

## فصل سوم

## چند جمله ای ها Polynomials

۳.۱ - جمع و تفریق چند جمله ای ها Adding and Subtracting Polynomials

تعریف چند جمله ای و اصطلاحات مربوطه Defining a Polynomial and Related Terms

یاد آوری - تعریف عبارت جبری

در فصل اول بخش ۱ گفتیم که یک عبارت جبری تشکیل شده از اعداد و متغیر ها که بوسیله اعمال جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم ، توان رسانی و ریشه گیری به هم متصل شده باشند. مثال

$$2x^2 - 3x + 4 \quad ax + b \quad \frac{y-1}{y^2+2}$$

متغیر یک حرف لاتین است که نماینده یک عدد است

عدد ثابت Constant عبارت است از یک عدد ثابت یا مشخص

جمله Term عبارت است از یک عدد یا حاصل ضرب یک عدد و یک یا چند متغیر که به توان رسیده باشند و یا

اجزایی از عبارت هستند که با هم جمع شده اند. مثلا در عبارت  $2x^2 - 3x + 4$  اجزاء  $2x^2$  و  $3x$  و  $4$ 

هر کدام یک جمله است.

در عبارت

$$\frac{p-2q}{a^2+b}$$

اجزائی  $p, 2q, a^2, b$  هر کدام یک جمله هستند.

ضریب Coefficient عامل یا فاکتور عددی یک جمله است. مثال

ضریب	جمله
-۱۲	$-12x^5$
۱	$x^2y$

$$\begin{array}{cc} -1 & -z \\ 2 & 2 \end{array}$$

ملاحظه می کنید که در آخرین مثال، عدد ۲ را هم یک جمله به حساب آوردیم. پس یک عدد هم به تنهایی یک جمله است. که در این مورد به آن جمله ثابت Constant Term و یا مقدار ثابت می گوئیم.

**چند جمله ای Polynomial** عبارت است از جمع تعداد محدودی Finite sum از جملات Terms که در آن متغیرها به توان های اعداد صحیح نا منفی رسیده باشند و هیچ متغیری در مخرج کسر وجود نداشته باشد. مثال عبارت های زیر هر کدام چند جمله ای هستند.

$$5x^5y + 7xz \quad -5x^3 + 2x + \frac{2}{3}$$

اما عبارت های زیر چند جمله ای نیستند

$$5x^{-3} + 2x \quad \text{توان عدد صحیح منفی}$$

$$\frac{6}{x} - 5x + 1 \quad \text{متغیر در مخرج کسر}$$

اگر یک چند جمله ای شامل فقط یک متغیر باشد، آنرا چند جمله ای یک متغیر ی Polynomial in one variable می نامند. مانند:

$$4x^3 - 7x^2 + 5 \quad y^2 - 4 \quad 8a^4 - 7a^3 + 4a$$

مثال های بالا به ترتیب نزولی Descending Order نوشته شده اند زیرا متغیرها به ترتیب نزولی توان های آنها در عبارت ها آمده اند.

**یک جمله ای Monomial** عبارت است از یک چند جمله ای که شامل یک جمله باشد.

$$2x, \quad 3y^2, \quad \frac{1}{4}z^3$$

هر کدام یک جمله ای هستند.

**دو جمله ای Binomial** عبارت است از یک چند جمله ای که دارای دو جمله باشد.

**سه جمله ای** عبارت است از یک چند جمله ای که دارای سه جمله باشد.

یک جمله ای	دو جمله ای	سه جمله ای
$ax^2$	$x + y$	$x^2 + 4xy + y^2$
$-3x$	$6y^2 - 2$	$-x^6 + 3x^3 + 1$
$4$	$\frac{5}{7}z^3 - 2z$	$8y^2 - 2y - 1$

طبق تعریف ، کلیه یک جمله ای ها ، دو جمله ای ها ، و سه جمله ای ها نیز چند جمله ای هستند.

هر جمله Term یک چند جمله ای A Polynomial دارای یک **درجه Degree** است

### درجه یک جمله Degree of a Term

درجه یک جمله عبارت است از مجموع توان های متغیر های آن جمله. **مثال**

- ۱)  $3x^2$  توان  $x$  ، ۲ است پس درجه این جمله ۲ است
- ۲)  $-2^3x^5$  توان  $x$  ، ۵ است پس درجه این جمله ۵ است
- ۳)  $y$  توان  $y$  ، ۱ است پس درجه این جمله ۱ است
- ۴)  $12x^2yz^3$  مجموع توان های متغیر ها  $2 + 1 + 3 = 6$  است پس درجه این جمله ۶ است
- ۵)  $5x^0$  درجه این جمله صفر است چون میتوان نوشت

پس می توان گفت درجه یک مقدار ثابت Constant صفر است

### درجه یک چند جمله ای

درجه یک چند جمله ای عبارت است از بزرگ ترین درجه هر کدام از جمله های آن چند جمله ای. **مثال**

درجه هر کدام از چند جمله ای های زیر را پیدا کنید.

- ۶)  $7x^3 - 3x + 2$  درجه این سه جمله ای ۳ است
- ۷)  $-xyz$  درجه این یک جمله ای ۳ است
- ۸)  $x^4 - 16$  درجه این دو جمله ای ۴ است

درجه این چند جمله ای ۴ است ۶  $- 5x^2 - 3xy + x^2y^2$  ۹)

### تلفیق یا ادغام کردن جملات متشابه Combining Like Terms

قبلا گفتیم که جملات متشابه، جملاتی هستند که شامل متغیرهای یکسان با توانهای یکسان.

جملات زیر متشابه هستند،

$$-5x^2, x^2$$

$$7xy^3z, 2xy^3z$$

جملات زیر متشابه نیستند.

$$4x^4, 3x$$

$$12x^2y^3, -2xy^3$$

برای ساده کردن یک چند جمله ای با استفاده از خاصیت توزیعی، جملات متشابه را با هم ادغام می کنیم. مثال

$$5x + 7x = (5 + 7)x = 12x$$

مثال — چند جمله ای های زیر را ساده کنید.

$$۱۰) \quad -12x^2 + 7x^2 - 6x = (-12 + 7)x^2 - 6x = -5x^2 - 6x$$

$$۱۱) \quad 3xy - 2x + 5xy - x = (3 + 5)xy + (-2 - 1)x = 8xy - 3x$$

جمع چند جمله ای ها — برای جمع کردن چند جمله ای ها، آنها را با هم ادغام می کنیم. مثال

$$\begin{aligned} ۱۲) \quad (11x^3 - 12x^2 + x - 3) + (x^3 - 10x + 5) &= 11x^3 + x^3 - 12x^2 + x - 10x - 3 + 5 \\ &= (11 + 1)x^3 - 12x^2 + (1 - 10)x + (-3 + 5) = 12x^3 - 12x^2 - 9x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۳) \quad (11x^3 - 12x^2 + x - 3) + (x^3 - 10x + 5) \\ &= (11 + 1)x^3 - 12x^2 + (1 - 10)x + (-3 + 5) = 12x^3 - 12x^2 - 9x + 2 \end{aligned}$$

$$۱۴) \quad (7x^3y - xy^3 + 11) + (6x^3y - 4) = (7 + 6)x^3y - xy^3 + (11 - 4)$$

$$= 12x^3y - xy^3 + 7$$

تفریق چند جمله ای ها -قاعده تفریق اعداد حقیقی را می توان در مورد تفریق چند جمله ای ها بکار برد. بخاطر دارید که برای تفریق یک عدد، قرینه آن عدد را جمع می کنیم.

$$a - b = a + (-b)$$

به همین طریق، اگر  $P$  و  $Q$  چند جمله ای باشند، پس

$$P - Q = P + (-Q)$$

چند جمله ای  $-Q$  قرینه چند جمله ای  $Q$  است. برای پیدا کردن  $-Q$  علامت هر یک از جملات  $Q$  را تغییر می دهیم.

مثال -تفریق کنید.

$$\begin{aligned} 15) \quad (12z^5 - 12z^3 + z) - (-3z^4 + z^3 + 12z) &= 12z^5 - 12z^3 + z + 3z^4 - z^3 - 12z \\ &= 12z^5 + 3z^4 + (-12 - 1)z^3 + (1 - 12)z \\ &= 12z^5 + 3z^4 - 13z^3 - 11z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16) \quad (1 \circ x^3 - 7x^2) - (4x^3 - 3x^2 + 2) &= 1 \circ x^3 - 7x^2 - 4x^3 + 3x^2 - 2 \\ &= (1 \circ -4)x^3 + (-7 + 3)x^2 - 2 = 6x^3 - 4x^2 - 2 \end{aligned}$$

تمرینات ۳.۱

درجه هر یک از جملات زیر را پیدا کنید.

۱)  $4$

۲)  $3x^2$

۳)  $-3xy^2$

درجه هر یک از چند جمله ای های زیر را پیدا کنید. و مشخص کنید آیا آن چند جمله ای ، یک جمله ای است یا دو جمله ای یا سه جمله ای است و یا هیچ کدام از این سه نوع .

۴)  $6x + 3$

۵)  $3x^2 - 2x + 5$

۶)  $-xyz$

۷)  $x^2y - 4xy^2 + 5x + y$

ساده کنید.

۸)  $5y + y$

۹)  $4x + 7x - 3$

۱۰)  $4xy + 2x - 3xy - 1$

جمع کنید.

۱۱)  $(9y^2 - 8) + (9y^2 - 9)$

۱۲)  $(x^2 + xy - y^2) + (2x^2 - 4xy + 7y^2)$

$$۱۳) \quad (x^2 - 6x + 3) + (2x + 5)$$

$$۱۴) \quad (3x^2 + 15x + 8) + (2x^2 + 7x + 8)$$

$$۱۵) \quad (-3x + 8) + (-3x^2 + 3x - 5)$$

$$۱۶) \quad (5y^2 - 7y^2 + x^2 - 3) + (-3y^2 + 2y^2 + 4)$$

$$۱۷) \quad (5x - 11) + (-x - 2)$$

$$۱۸) \quad (3x^2 - b + 2a - 6) + (-4x^2 + b + 6a - 6)$$

$$۱۹) \quad (-3 + 4x^2 + 7xy^2) + (2x^2 - x^2 + xy^2)$$

تفریق کنید.

$$۲۰) \quad (9y^2 - 7y + 5) - (8y^2 - 7y + 2)$$

$$۲۱) \quad (3x^2 - 4x + 8) - (5x^2 - 7)$$

$$۲۲) \quad (6y^2 - 6y + 4) - (-y^2 - 6y + 7)$$

$$۲۳) \quad (4x^2 - 6x + 2) - (-x^2 + 3x + 5)$$

$$۲۴) \quad (7x^2 + x + 1) - (6x^2 + x - 1)$$

$$۲۵) \quad (9x^3 - 2x^2 + 4x - 7) - (2x^3 - 6x^2 - 4x + 3)$$

عملیات زیر را انجام دهید.

$$۲۶) \text{ -چند جمله ای } (y^2 + 4yx + 7) \text{ را از چند جمله ای } (-19y^2 + 7yx + 7) \text{ کم کنید.}$$

$$۲۷) \text{ -چند جمله ای } (6x^2 - 3x) \text{ را از چند جمله ای } (4x^2 + 2x) \text{ کم کنید.}$$

$$۲۸) \text{ -چند جمله ای } (3x + 7) \text{ را از مجموع چند جمله ای } (7x^2 + 4x + 9) \text{ و چند جمله ای } (8x^2 + 7x - 8) \text{ کم کنید.}$$



## پاسخ تمرینات ۳.۱

درجه هر یک از جملات زیر را پیدا کنید.

۱) درجه صفر ۴

۲)  $3x^2$  درجه دو

۳)  $-3xy^2$  درجه سه

درجه هر یک از چند جمله ای های زیر را پیدا کنید. و مشخص کنید آیا آن چند جمله ای ، یک جمله ای است یا دو جمله ای یا سه جمله ای است و یا هیچ کدام از این سه نوع .

۴)  $6x + 3$  دو جمله ای درجه یک

۵)  $3x^2 - 2x + 5$  سه جمله ای درجه دو

۶)  $-xyz$  یک جمله ای درجه سه

۷)  $x^2y - 4xy^2 + 5x + y$  درجه سه - هیچ کدام از انواع بالا

ساده کنید.

۸)  $5y + y = (5 + 1)y = 6y$

۹)  $4x + 7x - 3 = (4 + 7)x - 3 = 11x - 3$

$$۱۰) \quad ۴xy + ۲x - ۳xy - ۱ = (۴ - ۳)xy + ۲x - ۱ = xy + ۲x - ۱$$

جمع کنید.

$$۱۱) \quad (۹y^۲ - ۸) + (۹y^۲ - ۹) = ۹y^۲ - ۸ + ۹y^۲ - ۹ = (۹ + ۹)y^۲ + (-۸ - ۹) = ۱۸y^۲ - ۱۷$$

$$\begin{aligned} ۱۲) \quad (x^۲ + xy - y^۲) + (۲x^۲ - ۴xy + ۷y^۲) &= x^۲ + xy - y^۲ + ۲x^۲ - ۴xy + ۷y^۲ \\ &= (۱ + ۲)x^۲ + (۱ - ۴)xy + (-۱ + ۷)y^۲ = ۳x^۲ - ۳xy + ۶y^۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۳) \quad (x^۲ - ۶x + ۳) + (۲x + ۵) &= x^۲ - ۶x + ۳ + ۲x + ۵ = x^۲ + (-۶ + ۲)x + (۳ + ۵) \\ &= x^۲ - ۴x + ۸ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۴) \quad (۳x^۲ + ۱۵x + ۸) + (۲x^۲ + ۷x + ۸) &= ۳x^۲ + ۱۵x + ۸ + ۲x^۲ + ۷x + ۸ \\ &= (۳ + ۲)x^۲ + (۱۵ + ۷)x + (۸ + ۸) = ۵x^۲ + ۲۲x + ۱۶ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۵) \quad (-۳x + ۸) + (-۳x^۲ + ۳x - ۵) &= -۳x + ۸ - ۳x^۲ + ۳x - ۵ \\ &= -۳x^۲ + (-۳ + ۳)x + (۸ - ۵) = -۳x^۲ + ۳ \end{aligned}$$

$$۱۶) \quad (۵y^۴ - ۷y^۲ + x^۲ - ۳) + (-۳y^۴ + ۲y^۲ + ۴) = ۵y^۴ - ۷y^۲ + x^۲ - ۳ - ۳y^۴ + ۲y^۲ + ۴$$

$$= (5 - 3)y^2 + (-7 + 2)y^2 + x^2 + (-3 + 4) = 2y^2 - 5y^2 + x^2 + 1$$

$$۱۷) \quad (5x - 11) + (-x - 2) = 5x - 11 - x - 2 = (5 - 1)x + (-11 - 2) = 4x - 13$$

$$\begin{aligned} ۱۸) \quad & (3x^2 - b + 2a - 6) + (-4x^2 + b + 6a - 6) \\ &= 3x^2 - b + 2a - 6 - 4x^2 + b + 6a - 6 \\ &= (3 - 4)x^2 + (-1 + 1)b + (2 + 6)a + (-6 - 6) = -x^2 + 8a - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۹) \quad & (-3 + 4x^2 + 5xy^2) + (2x^2 - x^2 + xy^2) \\ &= -3 + 4x^2 + 5xy^2 + 2x^2 - x^2 + xy^2 \\ &= -3 + (4 - 1)x^2 + (5 + 1)xy^2 + 2x^2 = -3 + 3x^2 + 6xy^2 + 2x^2 \\ &= 6xy^2 + 2x^2 + 3x^2 - 3 \end{aligned}$$

تفریق کنید.

$$\begin{aligned} ۲۰) \quad & (9y^2 - 7y + 5) - (8y^2 - 7y + 2) = 9y^2 - 7y + 5 - 8y^2 + 7y - 2 \\ &= (9 - 8)y^2 + (-7 + 7)y + (5 - 2) = y^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲۱) \quad & (3x^2 - 4x + 8) - (5x^2 - 7) = 3x^2 - 4x + 8 - 5x^2 + 7 = (3 - 5)x^2 - 4x + (8 + 7) \\ &= -2x^2 - 4x + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲۲) \quad & (۶y^۲ - ۶y + ۴) - (-y^۲ - ۶y + ۷) = ۶y^۲ - ۶y + ۴ + y^۲ + ۶y - ۷ \\ & = (۶ + ۱)y^۲ + (-۶ + ۶)y + (۴ - ۷) = ۷y^۲ - ۳ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲۳) \quad & (۴x^۲ - ۶x + ۲) - (-x^۲ + ۳x + ۵) = ۴x^۲ - ۶x + ۲ + x^۲ - ۳x - ۵ \\ & = (۴ + ۱)x^۲ + (-۶ - ۳)x + (۲ - ۵) = ۵x^۲ - ۹x - ۳ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲۴) \quad & (۷x^۲ + x + ۱) - (۶x^۲ + x - ۱) = ۷x^۲ + x + ۱ - ۶x^۲ - x + ۱ \\ & = (۷ - ۶)x^۲ + (۱ - ۱)x + (۱ + ۱) = x^۲ + ۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲۵) \quad & (۹x^۳ - ۲x^۲ + ۴x - ۷) - (۲x^۳ - ۶x^۲ - ۴x + ۳) \\ & = ۹x^۳ - ۲x^۲ + ۴x - ۷ - ۲x^۳ + ۶x^۲ + ۴x - ۳ \\ & = (۹ - ۲)x^۳ + (-۲ + ۶)x^۲ + (۴ + ۴)x + (-۷ - ۳) = ۷x^۳ + ۴x^۲ + ۸x - ۱۰ \end{aligned}$$

عملیات زیر را انجام دهید.

۲۶- چند جمله ای  $(y^۲ + ۴yx + ۷)$  را از چند جمله ای  $(-۱۹y^۲ + ۷yx + ۷)$  کم کنید.

$$\begin{aligned} & (-۱۹y^۲ + ۷yx + ۷) - (y^۲ + ۴yx + ۷) = -۱۹y^۲ + ۷yx + ۷ - y^۲ - ۴yx - ۷ \\ & = (-۱۹ - ۱)y^۲ + (۷ - ۴)yx + (۷ - ۷) = -۲۰y^۲ + ۳yx \end{aligned}$$

۲۷- چند جمله ای  $(6x^2 - 3x)$  را از چند جمله ای  $(4x^2 + 2x)$  کم کنید.

$$\begin{aligned}(4x^2 + 2x) - (6x^2 - 3x) &= 4x^2 + 2x - 6x^2 + 3x = (4 - 6)x^2 + (2 + 3)x \\ &= -2x^2 + 5x\end{aligned}$$

۲۸- چند جمله ای  $(3x + 7)$  را از مجموع چند جمله ای  $(7x^2 + 4x + 9)$  و چند جمله ای  $(8x^2 + 7x - 8)$  کم کنید.

$$\begin{aligned}&(7x^2 + 4x + 9) + (8x^2 + 7x - 8) - (3x + 7) \\ &= 7x^2 + 4x + 9 + 8x^2 + 7x - 8 - 3x - 7 \\ &= (7 + 8)x^2 + (4 + 7 - 3)x + (9 - 8 - 7) = 15x^2 + 8x - 6\end{aligned}$$

## ۳.۲ - ضرب چند جمله ای ها Multiplying Polynomials

## ضرب دو چند جمله ای Multiplying Any Two Polynomials

خواص اعداد حقیقی و توان ها در جریان ضرب چند جمله ای ها مکرراً بکار برده می شوند. مثلاً برای ضرب یک جمله ای ها خواص جابجایی و شرکت پذیری اعداد حقیقی و قانون ضرب توان ها را بکار می بریم. مثال

**ضرب کنید.**

$$۱) \quad (2x^3)(5x^6) = 2(5)(x^3)(x^6) = 10x^{3+6} = 10x^9$$

$$۲) \quad (7y^4z^6)(-xy^{11}z^5) = 7(-1)x(y^4y^{11})(z^6z^5) = -7xy^{4+11}z^{6+5} = -7xy^{15}z^{11}$$

برای ضرب یک یک جمله ای در یک چند جمله ای غیر از یک جمله ای، خاصیت توزیعی یا پخش پذیری را بکار می بریم.

$$a(b + c + d + \dots + z) = ab + ac + ad + \dots + az$$

توجه دارید که یک جمله ای  $a$  در هر یک از جملات چند جمله ای ضرب شده است. مثال

**ضرب کنید.**

$$۳) \quad 2x(5x - 4) = 2x(5x) + 2x(-4) = 10x^2 - 8x$$

$$۴) \quad -3x^2(4x^2 - 6x + 1) = -3x^2(4x^2) + (-3x^2)(-6x) + (-3x^2)(1) \\ = -12x^4 + 18x^3 - 3x^2$$

$$۵) \quad -xy(4x^2y + 3xy - 11) = (-xy)(4x^2y) + (-xy)(3xy) + (-xy)(-11) \\ = -4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 11xy$$

برای ضرب دو چند جمله ای هر یک از جملات یکی از چند جمله ای ها را در چند جمله ای دیگر ضرب می کنیم و سپس جملات متشابه را ادغام می کنیم. مثال

**ضرب کنید.**

$$۶) \quad (x + 3)(2x + 5) = x(2x + 5) + 3(2x + 5) = 2x^2 + 5x + 6x + 15 = 2x^2 + 11x + 15$$

$$۷) \quad (2x - 3)(5x^2 - 6x + 7) = 2x(5x^2 - 6x + 7) + (-3)(5x^2 - 6x + 7)$$

$$= 10x^3 - 12x^2 + 14x - 15x^2 + 18x - 21 = 10x^3 - 27x^2 + 32x - 21$$

**ضرب دو جمله ای ها** – هنگام ضرب یک دو جمله ای در یک دو جمله ای دیگر می توانیم با استفاده از یک ترتیب مخصوص جملات را در هم ضرب کنیم. این ترتیب مخصوص **فویل FOIL** نامیده می شود. حروف FOIL جانشین کلمات **First-Outer-Inner-Last** هستند

First یعنی اول

Outer یعنی خارجی - بیرونی

Inner یعنی داخلی

Last یعنی آخرین

برای توضیح این روش ،  $(3x + 1)(2x - 3)$  را در هم ضرب می کنیم.

اولین جمله هر کدام از دو جمله ای در هم ضرب می کنیم  $2x(3x) = 6x^2$

جملات بیرونی هر کدام از دو جمله ای در هم ضرب می کنیم  $2x(1) = 2x$

جملات داخلی هر کدام از دو جمله ای در هم ضرب می کنیم  $-3(3x) = -9x$

آخرین جمله هر کدام از دو جمله ای در هم ضرب می کنیم  $-3(1) = -3$

$$6x^2 + 2x - 9x - 3 = 6x^2 - 7x - 3$$

با استفاده از روش **FOIL** دو جمله ای ها را ضرب کنید.

$$8) \quad (x - 1)(x + 2) = x \times x + 2 \times x + (-1)x + (-1)2 = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$$

$$9) \quad (2x - 7)(3x - 4) = 2x(3x) + 2x(-4) + (-7)(3x) + (-7)(-4)$$

$$= 6x^2 - 8x - 21x + 28 = 6x^2 - 29x + 28$$

$$10) \quad (3x + y)(5x - 2y) = 3x(5x) + 3x(-2y) + y(5x) + y(-2y)$$

$$= 15x^2 - 6xy + 5xy - 2y^2 = 15x^2 - xy - 2y^2$$

**مربع دو جمله ای ها** - مربع یک دو جمله ای ، حالت مخصوصی از ضرب دو دو جمله ای است. مثال

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع یک دو جمله ای

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال - ضرب کنید.

$$۱۱) (x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$۱۲) (x - 9)^2 = x^2 - 2(x)(9) + (9)^2 = x^2 - 18x + 81$$

$$۱۳) (3x + 2z)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2z) + (2z)^2 = 9x^2 + 12xz + 4z^2$$

$$۱۴) (4m^2 - 3n)^2 = (4m^2)^2 - 2(4m^2)(3n) + (3n)^2 = 16m^4 - 24m^2n + 9n^2$$

ضرب مجموع و تفاضل دو جمله

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

پس حاصل ضرب مجموع و تفاضل دو جمله

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

مثال - ضرب کنید.

$$۱۵) (x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

$$۱۶) (4y - 1)(4y + 1) = (4y)^2 - 1^2 = 16y^2 - 1$$

$$۱۷) (x^2 + 2y)(x^2 - 2y) = (x^2)^2 - (2y)^2 = x^4 - 4y^2$$

$$۱۸) \left(3m^2 - \frac{1}{2}\right)\left(3m^2 + \frac{1}{2}\right) = (3m^2)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9m^4 - \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} ۱۹) & [(5x - 2y) - 1][(5x - 2y) + 1] = (5x - 2y)^2 - 1^2 \\ & = (5x)^2 - 2(5x)(2y) + (2y)^2 - 1 = 25x^2 - 20xy + 4y^2 - 1 \end{aligned}$$



$$۲۰) \quad \sqrt{x}(x^2 + 2x + \sqrt{x}) = \sqrt{x}(x^2) + \sqrt{x}(2x) + \sqrt{x}(\sqrt{x})$$

$$= x^{\frac{1}{2}} x^2 + x^{\frac{1}{2}} \times 2x + x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x$$

$$۲۱) \quad (1 + \sqrt{x})(2 - 3\sqrt{x}) = 2 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3(\sqrt{x})^2 = 2 - \sqrt{x} - 3x$$

خلاصه

حاصل ضرب های مخصوص یا اتحاد های مهم

$$۱) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$۲) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$۳) \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$۴) \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$۵) \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

اینجا به دو اتحاد دیگر اشاره می کنیم که در بخش های آینده جهت فاکتور گیری بکار می آیند .

$$۶) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$۷) \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

حاصل ضرب های مخصوص یا اتحاد های بالا را به خاطر بسپارید . در حل بسیاری از مسائل جبری و مثلثات کار برد دارند .

مثال - ضرب کنید.

$$۲۲) \quad (2x - \sqrt{x})(2x + \sqrt{x}) = (2x)^2 - (\sqrt{x})^2 = 4x^2 - x$$

$$۲۳) \quad (x^2 - 2)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3$$

$$= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$$

تمرینات ۳.۲

ضرب کنید.

$$۱) \quad (-۴x^۳)(۳x^۲)$$

$$۲) \quad ۳x(۴x + ۷)$$

$$۳) \quad -۶xy(۴x + y)$$

$$۴) \quad -۴ab(xa^۲ + ya^۲ - ۳)$$

$$۵) \quad (x - ۳)(۲x + ۴)$$

$$۶) \quad (۲x + ۳)(x^۳ - x + ۲)$$

$$۷) \quad (۳x - ۲)(۵x + ۱)$$

$$۸) \quad (۳m^۲ + ۲m - ۱)(۵m + ۲)$$

$$۹) \quad (۳x^۲ + ۴x - ۴)(۳x + ۶)$$

$$۱۰) \quad -۶a^۲b^۲(۵a^۲b^۲ - ۶a - ۶b)$$

$$۱۱) \quad (2x^3 + 5)(5x^2 + 4x + 1)$$

با روش FOIL ضرب کنید

$$۱۲) \quad (x - 3)(x + 4)$$

$$۱۳) \quad (3x - 1)(x + 3)$$

$$۱۴) \quad (a - 4)(2a - 4)$$

با استفاده از اتحاد ها ، ضرب کنید.

$$۱۵) \quad (x + 4)^2$$

$$۱۶) \quad (4y - 1)(4y + 1)$$

$$۱۷) \quad (3x - y)^2$$

$$۱۸) \quad (7ab + 3c)(7ab - 3c)$$

$$۱۹) \quad (m - 4)^2$$

$$۲۰) \quad (3x + 1)^2$$

$$۲۱) \quad (3b - 4y)(3b + 4y)$$

$$۲۲) \quad (7x - 3)(7x + 3)$$

$$۲۳) \quad \left(3x + \frac{1}{4}\right)\left(3x - \frac{1}{4}\right)$$

$$۲۴) \quad (4x + 1)^2$$

$$۲۵) \quad (x^2 + 2y)(x^2 - 2y)$$

$$۲۶) \quad [3 + (4b + 1)]^2$$

$$۲۷) \quad [(2s - 3) - 1][(2s - 3) + 1]$$

$$۲۸) \quad [(xy + 4) - 6]^2$$

پاسخ تمرینات ۳.۲

ضرب کنید.

$$۱) \quad (-۴x^۳)(۳x^۲) = -۱۲x^۵$$

$$۲) \quad ۳x(۴x + ۷) = ۳x(۴x) + ۳x(۷) = ۱۲x^۲ + ۲۱x$$

$$۳) \quad -۶xy(۴x + y) = (-۶xy)(۴x) + (-۶xy)(y) = -۲۴x^۲y - ۶۲xy^۲$$

$$\begin{aligned} ۴) \quad -۴ab(xa^۲ + ya^۲ - ۳) &= (-۴ab)(xa^۲) + (-۴ab)(ya^۲) + (-۴ab)(-۳) \\ &= -۴a^۳bx - ۴a^۳by + ۱۲ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۵) \quad (x - ۳)(۲x + ۴) &= x(۲x) + x(۴) + (-۳)(۲x) + (-۳)(۴) \\ &= ۲x^۲ + ۴x - ۶x - ۱۲ = ۲x^۲ - ۲x - ۱۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۶) \quad (۲x + ۳)(x^۳ - x + ۲) &= ۲x(x^۳) + ۲x(-x) + ۲x(۲) + ۳(x^۳) + ۳(-x) + ۳(۲) \\ &= ۲x^۴ - ۲x^۲ + ۴x + ۳x^۳ - ۳x + ۶ = ۲x^۴ + ۳x^۳ - ۲x^۲ + x + ۶ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۷) \quad (۳x - ۲)(۵x + ۱) &= ۳x(۵x) + ۳x(۱) + (-۲)(۵x) + (-۲)(۱) = ۱۵x^۲ + ۳x - ۱۰x - ۲ \\ &= ۱۵x^۲ - ۷x - ۲ \end{aligned}$$

$$۸) \quad (۳m^۲ + ۲m - ۱)(۵m + ۲)$$

$$= 5m(3m^2) + 5m(2m) + 5m(-1) + 2(3m^2) + 2(2m) + 2(-1)$$

$$= 15m^2 + 10m - 5m + 6m^2 + 4m - 2$$

$$= 15m^2 + 16m - m - 2$$

$$9) (3x^2 + 4x - 4)(3x + 6)$$

$$= 3x(3x^2) + 3x(4x) + 3x(-4) + 6(3x^2) + 6(4x) + 6(-4)$$

$$= 9x^3 + 12x^2 - 12x + 18x^2 + 24x - 24$$

$$= 9x^3 + 30x^2 + 12x - 24$$

$$\begin{aligned} 10) -6a^2b^2(5a^2b^2 - 6a - 6b) \\ = (-6a^2b^2)(5a^2b^2) + (-6a^2b^2)(-6a) + (-6a^2b^2)(-6b) \\ = -30a^4b^4 + 36a^3b^2 + 36a^2b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11) (2x^2 + 5)(5x^2 + 4x + 1) \\ = 2x^2(5x^2) + 2x^2(4x) + 2x^2(1) + 5(5x^2) + 5(4x) + 5(1) \\ = 10x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 25x^2 + 20x + 5 \end{aligned}$$

با روش FOIL ضرب کنید

$$12) (x - 3)(x + 4) = (x)(x) + x(4) + (-3)x + (-3)(4) = x^2 + x - 12$$

$$\begin{aligned} ۱۳) \quad (3x - 1)(x + 3) &= (3x)(x) + (3x)(3) + (-1)(x) + (-1)(3) = 3x^2 + 9x - x - 3 \\ &= 3x^2 + 8x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۴) \quad (a - 4)(2a - 4) &= (a)(2a) + (a)(-4) + (-4)(2a) + (-4)(-4) \\ &= 2a^2 - 4a - 8a + 16 = 2a^2 - 12a + 16 \end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد ها ، ضرب کنید.

$$۱۵) \quad (x + 4)^2 = x^2 + 2(x)(4) + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$۱۶) \quad (4y - 1)(4y + 1) = (4y)^2 - 1^2 = 16y^2 - 1$$

$$۱۷) \quad (3x - y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(y) + y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$$

$$۱۸) \quad (4ab + 3c)(4ab - 3c) = (4ab)^2 - (3c)^2 = 16a^2b^2 - 9c^2$$

$$۱۹) \quad (m - 4)^2 = m^2 - 2(m)(4) + 4^2 = m^2 - 8m + 16$$

$$۲۰) \quad (3x + 1)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$۲۱) \quad (۳b - ۶y)(۳b + ۶y) = (۳b)^۲ - (۶y)^۲ = ۹b^۲ - ۳۶y^۲$$

$$۲۲) \quad (۷x - ۳)(۷x + ۳) = (۷x)^۲ - (۳)^۲ = ۴۹x^۲ - ۹$$

$$۲۳) \quad \left(۳x + \frac{۱}{۲}\right)\left(۳x - \frac{۱}{۲}\right) = (۳x)^۲ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = ۹x^۲ - \frac{۱}{۴}$$

$$۲۴) \quad (۶x + ۱)^۲ = (۶x)^۲ + ۲(۶x)(۱) + ۱^۲ = ۳۶x^۲ + ۱۲x + ۱$$

$$۲۵) \quad (x^۲ + ۲y)(x^۲ - ۲y) = (x^۲)^۲ - (۲y)^۲ = x^۴ - ۴y^۲$$

$$\begin{aligned} ۲۶) \quad [۳ + (۴b + ۱)]^۲ &= ۳^۲ + ۲(۳)(۴b + ۱) + (۴b + ۱)^۲ \\ &= ۹ + ۲۴b + ۶ + (۴b)^۲ + ۲(۴b)(۱) + ۱^۲ \\ &= ۹ + ۲۴b + ۶ + ۱۶b^۲ + ۸b + ۱ = ۱۶b^۲ + ۳۲b + ۱۶ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲۷) \quad [(۲s - ۳) - ۱][(۲s - ۳) + ۱] &= (۲s - ۳)^۲ - ۱^۲ = (۲s)^۲ - ۲(۲s)(۳) + ۳^۲ - ۱ \\ &= ۴s^۲ - ۱۲s + ۹ - ۱ = ۴s^۲ - ۱۲s + ۸ \end{aligned}$$

$$۲۸) \quad [(xy + ۴) - ۶]^۲ = (xy + ۴)^۲ - ۲(xy + ۴)(۶) + ۶^۲$$



$$= (xy)^2 + 2(xy)(4) + 4^2 - 12xy - 48 + 36$$

$$x^2y^2 + 8xy + 16 - 12xy - 48 + 36 = x^2y^2 - 4xy + 4$$

## ۳.۳ تقسیم چند جمله ای ها Dividing Polynomial

## تقسیم یک چند جمله ای بر یک جمله ای Dividing a Polynomial by a Monomial

یاد آوری - می دانیم که برای جمع کسر ها با یک مخرج مشترک به صورت زیر عمل می کردیم.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

اگر فرض کنیم که  $c$  و  $b$  و  $a$  هر کدام یک یک جمله ای باشند، می توانیم تساوی بالا را از راست به چپ بخوانیم و در یابیم که چگونه یک چند جمله ای را بر یک یک جمله ای تقسیم کنیم.

تقسیم یک چند جمله ای بر یک جمله ای - برای تقسیم یک چند جمله ای A Polynomial بر

یک یک جمله ای A Monomial ، هر جمله Each Term از چند جمله ای را بر یک جمله ای تقسیم می کنیم.

همان طور که می بینید، معادل های انگلیسی چند جمله ای و یک جمله ای و جمله بطور کلی آورده ایم تا تفاوت آنها را تشخیص دهید.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad c \neq 0$$

مثال -  $1 \cdot x^3 - 5x^2 + 2 \cdot x$  را بر  $5x$  تقسیم کنید.

$$1) \quad \frac{1 \cdot x^3 - 5x^2 + 2 \cdot x}{5x} = \frac{1 \cdot x^3}{5x} - \frac{5x^2}{5x} + \frac{2 \cdot x}{5x} = \frac{1}{5}x^2 - x + \frac{2}{5}$$

امتحان می کنیم

مقسوم  $Dividend$  = (مقسوم علیه  $Divisor$ ) (خارج قسمت  $Quotient$ )

$$\left(\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{2}{5}\right) \times (5x) = 1 \cdot x^3 - 5x^2 + 2 \cdot x$$

$$2) \quad \frac{3x^5y^2 - 15x^3y - x^2y - 6x}{x^2y} = \frac{3x^5y^2}{x^2y} - \frac{15x^3y}{x^2y} - \frac{x^2y}{x^2y} - \frac{6x}{x^2y}$$

$$= 3x^3y - 15x - 1 - \frac{6}{xy}$$

تقسیم یک چند جمله ای بر یک چند جمله ای دیگر – این عمل عیناً مانند تقسیم یک عدد چند رقمی بر یک عدد چند رقمی دیگر است همان طور که در درس حساب دیدید. مثال

$$\begin{array}{r} 26 \\ 5 \overline{)132} \\ 10 \phantom{0} \\ \underline{32} \phantom{0} \\ 30 \phantom{0} \\ \underline{2} \phantom{0} \end{array}$$

حالا برای چند جمله ای ها مثال می آوریم.

$$3) \quad (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) \div (x - 2)$$

قدم اول – اولین جمله مقسوم را یعنی  $x^3$  را بر اولین جمله مقسوم علیه یعنی  $x$  تقسیم می کنیم. نتیجه می شود  $x^2$  آنرا بالای مقسوم می نویسیم .

قدم دوم -  $x^2$  را در مقسوم علیه ضرب می کنیم . نتیجه میشود  $x^3 - 2x^2$

قدم سوم – آنچه را که در قدم دوم بدست آوردیم زیر مقسوم می نویسیم و آنرا از دو جمله اول مقسوم کم می کنیم و نتیجه را که  $x^2 - 3x^2$  است زیر یک خط می نویسیم

قدم چهارم – جمله بعدی مقسوم را پایین می آوریم .

نتیجه چهار اعمال بالا را در زیر ملاحظه می کنید.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-2 \overline{)x^3-5x^2+2x+8} \\ \underline{x^3-2x^2} \phantom{+2x+8} \\ -3x^2+2x \phantom{+8} \end{array}$$

حالا اعمال چهار گانه بالا یعنی تقسیم، ضرب، تفریق، پایین آوردن را برای  $2x + 3x^2 -$  انجام می دهیم. نتیجه را در ذیل ملاحظه می کنید.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x \\
 x - 2 \overline{) x^3 - 5x^2 + 2x + 8} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 8} \\
 -3x^2 + 2x \phantom{+ 8} \\
 \underline{-3x^2 + 6x} \phantom{+ 8} \\
 -4x + 8
 \end{array}$$

اعمال چهار گانه را برای  $8 + 4x -$  تکرار می کنیم. نتیجه را در زیر ملاحظه کنید.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x - 4 \\
 x - 2 \overline{) x^3 - 5x^2 + 2x + 8} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 8} \\
 -3x^2 + 2x \phantom{+ 8} \\
 \underline{-3x^2 + 6x} \phantom{+ 8} \\
 -4x + 8 \\
 \underline{-4x + 8} \\
 0
 \end{array}$$

باقیمانده Remainder صفر است.

مثال ۴ اعمال انجام شده در هر مرحله را ملاحظه می کنید.

$$\begin{array}{r}
 x^2 \\
 3x + 2 \overline{) 3x^3 + 5x^2 - 7x + 5} \\
 \underline{3x^3 + 2x^2} \phantom{- 7x + 5} \\
 3x^2 - 7x + 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x \\
 3x+2 \overline{) 3x^3 + 5x^2 - 7x + 5} \\
 \underline{3x^3 + 2x^2} \phantom{- 7x + 5} \\
 3x^2 - 7x \phantom{+ 5} \\
 \underline{3x^2 + 2x} \phantom{+ 5} \\
 -9x + 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 3 \\
 3x+2 \overline{) 3x^3 + 5x^2 - 7x + 5} \\
 \underline{3x^3 + 2x^2} \phantom{- 7x + 5} \\
 3x^2 - 7x \phantom{+ 5} \\
 \underline{3x^2 + 2x} \phantom{+ 5} \\
 -9x + 5 \\
 \underline{-9x - 6} \\
 11
 \end{array}$$

اینجا باقیمانده ۱۱ است.

مثال ۵ کلیه مراحل را یک جا ملاحظه می کنید. اعمال تفریق با تغییر علامت هر جمله که با رنگ قرمز نوشته شده نشان داده می شود.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 5 \\
 2x-5 \overline{) 2x^3 - 9x^2 + 0x + 15} \\
 \underline{-2x^3 + 5x^2} \phantom{+ 0x + 15} \\
 -4x^2 + 0x + 15 \\
 \underline{+4x^2 + 10x} \phantom{+ 15} \\
 -10x + 15 \\
 \underline{+10x + 25} \\
 -10
 \end{array}$$

مثال ۶

$$\begin{array}{r}
 4x^2 - x - 7 \\
 x^2 + x + 2 \overline{) 4x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 2x + 1} \\
 \underline{-4x^4 + 4x^3 + 8x^2} \phantom{+ 1} \\
 -x^3 - 8x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{+x^3 + x^2 + 2x} \phantom{+ 1} \\
 -7x^2 + 4x + 1 \\
 \underline{+7x^2 + 7x + 14} \\
 11x + 15
 \end{array}$$

مثال ۷

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 4 \\
 3x + 1 \overline{) 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3} \\
 \underline{-3x^3 + 1x^2} \phantom{+ 10x - 3} \\
 -6x^2 + 10x - 3 \\
 \underline{+6x^2 + 2x} \phantom{- 3} \\
 12x - 3 \\
 \underline{-12x + 4} \\
 -7
 \end{array}$$

## تمرینات ۳.۳

تقسیم کنید.

$$۱) \frac{۴a^۲ + ۸a}{۲a}$$

$$۲) \frac{۱۲a^۵b^۲ + ۱۶a^۴b}{۴a^۴b}$$

$$۳) \frac{۴x^۲y^۲ + ۶xy^۲ - ۴y^۲}{۲x^۲y}$$

$$۴) (x^۲ - ۹x - ۱۰) \div (x + ۱)$$

$$۵) (x^۲ + ۹x + ۱۴) \div (x + ۷)$$

$$۶) (۲x^۴ + x^۳ + x^۲ + ۰x - ۲) \div (۲x + ۳)$$

$$۷) (۴x^۳ - ۲x^۲ + ۰x - ۳) \div (۲x^۲ + ۰x - ۱)$$

$$۸) (x^۳ - ۴x^۲ + ۲x + ۵) \div (x - ۲)$$

$$۹) (x^3 - 2x^2 + 0x - 4) \div (x - 3)$$

$$۱۰) (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) \div (x - 2)$$

### پاسخ تمرینات ۳.۳

تقسیم کنید.

$$۱) \frac{4a^2 + 8a}{2a} = \frac{4a^2}{2a} + \frac{8a}{2a} = 2a + 4$$

$$۲) \frac{12a^5b^2 + 16a^4b}{4a^4b} = \frac{12a^5b^2}{4a^4b} + \frac{16a^4b}{4a^4b} = 3ab + 4$$

$$۳) \frac{4x^2y^2 + 6xy^2 - 4y^2}{2x^2y} = \frac{4x^2y^2}{2x^2y} + \frac{6xy^2}{2x^2y} - \frac{4y^2}{2x^2y} = 2y + \frac{3y}{x} - \frac{2y}{x^2}$$

$$۴) (x^2 - 9x - 10) \div (x + 1)$$

$$\begin{array}{r} x-10 \\ x+1 \overline{) x^2-9x-10} \\ \underline{-x^2+1x} \phantom{-10} \\ -10x-10 \\ \underline{+10x+10} \\ 0 \end{array}$$



$$۵) \quad (x^2 + 9x + 14) \div (x + 7)$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+7 \overline{) x^2+9x+14} \\ \underline{-x^2+7x} \phantom{+14} \\ 2x+14 \\ \underline{-2x+14} \\ 0 \end{array}$$

$$۶) \quad (2x^4 + x^3 + x^2 + 0x - 2) \div (2x + 3)$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + 2x - 3 \\ 2x+3 \overline{) 2x^4+x^3+x^2+0x-2} \\ \underline{2x^4+3x^3} \phantom{+x^2+0x-2} \\ -2x^3+x^2 \phantom{+0x-2} \\ \underline{-2x^3-3x^2} \phantom{+0x-2} \\ 4x^2+0x \phantom{-2} \\ \underline{4x^2+6x} \phantom{-2} \\ -6x-2 \\ \underline{-6x-9} \\ 7 \end{array}$$

$$۷) \quad (۴x^۳ - ۲x^۲ + ۰x - ۳) \div (۲x^۲ + ۰x - ۱)$$

$$\text{Step 1: } 2x^2 + 0x - 1 \overline{) 4x^3 - 2x^2 + 0x - 3}$$

$$\text{Step 2, 3, 4: } 2x^2 + 0x - 1 \overline{) 4x^3 - 2x^2 + 0x - 3} \quad \begin{array}{r} 2x \\ 4x^3 + 0x^2 - 2x \\ \hline - 2x^2 + 2x - 3 \end{array}$$

$$\text{Step 5, 6, 7: } 2x^2 + 0x - 1 \overline{) 4x^3 - 2x^2 + 0x - 3} \quad \begin{array}{r} 2x - 1 \\ 4x^3 + 0x^2 - 2x \\ \hline - 2x^2 + 2x - 3 \\ - 2x^2 + 0x + 1 \\ \hline 2x - 4 \end{array}$$

$$\text{Step 8: } 2x - 1 + \frac{2x - 4}{2x^2 - 1}$$

$$۸) (x^3 - 4x^2 + 2x + 5) \div (x - 2)$$

$$\text{Step 1: } x - 2 \overline{) x^3 - 4x^2 + 2x + 5}$$

$$\text{Step 2, 3, 4: } x - 2 \overline{) x^3 - 4x^2 + 2x + 5} \\ \begin{array}{r} x^2 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -2x^2 + 2x \end{array}$$

$$\text{Step 5, 6, 7: } x - 2 \overline{) x^3 - 4x^2 + 2x + 5} \\ \begin{array}{r} x^2 - 2x \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -2x^2 + 2x \\ -2x^2 + 4x \\ \hline -2x + 5 \end{array}$$

$$\text{Step 8, 9, 10: } x - 2 \overline{) x^3 - 4x^2 + 2x + 5} \\ \begin{array}{r} x^2 - 2x - 2 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -2x^2 + 2x \\ -2x^2 + 4x \\ \hline -2x + 5 \\ -2x + 4 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\text{Step 11: } x^2 - 2x - 2 + \frac{1}{x - 2}$$

$$۹) \quad (x^3 - 2x^2 + 0x - 4) \div (x - 3)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 3 \\ x - 3 \overline{) x^3 - 2x^2 + 0x - 4} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \phantom{+ 0x - 4} \\ +x^2 + 0x \phantom{- 4} \\ \underline{+x^2 - 3x} \phantom{- 4} \\ +3x - 4 \\ \underline{+3x - 9} \\ +5 \end{array}$$

$$۱۰) \quad (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) \div (x - 2)$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 \\ x - 2 \overline{) x^3 - 5x^2 + 2x + 8} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 2x + 8} \\ -3x^2 + 2x \phantom{+ 8} \\ \underline{-3x^2 + 6x} \phantom{+ 8} \\ -4x + 8 \\ \underline{-4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

## ۳.۴ بزرگ ترین عامل مشترک و فاکتور گیری از طریق گروه بندی

## The Greatest Common Factor and Factoring by Grouping

**فاکتور گیری** عکس عمل ضرب است. فاکتور گیری عمل نوشتن یک چند جمله ای به صورت ضرب است

→  
فاکتور گیری

$$6x^2 + 13x - 5 = (3x - 1)(2x + 5)$$

←  
ضرب کردن

بتدریج در این بخش و بخش های بعدی ، روش های فاکتور گیری چند جمله ای ها را بررسی می کنیم.

**فاکتور گرفتن از بزرگ ترین عامل مشترک Factoring out the Greatest Common Factor**

برای فاکتور گیری از یک چند جمله ای ، قبل از هر چیز ، با استفاده از خاصیت پخش پذیری ، از بزرگ ترین عامل مشترک در جمله های تشکیل دهنده آن فاکتور می گیریم.

**بزرگ ترین عامل مشترک** یک چند جمله ای ، آن عامل مشترکی است با بزرگ ترین توان ها و بزرگ ترین ضریب عددی. مثلاً عوامل مشترک در چند جمله ای زیر ۶ و  $x^2$  هستند

$$6x^3 - 18x^2$$

در نتیجه حاصل ضرب  $6x^2$  بزرگ ترین عامل مشترک است. طبق خاصیت پخش پذیری خواهیم داشت.

$$6x^3 - 18x^2 = 6x^2 \times x - 6x^2 \times 3 = 6x^2(x - 3)$$

**مثال - فاکتور بگیرد.**

$$1) \quad 8x + 4 = 4(2x) + 4(1) = 4(2x + 1)$$

$$2) \quad 6x^2 - 3x^3 = 3x^2(2) - 3x^2(x) = 3x^2(2 - x)$$

$$3) \quad 3y + 1 \text{ هیچ عامل مشترکی جز عدد یک وجود ندارد}$$

$$4) \quad 17x^3y^2 - 34x^4y^2 = 17x^3y^2(1) - 17x^3y^2(2x) = 17x^3y^2(1 - 2x)$$

**توجه** - برای اینکه مطمئن شویم که درست فاکتور گیری کرده ایم ، عوامل را در هم ضرب کنید و ببینید حاصل ضرب ، همان چند جمله ای اصلی است یا نه .

فاکتور بگیرید.

$$۵) \quad -۳x^۳y + ۲x^۲y - ۵xy = xy(-۳x^۲ + ۲x - ۵)$$

در مثال ۵ عامل مشترک  $-xy$  هم می تواند باشد.

$$-۳x^۳y + ۲x^۲y - ۵xy = -xy(۳x^۲ - ۲x + ۵)$$

$$۶) \quad ۲(x - ۵) + ۳a(x - ۵) = (x - ۵)(۲ + ۳a)$$

$$۷) \quad ۷x(x^۲ + ۳y) - (x^۲ + ۳y) = (x^۲ + ۳y)(۷x - ۱)$$

فاکتور گرفتن از طریق گروه بندی **Factoring by Grouping** گاهی اوقات ممکن است جملات یک چند جمله ای را گروه بندی کنیم و سپس عوامل مشترک در هر گروه را پیدا کنیم. مثال

$$\begin{aligned} ۸) \quad ab - ۶a + ۲b - ۱۲ &= (ab - ۶a) + (۲b - ۱۲) = a(b - ۶) + ۲(b - ۶) \\ &= (b - ۶)(a + ۲) \end{aligned}$$

$$۹) \quad x^۳ + ۵x^۲ + ۳x + ۱۵ = x^۲(x + ۵) + ۳(x + ۵) = (x^۲ + ۳)(x + ۵)$$

$$\begin{aligned} ۱۰) \quad m^۲n^۲ + m^۲ - ۲n^۲ - ۲ &= (m^۲n^۲ + m^۲) + (-۲n^۲ - ۲) = m^۲(n^۲ + ۱) - ۲(n^۲ + ۱) \\ &= (n^۲ + ۱)(m^۲ - ۲) \end{aligned}$$

$$۱۱) \quad xy + ۲x - y - ۲ = (xy + ۲x) - (y + ۲) = x(y + ۲) - (y + ۲) = (y + ۲)(x - ۱)$$

تمرینات ۳. ۴

از بزرگ ترین عامل مشترک فاکتور بگیرید.

$$۱) \quad ۱۸x - ۱۲$$

$$۲) \quad ۴y^۲ - ۱۶xy^۳$$

$$۳) \quad ۶x^۵ - ۸x^۴ + ۲x^۳$$

$$۴) \quad ۸a^۳b^۳ - ۴a^۲b^۲ + ۴ab + ۱۶ab^۲$$

$$۵) \quad ۶(x + ۳) + ۳a(x + ۳)$$

$$۶) \quad ۲x(z + ۷) + (z + ۷)$$

$$۷) \quad ۳x(x^۲ + ۵) - ۲(x^۲ + ۵)$$

از طریق گروه بندی ، فاکتور بگیرید .

$$۸) \quad ab + ۳a + ۲b + ۶$$

$$۹) \quad ac + ۴a - ۲c - ۸$$

$$۱۰) \quad ۲xy - ۳x - ۴y + ۶$$

$$۱۱) \quad x^۳ + ۳x^۲ + ۴x + ۱۲$$

$$۱۲) \quad x^۳ - x^۲ - ۲x + ۲$$

$$۱۳) \quad ۲x^۲ + ۳xy + ۴x + ۶y$$

$$۱۴) \quad ۵x^2 + ۵xy - ۳x - ۳y$$

$$۱۵) \quad ۶xy + ۱۰x + ۹y + ۱۵$$

۱۶ - می خواهیم یک جعبه سر باز بسازیم. اگر قاعده آن مربع، و به اضلاع  $x$  سانتی متر و ارتفاع آن  $۱۰$  سانتی متر باشد. معین کنید چه مقدار مقوا برای ساختن این جعبه در باز لازم است. پاسخ خود را به شکل فاکتور شده بنویسید.

### پاسخ تمرینات ۳.۴

از بزرگ ترین عامل مشترک فاکتور بگیرید.

$$۱) \quad ۱۸x - ۱۲ = ۶(۳x - ۲)$$

$$۲) \quad ۴y^2 - ۱۶xy^3 = ۴y^2(۱ - ۴xy)$$

$$۳) \quad ۶x^5 - ۸x^4 + ۲x^3 = ۲x^3(۳x^2 - ۴x + ۱)$$

$$۴) \quad ۸a^3b^3 - ۴a^2b^2 + ۴ab + ۱۶ab^2 = ۴ab(a^2b^2 - ab + ۱ + ۴b)$$

$$۵) \quad ۶(x + ۳) + ۳a(x + ۳) = (x + ۳)(۶ + ۳a)$$

$$۶) \quad ۲x(z + ۷) + (z + ۷) = (z + ۷)(۲x + ۱)$$



$$۷) \quad ۳x(x^۲ + ۵) - ۲(x^۲ + ۵) = (x^۲ + ۵)(۳x - ۲)$$

از طریق گروه بندی ، فاکتور بگیرید .

$$۸) \quad ab + ۳a + ۲b + ۶ = (ab + ۳a) + (۲b + ۶) = a(b + ۳) + ۲(b + ۳) = (b + ۳)(a + ۲)$$

$$۹) \quad ac + ۴a - ۲c - ۸ = (ac + ۴a) - (۲c + ۸) = a(c + ۴) - ۲(c + ۴) = (c + ۴)(a - ۲)$$

$$۱۰) \quad ۲xy - ۳x - ۴y + ۶ = (۲xy - ۳x) + (-۴y + ۶) = x(۲y - ۳) - ۲(۲y - ۳) \\ = (۲y - ۳)(x - ۲)$$

$$۱۱) \quad x^۳ + ۳x^۲ + ۴x + ۱۲ = (x^۳ + ۳x^۲) + (۴x + ۱۲) = x^۲(x + ۳) + ۴(x + ۳) \\ = (x + ۳)(x^۲ + ۴)$$

$$۱۲) \quad x^۳ - x^۲ - ۲x + ۲ = (x^۳ - x^۲) + (-۲x + ۲) = x^۲(x - ۱) - ۲(x - ۱) \\ = (x - ۱)(x^۲ - ۲)$$

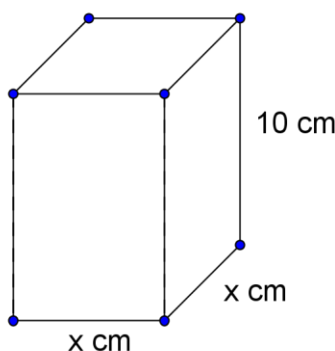
$$۱۳) \quad ۲x^۲ + ۳xy + ۴x + ۶y = (۲x^۲ + ۳xy) + (۴x + ۶y) = x(۲x + ۳y) + ۲(۲x + ۳y) \\ = (۲x + ۳y)(x + ۲)$$

$$۱۴) \quad ۵x^۲ + ۵xy - ۳x - ۳y = (۵x^۲ + ۵xy) - (۳x + ۳y) = ۵x(x + y) - ۳(x + y)$$

$$= (x + y)(5x - 3)$$

$$\begin{aligned} 15) \quad 6xy + 10x + 9y + 15 &= (6xy + 10x) + (9y + 15) = 2x(3y + 5) + 3(3y + 5) \\ &= (3y + 5)(2x + 3) \end{aligned}$$

۱۶ - می خواهیم یک جعبه سر باز بسازیم. اگر قاعده آن مربع و به اندازه  $x$  سانتی متر و ارتفاع آن  $10$  سانتی متر باشد. معین کنید چه مقدار مقوا برای ساختن این جعبه در باز لازم است. پاسخ خود را به شکل فاکتور شده بنویسید.



**حل** - جعبه مورد نظر ۵ سطح مقوایی دارد، زیرا طبق فرض مساله سطح بالایی آن باز است. مساحت سطح پایینی این جعبه  $S_1 = x^2$  است چون طبق فرض مساله قاعده این جعبه مربع است به اضلاع  $x$  سانتی متر. دو سطح طرف راست و چپ و دو سطح جلو و عقب این جعبه به شکل مستطیل است به اضلاع  $x$  سانتی متر و  $10$  سانتی متر. پس مساحت هر یک از این سطوح  $S_2 = 10x$  و چون چهار سطح جانبی داریم، پس خواهیم داشت

$$S = S_1 + 4S_2 = x^2 + 4(10x) = x^2 + 40x = x(x + 40)$$

## ۳.۵ - فاکتور گرفتن از سه جمله ای ها Factoring Trinomials

فاکتور گرفتن از سه جمله ای های به شکل  $x^2 + bx + c$

در این بخش روش های فاکتور گیری از سه جمله ای ها را مورد بحث قرار می دهیم.

چون  $(x - 2)(x + 5) = x^2 + 3x - 10$  پس می گویم

$(x - 2)(x + 5)$  شکل فاکتور گرفته شده سه جمله ای  $x^2 + 3x - 10$  است.

با دقت بیشتری به اینکه چگونه  $(x - 2)$  و  $(x + 5)$  در هم ضرب شده اند ، یک الگو برای فاکتور گیری از سه جمله ای های به شکل  $x^2 + bx + c$  بدست می آوریم.

$$\begin{array}{rcccl}
 (x - 2) & \times & (x + 5) & = & x^2 + 3x - 10 \\
 \hline
 x & \times & x & = & x^2 \\
 -2 & + & 5 & = & 3 \\
 \hline
 -2 & \times & 5 & = & -10
 \end{array}$$

خلاصه الگوی بالا به صورت زیر بیان می شود.

برای فاکتور گرفتن از سه جمله ای به شکل  $x^2 + bx + c$

دو عدد پیدا کنید که حاصل ضرب آنها بشود  $c$  و مجموع آنها بشود  $b$

پس شکل فاکتور گرفته شده  $x^2 + bx + c$  به صورت زیر خواهد بود.

$$(x + \text{عدد دیگر})(x + \text{یکی از اعداد})$$

مثال - فاکتور بگیرد.

$$1) \quad x^2 + 10x + 16$$

در این مثال  $b = 10$  و  $c = 16$  است. پس باید دو عدد پیدا کنیم که حاصل ضرب آنها بشود ۱۶ و مجموع آنها بشود ۱۰.

چون اعداد صحیح ما باید حاصل ضرب مثبت و مجموع مثبت داشته باشند، پس ما به دنبال فاکتورهای مثبت عدد ۱۶ هستیم.

فاکتورهای مثبت عدد ۱۶      مجموع فاکتورها

$$1 \times 16 \qquad 1 + 16 = 17$$

$$4 \times 4 \qquad 4 + 4 = 8$$

$$2 \times 8 \qquad 2 + 8 = 10$$

پس اعداد ۲ و ۸ دو عدد دلخواه ما است. لذا

$$x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$$

مثال ۲ - فاکتور بگیرد.

$$2) \quad x^2 - 12x + 35$$

اینجا، دو عدد می‌خواهیم که حاصل ضرب آنها بشود ۳۵ و مجموع آنها بشود ۱۲.

چون اعداد صحیح ما باید حاصل ضرب مثبت و مجموع منفی داشته باشند، پس باید فقط فاکتورهای منفی عدد ۳۵ را در نظر بگیریم. این دو عدد ۷- و ۵- هستند. لذا

$$x^2 - 12x + 35 = (x - 5)(x - 7)$$

مثال - فاکتور بگیرد

$$3) \quad 5x^3 - 30x^2 - 35x = 5x(x^2 - 6x - 7)$$

در این مثال باید دو عدد پیدا کنیم که حاصل ضرب آنها ۷- باشد، بنا بر این یکی از این دو عدد باید مثبت باشد و دیگری منفی. و چون مجموع این دو عدد باید منفی باشد پس عدد بزرگ تر باید منفی باشد و عدد کوچک تر مثبت. لذا تنها دو عددی که این شرایط را دارا هستند ۱ و ۷- هستند.

$$= 5x(x^2 - 6x - 7) = 5x(x + 1)(x - 7)$$

## مثال ۴

$$۴) \quad ۲n^۲ - ۳۸n + ۸۰ = ۲(n^۲ - ۱۹n + ۴۰)$$

سه جمله ای  $n^۲ - ۱۹n + ۴۰$  را نمی توانیم فاکتور بگیریم. چنین چند جمله ای را **چند جمله ای اول Prime Polynomial** می نامند.

فاکتور گرفتن از سه جمله ای های به شکل  $ax^۲ + bx + c$

برای بدست آوردن یک الگو، مثالی می زنیم.

۵ - از سه جمله ای  $۲x^۲ + ۱۱x + ۱۵$  فاکتور بگیرید.

فاکتورهای  $۲x^۲$  عبارتند از  $x$  و  $۲x$

این دو عامل را به عنوان اولین جمله های دو جمله ای ها می نویسیم.

$$۲x^۲ + ۱۱x + ۱۵ = (۲x + \quad)(x + \quad)$$

حالا عوامل مختلف عدد ۱۵ را امتحان می کنیم تا جمله وسطی یعنی  $۱۱x$  بدست آید. اینجا نیز عوامل مثبت عدد ۱۵ را در نظر می گیریم چون جمله وسطی ۱۱ مثبت است. عوامل مثبت عدد ۱۵، اعداد ۱ و ۱۵ هستند و همچنین ۳ و ۵

$$(۲x + ۱)(x + ۱۵)$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{۱x} \\ \underbrace{۳۰x} \\ \hline ۳۱x \end{array}$$

$$(۲x + ۳)(x + ۵)$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{۳x} \\ \underbrace{۱۰x} \\ \hline ۱۳x \end{array}$$

$$(2x + 15)(x + 1)$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{15x} \\ \underbrace{2x} \\ \hline 17x \end{array}$$

$$(2x + 5)(x + 3)$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{5x} \\ \underbrace{6x} \\ \hline 11x \end{array}$$

پس آخرین الگو ، مورد نظر ما است.

$$2x^2 + 11x + 15 = (2x + 5)(x + 3)$$

### فاکتور گرفتن از سه جمله ای های به شکل $ax^2 + bx + c$

۱ - تمام جفت های عوامل  $ax^2$  را بنویسید.

۲ - تمام جفت های عوامل  $c$  را بنویسید.

۳ - ترکیب های مختلف این عوامل را امتحان کنید تا جمله وسطی  $bx$  بدست آید.

**مثال فاکتور بگیرید.**

$$۶) \quad 3x^2 - x - 4$$

فاکتور های  $3x^2$  جملات  $x$  و  $3x$  هستند .

جفت فاکتور های  $-4$  عبارتند از  $2 \times -2$  و  $-2 \times 2$  و  $-1 \times 4$  و  $-4 \times 1$

پس از امتحان زوج فاکتور های مختلف بالا نتیجه می گیریم که

$$3x^2 - x - 4 = (3x - 4)(x + 1)$$

روش بالا گاهی اوقات سخت و وقت گیر است. این بستگی به سه جمله ای داده شده و مهارت شما در انتخاب صحیح زوج فاکتور ها دار. معمولا اگر جمله اول یعنی  $ax^2$  فقط یک زوج فاکتور داشته باشد مانند مثال ۶ روش بالا آسان تر است. در مثال ۶ تنها زوج فاکتور های  $3x^2$  عبارت بودند از  $x$  و  $3x$  البته زوج فاکتور  $-x$  و  $-3x$  هم هست ولی بیشتر اوقات فاکتور های مثبت جمله اول در نظر می گیریم. در صورت سخت بودن مساله از روش زیر استفاده کنید.

### فاکتور گیری از $ax^2 + bx + c$ از طریق گروه بندی

- ۱ - دو عدد پیدا کنید که حاصل ضرب آنها بشود  $ac$  و مجموع آنها بشود  $b$
  - ۲ - جمله وسطی سه جمله ای یعنی  $bx$  را بصورت مجموع دو فاکتوری که در مرحله اول بدست آوردید، بنویسید.
  - ۳ - از طریق گروه بندی فاکتور بگیرد.
- مثال - فاکتور بگیرد.**

$$۷) \quad 6x^2 + 13x + 6$$

- ۱ - دو عدد پیدا می کنیم که حاصل ضرب آنها بشود  $ac$  یعنی  $36 = 6 \times 6$  و مجموع آنها بشود  $b$  یعنی ۱۳ این دو عدد ۴ و ۹ هستند.
- ۲ - حال جمله وسطی یعنی  $13x$  را به صورت  $4x + 9x$  می نویسیم.
- ۳ - از طریق گروه بندی ، فاکتور می گیریم.

$$\begin{aligned} 6x^2 + 13x + 6 &= 6x^2 + 4x + 9x + 6 = (6x^2 + 4x) + (9x + 6) \\ &= 2x(3x + 2) + 3(3x + 2) = (3x + 2)(2x + 3) \end{aligned}$$

پس برای فاکتور گیری از سه جمله ای های به شکل  $ax^2 + bx + c$  از هر روش که آسانتر باشد ، استفاده می کنیم.

**مثال - فاکتور بگیرد**

$$۸) \quad 12x^2y - 22x^2y + 8xy = 2xy(6x^2 - 11x + 4)$$

دو عدد پیدا می کنیم که حاصل ضرب آنها بشود  $24 = 4 \times 6$  و مجموع آنها بشود  $-11$

این دو عدد ۸ و ۳- هستند. پس

$$\begin{aligned}
 &= 2xy(6x^2 - 3x - 8x + 4) = 2xy[(6x^2 - 3x) - (8x - 4)] \\
 &= 2xy[3x(2x - 1) - 4(2x - 1)] \\
 &= 2xy[(2x - 1)(3x - 4)] = 2xy(2x - 1)(3x - 4)
 \end{aligned}$$

**فاکتور گیری از طریق جانشینی Factoring by Substitution**

گاهی اوقات یک چند جمله ای ظاهراً پیچیده با جانشین کردن ساده می شود و سپس می توان از آن فاکتور گرفت.

$$9) \quad 2(a+3)^2 - 5(a+3) - 7$$

اگر  $x$  را جانشین  $(a+3)$  کنیم سه جمله ای به صورت زیر ساده می شود

$$2(a+3)^2 - 5(a+3) - 7 = 2x^2 - 5x - 7$$

اینک سه جمله ای ساده شده را فاکتور گیری می کنیم.

باید دو عدد پیدا کنیم که حاصل ضرب آنها بشود  $-14 = (-7) \times 2$  و مجموع آنها بشود  $-5$ .

این دو عدد ۲ و ۷- هستند. پس

$$2x^2 - 5x - 7 = 2x^2 + 2x - 7x - 7 = 2x(x+1) - 7(x+1) = (x+1)(2x-7)$$

حال عمل جانشینی را بر می گردانیم. یعنی بجای  $x$  می نویسیم  $(a+3)$ 

$$= [(a+3)+1][2(a+3)-7] = [a+3+1][2a+6-7] = (a+4)(2a-1)$$

در نهایت خواهیم داشت

$$2(a+3)^2 - 5(a+3) - 7 = (a+4)(2a-1)$$

$$10) \quad 5x^4 + 29x^2 - 42$$



بجای  $x^2$  می نویسیم  $y$  پس خواهیم داشت

$$5y^2 + 29y - 42 = (5y - 6)(y + 7)$$

اینک بجای  $y$  می نویسیم  $x^2$

$$5x^4 + 29x^2 - 42 = (5x^2 - 6)(x^2 + 7)$$

### تمرینات ۳.۵

از سه جمله ای های زیر فاکتور بگیرید .

۱)  $x^2 + 9x + 18$

۲)  $x^2 - 12x + 32$

۳)  $x^2 + 10x - 24$

۴)  $x^2 - 2x - 24$

۵)  $3x^2 - 18x + 24$

۶)  $4x^2z + 28xz + 40z$

۷)  $2x^2 + 30x - 108$

$$۸) \quad x^2 - 24x - 81$$

$$۹) \quad x^2 - 15x - 54$$

$$۱۰) \quad 3x^2 - 6x + 3$$

$$۱۱) \quad 2x^2 + 2x - 12$$

$$۱۲) \quad x^2 + 6xy + 5y^2$$

(۱۳)

تمام اعداد صحیح اعم از مثبت و منفی برای  $b$  پیدا کنید بطوری که سه جمله ای  $x^2 + bx + 6$  قابل فاکتور گیری باشد.

از سه جمله ای های زیر فاکتور بگیرید.

$$۱۴) \quad 5x^2 + 16x + 3$$

$$۱۵) \quad 2x^2 - 11x + 12$$

$$۱۶) \quad 2x^2 + 25x - 20$$

$$۱۷) \quad 4x^2 - 12x + 9$$

$$۱۸) \quad ۱۲x^2 + ۱۰x - ۵۰$$

$$۱۹) \quad ۳y^4 - y^3 - ۱۰y^2$$

$$۲۰) \quad ۶x^3 + ۸x^2 + ۲۴x$$

$$۲۱) \quad x^2 + ۸xz + ۷z^2$$

$$۲۲) \quad ۲x^2 - ۵xy - ۳y^2$$

$$۲۳) \quad x^2 - x - ۱۲$$

$$۲۴) \quad ۲۸y^2 + ۲۲y + ۴$$

$$۲۵) \quad ۲x^2 + ۱۵x - ۲۷$$

$$۲۶) \quad ۳x^2 - ۵x - ۲$$

$$۲۷) \quad ۸x^2 - ۲۶x + ۱۵$$

$$۲۸) \quad ۱۸x^4 + ۲۱x^3 + ۶x^2$$

$$۲۹) \quad ۳a^۲ + ۱۲ab + ۱۲b^۲$$

از طریق جانشینی فاکتور بگیرید.

$$۳۰) \quad x^۶ + x^۲ - ۶$$

$$۳۱) \quad (۵x + ۱)^۲ + ۸(۵x + ۱) + ۷$$

$$۳۲) \quad x^۶ - ۷x^۲ + ۱۲$$

$$۳۳) \quad (a + ۵)^۲ - ۵(a + ۵) - ۲۴$$

$$۳۴) \quad ۲x^۶ + ۳x^۲ - ۹$$

پاسخ تمرینات ۳.۵

از سه جمله ای های زیر فاکتور بگیرید .

$$۱) \quad x^۲ + ۹x + ۱۸ = (x + ۶)(x + ۳)$$

$$۲) \quad x^۲ - ۱۲x + ۳۲ = (x - ۴)(x - ۸)$$

$$۳) \quad x^۲ + ۱۰x - ۲۴ = (x + ۱۲)(x - ۲)$$

$$۴) \quad x^۲ - ۲x - ۲۴ = (x - ۶)(x + ۴)$$

$$۵) \quad 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x - 4)(x - 2)$$

$$۶) \quad 4x^2z + 28xz + 40z = 4z(x^2 + 7x + 10) = 4z(x + 2)(x + 5)$$

$$۷) \quad 2x^2 + 30x - 108 = 2(x^2 + 15x - 54) = 2(x + 18)(x - 3)$$

$$۸) \quad x^2 - 24x - 81 = (x - 27)(x + 3)$$

$$۹) \quad x^2 - 15x - 54 = (x - 18)(x + 3)$$

$$۱۰) \quad 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)(x - 1) = 3(x - 1)^2$$

$$۱۱) \quad 2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6) = 2(x + 3)(x - 2)$$

$$۱۲) \quad x^2 + 6xy + 5y^2 = (x + 5y)(x + y)$$

(۱۳)

تمام اعداد صحیح اعم از مثبت و منفی برای  $b$  پیدا کنید بطوری که سه جمله ای  $x^2 + bx + 6$  قابل فاکتور گیری باشد.

پاسخ

اینجا  $c = 6$  یعنی حاصل ضرب دو عدد 6 است. و مجموع آنها باید  $b$  باشد.

کلیه دو عدد هایی که حاصل ضرب آنها 6 است می نویسیم. این زوج Pair عددها عبارتند از

$$1 \text{ و } 6 \quad -1 \text{ و } -6 \quad 2 \text{ و } 3 \quad -2 \text{ و } -3$$

حال  $b$  باید مجموع هر یک از زوج عدد های بالا باشد. یعنی

$$b = 1 + 6 = 7$$

$$b = -1 - 6 = -7$$

$$b = 2 + 3 = 5$$

$$b = -2 - 3 = -5$$

می توانیم امتحان کنیم

$$x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$$

$$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

از سه جمله ای های زیر فاکتور بگیرید.

$$14) \quad 5x^2 + 16x + 3 = 5x^2 + x + 15x + 3 = x(5x + 1) + 3(5x + 1) = (5x + 1)(x + 3)$$

$$15) \quad 2x^2 - 11x + 12 = 2x^2 - 8x - 3x + 12 = 2x(x - 4) - 3(x - 4) = (x - 4)(2x - 3)$$

$$16) \quad 2x^2 + 25x - 20 \text{ سه جمله ای اول است یعنی نمی توان از آن فاکتور گرفت}$$

$$\begin{aligned} ۱۷) \quad ۴x^2 - ۱۲x + ۹ &= ۴x^2 - ۶x - ۶x + ۹ = ۲x(۲x - ۳) - ۳(۲x - ۳) = (۲x - ۳)(۲x - ۳) \\ &= (۲x - ۳)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۸) \quad ۱۲x^2 + ۱۰x - ۵ &= ۲(۶x^2 + ۵x - ۲.۵) = ۲[(۶x^2 + ۱۵x) + (-۱۰x - ۲.۵)] \\ &= ۲[۳x(۲x + ۵) - ۵(۲x + ۵)] = ۲(۲x + ۵)(۳x - ۵) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۹) \quad ۳y^2 - y^2 - ۱۰y &= y^2(۳y^2 - y - ۱۰) = y^2(۳y^2 - ۶y + ۵y - ۱۰) \\ &= y^2[۳y(y - ۲) + ۵(y - ۲)] = y^2(y - ۲)(۳y + ۵) \end{aligned}$$

$$۲۰) \quad ۶x^2 + ۸x^2 + ۲۴x = ۲x(۳x^2 + ۴x + ۱۲)$$

بیش از این نمی توان فاکتور گرفت

$$۲۱) \quad x^2 + ۸xz + ۷z^2$$

چون ضریب  $x^2$  یک است پس این سه جمله ای به شکل  $ax^2 + bx + c$  است. اینجا  $c = ۷z^2$  است و  $b = ۸z$ . بنا بر این باید دو جمله پیدا کنیم که حاصل ضرب آنها بشود  $۷z^2$  و مجموع آنها بشود  $۸z$ . آن دو جمله  $z$  و  $۷z$  هستند. پس

$$x^2 + ۸xz + ۷z^2 = (x + ۷z)(x + z)$$

$$۲۲) \quad ۲x^2 - ۵xy - ۳y^2$$

اینجا سه جمله ای به شکل  $ax^2 + bx + c$  است. سعی می کنیم دو جمله پیدا کنیم که حاصل ضرب آنها بشود  $-۳y^2$  و مجموع آنها بشود  $-۵y$ . زیرا  $ac = -۶y^2$   $c = -۳y^2$   $b = -۵y$   $a = ۲$

است. این دو جمله  $y$  و  $-۶y$  هستند. حال جمله وسطی را یعنی  $-۵xy$  با استفاده از مجموع دو جمله که پیدا کردیم می نویسیم.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5xy - 3y^2 &= 2x^2 + xy - 6xy - 3y^2 = x(2x + y) - 3y(2x + y) \\ &= (2x + y)(x - 3y) \end{aligned}$$

$$23) \quad x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

$$\begin{aligned} 24) \quad 28y^2 + 22y + 4 &= 2(14y^2 + 11y + 2) = 2(14y^2 + 7y + 4y + 2) \\ &= 2[7y(2y + 1) + 2(2y + 1)] = 2(2y + 1)(7y + 2) \end{aligned}$$

$$25) \quad 2x^2 + 15x - 27 = 2x^2 + 18x - 3x - 27 = 2x(x + 9) - 3(x + 9) = (x + 9)(2x - 3)$$

$$26) \quad 3x^2 - 5x - 2 = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x(x - 2) + 1(x - 2) = (x - 2)(3x + 1)$$

$$\begin{aligned} 27) \quad 8x^2 - 26x + 15 &= 8x^2 - 6x - 20x + 15 = 2x(4x - 3) - 5(4x - 3) \\ &= (4x - 3)(2x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28) \quad 18x^2 + 21x^3 + 6x^2 &= 3x^2(6x^2 + 7x + 2) = 3x^2(6x^2 + 3x + 4x + 2) \\ &= 3x^2[3x(2x + 1) + 2(2x + 1)] = 3x^2(2x + 1)(3x + 2) \end{aligned}$$

$$29) \quad 3a^2 + 12ab + 12b^2 = 3(a^2 + 4ab + 4b^2)$$

اینجا سه جمله ای به شکل  $x^2 + bx + c$  است. در نتیجه



$$a = 1 \quad b = 4b \quad c = 4b^2$$

پس باید دو جمله پیدا کنیم که حاصل ضرب آنها بشود  $4b^2$  و مجموع آنها بشود  $4b$ . این دو جمله  $2b$  و  $2b$  هستند.  
پس

$$\begin{aligned} &= 3(a^2 + 4ab + 4b^2) = 3(a^2 + 2ab + 2ab + 4b^2) = 3[a(a + 2b) + 2b(a + 2b)] \\ &= 3(a + 2b)(2 + 2b) = 3(a + 2b)^2 \end{aligned}$$

از طریق جانشینی فاکتور بگیرید.

$$30) \quad x^4 + x^2 - 6$$

فرض می کنیم  $x^2 = y$  پس

$$= y^2 + y - 6 = (y + 3)(y - 2)$$

حال بجای  $y$  می نویسیم  $x^2$  پس

$$= (x^2 + 3)(x^2 - 2)$$

$$31) \quad (5x + 1)^2 + 8(5x + 1) + 7$$

بجای  $(5x + 1)$  می نویسیم  $y$  پس

$$= y^2 + 8y + 7 = (y + 7)(y + 1)$$

بر می گردیم و بجای  $y$  می نویسیم  $(5x + 1)$  پس

$$= [(5x + 1) + 7][(5x + 1) + 1] = (5x + 8)(5x + 2)$$

$$32) \quad x^6 - 7x^3 + 12$$

بجای  $x^3$  می نویسیم  $y$  پس

$$= y^2 - 7y + 12 = (y - 4)(y - 3)$$

برمی گردیم و بجای  $y$  می گذاریم  $x^3$  پس

$$= (x^3 - 4)(x^3 - 3)$$

$$33) (a + 5)^2 - 5(a + 5) - 24$$

بجای  $(a + 5)$  می گذاریم  $x$  پس

$$= x^2 - 5x - 24 = (x - 8)(x + 3)$$

برمی گردیم و بجای  $x$  می نویسیم  $(a + 5)$  پس

$$= (a + 5 - 8)(a + 5 + 3) = (a - 3)(a + 8)$$

$$34) 2x^6 + 3x^2 - 9$$

بجای  $x^3$  می گذاریم  $y$  پس

$$= 2y^2 + 3y - 9 = 2y^2 + 6y - 3y - 9 = 2y(y + 3) - 3(y + 3) = (y + 3)(2y - 3)$$

برمی گردیم و بجای  $y$  می نویسیم  $x^3$  پس

$$= (x^3 + 3)(2x^3 - 3)$$

## ۳.۶ فاکتور گیری با استفاده از حاصل ضرب های مخصوص Factoring by Special Products

در بخش قبل حاصل ضرب های مخصوص را اتحاد های مهم نامیدیم و از این به بعد هم این نام را بکار می بریم.

## فاکتور گیری از سه جمله ای های مربع کامل Factoring Perfect Square Trinomials

برای روشن شدن مفهوم سه جمله ای مربع کامل مثالی می آوریم. مثلاً از سه جمله ای  $x^2 + 6x + 9$  فاکتور می گیریم. طبق روشی که در بخش قبل دیدیم، باید دو عدد پیدا کنیم که حاصل ضرب آنها بشود ۹ و مجموع آنها بشود ۶.

این دو عدد ۳ و ۳ هستند پس خواهیم داشت

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

سه جمله ای  $x^2 + 6x + 9$  را سه جمله ای مربع کامل می نامیم. زیرا فاکتور های آن دو دو جمله ای یکسان است. یک سه جمله ای، سه جمله ای مربع کامل است اگر بتوان آنرا به شکلی نوشت که اولین جمله آن مربع یک کمیت Quantity مانند  $a$ ، آخرین جمله آن مربع یک کمیت مانند  $b$  و جمله وسطی آن دو برابر حاصل ضرب  $a$  و  $b$  باشد.

فرمول های زیر را می توان برای فاکتور گیری از سه جمله ای های مربع کامل بکار برد.

سه جمله ای های مربع کامل

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

ملاحظه می کنید که

$$x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = (x + 3)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

مثال - فاکتور بگیرید.

$$۱) \quad m^2 + ۱۰m + ۲۵$$

ملاحظه می کنید که اولین جمله یک مربع است  $m^2 = (m)^2$

آخرین جمله هم یک مربع است  $۲۵ = ۵^2$

و جمله وسطی  $۱۰m = ۲ \times ۵ \times m$  پس

$$m^2 + 1 \circ m + 25 = m^2 + 2(m)(5) + 5^2 = (m + 5)^2$$

$$2) \quad 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + 1^2 = (2x + 1)^2$$

$$3) \quad 9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2(3x)(2) + (2)^2 = (3x - 2)^2$$

$$4) \quad 3a^2x - 12abx + 12b^2x = 3x(a^2 - 4ab + 4b^2) = 3x[a^2 - 2(a)(2b) + (2b)^2] \\ = 3x(a - 2b)^2$$

### فاکتورگیری از تفاوت دو مربع Factoring the Difference of Two Squares

در بخش قبل دیدیم که

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

مثال - فاکتور بگیرد.

$$5) \quad x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

$$6) \quad 16y^2 - 9 = (4y)^2 - 3^2 = (4y - 3)(4y + 3)$$

$$7) \quad 50 - 8y^2 = 2(25 - 4y^2) = 2[(5)^2 - (2y)^2] = 2(5 - 2y)(5 + 2y)$$

$$8) \quad x^2 - \frac{1}{4} = x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

نکته مهم - دو جمله ای  $x^2 + 9$  مجموع دو مربع است و نمی توان با استفاده از اعداد حقیقی از آن فاکتور گرفت. پس مجموع دو مربع که بزرگ ترین عامل مشترک آنها یک است معمولاً با استفاده از اعداد حقیقی قابل فاکتورگیری نیست.

$$9) \quad p^4 - 16 = (p^2)^2 - 4^2 = (p^2 - 4)(p^2 + 4) = (p - 2)(p + 2)(p^2 + 4)$$

ملاحظه کردید که از  $(p^2 - 4)$  هم فاکتور گرفتیم.

$$۱۰) (x+3)^2 - 3^2 = (x+3)^2 - 6^2 = [(x+3)-6][(x+3)+6] = (x-3)(x+9)$$

$$۱۱) x^2 + 4x + 4 - y^2 = (x^2 + 4x + 4) - y^2 = (x+2)^2 - y^2 \\ = [(x+2)-y][(x+2)+y] = (x+2-y)(x+2+y)$$

**فاکتورگیری از مجموع و تفاضل دو مکعب** Factoring the Sum and Difference of Two Cubes

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

می توانید درستی اتحاد های بالا را به صورت زیر امتحان کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) \\ = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

**مثال - فاکتور بگیرد.**

$$۱۲) x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$۱۳) p^3 + 27q^3 = p^3 + (3q)^3 = (p+3q)(p^2 - 3pq + 9q^2)$$

$$۱۴) y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y-4)(y^2 + 4y + 16)$$

$$۱۵) ۱۲۵q^3 - n^3q^3 = q^3(125 - n^3) = q^3(5^3 - n^3) = q^3(5-n)(25 + 5n + n^2)$$

توجه داشته باشید که از سه جمله ای  $(25 + 5n + n^2)$  نمی توان فاکتور گرفت.

## تمرینات ۳.۶

فاکتور بگیرید.

$$۱) \quad x^2 + 6x + 9$$

$$۲) \quad 4x^2 - 12x + 9$$

$$۳) \quad 3x^2 - 24x + 48$$

$$۴) \quad 9y^2x^2 + 12yx^2 + 4x^2$$

$$۵) \quad 4a^2 + 12a + 9$$

$$۶) \quad x^2 - 25$$

$$۷) \quad 9 - 4z^2$$

$$۸) \quad (y + 2)^2 - 49$$

$$۹) \quad 64x^2 - 100$$

$$۱۰) \quad 18x^2y - 2y$$

$$۱۱) \quad 9x^2 - 49$$

$$۱۲) \quad x^4 - 81$$

$$۱۳) \quad (x + 2y)^2 - 9$$

$$۱۴) \quad x^2 + 16x + 64 - x^4$$

$$۱۵) \quad x^2 - 10x + 25 - y^2$$

$$۱۶) \quad x^3 + 27$$

$$۱۷) \quad z^3 - 1$$

$$۱۸) \quad x^3 - 8$$

$$۱۹) \quad x^3y^2 - 27y^2$$

$$۲۰) \quad a^3b + 8b^4$$

$$۲۱) \quad 125y^3 - 8x^3$$

$$۲۲) \quad x^6 - y^3$$

$$۲۳) \quad 3x^6y^2 + 81y^2$$

پاسخ تمرینات ۳.۶

فاکتور بگیرید.

$$۱) \quad x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = (x + 3)^2$$

$$۲) \quad 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 = (2x - 3)^2$$

$$۳) \quad 3x^2 - 24x + 48 = 3(x^2 - 8x + 16) = 3[x^2 - 2(x)(4) + 4^2] = 3(x - 4)^2$$

$$\begin{aligned} ۴) \quad 9y^2x^2 + 12yx^2 + 4x^2 &= x^2(9y^2 + 12y + 4) = x^2[(3y)^2 + 2(3y)(2) + 2^2] \\ &= x^2(3y + 2)^2 \end{aligned}$$

$$۵) \quad 4a^2 + 12a + 9 = (2a)^2 + 2(2a)(3) + 3^2 = (2a + 3)^2$$

$$۶) \quad x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$$



$$۷) \quad ۹ - ۴z^۲ = ۳^۲ - (۲z)^۲ = (۳ + ۲z)(۳ - ۲z)$$

$$۸) \quad (y + ۲)^۲ - ۴۹ = (y + ۲)^۲ - ۷^۲ = (y + ۲ + ۷)(y + ۲ - ۷) = (y + ۹)(y - ۵)$$

$$۹) \quad ۶۴x^۲ - ۱۰۰ = ۴(۱۶x^۲ - ۲۵) = ۴[(۴x)^۲ - ۵^۲] = ۴(۴x + ۵)(۴x - ۵)$$

$$۱۰) \quad ۱۸x^۲y - ۲y = ۲y(۹x^۲ - ۱) = ۲y[(۳x)^۲ - ۱^۲] = ۲y(۳x + ۱)(۳x - ۱)$$

$$۱۱) \quad ۹x^۲ - ۴۹ = (۳x)^۲ - ۷^۲ = (۳x + ۷)(۳x - ۷)$$

$$۱۲) \quad x^۴ - ۸۱ = (x^۲)^۲ - ۹^۲ = (x^۲ + ۹)(x^۲ - ۹) = (x^۲ + ۹)(x + ۳)(x - ۳)$$

$$۱۳) \quad (x + ۲y)^۲ - ۹ = (x + ۲y)^۲ - ۳^۲ = (x + ۲y + ۳)(x + ۲y - ۳)$$

$$\begin{aligned} ۱۴) \quad x^۲ + ۱۶x + ۶۴ - x^۲ &= (x^۲ + ۱۶x + ۶۴) - (x^۲)^۲ = [x^۲ + ۲(x)(۸) + ۸^۲] - (x^۲)^۲ \\ &= (x + ۸)^۲ - (x^۲)^۲ = (x + ۸ + x^۲)(x + ۸ - x^۲) \end{aligned}$$

$$۱۵) \quad x^۲ - ۱۰x + ۲۵ - y^۲ = (x^۲ - ۱۰x + ۲۵) - y^۲ = [x^۲ - ۲(x)(۵) + ۵^۲] - y^۲$$

$$= (x - 5)^2 - y^2 = (x - 5 + y)(x - 5 - y)$$

$$۱۶) \quad x^3 + ۲۷ = x^3 - ۳^3 = (x + ۳)(x^2 - ۳x + ۹)$$

$$۱۷) \quad z^3 - ۱ = (z - ۱)(z^2 + z + ۱)$$

$$۱۸) \quad x^3 - ۸ = x^3 - ۲^3 = (x - ۲)(x^2 + ۲x + ۴)$$

$$۱۹) \quad x^3 y^2 - ۲۷ y^2 = y^2 (x^3 - ۳^3) = y^2 (x - ۳)(x^2 + ۳x + ۹)$$

$$۲۰) \quad a^3 b + ۸ b^3 = b [a^3 + (۲b)^3] = b(a + ۲b)(a^2 - ۲ab + ۴b^2)$$

$$۲۱) \quad ۱۲۵ y^3 - ۸ x^3 = (۵y)^3 - (۲x)^3 = (۵y - ۲x)(۲۵y^2 + ۱۰xy + ۴x^2)$$

$$۲۲) \quad x^6 - y^3 = (x^2)^3 - y^3 = (x^2 - y)(x^4 + x^2 y + y^2)$$

$$۲۳) \quad ۳x^6 y^2 + ۸۱ y^2 = ۳y^2 (x^6 + ۲۷) = ۳y^2 [(x^2)^3 + ۳^3] = ۳y^2 (x^2 + ۳)(x^4 - ۳x^2 + ۹)$$

## ۳.۷ – مطالب بیشتر در مورد فاکتور گیری More about Factoring

فاکتور گیری از عبارت های با توان های کسری

## Factoring Expressions with Fractional Exponents

مثال فاکتور بگیرید.

$$۱) \quad ۳x^{\frac{۳}{۲}} - ۹x^{\frac{۱}{۲}} + ۶x^{-\frac{۱}{۲}}$$

پاسخ

از  $x$  با کوچک ترین توان یعنی  $x^{-\frac{۱}{۲}}$  فاکتور می گیریم.

$$۳x^{\frac{۳}{۲}} - ۹x^{\frac{۱}{۲}} + ۶x^{-\frac{۱}{۲}} = ۳x^{-\frac{۱}{۲}} (x^۲ - ۳x + ۲) = ۳x^{-\frac{۱}{۲}} (x-۱)(x-۲)$$

$$۲) \quad (۱+x)^{-\frac{۲}{۳}} x + (۱+x)^{\frac{۱}{۳}}$$

از  $(۱+x)$  با کوچک ترین توان یعنی  $(۱+x)^{-\frac{۲}{۳}}$  فاکتور می گیریم.

$$(۱+x)^{-\frac{۲}{۳}} x + (۱+x)^{\frac{۱}{۳}} = (۱+x)^{-\frac{۲}{۳}} [x + (۱+x)] = (۱+x)^{-\frac{۲}{۳}} (۱+۲x)$$

از چند جمله ای های با حد اقل چهار جمله گاهی اوقات می توان از طریق گروه بندی فاکتور گرفت.

مثال - فاکتور بگیرید.

$$۳) \quad x^۳ + x^۲ + ۴x + ۴ = (x^۳ + x^۲) + (۴x + ۴) = x^۲(x+۱) + ۴(x+۱) = (x+۱)(x^۲+۴)$$

$$\begin{aligned} ۴) \quad x^۳ - ۲x^۲ - ۳x + ۶ &= (x^۳ - ۲x^۲) - (۳x - ۶) = x^۲(x-۲) - ۳(x-۲) \\ &= (x-۲)(x^۲-۳) \end{aligned}$$

تمرینات ۳.۷

فاکتور بگیرید.

$$۱) \quad x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$۲) \quad x^{-\frac{3}{2}} + ۲x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$۳) \quad (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۴) \quad ab = \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a^2 + b^2)]$$

$$۵) \quad (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = ۴a^2b^2$$

$$۶) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

پاسخ تمرینات ۳.۷

فاکتور بگیرید.

$$۱) \quad x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) = x^{\frac{1}{2}} (x+1)(x-1)$$

$$۲) \quad x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} (1 + 2x + x^2) = x^{-\frac{3}{2}} (x+1)^2$$

$$۳) \quad (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (x^2 + 1 + 2) = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (x^2 + 3)$$

درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۴) \quad ab = \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a^2 + b^2)]$$

$$\text{سمت راست} = \frac{1}{4} (a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2) = \frac{1}{4} (2ab) = ab = \text{سمت چپ}$$

$$۵) \quad (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2 b^2$$

$$\begin{aligned} \text{سمت چپ} &= [(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)][(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)] \\ &= (a^2 + b^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - a^2 + b^2) = (2a^2)(2b^2) \\ &= 4a^2 b^2 = \text{سمت راست} \end{aligned}$$

$$۶) \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned}\text{سمت راست} &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) \\ &= a^3 + \color{red}{a^2b} + \color{blue}{ab^2} - \color{red}{a^2b} - \color{blue}{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3 = \text{سمت چپ}\end{aligned}$$

## ۳.۸ - حل معادله ها از طریق فاکتور گیری و حل مسائل

## Solving Equations by Factoring and Solving Problems

حل معادله های چند جمله ای از طریق فاکتور گیری

## Solving Polynomial Equations by Factoring

یک معادله چند جمله ای نتیجه مساوی قرار دادن دو چند جمله ای است. مثلاً

$$3x^3 - 2x^2 = x^2 + 2x - 1 \quad 26x + 7 = 13 \quad -5x^2 - 5 = -9x^2 - 2x + 1$$

یک معادله چند جمله ای به شکل استاندارد **Standard Form** است اگر یک طرف معادله صفر باشد. مثلاً

$$3x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad 4x^2 + 2x - 6 = 0 \quad 26x + 83 = 0$$

درجه یک معادله چند جمله ای که به صورت استاندارد باشد، همان بالا ترین درجه هر کدام از جمله های آن است. یک معادله چند جمله ای درجه دو را معادله درجه دوم **Quadratic Equation** می نامند.

جواب یک معادله چند جمله ای یک مجهولی عبارت است از عددی که اگر آن عدد را بجای متغیر قرار دهیم، یک رابطه صحیح بدست آید. روشی را که اینجا برای حل معادله های چند جمله ای بکار می بریم به روش از طریق فاکتور گیری موسوم است. **Factoring Method**

این روش بر اساس خاصیت عامل صفر **Zero Factor Property** استوار است.خاصیت عامل صفر **Zero Factor Property**

اگر  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی باشند و  $a \times b = 0$  پس  $a = 0$  یا  $b = 0$  است. این خاصیت برای سه عامل و یا بیشتر هم صادق است.

به عبارت دیگر، اگر حاصل ضرب دو عدد حقیقی، صفر باشد، پس حداقل یکی از آنها باید صفر باشد. مثال معادله های زیر را حل کنید.

$$1) \quad (x + 2)(x - 6) = 0$$

بر اساس خاصیت عامل صفر، یکی از فاکتور ها باید صفر باشد.

$$x + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 6 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{یا} \quad x = 6$$

امتحان می کنیم.

اگر  $x = -2$  باشد، خواهیم داشت

$$(x + 2)(x - 6) = 0$$

$$(-2 + 2)(-2 - 6) = 0$$

$$(0)(-8) = 0$$

$0=0$  صحیح است

اگر  $x = 6$  باشد، خواهیم داشت

$$(x + 2)(x - 6) = 0$$

$$(6 + 2)(6 - 6) = 0$$

$$(8)(0) = 0$$

$0=0$  صحیح است

پس مجموعه جواب های این معادله  $\{-2, 6\}$  است.

$$2) \quad 2x^2 + 9x - 5 = 0$$

از سه جمله ای فاکتور می گیریم و آن عوامل را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$2x^2 + 9x - 5 = 0$$

$$(2x - 1)(x + 5) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 5 = 0$$

$$2x = 1 \quad \text{یا} \quad x = -5$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad x = -5$$

$$\left\{\frac{1}{2}, -5\right\}$$



**حل معادله های چند جمله ای از طریق فاکتور گیری**

**قدم ۱** – معادله را به شکل استاندارد بنویسید بطوری که یک طرف معادله صفر باشد.

**قدم ۲** – از چند جمله ای بطور کامل فاکتور بگیرید.

**قدم ۳** – هر یک از فاکتور ها که شامل متغیر است مساوی صفر قرار دهید.

**قدم ۴** – معادله های بدست آمده را حل کنید.

**قدم ۵** – جواب های بدست آمده را در معادله اصلی امتحان کنید.

**نکته مهم** – چون همیشه نمی توان از چند جمله ای ها فاکتور گرفت پس نمی توان همه معادله های چند جمله ای را از طریق فاکتور گیری حل کرد. راه های دیگر حل معادله های چند جمله ای را در بخش های دیگر بحث خواهیم کرد.

**معادله های زیر را حل کنید.**

$$۳) \quad x(2x - 7) = 4$$

$$2x^2 - 7x = 4$$

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 4) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 4 = 0$$

$$2x = -1 \quad \text{یا} \quad x = 4$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad x = 4$$

$$\left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$$

**توجه** – در مثال بالا نمی توانیم عامل ۴ را مساوی صفر قرار دهیم. برای بکار بردن خاصیت عامل صفر باید یک طرف معادله صفر باشد و طرف دیگر باید بصورت عوامل ضرب باشد و یا به گفته دیگر از چند جمله ای طرف دیگر معادله فاکتور گرفته شود.

$$۴) \quad 3(x^2 + 4) + 5 = -6(x^2 + 2x) + 13$$

$$3x^2 + 12 + 5 = -6x^2 - 12x + 13$$

$$3x^2 + 17 = -6x^2 - 12x + 13$$

برای این که یک طرف معادله صفر باشد، کلیه جملات سمت راست نماد مساوی را به سمت چپ منتقل می کنیم البته با تغییر علامت جمله ها. این کار مثل این است که به هر دو طرف معادله یک جمله اضافه کرده ایم و یا از هر دو طرف معادله یک جمله کسر کرده ایم. پس خواهیم داشت.

$$3x^2 + 17 + 6x^2 + 12x - 13 = 0$$

حالا جملات متشابه را با هم ادغام می کنیم.

$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$(3x + 2)(3x + 2) = 0$$

$$3x + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x + 2 = 0$$

$$3x = -2 \quad \text{یا} \quad 3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$\left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

اگر معادله دارای کسر باشد، اول کسر ها را حذف می کنیم. برای این کار هر دو طرف معادله را در کوچک ترین مخرج مشترک ضرب می کنیم. مثال

$$5) \quad 2x^2 = \frac{17}{3}x + 1$$

$$3(2x^2) = 3\left(\frac{17}{3}x + 1\right)$$

$$6x^2 = 17x + 3$$

$$6x^2 - 17x - 3 = 0$$

$$(6x + 1)(x - 3) = 0$$

$$6x + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 3 = 0$$

$$6x = -1 \quad \text{یا} \quad x = 3$$

$$x = -\frac{1}{6} \quad \text{یا} \quad x = 3$$

$$\left\{-\frac{1}{6}, 3\right\}$$

$$۶) \quad x^3 = 4x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x = -2 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

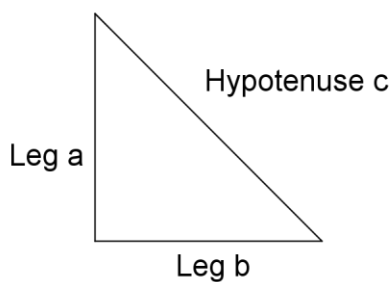
$$(0, -2, 2)$$

برای حل بعضی از مسائل لازم است که از قضیه فیثاغورس استفاده کنیم. می دانیم که مثلث قائم الزویه مثلثی است که یکی از زوایای آن قائمه و یا نود درجه باشد. ضلع روبروی زاویه قائمه را وتر می نامند. وتر بزرگ ترین ضلع مثلث است. دو ضلع دیگر را فقط ضلع می نامند.

مثلث قائم الزویه Right Triangle

وتر Hypotenuse

ضلع Leg



**قضیه فیثاغورس** – در یک مثلث قائم الزویه ، مجموع مربع طول دو ضلع مساوی است با مربع وتر.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(\text{وتر})^2 = (\text{ضلع})^2 + (\text{ضلع})^2$$

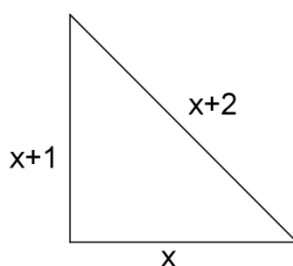
**مساله** – مهران می خواهد یک اتاق به خانه اش اضافه کند. برای این که بداند آیا دیوار های آن اتاق عمود است ، یک مثلث قائم الزویه ساخت که اضلاع آن سه عدد صحیح متوالی بودند. اضلاع آن مثلث را پیدا کنید.

**حل** –

یکی از اضلاع  $x$

ضلع دیگر  $x + 1$

وتر  $x + 2$



$$(\text{وتر})^2 = (\text{ضلع})^2 + (\text{ضلع})^2$$

$$(x)^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$2x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{یا} \quad x = -1$$

چون طول یک ضلع نمی تواند منفی باشد پس  $x = -1$  را قبول نمی کنیم .

پس طول یک ضلع مساوی ۳ واحد است. این واحد می تواند متر یا سانتی متر و یا هر واحد طول باشد.

$$\text{ضلع دیگر } x + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$\text{وتر } x + 2 = 3 + 2 = 5$$

## تمرینات ۳.۸

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) (x + ۳)(۳x - ۴) = ۰$$

$$۲) ۳(۲x - ۵)(۴x + ۳) = ۰$$

$$۳) x^2 + ۱۱x + ۲۴ = ۰$$

$$۴) ۱۲x^2 + ۵x - ۲ = ۰$$

$$۵) z^2 + ۹ = ۱ \circ z$$

$$۶) x(۵x + ۲) = ۳$$

$$۷) x^2 - ۶x = x(۸ + x)$$

$$۸) \frac{z^2}{۶} - \frac{z}{۲} - ۳ = ۰$$

$$۹) \frac{x^2}{۲} + \frac{x}{۲} = \frac{۱}{۱}$$

$$۱۰) \quad \frac{۴y^۲}{۵} = \frac{y}{۵} + \frac{۳}{۱۰}$$

$$۱۱) \quad (x + ۲)(x - ۷)(۳x - ۸) = ۰$$

$$۱۲) \quad y^۳ = ۹y$$

$$۱۳) \quad x^۳ - x = ۲x^۲ - ۲$$

$$۱۴) \quad ۲(x - ۳)(x - ۲) = ۰$$

$$۱۵) \quad ۲x(x - ۳)(x - ۲) = ۰$$

$$۱۶) \quad x^۲ - ۲x - ۱۵ = ۰$$

$$۱۷) \quad ۱۲x^۲ + ۲x - ۲ = ۰$$

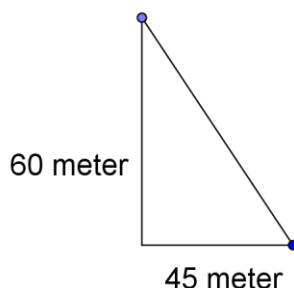
$$۱۸) \quad z(۵z - ۴)(z + ۳) = ۰$$

$$۱۹) \quad ۲z(z + ۶) = ۲z^۲ + ۱۲z - ۸$$

$$۲۰) \quad -۳(x - ۴) + x = ۵(۳ - x)$$

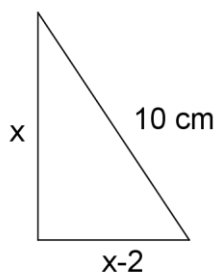
مسائل زیر را حل کنید.

- ۲۱ - یک مکانیک برق می خواهد یک کابل برق از بالای یک برج به ارتفاع ۶۰ متر به یک جعبه فرستنده که در ۴۵ متری پایه برج قرار دارد ، بکشد. حساب کنید طول کابل چند متر باید باشد.



- ۲۲ - یک عدد پنج رقم بیشتر از عدد دیگر است. حاصل ضرب آنها ۶۶ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

- ۲۳ - ضلع کوچک تر یک مثلث قائم الزویه ۲ سانتی متر از ضلع بزرگ تر ، کمتر است. اگر وتر این مثلث ۱۰ سانتی متر باشد، مطلوب است طول دو ضلع مثلث را .

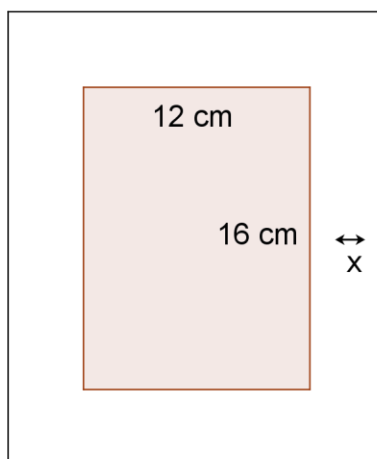


- ۲۴ - مجموع مربع های دو عدد صحیح زوج متوالی ۳۴۰ است. آن دو عدد صحیح را پیدا کنید.



۲۵ - مساحت کف یک انبار ۹۱ متر مربع است. کف انبار به شکل مربع مستطیل است و طول آن ۶ متر از عرض آن بیشتر است. طول و عرض کف انبار را حساب کنید.

۲۶ - مهران یک تابلو به شکل مربع مستطیل به ابعاد ۱۲ و ۱۶ سانتی متر دارد. او می خواهد اطراف این تابلو را منبت کاری کند بطوری که عرض این حاشیه منبت کاری یکسان باشد. اگر مهران به اندازه ۱۲۸ سانتی متر مربع، مواد لازم در اختیار داشته باشد، مطلوب است عرض حاشیه منبت کاری را.



پاسخ تمرینات ۳.۸

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) (x + ۳)(۳x - ۴) = ۰$$

$$x + ۳ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۳x - ۴ = ۰$$

$$x = -۳ \quad \text{یا} \quad ۳x = ۴$$

$$x = -۳ \quad \text{یا} \quad x = \frac{۴}{۳}$$

$$\left\{-۳, \frac{۴}{۳}\right\}$$

$$۲) \quad ۳(۲x - ۵)(۴x + ۳) = ۰$$

$$۲x - ۵ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۴x + ۳ = ۰$$

$$۲x = ۵ \quad \text{یا} \quad ۴x = -۳$$

$$x = \frac{۵}{۲} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{۳}{۴}$$

$$\left\{ \frac{۵}{۲}, -\frac{۳}{۴} \right\}$$

$$۳) \quad x^2 + ۱۱x + ۲۴ = ۰$$

$$(x + ۳)(x + ۸) = ۰$$

$$x + ۳ = ۰ \quad \text{یا} \quad x + ۸ = ۰$$

$$x = -۳ \quad \text{یا} \quad x = -۸$$

$$\{-۳, -۸\}$$

$$۴) \quad ۱۲x^2 + ۵x - ۲ = ۰$$

$$۱۲x^2 - ۳x + ۸x - ۲ = ۰$$

$$۳x(۴x - ۱) + ۲(۴x - ۱) = ۰$$

$$(۴x - ۱)(۳x + ۲) = ۰$$

$$۴x - ۱ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۳x + ۲ = ۰$$

$$۴x = ۱ \quad \text{یا} \quad ۳x = -۲$$

$$x = \frac{۱}{۴} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{۲}{۳} \quad \left\{ \frac{۱}{۴}, -\frac{۲}{۳} \right\}$$

$$۵) \quad z^2 + 9 = 1 \circ z$$

$$z^2 - 1 \circ z + 9 = 0$$

$$(z - 1)(z - 9) = 0$$

$$z - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad z - 9 = 0$$

$$z = 1 \quad \text{یا} \quad z = 9$$

$$\{1, 9\}$$

$$۶) \quad x(5x + 2) = 3$$

$$5x^2 + 2x = 3$$

$$5x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$5x^2 + 5x - 3x - 3 = 0$$

$$5x(x + 1) - 3(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(5x - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad 5x - 3 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{یا} \quad 5x = 3$$

$$x = -1 \quad \text{یا} \quad x = \frac{3}{5}$$

$$\left\{-1, \frac{3}{5}\right\}$$

$$۷) \quad x^2 - 6x = x(8 + x)$$

$$x^2 - 6x = 8x + x^2$$

$$-6x - 8x = 0$$

$$-14x = 0$$

$$x = 0$$

$$\{0\}$$

$$۸) \quad \frac{z^2}{6} - \frac{z}{2} - 3 = 0$$

$$6 \left( \frac{z^2}{6} - \frac{z}{2} - 3 \right) = 6(0)$$

$$z^2 - 3z - 18 = 0$$

$$(z - 6)(z + 3) = 0$$

$$z - 6 = 0 \quad \text{یا} \quad z + 3 = 0$$

$$z = 6 \quad \text{یا} \quad z = -3$$

$$(6, -3)$$

$$۹) \quad \frac{x^2}{2} + \frac{x}{20} = \frac{1}{10}$$

$$20 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x}{20} \right) = 20 \left( \frac{1}{10} \right)$$

$$10x^2 + x = 2$$

$$1 \circ x^2 + x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(5x - 2) = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$5x - 2 = 0$$

$$2x = -1$$

$$5x = 2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right\}$$

$$1 \circ) \quad \frac{4y^2}{5} = \frac{y}{5} + \frac{3}{1 \circ}$$

$$1 \circ \left( \frac{4y^2}{5} \right) = 1 \circ \left( \frac{y}{5} + \frac{3}{1 \circ} \right)$$

$$4y^2 = 2y + 3$$

$$4y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$(4y - 3)(2y + 1) = 0$$

$$4y - 3 = 0$$

$$2y + 1 = 0$$

$$4y = 3$$

$$2y = -1$$

$$y = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$\left\{\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right\}$$

$$۱۱) (x+۲)(x-۷)(۳x-۸)=۰$$

$$x+۲=۰ \quad \text{یا} \quad x-۷=۰ \quad \text{یا} \quad ۳x-۸=۰$$

$$x=-۲ \quad \text{یا} \quad x=۷ \quad \text{یا} \quad ۳x=۸$$

$$x=-۲ \quad \text{یا} \quad x=۷ \quad \text{یا} \quad x=\frac{۸}{۳}$$

$$\left\{-۲, ۷, \frac{۸}{۳}\right\}$$

$$۱۲) y^۳ = ۹y$$

$$y^۳ - ۹y = ۰$$

$$y(y^۲ - ۹) = ۰$$

$$y(y+۳)(y-۳) = ۰$$

$$y=۰ \quad \text{یا} \quad y+۳=۰ \quad \text{یا} \quad y-۳=۰$$

$$y=۰ \quad \text{یا} \quad y=-۳ \quad \text{یا} \quad y=۳$$

$$\{۰, -۳, ۳\}$$

$$۱۳) x^۳ - x = ۲x^۲ - ۲$$

$$x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲ = ۰$$

$$x^۳ - x - ۲x^۲ + ۲ = ۰$$

$$x(x^۲ - ۱) - ۲(x^۲ - ۱) = ۰$$

$$(x-۲)(x^۲ - ۱) = ۰$$

$$(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 1 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -1 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

$$\{2, -1, 1\}$$

$$۱۴) \quad 2(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 2 = 0 \quad \text{هرگز ۲ صفر نیست}$$

$$x = 3 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

$$\{3, 2\}$$

$$۱۵) \quad 2x(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{یا} \quad x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 3 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

$$\{0, 3, 2\}$$

$$۱۶) \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 5 \quad \text{یا} \quad x = -3$$

$$\{5, -3\}$$

$$۱۷) \quad ۱۲x^2 + ۲x - ۲ = 0$$

$$۱۲x^2 + ۶x - ۴x - ۲ = 0$$

$$۶x(۲x + ۱) - ۲(۲x + ۱) = 0$$

$$(۶x - ۲)(۲x + ۱) = 0$$

$$۶x - ۲ = 0 \quad ۲x + ۱ = 0$$

$$۶x = ۲ \quad ۲x = -۱$$

$$x = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \quad x = -\frac{۱}{۲}$$

$$\left\{ \frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۲} \right\}$$

$$۱۸) \quad z(۵z - ۴)(z + ۳) = 0$$

$$z = 0 \quad \text{یا} \quad ۵z - ۴ = 0 \quad \text{یا} \quad z + ۳ = 0$$

$$z = 0 \quad \text{یا} \quad ۵z = ۴ \quad \text{یا} \quad z = -۳$$

$$z = 0 \quad \text{یا} \quad z = \frac{۴}{۵} \quad \text{یا} \quad z = -۳$$

$$\left\{ 0, \frac{۴}{۵}, -۳ \right\}$$

$$۱۹) \quad ۲z(z + ۶) = ۲z^2 + ۱۲z - ۸$$

$$۲z^2 + ۱۲z = ۲z^2 + ۱۲z - ۸$$

این تساوی غلط است  $0 = -۸$



پس این معادله جوابی ندارد. مجموعه جواب های این معادله  $\phi$  است.

$$2 \circ) -3(x-4) + x = 5(3-x)$$

$$-3x + 12 + x = 15 - 5x$$

$$-3x + x + 5x + 12 - 15 = 0$$

$$3x - 3 = 0$$

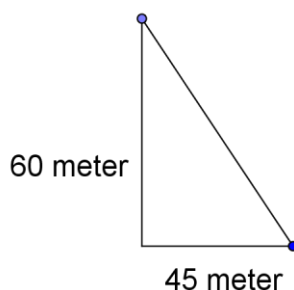
$$3x = 3$$

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

$$\{1\}$$

مسائل زیر را حل کنید.

۲۱ - یک مکانیک برق می خواهد یک کابل برق از بالای یک برج به ارتفاع ۶۰ متر به یک جعبه فرستنده که در ۴۵ متری پایه برج قرار دارد ، بکشد. حساب کنید طول کابل چند متر باید باشد.



پاسخ

$x =$  طول کابل

$$x^2 = (60)^2 + (45)^2$$

$$x^2 = 3600 + 2025$$

$$x^2 = 5625$$

$$x = 75 \text{ متر}$$

۲۲ - یک عدد پنج رقم بیشتر از عدد دیگر است. حاصل ضرب آنها ۶۶ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

$$x = \text{عدد اول}$$

$$x - 5 = \text{عدد دوم}$$

$$x(x - 5) = 66$$

$$x^2 - 5x - 66 = 0$$

$$(x - 11)(x + 6) = 0$$

$$x - 11 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 6 = 0$$

$$x = 11 \quad \text{یا} \quad x = -6$$

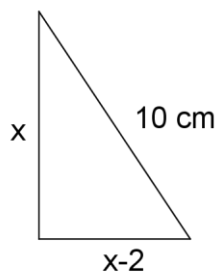
اگر عدد اول ۱۱ باشد پس

$$\text{عدد دوم} = x - 5 = 11 - 5 = 6$$

اگر عدد اول -۶ باشد پس

$$\text{عدد دوم} = -6 - 5 = -11$$

۲۳ - ضلع کوچک تر یک مثلث قائم الزویه ۲ سانتی متر از ضلع بزرگ تر ، کمتر است. اگر وتر این مثلث ۱۰ سانتی متر باشد، مطلوب است طول دو ضلع مثلث را .



$$x^2 + (x - 2)^2 = (10)^2$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100$$

$$2x^2 - 4x - 96 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$(x - 8)(x + 6) = 0$$

$$x - 8 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 6 = 0$$

$$x = 8 \quad \text{یا} \quad x = -6$$

طول یک ضلع نمی تواند منفی باشد. پس طول ضلع بزرگ تر ۸ سانتی متر و طول ضلع کوچک تر ۶ سانتی متر است.

۲۴ - مجموع مربع های دو عدد صحیح زوج متوالی ۳۴۰ است. آن دو عدد صحیح را پیدا کنید.

عدد زوج اول  $x =$

عدد زوج دوم  $x + 2 =$

$$x^2 + (x + 2)^2 = 340$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 340$$

$$2x^2 + 4x - 336 = 0$$

$$x^2 + 2x - 168 = 0$$

$$(x + 14)(x - 12) = 0$$

$$x + 14 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 12 = 0$$

$$x = -14 \quad \text{یا} \quad x = 12$$

اگر عدد زوج اول ۱۲ باشد. عدد زوج دوم  $14 = 12 + 2$  است.

اگر عدد زوج اول  $-14$  باشد. عدد زوج دوم  $-12 = -14 + 2$  است.

۲۵ - مساحت کف یک انبار ۹۱ متر مربع است. کف انبار به شکل مربع مستطیل است و طول آن ۶ متر از عرض آن بیشتر است. طول و عرض کف انبار را حساب کنید.

$$x = \text{عرض کف انبار}$$

$$x + 6 = \text{طول کف انبار}$$

$$x(x + 6) = 91$$

$$x^2 + 6x - 91 = 0$$

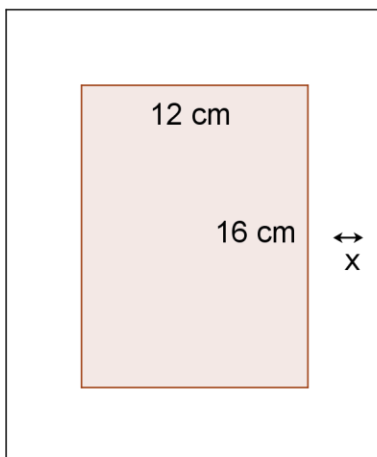
$$(x + 13)(x - 7) = 0$$

$$x + 13 = 0 \quad x - 7 = 0$$

$$x = -13 \quad x = 7$$

عرض یک اتاق نمی تواند منفی باشد. پس عرض این انبار ۷ متر است و طول آن  $13 = 7 + 6$  متر است.

۲۶ - مهران یک تابلو به شکل مربع مستطیل به ابعاد ۱۲ و ۱۶ سانتی متر دارد. او می خواهد اطراف این تابلو را مثبت کاری کند بطوری که عرض این حاشیه مثبت کاری یکسان باشد. اگر مهران به اندازه ۱۲۸ سانتی متر مربع، مواد لازم در اختیار داشته باشد، مطلوب است عرض حاشیه مثبت کاری را.



عرض حاشیه  $x =$

سانتی متر مربع  $۱۹۲ = ۱۶ \times ۱۲ =$  مساحت تابلو

$۱۹۲ + ۱۲۸ = (۱۶ + ۲x)(۱۲ + ۲x) =$  مساحت تابلو و حاشیه اطراف

$$۱۹۲ + ۲۴x + ۳۲x + ۴x^2 = ۳۲۰$$

$$۱۹۲ + ۵۶x + ۴x^2 = ۳۲۰$$

$$۴۸ + ۱۴x + x^2 = ۸۰$$

$$x^2 + ۱۴x - ۳۲ = ۰$$

$$(x + ۱۶)(x - ۲) = ۰$$

$$x + ۱۶ = ۰$$

$$x - ۲ = ۰$$

$$x = -۱۶$$

$$x = ۲$$

پس عرض حاشیه ۲ سانتی متر است.



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)