

فصل ششم

معادله های درجه دو Quadratic Equations

۶.۱ - حل معادله های درجه دو از طریق کامل کردن مربع

Solving Quadratic Equations by Completing The Square

بکار بردن خاصیت ریشه دوم Using Square Root Property

یاد آوری — می دانیم که معادله درجه دوم Quadratic Equation یا Second Degree Equation معادله ای است که بتوان آنرا به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ نوشت. اینجا a ، b ، c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$

باز بخاطر دارید که برای حل معادله درجه دومی مانند $x^2 = 9$ از طریق فاکتور گیری از خاصیت عامل صفر استفاده می کردیم. برای استفاده از خاصیت عامل صفر Zero Factor Property ابتدا معادله را به شکل استاندارد

$$ax^2 + bx + c = 0$$

مینویسیم و سپس از چند جمله ای سمت چپ علامت مساوی، فاکتور می گیریم و هر کدام از عوامل را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{یا} \quad x = -3$$

پس مجموعه جواب های این معادله $\{3, -3\}$ است.

اما همه معادله های درجه دو را نمی توان از طریق فاکتور گیری حل کرد. پس باید روش های دیگری را مورد توجه قرار دهیم.

توجه دارید که جواب های معادله $x^2 = 9$ دو عدد است که مربع آنها میشود ۹

$$3^2 = 9 \quad \text{و} \quad (-3)^2 = 9$$

پس نتیجه می گیریم که می توانیم برای حل معادله $x^2 = 9$ از دو طرف معادله جذر بگیریم

توجه داشته باشید هم $-\sqrt{9}$ و هم $\sqrt{9}$ را به عنوان جواب های معادله در نظر بگیرید.

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

خاصیت ریشه دوم Square Root Property

اگر b یک عدد حقیقی باشد و $a^2 = b$ پس $a = \pm\sqrt{b}$

مثال با استفاده از خاصیت ریشه دوم ، معادله های زیر را حل کنید.

۱) $x^2 = 50$

$$x = \pm\sqrt{50}$$

$$x = \pm\sqrt{25 \times 2}$$

$$x = \pm 5\sqrt{2}$$

$$\{5\sqrt{2}, -5\sqrt{2}\}$$

۲) $2x^2 = 14$

$$x^2 = \frac{14}{2} = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

$$\{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$$

$$۳) \quad (x + ۱)^2 = ۱۲$$

$$x + ۱ = \pm \sqrt{۱۲}$$

$$x + ۱ = \pm ۲\sqrt{۳}$$

$$x = -۱ \pm ۲\sqrt{۳}$$

$$\{-۱ + ۲\sqrt{۳}, -۱ - ۲\sqrt{۳}\}$$

$$۴) \quad (۲x - ۵)^2 = -۱۶$$

$$۲x - ۵ = \pm \sqrt{-۱۶}$$

$$۲x - ۵ = \pm i\sqrt{۱۶}$$

$$۲x - ۵ = \pm ۴i$$

$$۲x = ۵ \pm ۴i$$

$$x = \frac{۵ \pm ۴i}{۲}$$

$$\left\{ \frac{۵ + ۴i}{۲}, \frac{۵ - ۴i}{۲} \right\}$$

نوشتن سه جمله ای مربع کامل Writing Perfect Square Trinomial

میدانید که اعداد ... ۲۵، ۱۶، ۹، ۴ مربع کامل هستند. زیر ... $۵^2 = ۲۵$ ، $۴^2 = ۱۶$ ، $۳^2 = ۹$ ، $۲^2 = ۴$

از مثال های ۴ و ۳ نتیجه می گیریم که اگر یک معادله درجه دوم را طوری بنویسیم که یک طرف معادله مربع یک دو جمله ای باشد، می توانیم معادله را با استفاده از خاصیت ریشه دوم حل کنیم. برای نوشتن مربع یک دو جمله ای، سه جمله ای های مربع کامل می نویسیم. بخاطر دارید که یک سه جمله ای مربع کامل است، که بتوان آنرا به صورت دو دو جمله ای شبیه به هم فاکتور بگیریم. مثال

سه جمله ای مربع کامل شکل فاکتور شده

$$x^2 + 8x + 16 \qquad (x + 4)^2 \qquad (۱)$$

$$x^2 - 6x + 9 \qquad (x - 3)^2 \qquad (۲)$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} \qquad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \qquad (۳)$$

اگر مثال های بالا را و یا بطور کلی یک سه جمله ای کامل را به شکل $ax^2 + bx + c$ فرض کنیم، متوجه میشویم که جمله سوم یعنی c عبارت است از مربع نصف ضریب جمله دوم یعنی b است.

$$۱۶ = \left(\frac{۸}{۲}\right)^2 = (۴)^2 \qquad (۱)$$

$$۹ = \left(\frac{-۶}{۲}\right)^2 = (-۳)^2 \qquad (۲)$$

$$\frac{۹}{۴} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^2 \qquad (۳)$$

مثال - اعداد مناسبی را پیدا کنید که با اضافه کردن آنها دو جمله ای های زیر به سه جمله ای های مربع کامل تبدیل شوند.

$$5) \quad x^2 + 6x$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$$

پس خواهیم داشت

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

$$6) \quad x^2 - 3x$$

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

پس خواهیم داشت

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

حل یک معادله درجه دوم برحسب x از طریق کامل کردن مربع

Solving a Quadratic Equation in x by Completing the Square

الف - اگر ضریب x^2 یک است ، به مرحله ب بروید. در غیر اینصورت ، هر دو طرف معادله را بر ضریب x^2 تقسیم کنید.

ب - کلیه جمله هایی که شامل متغیر هستند ، به یک طرف معادله ببرید.

ج - مربع نصف ضریب x یا همان b را پیدا کنید و آنرا به هر دو طرف معادله اضافه کنید. به عبارت دیگر ضریب x را بر دو تقسیم و سپس آنرا به توان دو برسانید، و آنوقت عدد بدست آمده را به هر دو طرف معادله اضافه کنید.

د - از سه جمله ای بدست آمده فاکتور بگیرید. و آنرا به صورت مربع یک دو جمله ای بنویسید.

ه - با استفاده از خاصیت ریشه دوم، مجهول معادله را پیدا کنید.

مثال – معادله های زیر را از طریق کامل کردن مربع ، حل کنید.

$$۷) \quad p^2 + 2p = 4$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

$$p^2 + 2p + 1 = 4 + 1$$

$$(p + 1)^2 = 5$$

$$p + 1 = \pm\sqrt{5}$$

$$p = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$\left\{-1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}\right\}$$

$$۸) \quad m^2 - 7m - 1 = 0$$

$$m^2 - 7m = 1$$

$$\left(\frac{-7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$m^2 - 7m + \frac{49}{4} = 1 + \frac{49}{4}$$

$$\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} + \frac{49}{4}$$

$$\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}$$

$$m - \frac{7}{2} = \pm \sqrt{\frac{53}{4}}$$

$$m = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{53}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$$

$$\left\{ \frac{7 + \sqrt{53}}{2}, \frac{7 - \sqrt{53}}{2} \right\}$$

۹) $4x^2 - 24x + 41 = 0$

$$4x^2 - 24x = -41$$

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{24}{4}x = \frac{-41}{4}$$

$$x^2 - 6x = \frac{-41}{4}$$

$$\left(-\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = -\frac{41}{4} + 9$$

$$(x - 3)^2 = \frac{-41}{4} + \frac{36}{4}$$

$$(x - 3)^2 = \frac{-5}{4}$$

$$x - 3 = \pm \sqrt{\frac{-5}{4}}$$

$$x = 3 \pm \frac{i\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm i\sqrt{5}}{2}$$

$$\left\{ \frac{6 + i\sqrt{5}}{2}, \frac{6 - i\sqrt{5}}{2} \right\}$$

فرمول ربح ساده Simple Interest Formula

فرمول ربح ساده $I = Prt$ است که $I = Interest$ سود یا بهره است. $P = Principal$ سرمایه است. $r = rate$ نرخ بهره در سال است. و $t = time$ زمان بر حسب سال است. مثلاً اگر ۱۰۰ هزار تومان با ربح ساده و نرخ ۵٪ در سال در بانک پس انداز کنیم بعد از سه سال سودی که عاید میشود مطابق زیر بدست می آید.

$$I = Prt = 1\,000\,000 (0/0\,5) (3) = 15\,000 \text{ تومان}$$

در ربح ساده، آخر هر سال سود مبلغ اولیه حساب میشود و به حساب پس انداز اضافه میشود. در مثال بالا پس از سه سال

$$1\,000\,000 + 15\,000 = 1\,150\,000 \text{ تومان}$$

در حساب موجود است.

اما بیشتر اوقات سود به پولی که پس انداز شده و یا قرض گرفته شده به صورت مرکب حساب میشود و آنرا سود مرکب Compound Interest می گویند.

در ربح مرکب، بر خلاف ربح ساده، سود به مبلغ اولیه و سود ها ای که تا کنون بدست آمده تعلق می گیرد.

برای اینکه تفاوت بین ربح ساده و ربح مرکب را تشخیص دهید، فرض کنید که ۱ ۰۰۰۰۰۰ تومان با نرخ ۵٪ به صورت ربح مرکب سالانه در حساب پس انداز ذخیره کرده ایم. برای این که بدانیم پس از سه سال چه مبلغی در حساب است به صورت زیر حساب می کنیم.

$$\text{سال اول} \quad \text{سود} = 1\,000\,000 \times 0/0\,5 + 1 = 5\,000$$

$$\text{تومان} \quad \text{موجودی جدید} = 1\,000\,000 + 5\,000 = 1\,005\,000$$

$$\text{سال دوم} \quad \text{سود} = 1\,005\,000 \times 0/0\,5 \times 1 = 5\,025$$

$$\text{موجودی جدید} = 1\,005\,000 + 5\,025 = 1\,010\,025$$

$$\text{سال سوم} \quad \text{سود} = 1\,010\,025 \times 0/0\,5 \times 1 = 5\,050\,125$$

$$\text{موجودی جدید} = 1\,010\,025 + 5\,050\,125 = 1\,015\,075$$

اما محاسبه ربح مرکب از طریق بالا، وقت گیر و مشکل است و بنا بر این از فرمول ربح مرکب استفاده می کنیم. برای محاسبه مجموع پولی که در پس انداز موجود است، هنگامی که به صورت ربح مرکب ذخیره شده باشد، از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

در فرمول بالا P مبلغ اولیه پس انداز و یا سرمایه Principal

$r = \text{Rate}$ نرخ بهره در سال

$t = \text{Time}$ زمان بر حسب سال

$n = \text{Number}$ تعداد دوره ها در سال که سود حساب می شود

$A = \text{Amount}$ مبلغ موجود در حساب در پایان دوره

مثال بالا را با استفاده از فرمول ربح مرکب حل می کنیم

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} = 1\,000\,000 \left(1 + 0/0\,5 \right)^3 \approx 1\,015\,075$$

مثال (۱۰)

مطلوب است نرخ بهره اگر ۲۰۰۰ تومان پس از دو سال با ربح مرکب سالانه به مبلغ ۲۴۲۰ تومان برسد.

حل

$$A = 2420 \quad P = 2000 \quad t = 2 \quad n = 1$$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

$$2420 = 2000 \left(1 + \frac{r}{1} \right)^{1 \times 2}$$

$$\frac{2420}{2000} = (1 + r)^2$$

$$\frac{121}{100} = (1 + r)^2$$

$$\pm \sqrt{\frac{121}{100}} = 1 + r$$

$$-1 \pm \sqrt{\frac{121}{100}} = r$$

$$-1 \pm \frac{11}{10} = r$$

$$-\frac{10}{10} \pm \frac{11}{10} = r$$

$$\frac{1}{10} = r \quad \text{یا} \quad -\frac{21}{10} = r$$

نرخ بهره نمی تواند منفی باشد پس

$$r = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\% \text{ در سال}$$

نرخ بهره مرکب سالانه ۱۰٪ است.

مثال ۱۱ - اگر بهنام مبلغ ۴۱۰۰۰۰ تومان در یک حساب پس انداز با نرخ ۶.۶٪ در سال با ربح مرکب ماهانه در یک حساب پس انداز سرمایه گذاری کند. پس از ۵ سال چه مبلغ در حساب خواهد داشت؟

(ربح مرکب ماهانه یعنی هر ماه سودمبلغ اولیه و سودهای قبلی حساب می شود و به اصل سرمایه اضافه می گردد.)

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} = 410000 \left(1 + \frac{0.066}{12} \right)^{12 \times 5} = 569781 / 5$$

مثال ۱۲ - اگر مبلغ ۶۵۰۰۰۰ تومان با نرخ ۸٪ در سال با ربح مرکب شش ماهه در بانک ذخیره شود، بعد از سه سال چه مبلغ سود عاید می شود؟ (ربح مرکب شش ماهه یعنی هر شش ماه سودمبلغ اولیه و سودهای قبلی حساب می شود و به اصل سرمایه اضافه می گردد.)

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} = 650000 \left(1 + \frac{0.08}{2} \right)^{2 \times 3} = 822457 / 35$$

$$\text{تومان} \quad 822457 / 35 - 650000 = 172457 / 35 = \text{سود حاصله}$$

تمرینت ۶.۱

معادله های زیر را حل کنید.

۱) $x^2 = 16$

۲) $x^2 - 7 = 0$

۳) $x^2 = 18$

۴) $3z^2 - 3 = 0$

۵) $(x + 5)^2 = 9$

۶) $(z - 6)^2 = 18$

۷) $(2x - 3)^2 = 8$

$$۸) \quad x^2 + 9 = 0$$

$$۹) \quad x^2 - 6 = 0$$

$$۱۰) \quad 2x^2 + 16 = 0$$

$$۱۱) \quad (x - 1)^2 = -16$$

$$۱۲) \quad (x + 3)^2 = -8$$

معادله های زیر را از طریق کامل کردن مربع حل کنید.

$$۱۳) \quad x^2 + 8x = -15$$

$$۱۴) \quad x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$۱۵) \quad x^2 + x - ۱ = ۰$$

$$۱۶) \quad x^2 + ۲x - ۵ = ۰$$

$$۱۷) \quad ۳p^2 - ۱۲p + ۲ = ۰$$

$$۱۸) \quad ۲x^2 + ۷x = ۴$$

مسائل زیر را حل کنید.

۱۹ – مطلوب است نرخ بهره در سال اگر مبلغ ۳۰۰۰ تومان پس از دو سال با ربح مرکب سالانه به مبلغ ۴۳۲۰ تومان افزایش پیدا کند.

۲۰

اگر شما بخواهید پولی قرض بگیرید با نرخ ۱۰٪ در سال ، آیا ترجیح می‌دهید بهره ساده باشد یا مرکب؟

۲۱- اگر مبلغ ۲۴ ۰۰۰۰ تومان را در حساب ذخیره ای پس انداز کنید با نرخ $6\% / 5\%$ در سال و ربح مرکب ماهانه ، بعد از ده سال چه مبلغی در حساب شما خواهد بود؟

۲۲- اگر مبلغ ۵ ۰۰۰ تومان در حساب پس انداز با نرخ 6% در سال ذخیره کنید پس از ۵ سال چه مبلغی در حساب خواهید داشت در صورتی که سود با ربح مرکب سه ماهه حساب شود؟

۲۳- اگر ده سال دیگر مبلغ ۲۹ ۰۰۰۰ تومان لازم داشته باشید ، حالا باید چه مبلغی در حساب پس اندازی ذخیره کنید با نرخ $25\% / 8\%$ و ربح مرکب شش ماهه ؟

۲۴- فرهاد به مبلغ ۱۵ ۰۰ تومان احتیاج دارد. بانک محل این پول را با نرخ 10% در سال و ربح مرکب سه ماهه به مدت دو سال به او قرض میدهد. پدر بزرگش گفت که او می تواند این پول را با نرخ 7% در سال و با ربح ساده به او قرض بدهد. اگر فرهاد از پدر بزرگش پول قرض کند چه مبلغ به نفع او خواهد بود؟

پاسخ تمرینات ۶.۱

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \quad x^2 = ۱۶$$

$$x = \mp \sqrt{۱۶}$$

$$x = \pm ۴$$

$$\{-۴, ۴\}$$

$$۲) \quad x^2 - ۷ = ۰$$

$$x^2 = ۷$$

$$x = \pm \sqrt{۷}$$

$$\{-\sqrt{۷}, \sqrt{۷}\}$$

$$۳) \quad x^2 = ۱۸$$

$$x = \pm \sqrt{۱۸}$$

$$x = \pm \sqrt{۹ \times ۲}$$

$$x = \pm ۳ \sqrt{۲}$$

$$\{-۳\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}\}$$

$$۴) \quad ۳z^۲ - ۳۰ = ۰$$

$$۳z^۲ = ۳۰$$

$$\frac{۳z^۲}{۳} = \frac{۳۰}{۳}$$

$$z^۲ = ۱۰$$

$$z = \pm\sqrt{۱۰}$$

$$\{-\sqrt{۱۰}, \sqrt{۱۰}\}$$

$$۵) \quad (x + ۵)^۲ = ۹$$

$$x + ۵ = \pm\sqrt{۹}$$

$$x + ۵ = \pm ۳$$

$$x = -۵ \pm ۳$$

$$x = -۵ - ۳ \quad \text{یا} \quad x = -۵ + ۳$$

$$x = -۸ \quad \text{یا} \quad x = -۲$$

$$\{-۲, -۸\}$$

$$۶) \quad (z - ۶)^2 = ۱۸$$

$$z - ۶ = \pm \sqrt{۱۸}$$

$$z - ۶ = \pm \sqrt{۹ \times ۲}$$

$$z - ۶ = \pm ۳\sqrt{۲}$$

$$z = ۶ \pm ۳\sqrt{۲}$$

$$\left\{ ۶ - ۳\sqrt{۲}, ۶ + ۳\sqrt{۲} \right\}$$

$$۷) \quad (2x - 3)^2 = ۸$$

$$2x - 3 = \pm \sqrt{۸}$$

$$2x - 3 = \pm \sqrt{۴ \times ۲}$$

$$2x - 3 = \pm ۲\sqrt{۲}$$

$$2x = 3 \pm ۲\sqrt{۲}$$

$$x = \frac{3 \pm ۲\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\left\{ \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}, \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$۸) \quad x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm \sqrt{-9}$$

$$x = \pm i \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3i$$

$$\{-3i, 3i\}$$

$$۹) \quad x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm \sqrt{6}$$

$$\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$$

$$۱۰) \quad ۲x^۲ + ۱۶ = ۰$$

$$۲x^۲ = -۱۶$$

$$x^۲ = -۸$$

$$x = \pm \sqrt{-۸}$$

$$x = \pm i \sqrt{۸}$$

$$x = \pm i \sqrt{۴ \times ۲}$$

$$x = \pm ۲i \sqrt{۲}$$

$$\{-۲i\sqrt{۲}, ۲i\sqrt{۲}\}$$

$$۱۱) \quad (x - ۱)^۲ = -۱۶$$

$$x - ۱ = \pm \sqrt{-۱۶}$$

$$x - ۱ = \pm i \sqrt{۱۶}$$

$$x - ۱ = \pm ۴i$$

$$x = ۱ \pm ۴i$$

$$\{۱ + ۴i, ۱ - ۴i\}$$

$$۱۲) (x + ۳)^۲ = -۸$$

$$x + ۳ = \pm \sqrt{-۸}$$

$$x + ۳ = \pm i \sqrt{۸}$$

$$x + ۳ = \pm i \sqrt{۴ \times ۲}$$

$$x + ۳ = \pm ۲i \sqrt{۲}$$

$$x = -۳ \pm ۲i \sqrt{۲}$$

$$\{-۳ - ۲i \sqrt{۲}, -۳ + ۲i \sqrt{۲}\}$$

معادله های زیر را از طریق کامل کردن مربع حل کنید.

$$۱۳) x^۲ + ۸x = -۱۵$$

$$\left(\frac{۸}{۲}\right)^۲ = ۱۶$$

$$x^۲ + ۸x + ۱۶ = -۱۵ + ۱۶$$

$$(x + ۴)^۲ = ۱$$

$$x + ۴ = \pm \sqrt{۱}$$

$$x = -۴ \pm ۱$$

$$x = -۴ - ۱ = -۵$$

$$\text{یا } x = -۴ + ۱ = -۳$$

$$\{-۵, -۳\}$$

$$۱۴) \quad x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$x^2 + 6x = -2$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

$$x^2 + 6x + 9 = -2 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 7$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{7}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{7}$$

$$\{-3 - \sqrt{7}, -3 + \sqrt{7}\}$$

$$۱۵) \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2 + x = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$۱۶) \quad x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x^2 + 2x = 5$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 1 + 5$$

$$(x + 1)^2 = 6$$

$$x + 1 = \pm \sqrt{6}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$\left\{ -1 - \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6} \right\}$$

$$۱۷) \quad ۳p^۲ - ۱۲p + ۲ = ۰$$

$$\frac{۳p^۲}{۳} - \frac{۱۲p}{۳} + \frac{۲}{۳} = \frac{۰}{۳}$$

$$p^۲ - ۴p = -\frac{۲}{۳}$$

$$\left(-\frac{۴}{۲}\right)^۲ = (-۲)^۲ = ۴$$

$$p^۲ - ۴p + ۴ = -\frac{۲}{۳} + ۴$$

$$(p - ۲)^۲ = \frac{-۲ + ۱۲}{۳}$$

$$p - ۲ = \pm \sqrt{\frac{۱۰}{۳}}$$

$$p = ۲ \pm \frac{\sqrt{۳۰}}{۳}$$

$$p = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۰}}{۶}$$

$$\left\{ \frac{۶ + \sqrt{۳۰}}{۶}, \frac{۶ - \sqrt{۳۰}}{۶} \right\}$$

$$۱۸) \quad ۲x^۲ + ۷x = ۴$$

$$\frac{۲x^۲}{۲} + \frac{۷x}{۲} = \frac{۴}{۲}$$

$$x^۲ + \frac{۷}{۲}x = ۲$$

$$\left(x + \frac{۷}{۴}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۱۶}$$

$$x^۲ + \frac{۷}{۲}x + \frac{۴۹}{۱۶} = ۲ + \frac{۴۹}{۱۶}$$

$$\left(x + \frac{۷}{۴}\right)^۲ = \frac{۳۲ + ۴۹}{۱۶}$$

$$\left(x + \frac{۷}{۴}\right)^۲ = \frac{۸۱}{۱۶}$$

$$x + \frac{۷}{۴} = \pm \sqrt{\frac{۸۱}{۱۶}}$$

$$x + \frac{۷}{۴} = \pm \frac{۹}{۴}$$

$$x = -\frac{۷}{۴} \pm \frac{۹}{۴}$$

$$x = \frac{-۷ - ۹}{۴} = -\frac{۱۶}{۴} = -۴$$

یا

$$x = \frac{-۷ + ۹}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\left\{-۴, \frac{۱}{۲}\right\}$$

مسائل زیر را حل کنید.

۱۹ - مطلوب است نرخ بهره در سال اگر مبلغ ۳۰۰۰ تومان پس از دو سال با ربح مرکب سالانه به مبلغ ۴۳۲۰ تومان افزایش پیدا کند.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n \times t}$$

$$4320 = 3000 \left(1 + \frac{r}{1} \right)^{1 \times 2}$$

$$\frac{4320}{3000} = (1 + r)^2$$

$$1/44 = (1 + r)^2$$

$$1 + r = \pm \sqrt{1/44}$$

$$1 + r = \pm 1/2$$

$$r = -1 \pm 1/2$$

$$r = -1 - 1/2 \quad \text{یا} \quad r = -1 + 1/2$$

$$r = -2/2 \quad \text{یا} \quad r = -1 + 1/2$$

$$r = -2/2 \quad \text{یا} \quad r = 0/2$$

نرخ بهره نمی تواند منفی باشد ، پس نرخ بهره ۰/۲ و یا ۲۰٪ در سال است.

۲۰

اگر شما بخواهید پولی قرض بگیرید با نرخ ۱۰٪ در سال ، آیا ترجیح می دهید بهره ساده باشد یا مرکب؟

پاسخ - با ربح ساده اما اگر بخواهیم پول پس انداز کنیم با بهره مرکب ترجیح می دهیم.

۲۱- اگر مبلغ ۲۴۰۰۰۰ تومان را در حساب ذخیره ای پس انداز کنید با نرخ $6\% / ۵$ در سال و ربح مرکب ماهانه ، بعد از ده سال چه مبلغی در حساب شما خواهد بود؟

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n \times t} = 240000 \left(1 + \frac{0.06}{12} \right)^{12 \times 10} = 419614/45 \quad \text{تومان}$$

۲۲- اگر مبلغ ۵۰۰۰ تومان در حساب پس انداز با نرخ 6% در سال ذخیره کنید پس از ۵ سال چه مبلغی در حساب خواهید داشت در صورتی که سود با ربح مرکب سه ماهه حساب شود؟

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n \times t} = 5000 \left(1 + \frac{0.06}{4} \right)^{4 \times 5} = 6734/28 \quad \text{تومان}$$

۲۳- اگر ده سال دیگر مبلغ ۲۹۰۰۰۰ تومان لازم داشته باشید ، حالا باید چه مبلغی در حساب پس اندازی ذخیره کنید با نرخ $8\% / ۲۵$ و ربح مرکب شش ماهه ؟

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n \times t}$$

$$290000 = P \left(1 + \frac{0.0825}{2} \right)^{2 \times 10}$$

$$\frac{290000}{\left(1 + \frac{0.0825}{2} \right)^{2 \times 10}} = \frac{P \left(1 + \frac{0.0825}{2} \right)^{2 \times 10}}{\left(1 + \frac{0.0825}{2} \right)^{2 \times 10}}$$

$$P = \frac{290000}{\left(1 + \frac{0.0825}{2}\right)^{2 \times 10}} = 129210 / 47 \quad \text{تومان}$$

۲۴ – فرهاد به مبلغ ۱۵۰۰ تومان احتیاج دارد. بانک محل این پول را با نرخ ۱۰٪ در سال و ربح مرکب سه ماهه به مدت دو سال به او قرض میدهد. پدر بزرگش گفت که او می تواند این پول را با نرخ ۷٪ در سال و با ربح ساده به او قرض بدهد. اگر فرهاد از پدر بزرگش پول قرض کند چه مبلغ به نفع او خواهد بود؟ در صورتی که از بانک وام گرفته شود.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \times t} = 1500 \left(1 + \frac{0.07}{4}\right)^{4 \times 2} = 1827 / 61$$

بعد از دو سال فرهاد باید مبلغ ۱۸۲۷ / ۶۱ تومان به بانک بپردازد. یعنی

$$1827 / 61 - 1500 = 327 / 61 \quad \text{تومان}$$

سود به بانک می پردازد.

اما اگر از پدر بزرگ پول قرض کند

$$I = Prt = 1500 (0.07)(2) = 210 \quad \text{تومان}$$

باید سود بپردازد. لذا

$$327 / 61 - 210 = 117 / 61 \quad \text{تومان}$$

صرفه جویی می کند.

۶.۲ – حل معادله های درجه دوم بوسیله فرمول درجه دوم

Salving Quadratic Equations by the Quadratic Formula

همه معادله های درجه دوم را می توان از طریق کامل کردن مربع حل کرد. چون هر وقت می خواهیم مربع کامل بسازیم، همان مراحل را مکرر انجام می دهیم، پس باید برای پیدا کردن فرمول کلی معادله درجه دوم، مراحل کامل کردن مربع را انجام دهیم. با انجام این کار الگویی پیدا می کنیم برای حل کلیه معادله های درجه دوم. این الگو را فرمول درجه دوم می نامیم یعنی Quadratic Formula

بخاطر دارید که فرمول کلی معادله های درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$ است. حال همان مراحل را که در بخش قبل برای کامل کردن مربع بکار بردیم، انجام می دهیم.

اول هر دو طرف معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می کنیم.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

از هر دو طرف معادله $\frac{c}{a}$ را کم می کنیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

حالا $\frac{b}{a}$ را بر دو تقسیم کرده و سپس به توان دو می رسانیم.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{2a} \quad \text{و} \quad \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

اینک این عبارت بدست آمده را به هر دو طرف معادله اضافه می کنیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

مخرج مشترک سمت راست را پیدا می کنیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} \times \frac{4a}{4a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

از سه جمله ای مربع کامل سمت چپ فاکتور می گیریم.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

از خاصیت ریشه دوم استفاده می کنیم. یعنی از هر دو طرف معادله جذر می گیریم.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فرمول بدست آمده بالا ، فرمول درجه دوم نامیده می شود و برای حل معادله های درجه دوم که به صورت استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ نوشته شده باشند، بکار می رود.

مثال - معادله های زیر را با استفاده از فرمول درجه دوم حل کنید.

$$۱) \quad 3x^2 + 16x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 60}}{6}$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{196}}{6}$$

$$x = \frac{-16 \pm 14}{6}$$

$$x = \frac{-16 + 14}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-16 - 14}{6} = -\frac{30}{6} = -5$$

پس مجموعه جواب ها $\left\{-\frac{1}{3}, -5\right\}$ است

$$۲) \quad 2x^2 - 4x = 3$$

از هر دو طرف ۳ را کم می کنیم.

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\left\{ \frac{2 + \sqrt{10}}{2}, \frac{2 - \sqrt{10}}{2} \right\}$$

$$۳) \quad \frac{1}{4}m^2 - m + \frac{1}{4} = 0$$

هر دو طرف را در ۴ ضرب می کنیم.

$$m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$$

$$4) \quad p = -3p^2 - 3$$

این معادله به شکل استاندارد به صورت زیر است.

$$3p^2 + p + 3 = 0$$

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(3)}}{2(3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 36}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{-35}}{6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{35}}{6}$$

$$\left\{ \frac{-1 + i\sqrt{35}}{6}, \frac{-1 - i\sqrt{35}}{6} \right\}$$

در فرمول درجه دوم $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ عبارت زیر رادیکال یعنی $b^2 - 4ac$ را مشخص کننده

Discriminant می نامند. زیرا وقتی که مقدار آنرا پیدا کردیم، می توانیم نوع پاسخ معادله درجه دوم را مشخص Discriminate کنیم.

مشخص کننده Discriminant

اگر حاصل $b^2 - 4ac$ مثبت باشد، معادله درجه دوم، دو جواب حقیقی دارد.

اگر حاصل $b^2 - 4ac$ صفر باشد، معادله درجه دوم یک جواب حقیقی دارد.

اگر حاصل $b^2 - 4ac$ منفی باشد، معادله درجه دوم دو جواب مرکب دارد و هیچ جواب حقیقی ندارد.

تمرینات ۶.۲

با استفاده از فرمول درجه دو، معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \quad m^2 + 5m - 6 = 0$$

$$۲) \quad 2y = 5y^2 - 3$$

$$۳) \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$۴) \quad x^2 + 7x + 4 = 0$$

$$۵) \quad 8m^2 - 2m = 7$$

$$۶) \quad (m + 2)(2m - 6) = 5(m - 1) - 12$$

$$۷) \quad x(6x + 2) - 3 = 0$$

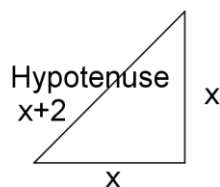
$$۸) \quad ۶ = -۴x^۲ + ۳x$$

$$۹) \quad x^۲ + ۶x + ۱۳ = ۰$$

$$۱۰) \quad (n - ۲)^۲ = ۲n$$

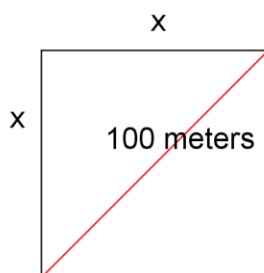
مسائل زیر را حل کنید.

۱۱ - وتر یک مثلث قائم الزویه متساوی الساقین ۲ سانتی متر بیشتر از طول هر یک از ساق های مثلث است. مطلوب است طول هر یک از ساق های مثلث.



۱۲ - قطعه زمینی است به شکل مربع مستطیل با مساحت ۴۰۰ متر مربع. اگر طول این زمین ۱۰ متر بیشتر از عرض آن باشد، مطلوب است طول اضلاع این زمین.

۱۳ - زمینی است به شکل مربع که طول قطر آن ۱۰۰ متر است.



الف - مطلوب است طول اضلاع آن.

ب - مساحت این زمین چند متر مربع است؟

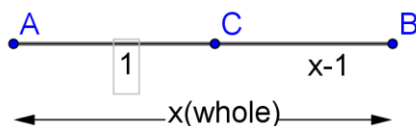
۱۴ - اگر نقطه B پاره خط AC را طوری قطع کند که نسبت قسمت کوچک تر به قسمت بزرگ تر مانند نسبت قسمت بزرگ تر به تمام پاره خط باشد، طول این پاره خط را نسبت طلایی می نامند. این عدد را پیدا کنید.

Line Segment

Portion

Whole

Golden Ratio



پاسخ تمرینات ۶.۲

با استفاده از فرمول درجه دو ، معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \quad m^2 + 5m - 6 = 0$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$m = \frac{-5-7}{2} = -6 \quad \text{یا} \quad m = \frac{-5+7}{2} = 1$$

$$\{-6, 1\}$$

$$۲) \quad ۵y^2 - ۲y - ۳ = 0$$

$$۵y^2 - ۲y - ۳ = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(5)(-3)}}{2(5)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{2 \pm 8}{10}$$

$$y = \frac{2+8}{10} = 1 \quad \text{یا} \quad y = \frac{2-8}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\left\{-\frac{3}{5}, 1\right\}$$

$$۳) \quad x^2 - ۶x + ۹ = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\{3\}$$

$$۴) \quad x^2 + 7x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\left\{ \frac{-7 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \right\}$$

$$۵) \quad 8m^2 - 2m = 7$$

$$8m^2 - 2m - 7 = 0$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(8)(-7)}}{2(8)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 224}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{228}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \times 57}}{16}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{57}}{16} = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{8}$$

$$\left\{ \frac{1 - \sqrt{57}}{8}, \frac{1 + \sqrt{57}}{8} \right\}$$

$$۶) (m + ۲)(۲m - ۶) = ۵(m - ۱ -) - ۱۲$$

$$۲m^۲ - ۶m + ۴m - ۱۲ = ۵m - ۵ - ۱۲$$

$$۲m^۲ - ۲m - ۱۲ = ۵m - ۵ - ۱۲$$

از دو طرف معادله ۱۲- را حذف می کنیم.

$$۲m^۲ - ۲m = ۵m - ۵$$

جملات سمت راست را به سمت چپ می منتقل می کنیم البته با تغییر علامت آنها.

$$۲m^۲ - ۲m - ۵m + ۵ = ۰$$

$$۲m^۲ - ۷m + ۵ = ۰$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$m = \frac{-(-۷) \pm \sqrt{(-۷)^۲ - ۴(۲)(۵)}}{۲(۲)} = \frac{۷ \pm \sqrt{۴۹ - ۴۰}}{۴} = \frac{۷ \pm \sqrt{۹}}{۴} = \frac{۷ \pm ۳}{۴}$$

$$m = \frac{۷ - ۳}{۴} = \frac{۴}{۴} = ۱ \quad \text{یا} \quad m = \frac{۷ + ۳}{۴} = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲}$$

$$\left\{ ۱, \frac{۵}{۲} \right\}$$

$$۷) x(۶x + ۲) - ۳ = ۰$$

$$۶x^۲ + ۲x - ۳ = ۰$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(6)(-3)}}{2(6)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 19}}{12} \\
 &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{6} \\
 &\left\{ \frac{-1 - \sqrt{19}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{19}}{6} \right\}
 \end{aligned}$$

۸) $x^2 = -4x^2 + 3x$

$$4x^2 - 3x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(4)(6)}}{2(4)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 96}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{-87}}{8} = \frac{3 \pm i\sqrt{87}}{8}$$

$$\left\{ \frac{3 - i\sqrt{87}}{8}, \frac{3 + i\sqrt{87}}{8} \right\}$$

۹) $x^2 + 6x + 13 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2}$$

$$= -3 \pm 2i$$

$$\{-3 - 2i, -3 + 2i\}$$

$$۱ \circ) (n - 2)^2 = 2n$$

$$n^2 - 4n + 4 = 2n$$

$$n^2 - 4n - 2n + 4 = 0$$

$$n^2 - 6n + 4 = 0$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

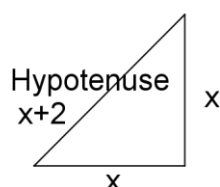
$$n = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \times 5}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$$

مسائل زیر را حل کنید.

۱۱ - وتر یک مثلث قائم الزویه متساوی الساقین ۲ سانتی متر بیشتر از طول هر یک از ساق های مثلث است. مطلوب است طول هر یک از ساق های مثلث.



حل

$$(x + 2)^2 = x^2 + x^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2x^2$$

$$-x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 \times 2}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$x = 2 - 2\sqrt{2}$$

اما $2 - 2\sqrt{2}$ یک عدد منفی است. پس طول هر کدام از ساق ها $2 + 2\sqrt{2}$ سانتی متر است و طول وتر $(2 + 2\sqrt{2}) + 2 = 4 + 2\sqrt{2}$ سانتی متر است.

۱۲ - قطعه زمینی است به شکل مربع مستطیل با مساحت ۴۰۰ متر مربع. اگر طول این زمین ۱۰ متر بیشتر از عرض آن باشد، مطلوب است طول اضلاع این زمین.

حل

عرض $x =$

طول $x + 10$

$$x(x + 10) = 400$$

$$x^2 + 10x = 400$$

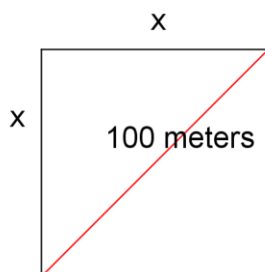
$$x^2 + 10x - 400 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(10) \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(-400)}}{2(1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 1600}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{1700}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 \times 17}}{2} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{17}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{17} \end{aligned}$$

اما $-5 - 5\sqrt{17}$ یک عدد منفی است. پس عرض این زمین $Width = -5 + 5 + \sqrt{17}$ متر است. و طول آن $Length = -5 + 5 + \sqrt{17} + 10 = 5 + 5\sqrt{17}$ متر است.

۱۳ - زمینی است به شکل مربع که طول قطر آن ۱۰۰ متر است.



الف - مطلوب است طول اضلاع آن.

حل

$$100^2 = x^2 + x^2$$

$$10000 = 2x^2$$

$$x^2 = 5000$$

$$x = \pm \sqrt{5000} = \pm \sqrt{2500 \times 2} = \pm 50 \sqrt{2}$$

عدد منفی را قبول نمی کنیم. پس هر کدام از اضلاع مربع $50 \sqrt{2}$ متر است.

ب - مساحت این زمین چند متر مربع است؟

حل

$$\text{متر مربع } 5000 = \left(50 \sqrt{2}\right)^2 = \text{مربع یک ضلع} = \text{مساحت مربع}$$

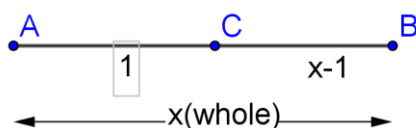
۱۴ - اگر نقطه B پاره خط AC را طوری قطع کند که نسبت قسمت کوچک تر به قسمت بزرگ تر مانند نسبت قسمت بزرگ تر به تمام پاره خط باشد، طول این پاره خط را نسبت طلایی می نامند. این عدد را پیدا کنید.

Line Segment

Portion

Whole

Golden Ratio



$$\frac{\text{قسمت بزرگتر } 1}{\text{قسمت کوچکتر } x-1} = \frac{\text{قسمت تمام } x}{1}$$

$$x(x-1) = 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

اما عدد منفی را قبول نمی کنیم. پس

$$\text{عدد طلایی} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989 \dots$$

عدد طلایی را نسبت طلایی هم می گویند.

نسبت الهی Devine Ratio

نسبت طلایی Golden Ratio

نسبت الهی که با حرف یونانی Φ Phi نشان داده می شود در جهان طبیعت مانند رگه های درخشانی از یک امضای نا مرئی از طرف خدا می درخشد.

در هر کندویی در هر گوشه از دنیا وقتی تعداد زنبور های ماده را به تعداد زنبور های نر تقسیم کنیم، به یک عدد ثابت میرسیم: $1/618 \dots$

شاخ و برگ درخت ها در هر گوشه از دنیا به صورت تصادفی رشد نمی کنند. اندازه گیری زاویه شاخه ها نشان می دهد که در الگوی رشد آنها نظمیه شبیه نسبت طلایی وجود دارد. درختان با پیروی از این نوع الگوی رشد، قادرند در صد بیشتری از نور خورشید را جذب کنند.

دانه های آفتاب گردان به شکل مار پیچ هایی روبروی هم رشد می کنند. نسبت قطر هر مار پیچ به مار پیچ بعدی $1/618 \dots$ است.



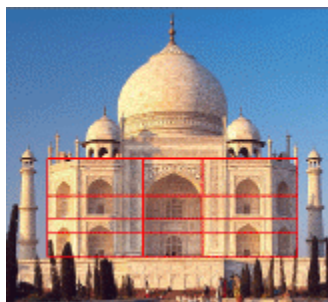
این نسبت در بدن انسان هم هست. اگر فاصله سر تا زمین را تقسیم بر فاصله ناف تا زمین کنیم، به عدد $1/618 \dots$ می رسیم. البته این نسبت در همه انسانها عدد $1/618 \dots$ نیست. به عبارت دیگر هر چه این نسبت در یک انسان به نسبت طلایی نزدیک تر باشد، آن شخص خوش اندام تر است.

نسبت طول بزرگ ترین استخوان انگشت دست به طول استخوان انگشت متوسط برابر یا نزدیک به نسبت طلایی است. نسبت طول استخوان متوسط به استخوان کوچک هم همینطور. نسبت طول رشته DNA به عرض آن هم چیزی نزدیک به همان عدد فی Phi است.

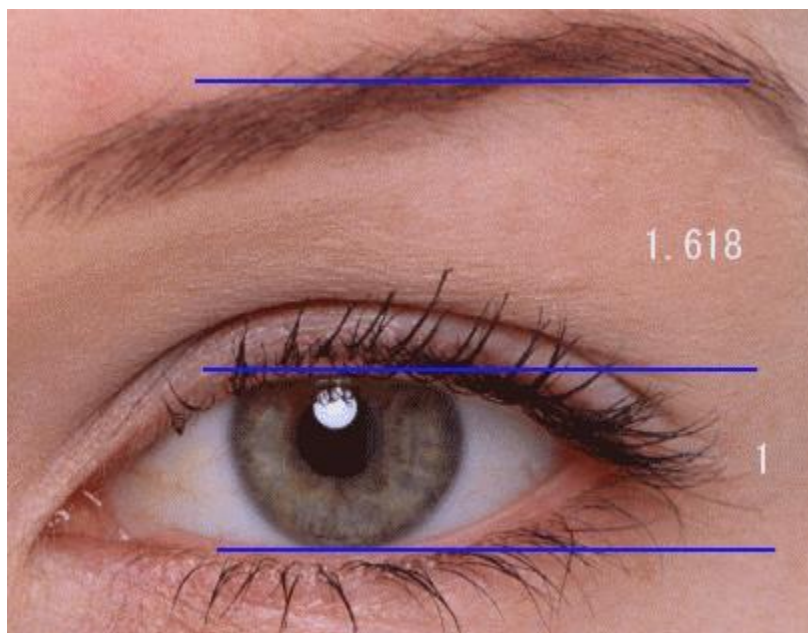
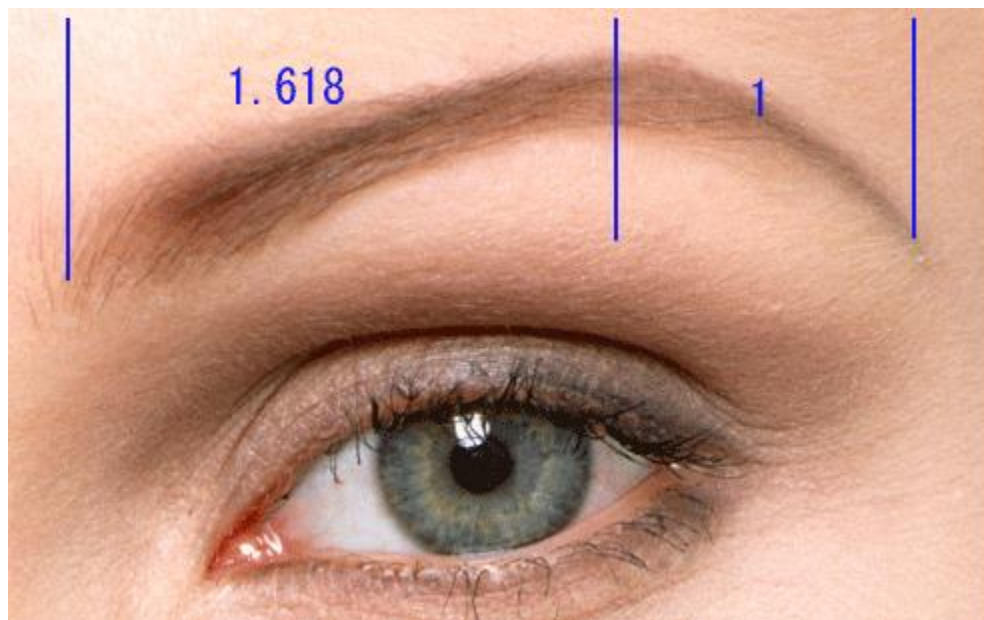
نسبت مارپیچ بزرگتر به مارپیچ کوچکتر در یک گردباد برابر است با ... $1/618$ در کهکشان ها هم نسبت قطر مارپیچ بزرگتر به مارپیچ کوچکتر همان عدد شگفت انگیز فی است.

این رشته سر دراز دارد. شما می توانید برای آشنایی و درک راز خلقت به اینترنت مراجعه کنید.

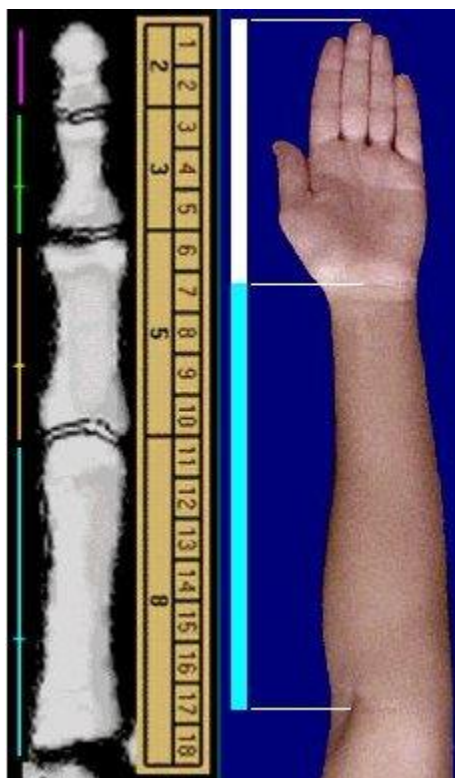
گل برگ های گل ها

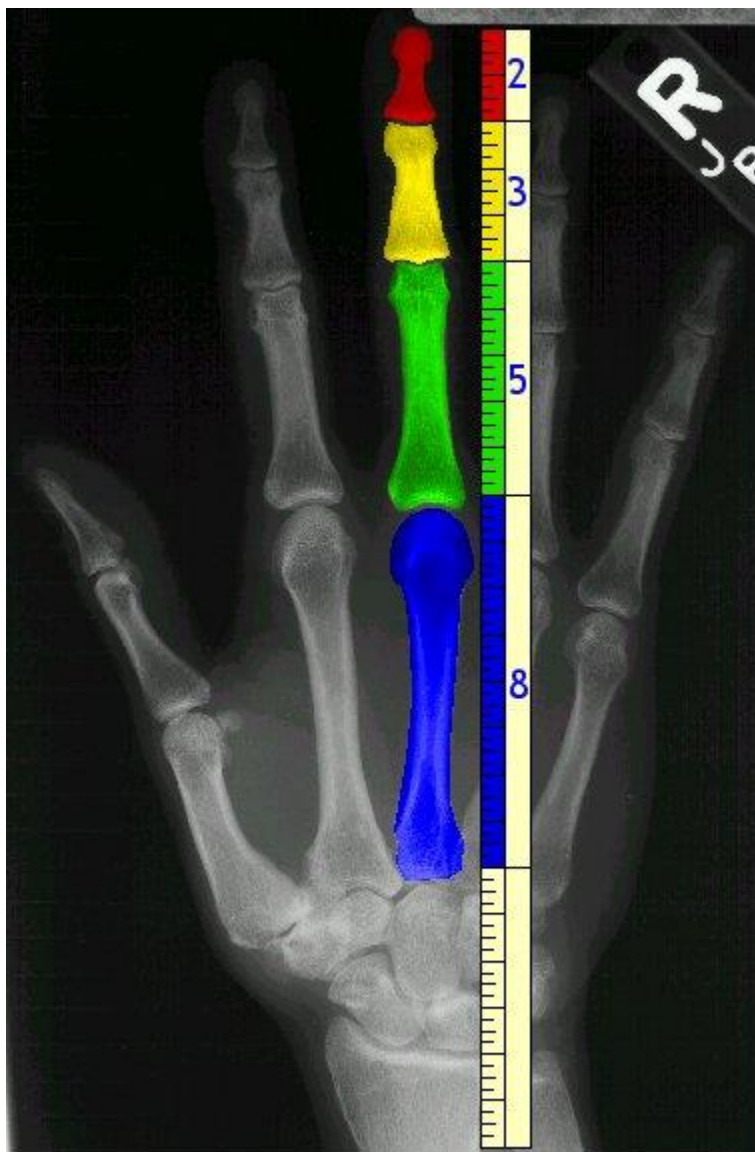


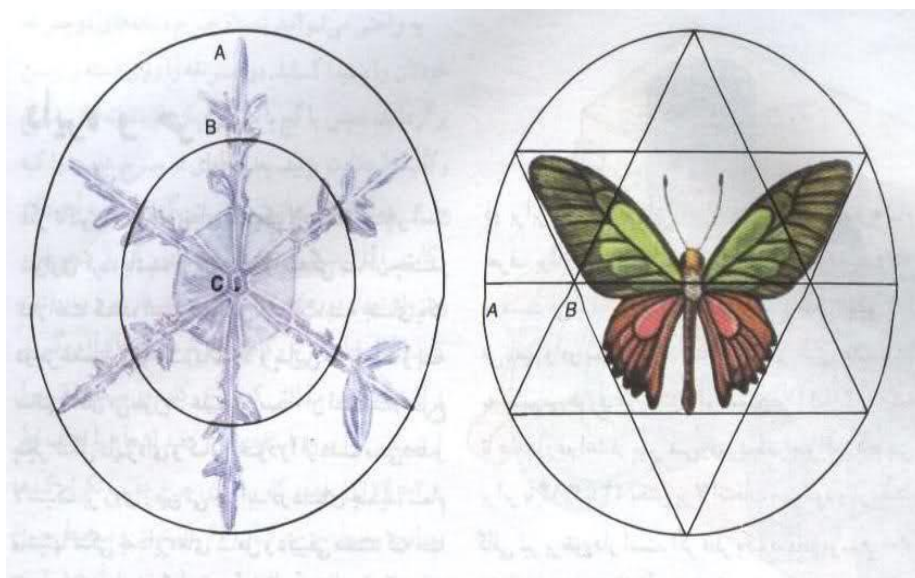
عکس های دیگری درباره ی رابطه نسبت طلایی و طبیعت



مارپیچ گوش انسان







۶.۳ – حل معادلات با استفاده از روش های درجه دوم

Salving Equations by Using Quadratic Methods

حل معادلاتی که شکل درجه دوم دارند : Solving Equations That Are quadratic in Form

حل معادلات درجه دوم

الف – اگر معادله به شکل $(ax + b)^2 = c$ باشد، از خاصیت ریشه دوم استفاده کنید. در غیر این صورت به مرحله “ب” بروید.

ب – معادله را به شکل استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ بنویسید.

ج - سعی کنید معادله را از طریق فاکتور گرفتن حل کنید. اگر ممکن نشود، به مرحله “د” بروید.

د – معادله را با استفاده از فرمول درجه دوم حل کنید.

مثال – معادله های زیر را حل کنید.

$$1) \quad x - \sqrt{x} - 6 = 0$$

یاد آوری

اگر معادله شامل رادیکال باشد، اول رادیکال را در یک طرف معادله به تنهایی قرار می دهیم و سپس هر دو طرف معادله را به توان دو میرسانیم.

$$x - 6 = \sqrt{x}$$

$$x^2 - 12x + 36 = x$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$(x - 4)(x - 9) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 9 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{یا} \quad x = 9$$

باید جواب های بدست آمده را امتحان کنیم. چون دو طرف معادله را به توان دو رسانده ایم و ممکن است یک یا هر دو جواب بدست آمده ، جواب معادله اصلی نباشد.

برای $x = 9$ خواهیم داشت.

$$x - \sqrt{x} - 6 = 0$$

$$9 - \sqrt{9} - 6 = 0$$

$$9 - 3 - 6 = 0$$

صحیح است $0=0$ پس مجموعه جواب های این معادله $\{9\}$ است.برای $x = 4$ خواهیم داشت.

$$x - \sqrt{x} - 6 = 0$$

$$4 - \sqrt{4} - 6 = 0$$

$$4 - 2 - 6 = 0$$

غلط است $-2=0$

$$2) \quad \frac{3x}{x-2} - \frac{x+1}{x} = \frac{6}{x(x-2)}$$

قبل از حل این معادله متوجه می شوید که جواب های این معادله نمی توانند صفر و یا ۲ باشند. زیرا این دو مقادیر سبب می شوند که کسر ها مساوی با صفر شوند. و می دانیم تقسیم بر صفر مفهومی ندارد.

برای حل این معادله هر دو طرف را در مخرج مشترک کسر ها یعنی $x(x-2)$ ضرب می کنیم تا کسر ها حذف شوند.

$$x(x-2) \left(\frac{3x}{x-2} \right) - x(x-2) \left(\frac{x+1}{x} \right) = x(x-2) \left(\frac{6}{x(x-2)} \right)$$

$$x(3x) - (x-2)(x+1) = 6$$

$$3x^2 - x^2 - x + 2x + 2 = 6$$

$$2x^2 + x - 4 = 0$$

از این معادله نمی توان فاکتور گرفت. پس از فرمول درجه دو استفاده می کنیم.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 32}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

ملاحظه می کنید که هیچ یک از جواب ها مخرج ها را صفر نمی کنند. پس مجموعه جواب ها

$$\text{است.} \left\{ \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \right\}$$

$$۳) \quad p^2 - 3p^2 - 4 = 0$$

اول از سه جمله ای فاکتور می گیریم.

$$(p^2 - 4)(p^2 + 1) = 0$$

$$(p - 2)(p + 2)(p^2 + 1) = 0$$

هر یک از فاکتور ها را مساوی صفر قرار می دهیم و معادله بدست آمده را حل می کنیم.

$$p - 2 = 0 \quad \text{یا} \quad p + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad p^2 + 1 = 0$$

$$p = 2 \quad \text{یا} \quad p = -2 \quad \text{یا} \quad p^2 = -1$$

$$p = 2 \quad \text{یا} \quad p = -2 \quad \text{یا} \quad p = \pm\sqrt{-1}$$

$$p = 2 \quad \text{یا} \quad p = -2 \quad \text{یا} \quad p = \pm i\sqrt{1} = \pm i$$

$$\{-2, 2, i, -i\}$$

$$۴) \quad (x - 3)^2 - 3(x - 3) - 4 = 0$$

این معادله را از طریق جانشینی Substitution حل می کنیم. یعنی بجای عبارت داخل پرانتز $x - 3$ یک متغیر دیگری مثلا y می گذاریم و معادله بدست آمده را حل می کنیم. و در نهایت برای بدست آوردن مقدار x عکس جانشینی عمل می کنیم. به عبارت دیگر $x - 3$ را مساوی مقداری که برای y بدست آورده ایم قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم.

$$x - 3 = y$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$(y - 4)(y + 1) = 0$$

$$y - 4 = 0 \quad \text{یا} \quad y + 1 = 0$$

$$y = 4 \quad \text{یا} \quad y = -1$$

$$x - 3 = 4 \quad \text{یا} \quad x - 3 = -1$$

$$x = 7 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

$$\{7, 2\}$$

$$5) \quad x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0$$

ملاحظه می کنید که $x^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2$ است. پس خواهیم داشت.

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0$$

جانشین می کنیم.

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

پس معادله را به صورت زیر حل می کنیم.

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$(y - 2)(y - 3) = 0$$

$$y - 2 = 0 \quad \text{یا} \quad y - 3 = 0$$

$$y = 2 \quad \text{یا} \quad y = 3$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \text{یا} \quad x^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$x = 2^3 = 8 \quad x = 3^3 = 27 \quad \{8, 27\}$$

حل مسائلی که به معادله درجه دو منتهی می شوند.

۶ - اگر یک ماشین نویس ماهر و یک ماشین نویس مبتدی با هم کار کنند، یک سند را در مدت ۶ ساعت ماشین می کنند. ماشین نویس ماهر به تنهایی ۲ ساعت تند تر از ماشین نویس مبتدی می تواند سند مربوطه را ماشین کند. معین کنید هر کدام از این دو ماشین نویس به تنهایی در چند ساعت سند را می توانند ماشین کنند.

حل

مدت زمانی که ماشین نویس مبتدی سند را به تنهایی تمام می کند $x =$

مدت زمانی که ماشین نویس ماهر سند را به تنهایی تمام می کند $x - 2 =$

مدت زمان لازم برای تمام کردن کار	قسمتی از کار که در مدت یک ساعت انجام میشود	
x	$\frac{1}{x}$	ماشین نویس مبتدی
$x - 2$	$\frac{1}{x - 2}$	ماشین نویس ماهر
۶	$\frac{1}{6}$	هر دو با هم

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{6}$$

$$LCD = 6x(x - 2)$$

$$6x(x - 2)\left(\frac{1}{x}\right) + 6x(x - 2)\left(\frac{1}{x - 2}\right) = 6x(x - 2)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$6(x - 2) + 6x = x(x - 2)$$

$$6x - 12 + 6x = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 14x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 48}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{148}}{2}$$

$$\sqrt{148} \approx 12/2$$

$$x \approx \frac{14 \pm 12/2}{2}$$

$$x \approx \frac{14 + 12/2}{2} = 13/1$$

$$x \approx \frac{14 - 12/2}{2} = 0/9$$

اگر ماشین نویس مبتدی سند را در مدت ۰/۹ ساعت تمام کند، ماشین نویس ماهر همان کار را در مدت

$$x - 2 = 0/9 - 2 = -1/1 \text{ ساعت}$$

انجام می دهد.

این پاسخ را رد می کنیم زیرا مدت زمان انجام کار نمی تواند منفی باشد.

اگر ماشین نویس مبتدی سند را در مدت ۱۳/۱ ساعت تمام کند، ماشین نویس ماهر همان کار را در مدت

$$x - 2 = 13/1 - 2 = 11/1 \text{ ساعت}$$

انجام می دهد. این پاسخ را قبول می کنیم.

۷ - دو شهر به شهر و ماشین ۴۰۰ کیلو متر از هم فاصله دارند. روزی مهران از ماشین به شهر با سرعت معینی رانندگی می کند. روز بعد او از شهر به ماشین مراجعت می کند اما این مرتبه با سرعت ۱۰ کیلو متر تندتر رانندگی می کند. مدت رانندگی هر دو روز جمعا $14\frac{2}{3}$ ساعت بود. سرعت ماشین به شهر و بلعکس را پیدا کنید

حل

$$x = \text{سرعت از ماشین به شهر}$$

$$x + 10 = \text{سرعت مراجعت از شهر به ماشین}$$

$$\text{زمان} \times \text{سرعت} = \text{مسافت}$$

$$۴۰۰ = x \times \frac{۴۰۰}{x}$$

$$۴۰۰ = (x + ۱۰) \times \frac{۴۰۰}{x + ۱۰}$$

زمان رانندگی هر دو روز جمعا $۱۴\frac{۲}{۳}$ ساعت است. پس

$$\frac{۴۰۰}{x} + \frac{۴۰۰}{x + ۱۰} = ۱۴\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۴۰۰}{x} + \frac{۴۰۰}{x + ۱۰} = \frac{۴۴}{۳}$$

$$\frac{۱۰۰}{x} + \frac{۱۰۰}{x + ۱۰} = \frac{۱۱}{۳}$$

$$LCD = ۳x(x + ۱۰)$$

$$۳x(x + ۱۰) \left(\frac{۱۰۰}{x} \right) + ۳x(x + ۱۰) \left(\frac{۱۰۰}{x + ۱۰} \right) = ۳x(x + ۱۰) \left(\frac{۱۱}{۳} \right)$$

$$۱۰۰(۳)(x + ۱۰) + ۱۰۰(۳)(x) = ۱۱x(x + ۱۰)$$

$$۳۰۰x + ۳۰۰۰ + ۳۰۰x = ۱۱x^2 + ۱۱۰x$$

$$۱۱x^2 - ۴۹۰x - ۳۰۰۰ = ۰$$

$$(۱۱x + ۶۰)(x - ۵۰) = ۰$$

$$۱۱x + ۶۰ = ۰ \quad \text{یا} \quad x - ۵۰ = ۰$$

$$۱۱x = -۶۰ \quad \text{یا} \quad x = ۵۰$$

$$x = -\frac{۶۰}{۱۱} = -۵\frac{۵}{۱۱} \quad \text{یا} \quad x = ۵۰$$

پاسخ منفی را قبول نمی کنیم. زیرا سرعت نمی تواند منفی باشد. پس سرعت رفتن به بهشهر ۵۰ کیلومتر در ساعت بود و سرعت مراجعت به ماشهر ۶۰ کیلومتر در ساعت بود.

تمرینات ۶.۳

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \quad ۲x = \sqrt{۱۰ + ۳x}$$

$$۲) \quad x - ۲\sqrt{x} = ۸$$

$$۳) \quad \sqrt{۹x} = x + ۲$$

$$۴) \quad \frac{۲}{x} + \frac{۳}{x-۱} = ۱$$

$$۵) \quad \frac{۳}{x} + \frac{۴}{x+۲} = ۲$$

$$۶) \quad \frac{۷}{x^۲ - ۵x + ۶} = \frac{۲x}{x-۳} - \frac{x}{x-۲}$$

$$۷) \quad p^۴ - ۱۶ = ۰$$

$$۸) \quad ۴x^۴ + ۱۱x^۲ = ۳$$

$$۹) \quad z^۴ - ۱۳z^۲ + ۳۶ = ۰$$

$$۱۰) \quad x^{\frac{۲}{۳}} - ۳x^{\frac{۱}{۳}} - ۱ = ۰$$

$$۱۱) \quad (۵x + ۱)^۲ + ۲(۵x + ۱) - ۳ = ۰$$

$$۱۲) \quad ۲x^{\frac{۲}{۳}} - ۵x^{\frac{۱}{۳}} = ۳$$

$$۱۳) \quad ۱ + \frac{۲}{۳x - ۲} = \frac{۸}{(۳x - ۲)^۲}$$

$$۱۴) \quad (p + ۲)^۲ = ۹(p + ۲) - ۲ = ۰$$

$$۱۵) \quad ۲x = \sqrt{۱۱x + ۳}$$

$$۱۶) \quad x^{\frac{۲}{۳}} - ۸x^{\frac{۱}{۳}} + ۱۵ = ۰$$

$$۱۷) \quad y^3 + 9y - y^2 - 9 = 0$$

$$۱۸) \quad x^{-2} - x^{-1} - 6 = 0$$

$$۱۹) \quad p^4 - p^2 - 2 = 0$$

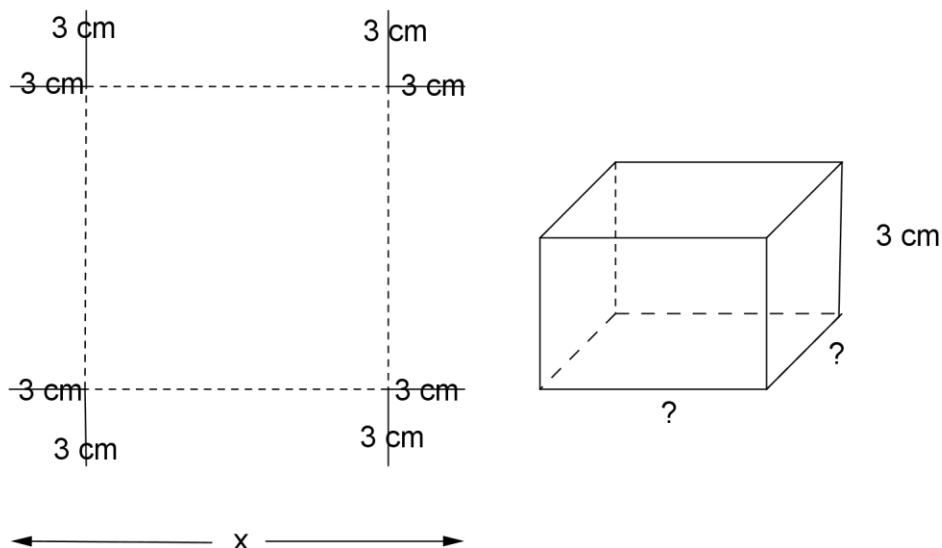
$$۲۰) \quad 2x^2 = -54$$

مسائل زیر را حل کنید.

۲۱ - یک دونده مسافت سه کیلومتر می دود. و بعد سرعت خود را یک کیلومتر در ساعت کم می کند و ۴ کیلومتر دیگر می دود. اگر مجموع هر دو قسمت دویدن $1\frac{3}{5}$ ساعت باشد، سرعت این دونده در هر دو قسمت را پیدا کنید.

۲۲ - بهمن مسافت ۳۳۰ کیلومتر از شهر محل اقامتش تا شهر سیرجان با اتومبیل خود رانندگی کرد. هنگام مراجعت او توانست سرعتش را ۱۱ کیلومتر در ساعت افزایش دهد. اگر مدت مراجعت به شهر محل اقامتش ۱ ساعت کمتر از مدت رفتن به شهر سیرجان باشد، سرعت رفت و برگشت او را حساب کنید.

۲۳ - می خواهیم از یک صفحه مقوایی مربع شکل یک جعبه بدون درب بسازیم. برای این کار از هر چهار گوشه این صفحه مقوایی ۳ سانتی متر جدا می کنیم و مقوا را روی خطوط نقطه چین مطابق شکل زیر تا می کنیم. اگر حجم جعبه باید ۳۰۰ سانتی متر مکعب باشد، ابعاد صفحه مقوی اولیه را پیدا کنید.



پاسخ تمرینات ۶.۳

معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \quad ۲x = \sqrt{۱۰ + ۳x}$$

$$(۲x)^۲ = \left(\sqrt{۱۰ + ۳x}\right)^۲$$

$$۴x^۲ = ۱۰ + ۳x$$

$$۴x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰$$

$$(x - ۲)(۴x + ۵) = ۰$$

$$x - ۲ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۴x + ۵ = ۰$$

$$x = ۲ \quad \text{یا} \quad ۴x = -۵$$

$$x = ۲ \quad \text{یا} \quad x = -\frac{۵}{۴}$$

چون دو طرف معادله را به توان یک عدد زوج رسانده ایم باید جواب های بدست آمده را حتما در معادله اصلی امتحان کنیم چون ممکن است یکی و یا تمام جواب های بدست آمده ، جواب های معادله اصلی نباشند.

$$x = ۲$$

$$x = -\frac{۵}{۴}$$

$$۲(۲) = \sqrt{۱۰ + ۳(۲)}$$

$$۲\left(-\frac{۵}{۴}\right) = \sqrt{۱۰ + ۳\left(-\frac{۵}{۴}\right)}$$

$$۴ = \sqrt{۱۰ + ۶}$$

$$-\frac{۵}{۲} = \sqrt{۱۰ - \frac{۱۵}{۴}}$$

$$۴ = \sqrt{۱۶}$$

$$-\frac{۵}{۲} = \sqrt{\frac{۴۰ - ۱۵}{۴}}$$

غلط است

$$-\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

صحیح است

$$4 = 4$$

پس مجموعه جواب ها $\{2\}$ است.

$$2) \quad x - 2\sqrt{x} = 8$$

$$x - 8 = 2\sqrt{x}$$

$$(x - 8)^2 = (2\sqrt{x})^2$$

$$x^2 - 16x + 64 = 4x$$

$$x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$(x - 16)(x - 4) = 0$$

$$x - 16 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 16 \quad \text{یا} \quad x = 4$$

اگر اعداد بدست آمده را در معادله اصلی امتحان کنیم نتیجه می گیریم که مجموعه جواب ها $\{16\}$ است.

$$3) \quad \sqrt[9]{x} = x + 2$$

$$\left(\sqrt[9]{x}\right)^2 = (x + 2)^2$$

$$^9x = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 1 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

اگر اعداد ۴ و ۱ را در معادله اصلی امتحان کنیم، ملاحظه می‌کنیم که هر دو جواب بدست آمده جواب معادله اصلی هم هست. پس مجموعه جواب های این معادله $\{۴, ۱\}$ است.

$$۴) \quad \frac{۲}{x} + \frac{۳}{x-۱} = ۱$$

$$LCD = x(x-۱)$$

$$x(x-۱)\left(\frac{۲}{x}\right) + x(x-۱)\left(\frac{۳}{x-۱}\right) = x(x-۱)(۱)$$

$$۲(x-۱) + ۳x = x^2 - x$$

$$۲x - ۲ + ۳x = x^2 - x$$

$$x^2 - ۶x + ۲ = ۰$$

$$x = \frac{-(-۶) \pm \sqrt{(-۶)^2 - ۴(۱)(۲)}}{۲(۱)} = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۶ - ۸}}{۲} = \frac{۶ \pm \sqrt{۲۸}}{۲} = \frac{۶ \pm ۲\sqrt{۷}}{۲} = ۳ \pm \sqrt{۷}$$

$$\left\{ ۳ + \sqrt{۷}, ۳ - \sqrt{۷} \right\}$$

$$۵) \quad \frac{۳}{x} + \frac{۴}{x+۲} = ۲$$

$$LCD = x(x+۲)$$

$$x(x+۲)\left(\frac{۳}{x}\right) + x(x+۲)\left(\frac{۴}{x+۲}\right) = x(x+۲)(۲)$$

$$۳(x+۲) + ۴x = ۲x^2 + ۴x$$

$$۳x + ۶ + ۴x = ۲x^2 + ۴x$$

$$۲x^2 - ۳x - ۶ = ۰$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 48}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

$$\left\{ \frac{3 + \sqrt{57}}{4}, \quad \frac{3 - \sqrt{57}}{4} \right\}$$

$$۶) \quad \frac{۷}{x^2 - ۵x + ۶} = \frac{۲x}{x - ۳} - \frac{x}{x - ۲}$$

$$\frac{۷}{(x - ۳)(x - ۲)} = \frac{۲x}{x - ۳} - \frac{x}{x - ۲}$$

$$LCD = (x - ۳)(x - ۲)$$

$$(x - ۳)(x - ۲) \left(\frac{۷}{(x - ۳)(x - ۲)} \right) = (x - ۳)(x - ۲) \left(\frac{۲x}{x - ۳} \right) - (x - ۳)(x - ۲) \left(\frac{x}{x - ۲} \right)$$

$$۷ = ۲x(x - ۲) - x(x - ۳)$$

$$۷ = ۲x^2 - ۴x - x^2 + ۳x$$

$$x^2 - x - ۷ = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 28}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$\left\{ \frac{1 + \sqrt{29}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$

$$۷) \quad p^۴ - ۱۶ = ۰$$

$$(p^۲)^۲ - (۴)^۲ = ۰$$

$$(p^۲ - ۴)(p^۲ + ۴) = ۰$$

$$(p - ۲)(p + ۲)(p^۲ + ۴) = ۰$$

$$p - ۲ = ۰ \quad \text{یا} \quad p + ۲ = ۰ \quad \text{یا} \quad p^۲ + ۴ = ۰$$

$$p = ۲ \quad \text{یا} \quad p = -۲ \quad \text{یا} \quad p^۲ = -۴$$

$$p = ۲ \quad \text{یا} \quad p = -۲ \quad \text{یا} \quad p = \pm \sqrt{-۴}$$

$$p = ۲ \quad \text{یا} \quad p = -۲ \quad \text{یا} \quad p = \pm i \sqrt{۴}$$

$$p = ۲ \quad \text{یا} \quad p = -۲ \quad \text{یا} \quad p = \pm ۲i$$

$$\{۲, -۲, ۲i, -۲i\}$$

$$۸) \quad ۴x^۴ + ۱۱x^۲ = ۳$$

$$۴x^۴ + ۱۱x^۲ - ۳ = ۰$$

$$y = x^۲ \quad \text{فرض می کنیم}$$

$$۴y^۲ + ۱۱y - ۳ = ۰$$

$$(y + ۳)(۴y - ۱) = ۰$$

$$y + ۳ = ۰ \quad ۴y - ۱ = ۰$$

پس خواهیم داشت.

$$y = -3 \quad y = \frac{1}{4}$$

مقادیر بدست آمده برای y را در تساوی $y = x^2$ می گذاریم تا مقادیر x پیدا شوند.

$$y = -3 \quad y = \frac{1}{4}$$

$$y = x^2 \quad y = x^2$$

$$x^2 = -3 \quad x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{-3} \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x = \pm i\sqrt{3} \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\left\{ i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$9) \quad z^4 - 13z^2 + 36 = 0$$

$$(z^2)^2 - 13z^2 + 36 = 0$$

$$x = z^2 \quad \text{فرض می کنیم}$$

پس خواهیم داشت

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$(x - 9)(x - 4) = 0$$

$$x - 9 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{یا} \quad x = 9$$

مقادیر بدست آمده برای x را در تساوی $x = z^2$ می گذاریم تا مقادیر z پیدا شوند.

$$x = 9$$

$$x = 4$$

$$x = z^2$$

$$x = z^2$$

$$z^2 = 9$$

$$z^2 = 4$$

$$z = \pm 3$$

$$z = \pm 2$$

$$\{3, -3, 2, -2\}$$

$$1) \quad x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 3x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{فرض می کنیم}$$

پس خواهیم داشت

$$y^2 - 3y - 1 = 0$$

$$(y - 5)(y + 2) = 0$$

$$y - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad y + 2 = 0$$

$$y = 5 \quad \text{یا} \quad y = -2$$

مقادیر بدست آمده برای y را در تساوی $y = x^{\frac{1}{3}}$ می گذاریم تا مقادیر x پیدا شوند.

$$y = 5$$

$$y = -2$$

$$y = x^{1/3}$$

$$y = x^{1/3}$$

$$x^{1/3} = 5$$

$$x^{1/3} = -2$$

$$\left(x^{1/3}\right)^3 = 5^3$$

$$\left(x^{1/3}\right)^3 = (-2)^3$$

$$x = 125$$

$$x = -8$$

$$\{125, -8\}$$

$$11) (5x + 1)^2 + 2(5x + 1) - 3 = 0$$

$$y = 5x + 1 \text{ فرض می کنیم}$$

پس خواهیم داشت

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$(y - 1)(y + 3) = 0$$

$$y - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad y + 3 = 0$$

$$y = 1 \quad \text{یا} \quad y = -3$$

مقادیر بدست آمده برای y را در تساوی $y = 5x + 1$ می گذاریم تا مقادیر x پیدا شوند.

$$y = 1$$

$$y = -3$$

$$y = 5x + 1$$

$$y = 5x + 1$$

$$5x + 1 = 1$$

$$5x + 1 = -3$$

$$5x = 0$$

$$5x = -4$$

$$x = 0$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

$$\left\{0, -\frac{4}{5}\right\}$$

$$۱۲) \quad 2x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 5x^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \text{ فرض می کنیم}$$

پس خواهیم داشت

$$2y^2 - 5y = 3$$

$$2y^2 - 5y - 3 = 0$$

$$(2y + 1)(y - 3) = 0$$

$$2y + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad y - 3 = 0$$

$$2y = -1 \quad \text{یا} \quad y = 3$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad y = 3$$

مقادیر بدست آمده برای y را در تساوی $y = x^{\frac{1}{3}}$ می گذاریم تا مقادیر x پیدا شوند.

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$y = 3$$

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3$$

$$x = -\frac{1}{8}$$

$$x = 27$$

$$\left\{-\frac{1}{8}, 27\right\}$$

$$13) \quad 1 + \frac{2}{3x-2} = \frac{8}{(3x-2)^2}$$

$$y = 3x - 2 \text{ فرض می کنیم}$$

پس خواهیم داشت

$$1 + \frac{2}{y} = \frac{8}{y^2}$$

$$LCD = y^2$$

$$y^2(1) + y^2\left(\frac{2}{y}\right) = y^2\left(\frac{8}{y^2}\right)$$

$$y^2 + 2y = 8$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(y + 4)(y - 2) = 0$$

$$y + 4 = 0 \quad y - 2 = 0$$

$$y = -4 \quad y = 2$$

مقادیر بدست آمده برای y را در تساوی $y = 3x - 2$ می‌گذاریم تا مقادیر x پیدا شوند.

$$y = -4 \quad y = 2$$

$$3x - 2 = -4 \quad 3x - 2 = 2$$

$$3x = -2 \quad 3x = 4$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad x = \frac{4}{3}$$

$$\left\{-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}$$

$$۱۴) (p + 2)^2 = 9(p + 2) - 2 \circ$$

$$x = p + 2 \text{ فرض می‌کنیم}$$

پس خواهیم داشت

$$x^2 = 9x - 2 \circ$$

$$x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$(x - 5)(x - 4) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 5 \quad \text{یا} \quad x = 4$$

مقادیر بدست آمده برای x را در تساوی $x = p + 2$ می گذاریم تا مقادیر x پیدا شوند.

$$x = 5 \quad x = 4$$

$$p + 2 = 5 \quad p + 2 = 4$$

$$p = 3 \quad p = 2$$

$$\{3, 2\}$$

$$15) \quad 2x = \sqrt{11x + 3}$$

$$(2x)^2 = (\sqrt{11x + 3})^2$$

$$4x^2 = 11x + 3$$

$$4x^2 - 11x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(4x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad 4x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{یا} \quad 4x = -1$$

$$x = 3 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{1}{4}$$

چون دو طرف معادله را به توان ۲ یعنی به توان یک عدد زوج رسانده ایم باید حتما جواب های بدست آمده را در معادله اصلی امتحان کنیم.

$$x = 3$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{11x + 3}$$

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{11x + 3}$$

$$\sqrt[2]{(3)} = \sqrt{11(3) + 3}$$

$$\sqrt[2]{\left(-\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{11\left(-\frac{1}{4} + 3\right)}$$

$$6 = \sqrt{33 + 3}$$

$$-\frac{1}{2} = \sqrt{-\frac{11}{4} + 3}$$

$$6 = \sqrt{36}$$

$$-\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{-11}{4} + \frac{12}{4}}$$

$$6 = 6 \quad \text{صحیح است}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{غلط است}$$

پس مجموعه جواب های این معادله $\{3\}$ است.

$$16) \quad x^{\frac{2}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}} + 15 = 0$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{فرض می کنیم}$$

پس خواهیم داشت

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$(y - 3)(y - 5) = 0$$

$$y - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad y - 5 = 0$$

$$y = 3 \quad \text{یا} \quad y = 5$$

مقادیر بدست آمده برای y را در تساوی $y = x^{\frac{1}{3}}$ می گذاریم تا مقادیر x پیدا شوند.

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$y = 3$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3$$

$$x = 27$$

$$\{27, 125\}$$

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$y = 5$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5^3$$

$$x = 125$$

$$۱۷) \quad y^3 + 9y - y^2 - 9 = 0$$

$$(y^3 - y^2) + (9y - 9) = 0$$

$$y^2(y - 1) + 9(y - 1) = 0$$

$$(y - 1)(y^2 + 9) = 0$$

$$y - 1 = 0 \quad \text{یا}$$

$$y = 1 \quad \text{یا}$$

$$y = 1 \quad \text{یا}$$

$$y = 1 \quad \text{یا}$$

$$y = 1 \quad \text{یا}$$

$$y^2 + 9 = 0$$

$$y^2 = -9$$

$$y = \pm\sqrt{-9}$$

$$y = \pm i\sqrt{9}$$

$$y = \pm 3i$$

$$\{1, 3i, -3i\}$$

$$۱۸) \quad x^{-۲} - x^{-۱} - ۶ = ۰$$

$$\frac{1}{x^۲} - \frac{1}{x} - ۶ = ۰$$

$$LCD = x^۲$$

$$x^۲ \left(\frac{1}{x^۲} \right) - x^۲ \left(\frac{1}{x} \right) - x^۲ (۶) = ۰$$

$$1 - x - ۶x^۲ = ۰$$

$$۶x^۲ + x - 1 = ۰$$

$$(۲x + ۱)(۳x - ۱) = ۰$$

$$۲x + 1 = ۰$$

$$۳x - 1 = ۰$$

$$۲x = -1$$

$$۳x = 1$$

$$x = -\frac{1}{۲}$$

$$x = \frac{1}{۳}$$

$$\left\{ -\frac{1}{۲}, \frac{1}{۳} \right\}$$

$$۱۹) \quad p^۴ - p^۲ - ۲ = ۰$$

$$(p^۲)^۲ - p^۲ - ۲ = ۰$$

$$y = p^۲ \text{ فرض می کنیم}$$

پس خواهیم داشت

$$y^2 - y - 20 = 0$$

$$(y - 5)(y + 4) = 0$$

$$y - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad y + 4 = 0$$

$$y = 5 \quad \text{یا} \quad y = -4$$

مقادیر بدست آمده برای y را در تساوی $y = p^2$ می‌گذاریم تا مقادیر p پیدا شوند.

$$y = -4$$

$$y = 5$$

$$y = p^2$$

$$y = p^2$$

$$p^2 = -4$$

$$p^2 = 5$$

$$p = \pm\sqrt{-4}$$

$$p = \pm\sqrt{5}$$

$$p = \pm i\sqrt{4}$$

$$p = \pm\sqrt{5}$$

$$p = \pm 2i$$

$$p = \pm\sqrt{5}$$

$$\{2i, -2i, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$$

$$20) \quad 2x^2 = -54$$

$$x^2 = -27$$

$$x^2 + 27 = 0$$

$$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x^2 - 3x + 9 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$x = -3$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{27}}{2} = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left\{ -3, \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 3i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

مسائل زیر را حل کنید.

۲۱ - یک دوندۀ مسافت سه کیلومتر می دود. و بعد سرعت خود را یک کیلومتر در ساعت کم می کند و ۴ کیلومتر دیگر می دود. اگر مجموع هر دو قسمت دویدن $1\frac{3}{5}$ ساعت باشد، سرعت این دوندۀ در هر دو قسمت را پیدا کنید.

حل

سرعت سه کیلومتر اول x

سرعت چهار کیلومتر دوم $x - 1$

$$d = rt$$

$$t = \frac{d}{r}$$

زمان	سرعت	مسافت	
۳ — x	x	۳	قسمت اول
۴ — $x - 1$	$x - 1$	۴	قسمت دوم

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{x-1} = 1 \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

$$LCD = 5x(x-1)$$

$$5x(x-1)\left(\frac{3}{x}\right) + 5x(x-1)\left(\frac{4}{x-1}\right) = 5x(x-1)\left(\frac{8}{5}\right)$$

$$15(x-1) + 20x = 8x(x-1)$$

$$15x - 15 + 20x = 8x^2 - 8x$$

$$8x^2 - 43x + 15 = 0$$

$$x = \frac{-(-43) \pm \sqrt{(-43)^2 - 4(8)(15)}}{2(8)} = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 480}}{16} = \frac{43 \pm \sqrt{1369}}{16} = \frac{43 \pm 37}{16}$$

$$x = \frac{43 + 37}{16} = \frac{80}{16} = 5 \quad \text{سرعت قسمت اول بر حسب کیلو متر در ساعت}$$

$$\text{سرعت قسمت دوم بر حسب کیلو متر در ساعت} = 5 - 1 = 4$$

$$x = \frac{43 - 37}{16} = \frac{6}{16} = 0.375$$

سرعت ۰.۳۷۵/ کیلو متر در ساعت قابل قبول نیست. چون اگر بخواهیم ۱ کیلو متر در ساعت برای قسمت دوم کم کنیم به یک عدد منفی میرسیم و میدانیم که سرعت نمی تواند منفی باشد.

۲۲ - بهمن مسافت ۳۳۰ کیلومتر از شهر محل اقامتش تا شهر سیرجان با اتومبیل خود رانندگی کرد. هنگام مراجعت او توانست سرعتش را ۱۱ کیلومتر در ساعت افزایش دهد. اگر مدت مراجعت به شهر محل اقامتش ۱ ساعت کمتر از مدت رفتن به شهر سیرجان باشد، سرعت رفت و برگشت او را حساب کنید.

حل

$$x = \text{سرعت بطرف سیرجان}$$

سرعت بطرف شهر محل اقامت $x + 11 =$

$$d = rt$$

$$t = \frac{d}{r}$$

زمان	سرعت	مسافت	
$\frac{330}{x}$	x	330	بطرف سیرجان
$\frac{330}{x+11}$	$x+11$	330	مراجعت از سیرجان

$$\frac{330}{x} = \frac{330}{x+11} + 1$$

$$LCD = x(x+11)$$

$$x(x+11)\left(\frac{330}{x}\right) = x(x+11)\left(\frac{330}{x+11}\right) + x(x+11)(1)$$

$$330(x+11) = 330x + x^2 + 11x$$

$$330x + 3630 = 330x + x^2 + 11x$$

$$x^2 + 11x - 3630 = 0$$

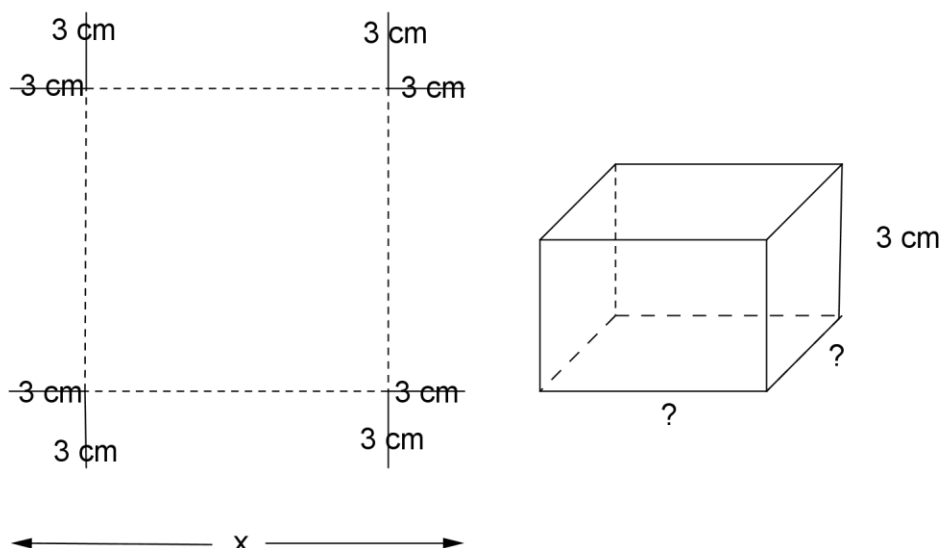
$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4(1)(-3630)}}{2(1)} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 14520}}{2} = \frac{-11 \pm \sqrt{14641}}{2} = \frac{-11 \pm 121}{2}$$

عدد منفی برای سرعت قبول نمی کنیم پس

$$x = \frac{-11 + 121}{2} = \frac{110}{2} = 55 \text{ سرعت به طرف سیرجان بر حسب کیلو متر در ساعت}$$

$$55 + 11 = 66 \text{ سرعت مراجعت از سیرجان بر حسب کیلو متر در ساعت}$$

۲۳ - می خواهیم از یک صفحه مقوایی مربع شکل یک جعبه بدون درب بسازیم. برای این کار از هر چهار گوشه این صفحه مقوایی ۳ سانتی متر جدا می کنیم و مقوا را روی خطوط نقطه چین مطابق شکل زیر تا می کنیم. اگر حجم جعبه باید ۳۰۰ سانتی متر مکعب باشد، ابعاد صفحه مقوی اولیه را پیدا کنید.



حل

اگر هر یک از اضلاع مقوای مربع شکل را x بنامیم، همان طور که از شکل بالا ملاحظه می شود، از هر گوشه مقوا ۳ سانتی متر و یا به عبارت دیگر ۶ سانتی از هر ضلع جدا کرده ایم. از جعبه بدست آمده در سمت راست می بینیم که سطح تحتانی جعبه یک مربع است که اضلاع آنرا با علامت سوال نشان داده ایم. هر یک از اضلاع این مربع $x - 6$ سانتی متر است. ارتفاع این جعبه هم ۳ سانتی متر است. پس مساله را به شکل زیر حل می کنیم.

یک ضلع مقوای اولیه $x =$

$$3(x - 6)(x - 6) = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم مکعب}$$

$$3(x - 6)(x - 6) = 300$$

$$3x^2 - 36x + 108 = 300$$

$$3x^2 - 36x - 192 = 0$$

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

$$(x - 16)(x + 4) = 0$$

$$x - 16 = 0 \quad x + 4 = 0$$

$$x = 16 \quad x = -4$$

عدد منفی را قبول نمی کنیم. پس هر یک از اضلاع مقوا ۱۶ سانتی متر است.

۶.۴ نا معادله های غیر خطی یک مجهولی Nonlinear Inequalities in One Variable

حل نا معادله های چند جمله ای - همان طور که می توانیم نا معادله های خطی یک مجهولی را حل کنیم، می توانیم نا معادله های درجه دوم یک مجهولی را هم حل کنیم. یک **نا معادله درجه دوم** نا معادله ای است که می توان آنرا طوری نوشت که یک طرف یک عبارت درجه دوم باشد و طرف دیگر صفر است. در ذیل چند نا معادله درجه دوم یک مجهولی به شکل استاندارد ملاحظه می کنید.

$$x^2 - 10x + 7 \leq 0 \quad 3x^2 + 2x - 6 > 0$$

$$2x^2 + 9x - 2 < 0 \quad x^2 - 3x + 11 \geq 0$$

جواب یک نا معادله درجه دوم یک مجهولی مقداری است که اگر آنرا در نا معادله قرار دهیم یک نا معادله صحیح بدست آید.

مثال - نا معادله های زیر را حل کنید.

$$1) \quad x^2 - 3x - 10 < 0$$

می خواهیم مقادیری برای x پیدا کنیم که اگر آنها را در نا معادله قرار دهیم، حاصل یک عدد منفی باشد. اول بیایید مقادیری برای x پیدا کنیم که اگر آنها را در عبارت درجه دوم بگذاریم نتیجه صفر بشود. برای این کار اول معادله زیر را حل می کنیم.

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

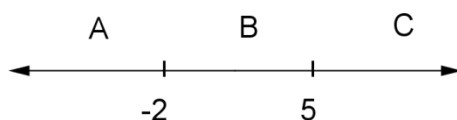
$$x - 5 = 0 \quad x + 2 = 0$$

$$x = 5 \quad x = -2$$

این دو عدد یعنی -2 و 5 محور اعداد را به سه بخش Region تقسیم می کنند. این سه بخش را A ، B ، C می نامیم. این سه بخش مهم هستند. زیرا اگر یک عدد از یک بخش انتخاب کنیم و آن عدد را در عبارت $x^2 - 3x - 10 < 0$

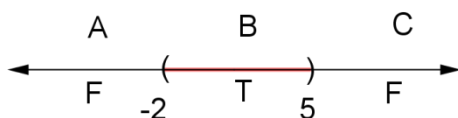
بجای x بگذاریم و حاصل $x^2 - 3x - 10 < 0$ منفی باشد، پس این عبارت برای هر عدد دیگری که از این بخش انتخاب شود، منفی خواهد بود. این مطلب هم صادق است برای یک عددی که از یکی از این بخش ها انتخاب شود و حاصل $x^2 - 3x - 10 < 0$ مثبت باشد. برای اینکه ببینیم آیا عبارت $x^2 - 3x - 10 < 0$ در هر کدام از این سه بخش مثبت

است یا منفی، یک نقطه آزمایشی Test Point در هر بخش انتخاب می کنیم و مقدار عددی آنرا بجای x می گذاریم. اگر نتیجه یک نا معادله صحیح بود، آن بخش که شامل آن نقطه آزمایشی است، جواب نا معادله است.



بخش	عدد آزمایشی	$(x-5)(x+2) < 0$	نتیجه
A	-3	$(-8)(-1) < 0$	غلط
B	0	$(-5)(2) < 0$	صحیح
C	6	$(1)(8) < 0$	غلط

مقادیر بخش B شرایط نا معادله را برآورده می کنند. اعداد بین 5 و -2 مجموعه جواب های نا معادله هستند. البته اعداد 5 و -2 را شامل نمی شوند، چون نماد $<$ داریم. مجموعه جواب های این نا معادله $(-2, 5)$ است. و نمایش هندسی آن مطابق شکل زیر است.



True صحیح

False غلط

$$2) \quad (x+3)(x-3) > 0$$

اول معادله $(x+3)(x-3) = 0$ را حل می کنیم.

$$(x+3)(x-3) = 0$$

$$x+3=0$$

یا

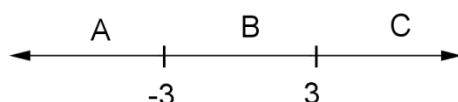
$$x-3=0$$

$$x=-3$$

یا

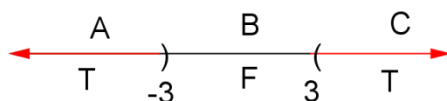
$$x=3$$

دو عدد ۳ و -۳ محور اعداد را به سه بخش A، B، C تقسیم می کنند. اینک یک نقطه آزمایشی در هر بخش انتخاب می کنیم و مقدار عددی آنرا در نا معادله می گذاریم. اگر نقطه آزمایشی شرایط نا معادله را بر آورده کرد، هر عددی در آن بخش یک جواب نا معادله است.



نتیجه	$(x+3)(x-3) > 0$	عدد آزمایشی	بخش
صحیح	$(-1)(-7) > 0$	-۴	A
غلط	$(3)(-3) > 0$	۰	B
صحیح	$(7)(1) > 0$	۴	C

نقاط داخل بخش های A و C شرایط نا معادله را بر آورده می کنند. اما اعداد ۳ و -۳ را شامل نمی شوند زیرا نماد $>$ داریم. پس مجموعه جواب های این نا معادله $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ است. و نمودار هندسی آن مطابق شکل زیر است.



خلاصه حل نا معادله چند جمله ای

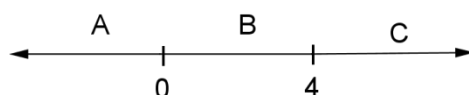
- الف - نا معادله را به شکل استاندارد بنویسید. V سپس معادله مربوطه را حل کنید.
- ب - محور اعداد را با استفاده از جواب های مرحله الف به چند بخش تقسیم کنید.
- ج - برای هر بخش یک نقطه آزمایشی انتخاب کنید و ببینید آیا مقدار آن شرایط نا معادله را بر آورده می کند یا نه.
- د - مجموعه جواب ها شامل بخشی است که مقدار نقطه آزمایشی آن یکی از جواب ها است. اگر نماد \geq یا \leq نماد نا معادله است، مجموعه جواب ها شامل مقدر بدست آمده در قسمت الف هم می شود. در غیر این صورت شامل نمی شود.

$$3) \quad x^2 - 4x \leq 0$$

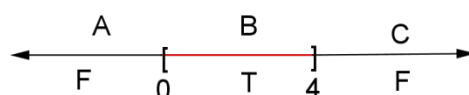
$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 4$$



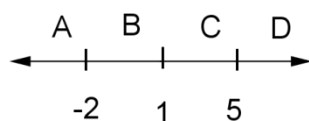
اگر مانند مثال های ۲ و ۱ جدول بسازیم و نقاط آزمایشی انتخاب کنیم متوجه می شویم که مقادیر بخش B شرایط نا معادله را بر آورده می کنند. و چون نماد \leq داریم، پس مجموعه جواب های این نا معادله $[0, 4]$ است.



$$۴) \quad (x + 2)(x - 1)(x - 5) \leq 0$$

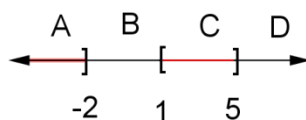
$$x + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 5 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{یا} \quad x = 1 \quad \text{یا} \quad x = 5$$



نتیجه	$(x + 2)(x - 1)(x - 5) \leq 0$	عدد آزمایشی	بخش
صحیح	$(-1)(-4)(-8) \leq 0$	-۳	A
غلط	$(2)(-1)(-5) \leq 0$	۰	B
صحیح	$(4)(1)(-3) \leq 0$	۲	C
غلط	$(8)(5)(1) \leq 0$	۶	D

مجموعه جواب ها $[-\infty, -2] \cup [1, 5]$ است.



حل نا معادله های کسری یا گویا Solving Rational Inequalities

برای حل نا معادله هایی که دارای کسر هستند و متغیر در مخرج کسر هم وجود دارد، همان مراحل بالا را بکار می بریم ، اما باید توجه داشت که جواب هایی که مخرج کسر را صفر می کنند به حساب نمی آوریم.

مثال

$$۵) \frac{x+2}{x-3} \leq 0$$

ابتدا کلیه مقادیری که مخرج کسر را صفر می کنند، پیدا می کنیم.

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

حال معادله زیر را حل می کنیم.

$$\frac{x+2}{x-3} = 0$$

$$LCD = x - 3$$

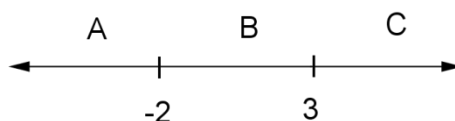
$$(x-3) \left(\frac{x+2}{x-3} \right) = (x-3)(0)$$

$$(x+2) = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

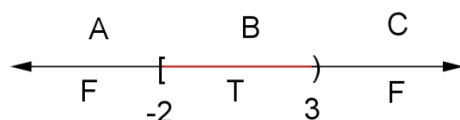
مقادیر ۲- و ۳ را روی محور اعداد قرار می دهیم. این دو عدد محور اعداد را به سه بخش تقسیم می کنند.



اینک مانند مثال های بالا در هر بخش یک نقطه آزمایشی انتخاب می کنیم و مقدار آنرا در نا معادله اصلی می گذاریم

بخش	عدد آزمایشی	$\frac{x+2}{x-3} \leq 0$	نتیجه
A	-3	$\frac{-1}{-6} \leq 0$	غلط
B	0	$\frac{2}{-3} \leq 0$	صحیح
C	4	$\frac{6}{1} \leq 0$	غلط

ملاحظه می کنید که مقادیر بخش B شرایط نا معادله را بر آورده می کنند. اما چون -3 مخرج کسر را صفر می کند ، آنرا در نظر نمی گیریم . پس مجموعه جواب های این نا معادله $[-2, 3)$ است. و نمودار هندسی آن به شکل زیر است



$$۶) \frac{5}{x+1} < -2$$

ابتدا مقادیری را که مخرج کسر را صفر می کنند پیدا می کنیم.

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

اینک معادله زیر حل می کنیم.

$$\frac{5}{x+1} = -2$$

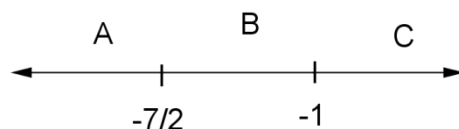
$$LCD = x + 1$$

$$(x+1)\left(\frac{5}{x+1}\right) = (x+1)(-2)$$

$$5 = -2x - 2$$

$$2x = -7$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

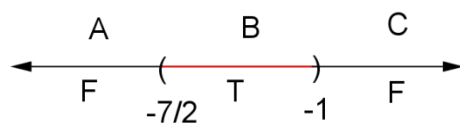


جدول تشکیل می دهیم.

بخش	عدد آزمایشی	$\frac{5}{x+1} < -2$	نتیجه
A	-4	$\frac{5}{-3} < -2$	غلط
B	-2	$\frac{5}{-1} < -2$	صحیح
C	0	$\frac{5}{1} < -2$	غلط

مقدار ۱- را در نظر نمی گیریم چون مخرج کسر را صفر می کند، و $-\frac{7}{2}$ را هم در نظر نمی گیریم چون نماد $<$

داریم. پس مجموعه جواب های این نا معادله $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$ است. و نمودار هندسی آن مطابق شکل زیر است.



تمرینات ۶.۴

نامعادله های زیر را حل کنید.

۱) $(x + 1)(x + 5) > 0$

۲) $(x - 3)(x + 4) \leq 0$

۳) $x^2 - 7x + 1 \leq 0$

۴) $3x^2 + 16x < -5$

۵) $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$

۶) $\frac{5}{x + 1} > 0$

۷) $\frac{-1}{x - 1} > -1$

$$۸) \frac{x}{x+۴} \leq ۲$$

پاسخ تمرینات ۶.۴

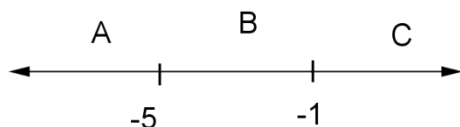
نا معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) (x+۱)(x+۵) > ۰$$

$$(x+۱)(x+۵) = ۰$$

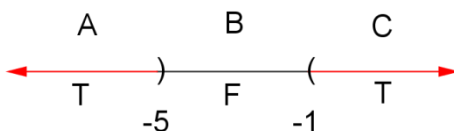
$$x+۱=۰ \quad x+۵=۰$$

$$x=-۱ \quad x=-۵$$



نتیجه	$(x+۱)(x+۵) > ۰$	عدد آزمایشی	بخش
صحیح	$(-۵)(-۱) > ۰$	-۶	A
غلط	$(-۱)(۳) > ۰$	-۲	B
صحیح	$(۱)(۵) > ۰$	۰	C

$$(-\infty, -۵) \cup (-۱, \infty)$$

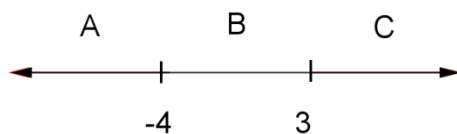


$$۲) (x-۳)(x+۴) \leq ۰$$

$$(x - 3)(x + 4) = 0$$

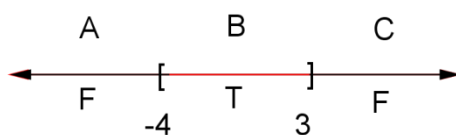
$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 4 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{یا} \quad x = -4$$



بخش	عدد آزمایشی	$(x - 3)(x + 4) \leq 0$	نتیجه
A	-5	$(-8)(-1) \leq 0$	غلط
B	0	$(-3)(4) \leq 0$	صحیح
C	4	$(1)(8) \leq 0$	غلط

$$[-4, 3]$$



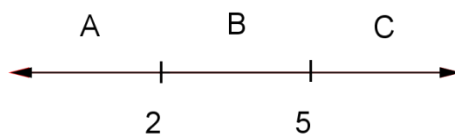
$$3) \quad x^2 - 7x + 10 \leq 0$$

$$(x - 5)(x - 2) \leq 0$$

$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

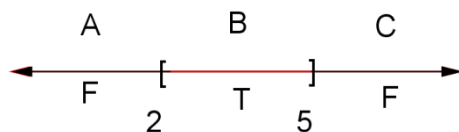
$$x - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 5 \quad \text{یا} \quad x = 2$$



نتیجه	$(x - 5)(x - 2) \leq 0$	عدد آزمایشی	بخش
غلط	$(-5)(-2) \leq 0$	0	A
صحیح	$(-2)(1) \leq 0$	3	B
غلط	$(1)(4) \leq 0$	6	C

$$[2, 5]$$



$$4) \quad 3x^2 + 16x < -5$$

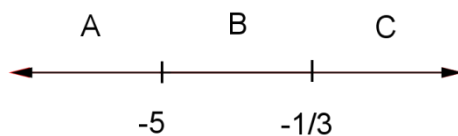
$$3x^2 + 16x + 5 < 0$$

$$(x + 5)(3x + 1) < 0$$

$$(x + 5)(3x + 1) = 0$$

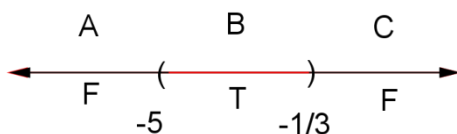
$$x + 5 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x + 1 = 0$$

$$x = -5 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{1}{3}$$



بخش	عدد آزمایشی	$(x+5)(3x+1) < 0$	نتیجه
A	-6	$(-1)(-17) < 0$	غلط
B	-1	$(4)(-2) < 0$	صحیح
C	0	$(5)(1) < 0$	غلط

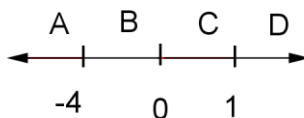
$$\left(-5, -\frac{1}{3}\right)$$



$$5) \quad x(x-1)(x+4) \leq 0$$

$$x(x-1)(x+4) = 0$$

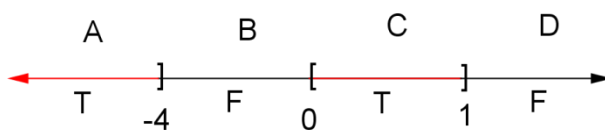
$$x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 1 \quad \text{یا} \quad x = -4$$



بخش	عدد آزمایشی	$x(x-1)(x+4) \leq 0$	نتیجه
A	-5	$(-5)(-6)(-1) \leq 0$	صحیح

B	-1	$(-1)(-2)(3) \leq 0$	غلط
C	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right) \leq 0$	صحیح
D	2	$(2)(1)(6) \leq 0$	غلط

$$(-\infty, -4] \cup [0, 1]$$



$$6) \frac{5}{x+1} > 0$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

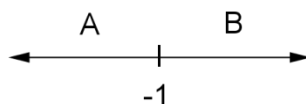
برای $x = -1$ مختص کسر صفر می شود، پس این مقدار را در مجموعه جواب ها نمی گجانیم.

$$\frac{5}{x+1} = 0$$

$$LCD = x+1$$

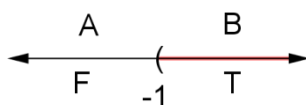
$$(x+1)\left(\frac{5}{x+1}\right) = (x+1)(0)$$

$$5=0 \quad \text{غلط}$$



نتیجه	$\frac{5}{x+1} > 0$	نقطه آزمایشی	بخش
غلط	$\frac{5}{-1} > 0$	-2	A
صحیح	$\frac{5}{1} > 0$	0	B

$$(-1, \infty)$$



$$۷) \frac{-1}{x-1} > -1$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

برای $x=1$ مخرج کسر صفر می شود، پس آنرا در مجموعه جواب ها به حساب نمی آوریم.

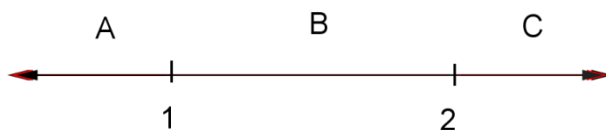
$$\frac{-1}{x-1} = -1$$

$$LCD = x-1$$

$$(x-1)\left(\frac{-1}{x-1}\right) = (x-1)(-1)$$

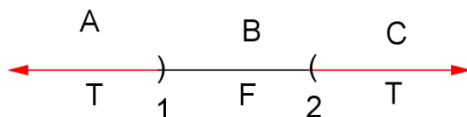
$$-1 = -x + 1$$

$$x = 2$$



نتیجه	$\frac{-1}{x-1} > -1$	عدد آزمایشی	بخش
صحیح	$\frac{-1}{-1} > -1$	0	A
غلط	$\frac{-1}{\frac{1}{2}} > -1$	$\frac{3}{2}$	B
صحیح	$\frac{-1}{2} > -1$	3	C

$$(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$



$$8) \quad \frac{x}{x+4} \leq 2$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

برای $x = -4$ مخرج کسر صفر می شود، پس آنرا در مجموعه جواب ها به حساب نمی آوریم.

$$\frac{x}{x+4} = 2$$

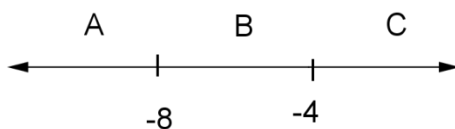
$$LCD = x + 4$$

$$(x+4)\left(\frac{x}{x+4}\right) = (x+4)(2)$$

$$x = 2x + 8$$

$$x + 8 = 0$$

$$x = -8$$



نتیجه	$\frac{x}{x+4} \leq 2$	عدد آزمایشی	بخش
صحیح	$\frac{-9}{-5} \leq 2$	-9	A
غلط	$\frac{-5}{-1} \leq 2$	-5	B
صحیح	$\frac{0}{4} \leq 2$	0	C

$$(-\infty, -8] \cup (-4, \infty)$$





سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)