ۵ \\
 & & & (-\infty, \infty)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 ۱۳) & ۷x > ۲۹ & \text{یا} & ۳x + ۲ \leq ۵ \\
 & x > \frac{۲۹}{۷} & \text{یا} & ۳x + ۲ - ۲ \leq ۵ - ۲ \\
 & x > \frac{۲۹}{۷} & \text{یا} & ۳x \leq ۳ \\
 & x > \frac{۲۹}{۷} & \text{یا} & x \leq ۱ \\
 & & & \left(-\infty, ۱\right] \cup \left(\frac{۲۹}{۷}, \infty\right)
 \end{array}$$

$$۱۴) \quad ۳x \geq ۵ \quad \text{یا} \quad -x - ۶ < ۱$$

$$x \geq \frac{۵}{۳} \quad \text{یا} \quad -x < ۷$$

$$x \geq \frac{۵}{۳} \quad \text{یا} \quad x > -۷$$

$$(-۷, \infty)$$

$$۱۵) \quad ۴x - ۴ > ۲x \quad \text{یا} \quad ۴x - ۱ < x + ۵$$

$$۴x - ۴ + ۴ > ۲x + ۴ \quad \text{یا} \quad ۴x - ۱ + ۱ < x + ۵ + ۱$$

$$۴x > ۲x + ۴ \quad \text{یا} \quad ۴x < x + ۶$$

$$۴x - ۲x > ۲x + ۴ - ۲x \quad \text{یا} \quad ۴x - x < x + ۶ - x$$

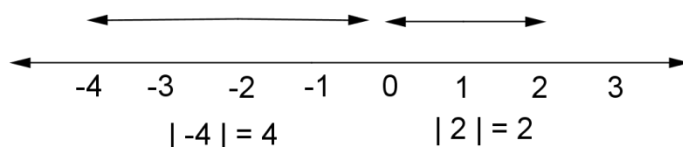
$$۴x > ۴ \quad \text{یا} \quad ۳x < ۶$$

$$x > ۱ \quad \text{یا} \quad x < ۲$$

$$(-\infty, \infty)$$

## ۲.۶ - معادلات و نامعادلات قدر مطلق Absolute Value Equations and Inequalities

در بخش های قبل گفتیم که قدر مطلق یک عدد عبارت است از فاصله آن عدد از صفر روی محور اعداد.



در این بخش در مورد حل معادلات و نامعادلاتی که شامل عبارت های قدر مطلق هستند بحث می کنیم. مثلاً

$$|x| = 3 \qquad -5 \geq |2y + 7| \qquad |z - 6| = |3z + 1| \qquad |x - 3| > 7$$

## حل معادله های قدر مطلق Solving Absolute Value Equations

برای شروع چند مثال را حل می کنیم.

۱)  $|x| = 3$

مجموعه جواب های معادله بالا شامل کلیه اعدادی است که فاصله آنها از صفر، مساوی ۳ است. دو عددی که فاصله آنها از صفر، مساوی ۳ است، اعداد ۳ و -۳ می باشند. پس مجموعه جواب های این معادله  $\{3, -3\}$  است.

۲)  $|x| = -2$

قدر مطلق یک عدد هیچ وقت منفی نیست. پس این معادله جوابی ندارد. مجموعه جواب های این معادله  $\emptyset$  یا  $\{ \}$  است.

۳)  $|y| = 0$

در این معادله ما به دنبال اعدادی هستیم که فاصله آنها از مبدا، صفر باشد. تنها عددی که این شرط را دارا است. عدد صفر است. پس مجموعه جواب های این معادله  $\{0\}$  است.

از مثال های بالا نتیجه می گیریم که

خاصیت قدر مطلق

برای حل  $|X| = a$

الف - اگر  $a$  مثبت باشد ، دو معادله  $X = -a$  یا  $X = a$  حل کنید .

ب - اگر  $a$  صفر باشد ، پس  $X = 0$  است .

ج - اگر  $a$  منفی باشد ، معادله جوابی ندارد .

مثال - معادله های زیر را حل کنید .

اگر  $|X|$  به تنهایی در یک طرف معادله نیست ، با استفاده از خواص معادله ها ، سعی می کنیم  $|X|$  را به تنهایی در یک طرف معادله قرار دهیم .

$$4) \quad 2|x| + 25 = 37$$

$$2|x| = 12$$

$$|x| = 6$$

$$x = 6 \quad \text{یا} \quad x = -6$$

$$\{6, -6\}$$

$$5) \quad |w + 3| = 7$$

اینجا عبارت  $w + 3$  را  $X$  فرض می کنیم .

$$w + 3 = 7 \quad \text{یا} \quad w + 3 = -7$$

$$w = 4 \quad \text{یا} \quad w = -10$$

$$\{4, -10\}$$

$$۶) \quad |2x - 1| + 5 = 6$$

می خواهیم عبارت قدر مطلق به تنهایی در یک طرف معادله باشد. پس عدد ۵ را از هر دو طرف معادل کم می کنیم.

$$|2x - 1| = 1$$

$$2x - 1 = 1 \quad \text{یا} \quad 2x - 1 = -1$$

$$2x = 2 \quad \text{یا} \quad 2x = 0$$

$$x = 1 \quad \text{یا} \quad x = 0$$

$$\{0, 1\}$$

$$۷) \quad |3x + 2| = |5x - 8|$$

این معادله هنگامی صحیح است که عبارت های داخل نماد قدر مطلق یا برابر و یا عکس یک دیگر باشند ،

$$3x + 2 = 5x - 8 \quad \text{یا} \quad 3x + 2 = -(5x - 8)$$

$$-2x = -10 \quad \text{یا} \quad 3x + 2 = -5x + 8$$

$$x = 5 \quad \text{یا} \quad 8x = 6$$

$$x = 5 \quad \text{یا} \quad x = \frac{3}{4}$$

$$\left\{5, \frac{3}{4}\right\}$$

$$۸) \quad |x - 3| = |5 - x|$$

$$x - 3 = 5 - x \quad \text{یا} \quad x - 3 = -(5 - x)$$

$$2x = 8 \quad \text{یا} \quad x - 3 = -5 + x$$

$$x = 4 \quad \text{یا} \quad x - 3 - x = -5 + x - x$$

$$x = 4 \quad \text{یا} \quad -3 = -5 \quad \text{غلط است}$$

به خاطر دارید که گفتیم وقتی یک تساوی هنگام ساده شدن به یک جمله غلط می رسد، آن معادله جوابی ندارد. پس تنها جواب معادله قدر مطلق اولیه فقط یک جواب دارد و آن هم ۴ است. پس مجموعه جواب های این معادله  $\{4\}$  است.

### حل نا معادله های قدر مطلق

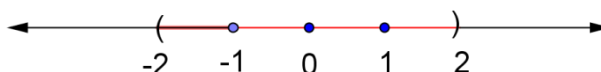
برای شروع نا معادله های قدر مطلق را از طریق امتحان حل می کنیم.

**حل کنید.**

۹)  $|x| < 2$

**حل**

با استفاده از محور اعداد حل می کنیم. مجموعه جواب ها شامل اعدادی است که فاصله آنها تا صفر کمتر از ۲ واحد است.



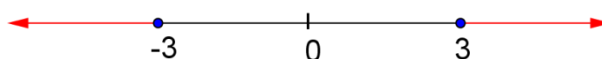
پس مجموعه جواب های این نا معادله  $\{x : -2 < x < 2\}$  و یا با نماد بازه  $(-2, 2)$  است.

۱۰)  $|x| \geq 3$

**حل : حل کنید.**

مجموعه جواب ها شامل کلیه اعدادی است که فاصله آنها تا صفر ، سه واحد یا بیشتر باشد. پس نمودار مجموعه جواب ها شامل سه و کلیه نقاط سمت راست سه روی محور اعداد است و یا  $-3$  و کلیه نقاط سمت چپ  $-3$  روی محور اعداد است.

مجموعه جواب ها  $\{x : x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3\}$  و با نماد بازه  $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

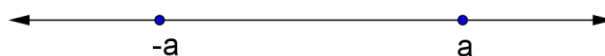


## خلاصه

حل معادله ها و نا معادله های قدر مطلق

اگر  $a$  یک عدد مثبت باشد :

برای حل  $|X| = a$  معادله  $X = a$  یا  $X = -a$  را حل کنید.



برای حل  $|X| < a$  نا معادله  $-a < X < a$  را حل کنید.



برای حل  $|X| > a$  نا معادله  $X < -a$  یا  $X > a$  را حل کنید



مثال : حل کنید.

$$۱۱) |x - ۳| > ۷$$

حل

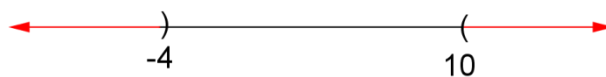
چون ۷ مثبت است، برای حل  $|x - ۳| > ۷$  نا معادله مرکب  $x - ۳ > ۷$  یا  $x - ۳ < -۷$  را حل می کنیم.

$$x - ۳ < -۷ \quad \text{یا} \quad x - ۳ > ۷$$

$$x < -۴ \quad \text{یا} \quad x > ۱۰$$



مجموعه جواب ها  $\{x : x < -4 \text{ یا } x > 10\}$  است. و با نماد بازه  $(-\infty, -4) \cup (10, \infty)$



$$12) |x + 1| = 6$$

$$x + 1 = 6 \quad \text{یا} \quad x + 1 = -6$$

$$x = 5 \quad \text{یا} \quad x = -7$$

مجموعه جواب ها  $\{-7, 5\}$  است. و نمودار آن شکل زیر است.



$$13) |x - 6| \leq 2$$

$$-2 \leq x - 6 \leq 2$$

$$-2 + 6 \leq x - 6 + 6 \leq 2 + 6$$

$$4 \leq x \leq 8$$

مجموعه جواب ها  $\{x : 4 \leq x \leq 8\}$  است و با نماد بازه  $[4, 8]$  و نمودار مطابق شکل زیر است.



$$14) |5x + 1| + 1 \leq 10$$

$$|5x + 1| \leq 9$$

$$-9 \leq 5x + 1 \leq 9$$

$$-9 - 1 \leq 5x + 1 - 1 \leq 9 - 1$$

$$-10 \leq 5x \leq 8$$

$$\frac{-10}{5} \leq \frac{5x}{5} \leq \frac{8}{5}$$

$$-2 \leq x \leq \frac{8}{5}$$

مجموعه جواب ها با نماد بازه ها  $\left[-2, \frac{8}{5}\right]$  است.

$$۱۵) |x| \leq -3$$

پاسخ - می دانیم که قدر مطلق یک عدد هیچ وقت منفی نیست ، پس آن عدد هیچ وقت مساوی و یا کمتر از  $-3$  نمی تواند باشد. مجموعه جواب ها  $\phi$  یا  $\{ \}$  است.

$$۱۶) |x - 1| > -2$$

پاسخ - می دانیم که قدر مطلق یک عدد همیشه نا منفی است، یعنی آن عدد همیشه بزرگ تر از  $-2$  است. مجموعه جواب ها شامل کلیه اعداد حقیقی است ، یعنی  $(-\infty, \infty)$  است.

## تمرینات ۲.۶

معادله ها و نا معادله های زیر را حل کنید.

۱)  $|x| = ۷$

۲)  $|x| = -۴$

۳)  $|۳x| = ۱۲۶$

۴)  $|x - ۹| = ۱۴$

۵)  $|۲x - ۵| = ۹$

۶)  $\left| \frac{x}{۲} - ۳ \right| = ۱$

۷)  $|z| + ۴ = ۹$

۸)  $|۳x| + ۵ = ۱۴$

۹)  $|۲x| = ۰$

۱۰)  $|۴n + ۱| + ۱۰ = ۴$

$$۱۱) \quad |5x - 7| = |3x + 11|$$

$$۱۲) \quad |z + 8| = |z - 3|$$

$$۱۳) \quad |2y - 3| = |9 - 4y|$$

$$۱۴) \quad |2x - 6| = |10 - 2x|$$

$$۱۵) \quad |x + 4| = |7 - x|$$

$$۱۶) \quad |x| \leq 4$$

$$۱۷) \quad |x| > 3$$

$$۱۸) \quad |x + 3| < 2$$

$$۱۹) \quad |y - 6| \geq 7$$

$$۲۰) \quad |x| + 7 \leq 12$$

$$۲۱) \quad |2x + 7| \leq 13$$

$$۲۲) \quad |x| + 2 > 6$$

$$۲۳) \quad |x + 10| \geq 14$$

$$۲۴) \quad |2x - 7| \leq 11$$

$$۲۵) \quad |x| > -4$$

$$۲۶) \quad 6 + |4x - 1| \leq 9$$

$$۲۷) \quad |6x - 8| + 3 > 7$$

$$۲۸) \quad |5x + 3| < -6$$

$$۲۹) \quad |2x - 3| < 7$$

$$۳۰) \quad |2x - 3| = 7$$

پاسخ تمرینات ۲.۶

معادله ها و نا معادله های زیر را حل کنید.

۱)  $|x| = ۷$

$x = ۷$  یا  $x = -۷$

$\{۷, -۷\}$



۲)  $|x| = -۴$

میدانیم که قدر مطلق یک عدد هرگز منفی نیست، پس این معادله جوابی ندارد. مجموعه جوابهای آن  $\phi$  است.

۳)  $|۳x| = ۱۲۶$

$۳x = ۱۲۶$  یا  $۳x = -۱۲۶$

$x = ۴۲$  یا  $x = -۴۲$



۴)  $|x - ۹| = ۱۴$

$x - ۹ = ۱۴$  یا  $x - ۹ = -۱۴$

$x = ۲۳$  یا  $x = -۵$

$\{۲۳, -۵\}$



$$۵) \quad |2x - ۵| = ۹$$

$$2x - ۵ = ۹ \quad \text{یا} \quad 2x - ۵ = -۹$$

$$2x = ۱۴ \quad \text{یا} \quad 2x = -۴$$

$$x = ۷ \quad \text{یا} \quad x = -۲$$



$$۶) \quad \left| \frac{x}{۲} - ۳ \right| = ۱$$

$$\frac{x}{۲} - ۳ = ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{x}{۲} - ۳ = -۱$$

$$۲ \left( \frac{x}{۲} - ۳ \right) = ۲(۱) \quad \text{یا} \quad ۲ \left( \frac{x}{۲} - ۳ \right) = ۲(-۱)$$

$$x - ۶ = ۲ \quad \text{یا} \quad x - ۶ = -۲$$

$$x = ۸ \quad \text{یا} \quad x = ۴$$

$$\{۴, ۸\}$$

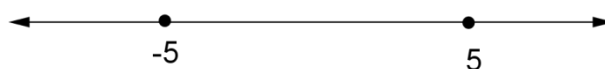


$$۷) \quad |z| + ۴ = ۹$$

$$|z| = ۵$$

$$z = ۵ \quad \text{یا} \quad z = -۵$$

$$\{۵, -۵\}$$



$$۸) \quad |۳x| + ۵ = ۱۴$$

$$|۳x| = ۹$$

$$۳x = ۹ \quad \text{یا} \quad ۳x = -۹$$

$$x = ۳ \quad \text{یا} \quad x = -۳$$

$$\{۳, -۳\}$$



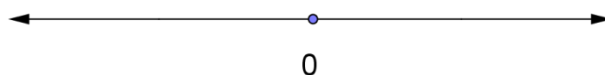
$$۹) \quad |۲x| = ۰$$

$$۲x = ۰$$



$$x = 0$$

$$\{0\}$$



$$۱۰) \quad |4n + 1| + 1 = 4$$

$$|4x + 1| = -6$$

میدانیم که قدر مطلق یک عدد هیچ وقت منفی نیست ، پس این معادله جوابی ندارد. مجموعه جواب ها  $\phi$  است.

$$۱۱) \quad |5x - 7| = |3x + 11|$$

$$5x - 7 = 3x + 11$$

یا

$$5x - 7 = -(3x + 11)$$

$$5x - 7 + 7 = 3x + 11 + 7$$

یا

$$5x - 7 = -3x - 11$$

$$5x = 3x + 18$$

یا

$$5x - 7 + 7 = -3x - 11 + 7$$

$$5x - 3x = 3x + 18 - 3x$$

یا

$$5x = -3x - 4$$

$$2x = 18$$

یا

$$5x + 3x = -3x - 4 + 3x$$

$$x = 9$$

یا

$$8x = -4$$

$$x = 9$$

یا

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\left\{9, -\frac{1}{2}\right\}$$



$$۱۲) \quad |z + ۸| = |z - ۳|$$

$$z + ۸ = z - ۳$$

یا

$$z + ۸ = -(z - ۳)$$

$$z + ۸ - ۸ = z - ۳ - ۸$$

یا

$$z + ۸ = -z + ۳$$

$$z = z - ۱۱$$

یا

$$z + ۸ - ۸ = -z + ۳ - ۸$$

$$z - z = z - ۱۱ - z$$

یا

$$z = -z - ۵$$

این رابطه صحیح نیست  $۰ = -۱۱$ 

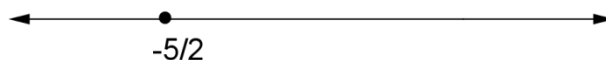
یا

$$z + z = -z - ۵ + z$$

$$۲z = -۵$$

$$z = -\frac{۵}{۲}$$

$$\left\{-\frac{۵}{۲}\right\}$$



$$۱۳) \quad |۲y - ۳| = |۹ - ۴y|$$

$$۲y - ۳ = ۹ - ۴y$$

یا

$$۲y - ۳ = -(۹ - ۴y)$$

$$۲y - ۳ + ۳ = ۹ - ۴y + ۳$$

یا

$$۲y - ۳ = -۹ + ۴y$$

$$2y = 12 - 4y$$

یا

$$2y - 3 + 3 = -9 + 4y + 3$$

$$2y + 4y = 12 - 4y + 4y$$

یا

$$2y = -6 + 4y$$

$$6y = 12$$

یا

$$2y - 4y = -6 + 4y - 4y$$

$$y = 2$$

یا

$$-2y = -6$$

$$y = 2$$

یا

$$y = 3$$

$$\{2, 3\}$$



$$۱۴) |2x - 6| = |10 - 2x|$$

$$2x - 6 = 10 - 2x$$

یا

$$2x - 6 = -(10 - 2x)$$

$$2x - 6 + 6 = 10 - 2x + 6$$

یا

$$2x - 6 = -10 + 2x$$

$$2x = 16 - 2x$$

یا

$$2x - 6 + 6 = -10 + 2x + 6$$

$$2x + 2x = 16 - 2x + 2x$$

یا

$$2x = -4 + 2x$$

$$4x = 16$$

یا

$$2x - 2x = -4 + 2x - 2x$$

$$x = 4$$

یا

این رابطه غلط است  $0 = -4$ 

$$\{4\}$$



$$۱۵) |x + ۴| = |۷ - x|$$

$$x + ۴ = ۷ - x$$

یا

$$x + ۴ = -(۷ - x)$$

$$x + ۴ - ۴ = ۷ - x - ۴$$

یا

$$x + ۴ = -۷ + x$$

$$x = ۳ - x$$

یا

$$x + ۴ - ۴ = -۷ + x - ۴$$

$$x + x = ۳ - x + x$$

یا

$$x = -۱۱ + x$$

$$۲x = ۳$$

یا

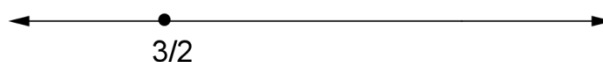
$$x - x = -۱۱ + x - x$$

$$x = \frac{۳}{۲}$$

یا

این رابطه غلط است  $۰ = -۱۱$ 

$$\left\{\frac{۳}{۲}\right\}$$



$$۱۶) |x| \leq ۴$$

$$-۴ \leq x \leq ۴$$

$$[-۴, ۴]$$



$$۱۷) |x| > ۳$$

$$x > ۳$$

یا

$$x < -۳$$

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$



$$۱۸) |x + 3| < 2$$

$$-2 < x + 3 < 2$$

$$-2 - 3 < x + 3 - 3 < 2 - 3$$

$$-5 < x < -1$$

$$(-5, -1)$$



$$۱۹) |y - 6| \geq 7$$

$$x - 6 \geq 7 \quad \text{یا} \quad x - 6 \leq -7$$

$$x \geq 13 \quad \text{یا} \quad x \leq -1$$

$$(-\infty, -1] \cup [13, \infty)$$



$$۲۰) |x| + 7 \leq 12$$

$$|x| \leq 5$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$[-5, 5]$$



$$۲۱) \quad |2x + 7| \leq 13$$

$$-13 \leq 2x + 7 \leq 13$$

$$-13 - 7 \leq 2x + 7 - 7 \leq 13 - 7$$

$$-20 \leq 2x \leq 6$$

$$-10 \leq x \leq 3$$

$$[-10, 3]$$



$$۲۲) \quad |x| + 2 > 6$$

$$|x| > 4$$

$$x > 4 \quad \text{یا} \quad x < -4$$

$$(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$



$$۲۳) |x + ۱۰| \geq ۱۴$$

$$x + ۱۰ \geq ۱۴ \quad \text{یا} \quad x + ۱۰ \leq -۱۴$$

$$x \geq ۴ \quad \text{یا} \quad x \leq -۲۴$$

$$(-\infty, -۲۴] \cup [۴, \infty)$$



$$۲۴) |2x - ۷| \leq ۱۱$$

$$-۱۱ \leq 2x - ۷ \leq ۱۱$$

$$-۱۱ + ۷ \leq 2x - ۷ + ۷ \leq ۱۱ + ۷$$

$$-۴ \leq 2x \leq ۱۸$$

$$-۲ \leq x \leq ۹$$

$$[-۲, ۹]$$



$$۲۵) |x| > -۴$$

$$(-\infty, \infty)$$

میدانیم که قدر مطلق یک عدد هرگز منفی نیست و یا به عبارت دیگر همیشه از یک عدد منفی بزرگ تر است. پس مجموعه جواب های این نا معادله کلیه اعداد حقیقی است.



$$۲۶) \quad ۶ + |۴x - ۱| \leq ۹$$

$$|۴x - ۱| \leq ۳$$

$$-۳ \leq ۴x - ۱ \leq ۳$$

$$-۳ + ۱ \leq ۴x - ۱ + ۱ \leq ۳ + ۱$$

$$-۲ \leq ۴x \leq ۴$$

$$\frac{-۲}{۴} \leq \frac{۴x}{۴} \leq \frac{۴}{۴}$$

$$-\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱$$

$$\left[-\frac{۱}{۲}, ۱\right]$$



$$۲۷) \quad |۴x - ۸| + ۳ > ۷$$

$$|۴x - ۸| > ۴$$

$$۴x - ۸ > ۴ \quad \text{یا} \quad ۴x - ۸ < -۴$$



$$6x - 8 + 8 > 4 + 8 \quad \text{یا} \quad 6x - 8 + 8 < -4 + 8$$

$$6x > 12 \quad \text{یا} \quad 6x < 4$$

$$\frac{6x}{6} > \frac{12}{6} \quad \text{یا} \quad \frac{6x}{6} < \frac{4}{6}$$

$$x > 2 \quad \text{یا} \quad x < \frac{2}{3}$$

$$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, \infty)$$



$$28) \quad |5x + 3| < -6$$

$$\phi$$

قدر مطلق یک عدد هرگز منفی نیست. این نا معادله پاسخی ندارد.

$$29) \quad |2x - 3| < 7$$

$$-7 < 2x - 3 < 7$$

$$-7 + 3 < 2x - 3 + 3 < 7 + 3$$

$$-4 < 2x < 10$$

$$\frac{-4}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{10}{2}$$

$$-2 < x < 5$$

$$(-2, 5)$$



$$۳ \circ) |2x - 3| = 7$$

$$2x - 3 = 7$$

$$2x = 10$$

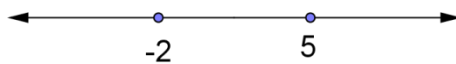
$$x = 5$$

$$\{5, -2\}$$

$$\text{یا} \quad 2x - 3 = -7$$

$$\text{یا} \quad 2x = -4$$

$$\text{یا} \quad x = -2$$





سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)