

فصل پنجم

توان های کسری ، رادیکال ها و اعداد مرکب

Rational Exponents, Radicals, and Complex Numbers

۵.۱ - عبارت های رادیکالی Radical Expressions

پیدا کردن ریشه های دوم یا پیدا کردن جذر ها Finding Square Roots

یاد آوری گفتیم که برای پیدا کردن ریشه دوم یک عدد مانند a ، یک عدد پیدا می کنیم که اگر به توان ۲ برسد، عدد a بدست آید.

ریشه دوم Square Root

عدد b ریشه دوم a است اگر $b^2 = a$

مثال: ریشه دوم اعداد زیر را پیدا کنید.

الف- ریشه دوم ۲۵ می شود ۵ و ۵ زیرا $5^2 = 25$ و $(-5)^2 = 25$ ب -ریشه دوم ۴۹ می شود ۷ و ۷ زیرا $7^2 = 49$ و $(-7)^2 = 49$

ج -عدد ۴- ریشه دوم ندارد زیرا هیچ عدد حقیقی نیست که مربع آن ۴- باشد، پس عدد ۴- ریشه دوم عدد حقیقی ندارد.

یاد آوری - حاصل ضرب دو عدد منفی، همیشه مثبت است

$$(-2)(-2) = 4 \quad (-3)(-3) = 9 \quad (-7)(-7) = 49$$

ریشه دوم نا منفی Nonnegative Square Root, Principal Square Root را با نماد رادیکال $\sqrt{\quad}$ نشان می دهیم. مثلا $\sqrt{25} = 5$

ریشه دوم منفی Negative Square Root را با نماد $-\sqrt{\quad}$ نشان می دهیم. مثلا $-\sqrt{25} = -5$

عبارتی را که دارای نماد رادیکال است ، عبارت رادیکالی می نامیم. در مثال بالا عدد ۲۵ را عدد زیر رادیکال Radicand می نامند .

مثال : ریشه دوم اعداد زیر را پیدا کنید. فرض کنید متغیر ها اعداد حقیقی نا منفی هستند.

$$۱) \sqrt{36} = 6 \text{ زیرا } 6^2 = 36$$

$$۲) \sqrt{0} = 0 \text{ زیرا } 0^2 = 0$$

$$۳) \sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7} \text{ زیرا } \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$$

$$۴) \sqrt{0/25} = 0/5 \text{ زیرا } (0/5)^2 = 0/25$$

$$۵) \sqrt{x^6} = x^3 \text{ زیرا } (x^3)^2 = x^6$$

$$۶) \sqrt{9x^{10}} = 3x^5 \text{ زیرا } (3x^5)^2 = 9x^{10}$$

$$۷) -\sqrt{81} = -9$$

$$۸) \sqrt{-81} \text{ عدد حقیقی نیست}$$

تخمین زدن ریشه ها Approximating Roots

اعداد ۱, ۴, ۹, ۲۵ را مربع های کامل Perfect Squares می نامند , زیرا

$$1^2 = 1 \quad 2^2 = 4 \quad 3^2 = 9 \quad 5^2 = 25$$

ریشه دوم مربع های کامل ، اعداد گویا هستند. اما چون عدد ۳ مربع کامل نیست ، پس ریشه دوم آن هم گویا نیست. ریشه دوم عدد ۳ یک عدد گنگ است. برای پیدا کردن ریشه تقریبی این عدد و امسال آن به ماشین حساب رجوع می کنیم.

پیدا کردن ریشه سوم Finding Cube Roots

پیدا کردن ریشه ها را می توان به ریشه های دیگر مانند ریشه سوم تعمیم داد. مثلاً ، چون $2^3 = 8$ ، عدد ۲ را ریشه سوم عدد ۸ می نامیم. و می نویسیم $\sqrt[3]{8} = 2$

ریشه سوم یک عدد حقیقی a نوشته می شود $\sqrt[3]{a}$ و $\sqrt[3]{a} = b$ اگر $b^3 = a$ باشد. مثال

$$9) \quad \sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{زیرا} \quad 4^3 = 64$$

$$10) \quad \sqrt[3]{-27} = -3 \quad \text{زیرا} \quad (-3)^3 = -27$$

$$11) \quad \sqrt[3]{x^3} = x \quad \text{زیرا} \quad x^3 = x^3$$

بر خلاف ریشه دوم، هنگام پیدا کردن ریشه سوم یک عدد ، آن عدد می تواند منفی باشد. زیرا مکعب یک عدد منفی، یک عدد منفی است. مثال

$$12) \quad \sqrt[3]{1} = 1 \quad \text{زیرا} \quad 1^3 = 1$$

$$13) \quad \sqrt[3]{-64} = -4 \quad \text{زیرا} \quad (-4)^3 = -64$$

$$14) \quad \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5} \quad \text{زیرا} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

$$15) \quad \sqrt[3]{x^6} = x^2 \quad \text{زیرا} \quad (x^2)^3 = x^6$$

$$16) \quad \sqrt[3]{-8x^9} = -2x^3 \quad \text{زیرا} \quad (-2x^3)^3 = -8x^9$$

پیدا کردن ریشه انم (Finding nth Roots (enom))

همانطور که اعداد حقیقی را می توان به توان های غیر از ۲ و ۳ رساند ، می توانیم ریشه انم یک عدد را هم پیدا کنیم.

ریشه انم a را می نویسیم $\sqrt[n]{a}$ اینجا n را نما یا شاخص Index می نامیم. همان طور که تا به حال دیده اید، نمای ۲ را نمی نویسیم.

اگر نمای رادیکال زوج باشد، عدد زیر رادیکال باید مثبت باشد. اگر نمای رادیکال فرد باشد، عدد زیر رادیکال هر عدد حقیقی می تواند باشد. مثال

$$۱۷) \sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{زیرا} \quad 3^4 = 81$$

$$۱۸) \sqrt[5]{-243} = -3 \quad \text{زیرا} \quad (-3)^5 = -243$$

$$۱۹) \sqrt[4]{-81} = \text{یک عدد حقیقی نیست}$$

پیدا کردن $\sqrt[n]{a^n}$ وقتی که a یک عدد حقیقی است.

به یاد بیاورید که نماد $\sqrt{a^2}$ فقط نمایان گر ریشه دوم مثبت a^2 است. مثلاً

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

هنگامی که عدد زیر رادیکال یک متغیر است، و معلوم نیست که این متغیر نماینده یک عدد مثبت است یا یک عدد منفی، نماد قدر مطلق را به کار می بریم تا مطمئن شویم که پاسخ یک عدد مثبت است. مثلاً

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

این موضوع برای کلیه رادیکال هایی که نمای زوج دارند صادق است.

اما وقتی که نمای رادیکال فرد است بکار بردن نماد قدر مطلق لازم نیست. پس بطور خلاصه می توان گفت

اگر n یک عدد صحیح مثبت زوج باشد، پس $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

اگر n یک عدد صحیح مثبت فرد باشد، پس $\sqrt[n]{a^n} = a$

مثال: فرض کنید متغیر ها نماینده هر نوع عدد حقیقی هستند.

$$۲۰) \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$۲۱) \sqrt{x^2} = |x|$$

$$۲۲) \sqrt[4]{(x-2)^4} = |x-2|$$

$$۲۳) \sqrt[۳]{(-۵)^۳} = -۵$$

$$۲۴) \sqrt[۵]{(۲x-۷)^۵} = ۲x-۷$$

$$۲۵) \sqrt{۲۵x^۲} = ۵|x|$$

$$۲۶) \sqrt{x^۲+۲x+۱} = \sqrt{(x+۱)^۲} = |x+۱|$$

خواص رادیکال ها

$$۱) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$۲) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$۳) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$۴) \sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}$$

$$۵) \sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}$$

مثال: ساده کنید.

$$۲۷) \sqrt[۳]{x^۶} = \sqrt[۳]{x^۳x^۳} = x\sqrt{x}$$

$$۲۸) \sqrt[۴]{۸۱x^۸y^۴} = \sqrt[۴]{۸۱} \times \sqrt[۴]{x^۸} \times \sqrt[۴]{y^۴} = ۳ \sqrt{(x^۲)^۴} |y| = ۳x^۲|y|$$

رادیکال های متشابه Like Radicals

رادیکال های متشابه آنهایی هستند که نمای رادیکال و اعداد زیر رادیکال یکی است و فقط ضریب آنها متفاوت است. رادیکال های متشابه را می توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد ، همان گونه که در مورد جملات متشابه دیدیم.

مثال

$$۲۹) \quad ۱۰\sqrt[۲]{۴} + ۷\sqrt[۲]{۴} - ۲\sqrt[۲]{۴} = (۱۰ + ۷ - ۲)\sqrt[۲]{۴} = ۱۵\sqrt[۲]{۴}$$

$$۳۰) \quad \sqrt{۳۲} + \sqrt{۲۰۰} = \sqrt{۱۶ \times ۲} + \sqrt{۱۰۰ \times ۲} = \sqrt{۱۶}\sqrt{۲} + \sqrt{۱۰۰}\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲} + ۱۰\sqrt{۲} = ۱۴\sqrt{۲}$$

گویا کردن مخرج کسر Rationalizing the Denominator

گاهی اوقات مفید است که رادیکال مخرج یک کسر را حذف کنیم. برای این کار باید صورت و مخرج کسر را در یک رادیکال مناسب ضرب کنیم. در انجام این کار در حقیقت کسر را در عدد یک ضرب کرده ایم و در نتیجه تغییری در کسر ایجاد نکرده ایم. مثلاً

$$\frac{۱}{\sqrt{a}} = \frac{۱}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

ملاحظه می کنید که در مخرج کسر دیگر رادیکال نیست.

بطور کلی اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ باشد و $m < n$ پس اگر صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنیم، مخرج کسر گویا می شود. زیرا

$$\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

مثال: مخرج کسر ها را گویا کنید.

$$۳۱) \quad \frac{۲}{\sqrt[۳]{۳}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۳}} \times \frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۳}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۳}}{۳}$$

$$۳۲) \quad \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}} = \frac{\sqrt[۳]{x}}{x}$$

$$۳۳) \quad \sqrt[۵]{\frac{۱}{a^۲}} = \frac{۱}{\sqrt[۵]{a^۲}} = \frac{۱}{\sqrt[۵]{a^۲}} \times \frac{\sqrt[۵]{a^۳}}{\sqrt[۵]{a^۳}} = \frac{\sqrt[۵]{a^۳}}{\sqrt[۵]{a^۵}} = \frac{\sqrt[۵]{a^۳}}{a}$$

تمرینات ۵.۱

جذر هر کدام از اعداد زیر را بدست آورید.

۱) ۴

۲) -۲۵

۳) ۱۰۰

ریشه دوم هر کدام از عبارت های زیر را پیدا کند. فرض کنید متغیر ها نماینده اعداد حقیقی نا منفی هستند.

۴) $\sqrt{۱۰۰}$

۵) $\sqrt{\frac{۱}{۴}}$

۶) $\sqrt{۰/۰۰۰۱}$

۷) $-\sqrt{۳۶}$

۸) $\sqrt{x^{۱۰}}$

۹) $\sqrt{۱۶y^۶}$

با استفاده از ماشین حساب ، ریشه دوم اعداد زیر را تا سه رقم اعشاری پیدا کنید.

$$۱۰) \sqrt{7}$$

$$۱۱) \sqrt{38}$$

$$۱۲) \sqrt{200}$$

ریشه سوم هر کدام از عبارت های زیر را پیدا کنید.

$$۱۳) \sqrt[3]{64}$$

$$۱۴) \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$۱۵) \sqrt[3]{-1}$$

$$۱۶) \sqrt[3]{x^{12}}$$

$$۱۷) \sqrt[3]{-27x^9}$$

ریشه هر کدام از عبارت های زیر را پیدا کنید. فرض کنید تمام متغیر ها نماینده اعداد حقیقی نا منفی هستند.

$$۱۸) -\sqrt[4]{16}$$

$$۱۹) \sqrt[4]{-۱۶}$$

$$۲۰) \sqrt[5]{-۳۲}$$

$$۲۱) \sqrt[5]{x^{۲۰}}$$

$$۲۲) \sqrt[6]{۶۴x^{۱۲}}$$

$$۲۳) \sqrt{۸۱x^۴}$$

$$۲۴) \sqrt[4]{۲۵۶x^۸}$$

ساده کنید. فرض کنید متغیر ها نماینده هر نوع اعداد حقیقی هستند.

$$۲۵) \sqrt{(-۸)^۲}$$

$$۲۶) \sqrt[3]{(-۸)^۳}$$

$$۲۷) \sqrt[4]{۴x^۲}$$

$$۲۸) \sqrt[3]{x^3}$$

$$۲۹) \sqrt[4]{(x-2)^4}$$

$$۳۰) \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

۳۱) اگر دوست شما به شما گفت $\sqrt{13} \approx 5/7$ است. بدون استفاده از ماشین حساب چگونه می توانید او را قانع کنید که او ممکن است اشتباه کند؟

اعداد زیر را پیدا کنید.

$$۳۲) \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$۳۳) \sqrt[4]{256}$$

$$۳۴) \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$$

$$۳۵) \frac{\sqrt{۷۲}}{\sqrt{۲}}$$

$$۳۶) \frac{\sqrt{۴۸}}{\sqrt{۳}}$$

$$۳۷) \sqrt{\frac{۹}{۲۵}}$$

$$۳۸) \sqrt[۳]{۱۰۸} - \sqrt[۳]{۳۲}$$

$$۳۹) \sqrt{۲۴۵} - \sqrt{۱۲۵}$$

مخرج کسر ها را گویا کنید.

$$۴۰) \frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

$$۴۱) \sqrt{\frac{x}{۳y}}$$

$$۴۲) \sqrt{\frac{۳}{۲۰}}$$

$$۴۳) \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$$

$$۴۴) \frac{۱}{\sqrt[۵]{x^۲}}$$

$$۴۵) \frac{۱}{\sqrt[۷]{x^۳}}$$

مشکل ولی آسان

بدون استفاده از ماشین حساب ، حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$۴۶) \frac{۱۸^۵}{۹^۵}$$

$$۴۷) ۲۰^۶ \times (۵/۵)^۶$$

پاسخ تمرینات ۵.۱

جذر هر کدام از اعداد زیر را بدست آورید.

$$۱) ۴$$

$$۲) - ۲۵$$

$$۳) ۱۰۰$$

پاسخ

۱) ریشه دوم ۴ اعداد ۲ و ۲ هستند.

۲) ریشه دوم ۲۵ اعداد حقیقی نیستند.

۳) ریشه دوم ۱۰۰ اعداد ۱۰ و ۱۰ هستند.

ریشه دوم هر کدام از عبارت های زیر را پیدا کند. فرض کنید متغیر ها نماینده اعداد حقیقی نا منفی هستند.

$$۴) \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

$$۵) \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}$$

$$۶) \sqrt{۰/۰۰۰۱} = ۰/۰۱$$

$$۷) -\sqrt{۳۶} = -۶$$

$$۸) \sqrt{x^{۱۰}} = \sqrt{(x^۵)^۲} = x^۵$$

$$۹) \sqrt{۱۶y^۶} = \sqrt{۱۶} \times \sqrt{(y^۳)^۲} = ۴y^۳$$

با استفاده از ماشین حساب ، ریشه دوم اعداد زیر را تا سه رقم اعشاری پیدا کنید.

$$۱۰) \sqrt{۷} = ۲ / ۶۴۶$$

$$۱۱) \sqrt{۳۸} = ۶ / ۱۶۴$$

$$۱۲) \sqrt{۲۰۰} = \sqrt{۱۰۰} \times \sqrt{۲} = ۱۰ \sqrt{۲} = ۱۴ / ۱۴۲$$

ریشه سوم هر کدام از عبارت های زیر را پیدا کنید.

$$۱۳) \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$$

$$۱۴) \sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲}$$

$$۱۵) \sqrt[۳]{-۱} = -۱$$

$$۱۶) \sqrt[۳]{x^{۱۲}} = \sqrt[۳]{(x^۴)^۳} = x^۴$$

$$۱۷) \sqrt[3]{-۲۷x^9} = \sqrt[3]{-۲۷} \times \sqrt[3]{(x^3)^3} = -3x^3$$

ریشه هر کدام از عبارت های زیر را پیدا کنید. فرض کنید تمام متغیر ها نماینده اعداد حقیقی نا منفی هستند.

$$۱۸) -\sqrt[4]{۱۶} = -۲$$

$$۱۹) \sqrt[4]{-۱۶} \text{ عدد حقیقی نیست}$$

$$۲۰) \sqrt[5]{-۳۲} = -۲$$

$$۲۱) \sqrt[5]{x^{۲۰}} = \sqrt[5]{(x^4)^5} = x^4$$

$$۲۲) \sqrt[6]{۶۴x^{۱۲}} = \sqrt[6]{۶۴} \times \sqrt[6]{(x^2)^6} = ۲x^2$$

$$۲۳) \sqrt{۸۱x^۴} = \sqrt{۸۱} \times \sqrt{(x^2)^2} = 9x^2$$

$$۲۴) \sqrt[4]{۲۵۶x^8} = \sqrt[4]{۲۵۶} \times \sqrt[4]{(x^2)^4} = ۴x^2$$

ساده کنید. فرض کنید متغیر ها نماینده هر نوع اعداد حقیقی هستند.

$$۲۵) \sqrt{(-۸)^2} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

$$۲۶) \sqrt[۲]{(-۸)^۲} = -۸$$

$$۲۷) \sqrt[۴]{x^۲} = ۲|x|$$

$$۲۸) \sqrt[۲]{x^۳} = x$$

$$۲۹) \sqrt[۴]{(x-۲)^۴} = |x-۲|$$

$$۳۰) \sqrt{x^۲ + ۴x + ۴} = \sqrt{(x+۲)^۲} = |x+۲|$$

۳۱) اگر دوست شما به شما گفت $\sqrt{۱۳} \approx ۵/۷$ است. بدون استفاده از ماشین حساب چگونه می توانید او را قانع کنید که او ممکن است اشتباه کند؟

پاسخ - می گویم

$$۹ < ۱۳ < ۱۶$$

$$\sqrt{۹} < \sqrt{۱۳} < \sqrt{۱۶}$$

$$۳ < \sqrt{۱۳} < ۴$$

یعنی $\sqrt{۱۳}$ باید عددی باشد بین ۳ و ۴ ولی عدد $۵/۷$ بین ۳ و ۴ نیست. پس ممکن است شما اشتباه کرده باشد.

اعداد زیر را پیدا کنید.

$$۳۲) \sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{۲}{۳}$$

$$۳۳) \sqrt[۴]{۲۵۶} = ۴$$

$$۳۴) \sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}} = \frac{۱}{۲}$$

$$۳۵) \frac{\sqrt{۷۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۷۲}{۲}} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

$$۳۶) \frac{\sqrt{۴۸}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{۴۸}{۳}} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

$$۳۷) \sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۳}{۵}$$

$$۳۸) \sqrt[۲]{۱۰۸} - \sqrt[۲]{۳۲} = \sqrt[۲]{۲۷ \times ۴} - \sqrt[۲]{۸ \times ۴} = ۳\sqrt[۲]{۴} - ۲\sqrt[۲]{۴} = \sqrt[۲]{۴}$$

$$۳۹) \sqrt{۲۴۵} - \sqrt{۱۲۵} = \sqrt{۴۹ \times ۵} - \sqrt{۲۵ \times ۵} = ۷\sqrt{۵} - ۵\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$$

مخرج کسر ها را گویا کنید.

$$۴۰) \frac{۱}{\sqrt{۶}} = \frac{۱}{\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

$$۴۱) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[۳]{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[۳]{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[۳]{y}} \times \frac{\sqrt[۳]{y}}{\sqrt[۳]{y}} = \frac{\sqrt[۳]{xy}}{\sqrt[۳]{y}}$$

$$۴۲) \frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۲]{۲۰}} = \frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۲]{۲۰}} = \frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۲]{۴ \times ۵}} = \frac{\sqrt[۳]{۳}}{۲\sqrt[۲]{۵}} = \frac{\sqrt[۳]{۳}}{۲\sqrt[۲]{۵}} \times \frac{\sqrt[۲]{۵}}{\sqrt[۲]{۵}} = \frac{\sqrt[۳]{۱۵}}{۱۰}$$

$$۴۳) \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{\sqrt[۳]{x^۲}}{x}$$

$$۴۴) \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \times \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$$

$$۴۵) \quad \frac{1}{\sqrt[7]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{x^2}} \times \frac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[7]{x^4}} = \frac{\sqrt[7]{x^4}}{x}$$

مشکل ولی آسان

بدون استفاده از ماشین حساب ، حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$۴۶) \quad \frac{18^5}{9^5} = \frac{(2 \times 9)^5}{9^5} = \frac{2^5 \times 9^5}{9^5} = 2^5 = 32$$

$$۴۷) \quad 20^6 \times (0/5)^6 = (20 \times 0/5)^6 = 10^6 = 1,000,000$$

۵.۲ توان های کسری یا توان های گویا Rational Exponents

معنی یا فهم $a^{1/n}$

فرض کنید $x = 5^{1/3}$ پس خواهیم داشت

$$x^3 = \left(5^{1/3}\right)^3 = 5^{1/3 \times 3} = 5^1 = 5$$

چون $x^3 = 5$ پس x عددی است که ریشه سوم آن می شود ۵ و یا $x = \sqrt[3]{5}$ و همچنین میدانیم که

$$5^{1/3} = \sqrt[3]{5} \text{ پس نتیجه می گیریم که } 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$

تعریف $a^{1/n}$

اگر n یک عدد صحیح مثبت بزرگ تر از یک باشد و $\sqrt[n]{a}$ یک عدد حقیقی، پس $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

متوجه می شوید که مخرج توان کسری می شود نمای رادیکال. مثال

عبارت های زیر را به صورت رادیکال بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

$$۱) \quad 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$$

$$۲) \quad 64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$۳) \quad x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$$

$$۴) \quad -9^{1/2} = -\sqrt{9} = -3$$

$$۵) \quad (8^3 x^2)^{1/4} = \sqrt[4]{8^3 x^2} = 3x^2$$

$$۶) \quad 5y^{1/2} = 5\sqrt[2]{y}$$

فهم $a^{m/n}$

طبق قواعد توان ها که قبلا دیدیم می توانیم رابطه های زیر را بنویسیم.

$$8^{2/3} = \left(8^{1/3}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2$$

و یا

$$8^{2/3} = \left(8^2\right)^{1/3} = \sqrt[3]{8^2}$$

تعریف $a^{m/n}$

اگر m و n اعداد صحیح مثبت بزرگ تر از یک باشند، و $\frac{m}{n}$ در ساده ترین شکل پس خواهیم داشت

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

در صورتی که $\sqrt[n]{a}$ یک عدد حقیقی باشد.

متوجه هستید که مخرج توان کسری نمای رادیکال قرار می گیرد و صورت آن نشان می دهد که پایه به چه توانی می رسد.

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

و یا

$$8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8} \right)^2 = 2^2 = 4$$

نکته مفید: بیشتر اوقات محاسبه $(\sqrt[n]{a})^m$ آسان تر از $\sqrt[n]{a^m}$ است

مثال: عبارت های زیر را به صورت رادیکال بنویسید، و در صورت امکان ساده کنید.

$$۷) \quad 4^{3/2} = \left(\sqrt{4} \right)^3 = 2^3 = 8$$

$$۸) \quad -16^{3/4} = -\left(\sqrt[4]{16} \right)^3 = -(2)^3 = -8$$

$$۹) \quad (-27)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-27} \right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$۱۰) \quad \left(\frac{1}{9} \right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} \right)^3 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$۱۱) \quad (4x-1)^{3/5} = \sqrt[5]{(4x-1)^3}$$

مثال: عبارت های زیر را با توان های مثبت بنویسید، و سپس ساده کنید.

$$۱۲) \quad 16^{-3/4} = \frac{1}{16^{3/4}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16} \right)^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$۱۳) \quad (-27)^{-2/3} = \frac{1}{(-27)^{2/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{-27} \right)^2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

مثال: با استفاده از قانون توان ها ، عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۱۴) \quad x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = x^{\frac{5}{6}}$$

$$۱۵) \quad \frac{y^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}} = y^{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}} = y^{-\frac{3}{3}} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$۱۶) \quad \frac{\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^5}{x^2} = \frac{x^{\frac{2}{5} \times 5}}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0 = 1 \times 1 = 1$$

گاهی اوقات برای ساده کردن عبارت های رادیکال دار ، آسان تر خواهد بود اگر اول رادیکال را به صورت توان کسری بنویسیم.

مثال: رادیکال ها را به صورت توان های کسری بنویسید، و سپس ساده کنید. فرض کنید متغیر ها نماینده اعداد مثبت هستند.

$$۱۷) \quad \sqrt[4]{x^8} = x^{\frac{8}{4}} = x^2 = \sqrt{x^4}$$

$$۱۸) \quad \sqrt[6]{25} = 25^{\frac{1}{6}} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{6}} = 5^{2 \times \frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

$$۱۹) \quad \sqrt[6]{r^2 s^4} = \left(r^2 s^4\right)^{\frac{1}{6}} = r^{\frac{2}{6}} s^{\frac{4}{6}} = r^{\frac{1}{3}} s^{\frac{2}{3}} = \left(rs^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{rs^2}$$

با بکار بردن توان های کسری، عبارت های زیر را به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$۲۰) \quad \sqrt{x} \times \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$

$$۲۱) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{3-2}{6}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$$

$$۲۲) \sqrt[3]{3} \times \sqrt{2} = 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{3}{6}} = (3^2 \times 2^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3^2 \times 2^3} = \sqrt[6]{9 \times 8} = \sqrt[6]{72}$$

تمرینات ۵.۲

عبارت های زیر را به صورت رادیکال بنویسید و اگر ممکن است ساده کنید.

$$۱) ۴۹^{\frac{1}{2}}$$

$$۲) ۲۷^{\frac{1}{3}}$$

$$۳) \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$۴) ۱۶۹^{\frac{1}{2}}$$

$$۵) ۲m^{\frac{1}{2}}$$

$$۶) \quad (9x^4)^{1/2}$$

$$۷) \quad (-27)^{1/3}$$

$$۸) \quad -16^{1/4}$$

$$۹) \quad 16^{3/4}$$

$$۱۰) \quad (-64)^{2/3}$$

$$۱۱) \quad (-16)^{3/4}$$

$$۱۲) \quad (2x)^{3/5}$$

$$۱۳) \quad (7x + 2)^{2/3}$$

$$۱۴) \left(\frac{۱۶}{۹}\right)^{۳/۲}$$

عبارت های زیر را با توان های مثبت بنویسید و اگر ممکن باشد ساده کنید.

$$۱۵) ۸^{-۴/۳}$$

$$۱۶) (-۶۴)^{-۲/۳}$$

$$۱۷) (-۴)^{-۳/۲}$$

$$۱۸) x^{-۱/۴}$$

$$۱۹) \frac{۱}{a^{-۲/۳}}$$

$$۲۰) \frac{۵}{۷x^{-۳/۴}}$$

عبارت های زیر را با استفاده از خواص توان ها ساده کنید و سپس آنها را با توان مثبت بنویسید.

$$۲۱) a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{3}}$$

$$۲۲) x^{-\frac{2}{5}} x^{\frac{7}{5}}$$

$$۲۳) ۳^{\frac{1}{4}} ۳^{\frac{3}{8}}$$

$$۲۴) \frac{y^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{6}}}$$

$$۲۵) (u^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$۲۶) \frac{b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}}{-b^{\frac{1}{4}}}$$

$$۲۷) \frac{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^3}{x^{\frac{1}{12}}}$$

رادیکال ها را به صورت توان کسری بنویسید و سپس ساده کنید. فرض کنید متغیر ها نماینده اعداد مثبت هستند.

$$۲۸) \sqrt[6]{x^3}$$

$$۲۹) \sqrt[6]{4}$$

$$۳۰) \sqrt[4]{16x^2}$$

$$۳۱) \sqrt[4]{(x+3)^2}$$

$$۳۲) \sqrt[8]{x^4y^4}$$

$$۳۳) \sqrt[12]{a^4b^4}$$

با به کار بردن توان کسری هر کدام از عبارت های زیر را به صورت یک عبارت تک رادیکالی بنویسید.

$$۳۴) \sqrt[۲]{y} \times \sqrt[۵]{y^۲}$$

$$۳۵) \frac{\sqrt[۳]{b^۲}}{\sqrt[۴]{b}}$$

$$۳۶) \sqrt[۲]{x} \times \sqrt[۴]{x} \times \sqrt[۵]{x^۳}$$

$$۳۷) \sqrt{۳} \times \sqrt[۲]{۴}$$

پاسخ تمرینات ۵.۲

عبارت های زیر را به صورت رادیکال بنویسید و اگر ممکن است ساده کنید.

$$۱) ۴۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۴۹} = ۷$$

$$۲) ۲۷^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$$

$$۳) \left(\frac{1}{16}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}$$

$$۴) 169^{1/2} = \sqrt{169} = 13$$

$$۵) 2m^{1/2} = 2\sqrt{m}$$

$$۶) (9x^4)^{1/2} = \sqrt{9x^4} = 3\sqrt{(x^2)^2} = 3x^2$$

$$۷) (-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$۸) -16^{1/4} = -\sqrt[4]{16} = -2$$

$$۹) 16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$۱۰) \quad (-64)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-64}\right)^2 = (-4)^2 = 16$$

$$۱۱) \quad (-16)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{-16}\right)^3 \quad \text{عدد حقیقی نیست}$$

$$۱۲) \quad (2x)^{3/5} = \sqrt[5]{(2x)^3} = \sqrt[5]{8x^3}$$

$$۱۳) \quad (7x+2)^{2/3} = \sqrt[3]{(7x+2)^2}$$

$$۱۴) \quad \left(\frac{16}{9}\right)^{3/2} = \left(\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}\right)^3 = \frac{(\sqrt{16})^3}{(\sqrt{9})^3} = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$$

عبارت های زیر را با توان های مثبت بنویسید و اگر ممکن باشد ساده کنید.

$$۱۵) \quad 8^{-4/3} = \frac{1}{8^{4/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$۱۶) (-64)^{-2/3} = \frac{1}{(-64)^{2/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{-64}\right)^2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$$

$$۱۷) (-4)^{-3/2} = \frac{1}{(-4)^{3/2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{-4}\right)^3} \quad \text{عدد حقیقی نیست}$$

$$۱۸) x^{-1/4} = \frac{1}{x^{1/4}}$$

$$۱۹) \frac{1}{a^{-2/3}} = a^{2/3}$$

$$۲۰) \frac{5}{x^{-3/4}} = \frac{5x^{3/4}}{x}$$

عبارت های زیر را با استفاده از خواص توان ها ساده کنید و سپس آنها را با توان مثبت بنویسید.

$$۲۱) a^{2/3} a^{5/3} = a^{7/3}$$

$$۲۲) \quad x^{-\frac{2}{5}} x^{\frac{7}{5}} = x^{-\frac{2}{5} + \frac{7}{5}} = x^{\frac{5}{5}} = x^1 = x$$

$$۲۳) \quad 3^{\frac{1}{6}} 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{6} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 3^{\frac{5}{6}}$$

$$۲۴) \quad \frac{y^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{6}}} = y^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = y^{\frac{2}{6} - \frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{6}}$$

$$۲۵) \quad (4u^2)^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 u^{2 \times \frac{3}{4}} = 2^3 u^3 = 8u^3$$

$$۲۶) \quad \frac{b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}}{-b^{\frac{1}{4}}} = \frac{b^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}}{-b^{\frac{1}{4}}} = \frac{b^{\frac{2}{4} + \frac{3}{4}}}{-b^{\frac{1}{4}}} = \frac{b^{\frac{5}{4}}}{-b^{\frac{1}{4}}} = -b^{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = -b^{\frac{4}{4}} = -b$$

$$۲۷) \quad \frac{\left(3x^{\frac{1}{4}}\right)^3}{x^{\frac{1}{12}}} = \frac{3^3 x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{12}}} = 27x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{12}} = 27x^{\frac{9}{12} - \frac{1}{12}} = 27x^{\frac{8}{12}} = 27x^{\frac{2}{3}}$$

رادیکال ها را به صورت توان کسری بنویسید و سپس ساده کنید. فرض کنید متغیر ها نماینده اعداد مثبت هستند.

$$۲۸) \sqrt[۴]{x^۳} = x^{۳/۴} = x^{۱/۲} = \sqrt{x}$$

$$۲۹) \sqrt[۴]{۲} = ۲^{۱/۴} = ۲^{۱/۲} = \sqrt[۲]{۲}$$

$$۳۰) \sqrt[۴]{۱۶x^۲} = \sqrt[۴]{۱۶} x^{۲/۴} = ۲x^{۱/۲} = ۲\sqrt{x}$$

$$۳۱) \sqrt[۴]{(x+۳)^۲} = (x+۳)^{۲/۴} = (x+۳)^{۱/۲} = \sqrt{x+۳}$$

$$۳۲) \sqrt[۴]{x^۴y^۴} = x^{۴/۴} y^{۴/۴} = (xy)^{۴/۴} = (xy)^{۱/۲} = \sqrt{xy}$$

$$۳۳) \sqrt[۱۲]{a^۴b^۴} = a^{۴/۱۲} b^{۴/۱۲} = a^{۲/۳} b^{۱/۳} = (a^۲b)^{۱/۳} = \sqrt[۳]{a^۲b}$$

با به کار بردن توان کسری هر کدام از عبارت های زیر را به صورت یک عبارت تک رادیکالی بنویسید.

$$۳۴) \sqrt[۳]{y} \times \sqrt[۵]{y^۲} = y^{\frac{۱}{۳}} y^{\frac{۲}{۵}} = y^{\frac{۵}{۱۵}} y^{\frac{۶}{۱۵}} = y^{\frac{۵+۶}{۱۵}} = y^{\frac{۱۱}{۱۵}} = \sqrt[۱۵]{y^{۱۱}}$$

$$۳۵) \frac{\sqrt[۳]{b^۲}}{\sqrt[۴]{b}} = \frac{b^{\frac{۲}{۳}}}{b^{\frac{۱}{۴}}} = b^{\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۴}} = b^{\frac{۸}{۱۲} - \frac{۳}{۱۲}} = b^{\frac{۵}{۱۲}} = \sqrt[۱۲]{b^۵}$$

$$۳۶) \sqrt[۳]{x} \times \sqrt[۴]{x} \times \sqrt[۸]{x^۳} = x^{\frac{۱}{۳}} x^{\frac{۱}{۴}} x^{\frac{۳}{۸}} = x^{\frac{۸}{۲۴}} x^{\frac{۶}{۲۴}} x^{\frac{۹}{۲۴}} = x^{\frac{۸+۶+۹}{۲۴}} = x^{\frac{۲۳}{۲۴}} = \sqrt[۲۴]{x^{۲۳}}$$

$$۳۷) \sqrt{۳} \times \sqrt[۳]{۴} = ۳^{\frac{۱}{۲}} ۴^{\frac{۱}{۳}} = ۳^{\frac{۲}{۶}} ۴^{\frac{۲}{۶}} = (۳^۲ ۴^۲)^{\frac{۱}{۶}} = (۲۷ \times ۱۶)^{\frac{۱}{۶}} = \sqrt[۶]{۴۳۲}$$

۵.۳ ساده کردن عبارت های رادیکالی

استفاده از قانون ضرب رادیکال ها

به مثال زیر توجه کنید.

$$\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$$

$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$$

چون هنگام ساده کردن هر دو عبارت به عدد ۶ میرسیم ، پس می توان نتیجه گرفت که

$$\sqrt{9} \times \sqrt{4} = \sqrt{9 \times 4}$$

قانون ضرب رادیکال ها

اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ اعداد حقیقی باشند، پس $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

مثال

رادیکال ها را ضرب کنید.

$$۱) \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$$

$$۲) \sqrt{21} \times \sqrt{x} = \sqrt{21x}$$

$$۳) \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \times 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$۴) \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{2x^3} = \sqrt[4]{5 \times 2x^3} = \sqrt[4]{10x^3}$$

$$۵) \sqrt{\frac{2}{a}} \times \sqrt{\frac{b}{3}} = \sqrt{\frac{2}{a} \times \frac{b}{3}} = \sqrt{\frac{2b}{3a}}$$

استفاده از قانون خارج قسمت رادیکال ها

به مثال زیر توجه کنید.

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

چون پس از ساده کردن هر دو عبارت بالا به $\frac{3}{2}$ می‌رسیم پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

قانون تقسیم رادیکال‌ها

اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ اعداد حقیقی باشند، پس

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

توجه می‌کنید که قانون تقسیم رادیکال‌ها همان رابطه $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$ است که در بخش قبل دیدیم. مثال

$$\sqrt{\frac{x}{16}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{x}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$$

تقسیم کنید.

$$۶) \sqrt{\frac{۲۵}{۴۹}} = \frac{\sqrt{۲۵}}{\sqrt{۴۹}} = \frac{۵}{۷}$$

$$۷) \sqrt{\frac{x}{۹}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۹}} = \frac{\sqrt{x}}{۳}$$

$$۸) \sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}} = \frac{\sqrt[۳]{۸}}{\sqrt[۳]{۲۷}} = \frac{۲}{۳}$$

$$۹) \sqrt[۴]{\frac{۳}{۱۶y^۴}} = \frac{\sqrt[۴]{۳}}{\sqrt[۴]{۱۶y^۴}} = \frac{\sqrt[۴]{۳}}{۲y}$$

هم قانون ضرب رادیکال ها و هم قانون تقسیم رادیکال ها را برای ساده کردن یک رادیکال می توان بکار برد. اگر قانون ضرب را از راست به چپ بخوانیم ، داریم $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$. حال می توانیم این موضوع را برای ساده کردن رادیکال زیر بکار ببریم.

ساده کنید.

$$۱۰) \sqrt{۵۰} = \sqrt{۲۵ \times ۲} = \sqrt{۲۵} \times \sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

$$۱۱) \sqrt[۳]{۲۴} = \sqrt[۳]{۸ \times ۳} = \sqrt[۳]{۸} \times \sqrt[۳]{۳} = ۲\sqrt[۳]{۳}$$

$$۱۲) \sqrt{۲۶}$$

چون بزرگ ترین فاکتور عدد ۲۶ که مربع کامل باشد، عدد یک است. پس این عبارت از این ساده تر نمی شود.

$$۱۳) \sqrt[۴]{۳۲} = \sqrt[۴]{۱۶ \times ۲} = \sqrt[۴]{۱۶} \times \sqrt[۴]{۲} = ۲\sqrt[۴]{۲}$$

$$۱۴) \sqrt{۲۵x^۳} = \sqrt{۲۵ \times x^۲ \times x} = \sqrt{۲۵x^۲} \times \sqrt{x} = ۵x\sqrt{x}$$

$$۱۵) \sqrt[۳]{۵۴x^۶y^۸} = \sqrt[۳]{۲۷ \times ۲ \times x^۶ \times y^۶ \times y^۲} = \sqrt[۳]{۲۷ \times x^۶ \times y^۶ \times ۲y^۲} = \sqrt[۳]{۲۷x^۶y^۶} \times \sqrt[۳]{۲y^۲} \\ = ۳x^۲y^۲\sqrt[۳]{۲y^۲}$$

$$۱۶) \sqrt[۴]{۸۱z^{۱۱}} = \sqrt[۴]{۸۱z^۸z^۳} = \sqrt[۴]{۸۱z^۸} \times \sqrt[۴]{z^۳} = ۳z^۲\sqrt[۴]{z^۳}$$

با استفاده از قانون تقسیم رادیکال ها ، عبارت زیر را تقسیم کنید. و سپس اگر ممکن باشد ، ساده کنید.

$$۱۷) \frac{\sqrt{۲۰}}{\sqrt{۵}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۵}} = \sqrt{۴} = ۲$$

$$۱۸) \frac{\sqrt{۵۰x}}{۲ \times \sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{\frac{۵۰x}{۲}} = \frac{۱}{۲} \sqrt{۲۵x} = \frac{۱}{۲} \times ۵\sqrt{x} = \frac{۵}{۲}\sqrt{x}$$

$$۱۹) \frac{\sqrt[۷]{۴۸y^۶}}{\sqrt[۳]{۲y}} = \sqrt[۷]{\frac{۴۸y^۶}{۲y}} = \sqrt[۷]{۲۴y^۵} = \sqrt[۷]{۸ \times y^۳ \times ۳} = \sqrt[۷]{۸ \times y^۳} \times \sqrt[۷]{۳} = ۷ \times ۲y^۳\sqrt[۷]{۳} \\ = ۱۴y^۳\sqrt[۷]{۳}$$

$$۲۰) \frac{\sqrt[۲]{۳۲a^۸b^۶}}{\sqrt[۴]{a^{-۱}b^۲}} = \sqrt[۲]{\frac{۳۲a^۸b^۶}{a^{-۱}b^۲}} = \sqrt[۲]{۳۲a^۹b^۴} = \sqrt[۲]{۱۶ \times a^۸ \times b^۴ \times ۲ \times a} \\ = \sqrt[۲]{۱۶a^۸b^۴} \times \sqrt[۲]{۲a} = ۲ \times ۲a^۴b^۲\sqrt[۲]{۲a} = ۴a^۴b^۲\sqrt[۲]{۲a}$$

تمرینات ۵.۳

با استفاده از قانون ضرب رادیکال ها ، رادیکال ها را ضرب کنید .

$$۱) \sqrt{۷} \times \sqrt{۲}$$

$$۲) \sqrt[۴]{۸} \times \sqrt[۴]{۲}$$

$$۳) \sqrt[۳]{۴} \times \sqrt[۳]{۹}$$

$$۴) \sqrt{۲} \times \sqrt{۳x}$$

$$۵) \sqrt{\frac{۷}{x}} \times \sqrt{\frac{۲}{y}}$$

$$۶) \sqrt[۴]{۴x^۳} \times \sqrt[۴]{۵}$$

با استفاده از قانون تقسیم رادیکال ها ، عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۷) \sqrt{\frac{۶}{۴۹}}$$

$$۸) \sqrt{\frac{۲}{۴۹}}$$

$$۹) \sqrt[۴]{\frac{x^۳}{۱۶}}$$

$$۱۰) \sqrt[۳]{\frac{۴}{۲۷}}$$

$$۱۱) \sqrt[۴]{\frac{۸}{x^۸}}$$

$$۱۲) \sqrt[۳]{\frac{۲x}{۸۱y^{۱۲}}}$$

$$۱۳) \sqrt{\frac{x^۲y}{۱۰۰}}$$

$$۱۴) \sqrt{\frac{۵x^۲}{۴y^۲}}$$

$$۱۵) - \sqrt[3]{\frac{z^y}{27x^3}}$$

ساده کنید.

$$۱۶) \sqrt{32}$$

$$۱۷) \sqrt[3]{192}$$

$$۱۸) 5\sqrt{75}$$

$$۱۹) \sqrt{24}$$

$$۲۰) \sqrt{100x^5}$$

$$۲۱) \sqrt[3]{16y^y}$$

$$۲۲) \sqrt[4]{a^a b^b}$$

$$۲۳) \sqrt{y^5}$$

$$۲۴) \sqrt{۲۵a^۲b^۳}$$

$$۲۵) \sqrt[5]{-۳۲x^۱۰y}$$

$$۲۶) \sqrt[۳]{۵۰x^{۱۴}}$$

$$۲۷) -\sqrt{۳۲a^۸b^۷}$$

$$۲۸) \sqrt[۳]{۱۲۵r^۹s^{۱۲}}$$

با استفاده از تقسیم رادیکال ها ، تقسم کنید و سپس اگر ممکن باشد ساده کنید.

$$۲۹) \frac{\sqrt{۱۴}}{\sqrt{۷}}$$

$$۳۰) \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$۳۱) \frac{\sqrt[5]{48}}{\sqrt[4]{3}}$$

$$۳۲) \frac{\sqrt{x^5 y^3}}{\sqrt{xy}}$$

$$۳۳) \frac{\sqrt[8]{54m^7}}{\sqrt[3]{2m}}$$

$$۳۴) \frac{\sqrt[4]{96a^{10}b^3}}{\sqrt[4]{3a^2b^3}}$$

پاسخ تمرینات ۵.۳

با استفاده از قانون ضرب رادیکال ها ، رادیکال ها را ضرب کنید .

$$۱) \sqrt{۷} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۷ \times ۲} = \sqrt{۱۴}$$

$$۲) \sqrt[۴]{۸} \times \sqrt[۴]{۲} = \sqrt[۴]{۸ \times ۲} = \sqrt[۴]{۱۶} = ۲$$

$$۳) \sqrt[۳]{۴} \times \sqrt[۳]{۹} = \sqrt[۳]{۴ \times ۹} = \sqrt[۳]{۳۶}$$

$$۴) \sqrt{۲} \times \sqrt{۳x} = \sqrt{۲ \times ۳x} = \sqrt{۶x}$$

$$۵) \sqrt{\frac{۷}{x}} \times \sqrt{\frac{۲}{y}} = \sqrt{\frac{۷}{x} \times \frac{۲}{y}} = \sqrt{\frac{۱۴}{xy}}$$

$$۶) \sqrt[۴]{۴x^۳} \times \sqrt[۴]{۵} = \sqrt[۴]{۴x^۳ \times ۵} = \sqrt[۴]{۲۰x^۳}$$

با استفاده از قانون تقسیم رادیکال ها ، عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۷) \sqrt{\frac{۶}{۴۹}} = \frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۴۹}} = \frac{\sqrt{۶}}{۷}$$

$$۸) \sqrt{\frac{۲}{۴۹}} = \frac{\sqrt{۲}}{۷}$$

$$۹) \sqrt[۴]{\frac{x^۳}{۱۶}} = \frac{\sqrt[۴]{x^۳}}{\sqrt[۴]{۱۶}} = \frac{\sqrt[۴]{x^۳}}{۲}$$

$$۱۰) \sqrt[۳]{\frac{۴}{۲۷}} = \frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۲۷}} = \frac{\sqrt[۳]{۴}}{۳}$$

$$۱۱) \sqrt[۴]{\frac{۸}{x^۸}} = \frac{\sqrt[۴]{۸}}{\sqrt[۴]{x^۸}} = \frac{\sqrt[۴]{۸}}{x^۲}$$

$$۱۲) \sqrt[۳]{\frac{۲x}{۸۱y^{۱۲}}} = \frac{\sqrt[۳]{۲x}}{\sqrt[۳]{۸۱y^{۱۲}}} = \frac{\sqrt[۳]{۲x}}{\sqrt[۳]{۲۷(y^۴)^۳ \times ۳}} = \frac{\sqrt[۳]{۲x}}{۳y^۴ \sqrt[۳]{۳}}$$

$$۱۳) \sqrt{\frac{x^۲y}{۱۰۰}} = \frac{\sqrt{x^۲y}}{\sqrt{۱۰۰}} = \frac{x\sqrt{y}}{۱۰}$$

$$۱۴) \sqrt{\frac{۵x^۲}{۴y^۲}} = \frac{\sqrt{۵x^۲}}{\sqrt{۴y^۲}} = \frac{x \sqrt{۵}}{۲y}$$

$$۱۵) -\sqrt[۳]{\frac{z^۷}{۲۷x^۳}} = -\frac{\sqrt[۳]{z^۷}}{\sqrt[۳]{۲۷x^۳}} = \frac{\sqrt[۳]{(z^۲)^۳ \times z}}{۳x} = \frac{z^۲ \sqrt[۳]{z}}{۳x}$$

ساده کنید.

$$۱۶) \sqrt{۳۲} = \sqrt{۱۶ \times ۲} = ۴ \sqrt{۲}$$

$$۱۷) \sqrt[۳]{۱۹۲} = \sqrt[۳]{۶۴ \times ۳} = ۴ \sqrt[۳]{۳}$$

$$۱۸) ۵\sqrt{۷۵} = ۵ \sqrt{۲۵ \times ۳} = ۵ \times ۵ \sqrt{۳} = ۲۵ \sqrt{۳}$$

$$۱۹) \sqrt{۲۴} = \sqrt{۴ \times ۶} = ۲ \sqrt{۶}$$

$$۲۰) \sqrt{۱۰۰x^۵} = \sqrt{۱۰۰(x^۲)^۲ \times x} = ۱۰x^۲ \sqrt{x}$$

$$۲۱) \sqrt[r]{1^r y^r} = \sqrt[r]{(y^r)^r} \times y = y^r \sqrt[r]{y}$$

$$۲۲) \sqrt[r]{a^r b^r} = \sqrt[r]{(a^r)^r b^r} \times b^r = a^r b \sqrt[r]{b^r}$$

$$۲۳) \sqrt{y^2} = \sqrt{(y^r)^r} \times y = y^r \sqrt{y}$$

$$۲۴) \sqrt{r^2 a^r b^r} = \sqrt{r^2 a^r b^r} \times b = r a b \sqrt{b}$$

$$۲۵) \sqrt[r]{-r^r x^r y} = \sqrt[r]{-r^r (x^r)^r} \times y = -r x^r \sqrt[r]{y}$$

$$۲۶) \sqrt[r]{\delta \circ x^r} = \sqrt[r]{\delta \circ (x^r)^r} \times x^r = x^r \sqrt[r]{\delta \circ x^r}$$

$$۲۷) -\sqrt{r^r a^r b^r} = -\sqrt{r^r (a^r)^r (b^r)^r} \times b = -r a^r b^r \sqrt{b}$$

$$۲۸) \sqrt[r]{1^r \delta r^r s^r} = \sqrt[r]{\delta^r (r^r)^r (s^r)^r} = \delta r^r s^r$$

با استفاده از تقسیم رادیکال ها ، تقسیم کنید و سپس اگر ممکن باشد ساده کنید.

$$۲۹) \frac{\sqrt{۱۴}}{\sqrt{۷}} = \sqrt{\frac{۱۴}{۷}} = \sqrt{۲}$$

$$۳۰) \frac{\sqrt[۳]{۲۴}}{\sqrt[۳]{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۲۴}{۳}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

$$۳۱) \frac{\sqrt[۵]{۴۸}}{\sqrt[۴]{۳}} = ۵ \sqrt[۴]{\frac{۴۸}{۳}} = ۵ \sqrt[۴]{۱۶} = ۵ \sqrt[۴]{۲^۴} = ۵ \times ۲ = ۱۰$$

$$۳۲) \frac{\sqrt{x^۵y^۳}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{x^۵y^۳}{xy}} = \sqrt{x^۴y^۲} = x^۲y$$

$$۳۳) \frac{\sqrt[۸]{۵۴m^۷}}{\sqrt[۳]{۲m}} = ۸ \sqrt[۳]{\frac{۵۴m^۷}{۲m}} = ۸ \sqrt[۳]{۲۷m^۶} = ۸ \times ۳m^۲ = ۲۴m^۲$$

$$۳۴) \frac{\sqrt[۴]{۹۶a^{۱۰}b^۳}}{\sqrt[۴]{۳a^۲b^۳}} = \sqrt[۴]{\frac{۹۶a^{۱۰}b^۳}{۳a^۲b^۳}} = \sqrt[۴]{۳۲a^۸} = \sqrt[۴]{۱۶(a^۲)^۴ \times ۲} = ۲a^۲ \sqrt[۴]{۲}$$

۵.۴ - جمع ، تفریق و ضرب عبارت های رادیکالی

جمع یا تفریق عبارت های رادیکالی

قبلا دیدیم که برای جمع یا تفریق جملات متشابه ، از خاصیت توزیعی استفاده می کنیم. مانند :

$$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$$

خاصیت توزیعی را هم می توان برای جمع یا تفریق رادیکال های متشابه بکار برد.

رادیکال های متشابه : رادیکال های با نمای یکسان و عبارت های زیر رادیکال یکسان را رادیکال های متشابه می گویند.

$$2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = (2 + 3)\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

توجه عبارت زیر دارای رادیکال های متشابه نیست پس نمی توان آنرا ساده کرد.

$$5\sqrt{7} - 3\sqrt{6}$$

مثال ها

جمع یا تفریق کنید.

$$۱) \quad 4\sqrt{11} + 8\sqrt{11} = (4 + 8)\sqrt{11} = 12\sqrt{11}$$

$$۲) \quad 5\sqrt[3]{3x} - 7\sqrt[3]{3x} = (5 - 7)\sqrt[3]{3x} = -2\sqrt[3]{3x}$$

$$۳) \quad 2\sqrt{7} + 2\sqrt[3]{7} \quad \text{این عبارت را نمی توان ساده کرد}$$

$$۴) \quad \sqrt{20} + 2\sqrt{45} = \sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{9 \times 5} = 2\sqrt{5} + 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\ = (2 + 6)\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

$$۵) \quad \sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \times 2} - 5\sqrt[3]{8 \times 2} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - 5 \times 2 \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$$

$$= (3 - 10 + 1) \sqrt[3]{2} = -6 \sqrt[3]{2}$$

$$\begin{aligned} ۶) \quad \sqrt{27x} - 2\sqrt{9x} + \sqrt{12x} &= \sqrt{9 \times 3 \times x} - 2\sqrt{9x} + \sqrt{36 \times 2 \times x} \\ &= 3\sqrt{3x} - 2 \times 3 \times \sqrt{x} + 6\sqrt{2x} = 3\sqrt{3x} - 6\sqrt{x} + 6\sqrt{2x} \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که هیچ کدام از جملات در آخرین عبارت بدست آمده، شامل رادیکال های متشابه نیستند، لذا بیش از این نمی توان آنرا ساده کرد.

$$۷) \quad \sqrt[3]{98} + \sqrt{98} = \sqrt[3]{98} + \sqrt{49 \times 2} = \sqrt[3]{98} + 7\sqrt{2}$$

$$۸) \quad \sqrt[3]{48y^6} + \sqrt[3]{6y^6} = \sqrt[3]{8y^3 \times 6y^3} + \sqrt[3]{y^3 \times 6y^3} = 2y\sqrt[3]{6y} + y\sqrt[3]{6y} = 3y\sqrt[3]{6y}$$

$$۹) \quad \frac{\sqrt{45}}{۴} - \frac{\sqrt{5}}{۳} = \frac{3\sqrt{5}}{۴} - \frac{\sqrt{5}}{۳} = \left(\frac{3}{۴} - \frac{1}{۳}\right) \sqrt{5} = \left(\frac{3 \times 3}{۴ \times 3} - \frac{1 \times 4}{۳ \times 4}\right) \sqrt{5}$$

$$= \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) \sqrt{5} = \frac{5}{12} \sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}}{12}$$

$$۱۰) \quad \sqrt[3]{\frac{7x}{8}} + 2\sqrt[3]{7x} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \times 7x} + 2\sqrt[3]{7x} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{7x} + 2\sqrt[3]{7x} = \left(\frac{1}{2} + 2\right) \sqrt[3]{7x}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right) \sqrt[3]{7x} = \frac{5}{2} \sqrt[3]{7x} = \frac{5\sqrt[3]{7x}}{2}$$

ضرب عبارت های رادیکالی : برای ضرب عبارت های رادیکالی نیز می توان از بسیاری از خاصیت هایی که در

ضرب عبارت های چند جمله ای بکار می بردیم نیز استفاده کرد. مثلاً برای ضرب کردن $\sqrt{2}(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})$ از

خاصیت توزیعی استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(\sqrt{6} - 3\sqrt{2}) &= \sqrt{2}(\sqrt{6}) - \sqrt{2}(3\sqrt{2}) = \sqrt{2 \times 6} - 3\sqrt{2 \times 2} \\ &= \sqrt{12} - 3\sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 3 \times 2 = 2\sqrt{3} - 6\end{aligned}$$

ضرب کنید.

$$\begin{aligned}11) \quad \sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{30}) &= \sqrt{3} \times (\sqrt{5}) + \sqrt{3} \times (\sqrt{30}) = \sqrt{3} \times \sqrt{5} + \sqrt{3} \times \sqrt{3 \times 10} \\ &= \sqrt{15} + 3\sqrt{10}\end{aligned}$$

تمرینات ۵.۴

جمع یا تفریق کنید .

$$1) \quad \sqrt{8} - \sqrt{32}$$

$$2) \quad 2\sqrt{2x^2} + 4x\sqrt{8x}$$

$$3) \quad 2\sqrt{50} - 3\sqrt{125} + \sqrt{98}$$

$$4) \quad \sqrt[3]{16x} - \sqrt[3]{54x}$$

$$5) \quad \sqrt{9b^2} - \sqrt{25b^2} + \sqrt{49b^2}$$

$$۶) \quad \frac{۵\sqrt{۲}}{۳} + \frac{۲\sqrt{۲}}{۵}$$

$$۷) \quad \sqrt[۳]{\frac{۱۱}{۸}} - \frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۶}$$

$$۸) \quad \frac{\sqrt{۲ \circ x}}{۹} + \sqrt{\frac{۵x}{۹}}$$

$$۹) \quad ۷\sqrt{۹} - ۷ + \sqrt{۳}$$

$$۱۰) \quad ۲ + ۳\sqrt{y^۲} - ۶\sqrt{y^۲} + ۵$$

$$۱۱) \quad ۳\sqrt{۱۰۸} - ۲\sqrt{۱۸} - ۳\sqrt{۴۸}$$

$$۱۲) \quad -۵\sqrt[۳]{۶۲۵} + \sqrt[۳]{۴۰}$$

$$۱۳) \sqrt{9b^3} - \sqrt{25b^3} + \sqrt{16b^3}$$

$$۱۴) 5y \sqrt{8y} + 2 \sqrt{50y^3}$$

$$۱۵) \sqrt[3]{5^4xy^3} - 5 \sqrt[3]{2xy^3} + y \sqrt[3]{128x}$$

$$۱۶) 6 \sqrt[3]{11} + 8 \sqrt{11} - 12 \sqrt{11}$$

$$۱۷) -2 \sqrt[4]{x^5} + 3 \sqrt[4]{16x^5}$$

$$۱۸) \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{12}}{3}$$

$$۱۹) \frac{\sqrt[3]{8x^4}}{y} + \frac{3x \sqrt[3]{x}}{y}$$

$$۲۰) \sqrt{\frac{28}{x^2}} + \sqrt{\frac{7}{4x^2}}$$

$$۲۱) \sqrt[3]{\frac{۱۶}{۲۷}} - \frac{\sqrt[3]{۵۴}}{۶}$$

$$۲۲) -\frac{\sqrt[3]{۲x^۶}}{۹} + \sqrt[3]{\frac{۲۵ \circ x^۶}{۲۷}}$$

پاسخ تمرینات ۵.۴

جمع یا تفریق کنید .

$$۱) \sqrt{۸} - \sqrt{۳۲} = \sqrt{۴ \times ۲} - \sqrt{۱۶ \times ۲} = ۲ \sqrt{۲} - ۴ \sqrt{۲} = (۲ - ۴) \sqrt{۲} = -۲ \sqrt{۲}$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad ۲ \sqrt{۲x^۳} + ۴x \sqrt{۸x} &= ۲ \sqrt{x^۲ \times ۲x} + ۴x \sqrt{۴ \times ۲x} = ۲x \sqrt{۲x} + ۸x \sqrt{۲x} \\ &= (۲x + ۸x) \sqrt{۲x} = ۱۰x \sqrt{۲x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) \quad ۲ \sqrt{۵۰} - ۳ \sqrt{۱۲۵} + \sqrt{۹۸} &= ۲ \sqrt{۲۵ \times ۲} - ۳ \sqrt{۲۵ \times ۵} + \sqrt{۴۹ \times ۲} \\ &= ۲ \times ۵ \sqrt{۲} - ۳ \times ۵ \sqrt{۵} + ۷ \sqrt{۲} = ۱۰ \sqrt{۲} - ۱۵ \sqrt{۵} + ۷ \sqrt{۲} = (۱۰ + ۷) \sqrt{۲} - ۱۵ \sqrt{۵} \\ &= ۱۷ \sqrt{۲} - ۱۵ \sqrt{۵} \end{aligned}$$

$$۴) \sqrt[۳]{۱۶x} - \sqrt[۳]{۵۴x} = \sqrt[۳]{۸ \times ۲x} - \sqrt[۳]{۲۷ \times ۲x} = ۲ \sqrt[۳]{۲x} - ۳ \sqrt[۳]{۲x} = (۲ - ۳) \sqrt[۳]{۲x} = - \sqrt[۳]{۲x}$$

$$\begin{aligned} ۵) \quad \sqrt{۹b^۳} - \sqrt{۲۵b^۳} + \sqrt{۴۹b^۳} &= \sqrt{۹b^۲ \times b} - \sqrt{۲۵b^۲ \times b} + \sqrt{۴۹b^۲ \times b} \\ &= ۳b \sqrt{b} - ۵b \sqrt{b} + ۷b \sqrt{b} = (۳b - ۵b + ۷b) \sqrt{b} = ۵b \sqrt{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۶) \quad \frac{۵\sqrt{۲}}{۳} + \frac{۲\sqrt{۲}}{۵} &= \left(\frac{۵}{۳} + \frac{۲}{۵}\right)\sqrt{۲} = \left(\frac{۵ \times ۵}{۳ \times ۵} + \frac{۲ \times ۳}{۵ \times ۳}\right)\sqrt{۲} = \left(\frac{۲۵}{۱۵} + \frac{۶}{۱۵}\right)\sqrt{۲} \\ &= \frac{۳۱}{۱۵}\sqrt{۲} = \frac{۳۱\sqrt{۲}}{۱۵} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۷) \quad \sqrt[۳]{\frac{۱۱}{۸}} - \frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۶} &= \frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{\sqrt[۳]{۸}} - \frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۶} = \frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۲} - \frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۶} = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶}\right)\sqrt[۳]{۱۱} = \left(\frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۳} - \frac{۱}{۶}\right)\sqrt[۳]{۱۱} \\ &= \left(\frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۶}\right)\sqrt[۳]{۱۱} = \frac{۲}{۶}\sqrt[۳]{۱۱} = \frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۳} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۸) \quad \frac{\sqrt{۲ \circ x}}{۹} + \sqrt{\frac{۵x}{۹}} &= \frac{\sqrt{۴ \times ۵x}}{۹} + \frac{\sqrt{۵x}}{\sqrt{۹}} = \frac{۲\sqrt{۵x}}{۹} + \frac{\sqrt{۵x}}{۳} = \left(\frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۳}\right)\sqrt{۵x} \\ &= \left(\frac{۲}{۹} + \frac{۱ \times ۳}{۳ \times ۳}\right)\sqrt{۵x} = \left(\frac{۲}{۹} + \frac{۳}{۹}\right)\sqrt{۵x} = \frac{۵}{۹}\sqrt{۵x} = \frac{۵\sqrt{۵x}}{۹} \end{aligned}$$

$$۹) \quad ۷\sqrt{۹} - ۷ + \sqrt{۳} = ۷ \times ۳ - ۷ + \sqrt{۳} = ۲۱ - ۷ + \sqrt{۳} = ۱۴ + \sqrt{۳}$$

$$۱۰) \quad ۲ + ۳\sqrt{y^۲} - ۶\sqrt{y^۲} + ۵ = ۲ + ۳y - ۶y + ۵ = (۲ + ۵) + (۳ - ۶)y = ۷ - ۳y$$

$$\begin{aligned}
 ۱۱) \quad & ۳ \sqrt{۱۰۸} - ۲ \sqrt{۱۸} - ۳ \sqrt{۴۸} = ۳ \sqrt{۳۶ \times ۳} - ۲ \sqrt{۹ \times ۲} - ۳ \sqrt{۱۶ \times ۳} \\
 & = ۳ \times ۶ \sqrt{۳} - ۲ \times ۳ \sqrt{۲} - ۳ \times ۴ \sqrt{۳} = ۱۸ \sqrt{۳} - ۶ \sqrt{۲} - ۱۲ \sqrt{۳} \\
 & = (۱۸ - ۱۲) \sqrt{۳} - ۶ \sqrt{۲} = ۶ \sqrt{۳} - ۶ \sqrt{۲}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۲) \quad & -۵ \sqrt[۳]{۶۲۵} + \sqrt[۳]{۴۰} = -۵ \sqrt[۳]{۱۲۵ \times ۵} + \sqrt[۳]{۸ \times ۵} = -۵ \times ۵ \sqrt[۳]{۵} + ۲ \sqrt[۳]{۵} \\
 & = -۲۵ \sqrt[۳]{۵} + ۲ \sqrt[۳]{۵} = (-۲۵ + ۲) \sqrt[۳]{۵} = -۲۳ \sqrt[۳]{۵}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۳) \quad & \sqrt{۹b^۳} - \sqrt{۲۵b^۳} + \sqrt{۱۶b^۳} = \sqrt{۹b^۲ \times b} - \sqrt{۲۵b^۲ \times b} + \sqrt{۱۶b^۲ \times b} \\
 & = ۳b \sqrt{b} - ۵b \sqrt{b} + ۴b \sqrt{b} = (۳b - ۵b + ۴b) \sqrt{b} = ۲b \sqrt{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۴) \quad & ۵y \sqrt{۸y} + ۲ \sqrt{۵۰y^۳} = ۵y \sqrt{۴ \times ۲y} + ۲ \sqrt{۲۵y^۲ \times ۲y} = ۵y \times ۲ \sqrt{۲y} + ۲ \times ۵y \sqrt{۲y} \\
 & = ۱۰y \sqrt{۲y} + ۱۰y \sqrt{۲y} = ۲۰ \sqrt{۲y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۵) \quad & \sqrt[۳]{۵۴xy^۳} - ۵ \sqrt[۳]{۲xy^۳} + y \sqrt[۳]{۱۲۸x} = \sqrt[۳]{۲۷y^۳ \times ۲x} - ۵ \sqrt[۳]{y^۳ \times ۲x} + \sqrt[۳]{۶۴y^۳ \times ۲x} \\
 & = ۳y \sqrt[۳]{۲x} - ۵y \sqrt[۳]{۲x} + ۴y \sqrt[۳]{۲x} = (۳y - ۵y + ۴y) \sqrt[۳]{۲x} = ۲y \sqrt[۳]{۲x}
 \end{aligned}$$

$$۱۶) \quad ۶ \sqrt[۳]{۱۱} + ۸ \sqrt{۱۱} - ۱۲ \sqrt{۱۱} = ۶ \sqrt[۳]{۱۱} + (۸ - ۱۲) \sqrt{۱۱} = ۶ \sqrt[۳]{۱۱} - ۴ \sqrt{۱۱}$$

$$\begin{aligned} ۱۷) \quad -۲ \sqrt[۴]{x^۷} + ۳ \sqrt[۴]{۱۶x^۷} &= -۲ \sqrt[۴]{x^۴ \times x^۳} + ۳ \sqrt[۴]{۱۶x^۴ \times x^۳} = -۲ \times x \sqrt[۴]{x^۳} + ۳ \times ۲x \sqrt[۴]{x^۳} \\ &= -۲x \sqrt[۴]{x^۳} + ۶x \sqrt[۴]{x^۳} = (-۲x + ۶x) \sqrt[۴]{x^۳} = ۴x \sqrt[۴]{x^۳} \end{aligned}$$

$$۱۸) \quad \frac{۴ \sqrt{۳}}{۳} - \frac{\sqrt{۱۲}}{۳} = \frac{۴ \sqrt{۳}}{۳} - \frac{\sqrt{۴ \times ۳}}{۳} = \frac{۴ \sqrt{۳}}{۳} - \frac{۲ \sqrt{۳}}{۳} = \left(\frac{۴}{۳} - \frac{۲}{۳} \right) \sqrt{۳} = \frac{۲}{۳} \sqrt{۳} = \frac{۲ \sqrt{۳}}{۳}$$

$$۱۹) \quad \frac{\sqrt[۳]{۸x^۴}}{۷} + \frac{۳x \sqrt[۳]{x}}{۷} = \frac{\sqrt[۳]{۸x^۳ \times x}}{۷} + \frac{۳x \sqrt[۳]{x}}{۷} = \frac{۲x \sqrt[۳]{x}}{۷} + \frac{۳x \sqrt[۳]{x}}{۷} = \frac{۵x \sqrt[۳]{x}}{۷}$$

$$\begin{aligned} ۲۰) \quad \sqrt{\frac{۲۸}{x^۲}} + \sqrt{\frac{۷}{۴x^۲}} &= \frac{\sqrt{۲۸}}{\sqrt{x^۲}} + \frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۴x^۲}} = \frac{\sqrt{۴ \times ۷}}{x} + \frac{\sqrt{۷}}{۲x} = \frac{۲ \sqrt{۷}}{x} + \frac{\sqrt{۷}}{۲x} = \frac{۲ \times ۲ \sqrt{۷}}{۲ \times x} + \frac{\sqrt{۷}}{۲x} \\ &= \frac{۴ \sqrt{۷}}{۲x} + \frac{\sqrt{۷}}{۲x} = \frac{۵ \sqrt{۷}}{۲x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21) \quad \sqrt[3]{\frac{16}{27}} - \frac{\sqrt[3]{54}}{6} &= \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{27}} - \frac{\sqrt[3]{27 \times 2}}{6} = \frac{\sqrt[3]{8 \times 2}}{3} - \frac{\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{2}}{6} = \frac{2 \sqrt[3]{2}}{3} - \frac{3 \sqrt[3]{2}}{6} \\
 &= \frac{2 \times 2 \sqrt[3]{2}}{2 \times 3} - \frac{3 \sqrt[3]{2}}{6} = \frac{4 \sqrt[3]{2}}{6} - \frac{3 \sqrt[3]{2}}{6} = \frac{\sqrt[3]{2}}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22) \quad -\frac{\sqrt[3]{2x^6}}{9} + \sqrt[3]{\frac{250x^6}{27}} &= -\frac{\sqrt[3]{x^3 \times 2x}}{9} + \frac{\sqrt[3]{250 \times x^6}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{x \sqrt[3]{2x}}{9} + \frac{\sqrt[3]{125x^3 \times 2x}}{3} \\
 &= -\frac{\sqrt[3]{2x}}{9} + \frac{5x \sqrt[3]{2x}}{3} = -\frac{\sqrt[3]{2x}}{9} + \frac{3 \times 5x \sqrt[3]{2x}}{3 \times 3} = -\frac{\sqrt[3]{2x}}{9} + \frac{15x \sqrt[3]{2x}}{9} = \frac{14 \sqrt[3]{2x}}{9}
 \end{aligned}$$

۵.۵ معادلات رادیکالی و حل مساله Radical Equations and Problem Solving

حل معادله هایی که شامل عبارت های رادیکالی هستند.

Solving Equations That Contain Radical Expressions

در این بخش در مورد حل معادله هایی مانند $\sqrt{2x-3} = 9$ بحث می کنیم. برای حل این نوع معادله از قانون توان استفاده می کنیم.

قانون توان Power Rule

اگر دو طرف یک معادل را به یک توان مشخص برسانیم، تمام جواب های معادله اصلی هم بین جواب های معادله جدید هستند.

نکته مهم – قانون بالا نمی گوید که اگر دو طرف یک معادله را به یک توان مشخص برسانیم، نتیجه یک معادله معادل خواهد بود. به عبارت دیگر، یک جواب معادله جدید ممکن است بین جواب های معادله اصلی باشد و ممکن است نباشد.

پس تمام جواب های معادله جدید باید در معادله اصلی امتحان شود و اطمینان یافت که آن جواب یا جواب ها نیز جواب معادله اصلی نیز هستند. جواب بدست آمده از معادله دوم که جواب معادله اصلی نیست را جواب نامربوط می نامند.

نامربوط Extraneous

مثال ۱ – حل کنید.

$$۱) \sqrt{2x-3} = 9$$

دو طرف معادله را به توان دو میرسانیم تا رادیکال حذف شود.

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = 9^2$$

$$2x-3 = 81$$

$$2x = 84$$

$$x = \frac{84}{2} = 42$$

باید ۴۲ را در معادله اصلی امتحان کنیم.

$$\sqrt{2(42) - 3} = 9$$

$$\sqrt{84 - 3} = 9$$

$$\sqrt{81} = 9$$

صحیح است $9 = 9$

پس ۴۲ جواب معادله است. یعنی مجموعه جواب های این معادله $\{42\}$ است.

حل معادله های رادیکالی Solving Radical Equations

الف — رادیکال را به تنهایی در یک طرف معادله قرار دهید.

ب — هر دو طرف معادله را به توان مساوی با نمای رادیکال برسانید.

ج — اگر معادله هنوز دارای رادیکال است، مراحل الف و ب را تکرار کنید.

د — اگر در معادله دیگر رادیکالی وجود ندارد، معادله را حل کنید.

ه — جواب های بدست آمده را در معادله اصلی امتحان کنید.

معادله های زیر را حل کنید.

$$2) \quad \sqrt{-1 \circ x - 1} + 3x = 0$$

$$\sqrt{-1 \circ x - 1} = -3x$$

$$\left(\sqrt{-1 \circ x - 1}\right)^2 = (-3x)^2$$

$$-1 \circ x - 1 = 9x^2$$

$$-9x^2 - 1 \circ x - 1 = 0$$

$$9x^2 + 10x + 1 = 0$$

$$(9x + 1)(x + 1) = 0$$

$$9x + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0$$

$$9x = -1 \quad \text{یا} \quad x = -1$$

$$x = -\frac{1}{9} \quad \text{یا} \quad x = -1$$

جواب ها را در معادله اصلی امتحان می کنیم.

$$\sqrt{-1 \circ (-1) - 1} + 3(-1) = 0$$

$$\sqrt{-1 \circ \left(-\frac{1}{9}\right) - 1} + 3\left(-\frac{1}{9}\right) = 0$$

$$\sqrt{1 \circ -1 - 3} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1 \circ 9}{9} - \frac{1}{3}} = 0$$

$$\sqrt{9 - 3} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}} = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

ملاحظه می کنید که هر دو جواب بدست آمده جواب معادله اصلی هم هست .

$$\left\{-\frac{1}{9}, -1\right\}$$

$$3) \sqrt[3]{x+1} + 5 = 3$$

$$\sqrt[3]{x+1} = -2$$

$$\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = (-2)^3$$

$$x+1 = -8$$

$$x = -9$$

این جواب در معادله اصلی عمل می کند ، لذا مجموعه جواب های این معادله $\{-9\}$ است.

$$4) \sqrt{4-x} = x-2$$

$$\left(\sqrt{4-x}\right)^2 = (x-2)^2$$

$$4-x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x=0 \quad \text{یا} \quad x-3=0$$

$$x=0 \quad \text{یا} \quad x=3$$

اگر $x=0$ را در معادله اصلی قرار دهیم خواهیم داشت

$$\sqrt{4-0} = 0-2$$

$$\sqrt{4} = -2$$

$$2 = -2 \text{ غلط است}$$

پس $x=0$ جواب نامربوط است . حال اگر $x=3$ در معادله اصلی قرار دهیم ، خواهیم داشت

$$\sqrt{4-3} = 4-2$$

$$\sqrt{1} = 1$$

صحیح است $1 = 1$

پس مجموعه جواب های این معادله $\{3\}$ است.

$$5) \quad \sqrt{2x+5} + \sqrt{2x} = 3$$

$$\sqrt{2x+5} = 3 - \sqrt{2x}$$

$$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 = \left(3 - \sqrt{2x}\right)^2$$

$$2x+5 = 9 - 6\sqrt{2x} + 2x$$

$$6\sqrt{2x} = -2x - 5 + 9 + 2x$$

$$6\sqrt{2x} = 4$$

$$\left(6\sqrt{2x}\right)^2 = 4^2$$

$$36(2x) = 16$$

$$72x = 16$$

$$x = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

اگر $x = \frac{2}{9}$ را در معادله اصلی امتحان کنیم، نتیجه می گیریم که مجموعه جواب های این معادله $\left\{\frac{2}{9}\right\}$ است.

تمرینات ۵.۵

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \sqrt{x-3} = 2$$

$$۲) \sqrt{2x} = -4$$

$$۳) \sqrt{4x-3} - 5 = 0$$

$$۴) \sqrt{2x-3} - 2 = 1$$

$$۵) \sqrt[3]{x-2} - 3 = 0$$

$$۶) \sqrt{13-x} = x-1$$

$$۷) x - \sqrt{4-3x} = -8$$

$$۸) \sqrt{y+5} = 2 - \sqrt{y-4}$$

$$۹) \sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$$

$$۱۰) -\sqrt{2x+4} = -6$$

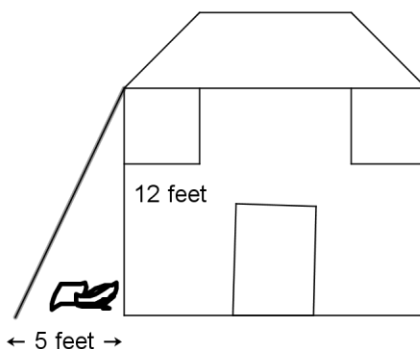
$$۱۱) \sqrt{3x+1} + 2 = 0$$

$$۱۲) \sqrt[4]{4x+1} - 2 = 0$$

$$۱۳) \sqrt{x+4} = \sqrt{2x-5}$$

$$۱۴) x - \sqrt{1-x} = -5$$

۱۵ – یک تعمیر کار می خواهد با نردبانی به پشت بام خانه ای برود. ارتفاع خانه تا پشت بام ۱۲ فوت است. چون کنار خانه یک باغچه است، نردبان باید ۵ فوت از خانه فاصله داشته باشد. به شکل زیر نگاه کنید. طول آن نردبان چند فوت باید باشد؟



پاسخ تمرینات ۵.۵

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \sqrt{x-3} = 2$$

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = 2^2$$

$$x-3 = 4$$

$$x = 7 \quad \{7\}$$

$$۲) \sqrt{2x} = -4$$

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = (-4)^2$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2} = 8 \quad \phi$$

$$۳) \sqrt{4x-3} - 5 = 0$$

$$\sqrt{4x-3} = 5$$

$$\left(\sqrt{4x-3}\right)^2 = 5^2$$

$$4x-3 = 25$$

$$4x = 28$$

$$x = \frac{28}{4} = 7 \quad \{7\}$$

$$4) \quad \sqrt{2x - 3} - 2 = 1$$

$$\sqrt{2x - 3} = 3$$

$$\left(\sqrt{2x - 3}\right)^2 = 3^2$$

$$2x - 3 = 9$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2} = 6 \quad \{6\}$$

$$5) \quad \sqrt[3]{x - 2} - 3 = 0$$

$$\sqrt[3]{x - 2} = 3$$

$$\left(\sqrt[3]{x - 2}\right)^3 = 3^3$$

$$x - 2 = 27$$

$$x = 29 \quad \{29\}$$

$$6) \quad \sqrt{13 - x} = x - 1$$

$$\left(\sqrt{13-x}\right)^2 = (x-1)^2$$

$$13-x = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

$$x-4=0 \quad \text{یا} \quad x+3=0$$

$$x=4 \quad \text{یا} \quad x=-3 \quad \{4\}$$

$$7) \quad x - \sqrt{4-3x} = -8$$

$$-\sqrt{4-3x} = -8 - x$$

$$\sqrt{4-3x} = 8 + x$$

$$\left(\sqrt{4-3x}\right)^2 = (8+x)^2$$

$$4-3x = 64 + 16x + x^2$$

$$x^2 + 19x + 60 = 0$$

$$(x+15)(x+4) = 0$$

$$x+15=0 \quad \text{یا} \quad x+4=0$$

$$x=-15 \quad \text{یا} \quad x=-4 \quad \{-4\}$$

$$8) \quad \sqrt{y+5} = 2 - \sqrt{y-4}$$

$$\left(\sqrt{y+5}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{y-4}\right)^2$$

$$y+5 = 4 - 4\sqrt{y-4} + y-4$$

$$4\sqrt{y-4} = -5$$

$$\left(4\sqrt{y-4}\right)^2 = (-5)^2$$

$$16(y-4) = 25$$

$$16y - 64 = 25$$

$$16y = 89$$

$$y = \frac{89}{16} \quad \phi$$

$$9) \quad \sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$$

$$\sqrt{x-3} = 5 - \sqrt{x+2}$$

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x+2}\right)^2$$

$$x-3 = 25 - 10\sqrt{x+2} + x+2$$

$$10\sqrt{x+2} = 30$$

$$\sqrt{x+2} = 3$$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = 3^2$$

$$x+2 = 9$$

$$x = 7 \quad \{7\}$$

$$۱۰) \quad -\sqrt{2x+4} = -6$$

$$-\sqrt{2x} = -۱۰$$

$$\sqrt{2x} = ۱۰$$

$$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = ۱۰^2$$

$$2x = ۱۰۰$$

$$x = \frac{۱۰۰}{2} = ۵۰ \quad \{۵۰\}$$

$$۱۱) \quad \sqrt{3x+1} + 2 = 0$$

$$\sqrt{3x+1} = -2$$

$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = (-2)^2$$

$$3x + 1 = 4$$

$$3x = 3$$

$$x = \frac{3}{3} = 1 \quad \phi$$

$$۱۲) \sqrt[4]{4x + 1} - 2 = 0$$

$$\sqrt[4]{4x + 1} = 2$$

$$\left(\sqrt[4]{4x + 1}\right)^4 = 2^4$$

$$4x + 1 = 16$$

$$4x = 15$$

$$x = \frac{15}{4} \quad \left\{\frac{15}{4}\right\}$$

$$۱۳) \sqrt{x + 4} = \sqrt{2x - 5}$$

$$\left(\sqrt{x + 4}\right)^2 = \left(\sqrt{2x - 5}\right)^2$$

$$x + 4 = 2x - 5$$

$$x = 9 \quad \{9\}$$

$$۱۴) \quad x - \sqrt{1-x} = -۵$$

$$-\sqrt{1-x} = -۵ - x$$

$$\sqrt{1-x} = ۵ + x$$

$$\left(\sqrt{1-x}\right)^2 = (۵+x)^2$$

$$1-x = ۲۵ + ۱۰x + x^2$$

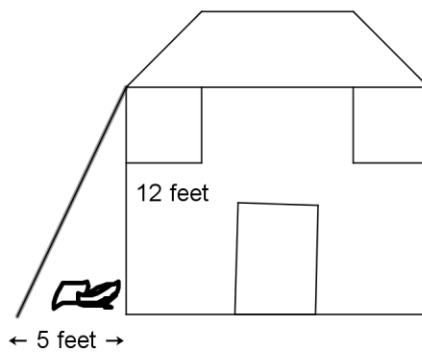
$$x^2 + ۱۱x + ۲۴ = ۰$$

$$(x+۸)(x+۳) = ۰$$

$$x+۸=۰ \quad \text{یا} \quad x+۳=۰$$

$$x=-۸ \quad \text{یا} \quad x=-۳ \quad \{-۳\}$$

۱۵- یک تعمیر کار می خواهد با نردبانی به پشت بام خانه ای برود. ارتفاع خانه تا پشت بام ۱۲ فوت است. چون کنار خانه یک باغچه است، نردبان باید ۵ فوت از خانه فاصله داشته باشد. به شکل زیر نگاه کنید. طول آن نردبان چند فوت باید باشد؟



$$x^2 = 12^2 + 5^2$$

$$x^2 = 144 + 25$$

$$x^2 = 169$$

$$x = 13 \text{ فوت}$$

۵.۶ – اعداد مرکب Complex Numbers

تا بحال با عبارت های رادیکالی کار کرده ایم اما در مورد عبارت هایی مانند $\sqrt{-۱۶}$ صحبت نکرده ایم. چون

$\sqrt{-۱۶}$ عدد حقیقی نیست. هیچ عدد حقیقی پیدا نمی شود که مربع آن -۱۶ باشد. در این بخش در مورد مجموعه اعدادی بحث می کنیم که شامل ریشه های اعداد منفی است. این مجموعه اعداد، مجموعه اعداد مرکب است.

اعداد حقیقی، زیر مجموعه این اعداد مرکب به حساب می آید. سیستم اعداد مرکب به ما کمک می کند تا معادله هایی مانند $x^2 + 1 = 0$ را حل کنیم. می دانیم که معادله مذکور جواب حقیقی ندارد. مجموعه اعداد مرکب شامل واحد تصویری **Imaginary Unit** است

Imaginary Unit واحد تصویری

واحد تصویری که به صورت i نوشته می شود، عددی است که مربع آن -۱ است. یعنی

$$i^2 = -1 \quad \text{و} \quad i = \sqrt{-1}$$

برای نوشتن ریشه دوم یک عدد منفی با بکار بردن i از این خاصیت استفاده می کنیم که اگر a یک عدد مثبت باشد، پس

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \times \sqrt{a} = i\sqrt{a}$$

بنا بر این با استفاده از i می توانیم بنویسیم

$$\sqrt{-۱۶} = \sqrt{-1 \times ۱۶} = \sqrt{-1} \times \sqrt{۱۶} = i \times ۴ = ۴i$$

مثال – استفاده از i عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۱) \quad \sqrt{-۳۶} = \sqrt{-1 \times ۳۶} = \sqrt{-1} \times \sqrt{۳۶} = i \times ۶ = ۶i$$

$$۲) \quad \sqrt{-۵} = \sqrt{-1 \times ۵} = \sqrt{-1} \times \sqrt{۵} = i\sqrt{۵}$$

$$۳) \quad -\sqrt{-۲۰} = -\sqrt{-1 \times ۲۰} = -\sqrt{-1} \times \sqrt{۲۰} = -i \times \sqrt{۴ \times ۵} = -۲i\sqrt{۵}$$

قانون ضرب رادیکال ها لزوماً برای اعداد تصوری کار برد ندارد. برای ضرب ریشه دوم اعداد منفی اول آنها را بر حسب

$$\text{واحد تصوری مینویسیم مثلاً } \sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = 2i(3i) = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

ضرب یا تقسیم کنید.

$$4) \quad \sqrt{-3} \times \sqrt{-5} = i\sqrt{3} (i\sqrt{5}) = i^2 \sqrt{15} = -1 \sqrt{15} = -\sqrt{15}$$

$$5) \quad \sqrt{-36} \times \sqrt{-1} = 6i(i) = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

$$6) \quad \sqrt{8} \times \sqrt{-2} = 2\sqrt{2} (i\sqrt{2}) = 2i\sqrt{2}\sqrt{2} = 2i(2) = 4i$$

$$7) \quad \frac{\sqrt{-125}}{\sqrt{5}} = \frac{i\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = i\sqrt{25} = 5i$$

اعداد مرکب Complex Number

عدد مرکب عددی است که بتوان آنرا به صورت $a + bi$ نوشت. a و b اعداد حقیقی هستند.

عدد مرکب را عدد تصوری هم می گویند.

جمع و تفریق اعداد مرکب Adding and Subtracting Complex Numbers

اگر $a + bi$ و $c + di$ اعداد مرکب باشند، جمع آنها می شود

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

و تفریق آنها می شود

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

مثال - جمع یا تفریق کنید.

$$8) \quad (2 + 3i) + (-3 + 2i) = (2 - 3) + (3 + 2)i = -1 + 5i$$

$$9) \quad 5i - (1 - i) = 5i - 1 + i = -1 + (5 + 1)i = -1 + 6i$$

$$۱۵) (-3 - 7i) - (-6) = -3 - 7i + 6 = 3 - 7i$$

ضرب اعداد مرکب — برای ضرب اعداد مرکب به شکل $a + bi$ مانند ضرب دو جمله ای عمل می کنیم.
مثال — ضرب کنید.

$$۱۱) -7i \times 3i = -21i^2 = -21(-1) = 21$$

$$۱۲) 3i(2 - i) = 6i - 3i^2 = 6i - 3(-1) = 6i + 3 = 3 + 6i$$

$$۱۳) (2 - 5i)(4 + i) = 8 + 2i - 20i - 5i^2 = 8 - 18i - 5(-1) = 8 - 18i + 5 = 13 - 18i$$

$$۱۴) (2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i + (-1) = 3 - 4i$$

$$۱۵) (7 + 3i)(7 - 3i) = 7^2 - (3i)^2 = 49 - 9i^2 = 49 - 9(-1) = 49 + 9 = 58$$

از مثال شماره ۱۵ نتیجه می شود که حاصل ضرب $7 - 3i$ و $7 + 3i$ یک عدد حقیقی است. و یا بطور کلی

مزدوج های مرکب Complex Conjugates

اعداد مرکب $(a - bi)$ و $(a + bi)$ را مزدوج های مرکب یک دیگر می نامند و

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

اثبات

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

تقسیم کنید و حاصل را به صورت $a + bi$ بنویسید.

$$۱۶) \frac{2 + i}{1 - i}$$

برای تقسیم مثال بالا، صورت و مخرج را در مزدوج مرکب $1 - i$ ضرب می کنیم.

$$\frac{2 + i}{1 - i} = \frac{(2 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + i + i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{2 + 3i - 1}{2} = \frac{1 + 3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$۱۷) \frac{۷}{۳i}$$

میدانید که $۳i = ۰ + ۳i$ پس مزدوج $۳i$ میشود $-۳i$

$$\frac{۷}{۳i} = \frac{۷(-۳i)}{۳i(-۳i)} = \frac{-۲۱i}{-۹i^2} = \frac{-۲۱i}{-۹(-۱)} = \frac{-۲۱i}{۹} = -\frac{۷}{۳}i$$

پیدا کردن توان های i

$$i^3 = i^2 \times i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$$

$$i^6 = i^4 \times i^2 = 1(-1) = -1$$

مثال -توان های زیر را پیدا کنید.

$$۱۸) i^7 = i^4 \times i^3 = 1(-i) = -i$$

$$۱۹) i^{۲۰} = (i^4)^5 = 1^5 = 1$$

$$۲۰) i^{۴۶} = (i^4)^{11} \times i^2 = 1^{11} \times (-1) = -1$$

$$۲۱) i^{-۱۲} = \frac{1}{i^{۱۲}} = \frac{1}{(i^4)^3} = \frac{1}{1^3} = \frac{1}{1} = 1$$

تمرینات ۵.۶

با بکار بردن i عبارت ها را بنویسید.

۱) $\sqrt{-۲۴}$

۲) $-\sqrt{-۳۶}$

۳) $۸\sqrt{-۶۳}$

۴) $-\sqrt{۵۴}$

ضرب یا تقسیم کنید.

۵) $\sqrt{-۲} \times \sqrt{-۷}$

۶) $\sqrt{-۵} \times \sqrt{-۱۰}$

۷) $\sqrt{۱۶} \times \sqrt{-۱}$

$$۸) \frac{\sqrt{-۹}}{\sqrt{۳}}$$

$$۹) \frac{\sqrt{-۸۰}}{\sqrt{-۱۰}}$$

جمع یا تفریق کنید.

$$۱۰) (۴ - ۷i) + (۲ + ۳i)$$

$$۱۱) (۶ + ۵i) - (۸ - i)$$

$$۱۲) ۶ - (۸ + ۴i)$$

$$۱۳) (۶ - ۳i) - (۴ - ۲i)$$

$$۱۴) (۵ - ۶i) - ۴i$$

$$۱۵) (۲ + ۴i) + (۶ - ۵i)$$

ضرب کنید. جواب ها را به صورت $a + bi$ بنویسید.

$$۱۶) \quad ۶i \times ۲i$$

$$۱۷) \quad -۹i \times ۷i$$

$$۱۸) \quad -۱ \circ i \times -۴i$$

$$۱۹) \quad ۶i(۲ - ۳i)$$

$$۲۰) \quad -۳i(-۱ + ۹i)$$

$$۲۱) \quad (۴ + i)(۵ + ۲i)$$

$$۲۲) \quad (\sqrt{۳} + ۲i)(\sqrt{۳} - ۲i)$$

$$۲۳) \quad (۴ - ۲i)^۲$$

$$۲۴) \quad (۶ - ۲i)(۳ + i)$$

$$۲۵) \quad (۱ - i)(۱ + i)$$

تقسیم کنید. جواب را به صورت $a + bi$ بنویسید.

$$۲۶) \frac{۷}{۴ + ۳i}$$

$$۲۷) \frac{۶i}{۱ - ۲i}$$

$$۲۸) \frac{۳ + ۵i}{۱ + i}$$

$$۲۹) \frac{۱۶ + ۱۵i}{-۳i}$$

$$۳۰) \frac{۲ - ۳i}{۲ + i}$$

پاسخ تمرینات ۵.۶

با بکار بردن i عبارت ها را بنویسید.

$$۱) \sqrt{-۲۴} = i\sqrt{۲۴} = i\sqrt{۴ \times ۶} = ۲i\sqrt{۶}$$

$$۲) -\sqrt{-۳۶} = -i\sqrt{۳۶} = -۶i$$

$$۳) ۸\sqrt{-۶۳} = ۸i\sqrt{۶۳} = ۸i\sqrt{۹ \times ۷} = ۲۴i\sqrt{۷}$$

$$۴) -\sqrt{۵۴} = -\sqrt{۹ \times ۶} = -۳\sqrt{۶}$$

ضرب یا تقسیم کنید.

$$۵) \sqrt{-۲} \times \sqrt{-۷} = i\sqrt{۲} \times i\sqrt{۷} = i^2\sqrt{۱۴} = -\sqrt{۱۴}$$

$$۶) \sqrt{-۵} \times \sqrt{-۱۰} = i\sqrt{۵} \times i\sqrt{۱۰} = i^2\sqrt{۵۰} = -\sqrt{۲۵ \times ۲} = -۵\sqrt{۲}$$

$$۷) \sqrt{۱۶} \times \sqrt{-۱} = ۴ \times i\sqrt{۱} = ۴i$$

$$۸) \frac{\sqrt{-۹}}{\sqrt{۳}} = \frac{i\sqrt{۹}}{\sqrt{۳}} = i\sqrt{\frac{۹}{۳}} = i\sqrt{۳}$$

$$۹) \frac{\sqrt{-۸۰}}{\sqrt{-۱۰}} = \frac{i\sqrt{۸۰}}{i\sqrt{۱۰}} = \sqrt{\frac{۸۰}{۱۰}} = \sqrt{۸} = \sqrt{۴ \times ۲} = ۲\sqrt{۲}$$

جمع یا تفریق کنید.

$$۱۰) (۴ - ۷i) + (۲ + ۳i) = (۴ + ۲) + (-۷ + ۳)i = ۶ - ۴i$$

$$۱۱) (۶ + ۵i) - (۸ - i) = (۶ - ۸) + (۵ - (-۱))i = -۲ + ۶i$$

$$۱۲) ۶ - (۸ + ۴i) = (۶ - ۸) + (۰ - ۴)i = -۲ - ۴i$$

$$۱۳) (۶ - ۳i) - (۴ - ۲i) = (۶ - ۴) + (-۳ - (-۲))i = ۲ - i$$

$$۱۴) (۵ - ۶i) - ۴i = (۵ - ۰) + (-۶ - ۴)i = ۵ - ۱۰i$$

$$۱۵) (۲ + ۴i) + (۶ - ۵i) = (۲ + ۶) + (۴ - ۵)i = ۸ - i$$

ضرب کنید. جواب ها را به صورت $a + bi$ بنویسید.

$$۱۶) \quad ۶i \times ۲i = ۱۲i^2 = ۱۲(-۱) = -۱۲$$

$$۱۷) \quad -۹i \times ۷i = -۶۳i^2 = -۶۳(-۱) = ۶۳$$

$$۱۸) \quad -۱ \circ i \times -۴i = ۴ \circ i^2 = ۴ \circ (-۱) = -۴ \circ$$

$$۱۹) \quad ۶i(۲ - ۳i) = ۱۲i - ۱۸i^2 = ۱۲i - ۱۸(-۱) = ۱۲i + ۱۸ = ۱۸ + ۱۲i$$

$$۲۰) \quad -۳i(-۱ + ۹i) = ۳i - ۲۷i^2 = ۳i + ۲۷ = ۲۷ + ۳i$$

$$۲۱) \quad (۴ + i)(۵ + ۲i) = ۲۰ + ۸i + ۵i + ۲i^2 = ۲۰ + ۱۳i - ۲ = ۱۸ + ۱۳i$$

$$۲۲) \quad (\sqrt{۳} + ۲i)(\sqrt{۳} - ۲i) = (\sqrt{۳})^2 + ۲^2 = ۳ + ۴ = ۷$$

$$۲۳) \quad (۴ - ۲i)^2 = ۱۶ - ۱۶i + ۴i^2 = ۱۶ - ۱۶i - ۴ = ۱۲ - ۱۶i$$

$$۲۴) \quad (۶ - ۲i)(۳ + i) = ۱۸ + ۶i - ۶i - ۲i^2 = ۱۸ + ۲ = ۲۰$$

$$۲۵) \quad (۱ - i)(۱ + i) = ۱^2 + ۱^2 = ۲$$

تقسیم کنید. جواب را به صورت $a + bi$ بنویسید.

$$۲۶) \quad \frac{۷}{۴ + ۳i} = \frac{۷(۴ - ۳i)}{(۴ + ۳i)(۴ - ۳i)} = \frac{۲۸ - ۲۱i}{۴^۲ + ۳^۲} = \frac{۲۸ - ۲۱i}{۲۵} = \frac{۲۸}{۲۵} - \frac{۲۱}{۲۵}i$$

$$۲۷) \quad \frac{۶i}{۱ - ۲i} = \frac{۶i(۱ + ۲i)}{(۱ - ۲i)(۱ + ۲i)} = \frac{۶i + ۱۲i^۲}{۱^۲ + ۲^۲} = \frac{۶i - ۱۲}{۵} = -\frac{۱۲}{۵} + \frac{۶}{۵}i$$

$$۲۸) \quad \frac{۳ + ۵i}{۱ + i} = \frac{(۳ + ۵i)(۱ - i)}{(۱ + i)(۱ - i)} = \frac{۳ - ۳i + ۵i - ۵i^۲}{۱^۲ + ۱^۲} = \frac{۳ + ۲i + ۵}{۲} = \frac{۸ + ۲i}{۲} = ۴ + i$$

$$۲۹) \quad \frac{۱۶ + ۱۵i}{-۳i} = \frac{(۱۶ + ۱۵i)(۳i)}{(-۳i)(۳i)} = \frac{۴۸i + ۴۵i^۲}{۹} = \frac{۴۸i - ۴۵}{۹} = \frac{-۴۵}{۹} + \frac{۴۸}{۹}i = -۵ + \frac{۱۶}{۳}i$$

$$۳۰) \quad \frac{۲ - ۳i}{۲ + i} = \frac{(۲ - ۳i)(۲ - i)}{(۲ + i)(۲ - i)} = \frac{۴ - ۲i - ۶i + ۳i^۲}{۲^۲ + ۱^۲} = \frac{۴ - ۸i - ۳}{۵} = \frac{۱ - ۸i}{۵} = \frac{۱}{۵} - \frac{۸}{۵}i$$



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)