

فصل چهارم

عبارت های کسری Fractional Expressions

یا

عبارت های گویا Rational Expressions

۴.۱ ضرب و تقسیم عبارت های کسری

یاد آوری - گفتیم که یک عدد گویا ، یا کسری ، عددی است که بتوان آنرا بصورت کسر $\frac{p}{q}$ نوشت. p و q دو عدد صحیح هستند و $q \neq 0$

یک عبارت گویا عبارتی است که بتوان آنرا به صورت کسر $\frac{P}{Q}$ نوشت. P و Q هر کدام چند جمله ای هستند و $Q \neq 0$ مثلاً

$$\frac{3x+7}{2} \quad \frac{5x^2-3}{x-1} \quad \frac{7x-2}{2x^2+7x+6}$$

پیدا کردن مقادیری **Values** که یک عبارت گویا را تعریف نشدنی **Undefined** می کنند. میدانیم که تقسیم یک عدد بر صفر پاسخی ندارد. بنا بر این می گوییم تقسیم یک عدد بر صفر تعریف نشدنی است. برای روشن شدن این موضوع مثالی می زنیم. میدانیم که $3 = 6 \div 2$ زیرا $6 = 2 \times 3$ حالا اگر بگوییم $x = 6 \div 0$ پس باید $6 = 0 \times x$ باشد. اما هیچ عددی نیست که در صفر ضرب شود تا عدد ۶ بدست آید. زیرا $0 = 6 \times$ عددی $0 \times$

به همین طریق در یک عبارت کسری اگر عددی را جانشین متغیر مخرج کسر کنیم و حاصل صفر شود در نتیجه این عبارت کسری برای آن عدد تعریف نشدنی است. مثلاً عبارت کسری زیر

$$\frac{x^2+2}{x-3}$$

برای $x = 3$ تعریف نشدنی است زیرا

$$\frac{x^2+2}{x-3} = \frac{3^2+2}{3-3} = \frac{11}{0}$$

مثال - کلیه اعدادی را که عبارت های کسری زیر را تعریف نشدنی می کنند، پیدا کنید.

$$۱) \frac{۵x^2 - ۳}{x - ۱}$$

مخرج را مساوی صفر قرار می دهیم

$$x - ۱ = 0 \Rightarrow x = ۱$$

این کسر برای $x = ۱$ تعریف نشدنی است.

$$۲) \frac{۷x - ۲}{x^2 - ۲x - ۱۵}$$

برای پیدا کردن مقادیری که مخرج کسر را صفر می کند ، از مخرج فاکتور می گیریم.

$$\frac{۷x - ۲}{x^2 - ۲x - ۱۵} = \frac{۷x - ۲}{(x - ۵)(x + ۳)}$$

$$x - ۵ = 0 \Rightarrow x = ۵$$

$$x + ۳ = 0 \Rightarrow x = -۳$$

این کسر برای $x = ۵$ و $x = -۳$ تعریف نشدنی است.

$$۳) \frac{۳x - ۱}{۳}$$

این کسر برای کلیه اعداد حقیقی تعریف شدنی است. زیرا هیچ عدد حقیقی مخرج این کسر را صفر نمی کند.

در بخش های آینده در مورد حل تساوی ها یا معادلات صحبت می کنیم.

توجه - برای پیدا کردن مقادیری که یک عبارت گویا را تعریف نشدنی می کنند ، باید مخرج را مساوی صفر قرار دهیم و سپس معادله بدست آمده را حل کنیم.

ساده کردن عبارت های گویا Simplifying Rational Expressions

یاد آوری یک کسر به صورت ساده ترین شکل است اگر صورت و مخرج، هیچ مضرب مشترکی جز یک یا منهای یک نداشته باشد. مثلاً در کسر $\frac{۳۵}{۱۵}$ صورت و مخرج هر دو بر ۵ بخش پذیر هستند. پس صورت و مخرج را به صورت حاصل ضرب عوامل می نویسیم (تجزیه می کنیم) و سپس عوامل مشترک را حذف Cancel می کنیم.

$$\frac{۳۵}{۱۵} = \frac{۷ \times ۵}{۳ \times ۵} = \frac{۷}{۳}$$

به همین ترتیب برای ساده کردن عبارت های گویا، صورت و مخرج را به حاصل ضرب عوامل می نویسیم (تجزیه می کنیم) و سپس عوامل مشترک را حذف می نماییم.

مثال – عبارت گویای زیر را ساده کنید.

$$۴) \quad \frac{۲۴x^۶y^۵}{۸x^۷y} = \frac{(۸x^۶y) ۳y^۶}{(۸x^۶y)x} = \frac{۳y^۶}{x}$$

$$۵) \quad \frac{۲x^۲}{۱۰x^۲ - ۲x^۲} = \frac{۲x^۲}{۲x^۲(۵x - ۱)} = \frac{۱}{۵x - ۱}$$

$$۶) \quad \frac{۲ + x}{x + ۲} = \frac{x + ۲}{x + ۲} = ۱$$

$$۷) \quad \frac{۲ - x}{x - ۲} = \frac{-۱(x - ۲)}{x - ۲} = -۱$$

$$\begin{aligned} ۸) \quad \frac{۱۸ - ۲x^۲}{x^۲ - ۲x - ۳} &= \frac{۲(۹ - x^۲)}{(x - ۳)(x + ۱)} = \frac{۲(۳ + x)(۳ - x)}{(x - ۳)(x + ۱)} = \frac{۲(۳ + x) \times -۱(x - ۳)}{(x - ۳)(x + ۱)} \\ &= \frac{-۲(۳ + x)}{x + ۱} = -\frac{۲(۳ + x)}{x + ۱} \end{aligned}$$

$$۹) \quad \frac{x^۲ + ۸}{x + ۲} = \frac{(x + ۲)(x^۲ - ۲x + ۴)}{x + ۲} = x^۲ - ۲x + ۴$$

$$\begin{aligned}
 ۱۰) \quad \frac{۲y^۲ + ۲}{y^۳ - ۵y^۲ + y - ۵} &= \frac{۲(y^۲ + ۱)}{(y^۳ - ۵y^۲) + (y - ۵)} = \frac{۲(y^۲ + ۱)}{y^۲(y - ۵) + ۱(y - ۵)} \\
 &= \frac{۲(y^۲ + ۱)}{(y - ۵)(y^۲ + ۱)} = \frac{۲}{y - ۵}
 \end{aligned}$$

ضرب عبارت های گویا

الف - صورت ها و مخرج ها را بطور کامل تجزیه کنید. (فاکتور بگیرید)

ب - عوامل مشترک را از صورت ها و مخرج ها حذف کنید.

ج - صورت ها را در صورت و مخرج ها را در مخرج ضرب کنید.

د - در صورت امکان ساده کنید.

مثال - ضرب کنید.

$$۱۱) \quad \frac{۳n + ۱}{۲n} \times \frac{۲n - ۴}{۳n^۲ - ۲n - ۱} = \frac{۳n + ۱}{۲n} \times \frac{۲(n - ۲)}{(۳n + ۱)(n - ۱)} = \frac{۲(n - ۲)}{۲n(n - ۱)} = \frac{n - ۲}{n(n - ۱)}$$

$$۱۲) \quad \frac{x^۳ - ۱}{-۳x + ۳} \times \frac{۱۵x^۲}{x^۲ + x + ۱} = \frac{(x - ۱)(x^۲ + x + ۱)}{-۳(x - ۱)} \times \frac{۱۵x^۲}{(x^۲ + x + ۱)} = \frac{۱۵x^۲}{-۳} = \frac{۵x^۲}{-۱} = -۵x^۲$$

تقسیم عبارت های گویا

برای تقسیم یک عبارت گویا بر دیگری ، عبارت اول را در وارونه عبارت دیگر ضرب می کنیم. یعنی

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$$

و سپس ساده می کنیم.

مثال - تقسیم کنید.

$$۱۳) \quad \frac{۳x}{۵y} \div \frac{۹y}{x^۵} = \frac{۳x}{۵y} \times \frac{x^۵}{۹y} = \frac{۳x^۶}{۴۵y^۲} = \frac{x^۶}{۱۵y^۲}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۴) \quad \frac{۸m^۲}{۳m^۲ - ۱۲} \div \frac{۴۰}{۲ - m} &= \frac{۸m^۲}{۳m^۲ - ۱۲} \times \frac{۲ - m}{۴۰} = \frac{۸m^۲(۲ - m)}{۳(m^۲ - ۴) \times ۴۰} \\
 &= \frac{۸m^۲ \times (-۱)(m - ۲)}{۳(m + ۲)(m - ۲)(۵)(۸)} = \frac{-m^۲}{۱۵(m + ۲)} = -\frac{m^۲}{۱۵(m + ۲)}
 \end{aligned}$$

عملیات زیر را انجام دهید.

$$\begin{aligned}
 ۱۵) \quad \frac{x^۲ - ۲۵}{(x + ۵)^۲} \times \frac{۳x + ۱۵}{۴x} \div \frac{x^۲ - ۳x - ۱۰}{x} &= \frac{x^۲ - ۲۵}{(x + ۵)^۲} \times \frac{۳x + ۱۵}{۴x} \times \frac{x}{x^۲ - ۳x - ۱۰} \\
 &= \frac{(x + ۵)(x - ۵)}{(x + ۵)(x + ۵)} \times \frac{۳(x + ۵)}{۴x} \times \frac{x}{(x - ۵)(x + ۲)} = \frac{۳}{x + ۲}
 \end{aligned}$$

تمرینات ۴.۱

مقادیری را که عبارت های زیر را تعریف نشدنی می کنند، پیدا کنید.

$$۱) \quad \frac{x + ۳}{x - ۲}$$

$$۲) \quad \frac{۲x}{۵x + ۱}$$

$$۳) \quad \frac{x^۲ + ۱}{۳a}$$

$$۴) \quad \frac{x - ۷}{۴}$$

$$۵) \frac{۳ + ۲x}{x^۲ + x^۲ - ۲x}$$

$$۶) \frac{x + ۳}{x^۲ - ۴}$$

ساده کنید.

$$۷) \frac{۱ \circ x^۳}{۱۸x}$$

$$۸) \frac{۹x^۶y^۳}{۱۸x^۲y^۵}$$

$$۹) \frac{۸x - ۱۶x^۲}{۸x}$$

$$۱۰) \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$$

$$۱۱) \frac{۹y - ۱۸}{۷y - ۱۴}$$

$$۱۲) \frac{x^2 + 6x - 40}{x + 10}$$

$$۱۳) \frac{x - 9}{9 - x}$$

$$۱۴) \frac{x^2 - 49}{7 - x}$$

$$۱۵) \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 - 5x + 4}$$

$$۱۶) \frac{x^3 - 125}{2x - 10}$$

$$۱۷) \frac{3x^2 - 5x - 2}{6x^3 + 2x^2 + 3x + 1}$$

ضرب کنید و سپس در صورت امکان ساده کنید.

$$۱۸) \frac{4}{x} \times \frac{x^2}{8}$$

$$۱۹) \frac{2x - 4}{15} \times \frac{6}{2 - x}$$

$$۲۰) \frac{۱۸a - ۱۲a^2}{4a^2 + 4a + 1} \times \frac{4a^2 + 8a + 3}{4a^2 - 9}$$

$$۲۱) \frac{9x + 9}{4x + 8} \times \frac{2x + 4}{3x^2 - 3}$$

$$۲۲) \frac{2x^2 - 16}{6x^2 + 6x - 36} \times \frac{9x + 18}{3x^2 + 6x + 12}$$

$$۲۳) \frac{a^2 + a^2b + a + b}{5a^2 + 5a} \times \frac{6a^2}{2a^2 - 2b^2}$$

تقسیم کنید و سپس در صورت امکان ساده کنید.

$$۲۴) \frac{4}{x} \div \frac{8}{x^2}$$

$$۲۵) \frac{2x}{5} \div \frac{6x + 12}{5x + 10}$$

$$۲۶) \frac{a + b}{ab} \div \frac{a^2 - b^2}{4a^2b}$$

$$۲۷) \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x - 6} \div \frac{x^2 - 9}{4}$$

پاسخ تمرینات ۴.۱

مقادیری را که عبارت های زیر را تعریف نشدنی می کنند، پیدا کنید.

$$۱) \frac{x+2}{x-2}$$

$$x-2=0 \quad x=2$$

$$۲) \frac{2x}{5x+1}$$

$$5x+1=0 \quad x=-\frac{1}{5}$$

$$۳) \frac{x^2+1}{3a}$$

$$3x=0 \quad x=0$$

$$۴) \frac{x-7}{4}$$

هیچ عدد حقیقی نیست که این کسر را تعریف نشدنی کند. این کسر برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است.

$$۵) \frac{3+2x}{x^3+x^2-2x}$$

$$x^3+x^2-2x=0$$

$$x(x^2+x-2)=0$$

$$x(x+2)(x-1)=0$$

$$x=0 \quad x=-2 \quad x=1$$

$$۶) \frac{x+۳}{x^۲-۴}$$

$$x^۲-۴=۰$$

$$(x+۲)(x-۲)=۰$$

$$x=-۲ \quad x=۲$$

ساده کنید.

$$۷) \frac{۱۰x^۳}{۱۸x} = \frac{۲x(\cancel{۵x^۲})}{۲x(\cancel{۹})} = \frac{۵x^۲}{۹}$$

$$۸) \frac{۹x^۶y^۳}{۱۸x^۲y^۵} = \frac{\cancel{۹}x^۲y^۳(x^۴)}{\cancel{۹}x^۲y^۳(\cancel{۲}y^۲)} = \frac{x^۴}{۲y^۲}$$

$$۹) \frac{۸x-۱۶x^۲}{۸x} = \frac{\cancel{۸}x(۱-\cancel{۲}x)}{\cancel{۸}x} = ۱-۲x$$

$$۱۰) \frac{x^۲-۹}{x-۳} = \frac{(x+۳)(\cancel{x-۳})}{\cancel{x-۳}} = x+۳$$

$$۱۱) \frac{۹y-۱۸}{۷y-۱۴} = \frac{\cancel{۹}(y-\cancel{۲})}{\cancel{۷}(y-\cancel{۲})} = \frac{۹}{۷}$$

$$۱۲) \frac{x^2 + 6x - 40}{x + 10} = \frac{(x + 10)(x - 4)}{x + 10} = x - 4$$

$$۱۳) \frac{x - 9}{9 - x} = \frac{-1(9 - x)}{9 - x} = -1$$

$$۱۴) \frac{x^2 - 49}{7 - x} = \frac{(x + 7)(x - 7)}{-1(x - 7)} = -(x + 7)$$

$$۱۵) \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(2x + 1)(x - 4)}{(x - 4)(x - 1)} = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

$$۱۶) \frac{x^2 - 125}{2x - 10} = \frac{(x - 5)(x^2 + 5x + 25)}{2(x - 5)} = \frac{x^2 + 5x + 25}{2}$$

$$۱۷) \frac{3x^2 - 5x - 2}{6x^2 + 2x^2 + 3x + 1} = \frac{(3x + 1)(x - 2)}{(6x^2 + 2x^2) + (3x + 1)} = \frac{(3x + 1)(x - 2)}{2x^2(3x + 1) + 1(3x + 1)}$$

$$= \frac{(3x + 1)(x - 2)}{(3x + 1)(2x^2 + 1)} = \frac{x - 2}{2x^2 + 1}$$

ضرب کنید و سپس در صورت امکان ساده کنید.

$$۱۸) \frac{4}{x} \times \frac{x^2}{8} = \frac{4x^2}{8x} = \frac{4x(x)}{4x(2)} = \frac{x}{2}$$

$$۱۹) \quad \frac{2x-4}{15} \times \frac{6}{2-x} = \frac{6(2x-4)}{15(2-x)} = \frac{12x-24}{30-15x} = \frac{12(x-2)}{-15(x-2)} = -\frac{12}{15} = -\frac{3(4)}{3(5)} = -\frac{4}{5}$$

$$۲۰) \quad \frac{18a-12a^2}{4a^2+4a+1} \times \frac{4a^2+8a+3}{4a^2-9} = \frac{-6a(2a-3)}{(2a+1)(2a+1)} \times \frac{(2a+1)(2a+3)}{(2a+3)(2a-3)}$$

$$= \frac{-6a}{2a+1} = -\frac{6a}{2a+1}$$

$$۲۱) \quad \frac{9x+9}{4x+8} \times \frac{2x+4}{3x^2-3} = \frac{9(x+1)}{4(x+2)} \times \frac{2(x+2)}{3(x^2-1)} = \frac{3 \times 2(x+1)}{2 \times 2} \times \frac{2}{3(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{3}{2(x-1)}$$

$$۲۲) \quad \frac{2x^2-16}{6x^2+6x-36} \times \frac{9x+18}{3x^2+6x+12} = \frac{2(x^2-8)}{2 \times 3(x^2+x-6)} \times \frac{3 \times 3(x+2)}{3(x^2+2x+4)}$$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{x+2}{x+3}$$

$$۲۳) \quad \frac{a^2+a^2b+a+b}{5a^2+5a} \times \frac{6a^2}{2a^2-2b^2} = \frac{a^2(a+b)+(a+b)}{5a(a^2+1)} \times \frac{2 \times 3 \times a \times a}{2(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2+1)}{5(a^2+1)} \times \frac{3a}{(a+b)(a-b)} = \frac{3a}{5(a-b)}$$

تقسیم کنید و سپس در صورت امکان ساده کنید.

$$۲۴) \quad \frac{۴}{x} \div \frac{۸}{x^۲} = \frac{۴}{x} \times \frac{x^۲}{۸} = \frac{\cancel{۴} \times x \times \cancel{x}}{\cancel{۲} \times \cancel{۴} \times \cancel{x}} = \frac{x}{۲}$$

$$۲۵) \quad \frac{۲x}{۵} \div \frac{۶x+۱۲}{۵x+۱۰} = \frac{۲x}{۵} \times \frac{۵x+۱۰}{۶x+۱۲} = \frac{\cancel{۲}x}{\cancel{۵}} \times \frac{\cancel{۵}(x+۲)}{\cancel{۲} \times ۳(x+۲)} = \frac{x}{۳}$$

$$۲۶) \quad \frac{a+b}{ab} \div \frac{a^۲-b^۲}{۴a^۳b} = \frac{a+b}{ab} \times \frac{۴a^۳b}{a^۲-b^۲} = \frac{\cancel{۴}a+b}{\cancel{ab}} \times \frac{۴a^۳(\cancel{ab})}{(a+b)(a-b)} = \frac{۴a^۳}{a-b}$$

$$۲۷) \quad \frac{x^۲-۶x+۹}{x^۲-x-۶} \div \frac{x^۲-۹}{۴} = \frac{x^۲-۶x+۹}{x^۲-x-۶} \times \frac{۴}{x^۲-۹} = \frac{(x-۳)(x-۳)}{(x-۳)(x+۲)} \times \frac{۴}{(x+۳)(x-۳)} =$$

$$= \frac{۴}{(x+۳)(x+۲)}$$

۴.۲ جمع و تفریق عبارت های گویا Adding and Subtracting Rational Expressions

جمع و تفریق عبارت های گویا با مخرج های مساوی

Adding and Subtracting Rational Expressions with the Same Denominator

جمع و تفریق عبارت های گویا مانند جمع و تفریق اعداد کسری است.

برای جمع و تفریق عبارت های گویا با مخرج های مساوی ، صورت ها را با هم جمع و یا از هم کم می کنیم و حاصل را روی مخرج مشترک می نویسیم.

مثال - جمع کنید.

$$۱) \quad \frac{5}{7} + \frac{x}{7} = \frac{5+x}{7}$$

$$۲) \quad \frac{x}{4} + \frac{5x}{4} = \frac{x+5x}{4} = \frac{6x}{4} = \frac{3x}{2}$$

تفریق کنید.

$$۳) \quad \frac{x^2}{x+7} - \frac{49}{x+7} = \frac{x^2-49}{x+7} = \frac{(x+7)(x-7)}{x+7} = x-7$$

$$۴) \quad \frac{x}{3y^2} - \frac{x+1}{3y^2} = \frac{x-(x+1)}{3y^2} = \frac{x-x-1}{3y^2} = -\frac{1}{3y^2}$$

پیدا کردن کوچک ترین مخرج مشترک Least Common Denominator عبارت های گویا

پیدا کردن کوچک ترین مخرج مشترک LCD

الف - هر کدام از مخرج ها را به طور کامل فاکتور بگیرید. (تجزیه کنید)

ب - کوچک ترین مخرج مشترک عبارت است از حاصل ضرب کلیه فاکتور های منحصر به فرد Unique با بزرگ ترین توان که در هر کدام از فاکتور ها یافت می شود.

یاد آوری در تساوی $6 = 2 \times 3$ اعداد ۲ و ۳ هر کدام فاکتور نامیده می شوند . همچنین به آنها عامل هم گفته می شود.

مثال - کوچک ترین مخرج مشترک عبارت های زیر را پیدا کنید.

$$۵) \frac{۲}{۳x^۵y^۲}, \frac{۳z}{۵xy^۳}$$

اول از مخرج ها فاکتور می گیریم. (تجزیه می کنیم)

$$۳x^۵xy^۲ = ۳ \times x^۵ \times y^۲$$

$$۵xy^۳ = ۵ \times x \times y^۳$$

$$LCD = ۳ \times ۵ \times x^۵ \times y^۳ = ۱۵x^۵y^۳$$

$$۶) \frac{۷}{z+۱}, \frac{z}{z-۱}$$

$$(z+۱) = (z+۱)$$

$$(z-۱) = (z-۱)$$

$$LCD = (z+۱)(z-۱)$$

$$۷) \frac{m-۱}{m^۲-۲۵}, \frac{۲m}{۲m^۲-۹m-۵}, \frac{۷}{m^۲-۱۰m+۲۵}$$

$$m^۲-۲۵ = (m+۵)(m-۵)$$

$$۲m^۲-۹m-۵ = (۲m+۱)(m-۵)$$

$$m^۲-۱۰m+۲۵ = (m-۵)(m-۵)$$

$$LCD = (m+۵)(۲m+۱)(m-۵)^۲$$

$$۸) \frac{x}{x^۲-۴}, \frac{۱۱}{۶-۳x}$$

$$x^۲-۴ = (x+۲)(x-۲)$$

$$۶-۳x = ۳(-۱)(x-۲)$$

$$LCD = -3(x+2)(x-2)$$

جمع و تفریق عبارت های گویا با مخرج های متفاوت

Adding and Subtracting Rational Expressions with Different Denominators

الف - کوچک ترین مخرج مشترک عبارت های گویا پیدا کنید.

ب - هر کدام از عبارت های گویا را به صورت عبارت گویای معادل Equivalent که مخرج آن کوچک ترین مخرج مشترکی باشد که در مرحله اول پیدا کردید ، بنویسید .

ب - جمع یا تفریق کنید و حاصل را روی مخرج مشترک بنویسید.

ج - ساده کنید.

مثال عملیات زیر را انجام دهید.

$$9) \quad \frac{2}{x^2} + \frac{5}{3x^3}$$

$$LCD = 3x^3$$

پس

$$\frac{2}{x^2} + \frac{5}{3x^3} = \frac{2}{x^2} \times \frac{3x}{3x} + \frac{5}{3x^3} = \frac{6x}{3x^3} + \frac{5}{3x^3} = \frac{6x+5}{3x^3}$$

$$10) \quad \frac{3}{x+2} + \frac{2x}{x-2}$$

$$LCD = (x+2)(x-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} + \frac{2x}{x-2} &= \frac{3}{x+2} \times \frac{x-2}{x-2} + \frac{2x}{x-2} \times \frac{x+2}{x+2} = \frac{3(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{2x(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{3x-6+2x^2+4x}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2+7x-6}{(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

$$11) \quad \frac{x}{x-1} - \frac{4}{1-x} = \frac{x}{x-1} - \frac{4}{-1(x-1)} = \frac{x}{x-1} - \frac{-1(4)}{x-1} = \frac{x-(-4)}{x-1} = \frac{x+4}{x-1}$$

$$۱۲) \frac{\Delta k}{k^2 - 4} - \frac{2}{k^2 + k - 2} = \frac{\Delta k}{(k+2)(k-2)} - \frac{2}{(k+2)(k-1)}$$

$$LCD = (k+2)(k-2)(k-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k}{(k+2)(k-2)} - \frac{2}{(k+2)(k-1)} &= \frac{\Delta k(k-1)}{(k+2)(k-2)(k-1)} - \frac{2(k-2)}{(k+2)(k-1)(k-2)} \\ &= \frac{\Delta k(k-1) - 2(k-2)}{(k+2)(k-2)(k-1)} = \frac{\Delta k^2 - \Delta k - 2k + 4}{(k+2)(k-2)(k-1)} = \frac{\Delta k^2 - 2k + 4}{(k+2)(k-2)(k-1)} \end{aligned}$$

$$۱۳) \frac{2x-1}{2x^2-9x-5} + \frac{x+3}{2x^2-x-2} = \frac{2x-1}{(2x+1)(x-5)} + \frac{x+3}{(2x-2)(2x+1)}$$

$$LCD = (2x+1)(x-5)(2x-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{(2x+1)(x-5)} + \frac{x+3}{(2x-2)(2x+1)} &= \frac{(2x-1)(2x-2)}{(2x+1)(x-5)(2x-2)} + \frac{(x+3)(x-5)}{(2x-2)(2x+1)(x-5)} \\ &= \frac{(2x-1)(2x-2) + (x+3)(x-5)}{(2x+1)(x-5)(2x-2)} = \frac{2x^2 - 4x - 2x + 2 + x^2 + 3x - 5x - 15}{(2x+1)(x-5)(2x-2)} \\ &= \frac{3x^2 - 9x - 13}{(2x+1)(x-5)(2x-2)} \end{aligned}$$

$$۱۴) \frac{7}{x-1} + \frac{1 \circ x}{x^2-1} - \frac{5}{x+1} = \frac{7}{x-1} + \frac{1 \circ x}{(x+1)(x-1)} - \frac{5}{x+1}$$

$$LCD = (x-1)(x+1)$$

$$\frac{7}{x-1} + \frac{1 \circ x}{(x+1)(x-1)} - \frac{5}{x+1} = \frac{7(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{1 \circ x}{(x-1)(x+1)} - \frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{7x + 7 + 1 \cdot x - 5x + 5}{(x-1)(x+1)} = \frac{12x + 12}{(x-1)(x+1)} = \frac{12(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{12}{x-1}$$

تمرینات ۴.۲

جمع یا تفریق کنید. و سپس اگر ممکن باشد، ساده کنید.

۱) $\frac{2}{x} - \frac{5}{x}$

۲) $\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x-2}$

۳) $\frac{x^2}{x+2} - \frac{4}{x+2}$

۴) $\frac{2x-6}{x^2+x-6} + \frac{3-3x}{x^2+x-6}$

۵) $\frac{x-5}{2x} - \frac{x+5}{2x}$

۶) $\frac{4}{3x} + \frac{3}{2x}$

$$۷) \quad \frac{۵}{۲y^۲} - \frac{۲}{۷y}$$

$$۸) \quad \frac{x-۳}{x+۴} - \frac{x+۲}{x-۴}$$

$$۹) \quad \frac{۱}{x-۵} + \frac{۲x-۱۹}{x^۲-x-۲۰}$$

$$۱۰) \quad \frac{۳}{۲x+۱۰} + \frac{۸}{۳x+۱۵}$$

$$۱۱) \quad \frac{-۲}{x^۲-۳x} - \frac{۱}{x^۳-۳x^۲}$$

$$۱۲) \quad \frac{۱}{a-b} + \frac{۱}{b-a}$$

$$۱۳) \quad \frac{۵}{x-۲} + \frac{x+۴}{۲-x}$$

$$۱۴) \quad \frac{y+۱}{y^۲-۶y+۸} - \frac{۳}{y^۲-۱۶}$$

$$۱۵) \frac{x+۲}{x^2-۳۶} - \frac{x}{x^2+۹x+۱۸}$$

$$۱۶) \frac{۷}{x^2-x-۲} + \frac{x}{x^2+۴x+۳}$$

پاسخ تمرینات ۴.۲

جمع یا تفریق کنید. و سپس اگر ممکن باشد ، ساده کنید.

$$۱) \frac{۲}{x} - \frac{۵}{x} = \frac{۲-۵}{x} = -\frac{۳}{x}$$

$$۲) \frac{۲}{x-۲} + \frac{x}{x-۲} = \frac{۲+x}{x-۲}$$

$$۳) \frac{x^2}{x+۲} - \frac{۴}{x+۲} = \frac{x^2-۴}{x+۲} = \frac{(x+۲)(x-۲)}{x+۲} = x-۲$$

$$\begin{aligned} ۴) \frac{۲x-۶}{x^2+x-۶} + \frac{۳-۳x}{x^2+x-۶} &= \frac{۲x-۶+۳-۳x}{x^2+x-۶} = \frac{-x-۳}{(x+۳)(x-۲)} = \frac{-۱(x+۳)}{(x+۳)(x-۲)} \\ &= -\frac{۱}{x-۲} = \frac{۱}{۲-x} \end{aligned}$$

$$۵) \frac{x-۵}{۲x} - \frac{x+۵}{۲x} = \frac{x-۵-x-۵}{۲x} = \frac{-۱۰}{۲x} = \frac{-۲(۵)}{۲x} = -\frac{۵}{x}$$

$$۶) \quad \frac{۴}{۳x} + \frac{۳}{۲x}$$

$$LCD = ۶x$$

$$\frac{۴}{۳x} + \frac{۳}{۲x} = \frac{۴}{۳x} \times \frac{۲}{۲} + \frac{۳}{۲x} \times \frac{۳}{۳} = \frac{۸}{۶x} + \frac{۹}{۶x} = \frac{۸+۹}{۶x} = \frac{۱۷}{۶x}$$

$$۷) \quad \frac{۵}{۲y^۲} - \frac{۲}{۷y}$$

$$LCD = ۱۴y^۲$$

$$\frac{۵}{۲y^۲} - \frac{۲}{۷y} = \frac{۵}{۲y^۲} \times \frac{۷}{۷} - \frac{۲}{۷y} \times \frac{۲y}{۲y} = \frac{۳۵}{۱۴y^۲} - \frac{۴y}{۱۴y^۲} = \frac{۳۵-۴y}{۱۴y^۲}$$

$$۸) \quad \frac{x-۳}{x+۴} - \frac{x+۲}{x-۴}$$

$$LCD = (x+۴)(x-۴)$$

$$\begin{aligned} \frac{x-۳}{x+۴} - \frac{x+۲}{x-۴} &= \frac{x-۳}{x+۴} \times \frac{x-۴}{x-۴} - \frac{x+۲}{x-۴} \times \frac{x+۴}{x+۴} = \frac{(x-۳)(x-۴)}{(x+۴)(x-۴)} - \frac{(x+۲)(x+۴)}{(x+۴)(x-۴)} \\ &= \frac{x^۲-۴x-۳x+۱۲-x^۲-۴x-۲x-۸}{(x+۴)(x-۴)} = \frac{-۱۳x+۴}{(x+۴)(x-۴)} \end{aligned}$$

$$۹) \quad \frac{۱}{x-۵} + \frac{۲x-۱۹}{x^۲-x-۲۰} = \frac{۱}{x-۵} + \frac{۲x-۱۹}{(x-۵)(x+۴)}$$

$$LCD = (x-۵)(x+۴)$$

$$\frac{۱}{x-۵} + \frac{۲x-۱۹}{(x-۵)(x+۴)} = \frac{۱}{x-۵} \times \frac{x+۴}{x+۴} + \frac{۲x-۱۹}{(x-۵)(x+۴)}$$

$$= \frac{x+4}{(x-5)(x+4)} + \frac{2x-19}{(x-5)(x+4)} = \frac{x+4+2x-19}{(x-5)(x+4)} = \frac{3x-15}{(x-5)(x+4)}$$

$$= \frac{3(x-5)}{(x-5)(x+4)} = \frac{3}{x+4}$$

$$۱۰) \quad \frac{3}{2x+10} + \frac{8}{3x+15} = \frac{3}{2(x+5)} + \frac{8}{3(x+5)}$$

$$LCD = 6(x+5)$$

$$\frac{3}{2(x+5)} + \frac{8}{3(x+5)} = \frac{3}{2(x+5)} \times \frac{3}{3} + \frac{8}{3(x+5)} \times \frac{2}{2} = \frac{9}{6(x+5)} + \frac{16}{6(x+5)}$$

$$= \frac{9+16}{6(x+5)} = \frac{25}{6(x+5)}$$

$$۱۱) \quad \frac{-2}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2-3x^2} = \frac{-2}{x(x-3)} - \frac{1}{x^2(x-3)}$$

$$LCD = x^2(x-3)$$

$$\frac{-2}{x(x-3)} - \frac{1}{x^2(x-3)} = \frac{-2}{x(x-3)} \times \frac{x}{x} - \frac{1}{x^2(x-3)} = \frac{-2x}{x^2(x-3)} - \frac{1}{x^2(x-3)}$$

$$= \frac{-2x-1}{x^2(x-3)}$$

$$۱۲) \quad \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-b} = 0$$

$$۱۳) \quad \frac{۵}{x-۲} + \frac{x+۴}{۲-x} = \frac{۵}{x-۲} + \frac{x+۴}{-۱(x-۲)} = \frac{۵}{x-۲} - \frac{x+۴}{x-۲} = \frac{۵-x-۴}{x-۲} = \frac{۱-x}{x-۲}$$

$$۱۴) \quad \frac{y+۱}{y^۲-۶y+۸} - \frac{۳}{y^۲-۱۶} = \frac{y+۱}{(y-۴)(y-۲)} - \frac{۳}{(y+۴)(y-۴)}$$

$$LCD = (y+۴)(y-۴)(y-۲)$$

$$\begin{aligned} \frac{y+۱}{(y-۴)(y-۲)} - \frac{۳}{(y+۴)(y-۴)} &= \frac{y+۱}{(y-۴)(y-۲)} \times \frac{y+۴}{y+۴} - \frac{۳}{(y+۴)(y-۴)} \times \frac{y-۲}{y-۲} \\ &= \frac{(y+۱)(y+۴) - ۳(y-۲)}{(y+۴)(y-۴)(y-۲)} = \frac{y^۲+۴y+y+۴-۳y+۶}{(y+۴)(y-۴)(y-۲)} = \frac{y^۲+۲y+۱۰}{(y+۴)(y-۴)(y-۲)} \end{aligned}$$

$$۱۵) \quad \frac{x+۲}{x^۲-۳۶} - \frac{x}{x^۲+۹x+۱۸} = \frac{x+۲}{(x+۶)(x-۶)} - \frac{x}{(x+۶)(x+۳)}$$

$$LCD = (x+۶)(x-۶)(x+۳)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x+۲}{(x+۶)(x-۶)} - \frac{x}{(x+۶)(x+۳)} \\ &= \frac{x+۲}{(x+۶)(x-۶)} \times \frac{x+۳}{x+۳} - \frac{x}{(x+۶)(x+۳)} \times \frac{x-۶}{x-۶} \\ &= \frac{(x+۲)(x+۳) - x(x-۶)}{(x+۶)(x-۶)(x+۳)} = \frac{x^۲+۳x+۲x+۶-x^۲+۶x}{(x+۶)(x-۶)(x+۳)} = \frac{۱۱x+۶}{(x+۶)(x-۶)(x+۳)} \end{aligned}$$

$$۱۶) \quad \frac{۷}{x^۲-x-۲} + \frac{x}{x^۲+۴x+۳} = \frac{۷}{(x-۲)(x+۱)} + \frac{x}{(x+۱)(x+۳)}$$

$$LCD = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{(x-2)(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(x+3)} &= \frac{5}{(x-2)(x+1)} \times \frac{x+3}{x+3} + \frac{x}{(x+1)(x+3)} \times \frac{x-2}{x-2} \\ &= \frac{5(x+3) + x(x-2)}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{5x + 15 + x^2 - 2x}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{x^2 + 3x + 15}{(x-2)(x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

۴.۳ – ساده کردن کسر های مرکب Simplifying Complex Fractions

یک عبارت گویا که صورت ، مخرج و یا هر دو دارای یک یا چند عبارت گویا باشد ، را

عبارت گویای مرکب **Complex Rational Expression** و یا کسر مرکب **Complex Fraction** می نامند .

$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{b}{c}} \quad \frac{\frac{x}{2y^2}}{\frac{6x-2}{9y}} \quad \frac{x + \frac{1}{y}}{y + 1}$$

قسمت های یک کسر مرکب عبارتند از

$$\text{خط کسری اصلی} \quad \frac{\left\{ \frac{x}{y+2} \text{ صورت کسر مرکب} \right\}}{\left\{ y + \frac{1}{y} \text{ مخرج کسر مرکب} \right\}}$$

هدف این بخش ساده کردن کسر های مرکب است. یک کسر مرکب ساده است وقتی که به شکل $\frac{P}{Q}$ باشد. در این عبارت P و Q چند جمله ای هایی هستند که هیچ فاکتور یا عامل مشترک ندارند .

روش اول - ساده کردن یک کسر مرکب از طریق ساده کردن صورت و مخرج و سپس تقسیم کردن

الف - صورت و مخرج کسر مرکب را ساده کنید، بطوری که هر کدام یک کسر باشند .

ب - صورت کسر مرکب را در معکوس مخرج کسر مرکب ضرب کنید.

ج - در صورت امکان ، ساده کنید.

مثال - ساده کنید.

$$۱) \quad \frac{\frac{2x}{27y^2}}{\frac{6x^2}{9}}$$

صورت و مخرج هر کدام یک کسر ساده هستند. پس صورت را در معکوس مخرج ضرب می کنیم. و سپس ساده می کنیم.

$$\frac{\frac{2x}{27y^2}}{\frac{6x^2}{9}} = \frac{2x}{27y^2} \times \frac{9}{6x^2} = \frac{(2x)^1}{(27y^2)(6x^2)} = \frac{2 \times 9 \times x}{3 \times 9 \times y^2 \times 2 \times 3 \times x \times x} = \frac{1}{9xy^2}$$

$$2) \quad \frac{\frac{5x}{x+2}}{\frac{10}{x-2}} = \frac{5x}{x+2} \times \frac{x-2}{10} = \frac{5x(x-2)}{10(x+2)} = \frac{x(x-2)}{2(x+2)}$$

$$3) \quad \frac{\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}}{\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \times \frac{y}{y}}{\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{x}{x}} = \frac{\frac{x}{y^2} + \frac{y}{y^2}}{\frac{y}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \frac{\frac{x+y}{y^2}}{\frac{x+y}{x^2}} = \frac{x+y}{y^2} \times \frac{x^2}{x+y} = \frac{x^2}{y^2}$$

روش دوم - ساده کردن یک کسر مرکب با ضرب کردن صورت و مخرج در کوچک ترین مخرج مشترک

الف - صورت و مخرج کسر مرکب را در کوچک ترین مخرج مشترک کسر های هم صورت و هم مخرج ضرب کنید.

ب - ساده کنید.

مثال - ساده کنید.

$$4) \quad \frac{\frac{5x}{x+2}}{\frac{10}{x-2}}$$

کوچک ترین مخرج مشترک $\frac{5x}{x+2}$ و $\frac{10}{x-2}$ عبارت است از $(x+2)(x-2)$ پس صورت و مخرج کسر مرکب را در این مخرج مشترک ضرب می کنیم.

$$\frac{\frac{5x}{x+2}}{\frac{10}{x-2}} = \frac{\frac{5x}{x+2} \times (x+2)(x-2)}{\frac{10}{x-2} \times (x+2)(x-2)} = \frac{5x(x-2)}{2 \times 10(x+2)} = \frac{x(x-2)}{2(x+2)}$$

$$۵) \frac{\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}}{\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}}$$

کوچک ترین مخرج مشترک $\frac{1}{x}$ و $\frac{y}{x^2}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y^2}$ عبارت است از x^2y^2 پس

$$\frac{\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}}{\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{y^2} \times x^2y^2 + \frac{1}{y} \times x^2y^2}{\frac{y}{x^2} \times x^2y^2 + \frac{1}{x} \times x^2y^2} = \frac{x^2 + x^2y}{y^2 + xy^2} = \frac{x^2(x+y)}{y^2(x+y)} = \frac{x^2}{y^2}$$

ساده کردن عبارت ها یی که دارای توان های منفی هستند.

برای این کار ، توان های منفی را به توان های مثبت تبدیل می کنیم و سپس کسر مرکب بدست آمده را ساده می کنیم.

یاد آوری - تبدیل توان های منفی به توان های مثبت در بخش توان ها بحث کردیم.

مثال - ساده کنید.

$$۶) \frac{x^{-1} + 2xy^{-1}}{x^{-2} - x^{-2}y^{-1}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{2x}{y}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2y}}$$

کوچک ترین مخرج مشترک $\frac{1}{x^2y}$ و $\frac{1}{x^2}$ و $\frac{2x}{y}$ و $\frac{1}{x}$ عبارت است از x^2y

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{2x}{y}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2y}} = \frac{\frac{1}{x} \times x^2y + \frac{2x}{y} \times x^2y}{\frac{1}{x^2} \times x^2y - \frac{1}{x^2y} \times x^2y} = \frac{xy + 2x^2}{y - 1}$$

تمرینات ۴.۳

ساده کنید.

$$۱) \frac{\frac{۱۰}{۳x}}{\frac{۵}{۶x}}$$

$$۲) \frac{۱ + \frac{۲}{۵}}{۲ + \frac{۳}{۵}}$$

$$۳) \frac{\frac{۴}{x-۱}}{\frac{x}{x-۱}}$$

$$۴) \frac{۱ - \frac{۲}{x}}{x + \frac{۴}{۹x}}$$

$$۵) \frac{\frac{۴x^۲ - y^۲}{xy}}{\frac{۲}{y} - \frac{۱}{x}}$$

$$۶) \frac{\frac{x+1}{3}}{\frac{2x-1}{6}}$$

$$۷) \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{9}{x}}$$

$$۸) \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{x + \frac{8}{x^2}}$$

$$۹) \frac{\frac{4}{5-x} + \frac{5}{x-5}}{\frac{2}{x} + \frac{3}{x-5}}$$

$$۱۰) \frac{\frac{x+2}{x} - \frac{2}{x-1}}{\frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x-1}}$$

$$۱۱) \frac{x^{-1}}{x^{-2} + y^{-2}}$$

$$۱۲) \frac{۲a^{-۱} + ۳b^{-۲}}{a^{-۱} - b^{-۱}}$$

$$۱۳) \frac{۱}{x - x^{-۱}}$$

پاسخ تمرینات ۴.۳

ساده کنید.

$$۱) \frac{\frac{۱۰}{۳x}}{\frac{۵}{۶x}} = \frac{۱۰}{۳x} \times \frac{۶x}{۵} = \frac{۲ \times \cancel{۵}}{\cancel{۳}x} \times \frac{۲ \times \cancel{۳}x}{\cancel{۵}} = ۴$$

$$۲) \frac{۱ + \frac{۲}{۵}}{۲ + \frac{۳}{۵}} = \frac{\frac{۵+۲}{۵}}{\frac{۱۰+۳}{۵}} \times \frac{۷}{۱۳} = \frac{۷}{\cancel{۵}} \times \frac{\cancel{۵}}{۱۳} = \frac{۷}{۱۳}$$

$$۳) \frac{\frac{۴}{x-۱}}{\frac{x}{x-۱}} = \frac{۴}{\cancel{x-۱}} \times \frac{\cancel{x-۱}}{x} = \frac{۴}{x}$$

$$۴) \frac{۱ - \frac{۲}{x}}{x + \frac{۴}{۹x}} = \frac{\frac{x-۲}{x}}{\frac{۹x^۲+۴}{۹x}} = \frac{x-۲}{\cancel{x}} \times \frac{۹\cancel{x}}{۹x^۲+۴} = \frac{۹(x-۲)}{۹x^۲+۴}$$

$$۵) \frac{\frac{x^2 - y^2}{xy}}{\frac{2}{y} - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{(x+y)(x-y)}{xy}}{\frac{x-y}{xy}} = \frac{(x+y)(x-y)}{xy} \times \frac{xy}{x-y} = x+y$$

$$۶) \frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x-1}{6}} = \frac{x+1}{2} \times \frac{2 \times 3}{x-1} = \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$۷) \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{9}{x}} = \frac{\frac{2x+3}{x^2}}{\frac{4-9x}{x^2}} = \frac{2x+3}{4-9x} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{2x+3}{4-9x}$$

$$۸) \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{x + \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{x+2}{x^2}}{\frac{x^3+4}{x^2}} = \frac{x+2}{x^3+4} \times \frac{x^2}{x^3+4} = (x+2) \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{1}{(x^2-2x+4)}$$

$$۹) \frac{\frac{4}{5-x} + \frac{5}{x-5}}{\frac{2}{x} + \frac{3}{x-5}} = \frac{-\frac{4}{x-5} + \frac{5}{x-5}}{\frac{2(x-5)+3x}{x(x-5)}} = \frac{\frac{-4+5}{x-5}}{\frac{2x-10+3x}{x(x-5)}} = \frac{\frac{1}{x-5}}{\frac{5x-10}{x(x-5)}} = \frac{1}{x-5} \times \frac{x(x-5)}{5x-10} = \frac{x}{5x-10}$$

$$\begin{aligned}
 ١٥) \quad \frac{\frac{x+2}{x} - \frac{2}{x-1}}{\frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x-1}} &= \frac{\frac{x+2}{x} \times x(x-1) - \frac{2}{x-1} \times x(x-1)}{\frac{x+1}{x} \times x(x-1) + \frac{x+1}{x-1} \times x(x-1)} = \frac{(x+2)(x-1) - 2x}{(x+1)(x-1) + x(x+1)} \\
 &= \frac{x^2 - x + 2x - 2 - 2x}{(x+1)(x-1+x)} = \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(2x-1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(2x-1)} = \frac{x-2}{2x-1}
 \end{aligned}$$

$$١١) \quad \frac{x^{-1}}{x^{-2} + y^{-2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 y^2}{\frac{1}{x^2} \times x^2 y^2 + \frac{1}{y^2} \times x^2 y^2} = \frac{xy^2}{y^2 + x^2}$$

$$١٢) \quad \frac{2a^{-1} + 3b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{\frac{2}{a} + \frac{3}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{2}{a} \times ab^2 + \frac{3}{b^2} \times ab^2}{\frac{1}{a} \times ab^2 - \frac{1}{b} \times ab^2} = \frac{2b^2 + 3a}{b^2 - ab}$$

$$١٣) \quad \frac{1}{x - x^{-1}} = \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x^2 - 1}{x}} = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

۴.۴ – حل معادله هایی که شامل عبارت های کسری هستند

Solving Equations Containing Rational Expressions

در این بخش به حل معادله هایی که دارای عبارت های کسری هستند می پردازیم. اما قبل از پرداختن به این موضوع می خواهیم مطمئن باشیم که فرق بین معادله و عبارت را می دانیم.

یک معادله Equation دارای نماد مساوی است اما یک عبارت Expression دارای نماد مساوی نیست.

معادله

عبارت

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{6}$$

برای حل یک معادله که دارای عبارت کسری است، اول هر دو طرف معادله را در کوچک ترین مخرج مشترک تمام عبارت ها ضرب کنید تا کسر ها حذف شوند و سپس معادله را طبق معمول حل کنید.

نکته مهم – روش بالا فقط در مورد حل معادله کاربرد دارد و نمی توان این روش را هنگام انجام عملیات روی کسر ها بکار برد.

مثال – معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \quad \frac{4x}{5} + \frac{3}{2} = \frac{3x}{10}$$

$$LCD = ۱۰$$

$$۱۰ \left(\frac{4x}{5} + \frac{3}{2} \right) = ۱۰ \left(\frac{3x}{10} \right)$$

$$۸x + ۱۵ = ۳x$$

$$۸x - ۳x = -۱۵$$

همان طور که ملاحظه می کنید $۳x$ را از سمت راست مساوی به سمت چپ مساوی منتقل کردیم، البته با تغییر علامت. به همین ترتیب عدد ۱۵ را از سمت چپ به سمت راست منتقل کردیم و ضمنا علامت آنرا هم تغییر دادیم.

$$۵x = -۱۵$$

$$x = -\frac{15}{5} = -3$$

$$\{-3\}$$

نکته مهم – تفاوت معادله های این بخش با بخش های قبلی که در آنها کسر وجود داشت این است که در این بخش متغیر ممکن است در مخرج کسر هم باشد. میدانیم که متغیر نمی تواند مقادیری داشته باشد که در نتیجه مخرج کسر صفر شود. پس اگر هنگام حل معادله ای به چنین مساله ای روبرو شدیم باید آن مقدار را از مجموعه جواب ها حذف کنیم.

$$2) \quad \frac{3}{x} - \frac{x+21}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$LCD = 3x$$

$$3x \left(\frac{3}{x} - \frac{x+21}{3x} \right) = 3x \left(\frac{5}{3} \right)$$

$$9 - x - 21 = 5x$$

$$-x - 12 = 5x$$

$$-x - 5x = 12$$

$$-6x = 12$$

$$x = \frac{12}{-6} = -2$$

$$\{-2\}$$

$$3) \quad \frac{x+6}{x-2} = \frac{2(x+2)}{x-2}$$

$$LCD = x - 2$$

$$(x-2) \left(\frac{x+6}{x-2} \right) = (x-2) \left(\frac{2x+4}{x-2} \right)$$

$$x + 6 = 2x + 4$$

$$x - 2x = 4 - 6$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

اما اگر عدد ۲ را در مخرج کسر قرار دهیم ، حاصل صفر می شود ، پس نمی توانیم عدد ۲ را جواب مساله بدانیم. این معادله جوابی ندارد. یعنی مجموعه جواب های این معادله ϕ است. و یا $\{ \}$

$$4) \quad \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x-1}$$

$$LCD = x(2x-1)$$

$$x(2x-1)\left(\frac{2x}{2x-1}\right) + x(2x-1)\left(\frac{1}{x}\right) = x(2x-1)\left(\frac{1}{2x-1}\right)$$

$$2x^2 + 2x - 1 = x$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$(2x-1)(x+1) = 0$$

$$2x-1=0 \quad \text{یا} \quad x+1=0$$

$$2x=1 \quad \text{یا} \quad x=-1$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad x=-1$$

اما اگر بجای متغیر عدد $\frac{1}{2}$ قرار دهیم مخرج کسر صفر می شود. پس این جواب را قبول نمی کنیم. لذا جواب معادله ۱ - است.

$$\{-1\}$$

$$۵) \quad \frac{۲x}{x-۳} + \frac{۶-۲x}{x^2-۹} = \frac{x}{x+۳}$$

$$\frac{۲x}{x-۳} + \frac{۶-۲x}{(x+۳)(x-۳)} = \frac{x}{x+۳}$$

$$LCD = (x-۳)(x+۳)$$

$$(x-۳)(x+۳) \left(\frac{۲x}{x-۳} + \frac{۶-۲x}{(x-۳)(x+۳)} \right) = (x-۳)(x+۳) \left(\frac{x}{x+۳} \right)$$

$$(x+۳)(۲x) + (۶-۲x) = x(x-۳)$$

$$۲x^2 + ۶x + ۶ - ۲x = x^2 - ۳x$$

$$۲x^2 + ۴x + ۶ = x^2 - ۳x$$

$$x^2 + ۷x + ۶ = ۰$$

$$(x+۱)(x+۶) = ۰$$

$$x+۱=۰ \quad \text{یا} \quad x+۶=۰$$

$$x=-۱ \quad \text{یا} \quad x=-۶$$

$$\{-۱, -۶\}$$

تمرینات ۴.۴ - معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \quad \frac{x}{۲} - \frac{x}{۳} = ۱۲$$

$$۲) \quad \frac{۵}{x} = \frac{۲۰}{۱۲}$$

$$۳) \quad \frac{۵}{x-۲} - \frac{۲}{x+۴} = -\frac{۴}{x^۲+۲x-۸}$$

$$۴) \quad \frac{۱}{x-۱} = \frac{۲}{x+۱}$$

$$۵) \quad \frac{۱}{x-۴} - \frac{۳x}{x^۲-۱۶} = \frac{۲}{x+۴}$$

$$۶) \quad \frac{۱}{x-۴} = \frac{۸}{x^۲-۱۶}$$

$$۷) \quad \frac{۱}{x-۲} - \frac{۲}{x^۲-۲x} = ۱$$

$$۸) \quad \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{x+۱} = \frac{۱}{۳x^۲+۳x}$$

$$۹) \quad \frac{۱}{x} - \frac{x}{۲۵} = ۰$$

$$۱۰) \quad ۵ - \frac{۲}{۲y-۵} = \frac{۳}{۲y-۵}$$

$$۱۱) \quad \frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x+2}$$

$$۱۲) \quad \frac{1}{a-3} + \frac{2}{a+3} = \frac{1}{a^2-9}$$

$$۱۳) \quad \frac{64}{x^2-16} + 1 = \frac{2x}{x-4}$$

$$۱۴) \quad \frac{-15}{4y+1} + 4 = y$$

$$۱۵) \quad \frac{28}{x^2-9} + \frac{2x}{x-3} + \frac{6}{x+3} = 0$$

پاسخ تمرینات ۴.۴

$$۱) \quad \frac{x}{۲} - \frac{x}{۳} = ۱۲$$

$$LCD = ۶$$

$$۶ \left(\frac{x}{۲} - \frac{x}{۳} \right) = ۶(۱۲)$$

$$۳x - ۲x = ۷۲$$

$$x = ۷۲$$

$$\{۷۲\}$$

$$۲) \quad \frac{۵}{x} = \frac{۲۰}{۱۲}$$

$$LCD = ۱۲x$$

$$۱۲x \left(\frac{۵}{x} \right) = ۱۲x \left(\frac{۲۰}{۱۲} \right)$$

$$۶۰ = ۲۰x$$

$$x = \frac{۶۰}{۲۰} = ۳$$

$$\{۳\}$$

$$۳) \quad \frac{۵}{x-۲} - \frac{۲}{x+۴} = -\frac{۴}{x^2+۲x-۸}$$

$$\frac{۵}{x-۲} - \frac{۲}{x+۴} = -\frac{۴}{(x+۴)(x-۲)}$$

$$LCD = (x + 4)(x - 2)$$

$$(x + 4)(x - 2) \left(\frac{5}{x - 2} - \frac{2}{x + 4} \right) = (x + 4)(x - 2) \left(-\frac{4}{(x + 4)(x - 2)} \right)$$

$$5(x + 4) - 2(x - 2) = -4$$

$$5x + 20 - 2x + 4 = -4$$

$$3x = -28$$

$$x = -\frac{28}{3}$$

$$\left(-\frac{28}{3} \right)$$

$$4) \quad \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x + 1}$$

$$LCD = (x - 1)(x + 1)$$

$$(x - 1)(x + 1) \left(\frac{1}{x - 1} \right) = (x - 1)(x + 1) \left(\frac{2}{x + 1} \right)$$

$$(1)(x + 1) = 2(x - 1)$$

$$x + 1 = 2x - 2$$

$$3 = x$$

$$\{3\}$$

$$۵) \quad \frac{1}{x-4} - \frac{3x}{x^2-16} = \frac{2}{x+4}$$

$$\frac{1}{x-4} - \frac{3x}{(x-4)(x+4)} = \frac{2}{x+4}$$

$$LCD = (x-4)(x+4)$$

$$(x-4)(x+4) \left(\frac{1}{x-4} - \frac{3x}{(x-4)(x+4)} \right) = (x-4)(x+4) \left(\frac{2}{x+4} \right)$$

$$x+4-3x=2(x-4)$$

$$-2x+4=2x-8$$

$$-4x=-12$$

$$x = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\{3\}$$

$$۶) \quad \frac{1}{x-4} = \frac{8}{x^2-16}$$

میدانیم که اگر

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

باشد ، پس

$$ad = bc$$

این عمل را طرفین - وسطین کردن می نامند و یا بطور ضربدر Cross Product عمل ضرب انجام دادن . معادله بالا را می توانیم به صورت زیر بنویسیم و حل کنیم .

$$(1)(x^2-16) = (8)(x-4)$$

$$x^2 - 16 = 8x - 32$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

اما اگر عدد ۴ را در معادله اصلی بکار ببریم ، مخرج کسر صفر می شود . پس معادله جوابی ندارد . مجموعه جواب های این معادله ϕ یا $\{\}$ است.

$$۷) \quad \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x} = 1$$

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)} = 1$$

$$LCD = x(x-2)$$

$$x(x-2) \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)} \right) = (1)(x(x-2))$$

$$x-2 = x^2 - 2x$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x-2=0 \quad x-1=0$$

$$x=2 \quad x=1$$

اما $x=2$ کسر معادله را صفر می کند، پس قابل قبول نیست.

$$\{1\}$$

$$۸) \quad \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3x^2 + 3x}$$

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3x(x+1)}$$

$$LCD = 3x(x+1)$$

$$3x(x+1) \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} \right) = 3x(x+1) \left(\frac{1}{3x(x+1)} \right)$$

$$3(x+1) - 3x = 1$$

$$3x + 3 - 3x - 1 = 0$$

$$-3x + 1 = 0$$

$$-3x = -1$$

$$x = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$۹) \quad \frac{1}{x} - \frac{x}{25} = 0$$

$$LCD = 25x$$

$$25x \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{25} \right) = 25x(0)$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 5 = 0$$

$$x = 5 \quad \text{یا} \quad x = -5$$

$$\{-5, 5\}$$

$$10) \quad 5 - \frac{2}{2y - 5} = \frac{3}{2y - 5}$$

$$LCD = 2y - 5$$

$$(2y - 5) \left(5 - \frac{2}{2y - 5} \right) = (2y - 5) \left(\frac{3}{2y - 5} \right)$$

$$5(2y - 5) - 2 = 3$$

$$10y - 25 - 2 = 3$$

$$10y - 3 = 0$$

$$10y = 3$$

$$y = \frac{3}{10} = 3$$

$$\{3\}$$

$$11) \quad \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{1}{x + 2}$$

طرفین وسطین می کنیم.

$$(x+3)(x+2) = (1)(x+2)$$

$$x^2 + 2x + 3x + 6 = x + 2$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x+2=0$$

$$x = -2$$

اما $x = -2$ مخرج کسر را صفر می کند. پس این معادله جوابی ندارد. مجموعه جواب های این معادله ϕ یا $\{ \}$ است.

$$۱۲) \quad \frac{1}{a-3} + \frac{2}{a+3} = \frac{1}{a^2-9}$$

$$\frac{1}{a-3} + \frac{2}{a+3} = \frac{1}{(a-3)(a+3)}$$

$$LCD = (a-3)(a+3)$$

$$(a-3)(a+3) \left(\frac{1}{a-3} + \frac{2}{a+3} \right) = (a-3)(a+3) \left(\frac{1}{(a-3)(a+3)} \right)$$

$$a+3+2a-6=1$$

$$3a=4$$

$$a = \frac{4}{3}$$

$$\left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

$$۱۳) \quad \frac{۶۴}{x^2 - ۱۶} + ۱ = \frac{۲x}{x - ۴}$$

$$\frac{۶۴}{(x - ۴)(x + ۴)} + ۱ = \frac{۲x}{x - ۴}$$

$$LCD = (x - ۴)(x + ۴)$$

$$(x - ۴)(x + ۴) \left(\frac{۶۴}{(x - ۴)(x + ۴)} + ۱ \right) = (x - ۴)(x + ۴) \left(\frac{۲x}{x - ۴} \right)$$

$$۶۴ + (x - ۴)(x + ۴) = ۲x(x + ۴)$$

$$۶۴ + x^2 + \color{red}{۴x} - \color{red}{۴x} - ۱۶ = ۲x^2 + ۸x$$

$$۶۴ + x^2 - ۱۶ = ۲x^2 + ۸x$$

$$-x^2 - ۸x + ۴۸ = ۰$$

$$x^2 + ۸x - ۴۸ = ۰$$

$$(x - ۴)(x + ۱۲) = ۰$$

$$x - ۴ = ۰ \quad x + ۱۲ = ۰$$

$$x = ۴ \quad x = -۱۲$$

$$\{-۱۲\}$$

$$۱۴) \quad \frac{-۱۵}{۴y + ۱} + ۴ = y$$

$$LCD = ۴y + ۱$$

$$(۴y + ۱) \left(\frac{-۱۵}{۴y + ۱} + ۴ \right) = (۴y + ۱)y$$

$$-۱۵ + ۴(۴y + ۱) = ۴y^۲ + y$$

$$-۱۵ + ۱۶y + ۴ - ۴y^۲ - y = ۰$$

$$-۴y^۲ + ۱۵y - ۱۱ = ۰$$

$$۴y^۲ - ۱۵y + ۱۱ = ۰$$

$$(۴y - ۱۱)(y - ۱) = ۰$$

$$۴y - ۱۱ = ۰ \quad \text{یا} \quad y - ۱ = ۰$$

$$۴y = ۱۱ \quad \text{یا} \quad y = ۱$$

$$y = \frac{۱۱}{۴} \quad \text{یا} \quad y = ۱$$

$$\left\{ \frac{۱۱}{۴}, ۱ \right\}$$

$$۱۵) \quad \frac{۲۸}{x^۲ - ۹} + \frac{۲x}{x - ۳} + \frac{۶}{x + ۳} = ۰$$

$$\frac{۲۸}{(x - ۳)(x + ۳)} + \frac{۲x}{x - ۳} + \frac{۶}{x + ۳} = ۰$$

$$LCD = (x - ۳)(x + ۳)$$

$$(x - ۳)(x + ۳) \left(\frac{۲۸}{(x - ۳)(x + ۳)} + \frac{۲x}{x - ۳} + \frac{۶}{x + ۳} \right) = ۰$$

$$۲۸ + ۲x(x + ۳) + ۶(x - ۳) = ۰$$

$$۲۸ + ۲x^۲ + ۶x + ۶x - ۱۸ = ۰$$

$$۲x^۲ + ۱۲x + ۱۰ = ۰$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x + 5)(x + 1) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0$$

$$x = -5 \quad \text{یا} \quad x = -1$$

$$\{-5, -1\}$$

۴.۵ – معادله های گویا و حل مسائل Rational Equations And Problem Solving

حل معادله های گویا برای یک متغیر معین Solving Rational Equations For A Specified Variable

در بخش های قبل معادله ها را برای یک متغیر مشخص حل کردیم. در این بخش در مورد معادله های گویا بحث می کنیم. می دانید که معادله های گویا آنهایی هستند که متغیر در مخرج کسر هم یافت می شود. همان روشی را که قبلا بحث کردیم در اینجا تکرار می کنیم.

الف - هر دو طرف معادله را در کوچک ترین مخرج مشترک کلیه مخرج های معادله ضرب کنید، تا کسر ها حذف شوند.

ب - با بکار بردن خاصیت توزیعی، پرانتز ها، کرشه ها و آکولاد ها را حذف کنید.

ج - جملات متشابه در هر طرف معادله را با هم ادغام کنید.

د - با بکار بردن خاصیت جمع تساوی ها، معادله اصلی را به صورت معادله متشابه و یا هم ارز معادله اولیه بنویسید، بطوری که آن جمله ای که دارای آن متغیر مشخص است، در یک طرف معادله قرار گیرد.

ه - با بکار بردن خاصیت ضرب تساوی ها، متغیر مشخص را به تنهایی در یک طرف معادله قرار دهید.

مثال ۱ – معادله زیر را برای متغیر x حل کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

$$LCD = xyz$$

$$xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \right)$$

$$yz + xz = xy$$

$$xz - xy = -yz$$

$$x(z - y) = -yz$$

$$x = \frac{-yz}{z - y} = \frac{yz}{-(z - y)} = \frac{yz}{y - z}$$

حل مسائلی که دارای کسر های گویا هستند.

مثال ۲ - اگر یک عدد را از صورت کسر $\frac{9}{19}$ کم کنیم و باز همان عدد را به مخرج اضافه کنیم، حاصل $\frac{1}{3}$ است. آن عدد را پیدا کنید.

حل

آن عدد $x =$

$$\frac{9-x}{19+x} = \frac{1}{3}$$

طرفین وسطین می کنیم

$$3(9-x) = 1(19+x)$$

$$27-3x = 19+x$$

$$-3x - x = 19 - 27$$

$$-4x = -8$$

$$x = \frac{-8}{-4} = 2$$

مثال ۳ - مهران می تواند خانه را در مدت ۴ ساعت تمیز کند. در صورتی که شاهین می تواند این کار را در مدت ۵ ساعت انجام دهد. آنها توافق کردند که تمیز کردن خانه را با هم انجام دهند تا بتوانند سریال مورد علاقه شان که تا ۲ ساعت دیگر شروع می شود را تماشا کنند. پیدا کنید چند ساعت کار تمیز کردن خانه طول می کشد ، اگر آنها با هم کار کنند. آیا می توانند تمیز کردن خانه را قبل از شروع سریال تمام کنند؟

حل

مقدار کاری که در یک ساعت انجام میشود	ساعات لازم برای اتمام کار	
$\frac{1}{4}$	۴	مهران
$\frac{1}{5}$	۵	شاهین
$\frac{1}{t}$	t	باهم

مقدار کاری که با هم در مدت یک ساعت انجام می‌دهند = مقدار کاری که شاهین در مدت یک ساعت انجام می‌دهد + مقدار کاری که مهران در مدت یک ساعت انجام می‌دهد

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{t}$$

معادله را حل می‌کنیم.

$$LCD = 20t$$

$$20t \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = 20t \left(\frac{1}{t} \right)$$

$$5t + 4t = 20$$

$$9t = 20$$

$$t = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9} \text{ ساعت}$$

آنها نمی‌توانند کار را به موقع تمام کنند.

مثال ۴ – امید علاقمند است که در رودخانه قایق رانی کند. اگر او مسافت ۷۲ کیلو متر برخلاف جریان آب در مدت $1\frac{1}{3}$ برابر مدتی طی کند که موافق جریان آب، و اگر سرعت قایق بر روی آب ساکن ۳۰ کیلو متر در ساعت باشد، سرعت جریان آب را حساب کنید.

حل

سرعت جریان آب v

می‌دانیم که مسافت طی شده مساوی است با حاصل ضرب سرعت در مدت زمان طی شده.

$$d = vt$$

در نتیجه

$$t = \frac{d}{v}$$

زمان	سرعت	مسافت	
$\frac{۷۲}{۳۰-v}$	$۳۰-v$	۷۲	خلاف جریان
$\frac{۷۲}{۳۰+v}$	$۳۰+v$	۷۲	موافق جریان

طبق فرض مساله زمان طی شده خلاف جریان آب یک و نیم برابر زمان طی شده موافق جریان آب. پس

$$\frac{۷۲}{۳۰-v} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۷۲}{۳۰+v}$$

$$LCD = ۲(۳۰-v)(۳۰+v)$$

$$۲(۳۰-v)(۳۰+v) \left(\frac{۷۲}{۳۰-v} \right) = ۲(۳۰-v)(۳۰+v) \left(\frac{۳}{۲} \times \frac{۷۲}{۳۰+v} \right)$$

$$۲(۷۲)(۳۰+v) = ۳(۷۲)(۳۰-v)$$

$$۴۳۲۰ + ۱۴۴v = ۶۴۸۰ - ۲۱۶v$$

$$۱۴۴v + ۲۱۶v = ۶۴۸۰ - ۴۳۲۰$$

$$۳۶۰v = ۲۱۶۰$$

$$v = \frac{۲۱۶۰}{۳۶۰} = ۶$$

سرعت جریان آب ۶ کیلو متر در ساعت است.

تمرینات ۴.۵

معادله های زیر را برای متغیر های مشخص شده به رنگ قرمز حل کنید.

$$۱) \quad F = \frac{9}{5}C + 32 \quad \text{برای } C$$

$$۲) \quad Q = \frac{A-I}{L} \quad \text{برای } I$$

$$۳) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{برای } R$$

$$۴) \quad S = \frac{n(a+L)}{2} \quad \text{برای } n$$

$$۵) \quad A = \frac{h(a+b)}{2} \quad \text{برای } b$$

$$۶) \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{برای } T_2$$

$$۷) \quad f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \quad \text{برای } f_2$$

مسائل زیر را حل کنید.

۸ – مجموع یک عدد و پنج برابر عکس آن عدد میشود شش ، آن عدد یا اعداد را پیدا کنید.

۹- اگر یک عدد به صورت $\frac{12}{41}$ اضافه شود و دو برابر آن عدد به مخرج $\frac{12}{41}$ اضافه شود، نتیجه کسر $\frac{1}{3}$ خواهد بود. آن عدد را پیدا کنید.

در فیزیک، وقتی دو مقاوم Resistor به طور موازی به یک دیگر وصل شوند، مقاومت توأم Combined Resistance آنها از رابطه زیر بدست می آید. اگر مقاومت مقاوم ها R_1 و R_2 و مقاومت توأم آنها را R بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

فرمول بالا را می توان برای هر تعداد مقاوم موازی تعمیم داد.

۱۰- اگر مقاومت توأم دو مقاوم ۲ اهم و مقاومت یکی از آنها ۳ اهم باشد، مقاومت دیگری را پیدا کنید.

۱۱- اگر سه مقاوم به صورت موازی یک مدار تشکیل دهند و $R_1 = 5$ ، $R_2 = 6$ ، $R_3 = 2$ باشد، مطلوب است مقاومت توأم آنها.

۱۲- مراد یک پروژه را در مدت ۲۶ ساعت تمام می کند. بهنام همان پروژه را در مدت ۳۹ ساعت انجام می دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، چند ساعت طول می کشد تا پروژه تمام شود؟

۱۳- آقای راستی مسافت ۱۵۰ کیلو متر را با اتومبیل طی کرد. در همین مدت یک هوا پیمای شخصی مسافت ۶۰۰ کیلو متر را پیمود. سرعت هوا پیمای ۱۵۰ کیلو متر در ساعت بیشتر از سرعت اتومبیل بود. سرعت هوا پیمای را حساب کنید.

۱۴- سرعت جریان یک رود خانه ۵ کیلو متر در ساعت است. اگر یک قایق مسافت ۲۰ کیلو متر در جهت جریان آب را در همان مدت زمان طی کند که اگر ۱۰ کیلو متر بر خلاف جریان آب حرکت می کرد، سرعت قایق را بر روی آب ساکن پیدا کنید.

۱۵ - مجموع وارونه دو عدد صحیح متوالی $\frac{15}{56}$ - است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۱۶ - دو قطار در یک زمان ایستگاه را ترک و در جهت مخالف یک دیگر حرکت می کنند. یکی از قطار ها ۱۵ کیلو متر در ساعت سریع تر از دیگری حرکت می کند. در مدت ۶ ساعت این دو قطار ۳۶۰ کیلو متر از هم فاصله دارند. سرعت هر کدام را حساب کنید.

۱۷ - دو نفر در مسابقه دو استقامت شرکت کردند. یکی از آنها با سرعت ۸ کیلو متر در ساعت و دیگری با سرعت ۶ کیلو متر در ساعت از یک نقطه شروع به دویدن کردند. دونه کند تر نیم ساعت دیر تر از دونه سریع تر به انتهای خط مسابقه رسید. مسافت مسابقه را پیدا کنید.

۱۸ - رئیس یک شرکت برای انجام یک ماموریت مسافت ۱۰۸۰ کیلو متر را با هواپیما و سپس مسافت ۲۴۰ کیلو متر را با اتومبیل طی کرد. اگر زمان رانندگی با اتومبیل یک ساعت طولانی تر از سفر با هوا پیما باشد. و اگر سرعت هوا پیما ۶ برابر سرعت اتومبیل باشد، مدت زمان سفر با اتومبیل و زمان سفر با هوا پیما را حساب کنید.

۱۹ - هنگام آزمایش یک اتومبیل جدید ، رئیس شرکت سازنده ، مسافت ۱۰ کیلو متر را بر خلاف جهت باد ۳ کیلو متر در ساعت پیمود. در یک آزمایش دیگر مسافت ۱۱ کیلو متر را موافق جریان همان باد ۳ کیلو متر در ساعت پیمود. مطلوب است سرعت اتومبیل در هوای ساکن و بدون باد اگر زمان هر دو آزمایش یکسان باشد.

پاسخ تمرینات ۴.۵

معادله های زیر را برای متغیر های مشخص شده به رنگ قرمز حل کنید.

$$۱) \quad C \text{ برای } F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$LCD = 5$$

$$5F = 5\left(\frac{9}{5}C + 32\right)$$

$$5F = 9C + 5 \times 32$$

$$5F - 5 \times 32 = 9C$$

$$\frac{5F - 5 \times 32}{9} = \frac{9C}{9}$$

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$۲) \quad I \text{ برای } Q = \frac{A - I}{L}$$

طرفین وسطین می کنیم.

$$A - I = LQ$$

$$-I = LQ - A$$

$$I = A - LQ$$

$$۳) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{برای } R$$

$$LCD = RR_1R_2$$

$$RR_1R_2 \left(\frac{1}{R} \right) = RR_1R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$۴) \quad S = \frac{n(a+L)}{2} \quad \text{برای } n$$

$$n(a+L) = 2S$$

$$\frac{n(a+L)}{a+L} = \frac{2S}{a+L}$$

$$n = \frac{2S}{a+L}$$

$$۵) \quad A = \frac{h(a+b)}{2} \quad \text{برای } b$$

$$h(a+b) = 2A$$

$$ah + bh = 2A$$

$$bh = 2A - ah$$

$$\frac{bh}{h} = \frac{2A - ah}{h}$$

$$b = \frac{2A - ah}{h}$$

$$۶) \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{برای } T_2$$

$$T_2 P_1 V_1 = T_1 P_2 V_2$$

$$\frac{T_2 P_1 V_1}{P_1 V_1} = \frac{T_1 P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

$$T_2 = \frac{T_1 P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

$$۷) \quad f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \quad \text{برای } f_2$$

$$f(f_1 + f_2) = f_1 f_2$$

$$f f_1 + f f_2 = f_1 f_2$$

$$f f_2 - f_1 f_2 = -f f_1$$

$$f_2(f - f_1) = -f f_1$$

$$\frac{f_2(f - f_1)}{(f - f_1)} = \frac{-f f_1}{(f - f_1)}$$

$$f_2 = \frac{-f f_1}{f - f_1} = \frac{f f_1}{f_1 - f}$$

مسائل زیر را حل کنید.

۸ - مجموع یک عدد و پنج برابر عکس آن عدد میشود شش ، آن عدد یا اعداد را پیدا کنید.

حل

$$x = \text{آن عدد}$$

$$x + 5\left(\frac{1}{x}\right) = 6$$

$$x + \frac{5}{x} = 6$$

$$LCD = x$$

$$x\left(x + \frac{5}{x}\right) = x(6)$$

$$x^2 + 5 = 6x$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 5)(x - 1) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 1 = 0$$

$$x = 5 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

آن اعداد ۵ و ۱ هستند.

۹ - اگر یک عدد به صورت $\frac{۱۲}{۴۱}$ اضافه شود و دو برابر آن عدد به مخرج $\frac{۱۲}{۴۱}$ اضافه شود، نتیجه کسر $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود.
آن عدد را پیدا کنید.

حل

آن عدد $x =$

$$\frac{x + ۱۲}{۲x + ۴۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$۳(x + ۱۲) = ۱(۲x + ۴۱)$$

$$۳x + ۳۶ = ۲x + ۴۱$$

$$x = ۵$$

در فیزیک، وقتی دو مقاوم Resistor به طور موازی به یک دیگر وصل شوند، مقاومت توام

Combined Resistance آنها از رابطه زیر بدست می آید. اگر مقاومت مقاوم ها $R_۱$ و $R_۲$ و مقاومت توام آنها را R بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{R} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲}$$

فرمول بالا را می توان برای هر تعداد مقاوم موازی تعمیم داد.

۵-۱. اگر مقاومت توام دو مقاوم ۲ اهم و مقاومت یکی از آنها ۳ اهم باشد، مقاومت دیگری را پیدا کنید.

حل

$$\frac{۱}{R} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲}$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R_۲}$$

$$LCD = 6R_7$$

$$6R_7 \left(\frac{1}{7} \right) = 6R_7 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{R_7} \right)$$

$$3R_7 = 2R_7 + 6$$

$$R_7 = 6 \text{ اهم}$$

۱۱- اگر سه مقاوم به صورت موازی یک مدار تشکیل دهند و $R_1 = 5$ $R_2 = 6$ $R_3 = 2$ باشد، مطلوب است مقاومت توأم آنها.

حل

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$LCD = 30R$$

$$30R \left(\frac{1}{R} \right) = 30R \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

$$30 = 6R + 5R + 15R$$

$$30 = 26R$$

$$R = \frac{30}{26} = \frac{15}{13} \text{ اهم}$$

۱۲ – مراد یک پروژه را در مدت ۲۶ ساعت تمام می کند. بهنام همان پروژه را در مدت ۳۹ ساعت انجام می دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، چند ساعت طول می کشد تا پروژه تمام شود؟

حل

مقدار کاری که در یک ساعت انجام میشود	ساعت لازم برای انجام کار	
$\frac{1}{26}$	۲۶	مراد
$\frac{1}{39}$	۳۹	بهنام
$\frac{1}{x}$	x	با هم

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{26} + \frac{1}{39}$$

$$LCD = 2 \times 3 \times 13 \times x = 78x$$

$$78x \left(\frac{1}{x} \right) = 78x \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{39} \right)$$

$$78 = 3x + 2x$$

$$5x = 78$$

$$x = \frac{78}{5} = 15\frac{3}{5} \text{ ساعت}$$

۱۳ – آقای راستی مسافت ۱۵۰ کیلو متر را با اتومبیل طی کرد. در همین مدت یک هواپیمای شخصی مسافت ۶۰۰ کیلو متر را پیمود. سرعت هواپیما ۱۵۰ کیلو متر در ساعت بیشتر از سرعت اتومبیل بود. سرعت هواپیما را حساب کنید.

حل

$$x = \text{سرعت هواپیما}$$

سرعت اتومبیل $x - ۱۵۰$

$$d = rt$$

$$t = \frac{d}{r} = \frac{d}{x}$$

زمان	مسافت	سرعت	
$t = \frac{۱۵۰}{x - ۱۵۰}$	۱۵۰	$x - ۱۵۰$	اتومبیل
$t = \frac{۶۰۰}{x}$	۶۰۰	x	هواپیما

هر دو زمان مساوی هستند.

$$\frac{۱۵۰}{x - ۱۵۰} = \frac{۶۰۰}{x}$$

$$۶۰۰(x - ۱۵۰) = ۱۵۰(x)$$

$$۶۰۰x - ۹۰۰۰۰ = ۱۵۰x$$

$$۴۵۰x = ۹۰۰۰۰$$

$$x = \frac{۹۰۰۰۰}{۴۵۰} = ۲۰۰ \text{ کیلومتر در ساعت}$$

۱۴- سرعت جریان یک رود خانه ۵ کیلو متر در ساعت است. اگر یک قایق مسافت ۲۰ کیلو متر در جهت جریان آب را در همان مدت زمان طی کند که اگر ۱۰ کیلو متر بر خلاف جریان آب حرکت می کرد، سرعت قایق را بر روی آب ساکن پیدا کنید.

حل

سرعت قایق بر روی آب ساکن $x =$

زمان	مسافت	سرعت	
$t = \frac{۱۰}{x - ۵}$	۱۰	$x - ۵$	خلاف جریان آب
$t = \frac{۲۰}{x + ۵}$	۲۰	$x + ۵$	موافق جریان آب

$$\frac{۱۰}{x - ۵} = \frac{۲۰}{x + ۵}$$

$$۲۰(x - ۵) = ۱۰(x + ۵)$$

$$۲۰x - ۱۰۰ = ۱۰x + ۵۰$$

$$۱۰x = ۱۵۰$$

$$x = \frac{۱۵۰}{۱۰} = ۱۵ \text{ کیلو متر در ساعت}$$

۱۵ - مجموع وارونه دو عدد صحیح متوالی $-\frac{۱۵}{۵۶}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

حل

عدد اول $x =$

عدد دوم $x + ۱ =$

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x + ۱} = -\frac{۱۵}{۵۶}$$

$$LCD = 56x(x+1)$$

$$56x(x+1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) = 56x(x+1) \left(-\frac{15}{56} \right)$$

$$56(x+1) + 56x = -15x^2 - 15x$$

$$15x^2 + 15x + 56x + 56 + 56x = 0$$

$$15x^2 + 127x + 56 = 0$$

$$15x^2 + 120x + 7x + 56 = 0$$

$$15x(x+8x) + 7(x+8) = 0$$

$$(15x+7)(x+8) = 0$$

$$15x+7=0 \quad \text{یا} \quad x+8=0$$

$$15x=-7 \quad \text{یا} \quad x=-8$$

$$x = -\frac{7}{15} \quad \text{یا} \quad x = 8$$

اما $-\frac{7}{15}$ عدد صحیح نیست. پس آن عدد ۸ است. پس عدد اول ۸- است و عدد دوم $-7 = -8 + 1$ است.

۱۶- دو قطار در یک زمان ایستگاه را ترک و در جهت مخالف یک دیگر حرکت می کنند. یکی از قطار ها ۱۵ کیلو متر در ساعت سریع تر از دیگری حرکت می کند. در مدت ۶ ساعت این دو قطار ۳۶۰ کیلو متر از هم فاصله دارند. سرعت هر کدام را حساب کنید.

حل

سرعت یکی از قطار ها x

سرعت قطار دیگر $x + 15$

مسافت	زمان	سرعت	
$6x$	۶	x	قطار اول
$6(x + 15)$	۶	$x + 15$	قطار دوم

مسافتی که هر دو قطار طی می کنند، روی هم ۶۳۰ کیلو متر است.

$$6x + 6(x + 15) = 630$$

$$6x + 6x + 90 = 630$$

$$12x = 540$$

$$x = \frac{540}{12} = 45$$

سرعت قطار اول ۴۵

$$45 + 15 = 60$$

سرعت قطار دوم ۶۰

۱۷ – دو نفر در مسابقه دو استقامت شرکت کردند. یکی از آنها با سرعت ۸ کیلو متر در ساعت و دیگری با سرعت ۶ کیلو متر در ساعت از یک نقطه شروع به دویدن کردند. دوندۀ کندتر نیم ساعت دیرتر از دوندۀ سریعتر به انتهای خط مسابقه رسید. مسافت مسابقه را پیدا کنید.

حل

مسافت مسابقه x

سرعت	مسافت	زمان	
۸	x	$\frac{x}{8}$	دوندۀ سریعتر
۶	x	$\frac{x}{6}$	دوندۀ کندتر

دوندۀ کندتر نیم ساعت دیرتر از دوندۀ سریعتر به خط پایان می رسد. پس

$$\frac{x}{6} = \frac{x}{8} + \frac{1}{2}$$

$$LCD = 24$$

$$24\left(\frac{x}{6}\right) = 24\left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$4x = 3x + 12$$

$$x = 12 \text{ کیلو متر}$$

۱۸ - رئیس یک شرکت برای انجام یک مأموریت مسافت ۱۰۸۰ کیلو متر را با هواپیما و سپس مسافت ۲۴۰ کیلو متر را با اتومبیل طی کرد. اگر زمان رانندگی با اتومبیل یک ساعت طولانی تر از سفر با هواپیما باشد و اگر سرعت هواپیما ۶ برابر سرعت اتومبیل باشد، مدت زمان سفر با اتومبیل و زمان سفر با هواپیما را حساب کنید.

$$x = \text{مدت زمان پرواز با هواپیما}$$

$$x + 1 = \text{مدت زمان رانندگی با اتومبیل}$$

مسافت	زمان	سرعت	
۱۰۸۰	x	$v = \frac{1080}{x}$	هواپیما
۲۴۰	$x + 1$	$v = \frac{240}{x + 1}$	اتومبیل

میدانیم که سرعت هواپیما ۶ برابر سرعت اتومبیل است. پس

$$\frac{1080}{x} = 6 \left(\frac{240}{x + 1} \right)$$

$$\frac{1080}{x} = \frac{1440}{x + 1}$$

$$1440x = 1080(x + 1)$$

$$1440x = 1080x + 1080$$

$$360x = 1080$$

$$x = \frac{1080}{360} = 3 \text{ مدت زمان پرواز با هواپیما به ساعت}$$

$$3 + 1 = 4 \text{ مدت زمان رانندگی با اتومبیل به ساعت}$$

۱۹- هنگام آزمایش یک اتومبیل جدید، رئیس شرکت سازنده، مسافت ۱۰ کیلو متر را بر خلاف جهت باد ۳ کیلو متر در ساعت پیمود. در یک آزمایش دیگر مسافت ۱۱ کیلو متر را موافق جریان همان باد ۳ کیلو متر در ساعت پیمود. مطلوب است سرعت اتومبیل در هوای ساکن و بدون باد اگر زمان هر دو آزمایش یکسان باشد.

حل

سرعت اتومبیل در هوای ساکن x

سرعت اتومبیل مخالف جهت باد $x - 3$

سرعت اتومبیل موافق جهت باد $x + 3$

$$d = vt$$

$$t = \frac{d}{v}$$

زمان	سرعت	مسافت	
$t = \frac{10}{x-3}$	$x - 3$	۱۰	آزمایش اول
$t = \frac{11}{x+3}$	$x + 3$	۱۱	آزمایش دوم

زمان هر دو آزمایش مساوی است. پس

$$\frac{10}{x-3} = \frac{11}{x+3}$$

$$11(x-3) = 10(x+3)$$

$$11x - 33 = 10x + 30$$

سرعت اتومبیل در هوای ساکن به کیلو متر در ساعت $x = 63$

۴.۶ - تناسب یا وردش یا تغییر و حل مساله Variation and Problem Solving

به رابطه بین محیط دایره و شعاع آن توجه کنید. فرمول $C = 2\pi r$ می گوید محیط دایره Circumference مساوی است با دو پی ضرب در شعاع. به عبارت دیگر، محیط دایره همیشه یک ضریب Multiple ثابتی از شعاع است. و این ضریب ثابت همان 2π است. پس می گوئیم هنگامی که شعاع تغییر می کند، محیط دایره هم به طور مستقیم تغییر می کند. و یا محیط دایره مستقیماً با شعاع تغییر می کند. و یا محیط دایره تناسب مستقیم با شعاع دارد.

تناسب مستقیم Direct Variation می گوئیم کمیت y بطور مستقیم تغییر می کند اگر x تغییر کند. و یا y تناسب مستقیم با x دارد اگر یک عدد ثابت مثل k وجود داشته باشد به طوری که

$$y = kx, \quad k \neq 0$$

عدد k را عدد ثابت تناسب می گویند.

مثال ۱ -

فرض کنید y تناسب مستقیم با x دارد. اگر $y = 5$ و $x = 30$ باشد، ضریب ثابت تناسب را پیدا کنید. و فرمول این تناسب مستقیم را بنویسید.

حل

$$y = kx$$

$$5 = k(30)$$

$$k = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

عدد ثابت تناسب $\frac{1}{6}$ است. و فرمول تناسب به شکل زیر است.

$$y = \frac{1}{6}x$$

مثال ۲ - قانون هوک Hooke's Law

قانون هوک می گوید مقدار کشیده شدن یک فنر ارتباط مستقیم با وزن شیی که به آن متصل شده دارد. اگر یک وزنه ۴۵ پوندی فنر را ۵ اینچ بکشد، معین کنید اگر یک وزنه ۶۵ پوندی به فنر متصل کنیم، چند اینچ کشیده می شود

حل

با استفاده از مفروضات ضریب ثابت قانون هوک را پیدا می کنیم،

$d = \text{distance}$ مقدار کشیده شدن

$w =$ وزن وزنه

$$d = kw$$

$$5 = k(40)$$

$$k = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

پس فرمول هوک برای فنر مطابق فرمول زیر است.

$$d = \frac{1}{8}w$$

حل ۶۵ را در فرمول قرار می دهیم تا مقدار کشیده شدند فنر پیدا شود.

$$d = \frac{1}{8}(65)$$

$$d = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8} = 8.125 \quad \text{اینچ}$$

تناسب غیر مستقیم Inverse Variation می گوئیم کمیت y با کمیت x رابطه غیر مستقیم دارد و یا تناسب غیر مستقیم دارد اگر یک عدد ثابت k وجود داشته باشد به طوری که رابطه زیر برقرار باشد،

$$y = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0$$

در رابطه یا تناسب غیر مستقیم، هر گاه x زیاد شود، y کم می شود و اگر x کم شود، y زیاد می شود.

مثال ۳ - فرض کنید u با w تناسب غیر مستقیم دارد. اگر $u = 3$ و $w = 5$ باشد، ضریب ثابت این تناسب را پیدا کنید. و سپس فرمول کلی این رابطه غیر مستقیم را بنویسید.

حل

$$u = \frac{k}{w}$$

$$3 = \frac{k}{5}$$

$$k = 15$$

$$u = \frac{15}{w}$$

مثال ۴ - قانون بویل Boyle's Law

قانون بویل می گوید اگر حرارت ثابت باشد ، فشار Pressure یک گاز با حجم Pressure نسبت معکوس دارد. اگر یک پیستون در یک ماشین بخار فشاری معادل ۹۶۰ کیلو پاسکال دارد ، هنگامی که حجم معادل ۱/۴ متر مکعب است. مطلوب است فشار پیستون ، هنگامی که حجم به ۲/۵ متر مکعب افزایش پیدا می کند.

حل

$$P = \frac{k}{v}$$

$$960 = \frac{k}{1/4}$$

$$k = 960 \left(\frac{1}{4} \right) = 1344$$

$$p = \frac{1344}{v}$$

$$p = \frac{1344}{2/5} = 537 \frac{2}{5} \text{ کیلو پاسکال}$$

تناسب مشترک Joint Variation

اگر نسبت Ratio یک متغیر مانند y به حاصل ضرب دو یا چند متغیر ثابت باشد، می گوییم y نسبت به آن متغیرها تناسب مشترک دارد. به عبارت دیگر

$$y = kxz , \quad k \neq 0$$

مثال ۵ - سطح جانبی یک استوانه نسبت به شعاع و ارتفاع آن تناسب مرکب دارد. فرمولی برای سطح جانبی استوانه بر حسب شعاع و ارتفاع بنویسید.

حل

سطح جانبی Surface Area

شعاع Radius

ارتفاع Height

$$S = k r h$$

تناسب مرکب Combined Variation

گاهی اوقات یک تناسب شامل هم تناسب مستقیم است و هم تناسب غیر مستقیم. در این صورت تناسب ترکیبی یا مرکب داریم.

مثال ۶ - حد اکثر وزنی که یک ستون استوانه ای می تواند نگهدارد تناسب مستقیم دارد به توان چهارم قطر آن و تناسب غیر مستقیم دارد به مربع ارتفاع آن. یک ستون با قطر ۲ متر و طول ۸ متر می تواند یک تن را نگهدارد. مطلوب است مقدار وزنی که یک ستون با قطر ۱ متر و ارتفاع ۴ متر می تواند تحمل کند.

حل

وزن Weight

قطر Diameter

ارتفاع Height

$$w = \frac{k d^4}{h^2}$$

$$1 = \frac{k 2^4}{8^2} = \frac{16k}{64}$$

$$16k = 64$$

$$k = \frac{64}{16} = 4$$

$$w = \frac{4(1)^4}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ تن}$$

تمرینات ۴۰۶

۱ – وزن یک توپ پلاستیکی با مکعب شعاع آن تناسب مستقیم دارد. یک توپ با شعاع ۲ اینچی، $\frac{1}{20}$ پوند وزن دارد. مطلوب است وزن توپ با شعاع ۳ اینچ.

۲ – مقدار آلودگی هوای یک شهر با جمعیت آن شهر تناسب مستقیم دارد. اگر شهری با جمعیت ۴۵۰۰۰۰ نفر دارای آلودگی ۲۶۰۰۰۰ تن باشد. تعیین کنید شهری با جمعیت ۹۸۰۰۰۰ نفر چه مقدار آلودگی دارد.

آلودگی Pollution

نفر Number

۳ – اگر ولتاژ یک مدار الکتریسته ثابت نگاه داشته شود، شدت جریان Intensity تناسب معکوس با مقاومت Resistance دارد. اگر شدت جریان ۴۰ آمپر باشد، هنگامی که مقاومت ۲۷۰ اهم است. مطلوب است شدت جریان مدار اگر مقاومت ۱۵۰ اهم باشد.

۴ – شدت نور در یک مکان تناسب غیر مستقیم با مربع فاصله منبع نورانی دارد. اگر فاصله منبع نورانی دو برابر شود، شدت نور در مکان جدید چه قدر است؟

۵ – هنگام طوفان و رعد و برق، اول برق را مشاهده می کنید و بعد صدای رعد را می شنوید. این بخاطر این است که صوت خیلی سریع تر از صدا حرکت می کند. فاصله شما با طوفان نسبت مستقیم دارد با فاصله زمانی بین دیدن برق و شنیدن صدای رعد.

الف – فرض کنید ۵ ثانیه طول می کشد تا صدای رعد یک طوفان که در فاصله ۵۴۰۰ فوتی قرار دارد، بشنوید. ضریب ثابت این تناسب را پیدا کنید و فرمول این تناسب را بنویسید.

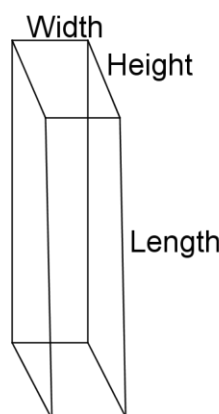
ب – اگر فاصله زمانی بین دیدن برق و شنیدن صدای رعد ۸ ثانیه باشد، فاصله طوفان چه قدر است؟

۶ - حد اکثر وزنی که یک بیم آهن مستطیل شکل می تواند تحمل کند، تناسب مستقیم دارد به عرض و مربع ارتفاع آن و تناسب غیر مستقیم دارد به طول آن. اگر یک بیم آهن به عرض نیم فوت و ارتفاع یک سوم فوت و طول ده فوت بتواند ۱۲ تن را تحمل کند، پیدا کنید یک بیم به عرض $\frac{2}{3}$ فوت و ارتفاع $\frac{1}{4}$ فوت و طول ۱۶ فوت چند تن را میتواند تحمل کند.

عرض Width

ارتفاع Height

طول Length



۷ - فرض کنید فشار یک گاز با حجم $6/10$ متر مکعب در دمای 25 درجه سانتی گراد، معادل 50 کیلو پاسکال باشد. با استفاده از قانون بویل، ضریب ثابت این تناسب را پیدا کنید و سپس فرمول این تناسب معکوس را بنویسید.

ب - اگر حجم این گاز $3/10$ متر مکعب بشود، فشار آن گاز چه قدر است؟

۸ - قانون جاذبه نیوتن می گوید دو شیی با جرم های m_1 و m_2 با نیرویی مانند F یک دیگر را جذب می کنند، به نحوی که این نیرو نسبت به جرم آنها تناسب مشترک دارد و نسبت به مربع فاصله آنها تناسب معکوس دارد. قانون جاذبه نیوتن را به صورت یک فرمول بنویسید.

حل تمرینات ۴۰۶

۱ - وزن یک توپ پلاستیکی با مکعب شعاع آن تناسب مستقیم دارد. یک توپ با شعاع ۲ اینچی، $1/20$ پوند وزن دارد. مطلوب است وزن توپ با شعاع ۳ اینچ.

حل

$$w = kr^3$$

$$1/20 = k2^3$$

$$1/20 = 8k$$

$$k = \frac{1/20}{8} = 1/160$$

$$w = (1/160)(3^3) = (1/160)(27) = 27/160 \text{ پوند}$$

۲ - مقدار آلودگی هوای یک شهر با جمعیت آن شهر تناسب مستقیم دارد. اگر شهری با جمعیت ۴۵۰۰۰۰ نفر دارای آلودگی ۲۶۰۰۰۰ تن باشد. تعیین کنید شهری با جمعیت ۹۸۰۰۰۰ نفر چه مقدار آلودگی دارد.

آلودگی Pollution

نفر Number

حل

$$P = kn$$

$$260000 = k(450000)$$

$$k = \frac{260000}{450000} = \frac{26}{45}$$

$$P = \frac{26}{45}(980000) \simeq 566/222 \text{ تن}$$

۳ - اگر ولتاژ یک مدار الکتریسته ثابت نگاه داشته شود، شدت جریان Intensity تناسب معکوس با مقاومت Resistance دارد. اگر شدت جریان ۴۰ آمپر باشد، هنگامی که مقاومت ۲۷۰ اهم است. مطلوب است شدت جریان مدار اگر مقاومت ۱۵۰ اهم باشد.

حل

$$I = \frac{k}{R}$$

$$40 = \frac{k}{270}$$

$$k = (40)(270) = 10800$$

$$I = \frac{10800}{150} = 72 \text{ آمپر}$$

۴ - شدت نور در یک مکان تناسب غیر مستقیم با مربع فاصله منبع نورانی دارد. اگر فاصله منبع نورانی دو برابر شود، شدت نور در مکان جدید چه قدر است؟

حل

$$I = \frac{k}{d^2} \quad (1)$$

حل اگر فاصله یعنی d را دو برابر کنیم، خواهیم داشت

$$I = \frac{k}{(2d)^2} = \frac{k}{4d^2} \quad (2)$$

از مقایسه فرمول های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که اگر فاصله را دو برابر کنیم، شدت نور $\frac{1}{4}$ می شود.

۵ - هنگام طوفان و رعد و برق، اول برق را مشاهده می کنید و بعد صدای رعد را می شنوید. این بخاطر این است که صوت خیلی سریع تر از صدا حرکت می کند. فاصله شما با طوفان نسبت مستقیم دارد با فاصله زمانی بین دیدن برق و شنیدن صدای رعد.

الف – فرض کنید ۵ ثانیه طول می کشد تا صدای رعد یک طوفان که در فاصله ۵۴۰۰ فوتی قرار دارد، بشنوید. ضریب ثابت این تناسب را پیدا کنید و فرمول این تناسب را بنویسید.

ب – اگر فاصله زمانی بین دیدن برق و شنیدن صدای رعد ۸ ثانیه باشد، فاصله طوفان چه قدر است؟

حل

الف – اگر فاصله شما با طوفان d و فاصله زمانی بین دیدن برق و شنیدن صدای رعد را t بنامیم، خواهیم داشت

$$d - kt$$

$$5400 = k(5)$$

$$k = \frac{5400}{5} = 1080$$

$$d = 1080t$$

ب –

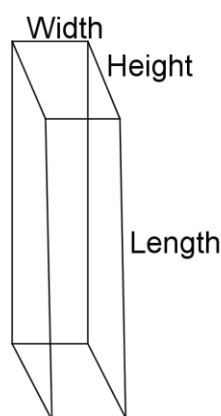
$$d = 1080(8) = 8640 \text{ فوت}$$

۶ - حد اکثر وزنی که یک بیم آهن مستطیل شکل می تواند تحمل کند، تناسب مستقیم دارد به عرض و مربع ارتفاع آن و تناسب غیر مستقیم دارد به طول آن. اگر یک بیم آهن به عرض نیم فوت و ارتفاع یک سوم فوت و طول ده فوت بتواند ۱۲ تن را تحمل کند، پیدا کنید یک بیم به عرض $\frac{2}{3}$ فوت و ارتفاع $\frac{1}{4}$ فوت و طول ۱۶ فوت چند تن را میتواند تحمل کند.

عرض Width

ارتفاع Height

طول Length



حل

حد اکثر وزن را Max بنامیم , خواهیم داشت

$$Max = \frac{kwh^2}{l}$$

$$12 = \frac{k \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^2}{10}$$

$$\frac{k}{18} = 120$$

$$k = 2160$$

$$Max = \frac{2160 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2}{16} = \frac{2160 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{4}\right)}{16} = \frac{2160 \left(\frac{1}{6}\right)}{16} = \frac{\frac{2160}{6}}{16} = \frac{2160}{6(16)} = 22/5 \text{ تن}$$

۷- فرض کنید فشار یک گاز با حجم $6/10$ متر مکعب در دمای 25 درجه سانتی گراد، معادل 50 کیلو پاسکال باشد. با استفاده از قانون بویل، ضریب ثابت این تناسب را پیدا کنید و سپس فرمول این تناسب معکوس را بنویسید.

ب- اگر حجم این گاز $3/10$ متر مکعب بشود، فشار آن گاز چه قدر است؟

حل

الف -

$$P = \frac{k}{v}$$

$$50 = \frac{k}{10/6}$$

$$k = (50)(10/6) = 5/3$$

$$P = \frac{5/3}{v}$$

ب -

$$P = \frac{5/3}{3/10} = 17/7 \text{ کیلو پاسکال}$$

۸ - قانون جاذبه نیوتن می گوید دو شیی با جرم های m_1 و m_2 با نیرویی مانند F یک دیگر را جذب می کنند ، به نحوی که این نیرو نسبت به جرم آنها تناسب مشترک دارد و نسبت به مربع فاصله آنها تناسب معکوس دارد. قانون جاذبه نیوتن را به صورت یک فرمول بنویسید.

حل

اگر G را برای ضریب ثابت تناسب بکار ببریم، خواهیم داشت

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)