فصل هفتم

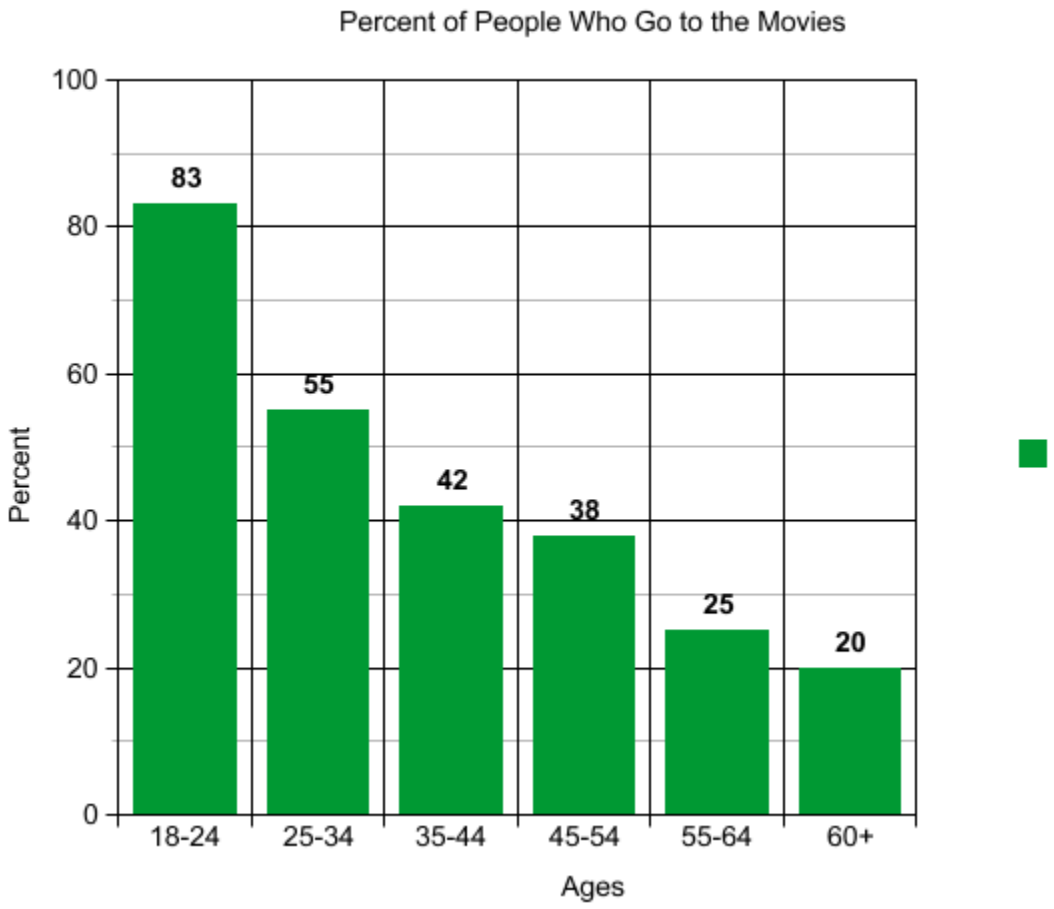
نمودارها وتوابع

Graphs and Functions

۷.۱ - رسم هندسی معادله های خطی Graphing Linear Equations

گراف یا نمودار ها در زندگی امروزه نقش مهمی بازی می کنند. در این بخش رسم نمودار معادله های خطی را بر رسی می کنیم.

نمودار زیر که بنام نمودار نواری یا نمودار میله ای Bar Graph موسوم است در صد افرادی که در گروه های سنی مختلف به سینما می روند نشان می دهد. محور افقی گروه های سنی را نشان می دهد و محور عمودی در صد آن گروه سنی که به سینما می روند مشخص می کند.



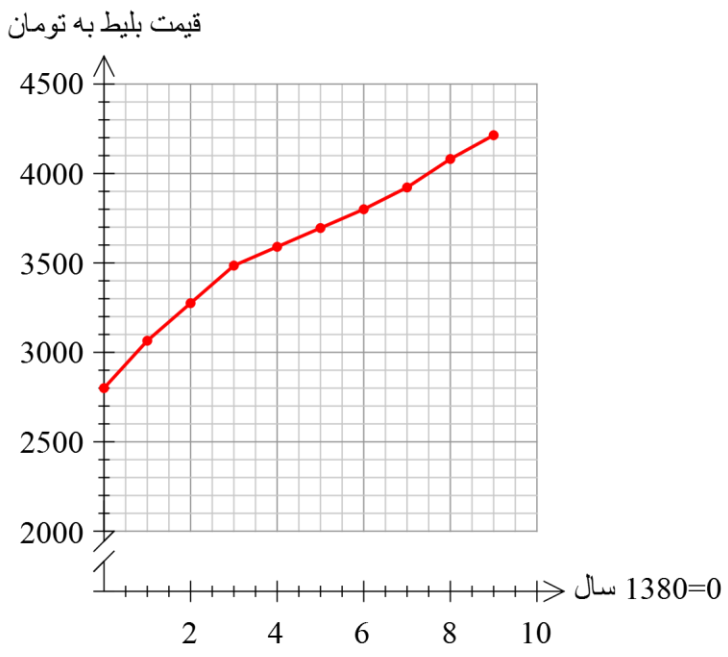
دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار زیر که بنام نمودار پراکندگی Scatter Diagram موسوم است قیمت بلیت ورودی باغ وحش از سال ۱۳۸۰ تا سال ۱۳۸۹ را نشان می دهد. محور افقی سال های مربوطه و محور عمودی قیمت بلیط آن سال را نمایش می دهد.

توجه –سال ۱۳۸۰ از صفر شروع می شود.

اطلاعات مربوط به نمودار پایین

سال	قیمت به تومان
۱۳۸۰	۲۸۰۰
۱۳۸۱	۳۰۶۵
۱۳۸۲	۳۲۷۵
۱۳۸۳	۳۴۸۵
۱۳۸۴	۳۵۹۰
۱۳۸۵	۳۶۹۵
۱۳۸۶	۳۸۰۰
۱۳۸۷	۳۹۲۲
۱۳۸۸	۴۰۸۱
۱۳۸۹	۴۲۱۴



دانلود از سایت ریاضی سرا

محور های مختصات مستطیلی Rectangular Coordinate System

برای مشخص کردن یک نقطه روی یک صفحه از محور های مختصات مستطیلی و یا محور های مختصات دکارت استفاده می کنیم. (رنه دکارت ریاضی دان فرانسوی مخترع محور های مختصات است.)

محور های مختصات از دو محور اعداد عمود بر هم تشکیل شده بطوری که یک دیگر را در نقطه صفر قطع می کنند. ما این دو محور ها را روی کاغذ طوری قرار می دهیم که یکی از آنها افقی و دیگری قائم باشد. ما از این به بعد بجای محور های مختصات مستطیلی فقط می گوییم محور های مختصات و صفحه ای که محور های مختصات روی آن قرار دارد ، می گوییم صفحه مختصات. (Coordinate Plane)

محور افقی Horizontal Number Line رامحور اکس ها x-axis یا محور طول ها Abscissa می نامند.

محور قائم Vertical Number Line را محور وای ها y-axis یا محور عرض ها Ordinate می نامند.

محل تقاطع این دو محور را مبدا Origin می نامند.

این دو محور ، صفحه را به چهار بخش تقسیم می کنند و هر بخش را ربع صفحه Quadrant می گویند.

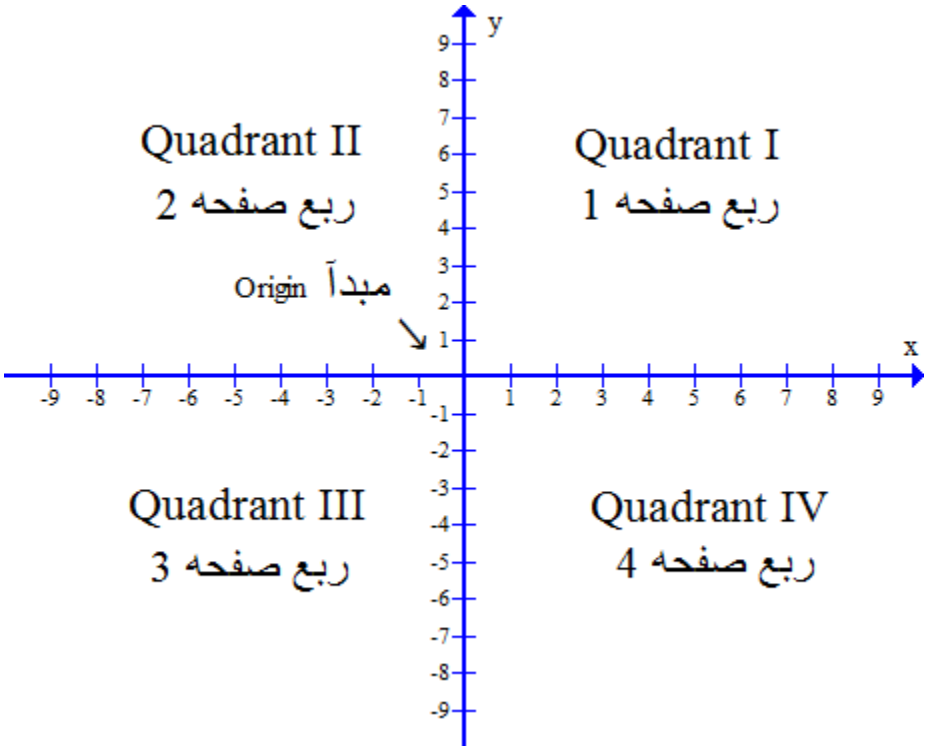
بخش بالا سمت راست , ربع یک Q I

بخش بالا سمت چپ , ربع دو Q II

بخش پایین سمت چپ , ربع سه Q III

بخش پایین سمت راست, ربع چهار Q IV

دانلود از سایت ریاضی سرا



مشخص کردن Locate

صفحه Plane

محورهای مختصات دکارت Cartesian Coordinate System

دو گانه مرتب یا زوج مرتب Ordered Pair

نشان دادن یا تعیین کردن یا روی نمودار نشان دادن Plot

مکان هندسی Location

در امتداد یا در طول Along

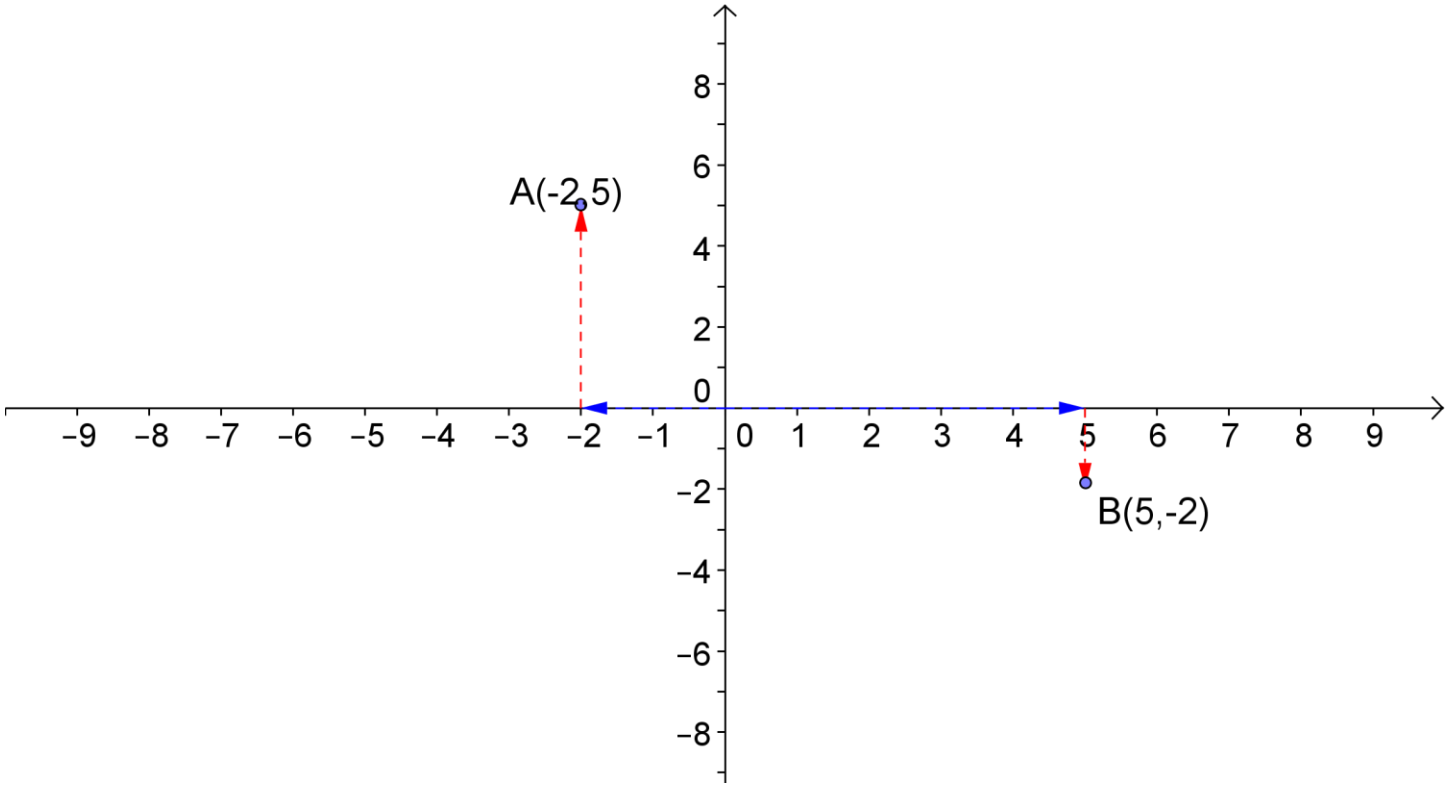
موازی Parallel

بر حسب In Term of

مکان هندسی هر نقطه بر روی صفحه مختصات عبارت است از فاصله های آن نقطه تا مبدا در امتداد هر یک از محور ها . یک دوگانه مرتب که بوسیله نماد (x, y) نمایش داده میشود، این فاصله ها را نشان می دهد. مثلا مکان هندسی نقطه A در شکل زیر ۲ واحد سمت چپ مبدا در امتداد محور x و ۵ واحد به طرف بالا به موازات محور y مشخص شده است. پس نقطه A را با دوگانه مرتب $(-۲, ۵)$ مشخص می کنیم. توجه داشته باشید که ترتیب اعداد

دانلود از سایت ریاضی سرا

مهم است. مقدار ۲− را مختصات x می نامند و مربوط میشود به محور x, و مقدار ۵ را مختصات y می نامند و مربوط میشود به محور y



حالا مقایسه کنید مکان هندسی نقطه A با مکان هندسی نقطه B با مختصات $(۵,-۲)$. مختصات x که ۵ است، نشان می دهد که ما از مبدا ۵ واحد به سمت راست در طول محور x حرکت می کنیم. مختصات y که ۲− است نشان می دهد که ما ۲ واحد به موازات محور y به طرف پایین حرکت می کنیم. مکان هندسی نقطه A با مکان هندسی نقطه B کاملا متفاوت است. دو زوج مرتب وقتی با هم مساوی هستند و مربوط به یک نقطه واحد میشوند که فقط و فقط مختصات x آنها با هم برابر باشند و همچنین مختصات y آنها هم با هم برابر باشند.

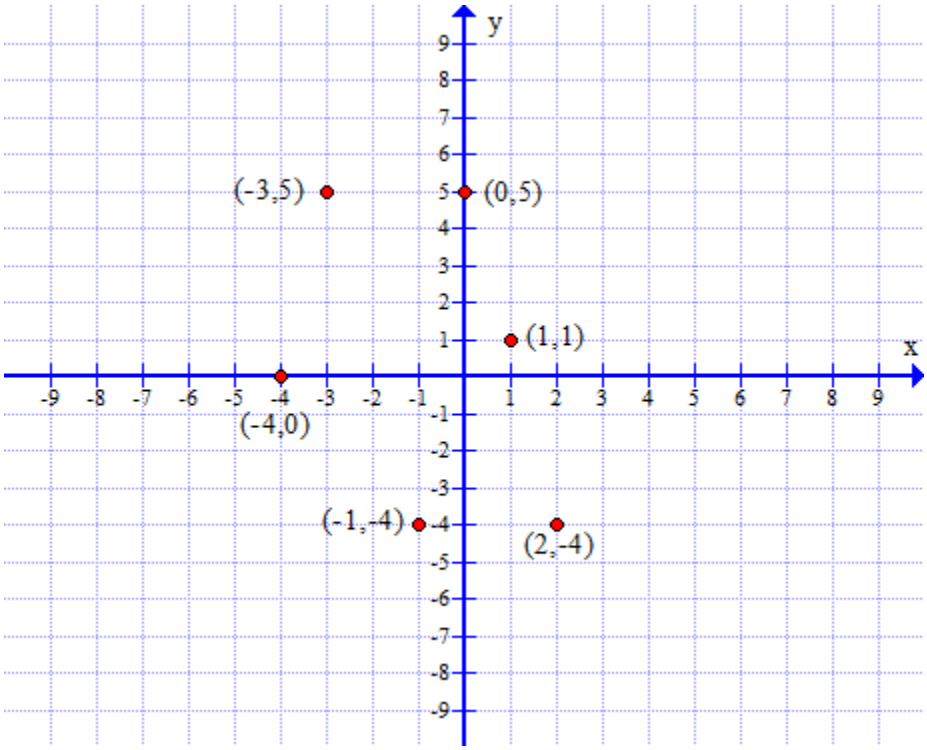
به خاطر داشته باشید که *هر زوج مرتب مربوط میشود به تنها یک نقطه روی صفحه و هر نقطه رو ی صفحه فقط یک زوج مرتب دارد.*

مثال – مکان هندسی هر کدام از زوج های مرتب زیر را روی صفحه مختصات مشخص کنید. و نام ربع صفحه ای که آن نقطه قرار دارد بیان کنید.

$a)\ (۲,-۴)$ $b)\ (۰,۵)$ $c)\ (-۳,۵)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$d)\quad (-۴,۰) \qquad e)\quad (-۱,-۴) \qquad f)\quad (۱,۱)$



$a)\quad (۲,-۴)$ ربع صفحه 4

$b)\quad (۰,۵)$ در هیچ کدام از ربع صفحه ها نیست

$c)\quad (-۳,۵)$ ربع صفحه 2

$d)\quad (-۴,۰)$ در هیچ کدام از ربع صفحه ها نیست

$e)\quad (-۱,-۴)$ ربع صفحه 3

$f)\quad (۱,۱)$ ربع صفحه 1

مشخص کردن آیا یک زوج مرتب اعداد جواب یک معادله است

Determining Whether an Ordered Pair of Numbers Is a Solution of an Equation

جواب های معادله های دو مجهولی شامل دو عدد است که به صورت دوگانه های مرتب Ordered Pairs نوشته میشوند. از این به بعد فرض می کنیم که مقدار عددی متغیر ها به ترتیب حروف الفبای لاتین نوشته میشوند. یعنی اول x و سپس y مگر اینکه غیر از این گفته شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ – مشخص کنید که آیا زوج های داده شده جواب های معادله $۳x - y = ۱۲$ است یا نه.

$(۰, -۱۲), (۱, ۹), (۲, -۶)$

پاسخ – در معادله بالا بجای متغیر x عدد اول یعنی مختصات x را می گذاریم، و بجای y عدد دوم یعنی مختصات y را می گذاریم.

$x = ۰ \qquad y = -۱۲$

$۳x - y = ۱۲$

$۳(۰) - (-۱۲) = ۱۲$

$۰ + ۱۲ = ۱۲$

$۱۲ = ۱۲$ صحیح

پس زوج مرتب $(۰, -۱۲)$ یک جواب معادله بالا است.

$x = ۲ \qquad y = -۶$

$۳x - y = ۱۲$

$۳(۲) - (-۶) = ۱۲$

$۶ + ۶ = ۱۲$

$۱۲ = ۱۲$ صحیح

پس زوج مرتب $(۲, -۶)$ یک جواب معادله بالا است.

$x = ۱ \qquad y = ۹$

$۳x - y = ۱۲$

$۳(۱) - (۹) = ۱۲$

$۳ - ۹ = ۱۲$

$-۶ = ۱۲$ غلط

دانلود از سایت ریاضی سرا

پس زوج مرتب $(۱,۹)$ جواب معادله بالا نیست.

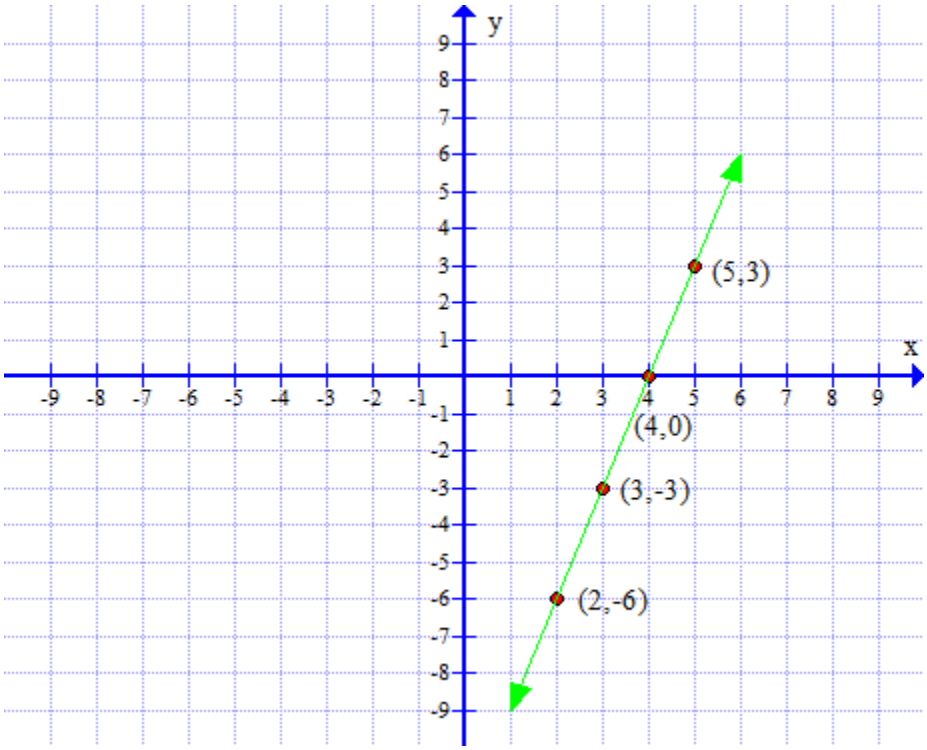
نمایش هندسی معادله های خطی Graphing Linear Equations

همان طور که در مثال ۲ دیدیم بعضی از معادله های خطی بیش از یک زوج مرتب به عنوان جواب معادله دارند. در حقیقت ، معادله $۳x - y = ۱۲$ بی نهایت زوج مرتب به عنوان جواب دارد. چون نمی توان لیست همه جواب ها را نوشت ، آنها را به صورت نمودار هندسی نمایش می دهیم. چند زوج دیگر که معادله را بر قرار می کنند عبارتند از

$$(۴,۰)(۵,۳)(۳,-۳)(۱,-۹)$$

چند زوج مرتب بین این جواب ها که هر کدام مختصات یک نقطه روی صفحه مختصات هستند انتخاب می کنیم و مکان هندسی هر کدام را مشخص می کنیم. ملاحظه می کنید که همه این نقاط روی یک خط مستقیم قرار دارند. پس نمایش هندسی معادله بالا یک خط مستقیم است. هر زوج دیگر که جواب این معادله باشد روی این خط قرار دارد و هر نقطه ای روی این خط یک زوج جواب این معادله است.

شکل زیر نمودار معادله $۳x - y = ۱۲$ است. پیکان های دو سر خط نشانه آنست که خط از هر دو طرف تا بی نهایت ادامه دارد.



معادله $۳x - y = ۱۲$ را **معادله خطی دو مجهولی می نامند.** **Linear Equation in Two Variables**

دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله خطی دو مجهولی ، معادله ای است که بتوان آنرا به صورت زیر نوشت.

$$\boldsymbol{Ax + By = C}$$

در معادله بالا C، B، A اعداد حقیقی هستند، B، A هر دو باهم نمی توانند صفر باشند. اما یکی از آنها می تواند صفر بشود. یعنی یا A صفر باشد ، و یا B

نمودار هندسی معادله خطی دو مجهولی ، یک خط مستقیم است.

معادله خطی $Ax + By = C$ شکل استاندارد است.

توجه - از این به بعد منظور از خط ، یک خط مستقیم است. اگر منظرر غیر از خط مستقیم باشد ، صریحا گفته میشود.

یاد آوری – در هندسه خوانده ایم که یک خط با دو نقطه مشخص می شود. یعنی برای رسم یک معادله خطی دو مجهولی فقط دو جواب لازم است. برای پیدا کردن زوج های جواب های معادله خطی دو مجهولی ، می توانیم برای x یک عدد انتخاب کنیم و مقدار عددی مربوط به y را پیدا کنیم و یا برای y یک عدد انتخاب کنیم و مقدار عددی مربوط به x را پیدا کنیم. معمولا عدد صفر برای انتخاب ، عدد مناسبی است.

مثال ۳ –

معادله $۵x - ۲y = ۱۰$ را رسم کنید.

حل

برای رسم معادله بالا دو زوج جواب پیدا می کنیم. و سپس مکان هندسی آن دونقطه را روی صفحه مختصات مشخص می کنیم و نقاط مربوطه را به هم وصل می‌کنیم.

$$۵x - ۲y = ۱۰$$

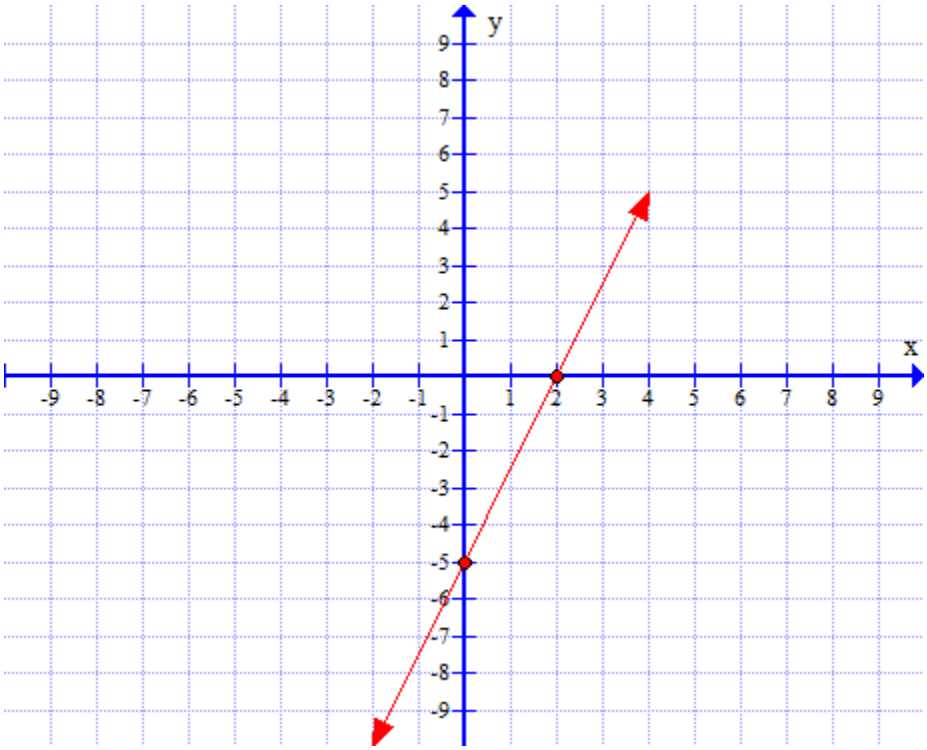
$$x = ۰ \quad \Rightarrow -۲y = ۱۰ \quad \Rightarrow y = -۵$$

پس مختصات یک نقطه روی این خط $(۰, -۵)$ است.

$$y = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۵x = ۱۰ \quad \Rightarrow \quad x = ۲$$

مختصات یک نقطه دیگر $(۲,۰)$ است. این دو نقطه را روی صفحه مشخص می کنیم و آن دو را با یک خط مستقیم به یک دیگر متصل می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا



پیدا کردن محل بر خورد نمودار با محور ها

برای پیدا کردن محل برخورد نمودار با محور x به y میدهیم صفر و معادله را بر حسب x حل می کنیم.

برای پیدا کردن محل برخورد نمودار با محور y به x میدهیم صفر و معادله را بر حسب y حل می کنیم.

$x - intercept$ محل بر خورد با محور x

$y - intercept$ محل برخورد با محور y

مثال ۴

محل بر خورد با محور ها را پیدا کنید و معادله $x + ۴y = -۴$ را رسم کنید.

$y = ۰$

$x + ۴y = -۴$

$x + ۴(۰) = -۴$

$x = -۴$

$x = ۰$

$x + ۴y = -۴$

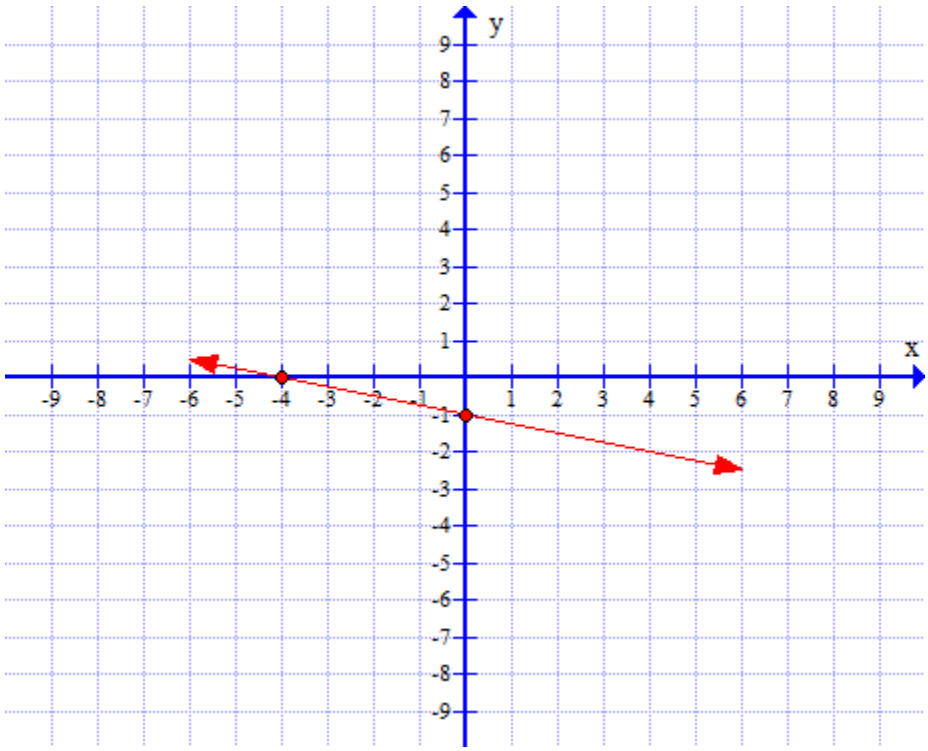
$۰ + ۴y = -۴$

$۴y = -۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$y = -۱$

پس خواهیم داشت $(۰,-۱)$ و $(-۴,۰)$



مثال ۵

محل بر خورد با محور ها را پیدا کنید و معادله $x = -۲y$ را راسم کنید.

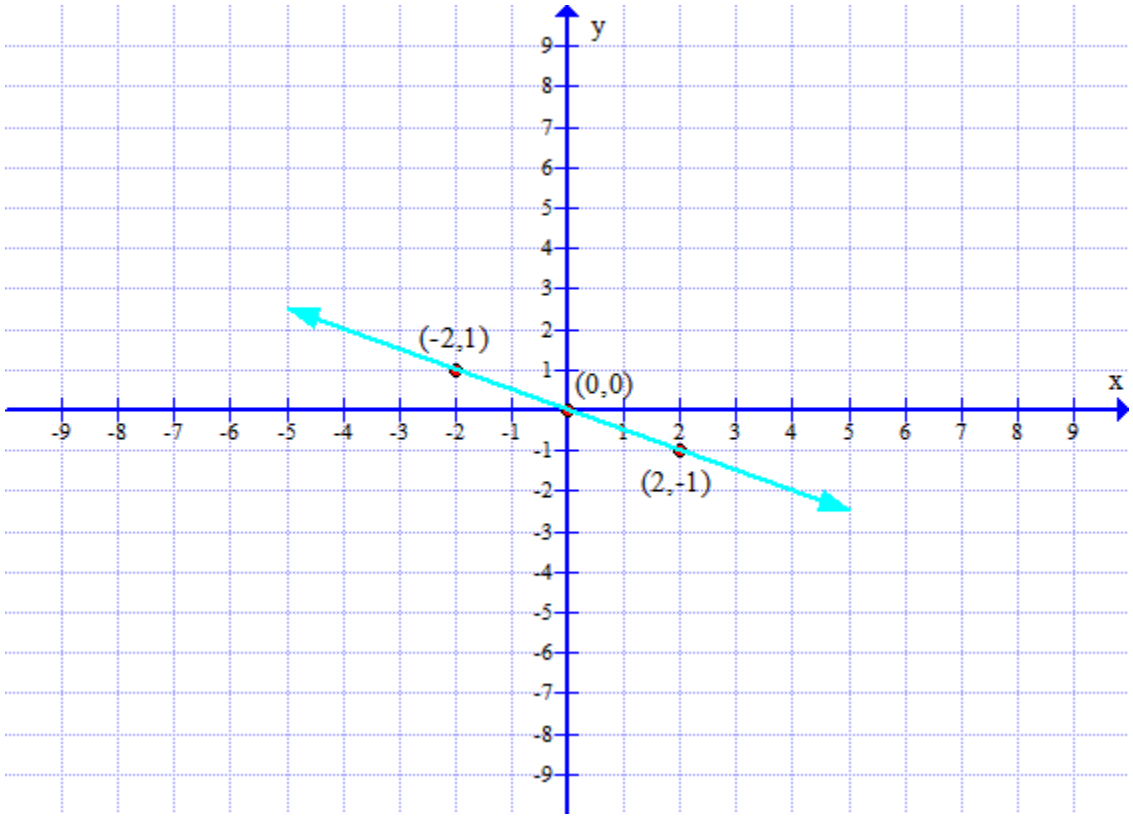
حل –

$x = ۰ \quad \Rightarrow \quad y = ۰$

$y = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = ۰$

محل بر خورد با محورهای y و x هردو صفر است .به عبارت دیگر وقتی که $x = ۰$ پس $y = ۰$ که زوج $(۰,۰)$ بدست می آوریم .همچنین وقتی که $y = ۰$ پس $x = ۰$ خواهد بود. که باز هم زوج $(۰,۰)$ خواهیم داشت. این هنگامی رخ میدهد که نمودار از مبدا مختصات می گذارد. و چون برای راسم یک خط حد اقل به دو نقطه احتیاج داریم، پس به یک زوج دیگر که معادله $x = -۲y$ را بر قرار کند احتیاج داریم. پس اگر $y = -۱$ باشد ، $x = ۲$ خواهد بود و اگر $y = ۱$ باشد، $x = -۲$ خواهد بود. حالا مختصات سه نقطه را داریم، پس می توانیم نموداررا راسم کنیم $(-۲,۱)$ $(۲,-۱)$ $(۰,۰)$.

دانلود از سایت ریاضی سرا



رسم خطوط عمودی وافقی Graphing Vertical and Horizontal Lines

معادله $x = C$ وقتی که C یک عدد حقیقی ثابت باشد ، معادله خطی دو مجهولی است. چون می توان آنرا به صورت $x + ۰\, y = C$ نوشت. نمودار این معادله یک خط عمودی است، همان طور که در مثال پایین نشان داده می شود.

مثال ۶

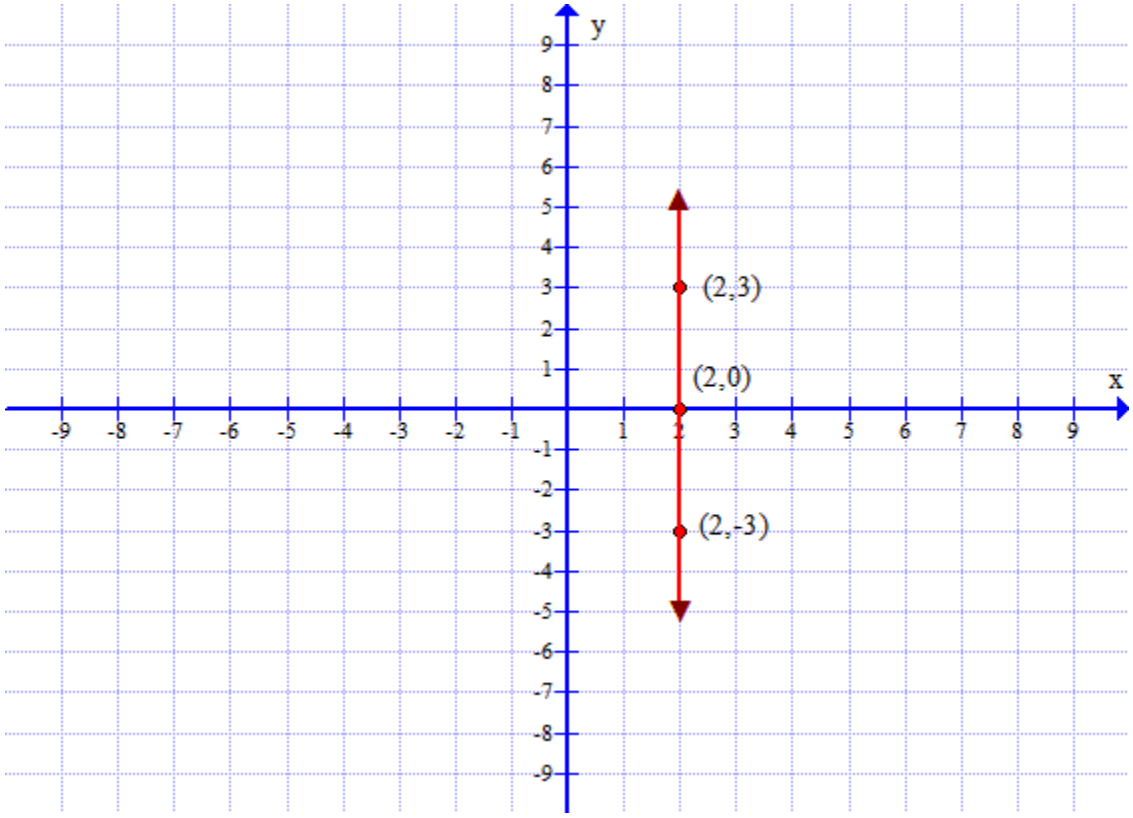
معادله $x = ۲$ را رسم کنید.

حل

معادله $x = ۲$ را می‌توان به صورت $x + ۰\, y = ۲$ نوشت. هر عددی که برای y انتخاب کنیم، مقدار x همیشه ۲ خواهد بود. هیچ عدد دیگری برای x معادله $x + ۰\, y = ۲$ را بر قرار نمی کند. هر زوجی که مختصات x آن عدد ۲ باشد ، یک جواب معادله $x + ۰\, y = ۲$ خواهد بود. زوج های $(۲, -۳)$ ، $(۲,۰)$ ، $(۲,۳)$ بکار می بریم و نمودار $x = ۲$ را رسم می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

x	y
۲	۳−
۲	۰
۲	۳



ملاحظه می کنید که نمودار یک خط قائم است و محل برخورد آن با محور x , ۲ است و نمودار با محور y تقاطع ندارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۷

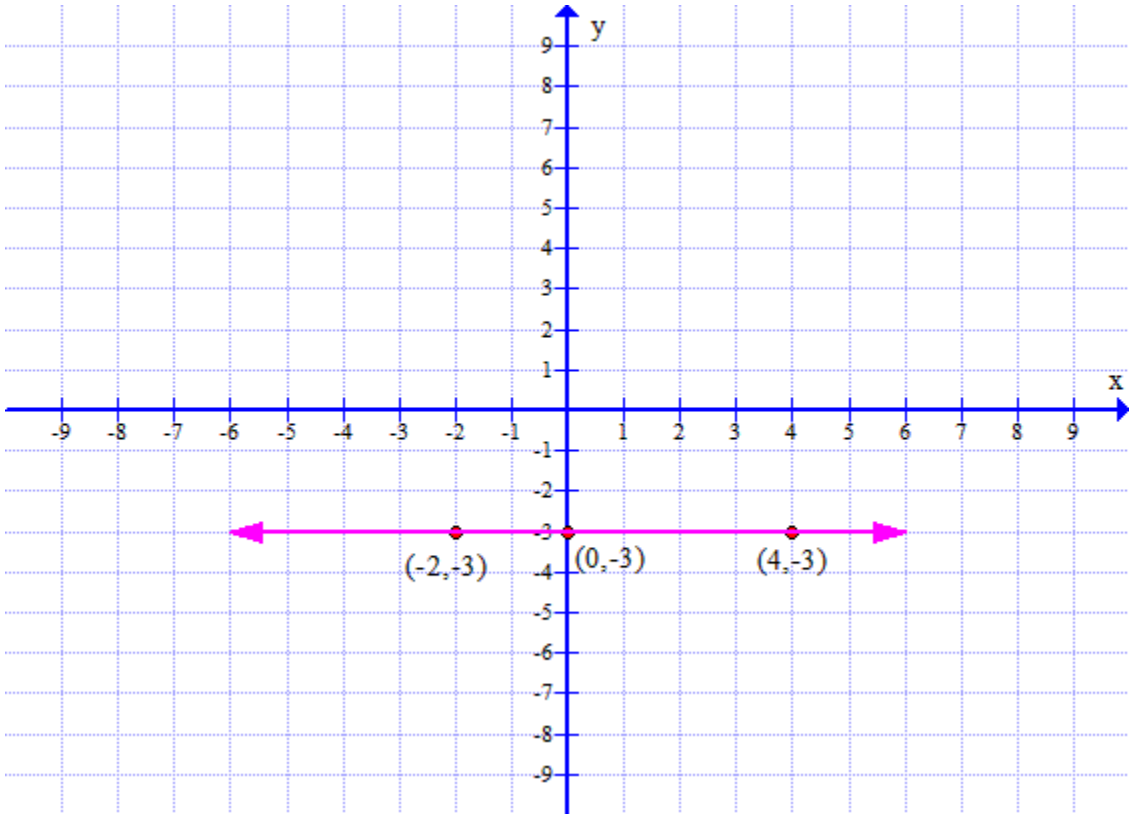
معادله $y = -۳$ را رسم کنید.

پاسخ

معادله $y = -۳$ را می توان به صورت $x + y = -۳$ ۰ نوشت .برای x هر عددی انتخاب کنیم ،

$y = -۳$ خواهد بود. اگر اعداد ۲ – ، ۰ ، ۴، را برای x انتخاب کنیم، مختصات y همان ۳ – است. پس زوج های $(-۲,-۳), (۰,-۳), (۴,-۳)$ خواهیم داشت.

x	y
۴	–۳
۰	–۳
–۲	–۳



ملاحظه می کنید که نمودار، یک خط افقی است و محور x را قطع نمی کند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

خلاصه - معادله خط قائم ، $x = C$ و معادله خط افقی ، $y = C$ است. در هر دو مورد C یک عدد حقیقی است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۱

۱ - مختصات نقاط روی صفحه مختصات را مشخص کنید.

نقطه A

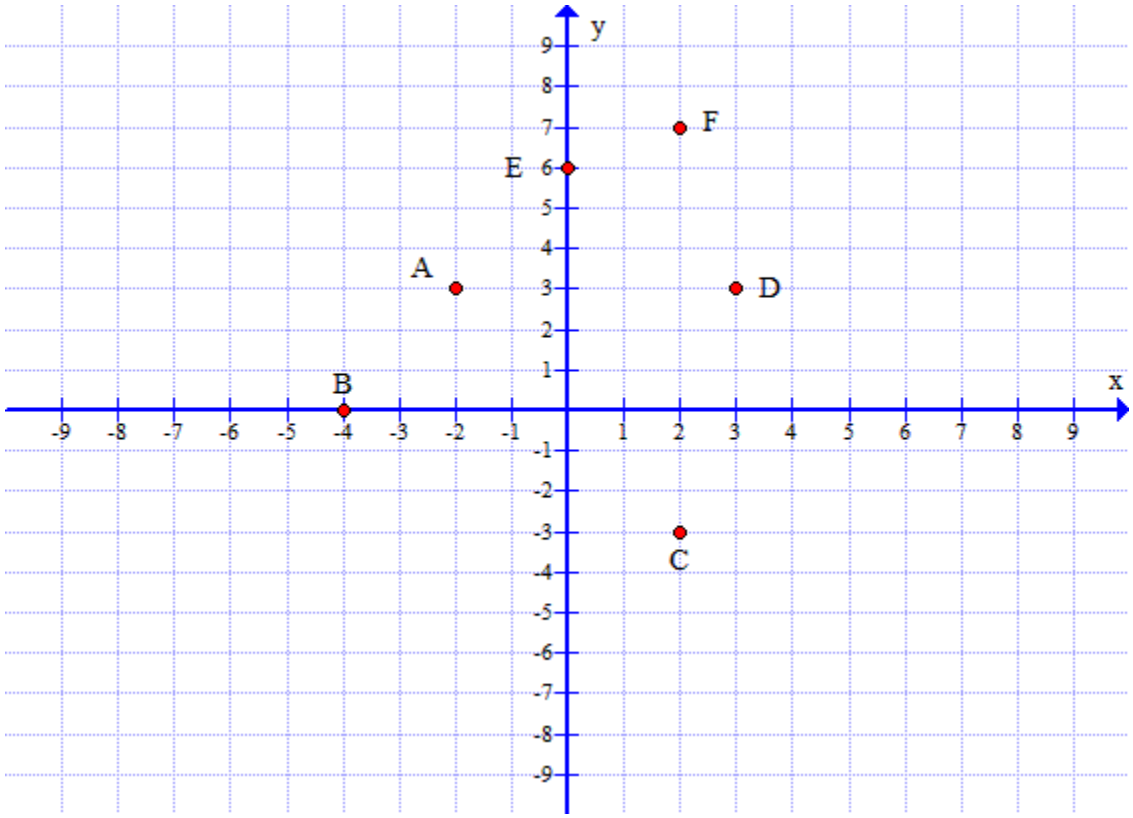
نقطه B

نقطه C

نقطه D

نقطه E

نقطه F



۲ – هر کدام از زوج های داده شده زیر را روی صفحه مختصات ترسیم کنید، و نیم صفحه یا محوری که آن نقطه قرار دارد مشخص کنید .

$A\left(-۳,۵\right)$ $B\left(-۵,۳\right)$ $C\left(۵/۵,-۴\right)$ $D\left(۰,۳.۵\right)$ $E\left(-۲,-۴\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار معادله های زیر را رسم کنید.

۳) $x - ۲y = ۴$

۴) $۳x + ۲y = ۶$

۵) $x = ۴$

۶) $x - ۳y = ۶$

۷) $y = ۵$

۸) $y = ۳x$

۹) $y = -۲$

۱۰) $۴x + ۵y = ۱۵$

۱۱) $۵y = x - ۱۰$

۱۲) $۲y - ۶ = ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳ – مدیران یک کار گاه تولید مبلمان متوجه شدند که برای ساخت یک نوع میز دو ساعت فقط صرف می شود و برای یک نوع صندلی سه ساعت وقت لازم است. ۱۵۰۰ ساعت برای تولید این دو نوع میز و صندلی وقت در اختیار این کار گاه است. معادله خطی $۲x + ۳y = ۱۵۰۰$ انگاره یا مدل ریاضی این موقعیت کار گاه است. در این معادله x تعداد میز های تولید شده و y تعداد صندلی های تولید شده را نشان می دهد.

الف –زوج مرتب (۰,) را برای معادله بالا کامل کنید و توضیح دهید که این زوج مرتب بیان گر چه تولیدی است.

ب –زوج مرتب (,۰) را برای معادله بالا کامل کنید و توضیح دهید که این زوج مرتب بیان گر چه تولیدی است.

ج –اگر ۵۰ میز تولید شده باشد، معین کنید که در این صورت کار گاه حد اکثر چند صندلی می تواند تولید کند.

۱۴ – هر یک از مجموعه ها را روی صفحه مختصات رسم کنید و در باره آن توضیح دهید.

$a)\quad \{(x,y)|\ x \geq ۰\}$

$b)\quad \{(x,y)|\ y = ۱\}$

$c)\quad \{(x,y)|\ -۱ < y < ۱\}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۷.۱

۱ - مختصات نقاط روی صفحه مختصات را مشخص کنید.

نقطه A

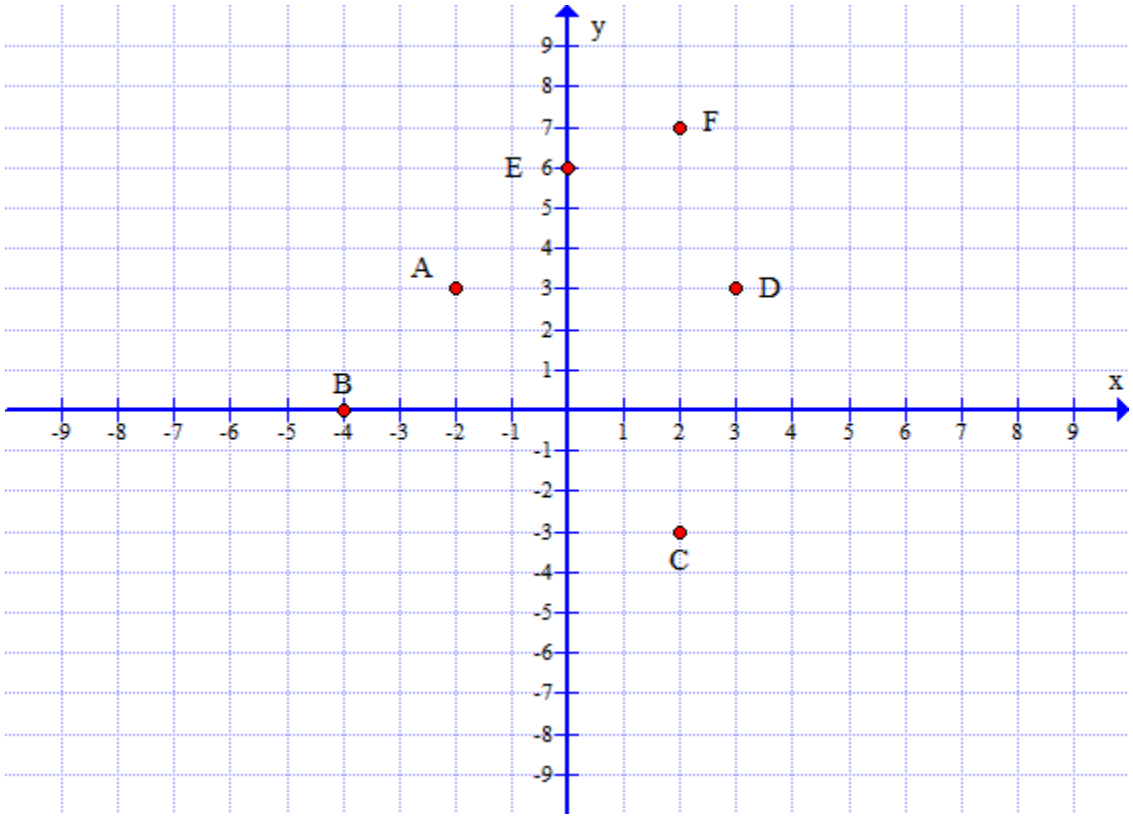
نقطه B

نقطه C

نقطه D

نقطه E

نقطه F



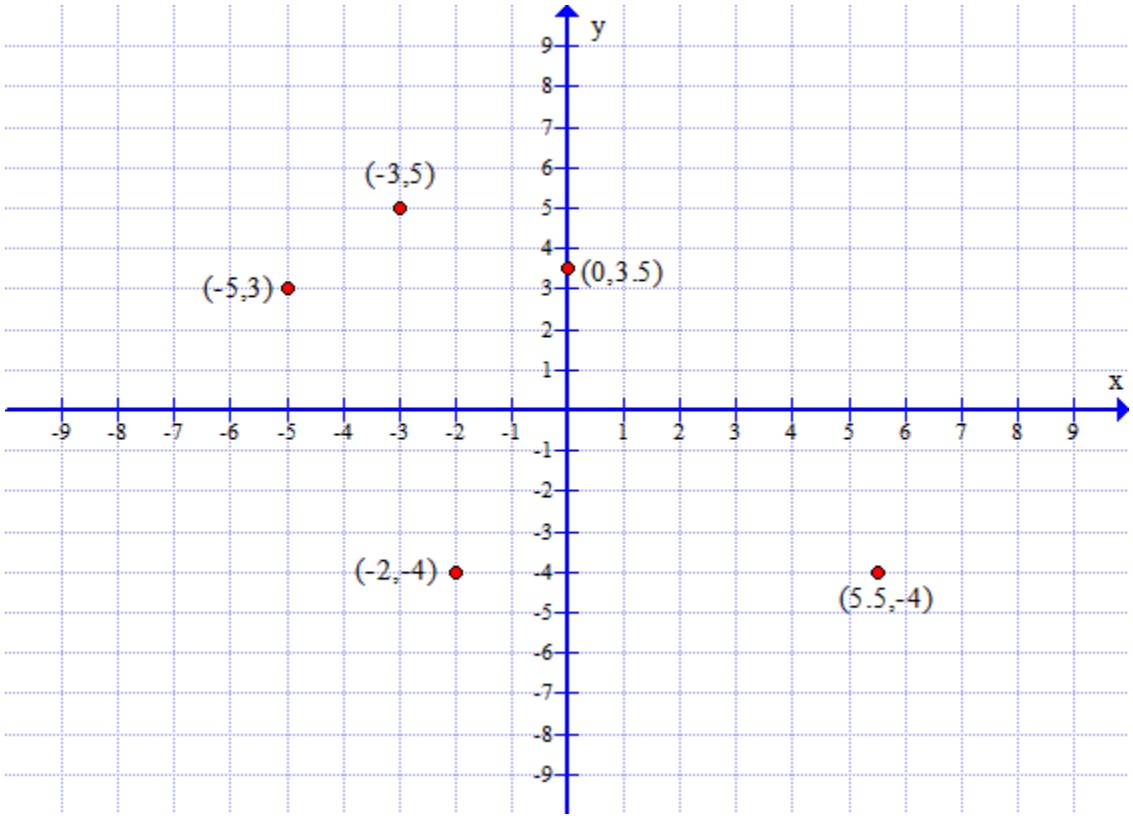
پاسخ

$A\left(-۲,۳\right)$ $B\left(-۴,۰\right)$ $C\left(۲,-۳\right)$ $D\left(۳,۳\right)$ $E\left(۰,۶\right)$ $F\left(۲,۷\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲ – هر کدام از زوج های داده شده زیر را روی صفحه مختصات ترسیم کنید، و نیم صفحه یا محوری که آن نقطه قرار دارد مشخص کنید .

$A\left(-۳,۵\right)$ $B\left(-۵,۳\right)$ $C\left(۵/۵,-۴\right)$ $D\left(۰,۳.۵\right)$ $E\left(-۲,-۴\right)$



A ربع صفحه ۲

B ربع صفحه ۲

C ربع صفحه ۴

D روی محور y

E ربع صفحه ۳

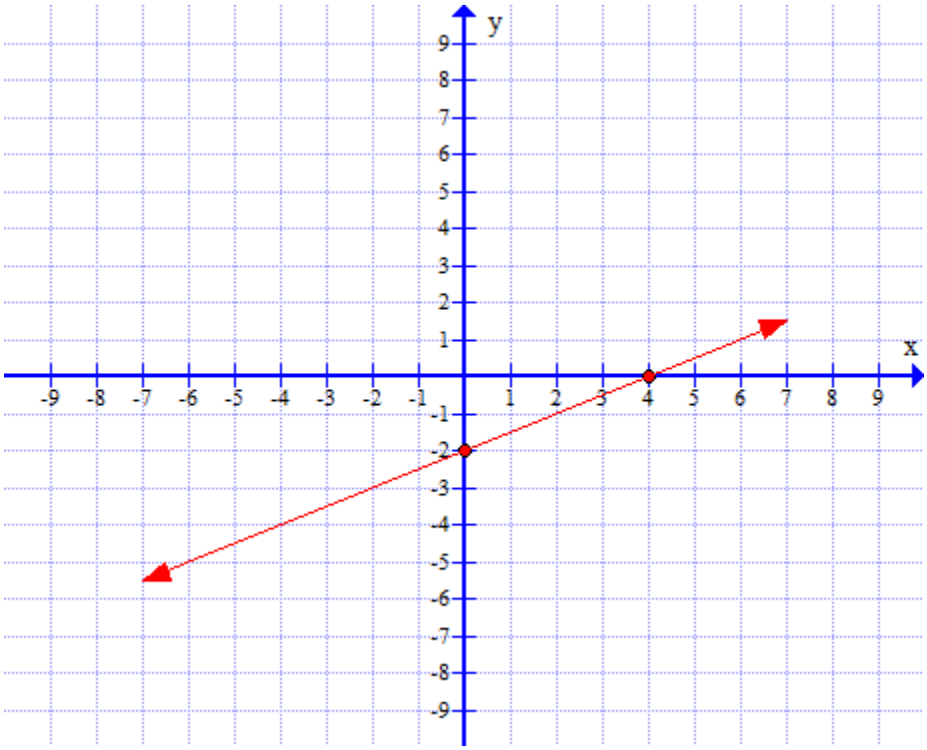
دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار معادله های زیر را رسم کنید.

۳) $x - ۲y = ۴$

$x = ۰ \Rightarrow y = -۲$ و $y = ۰ \Rightarrow x = ۴$

$(۰,-۲)$ و $(۴,۰)$

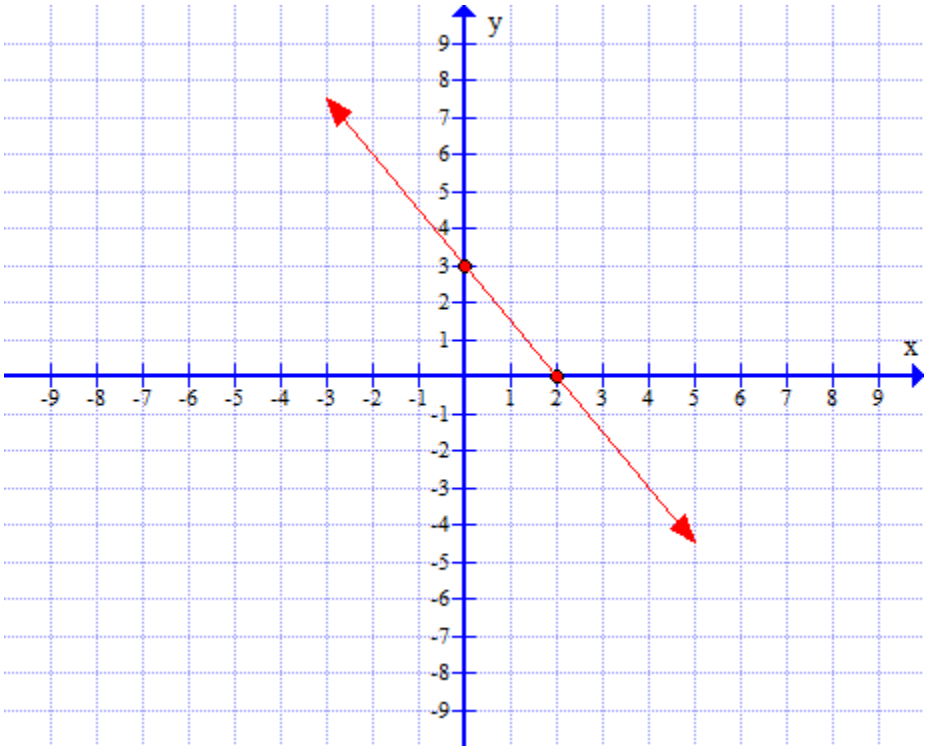


دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $۳x + ۲y = ۶$

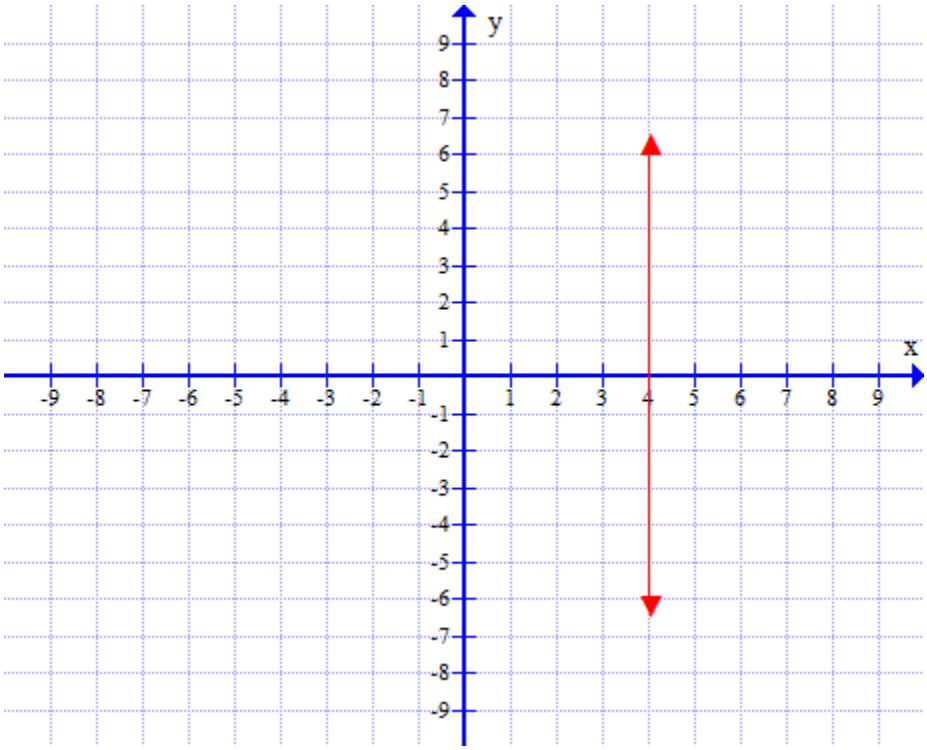
$x = ۰ \Rightarrow y = ۳$ و $y = ۰ \Rightarrow x = ۲$

$(۰,۳)$ و $(۲,۰)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $x = ۴$

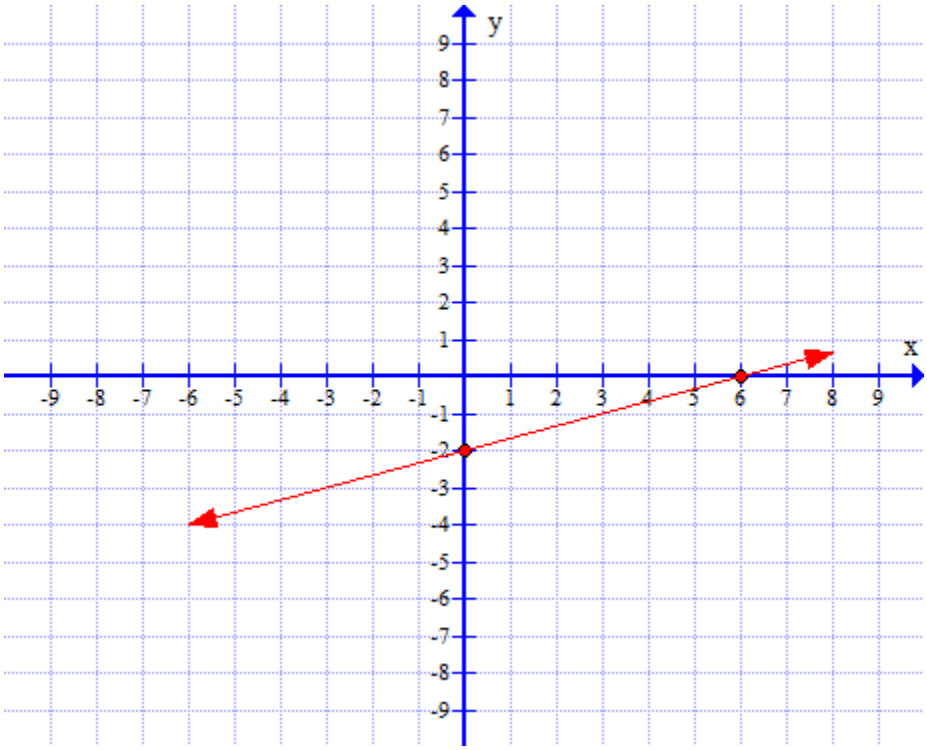


دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $x - ۳y = ۶$

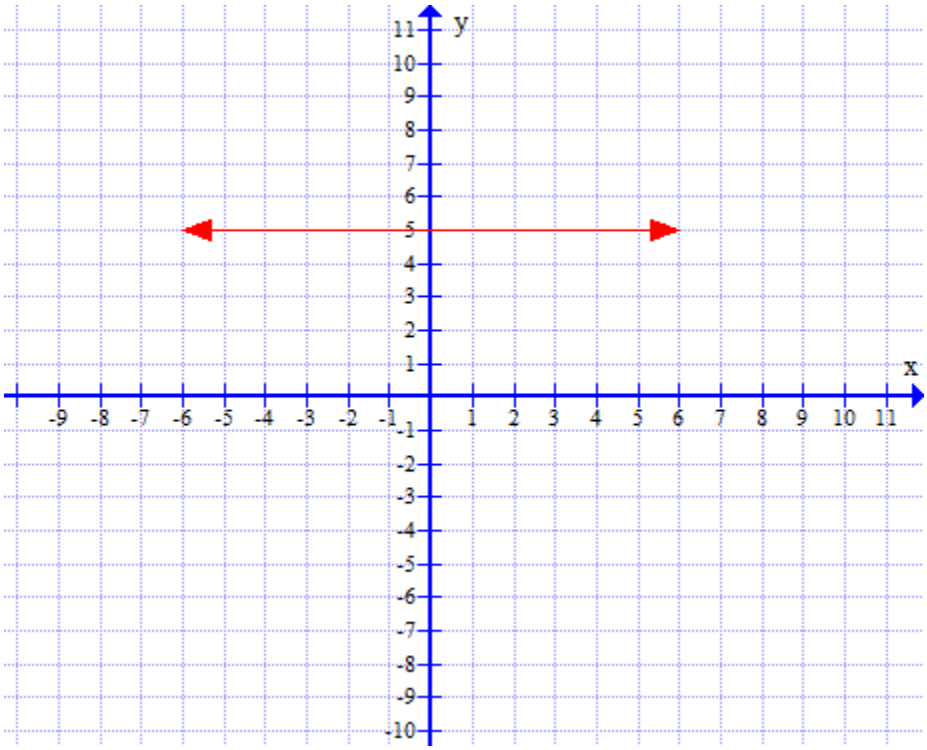
$x = ۰ \Rightarrow y = -۲$ $\quad$ $y = ۰ \Rightarrow x = ۶$

$(۰, -۲)$ و $(۶, ۰)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $y = ۵$

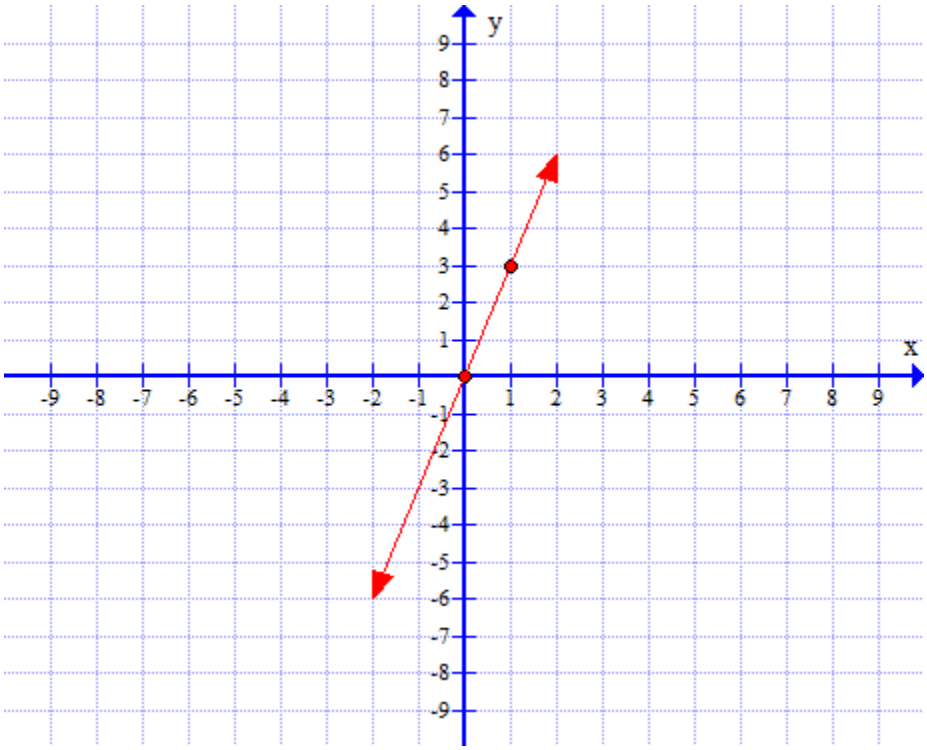


دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $y = ۳x$

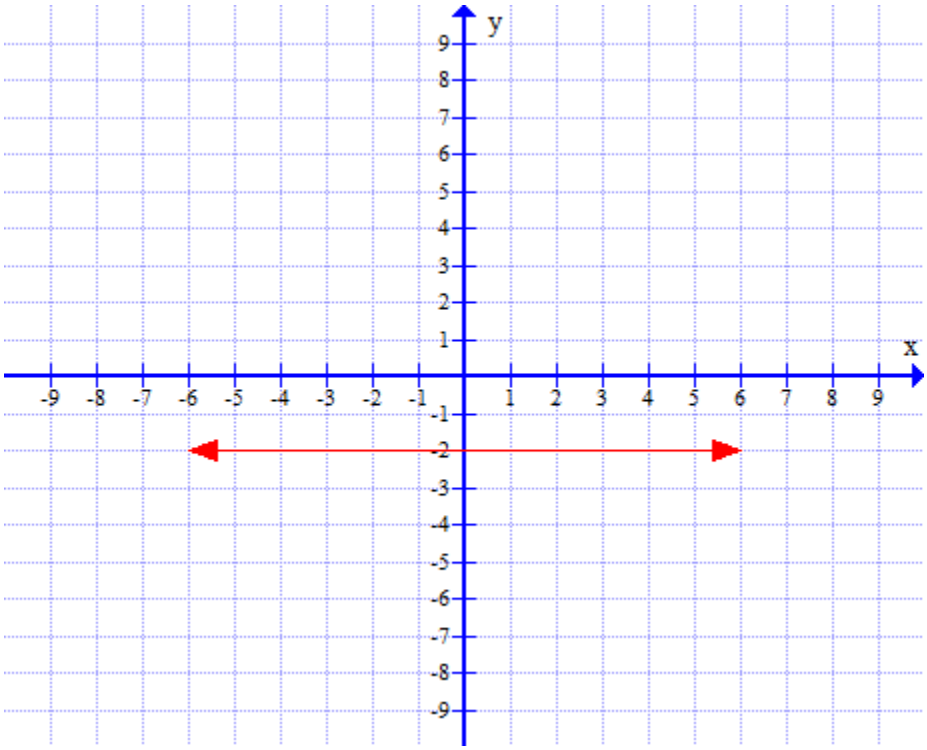
$x = ۰ \Rightarrow y = ۰$ $\quad$ $x = ۱ \Rightarrow y = ۳$

$(۰,۰)$ و $(۱,۳)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $y = -۲$

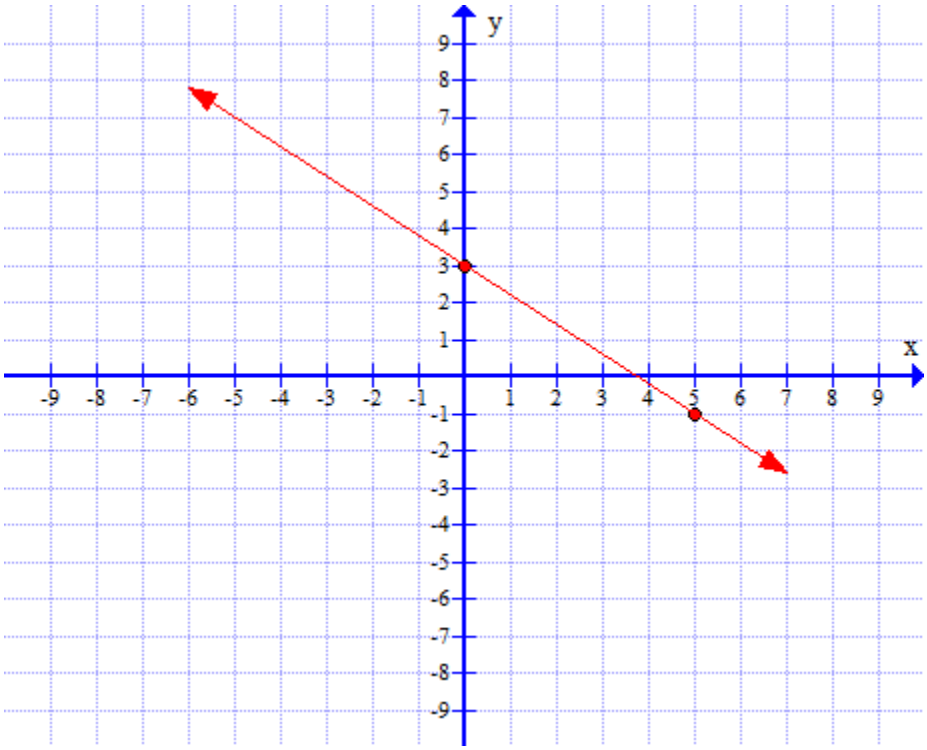


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $۴x + ۵y = ۱۵$

$x = ۰ \Rightarrow \quad y = ۳ \qquad x = ۵ \quad \Rightarrow \quad y = -۱$

$(۰, ۳)$ و $(۵, -۱)$

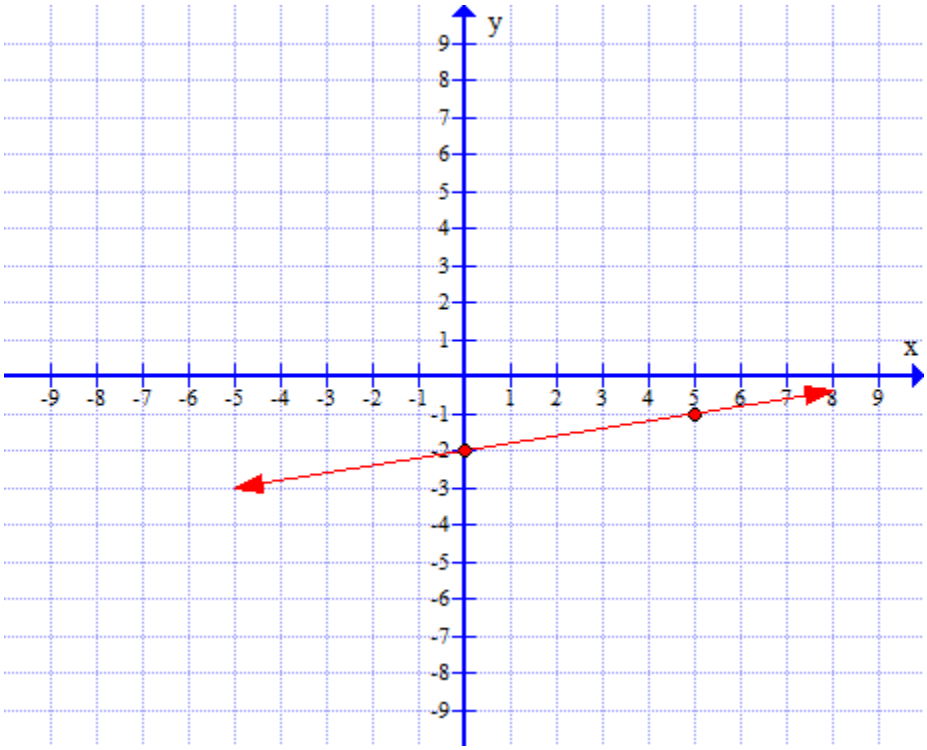


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $۵y = x - ۱۰$

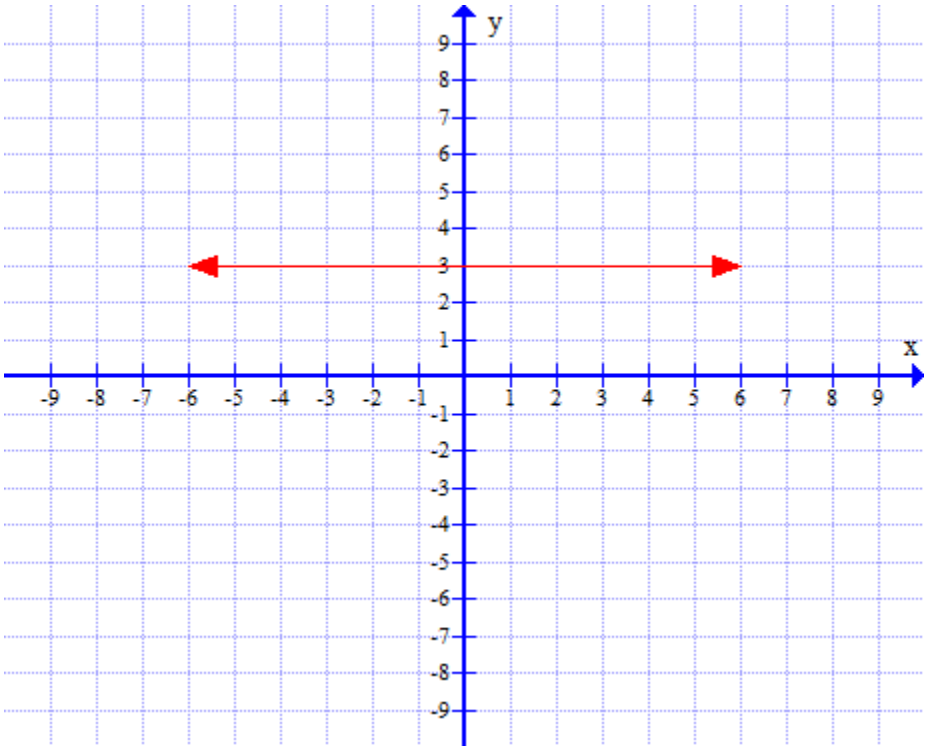
$x = ۰ \implies y = -۲ \qquad x = ۵ \implies y = -۱$

$(۰, -۲)$ و $(۵, -۱)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲) $۲y - ۶ = ۰$



۱۳ – مدیران یک کار گاه تولید مبلمان متوجه شدند که برای ساخت یک نوع میز دو ساعت فقط صرف می شود و برای یک نوع صندلی سه ساعت وقت لازم است. ۱۵۰۰ ساعت برای تولید این دو نوع میز و صندلی وقت در اختیار این کار گاه است. معادله خطی $۲x + ۳y = ۱۵۰۰$ انگاره یا مدل ریاضی این موقعیت کار گاه است. در این معادله x تعداد میز های تولید شده و y تعداد صندلی های تولید شده را نشان می دهد.

الف –زوج مرتب (۰,) را برای معادله بالا کامل کنید و توضیح دهید که این زوج مرتب بیان گر چه تولیدی است.

ب –زوج مرتب (,۰) را برای معادله بالا کامل کنید و توضیح دهید که این زوج مرتب بیان گر چه تولیدی است.

ج –اگر ۵۰ میز تولید شده باشد، معین کنید که در این صورت کار گاه حد اکثر چند صندلی می تواند تولید کند.

۱۳ – مدیران یک کار گاه تولید مبلمان متوجه شدند که برای ساخت یک نوع میز دو ساعت فقط صرف می شود و برای یک نوع صندلی سه ساعت وقت لازم است. ۱۵۰۰ ساعت برای تولید این دو نوع میز و صندلی وقت در اختیار این

دانلود از سایت ریاضی سرا

کار گاه است. معادله خطی $۲x + ۳y = ۱۵\,۰۰$ انگاره یا مدل ریاضی این موقعیت کار گاه است. در این معادله x تعداد میز های تولید شده و y تعداد صندلی های تولید شده را نشان می دهد.

الف –زوج مرتب $(۰,)$ را برای معادله بالا کامل کنید و توضیح دهید که این زوج مرتب بیان گر چه تولیدی است.

ب –زوج مرتب $(,۰)$ را برای معادله بالا کامل کنید و توضیح دهید که این زوج مرتب بیان گر چه تولیدی است.

ج –اگر ۵۰ میز تولید شده باشد، معین کنید که در این صورت کار گاه حد اکثر چند صندلی می تواند تولید کند.

پاسخ

الف –بجای x در معادله می گذاریم صفر و معادله را حل می کنیم.

$$۲(۰) + ۳y = ۱۵\,۰۰$$

$$۳y = ۱۵\,۰۰$$

$$y = \frac{۱۵\,۰۰}{۳} = ۵\,۰۰$$

پس $(۰, ۵\,۰۰)$خواهیم داشت. این یعنی ۵۰۰ صندلی تولید میشود ولی هیچ میزی تولید نمی شود

ب -در معادله بجای y می گذاریم صفر

$$۲x + ۳(۰) = ۱۵\,۰۰$$

$$۲x = ۱۵\,۰۰$$

$$x = \frac{۱۵\,۰۰}{۲} = ۷۵\,۰$$

پس ۷۵۰ میز تولید می شود ولی هیچ صندلی

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –بجای x می گذاریم ۵۰

$$۲(۵۰) + ۳y = ۱۵۰۰$$

$$۱۰۰ + ۳y = ۱۵۰۰$$

$$۳y = ۱۴۰۰$$

$$y = \frac{۱۴۰۰}{۳} = ۴۶۶/۶۶$$

پس حد اکثر ۴۶۶ صندلی می توان تولید کرد.

۱۴ – هر یک از مجموعه ها را روی صفحه مختصات رسم کنید و در باره آن توضیح دهید.

$a)\quad \{(x,y)|\ x \geq ۰\}$

$b)\quad \{(x,y)|\ y = ۱\}$

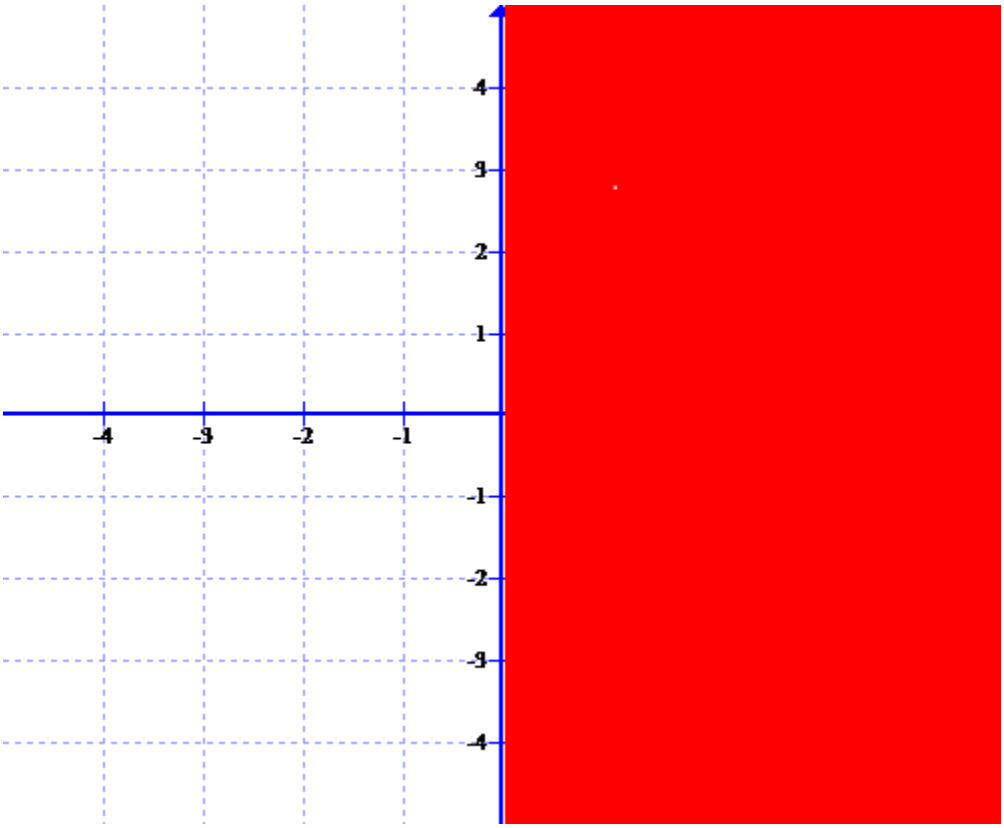
$c)\quad \{(x,y)| -۱ < y < ۱\}$

پاسخ

$a)$

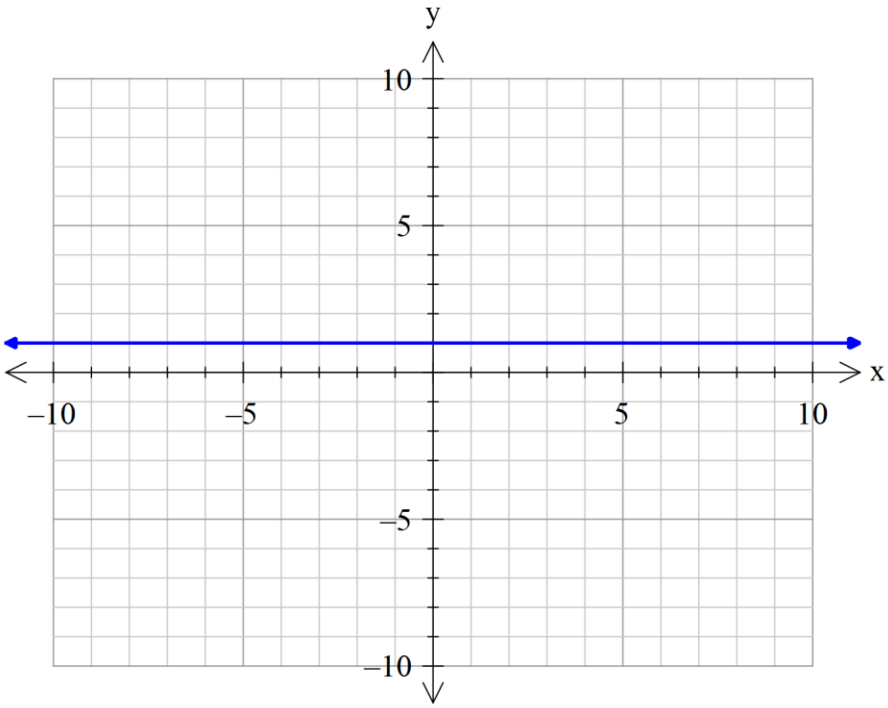
نقاطی که مختصات x آنها صفر و یا مثبت باشد، روی محور y و یا سمت راست آن قرار دارند.

دانلود از سایت ریاضی سرا



$b)$

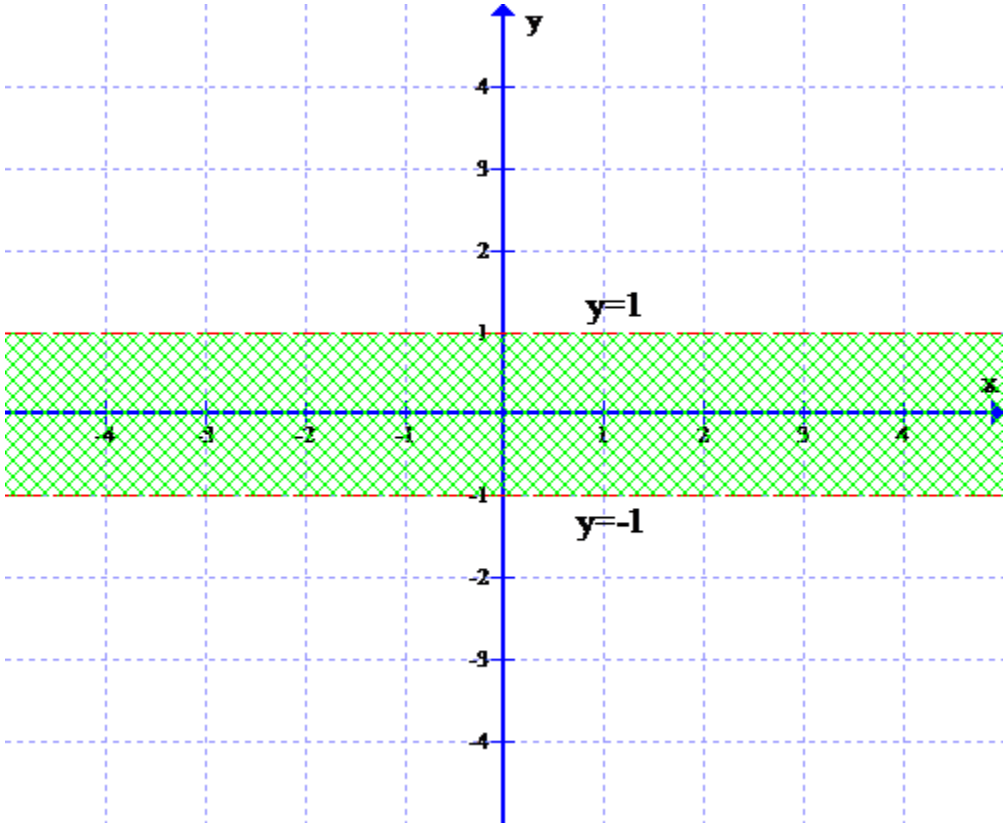
نقاطی که مختصات y آنها یک است، یک خط افقی است یک واحد بالای محور x



دانلود از سایت ریاضی سرا

$c)$

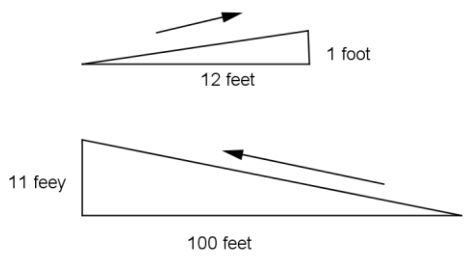
بخش داده شده شامل نقاطی روی صفحه مختصات است که مختصات y آنها بین ۱ و ۱− است. بنا بر این آن بخش شامل کلیه نقاطی است که بین خطوط $y = -۱$ و $y = ۱$ هستند، اما روی آن خطوط نیستند. لذا آن خطوط را خط چین نمایش می دهیم ، که تاکید کنیم آن نقاط روی آن خطوط جای ندارند.



دانلود از سایت ریاضی سرا

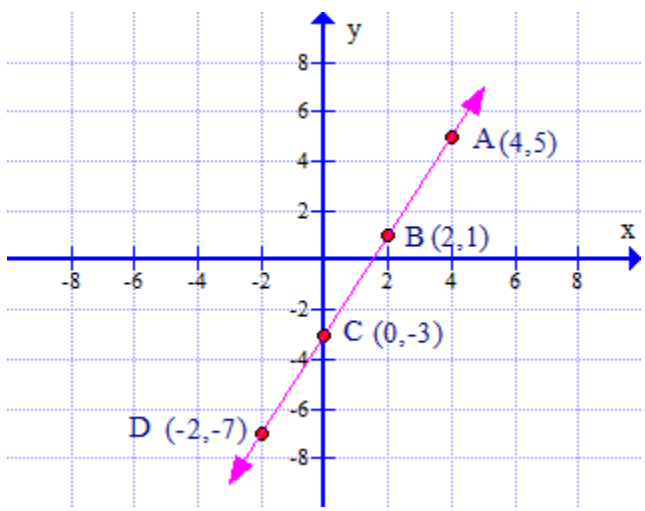
۷.۲ – شیب یک خط The Slope of a Line

تا بحال متوجه شده اید که خطوط مختلف شیب های متفاوتی دارند. در بسیاری از مورد برای ما مهم است که بتوانیم کجی یا شیب خطوط را اندازه گیری کنیم و یا با هم مقایسه کنیم. مثلا وقتی که یک صندلی چرخ دار روی یک سطح شیب دار با شیب $\frac{۱}{۱۲}$ حرکت می کند به این معنی است که سطح شیب دار به ازای هر ۱۲ فوت افقی ، یک فوت به طرف بالا می رود. یک جاده با شیب ۱۱% یعنی به ازائ هر ۱۰۰ فوت افقی ، جاده ۱۱ فوت به طرف بالا میرود.



شیب یک خط عبارت است از نسبت تغییر عمودی به تغییر افقی که با حرف m نشان می دهیم.

پیدا کردن شیب بین دو نقطه – فرض کنید می خواهیم شیب خط زیر را پیدا کنیم.



اختلاف عمودی بین هر دو نقطه روی خط ۴ است و اختلاف افقی بین همان دو نقطه ۲ است

مثلا دو نقطه B و A را در نظر بگیرید. ۴ = ۱ − ۵ و ۲ = ۲ − ۴

دانلود از سایت ریاضی سرا

هر دو نقطه دیگری را هم در نظر بگیرید به همین نتیجه بالا می رسید. پس

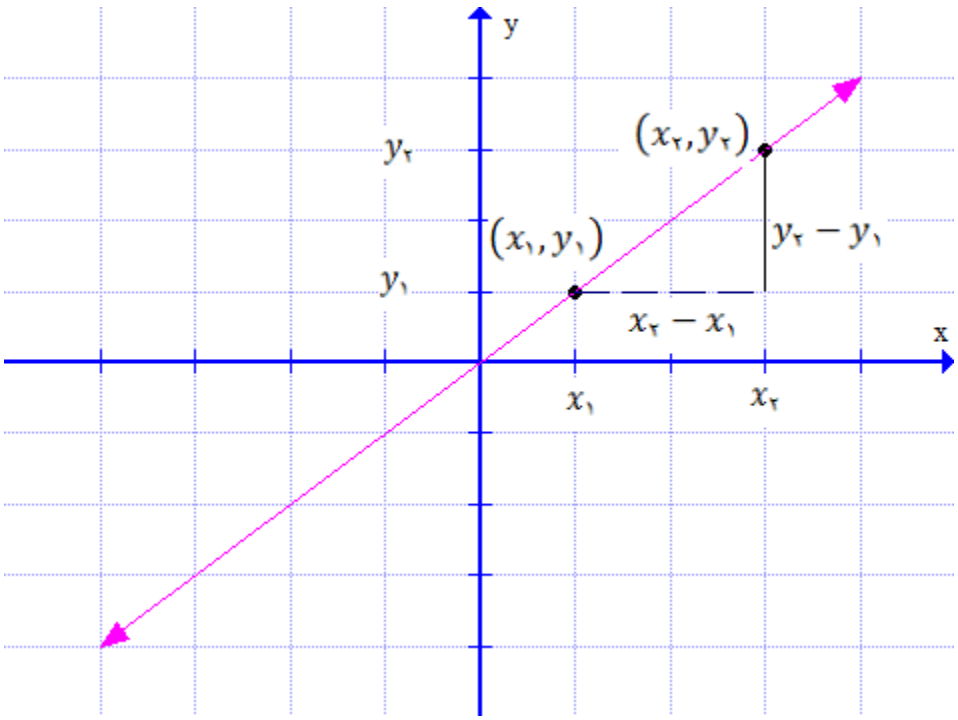
$$m = \frac{\text{تغییر عمودی (تغییر } y \text{ ها)}}{\text{تغییر افقی (تغییر } x \text{ ها)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

توجه دارید که شیب ، مقدار تغییر بین دو نقطه است. شیب ۲ و یا $\frac{۲}{۱}$ یعنی بین دو نقطه روی خط ، مقدار تغییر عبارت است از ۲ واحد تغییر عمودی در هر یک واحد تغییر افقی .نماد Δ خوانده می شود دلتا.

بطور کلی اگر یک خط از دو نقطه به مختصات $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ عبور کند ، تغییر عمودی بین این دو نقطه عبارت است از اختلاف بین مختصات y ها یعنی $y_۲ - y_۱$ و تغییر افقی بین این دو نقطه عبارت است از اختلاف بین مختصات x ها یعنی $x_۲ - x_۱$

شیب یک خط –اگر یک خط از دو نقطه $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ عبور کند، شیب آن خط عبارت است از

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} \qquad x_۲ \neq x_۱$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

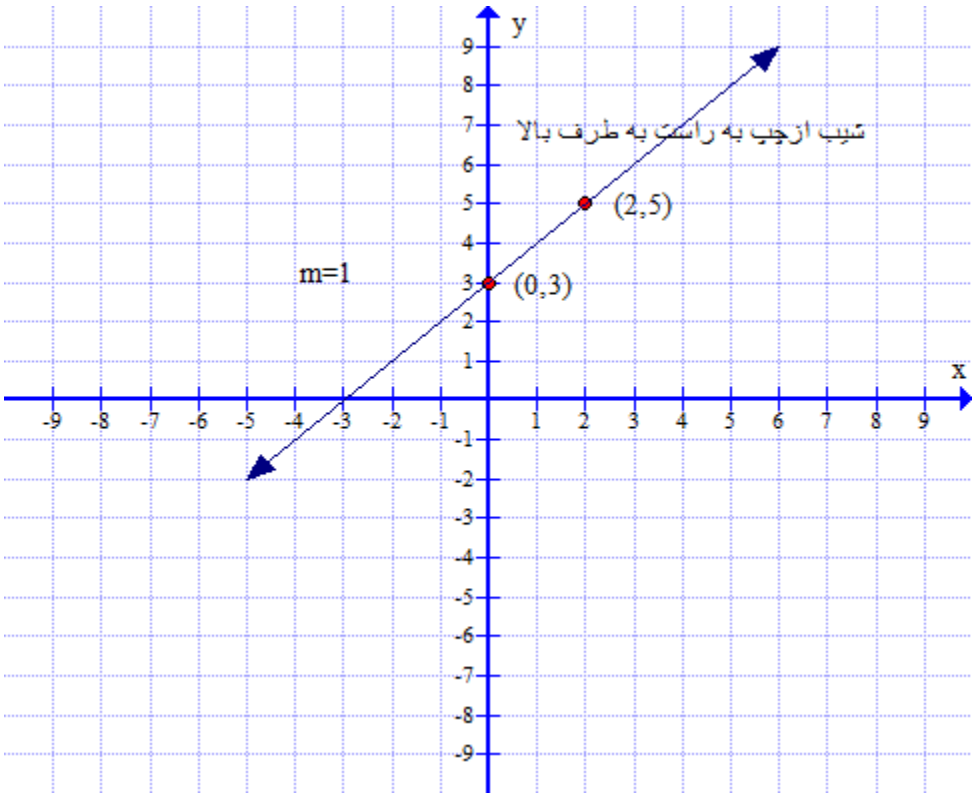
مثال ۱ – شیب خطی را که شامل نقاط $(۰,۳)$ و $(۲,۵)$ است پیدا کنید و خط را رسم نمائید.

پاسخ

فرمول شیب را بکار می بریم. مهم نیست کدام نقطه را $(x_۱,y_۱)$ بنامیم و کدام نقطه را $(x_۲,y_۲)$

فرض می کنیم $(x_۱,y_۱)=(۰,۳)$ و $(x_۲,y_۲)=(۲,۵)$ باشد.

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵-۳}{۲-۰}=\frac{۲}{۲}=۱$$



ملاحظه می کنید که در مثال بالا شیب مثبت است و خط از چپ به راست به طرف بالا می رود و یا به عبارت دیگر صعود می کند.

مثال ۲

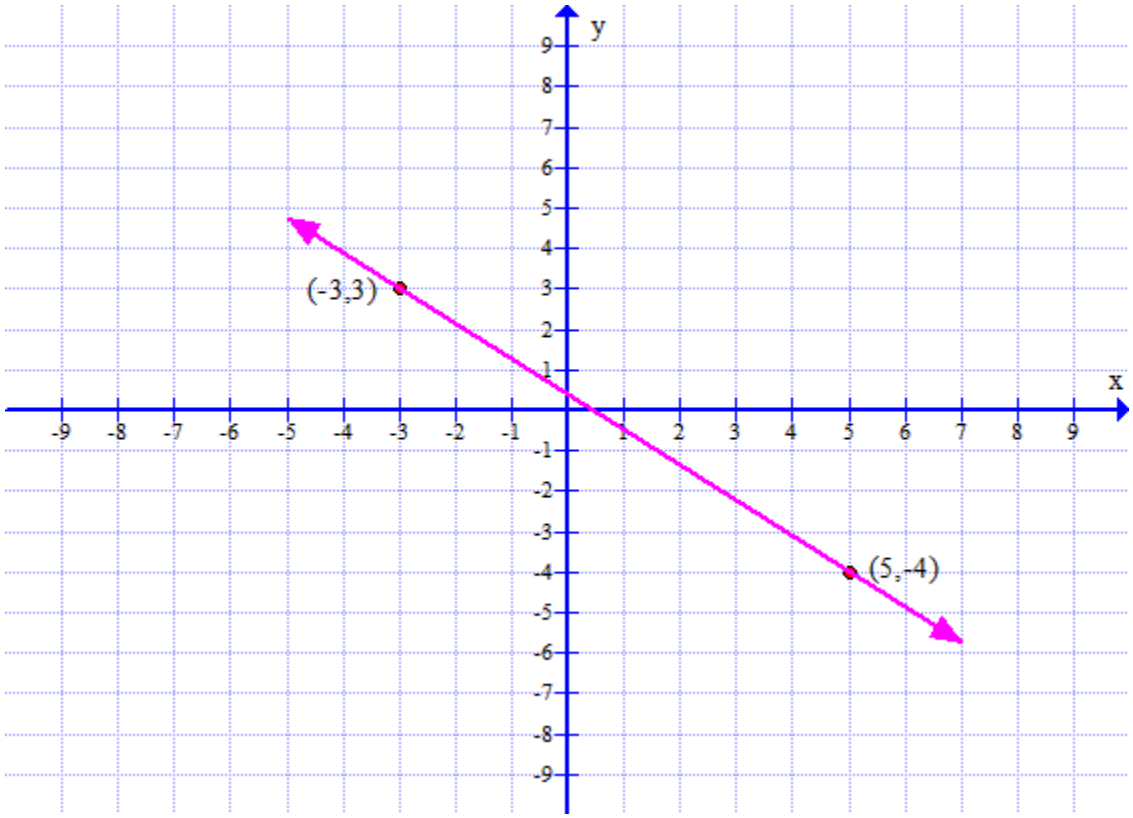
شیب خطی را که شامل نقاط $(۵,-۴)$ و $(-۳,۳)$ است پیدا کنید ، خط را رسم کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

فرض می کنیم که $(x_۱, y_۱) = (۵, -۴)$ و $(x_۲, y_۲) = (-۳, ۳)$ است.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۳ - (-۴)}{-۳ - ۵} = \frac{۷}{-۸} = -\frac{۷}{۸}$$



ملاحظه می کنید که در این مثال شیب خط منفی است و خطی که از نقاط $(۵, -۴)$ و $(-۳, ۳)$ می گذارد از چپ به راست به طرف پایین حرکت می کند، و یا به عبارت دیگر نزول می کند.

صعود کردن Increase

نزول کردن Decrease

پیدا کردن شیب یک خط از یک معادله Finding Slope From an Equation

همان طور که دیدیم، برای بدست آوردن شیب یک خط ، از دو نقطه روی آن خط استفاده می کنیم. بنا بر این اگر معادله یک خط را داشته باشیم، می توانیم شیب آن خط را پیدا کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳

شیب خط $y = ۳x + ۲$ را پیدا کنید.

پاسخ

برای پیدا کردن شیب خط بالا دو نقطه لازم داریم.

اگر $x = ۱$

$y = ۳(۱) + ۲$

$y = ۳ + ۲$

$y = ۵$

اگر $x = ۰$

$y = ۳x + ۲$

$y = ۳(۰) + ۲$

$y = ۲$

پس فرض می کنیم، $(x_۱, y_۱) = (۰, ۲)$ و $(x_۲, y_۲) = (۱, ۵)$ باشد .پس شیب طبق عملیات زیر بدست می آوریم.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۵ - ۲}{۱ - ۰} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

اگر نتایج این مثال را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم ، به یک الگو ی جالب بر خورد می کنیم. این الگو چیست؟

شیب $y = ۳x + ۲$ همان طور که در بالا پیدا کردیم ۳ است. یعنی ضریب x

محل تقاطع خط با محور y همان عدد ثابت ۲ در معادله است.

وقتی که یک معادله خطی به صورت $y = mx + b$ نوشته شود، m شیب خط است و b محل برخورد خط با محور y است.

پس شکل $y = mx + b$ را **شکل شیب - برخورد گاه** می نامند. **Slope-Intercept Form**

شکل شیب - تقاطع

وقتی که معادله خطی دو مجهولی به صورت $y = mx + b$ نوشته شود، m شیب خط و b محل برخورد خط با محور y است.

مثال ۴

شیب و محل تقاطع خط $۳x - ۴y = ۴$ با محور y را پیدا کنید.

پاسخ

دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله را به شکل **شیب - تقاطع** می نویسیم. برای این کار y را بر حسب x حل می کنیم. و یا به عبارت دیگر معادله را برای y حل می کنیم.

$$۳x - ۴y = ۴$$

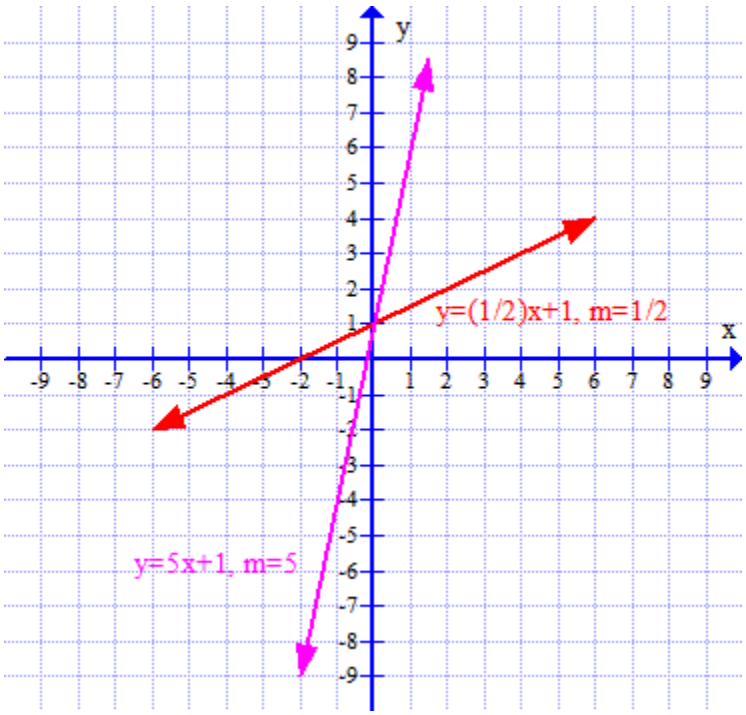
$$-۴y = -۳x + ۴$$

$$\frac{-۴y}{-۴} = \frac{-۳x}{-۴} + \frac{۴}{-۴}$$

$$y = \frac{۳}{۴}x - ۱$$

ضریب x که $\frac{۳}{۴}$ است ، شیب خط است و عدد ثابت -۱ محل تقاطع خط با محور y است.

در شکل زیر دو خط $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)x + ۱$ و $y = ۵x + ۱$ روی یک صفحه مختصات ترسیم شده اند. اولی با شیب $\frac{۱}{۲}$ و دومی با شیب ۵



ملاحظه می کنید که خط با شیب ۵ دارای شیب تند تری نسبت به خط دیگر دارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نتیجه یک خط با شیب مثبت m, هر چه m افزایش پیدا کند، شیب خط هم تند تر می شود.

پیدا کردن شیب خطوط افقی و عمودی Finding Slopes of Horizontal and Vertical Lines

مثال ۵

شیب خط $x = -۵$ را پیدا کیند.

پاسخ

بخاطر دارید که نمودار $x = -۵$ یک خط عمودی است و محل تقاطع آن با محور x ، (-۵) است. برای پیدا کردن شیب این خط باید مختصات دو نقطه روی این خط را پیدا کنیم. می دانید که مختصات x هر نقطه ای روی این خط عمودی باید (-۵) باشد. پس فرض می کنیم $(x_۱, y_۱) = (-۵,۰)$ و $(x_۲, y_۲) = (-۵, ۴)$ باشد.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴ - ۰}{-۵ - (-۵)} = \frac{۴}{-۵ + ۵} = \frac{۴}{۰}$$

و چون $\frac{۴}{۰}$ تعریف نشدنی است، پس می گویم شیب خط $x = -۵$ تعریف نشدنی است. یعنی نمی توانیم عدی برای شیب یک خط عمودی پیدا کنیم.

مثال ۶

شیب خط $y = ۲$ را پیدا کنید.

پاسخ

می دانید که نمودار $y = ۲$ یک خط افقی است. محل تقاطع این خط با محور y, عدد (۲) می بشتد. یعنی هر نقطه ای روی این خط مختصات y باید ۲ باشد. پس فرض می کنیم $(x_۱, y_۱) = (۰, ۲)$ و $(x_۲, y_۲) = (۱, ۲)$

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲ - ۲}{۱ - ۰} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

پس شیب خط افقی $y = ۲$ صفر است.

خلاصه –شیب هر خط عمودی تعریف نشدنی است. یعنی نمی توان عددی برای شیب یک خط عمودی پیدا کرد.

شیب هر خط افقی صفر است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

خطوط موازی

می دانیم خطوط موازی ،خطوط متفاوتی هستند با شیب یکسان. پس

دوخط نا قائم موازی هستند ، اگر شیب آنها مساوی باشد.

نا قائم Non-vertical

نا قائم یعنی قائم نباشد. یا عمودی نباشد.

خطوط عمود بر هم

می دانیم که اگر دو خط یک دیگر را طوری قطع کنند که از تلاقی آنها زوایای قائمه تشکیل شود، آن دو خط عمود بر هم هستند. فرض کنید یک خط دارای شیب $\frac{a}{b}$ باشد. اگر این خط را ۹۰ درجه بچرخانیم، a و b جا بجا می شوند ، ولی حالا a منفی می شود.

$$\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-۱$$

دو خط نا قائم عمود بر هم هستند، اگر حاصل ضرب شیب های آنها مساوی ۱− باشد.

اثبات

به شکل زیر توجه کنید. فرض کنید خطی که شامل نقاط Q و P است ۹۰ درجه خلاف حرکت عقربه ساعت می چرخانیم. مختصات این دو نقطه عبارتند از $Q(۱,۱)$ و $P(۴,۴)$

پس از چرخاندن خط ، نقاط Q' و P' خواهیم داشت به مختصات $Q'(-۱,۱)$ و $P'(-۴,۴)$

پس خواهیم داشت.

$$y_P-y_Q=۴-۱=۳=a$$

$$x_P-x_Q=۴-۱=۳=b$$

شیب این خط

$$m_{PQ}=\frac{a}{b}=\frac{۳}{۳}=۱$$

در مورد خط $P'Q'$ خواهیم داشت.

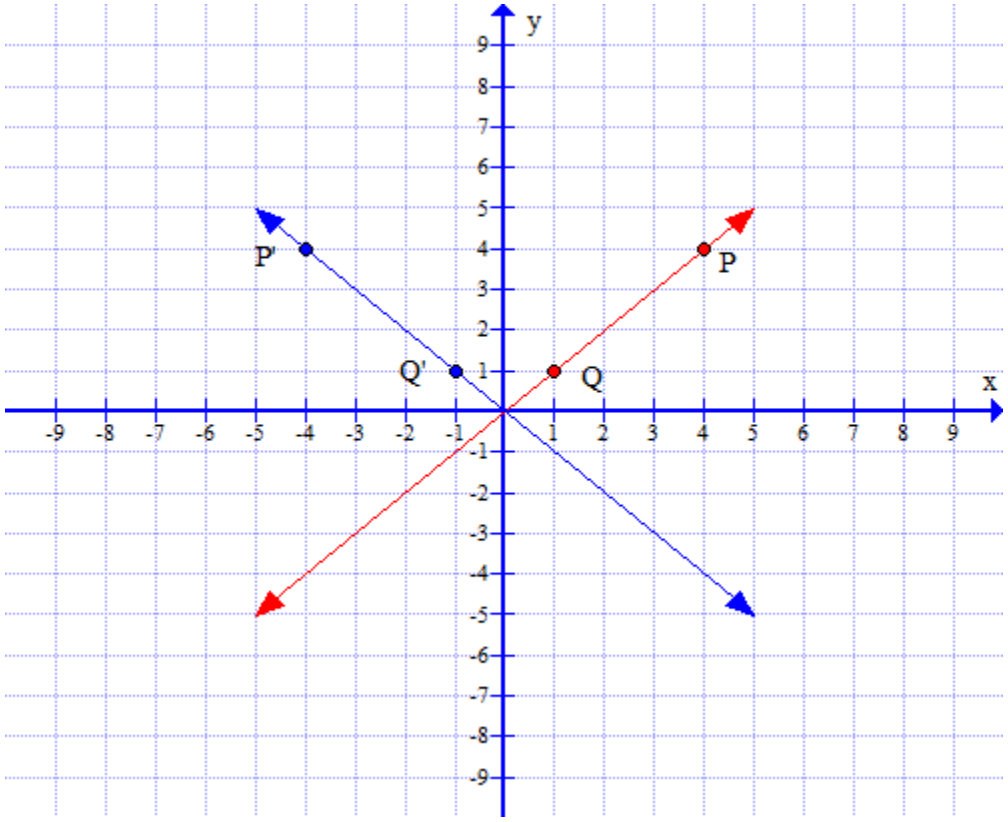
$$y_{P'}-y_{Q'}=۴-۱=۳=b$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$x_{P'} - x_{Q'} = -۴ - (-۱) = -۳ = -a$

پس

$\left(\frac{a}{b}\right) \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -۱$



مثال ۷

مشخص کنید آیا دو خط زیر، با هم موازی هستند یا عمود بر هم هستند و یا هیچ یک از این دو مورد.

$-۶x + ۲y = ۸$

$-۹x + ۳y = -۶$

برای پیدا کردن شیب هر کدام از خطوط ، هر یک از آنها را برای y حل می کنیم.

$-۶x + ۲y = ۸$ $\qquad$ $-۹x + ۳y = -۶$

$۲y = ۶x + ۸$ $\qquad$ $۳y = ۹x - ۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا

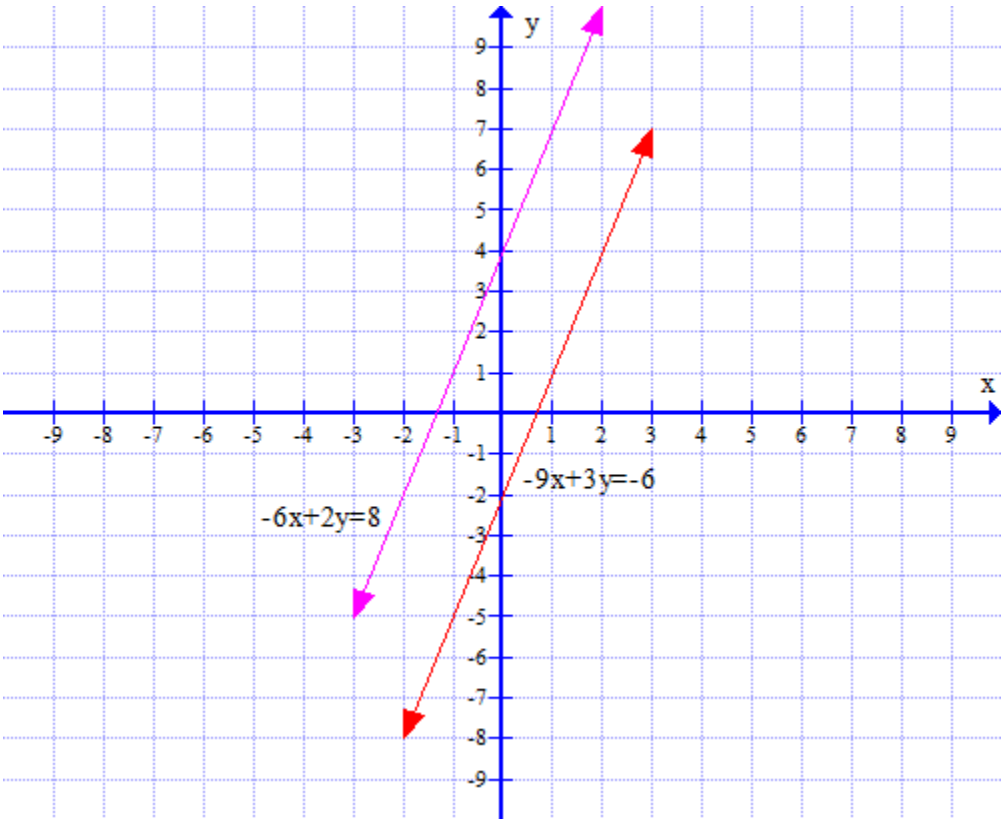
$$\frac{۳y}{۳} = \frac{۹x}{۳} - \frac{۶}{۳}$$

$$y = -۳x - ۲$$

$$\frac{۲y}{۲} = \frac{۶}{۲}x + \frac{۸}{۲}$$

$$y = -۳x + ۴$$

ملاحظه می کنید که شیب هر دو خط -۳ است و محل تلاقی آنها با محور y متفاوت است. پس این دو خط با هم موازی هستند.



مثال ۸

مشخص کنید آیا دو خط زیر، با هم موازی هستند یا عمود بر هم هستند و یا هیچ یک از این دو مورد.

$$-x + ۳y = ۲$$

$$۲x + ۶y = ۵$$

هر دو معادله را برای y حل می کنیم.

$$-x + ۳y = ۲ \qquad ۲x + ۶y = ۵$$

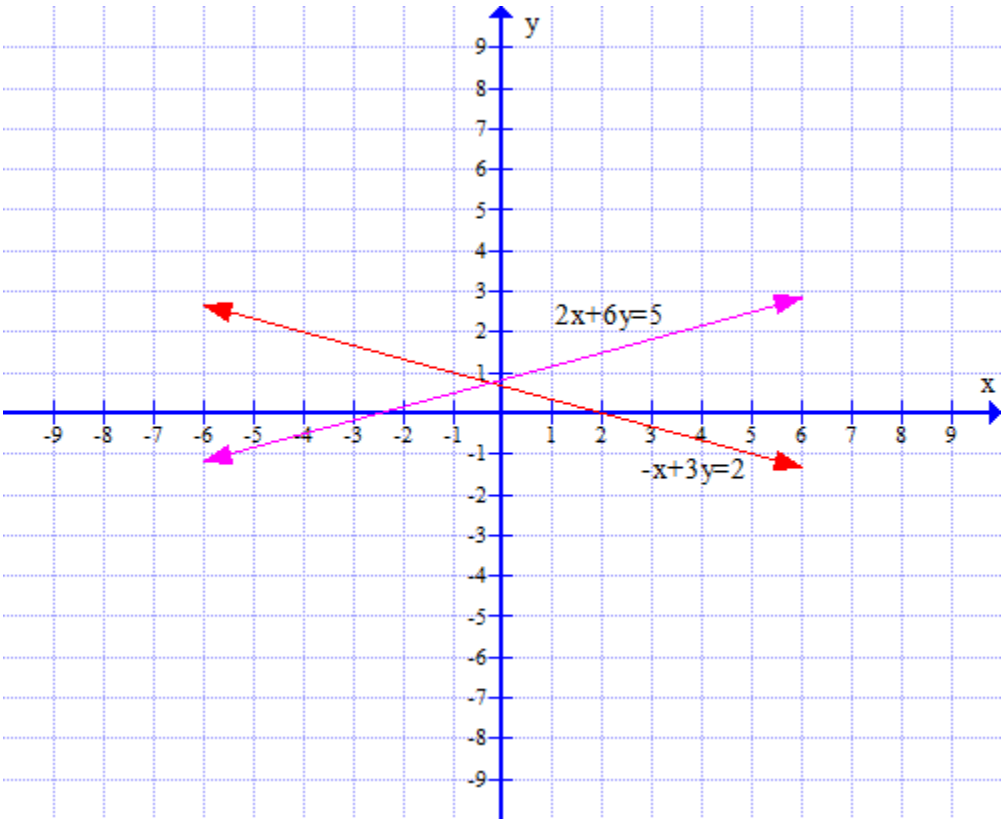
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۶y = -۲x + ۵ \qquad ۳y = x + ۲$$

$$\frac{۶y}{۶} = \frac{-۲x}{۶} + \frac{۵}{۶} \qquad \frac{۳y}{۳} = \frac{x}{۳} + \frac{۲}{۳}$$

$$y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۵}{۶} \qquad y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}$$

ملاحظه می کنید که شیب ها با هم مساوی نیستند و حاصل ضرب آنها هم ۱– نیست. پس این دو خط نه موازی هستند و نه عمود بر هم. فقط آنها یک دیگر را در یک نقطه تلاقی می کنند.



$$\left(\frac{۱}{۳}\right) \times \left(-\frac{۱}{۳}\right) = -\frac{۱}{۹}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۲

شیب خطی را که شامل هر زوج نقاط زیر است پیدا کنید.

۱) $(۳,۲),(۸,۱۱)$

۲) $(۳,۱),(۱,۸)$

۳) $(-۲,۸),(۴,۳)$

۴) $(-۲,-۶),(۴,-۴)$

شیب و محل تلاقی با محور y هر یک از خطوط زیر را پیدا کنید.

۵) $y = ۵x - ۲$

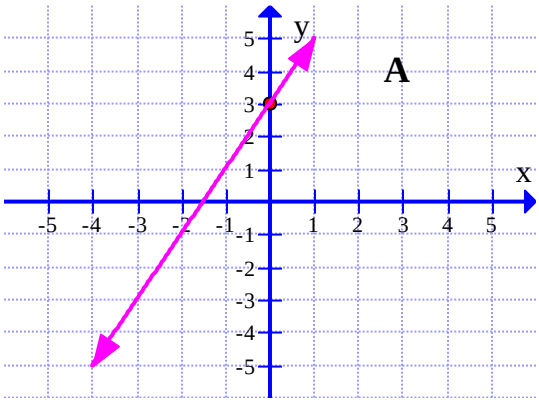
۶) $۲x + y = ۷$

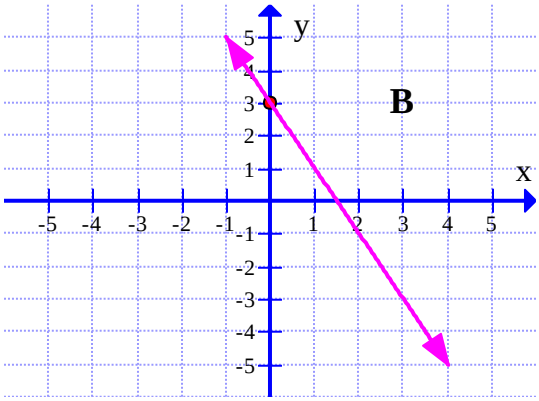
۷) $۲x - ۳y = ۱۰$

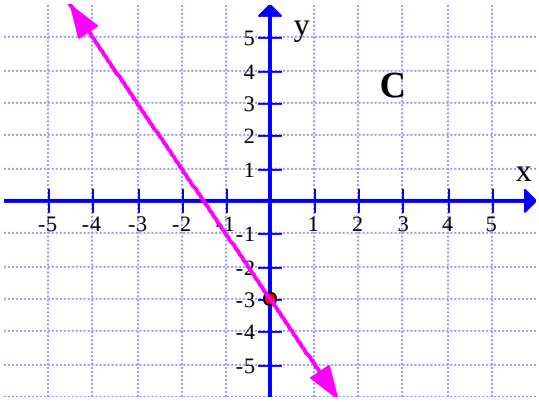
۸) $y = \frac{۱}{۲}x$

دانلود از سایت ریاضی سرا

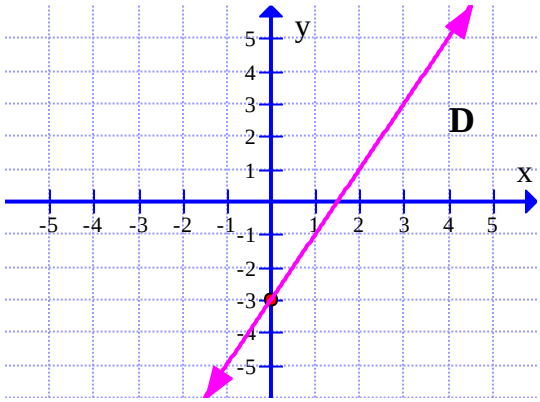
هر کدام از نمودار ها را با معادله اش جور کنید.







دانلود از سایت ریاضی سرا



۹) $y = ۲x + ۳$

۱۰) $y = ۲x - ۳$

۱۱) $y = -۲x + ۳$

۱۲) $y = -۲x - ۳$

شیب هر یک از معادله های زیر را پیدا کنید.

۱۳) $x = ۱$

۱۴) $y = -x + ۵$

۱۵) $-۶x + ۵y = ۳۰$

۱۶) $y - ۷ = ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مشخص کنید که آیا هر یک از زوج معادله های زیر ، موازی هستند و یا عمود بر هم و یا هیچ یک از این دو حالت.

۱۷) $y = -۳x + ۶$

$y = ۳x + ۵$

۱۸) $-۴x + ۲y = ۵$

$۲x - y = ۷$

۱۹) $-۲x + ۳y = ۱$

$۳x + ۲y = ۱۲$

۲۰) $y = -۹x + ۳$

$y = \frac{۳}{۲}x - ۷$

۲۱) $y = ۱۲x + ۶$

$y = ۱۲x - ۲$

۲۲ – شیب خطی که موازی خط زیر باشد پیدا کنید.

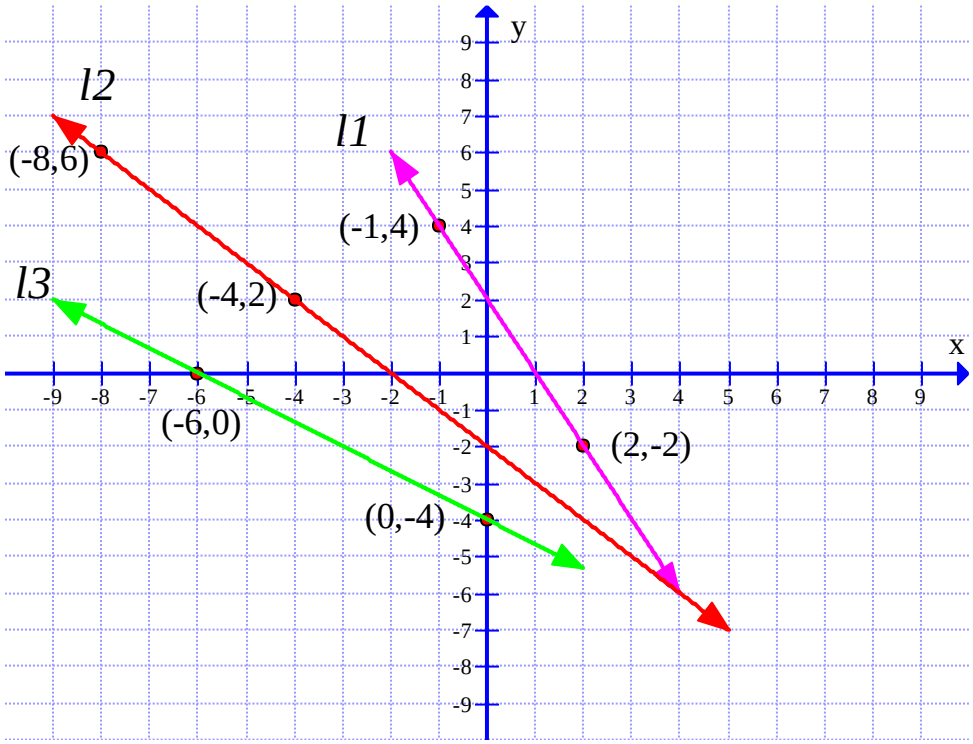
خط $y = -\frac{۷}{۲} - ۶$

۲۳ - شیب خطی که عمود برخط زیر باشد پیدا کنید.

خط $۵x - ۲y = ۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۴ - هر یک از خطوط زیر دارای شیب منفی است.



الف شیب هر کدام را پیدا کنید.

ب –با استفاده از نتیجه قسمت الف ، محل نقطه چین را پر کنید.

برای خطوط با شیب منفی ، خطی که شیب تند تری دارد ، دارای شیب ..... (بزرگ تر – کوچک تر) است.

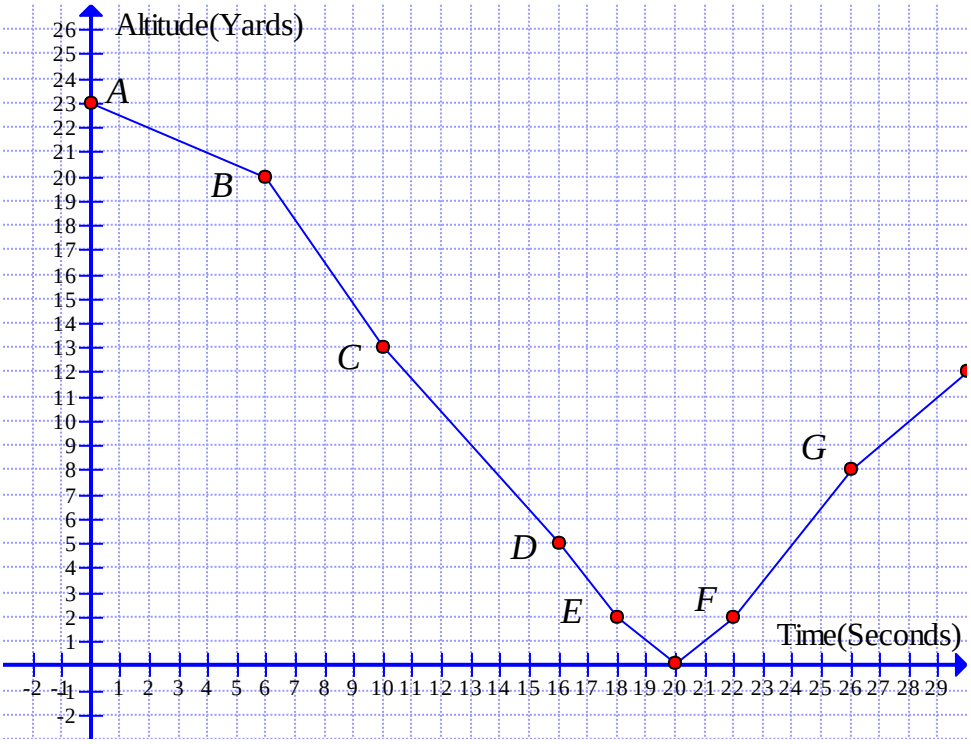
۲۵ – توضیح دهید که آیا دو خط با شیب های مثبت می توانند عمود بر هم باشند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار زیر ارتفاع یک مرغ دریائی هنگام پرواز در مدت زمان ۳۰ ثانیه را نشان می دهد. این نمودار را برای سوال های ۲۶-۲۹ استفاده کنید. محور x زمان بر حسب ثانیه است.محور y ارتفاع بر حسب یارد است.

زمان Time

ارتفاع Altitude



۲۶ – مختصات نقطه B را پیدا کنید.

۲۷ – مختصات نقطه C را پیدا کنید.

۲۸ – میزان تغییر ارتفاع بین نقاط C و B را پیدا کنید. (توجه :میزان تغییر بین دو نقطه همان شیب بین دو نقطه است). این میزان تغییر عبارت خواهد بود از یارد در ثانیه .

۲۹ – میزان تغییر ارتفاع بین نقاط G و F را پیدا کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۷.۲

شیب خطی را که شامل هر زوج نقاط زیر است پیدا کنید.

۱) $(۳,۲),(۸,۱۱)$

$$m=\frac{۱۱-۲}{۸-۳}=\frac{۹}{۵}$$

۲) $(۳,۱),(۱,۸)$

$$m=\frac{۸-۱}{۱-۳}=\frac{۷}{-۲}=-\frac{۷}{۲}$$

۳) $(-۲,۸),(۴,۳)$

$$m=\frac{۳-۸}{۴-(-۲)}=\frac{-۵}{۶}=-\frac{۵}{۶}$$

۴) $(-۲,-۶),(۴,-۴)$

$$m=\frac{-۴-(-۶)}{۴-(-۲)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

شیب و محل تلاقی با محور y هر یک از خطوط زیر را پیدا کنید.

۵) $y=۵x-۲$

$m=۵ \qquad b=-۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $۲x + y = ۷$

$y = -۲x + ۷$

$m = -۲ \qquad b = ۷$

۷) $۲x - ۳y = ۱۰$

$۳y = ۲x - ۱۰$

$y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۱۰}{۳}$

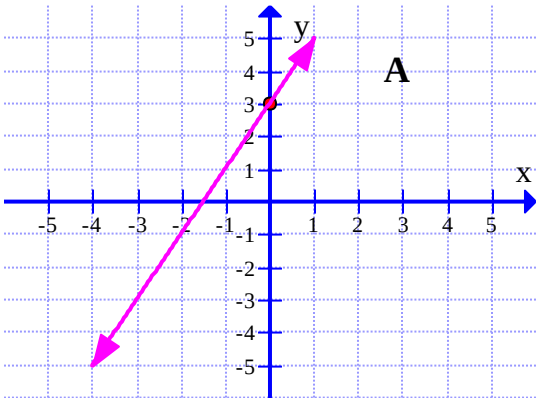
$m = \frac{۲}{۳} \qquad b = -\frac{۱۰}{۳}$

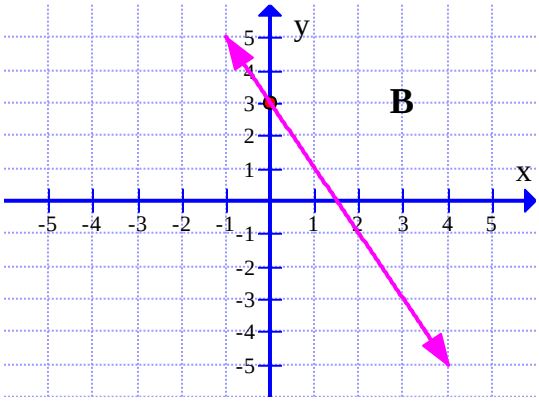
۸) $y = \frac{۱}{۲}x$

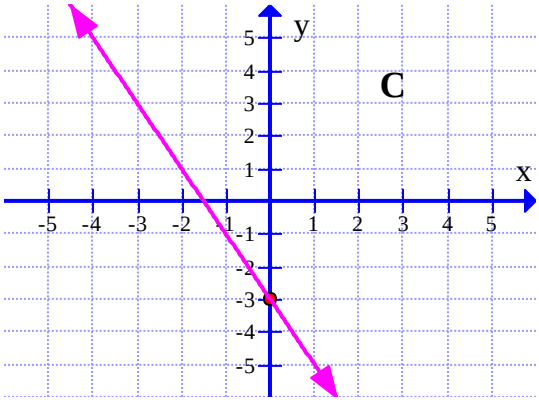
$m = \frac{۱}{۲} \qquad b = ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

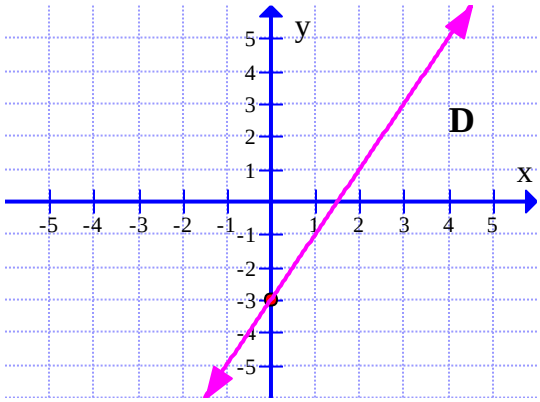
هر کدام از نمودار ها را با معادله اش جور کنید.







دانلود از سایت ریاضی سرا



۹) $y = ۲x + ۳$

A

۱۰) $y = ۲x - ۳$

D

۱۱) $y = -۲x + ۳$

B

۱۲) $y = -۲x - ۳$

C

شیب هر یک از معادله های زیر را پیدا کنید.

۱۳) $x = ۱$

شیب نا معین

۱۴) $y = -x + ۵$

$m = -۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵) $-۶x + ۵y = ۳۰$

$۵y = ۶x + ۳۰$

$y = \frac{۶}{۵} + ۶$

$m = \frac{۶}{۵}$

۱۶) $y - ۷ = ۰$

$m = ۰$

مشخص کنید که آیا هر یک از زوج معادله های زیر ، موازی هستند و یا عمود بر هم و یا هیچ یک از این دو حالت.

۱۷) $y = -۳x + ۶$

$y = ۳x + ۵$

هیچ کدام

۱۸) $-۴x + ۲y = ۵ \quad \Longrightarrow \quad ۲y = ۴x + ۵ \quad \Longrightarrow \quad y = ۲x + \frac{۵}{۲}$

$۲x - y = ۷ \quad \Longrightarrow \quad y = ۲x - ۷$

موازی

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹) $-۲x+۳y=۱ \qquad ۳y=۲x+۱ \qquad y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}$

$۳x+۲y=۱۲ \qquad ۲y=-۳x+۱۲ \qquad y=-\frac{۳}{۲}x+۶$

$\left(\frac{۲}{۳}\right)\times\left(-\frac{۳}{۲}\right)=-۱$

عمود

۲۰) $y=-۹x+۳$

$y=\frac{۳}{۲}x-۷$

هیچ کدام

۲۱) $y=۱۲x+۶$

$y=۱۲x-۲$

موازی

۲۲ – شیب خطی که موازی خط زیر باشد پیدا کنید.

خط $y=-\frac{۷}{۲}-۶$

$m \parallel=-\frac{۷}{۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳ - شیب خطی که عمود برخط زیر باشد پیدا کنید.

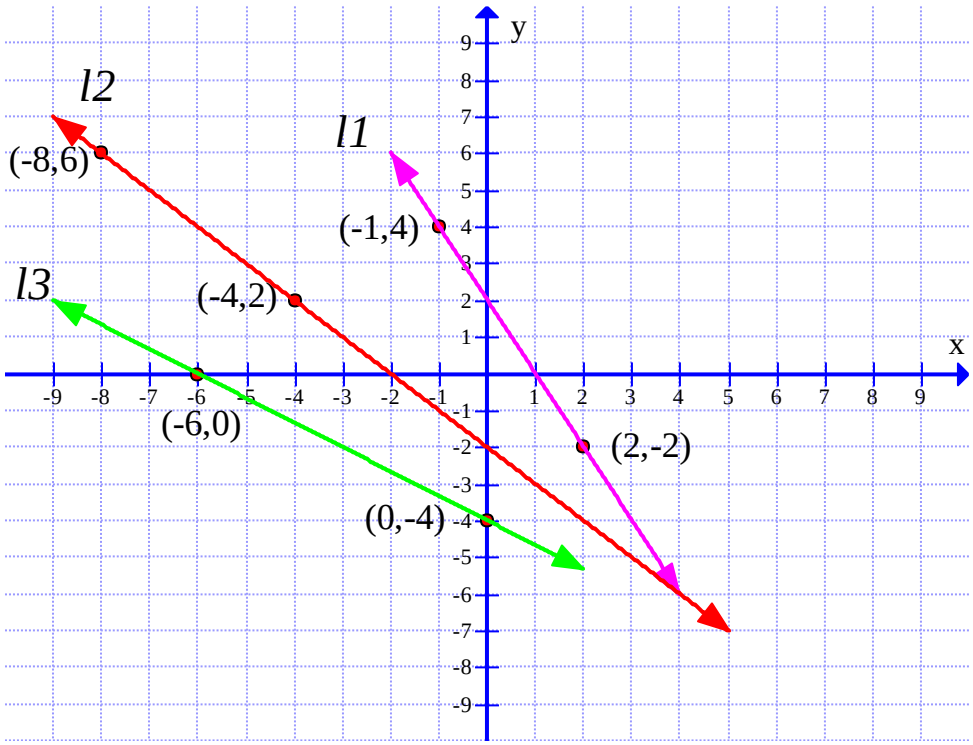
خط $۵x - ۲y = ۶$

$$۲y = ۵x - ۶$$

$$y = \frac{۵}{۲}x - ۳$$

$$m \perp = -\frac{۲}{۵}$$

۲۴ - هر یک از خطوط زیر دارای شیب منفی است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

الف شیب هر کدام را پیدا کنید.

$$m_{l۱} = \frac{-۲-۴}{۲-(-۱)} = \frac{-۶}{۳} = -۲$$

$$m_{l۲} = \frac{-۲-۲}{۰-(-۴)} = \frac{-۴}{۴} = -۱$$

$$m_{l۳} = \frac{-۴-۰}{۰-(-۶)} = \frac{-۴}{۶} = -\frac{۲}{۳}$$

ب –با استفاده از نتیجه قسمت الف ، محل نقطه چین را پر کنید.

برای خطوط با شیب منفی ، خطی که شیب تند تری دارد ، دارای شیب ..... (بزرگ تر – کوچک تر) است.

برای خطوط با شیب منفی ، خطی که شیب تند تری دارد ، دارای شیب کوچک تر است.

۲۵ – توضیح دهید که آیا دو خط با شیب های مثبت می توانند عمود بر هم باشند.

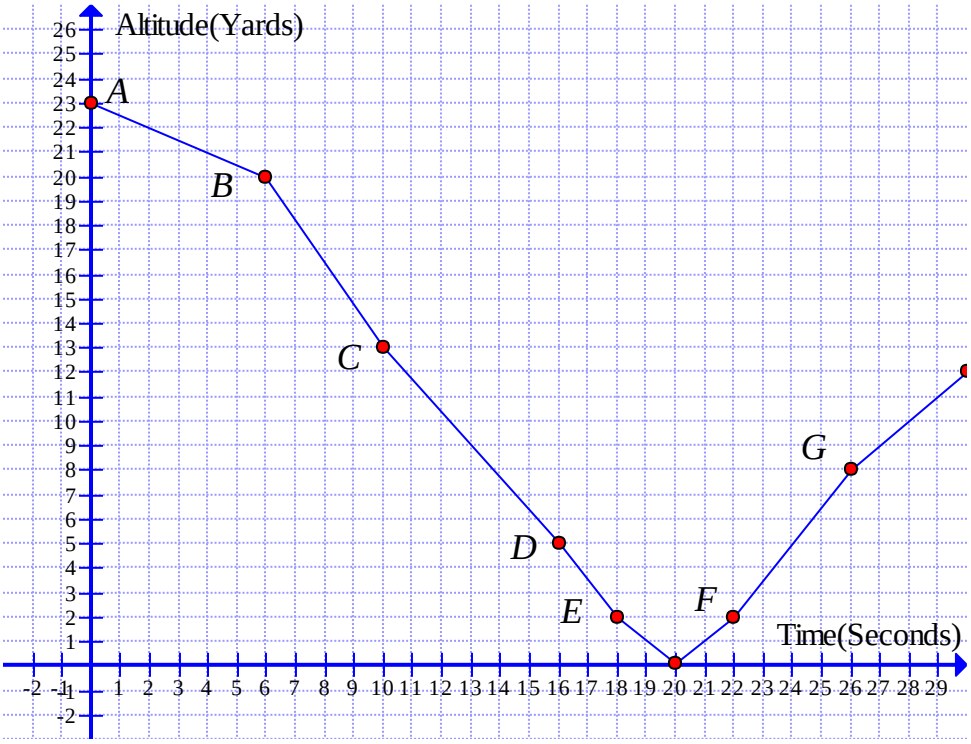
پاسخ منفی است. زیرا می دانیم که حاصل ضرب دو عدد مثبت همیشه مثبت است. همچنین می دانیم که حاصل ضرب شیب دو خط عمود بر هم باید ۱– باشد. پس امکان ندارد دو خط با شیب های هر مثبت عمود بر هم باشند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار زیر ارتفاع یک مرغ دریائی هنگام پرواز در مدت زمان ۳۰ ثانیه را نشان می دهد. این نمودار را برای سوال های ۲۶-۲۹ استفاده کنید. محور x زمان بر حسب ثانیه است.محور y ارتفاع بر حسب یارد است.

زمان Time

ارتفاع Altitude



۲۶ – مختصات نقطه B را پیدا کنید.

$$B(۶,۲۰)$$

۲۷ – مختصات نقطه C را پیدا کنید.

$$C(۱۰,۱۳)$$

۲۸ – میزان تغییر ارتفاع بین نقاط C و B را پیدا کنید. (توجه :میزان تغییر بین دو نقطه همان شیب بین دو نقطه است). این میزان تغییر عبارت خواهد بود از یارد در ثانیه .

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$m = \frac{۲۰ - ۱۳}{۶ - ۱۰} = \frac{۷}{-۴} = -\frac{۷}{۴}$$

۲۹ – میزان تغییر ارتفاع بین نقاط G و F را پیدا کنید.

$$G(۲۶, ۸)$$

$$F(۲۲, ۲)$$

$$m = \frac{۸ - ۲}{۲۶ - ۲۲} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$ یارد در ثانیه

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۳ – شکل شیب – تقاطع Slope-Intercept Form

رسم نمودار یک خط با استفاده از شیب و محل تلاقی خط با محور y

Graphing a Line Using Slope and y-Intercept

در بخش قبل ، یاد گرفتیم که **شکل شیب – تقاطع** یک معادله خطی عبارت است از $y = mx + b$

وقتی که یک معادله به این شکل نوشته شود، شیب خط ضریب x یعنی m است. و همچنین محل تلاقی خط با محور y عدد ثابت یعنی b است. مثلا در معادله $y = ۲x + ۳$ شیب خط ۲ است و محل تلاقی خط با محور y عدد ۳ است.

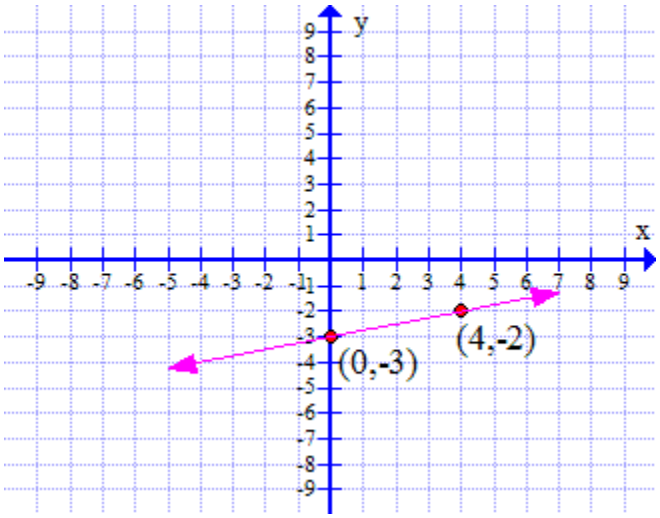
می توانیم شکل شیب – تقاطع را برای ترسیم نمودار یک معادله خطی بکار بریم.

مثال ۱ – خط $y = \frac{۱}{۴}x - ۳$ را رسم کنید.

پاسخ

محل تلاقی خط با محور y عدد ۳– است. نقطه $(۰, -۳)$ را روی محور مختصات مشخص می کنیم. برای پیدا کردن یک نقطه دیگر روی خط ، به خاطر می آوریم که $m = \frac{rise}{run} = \frac{\text{حرکت عمودی}}{\text{حرکت افقی}} = \frac{۱}{۴}$

پس از نقطه $(۰, -۳)$ شروع می کنیم، و یک واحد به طرف بالا حرکت می کنیم، و چهار واحد به طرف راست. حالا به نقطه $(۴, -۲)$ میرسیم. پس دو نقطه $(۰, -۳)$ و $(۴, -۲)$ داریم. می توانیم خط را رسم کنیم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ – خط $۲x + y = ۳$ را رسم کنید .

پاسخ

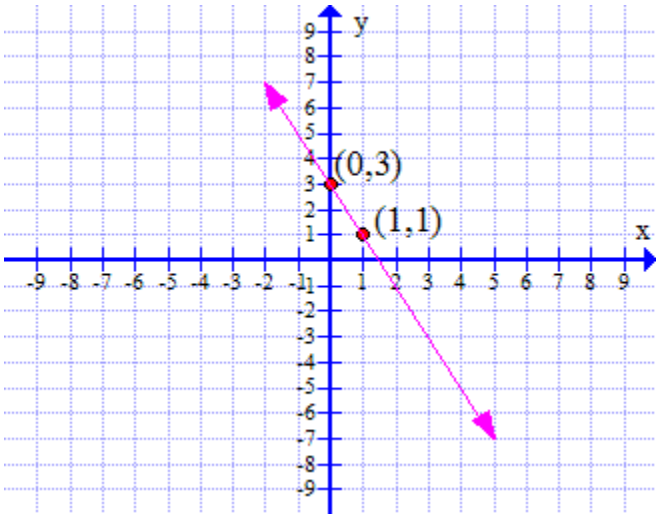
ابتدا معادله را برای y حل می کنیم، تا به شکل شیب - تقاطع نوشته شود. خواهیم داشت

$$y = -۲x + ۳$$

محل تلاقی خط با محور y نقطه $(۰,۳)$ است. این نقطه را روی محور مختصات پیدا می کنیم. برای پیدا کردن یک نقطه دیگر، شیب که -۲ است بکار می بریم. می توان نوشت

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{\text{حرکت عمودی}}{\text{حرکت افقی}} = \frac{-۲}{۱}$$

از نقطه $(۰,۳)$ شروع می کنیم. دو واحد به طرف پایین و یک واحد به طرف راست حرکت می کنیم. به نقطه $(۱,۱)$ می رسیم. نمودار را رسم می کنیم.



شیب -۲ را می توان به صورت $\frac{۲}{-۱}$ هم نوشت. پس اگر از نقطه $(۰,۳)$ شروع کنیم. سپس دو واحد به طرف بالا و یک واحد به طرف چپ حرکت کنیم، به نقطه $(-۱,۵)$ می رسیم. اگر به شکل بالا نگاه کنید، می بینید که این نقطه هم روی خط قرار دارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳

معادله خطی با شیب $\frac{۱}{۴}$ بنویسید که از نقطه $(۰,-۳)$ عبور کند.

پاسخ

$$m=\frac{۱}{۴} \qquad b=-۳$$

پس خوهیم داشت.

$$y=\frac{۱}{۴}x-۳$$

مثال ۴

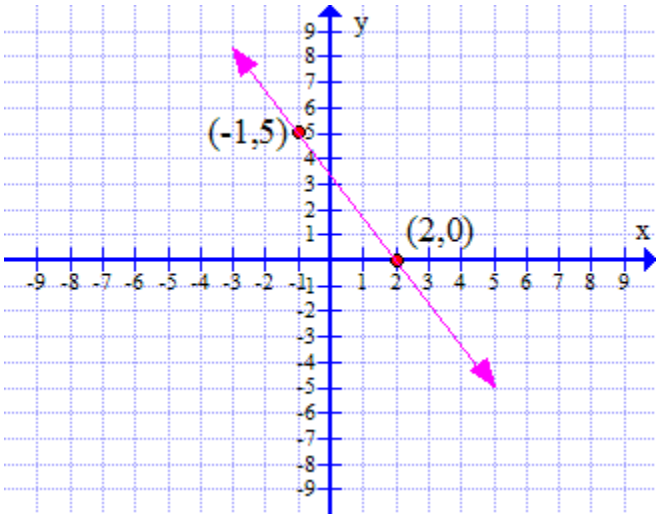
نمودار خطی که از نقطه $(-۱,۵)$ عبور می کند و دارای شیب $\frac{-۵}{۳}$ است را ترسیم کنید.

پاسخ

ابتدا نقطه $(-۱,۵)$ را روی صفحه مختصات پیدا می‌کنیم. چون شیب این خط $\frac{-۵}{۳}$ است، از آن نقطه ای که روی صفحه پیدا کردیم، ۵ واحد به طرف پایین می رویم و سپس ۳ واحد افقی به سمت راست می رویم. با این کار یک نقطه دیگر هم پیدا کردیم. مختصات این نقطه همان طور که در شکل پایین ملاحظه می کنید، $(۲,۰)$ است. این دو نقطه را به یک دیگر متصل می کنیم.

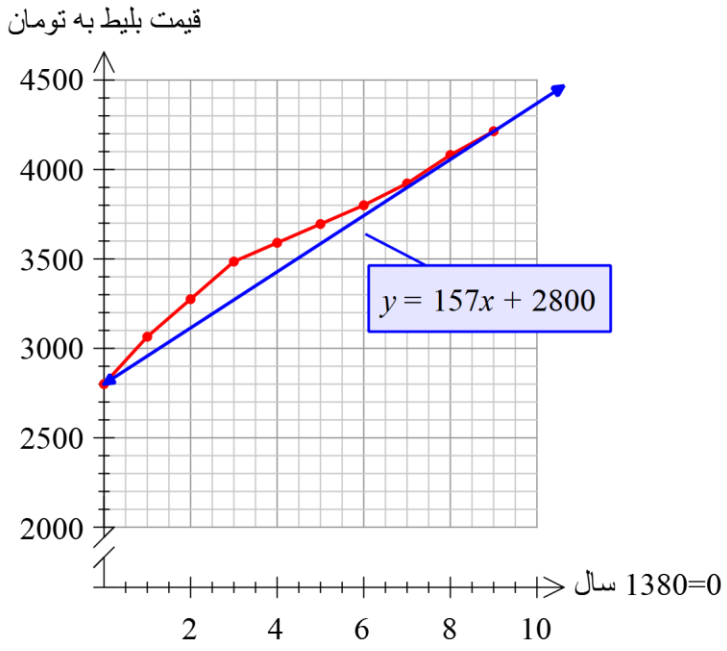
چون $\frac{۵}{-۳}=\frac{-۵}{۴}$ است، می توانیم از نقطه $(-۱,۵)$ پنج واحد به طرف بالا حرکت کنیم، و سه واحد به سمت چپ. این کار به ما مختصات یک نقطه دیگر می دهد ، اما در هر حال نمودار یکسان خواهد بود.

دانلود از سایت ریاضی سرا



تفسیر شکل شیب – تقاطع

در بخش ۷.۱ نمودار قیمت بلیت باغ وحش در سال های مختلف را دیدیم. متوجه شدیم که آن نمودار به خط مستقیم شبیه است. آن نمودار همراه با خط مستقیم شبیه به آن را در شکل زیر ملاحظه می کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

در بازرگانی و تجارت ، اغلب به معادله هایی که مانند شکل بالا به خط مستقیم شبیه هستند، تکیه می کنند، تا بتوانند روال و گرایش تجارت و بازرگانی را پیش بینی کنند. این معادله ها را مدل سازی و یا انگاره ریاضی می نامند. از طریق انجام چند عملیات جبری ، معادله $y = ۱۵۷x + ۲۸۰۰$ بدست آورده ایم که به طور تقریبی نمایان گر اطلاعات داده شده در نمودار بالا است.

طرح یک مساله

الف –با استفاده از معادله $y = ۱۵۷x + ۲۸۰۰$ قیمت بلیت در سال ۱۳۹۴ را پیش بینی کنید.

ب – مفهوم شیب این معادله چیست؟

ج – محل تلاقی این معادله با محور y چه مفهومی دارد؟

پاسخ

الف –برای پیدا کردن قیمت بلیت در سال ۱۳۹۴ باید مقدار y هنگامی که $x = ۱۳۹۴ - ۱۳۸۰ = ۱۴$ است، پیدا کنیم.

$y = ۱۵۷(۱۴) + ۲۸۰۰ = ۴۹۹۸$ تومان

ب –

$$m = \frac{\text{حرکت عمودی}}{\text{حرکت افقی}} = \frac{۱۵۷}{۱}$$

یعنی به قیمت بلیت ، هر سال ۱۵۷ تومان اضافه می شود.

ج -

محل تلاقی معادله $y = ۱۵۷ + ۲۸۰۰$ رقم ۲۸۰۰ است که مطابق است با نقطه $(۰, ۲۸۰۰)$ روی نمودار. یعنی در سال $x = ۰$ و یا سال ۱۳۸۰ قیمت بلیت ۲۸۰۰ تومان بوده است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۳

خطوط زیر را رسم کنید.

۱ - خطی که از نقطه $(۱,۳)$ می گذرد و دارای شیب $\frac{۳}{۲}$ است.

۲ - خطی که از نقطه $(۰,۰)$ می گذرد و دارای شیب ۵ است.

۳ - خطی که از نقطه $(۰,۷)$ می گذرد و دارای شیب -۱ است.

خطوط زیر ررسم کنید.

۴) $y = -۲x$

۵) $y = -۲x + ۳$

۶) $y = \frac{۱}{۲}x$

۷) $y = \frac{۱}{۲}x - ۴$

۸) $x - y = ۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $x + ۲y = ۸$

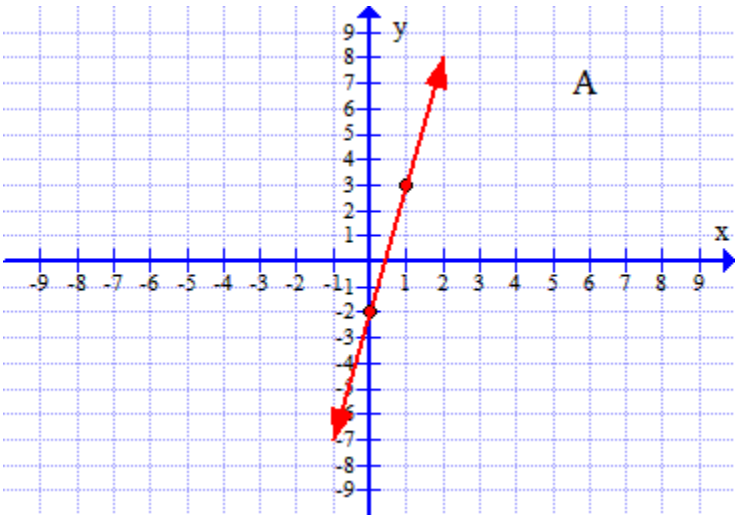
نمودار ها را با معادله های مربوطه جور کنید.

۱۰) $y = ۵x - ۳$

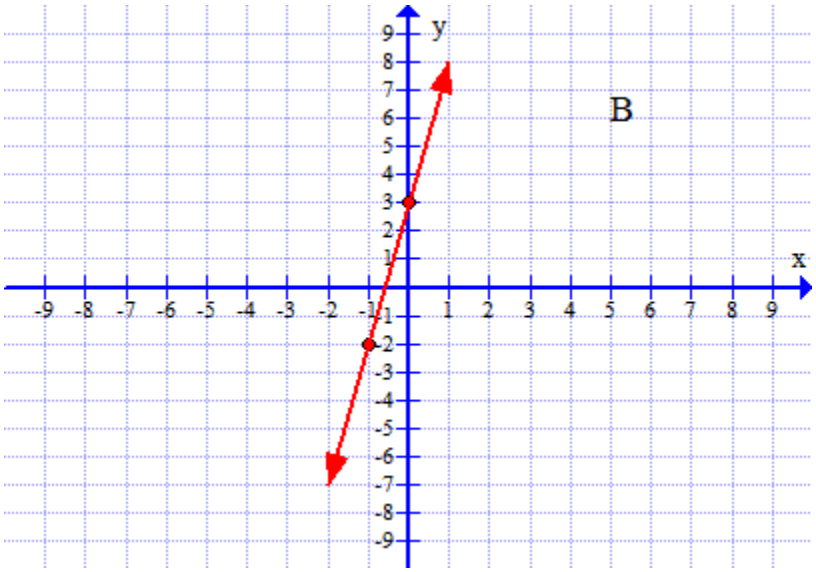
۱۱) $y = ۵x - ۲$

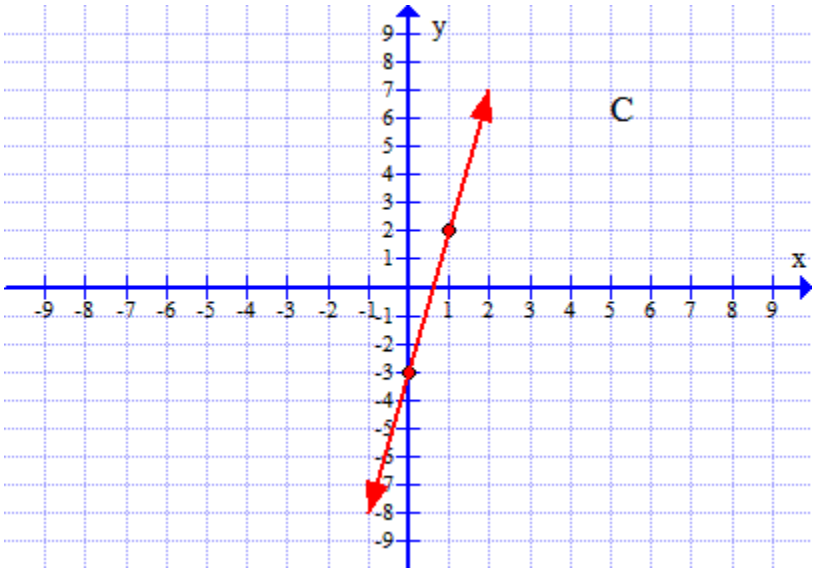
۱۲) $y = ۵x + ۱$

۱۳) $y = ۵x + ۳$

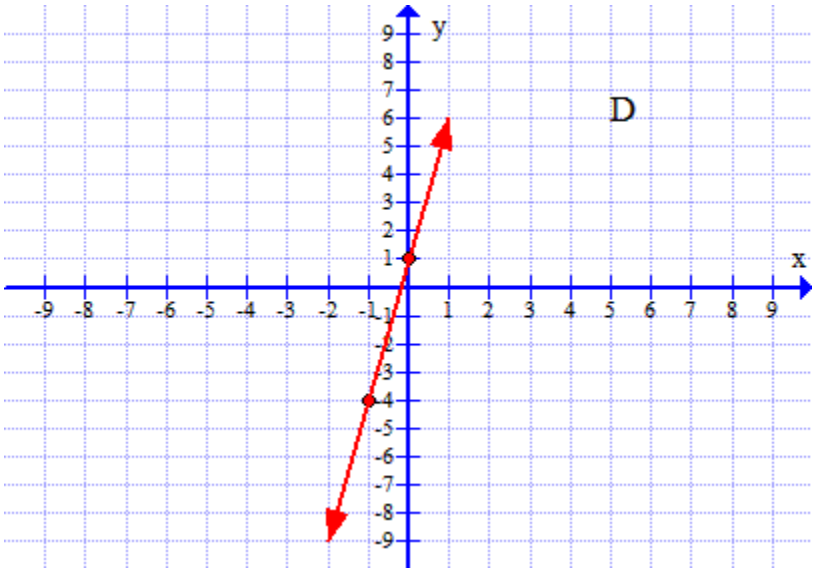


دانلود از سایت ریاضی سرا





دانلود از سایت ریاضی سرا



معادله خطوط با مشخصات زیر را بنویسید.

۱۴) $m = -۱$ $b = ۱$

۱۵) $m = ۲$ $b = \frac{۳}{۴}$

۱۶) $m = \frac{۲}{۷}$ $b = ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷ - معادله $y = ۵\ ۰۰۰۰\ x + ۱۲\ ۰۰۰۰۰۰$ انگاره ریاضی در آمد سالانه یک شخص فرضی است. در این فرمول متغیر x نماد سال های بعد از ۱۳۸۲ و متغیر y نماد در آمد سالانه آن شخص فرضی در سال های مختلف از ۱۳۸۲ به بعد است.

الف –در آمد سالانه این شخص را در سال ۱۳۸۶ را پیدا کنید.

ب – شیب معادله فوق را پیدا کنید، و مفهوم آنرا شرح دهید.

ج – محل تلاقی خط با محور y را پیدا کنید و آنرا تفسیر کنید.

۱۸ - یکی از شغل هایی که در سال های آینده زیاد مورد نیاز است، شغل پرستاری از سالمندان است. تعداد افرادی که در این شغل استخدام شده اند با معادله خطی $۳۷۸\ ۰\ x - ۱\ ۰\ y = -۴۹۵\ ۰$ تخمین زده می شود. در این معادله y نماد افرادی که در این شغل کار می کنند به هزار، و x نماد سال های بعد از ۱۳۸۶ است.

الف –شیب و محل تلاقی با محور y این معادله خطی را پیدا کنید.

ب – اینجا شیب چه مفهومی دارد؟

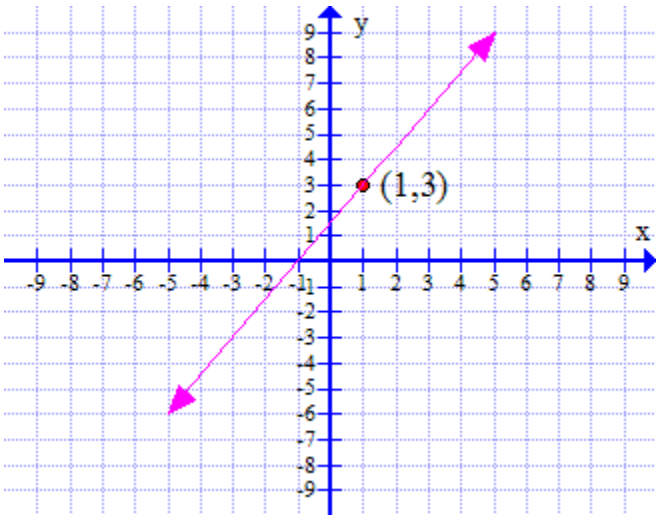
ج – محل تلاقی با محور y چه مفهومی دارد؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

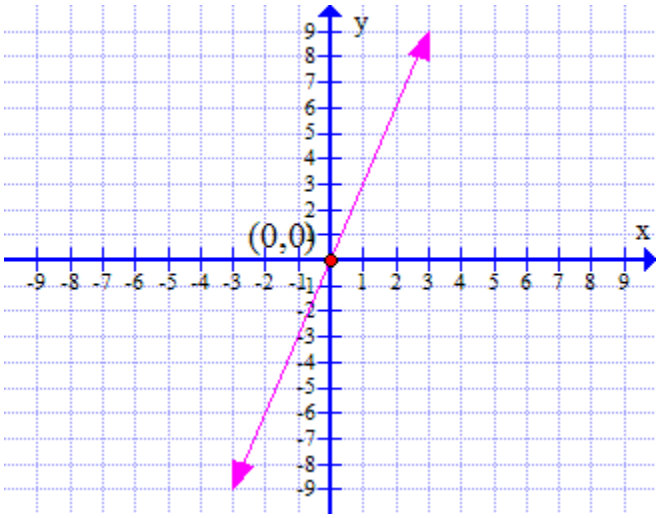
پاسخ تمرینات ۳.۷

خطوط زیر را رسم کنید.

۱ - خطی که از نقطه $(۱,۳)$ می گذرد و دارای شیب $\frac{۳}{۲}$ است.

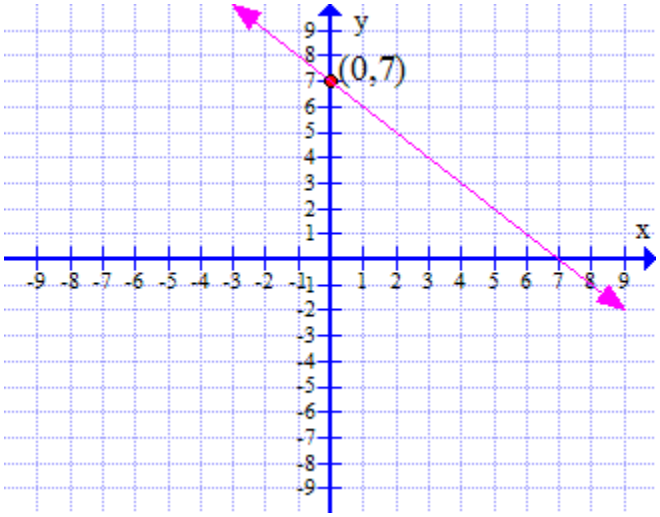


۲ - خطی که از نقطه $(۰,۰)$ می گذرد و دارای شیب ۵ است.



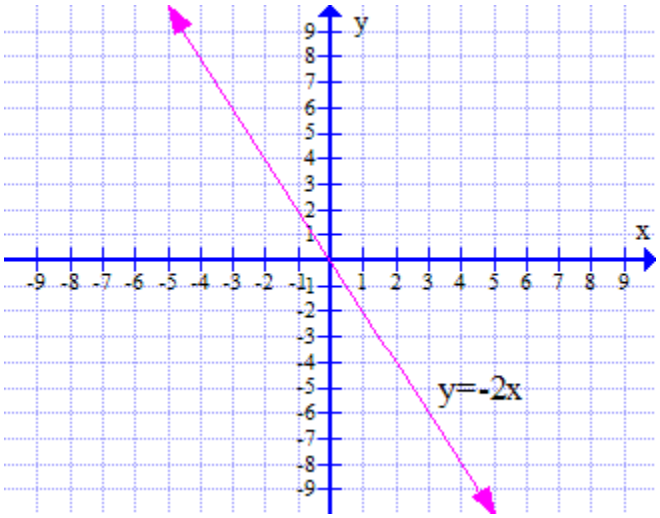
دانلود از سایت ریاضی سرا

۳ - خطی که از نقطه $(۰,۷)$ می گذرد و دارای شیب -۱ است.



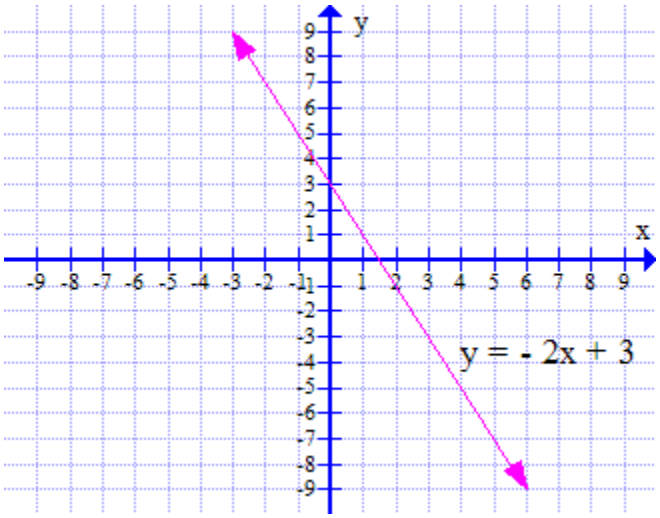
خطوط زیر ررسم کنید.

۴) $y = -۲x$

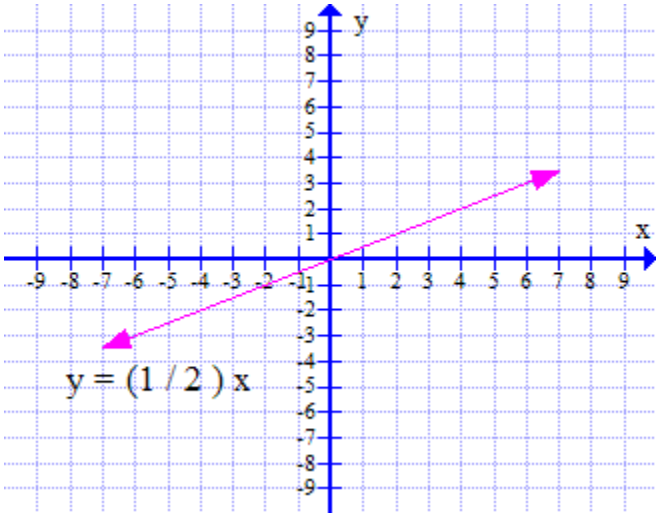


دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $y = -۲x + ۳$

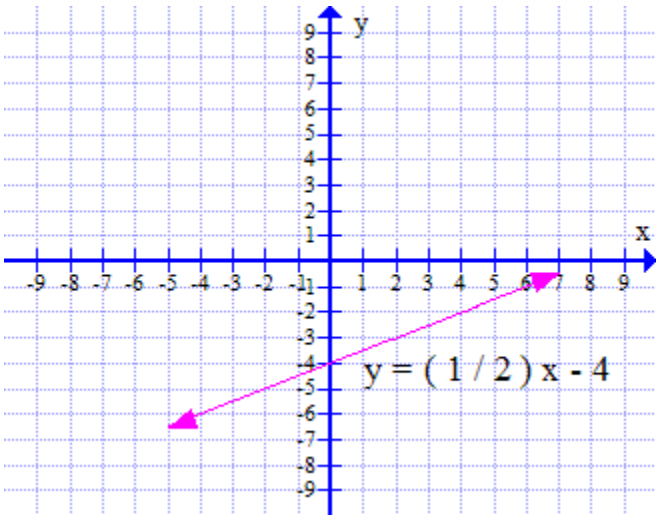


۶) $y = \frac{۱}{۲}x$

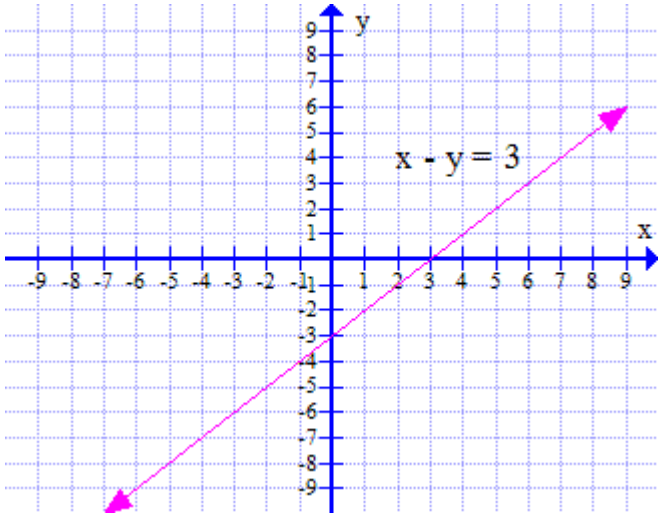


دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $y = \frac{۱}{۲}x - ۴$

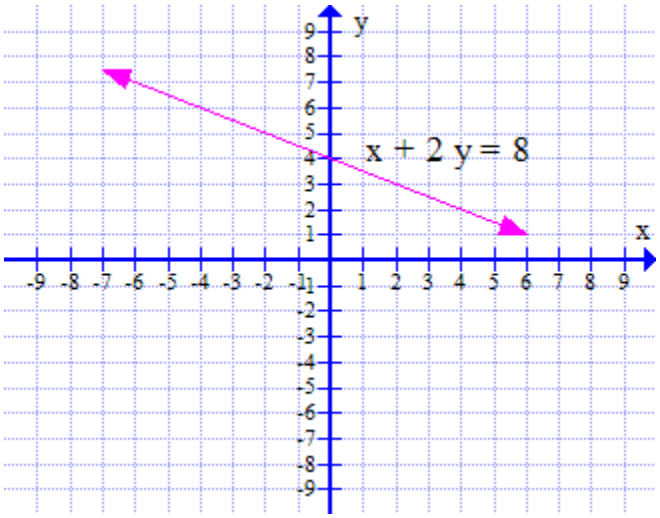


۸) $x - y = ۳$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $x + ۲y = ۸$



نمودار ها را با معادله های مربوطه جور کنید.

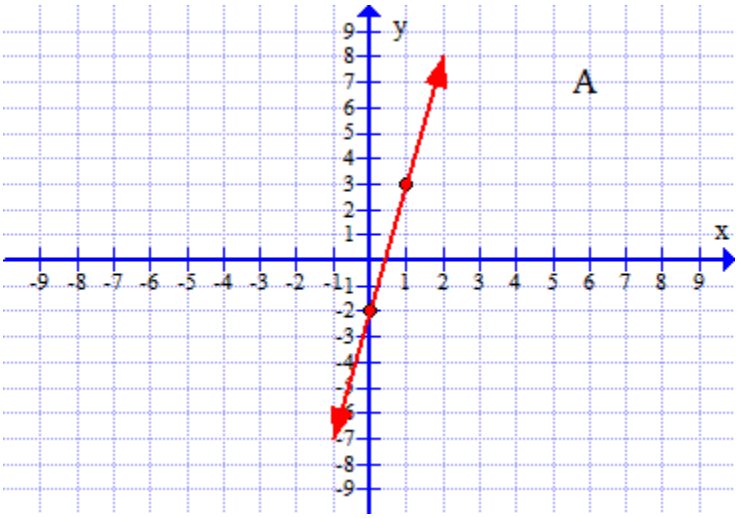
۱۰) $y = ۵x - ۳ \rightarrow C$

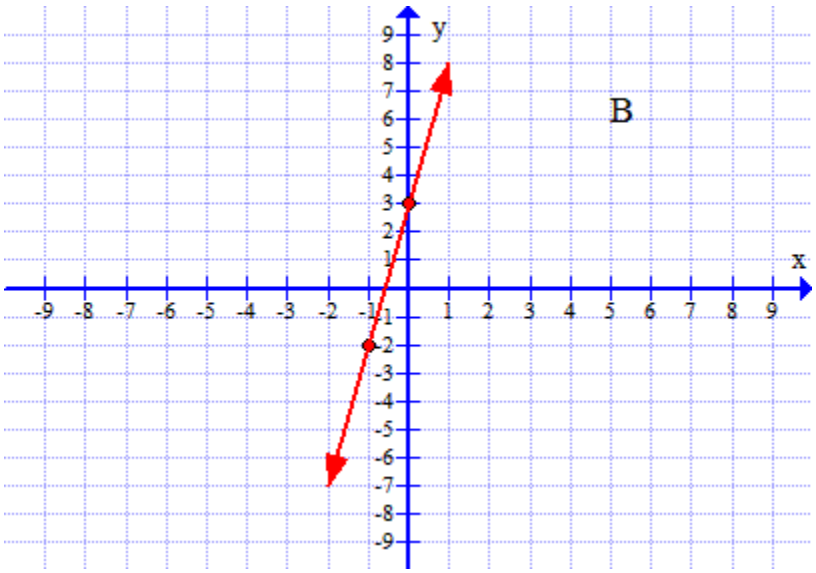
۱۱) $y = ۵x - ۲ \rightarrow A$

۱۲) $y = ۵x + ۱ \rightarrow D$

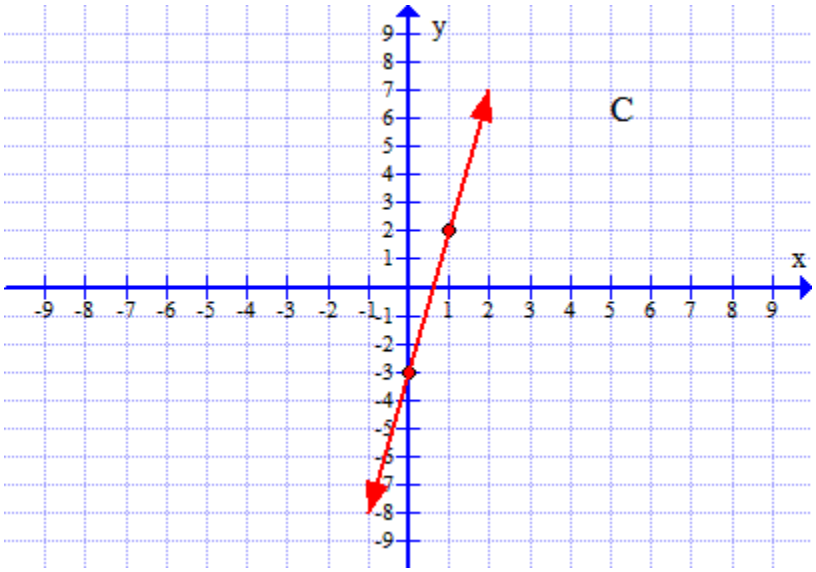
۱۳) $y = ۵x + ۳ \rightarrow B$

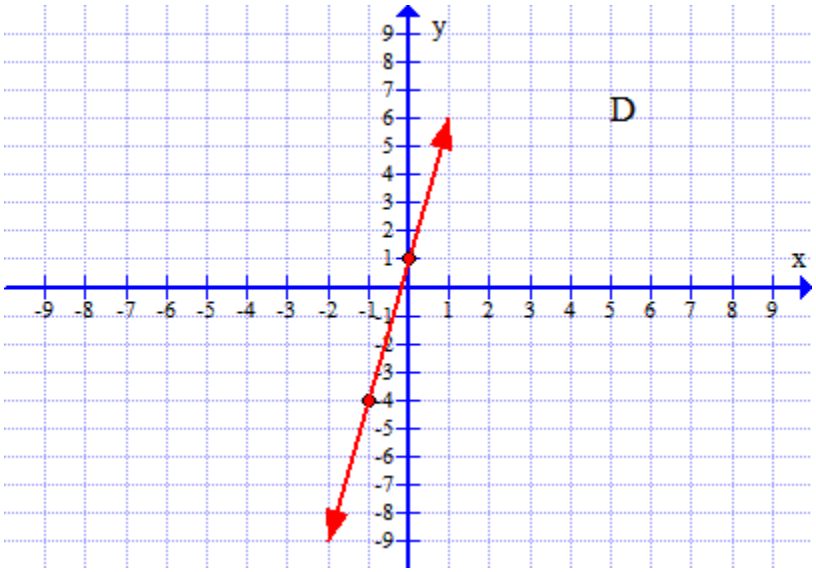
دانلود از سایت ریاضی سرا





دانلود از سایت ریاضی سرا





دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله خطوط با مشخصات زیر را بنویسید.

۱۴) $m = -۱ \qquad b = ۱$

$y = -x + ۱$

۱۵) $m = ۲ \qquad b = \frac{۳}{۴}$

$y = ۲x + \frac{۳}{۴}$

۱۶) $m = \frac{۲}{۷} \qquad b = ۰$

$y = \frac{۲}{۷}x$

۱۷- معادله $y = ۵\,۰۰۰۰\,x + ۱۲\,۰۰۰۰۰۰$ انگاره ریاضی در آمد سالانه یک شخص فرضی است. در این فرمول متغیر x نماد سال های بعد از ۱۳۸۲ و متغیر y نماد در آمد سالانه آن شخص فرضی در سال های مختلف از ۱۳۸۲ به بعد است.

الف –در آمد سالانه این شخص را در سال ۱۳۸۶ را پیدا کنید.

$۱۳۸۶ - ۱۳۸۲ = ۴$

پس $x = ۴$

$y = ۵\,۰۰۰۰\,(۴) + ۱۲\,۰۰۰۰۰۰ = ۱۲۲\,۰۰۰۰۰$ تومان

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب – شیب معادله فوق را پیدا کنید، و مفهوم آنرا شرح دهید.

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۵\ ۰۰۰۰}{۱}$$

شیب $\frac{۵۰۰۰۰}{۱}$ یعنی هر سال مبلغ ۵ ۰۰۰۰ تومان به در آن شخص فرضی اضافه می شود.

ج – محل تلاقی خط با محور y را پیدا کنید و آنرا تفسیر کنید.

$$b = ۱۲\ ۰۰۰۰۰۰$$

یعنی در آمد سالانه آن شخص در سال صفر و یا به عبارت دیگر در سال ۱۳۸۲ بالغ بر ۱۲ ۰۰۰۰۰۰ تومان بوده است.

۱۸ - یکی از شغل هایی که در سال های آینده زیاد مورد نیاز است، شغل پرستاری از سالمندان است. تعداد افرادی که در این شغل استخدام شده اند با معادله خطی $۳۷۸\ ۰ x - ۱\ ۰ y = -۴۹۵\ ۰$ تخمین زده می شود. در این معادله y نماد افرادی که در این شغل کار می کنند به هزار، و x نماد سال های بعد از ۱۳۸۶ است.

الف –شیب و محل تلاقی با محور y این معادله خطی را پیدا کنید.

قبل از هر چیز باید معادله را به شکل شیب – تقاطع بنویسیم.

$$۳۷۸\ ۰ x - ۱\ ۰ y = -۴۹۵\ ۰$$

$$۱\ ۰ y = ۳۷۸\ ۰ x + ۴۹۵\ ۰$$

$$y = ۳۷۸x + ۴۹۵$$

پس $m = ۳۷۸$ و $b = ۴۹۵$

ب – اینجا شیب چه مفهومی دارد؟

شیب ۳۷۸ یعنی هر سال به تعداد افرادی که به عنوان پرستار سالمندان کار می کنند، ۳۷۸ ۰۰۰ اضافه می شود.

ج – محل تلاقی با محور y چه مفهومی دارد؟

محل تلاقی معادله خطی با محور y که ۴۹۵ است، یعنی در سال صفر و یا سال ۱۳۸۶ تعداد ۴۹۵ ۰۰۰ نفر به عنوان پرستار سالمندان کار می کردند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۴ - معادله های دیگر خط More Equations of Lines

استفاده از شکل نقطه - شیب برای نوشتن یک معادله

Using the Point-Slope Form to write an Equation

اگر شیب یک خط و مختصات یک نقطه روی خط را داشته باشیم، می توانیم معادله آن خط را بنویسیم. برای این کار از فرمول شیب استفاده می کنیم، و شیب خطی را که از دو نقطه (x, y) و $(x_۱, y_۱)$ می گذرد را می نویسیم.
پس خواهیم داشت

$$m = \frac{y - y_۱}{x - x_۱}$$

دو طرف معادله را در $(x - x_۱)$ ضرب می کنیم.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

این شکل با لا را **شکل نقطه – شیب Point-Slope Form** معادله یک خط می نامند.

شکل نقطه – شیب معادله یک خط

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

در معادله بالا m شیب خط است و $(x_۱, y_۱)$ مختصات یک نقطه روی خط است.

مثال ۱ – معادله خطی با شیب ۳– که شامل نقطه $(۱, -۵)$ است را بنویسید.

پاسخ

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - (-۵) = (-۳)(x - ۱)$$

$$y + ۵ = -۳x + ۳$$

$$y = -۳x - ۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ – معادله خطی که از نقاط $(۴,۰)$ و $(-۴,-۵)$ می گذرد را بنویسید.

پاسخ

ابتدا شیب خط را پیدا ای کنیم.

$$m = \frac{-۵ - ۰}{-۴ - ۴} = \frac{-۵}{-۸} = \frac{۵}{۸}$$

می توانیم هر کدام از نقاط بالا را بخواهیم به عنوان $(x_۱, y_۱)$ بکار بریم. فرض می کنیم $(x_۱, y_۱) = (۴,۰)$ باشد.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۰ = \frac{۵}{۸}(x - ۴)$$

$$y = \frac{۵}{۸}x - \frac{۵}{۲}$$

اگر نقطه $(-۴,-۵)$ را هم بکار ببریم، به همین نتیجه می رسیم. امتحان کنید.

نوشتن معادله های خطوط عمودی و افقی

Writing Equations of Vertica and Horizontal Lines

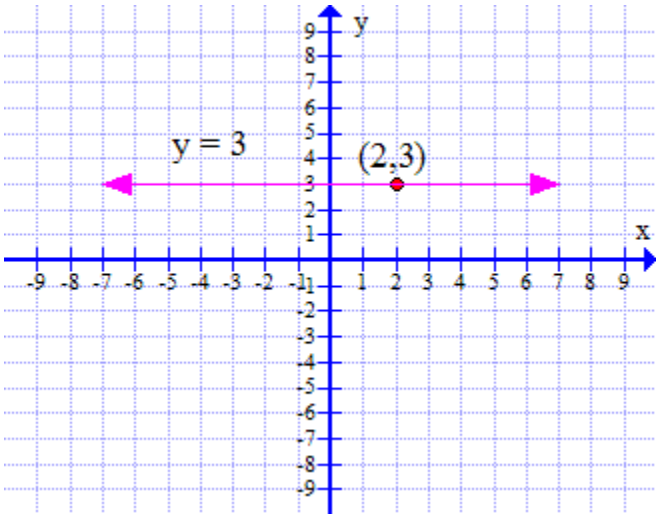
مثال ۳–

معادله یک خط افقی که از نقطه $(۲,۳)$ می گذرد را بنویسید.

پاسخ

می دانیم که معادله یک خط افقی $y = b$ است. چون خط شامل نقطه $(۲,۳)$ است، پس معادله خط مورد نظر $y = ۳$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

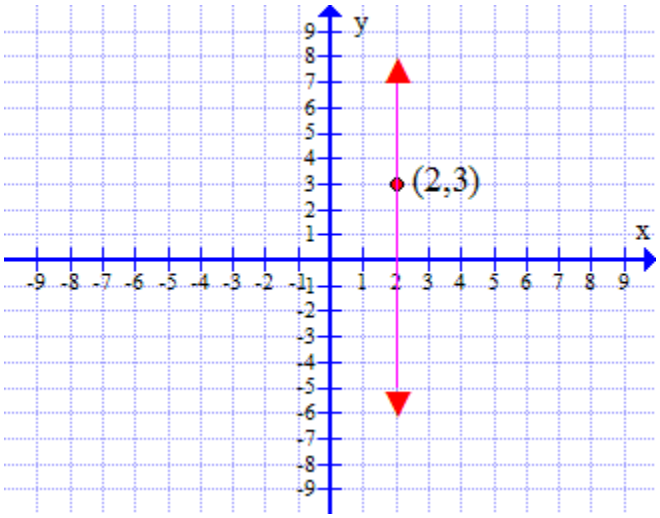


مثال ۴

معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(۲,۳)$ می گذرد و شیب نا معین دارد (تعریف نشدنی)

پاسخ

چون شیب تعریف نشدنی است، پس خط عمودی داریم. معادله یک خط عمودی $x = c$ است. و چون خط شامل نقطه $(۲,۳)$ است، پس مادله خط مورد نظر $x = ۲$ است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

نوشتن معادله های خطوط موازی و عمودی

Writing Equations of Parallel and perpendicular Lines

مثال ۵ –

معادله خطی را بنویسید که شامل نقطه $(۴,۴)$ است و موازی خط $۲x + y = -۶$ است.

پاسخ

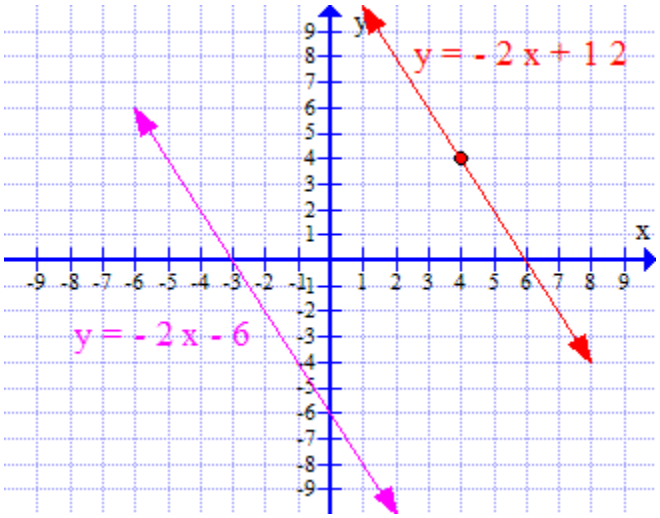
ابتدا باید شیب خط $۲x + y = -۶$ را پیدا کنیم. برا این کار معادله را به شکل شیب – تقاطع می نویسیم. یعنی معادله به صورت $y = -۲x - ۶$ خواهد شد. پس شیب این معادله -۲است. خط موازی با این خط هم همان شیب -۲ خواهد داشت. اینک از فرمول نقطه – شیب استفاده می کنیم و معادله خط مورد نظر را می نویسیم.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۴ = -۲(x - ۴)$$

$$y - ۴ = -۲x + ۸$$

$$y = -۲x + ۱۲$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۶ –

معادله خطی را بنویسید که شامل نقطه $(-۲,۱)$ باشد، و عمود بر خط $۳x + ۵y = ۴$

پاسخ

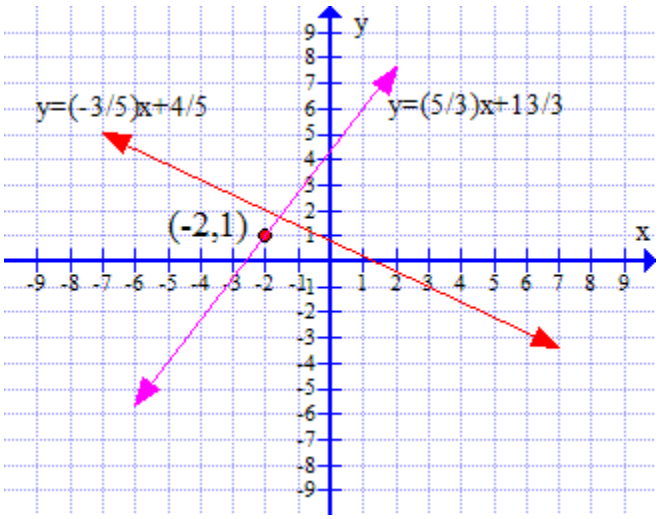
معادله را به شکل شیب – تقاطع یعنی $y = -\frac{۳}{۵}x + \frac{۴}{۵}$ می نویسیم. شیب این خط $-\frac{۳}{۵}$ است. شیب خط عمود بر این خط باید $\frac{۵}{۳}$ باشد. از فرمول نقطه – شیب استفاده می کنیم، تا معادله خط مورد نظر پیدا شود.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۱ = \frac{۵}{۳}\left(x - (-۲)\right)$$

$$y - ۱ = \frac{۵}{۳}x + \frac{۱۰}{۳}$$

$$y = \frac{۵}{۳}x + \frac{۱۳}{۳}$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

استفاده عملی شکل نقطه – شیب Using the Point-Slope Form in Applications

مثال ۷ –

شرکت درستکار یک شرکت خرید و فروش املاک است. این شرکت همان طور که از نامش پیدا است، شرکتی است با خدا و درستکار. به همین علت کار این شرکت روز به روز در حال پیشرف و ترقی است. این شرکت در سال ۱۳۸۰ تاسیس شده است. در سال ۱۳۸۲ این شرکت تعداد ۲۰۰ خانه و در سال ۱۳۸۷ تعداد ۲۷۵ خانه فروخت. با استفاده از این ارقام ، پیش بینی کنید که این شرکت در سال ۱۳۹۲ چند خانه خواهد فروخت.

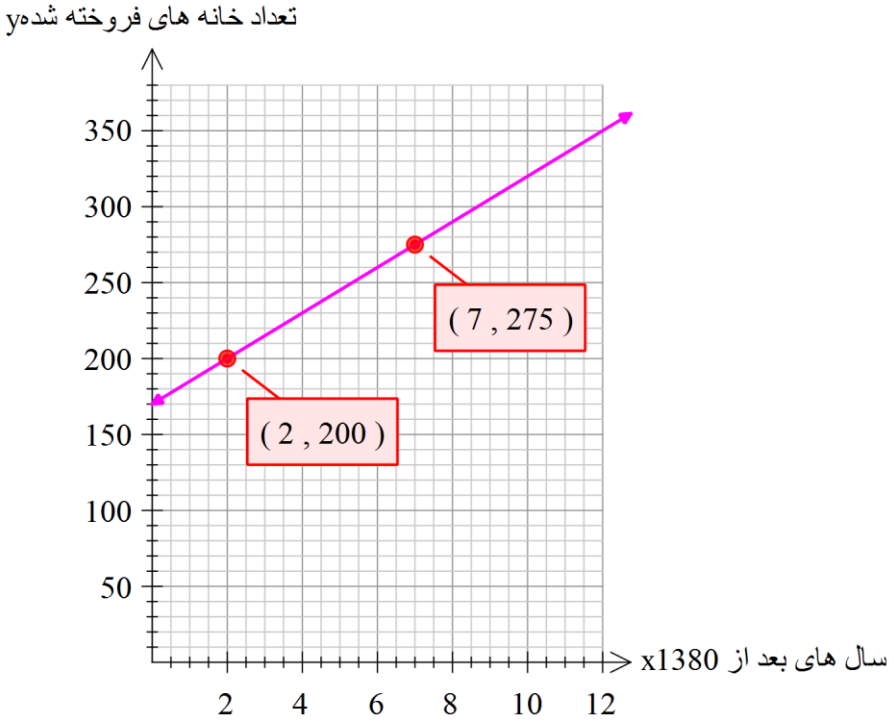
پاسخ

فرض می کنیم x از سال ۱۳۸۰ به بعد است. یعنی ۱۳۸۰ =۰ ، ۱۳۸۱ = ۱ ، ۱۳۸۲ = ۲ ،الی آخر.

فرض می کنیم y تعداد خانه های فروخته شده در سال مربوط به x

از اطلاعاتی که از فرض مساله بدست داریم می توانیم دو زوج اعداد بنویسیم. یعنی $(۷, ۲۷۵)$ و $(۲, ۲۰۰)$

برای روشن تر شدن این موضوع خطی که از دو نقطه $(۷, ۲۷۵)$ و $(۲, ۲۰۰)$می گذرد رسم می کنیم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

یک معادله خطی می نویسیم که از نقاط $(۷,۲۷۵)$ و $(۲,۲۰۰)$ می گذرد. برای این کار، اول شیب خط را پیدا می کنیم.

$$m=\frac{۲۷۵-۲۰۰}{۷-۲}=\frac{۷۵}{۵}=۱۵$$

سپس با بکار بردن شکل نقطه – شیب ، معادله را می نویسیم.

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

$$y-۲۰۰=۱۵(x-۲)$$

$$y-۲۰۰=۱۵x-۳۰$$

$$y=۱۵x+۱۷۰$$

برای پیش بینی تعداد خانه های فروخته شده در سال ۱۳۹۲ در معادله بدست آمده بالا بجای x می گذاریم ۱۲ تا مقدار y یعنی تعداد خانه های فروخته شده در سال ۱۳۹۲ بدست، آید.

$$y=۱۵(۱۲)+۱۷۰=۳۵۰$$

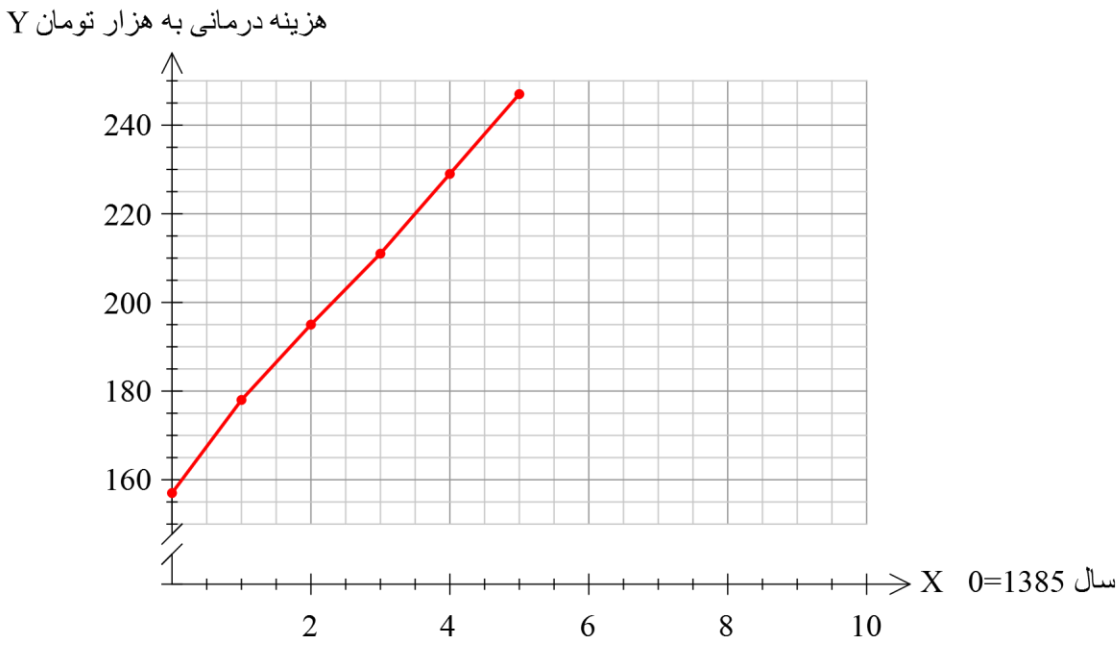
اگر به نمودار توجه کنید، ملاحظه می کنید که نقطه $(۱۲,۳۵۰)$ روی نمودار است.

مثال 8

جدول زیر تخمینی از هزینه درمانی (به هزارتومان) یک خانواده در سالهای مختلف است.

سال	قیمت
۱۳۸۵ =۰	۱۵۷
۱۳۸۶ = ۱	۱۷۸
۱۳۸۷ = ۲	۱۹۴
۱۳۸۸ = ۳	۲۱۱
۱۳۸۹ = ۴	۲۲۹
۱۳۹۰= ۵	۲۴۷

دانلود از سایت ریاضی سرا



الف – یک معادله خطی برای جدول بالا پیدا کنید. محور x سال و محور y هزینه دارمان را نشان می دهد.

ب – با استفاده از معادله به دست آمده در قسمت الف، هزینه دارمان را در سال ۱۳۹۲ پیش بینی کنید.

پاسخ

الف – فرض می کنیم، ۱۳۸۵ =۰ ، ۱۳۸۶ = ۱ ، ۱۳۸۷ = ۲ ، الی آخر .

دو نقطه $(۰,۱۵۷)$ و $(۵,۲۴۷)$ را انتخاب می کنیم. شیب خطی که از این دو نقطه می گذرد پیدا می کنیم.

$$m = \frac{۲۴۷ - ۱۵۷}{۵ - ۰} = ۱۸$$

اینک شکل **نقطه – شیب** را به کار می بریم. فرض می کنیم $(x_۱, y_۱) = (۵, ۲۴۷)$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۲۴۷ = ۱۸(x - ۵)$$

$$y - ۲۴۷ = ۱۸x - ۹۰ =$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$y = ۱۸x + ۱۵۷$

ب – از فرمول بالا استفاده می کنیم.

$y = ۱۸x + ۱۵۷$

$y = ۱۸(۷) + ۱۵۷$

$y = ۱۲۶ + ۱۵۷$

$y = ۲۸۳$ هزار تومان

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۴

شیب و یک نقطه روی نمودار معادله های زیر را پیدا کنید.

۱) $y - ۴ = -۲(x - ۱)$

۲) $y - ۰ = \frac{۱}{۴}(x - ۲)$

۳) $y + ۲ = ۵(x - ۳)$

معادله هر یک از خطوط زیر را پیدا کنید. معادله را به شکل $y = mx + b$ بنویسید.

۴ - خطی با شیب ۳ که از نقطه $(۱, ۲)$ می گذرد.

۵ - خطی با شیب -۲ که از نقطه $(-۳, ۱)$ می گذرد.

۶ - خطی با شیب $-\frac{۹}{۱۰}$ که از نقطه $(-۳, ۰)$ می گذرد.

۷ - خطی با شیب ۲ که از نقطه $(-۲, ۳)$ می گذرد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله های خطوطی را که از نقاط داده شده می گذ رند را بنویسید.

۸) $(۲,۰)$ و $(۴,۶)$

۹) $(-۲,۵)$ $(-۶,۱۳)$

۱۰) $(-۲,-۴)$ $(-۴,-۳)$

معادله خطوط زیر را بنویسید.

۱۱- یک خط عمود که از نقطه $(۲,۶)$ عبور کند.

۱۲ – یک خط افقی که از نقطه $(-۳,۱)$ می گذرد.

۱۳ - خطی که از نقطه $(۳,۸)$ می گذرد و موازی خط $y = ۴x - ۲$ است.

۱۴ - خطی که از نقطه $(۳,۵)$ می گذرد و عمود بر خط $۲x - y = ۸$ است.

۱۵ – یک سنگ از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۴۰۰ فوت رها می شود. بعد از یک ثانیه سرعت سنگ ۳۲ فوت در ثانیه است. بعد از سه ثانیه سرعت سنگ ۹۶ فوت در ثانیه است. فرض کنید که y نماد سرعت پایین آمدن سنگ است، و x نماد تعداد ثانیه ها از زمان رها شدن سنگ است.

الف – یک معادله خطی بنویسید که رابطه x و y را نشان می دهد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب - با استفاده از این معادله سرعت سنگ را ۴ ثانیه بعد از رها شدن پیدا کنید.

۱۶ – یک کار خانه مربا سازی یک نوع مربا به بازار عرضه کرده است. در آخر سال اول سود این محصول بالغ بر ۳ ۰۰۰۰ میلیون ریال است. تصور می شود که سود حاصل این محصول در آخر سال چهارم بالغ بر ۶۶ ۰۰۰ میلیون ریال بشود. فرض کنید x نماد سال و y نماد سود باشد. همچنین فرض کنید، نسبت تغییر $\frac{y}{x}$ ثابت باشد.

الف – یک معادله خطی بنویسید که رابطه سود و سال را نشان می دهد.

ب - با استفاده از فرمول بالا سود شرکت در آخر سال هفتم را پیدا کنید.

ج –پیش بینی کنید که سود این محصول در چه زمانی به ۱۲۶ ۰۰۰ میلیون ریال می‌رسد.

۱۷ – قیمت یک خانه دو اتاقه در سال ۱۳۶۰ بالغ بر ۱۰۹۹۰۰ تومان بود. در سال ۱۳۶۳ قیمت همان خانه بالغ بر ۱۲۳۲۰۰ تومان بود. فرض کنید y قمت خانه در سال x باشد. و فرض کنید که $x=0$ نماد سال ۱۳۶۰ باشد.

الف –یک معادله خطی بنویسید که انگاره ریاضی قیمت خانه در سال x باشد.

ب - با استفاده از فرمول بالا قیمت این نوع خانه را در سال ۱۳۶۸ پیدا کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۷.۴

شیب و یک نقطه روی نمودار معادله های زیر را پیدا کنید.

۱) $y - ۴ = -۲(x - ۱)$

$m = -۲ \quad P(۴،۱)$

۲) $y - ۰ = \frac{۱}{۴}(x - ۲)$

$m = \frac{۱}{۴} \quad P(۲,۰)$

۳) $y + ۲ = ۵(x - ۳)$

$m = ۵ \quad P(۳,-۲)$

معادله هر یک از خطوط زیر را پیدا کنید. معادله را به شکل $y = mx + b$ بنویسید.

۴ - خطی با شیب ۳ که از نقطه $(۱,۲)$ می گذرد.

$y - y_۱ = m(x - x_۱)$

$y - ۲ = ۳(x - ۱)$

$y - ۲ = ۳x - ۳$

$y = ۳x - ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵ - خطی با شیب -۲ که از نقطه $(۱,-۳)$ می گذرد.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y + ۳ = -۲(x - ۱)$$

$$y + ۳ = -۲x + ۲$$

$$y = -۲x - ۱$$

۶ - خطی با شیب $-\frac{۹}{۱۰}$ که از نقطه $(-۳,۰)$ می گذرد.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۰ = -\frac{۹}{۱۰}(x + ۳)$$

$$y = -\frac{۹}{۱۰}x - \frac{۲۷}{۱۰}$$

۷ - خطی با شیب ۲ که از نقطه $(-۲,۳)$ می گذرد.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۳ = ۲(x + ۲)$$

$$y - ۳ = ۲x + ۴$$

$$y = ۲x + ۷$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله های خطوطی را که از نقاط داده شده می گذ رند را بنویسید.

۸) $(۲,۰)$ و $(۴,۶)$

$$m = \frac{۶ - ۰}{۴ - ۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۰ = ۳(x - ۲)$$

$$y = ۳x - ۶$$

۹) $(-۲,۵)$ $(-۶,۱۳)$

$$m = \frac{۱۳ - ۵}{-۶ - (-۲)} = \frac{۸}{-۴} = -۲$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۵ = -۲(x + ۲)$$

$$y - ۵ = -۲x - ۴$$

$$y = -۲x + ۱$$

۱۰) $(-۲,-۴)$ $(-۴,-۳)$

$$m = \frac{-۳ - (-۴)}{-۴ - (-۲)} = \frac{۱}{-۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$y - (-۴) = -\frac{۱}{۲}\left(x - (-۲)\right)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y + ۴ = -\frac{۱}{۲}x - ۱$$

$$y = -\frac{۱}{۲}x - ۵$$

معادله خطوط زیر را بنویسید.

۱۱- یک خط عمود که از نقطه $(۲,۶)$ عبور کند.

$$x = ۲$$

۱۲ – یک خط افقی که از نقطه $(-۳,۱)$ می گذرد.

$$y = ۱$$

۱۳ - خطی که از نقطه $(۳,۸)$ می گذرد و موازی خط $y = ۴x - ۲$ است.

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۸ = ۴(x - ۳)$$

$$y - ۸ = ۴x - ۱۲$$

$$y = ۴x - ۴$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴ - خطی که از نقطه $(۳,۵)$ می گذرد و عمود بر خط $۲x - y = ۸$ است.

$$۲x - y = ۸$$

$$y = ۲x - ۸$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۵ = -\frac{۱}{۲}(x - ۳)$$

$$y - ۵ = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$$

$$y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱۳}{۲}$$

۱۵ – یک سنگ از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۴۰۰ فوت رها می شود. بعد از یک ثانیه سرعت سنگ ۳۲ فوت در ثانیه است. بعد از سه ثانیه سرعت سنگ ۹۶ فوت در ثانیه است. فرض کنید که y نماد سرعت پایین آمدن سنگ است، و x نماد تعداد ثانیه ها از زمان رها شدن سنگ است.

الف – یک معادله خطی بنویسید که رابطه x و y را نشان می دهد.

بر اساس فرض مساله نقاط $(۳,۹۶)$ و $(۱,۳۲)$ را خواهیم داشت. پس شیب را پیدا می کنیم.

$$m = \frac{۹۶ - ۳۲}{۳ - ۱} = \frac{۶۴}{۲} = ۳۲$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۳۲ = ۳۲(x - ۱)$$

$$y - ۳۲ = ۳۲x - ۳۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$y = ۳۲x$

ب - با استفاده از این معادله سرعت سنگ را ۴ ثانیه بعد از رها شدن پیدا کنید.

بعد از ۴ ثانیه یعنی $x = ۴$

$y = ۳۲(۴) = ۱۲۸$ فوت در ثانیه

۱۶ – یک کار خانه مربا سازی یک نوع مربا به بازار عرضه کرده است. در آخر سال اول سود این محصول بالغ بر ۳ ۰۰۰۰ میلیون ریال است. تصور می شود که سود حاصل این محصول در آخر سال چهارم بالغ بر ۶۶ ۰۰۰ میلیون ریال بشود. فرض کنید x نماد سال و y نماد سود باشد. همچنین فرض کنید، نسبت تغییر $\frac{y}{x}$ ثابت باشد.

الف – یک معادله خطی بنویسید که رابطه سود و سال را نشان می دهد.

نقاط $(۴, ۶۶ ۰۰۰)$ و $(۱, ۳ ۰۰۰۰)$ خواهیم داشت. پس

$$m = \frac{۶۶ ۰۰۰ - ۳ ۰۰۰۰}{۴ - ۱} = \frac{۳۶ ۰۰۰}{۳} = ۱۲ ۰۰۰$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۳ ۰۰۰۰ = ۱۲ ۰۰۰ (x - ۱)$$

$$y - ۳ ۰۰۰۰ = ۱۲ ۰۰۰ x - ۱۲ ۰۰۰$$

$$y = ۱۲ ۰۰۰ x + ۱۸ ۰۰۰$$

ب - با استفاده از فرمول بالا سود شرکت در آخر سال هفتم را پیدا کنید.

آخر سال هفتم یعنی $x = ۷$

$y = ۱۲ ۰۰۰ (۷) + ۱۸ ۰۰۰ = ۱ ۰ ۲ ۰۰۰$ میلیون ریال

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –پیش بینی کنید که سود این محصول در چه زمانی به ۱۲۶ ۰۰۰ میلیون ریال می‌رسد.

سود ۱۲۶ ۰۰۰ یعنی $y = ۱۲۶\ ۰۰۰$

$$۱۲۶\ ۰۰۰ = ۱۲\ ۰۰۰\, x + ۱۸\ ۰۰۰$$

$$۱۲\ ۰۰۰\, x = ۱\ ۰\ ۸\ ۰۰۰$$

$$x = \frac{۱\ ۰\ ۸\ ۰۰۰}{۱۲\ ۰۰۰} = ۹$$

بعد از ۹ سال سود به ۱۲۶ ۰۰۰ میلیون ریال خواهد رسید.

۱۷ – قیمت یک خانه دو اتاقه در سال ۱۳۶۰ بالغ بر ۱۰۹۹۰۰ تومان بود. در سال ۱۳۶۳ قیمت همان خانه بالغ بر ۱۲۳۲۰۰ تومان بود. فرض کنید y قمت خانه در سال x باشد. و فرض کنید که $x = ۰$ نماد سال ۱۳۶۰ باشد.

الف –یک معادله خطی بنویسید که انگاره ریاضی قیمت خانه در سال x باشد.

نقاط $(۳, ۱۲۳۲۰۰)$ و $(۰, ۱۰۹۹۰۰)$ داریم. پس

$$m = \frac{۱۲۳۲۰۰ - ۱۰۹۹۰۰}{۳ - ۰} = \frac{۱۳۳۰۰}{۳}$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

$$y - ۱۰۹۹۰۰ = \frac{۱۳۳۰۰}{۳}(x - ۰)$$

$$y - ۱۰۹۹۰۰ = \frac{۱۳۳۰۰}{۳}x$$

$$y = \frac{۱۳۳۰۰}{۳}x + ۱۰۹۹۰۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب - با استفاده از فرمول بالا قیمت این نوع خانه را در سال ۱۳۶۸ پیدا کنید.

سال ۱۳۶۸ یعنی $x = ۸$

$$y = \frac{۱۳۳\ ۰۰}{۳}(۸) + ۱\ ۰\ ۹۹\ ۰۰ = ۱۴۵۳۶۶.۶۷$$ تومان

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۵ – مقدمه ای بر تابع ها Introduction to Functions

تعریف رابطه ، دامنه ، و برد Defining Relation, Domain, and Range

معادله های دو مجهولی ، مانند $y = ۲x + ۱$ **رابطه های** بین کمیت های x و کمیت های y را بیان می کند. مثلا ، اگر $x = ۱$ باشد، این معادله شرح می دهد که چه گونه کمیّت y را مربوط به $x = ۱$ پیدا کنیم. به عبارت دیگر ، معادله $y = ۲x + ۱$ می گوید، اگر کمیّت x را دو برابر کنیم و سپس عدد یک را به حاصل ضرب اضافه کنیم، کمیت y مربوط به آن کمیّت x بدست می آید.پس اگر $x = ۱$ باشد، کمیّت $y = ۲(۱) + ۱ = ۳$ خواهد بود. و در نتیجه زوج مرتب $(۱, ۳)$ داریم.

راه های دیگری هم برای توصیف رابطه های بین دو عدد ، و یا به طور کلی ، اولین مجموعه (مجموعه ورودی ها)و دومین مجموعه (مجموعه خرجی ها)وجود دارد. مثلا

مجموعه اول	مجموعه دوم
جمعیت یک شهر	سن افراد

چند مثال برای رابطه بالا می توان به زوج های مرتب زیر اشاره کرد.

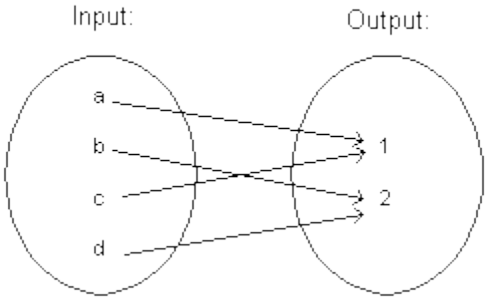
$$(\text{مهران}, ۲۱), (\text{بهمن}, ۱۲), (\text{آرمان}, ۲۴)$$

در ذیل چند طریق دیگر برای توصیف رابطه بین دو مجموعه و زوج های مرتب که ایجاد می کنند.

الف

مجموعه اول مجموعه دوم

مطابقت Correspondence

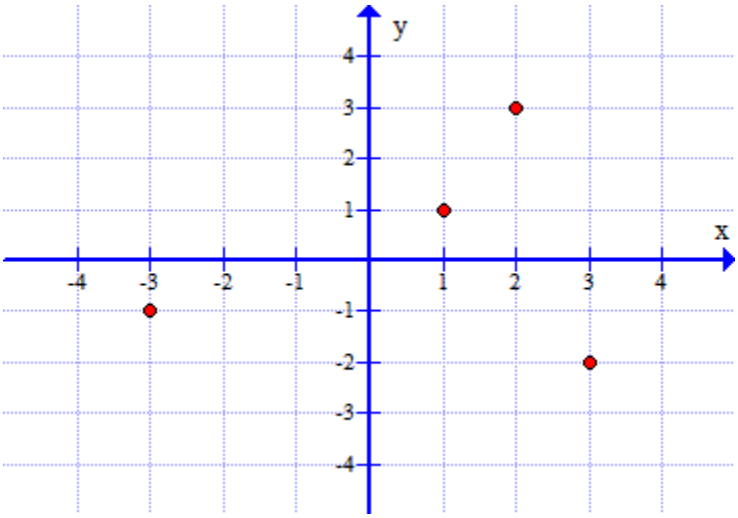


زوج مرتب

$$(a, ۱), (b, ۲), (c, ۱), (d, ۲)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

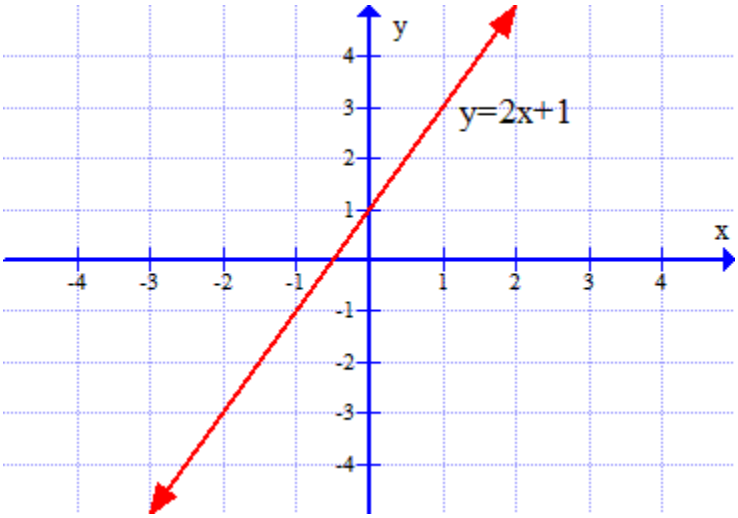
ب



زوج های مرتب

$$(-۳,-۱),(۱,۱),(۲,۳),(۳,-۲)$$

ج



دانلود از سایت ریاضی سرا

تعریف رابطه ، دامنه ، و برد

رابطه عبارت است از یک مجموعه از زوج های مرتب.

دامنه یک رابطه عبارت است ازمجموعه تمام اولین مولفه های زوج های مرتب.

برد یک رابطه عبارت است از مجموعه تمام دومین مولفه های زوج های مرتب.

در مثال الف دامنه رابطه (a,b,c,d) است. و برد آن $(۱,۲)$

توجه –اگر یک رابطه بر حسب کمیت های y و x تعریف شده باشد، قرار ما این خواهد بود که کمیت های x مربوط است به دامنه و کمیت های y مربوط است به برد

مثال –دامنه و برد رابطه های زیر را مشخص کنید.

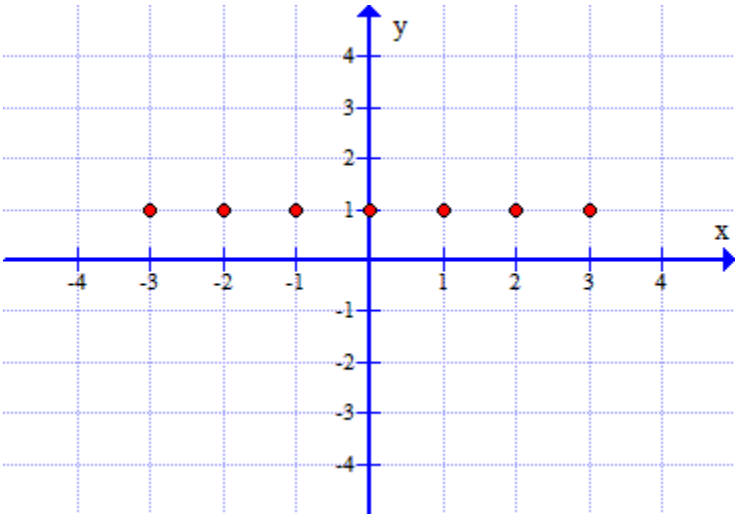
۱) $\{(۲,۳),(۲,۴),(۰,-۱),(۳,-۱)\}$

پاسخ

دامنه عبارت است از مجموعه کلیه اولین مولفه ها یعنی $\{۲,۰,۳\}$و برد مجموعه کلیه دومین مولفه ها یعنی $\{۳,۴,-۱\}$ است.

۲)

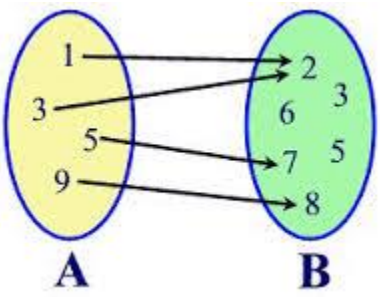
دانلود از سایت ریاضی سرا



پاسخ

دامنه $\{-۳,-۲,-۱,۰\ ۱,۲,۳\}$ برد $\{۱\}$ است.

۳)



پاسخ

دامنه $\{۱,۳.۵,۹\}$ برد $\{۲,۷,۸\}$ است. ملاحظه می کنید که برد شامل ۵،۶،۳ نمی شود، زیرا هیچ عضوی از مولفه اول به این اعداد در مولفه دوم تخصیص داده نشده است.

تابع ها Functions

تابع یک نوع رابطه است که در آن هر یک از اولین مولفه در زوج های مرتب ، فقط و فقط به یک مولفه دوم مربوط می شود.

پس تمام تابع ها ، رابطه هم هستند. اما تمام رابطه ها ، تابع نیستند.

مثال -مشخص کنید که آیا هر کدام از رابطه های زیر ، تابع هم هستند یا نه .

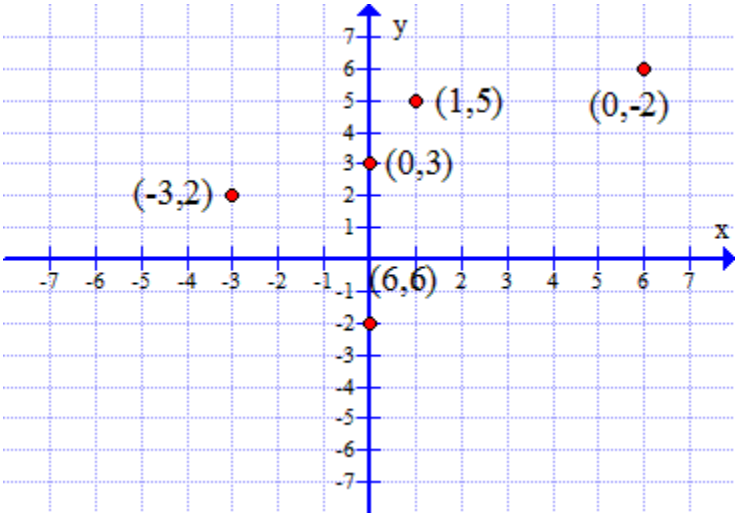
دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $\{(-۲,۵),(۲,۷),(-۳,۵)(۹,۹)\}$

پاسخ

گر چه در زوج های مرتب $(-۳,۵)$ و $(-۲,۵)$ کمیت y یکی است اما هر یک از کمیت های x فقط به یک کمیت y مربوط می شود. پس این رابطه ، یک تابع است.

۵)



کمیت $x=۰$ برای دو کمیّت y تخصیص داده شده یعنی برای ۳ و ۲− پس این رابطه ، تابع نیست.

۶)

ورودی	خروجی
ساکنان یک شهر	سن هر شخص

این رابطه ، یک تابع است. زیرا با وجودی که دو شخص متفاوت ممکن است یک سن داشته بشند، اما هر شخص فقط یک سن دارد. یعنی هر عضوی از مجموعه اول تنها به یک عضو از مجموعه دوم اختصاص داده شده است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $y = ۲x + ۱$

پاسخ

هر عددی که بجای x قرار دهیم ، پس از عملیات ضرب و جمع ، فقط یک نتیجه بدست می آید. پس برای هر کمیّت x فقط یک کمیّت برای y وجود خواهد داشت. لذا این رابطه ، یک تابع است.

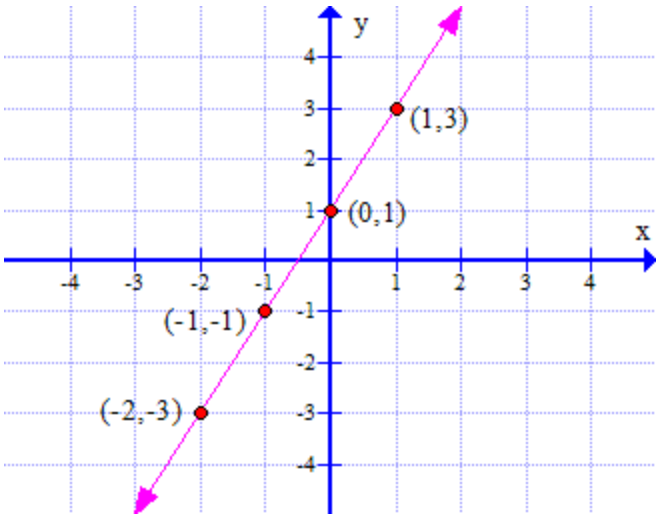
۸) $x = y^۲$

پاسخ

اگر $y = ۳$ باشد، $x = ۹$ خواهد بود. همچنین اگر $y = -۳$ باشد، $x = ۹$ خواهد بود. چون کمیت $x = ۹$ مربوط به دو کمیت y یعنی -۳ و ۳ است، پس این رابطه ، یک تابع نیست.

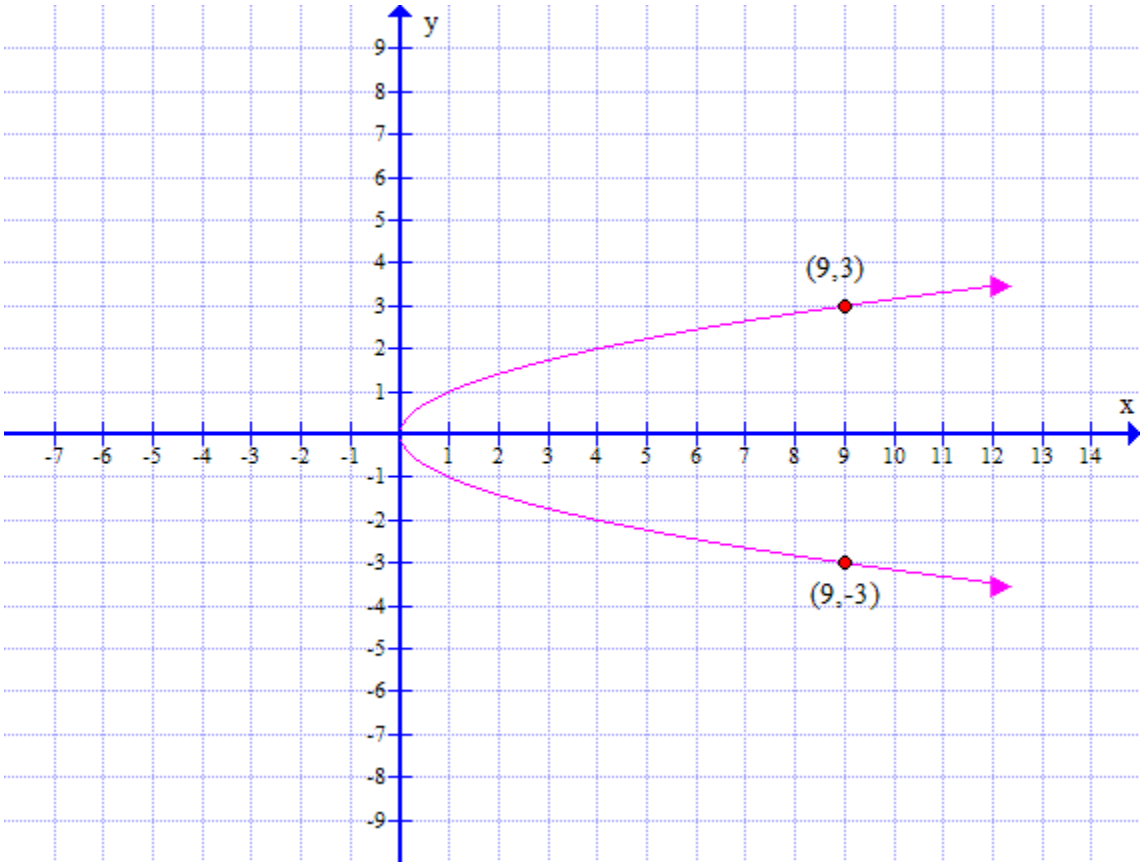
استفاده از تست خط عمودی Using Vertical Line Test

نمودار $y = ۲x + ۱$ در زیر ملاحظه می کنید.



در نمودار بالا ملاحظه می کنید، که برای هر کمیّت x فقط یک کمیت برای y وجود دارد. پس نمودار بالا ، نمودار یک تابع است . اما در نمودارزیر که ترسیم هندسی رابطه $x = y^۲$ است، برای یک کمیّت x دو کمیّت برای y وجود دارد. پس این رابطه ، یک تابع نیست.

دانلود از سایت ریاضی سرا



نمودار می تواند برای این که بدانیم یک رابطه ، همچنین یک تابع است، بکار رود.

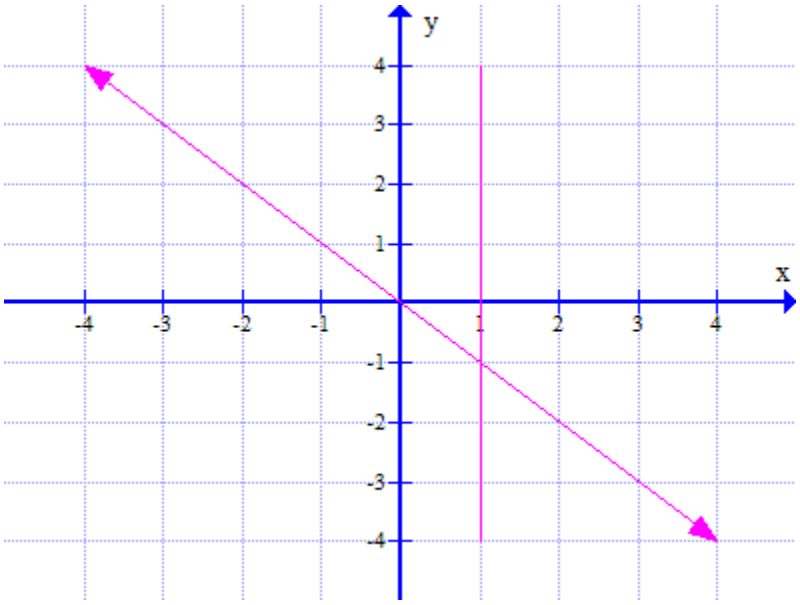
تست خط عمودی

اگر هیچ خط عمودی نمی توان رسم کرد، که یک نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار ، نمودار یک تابع است.

مثال –با استفاده از تست خط عمودی ، مشخص کنید که کدام نمودار ، نمودار یک تابع است.

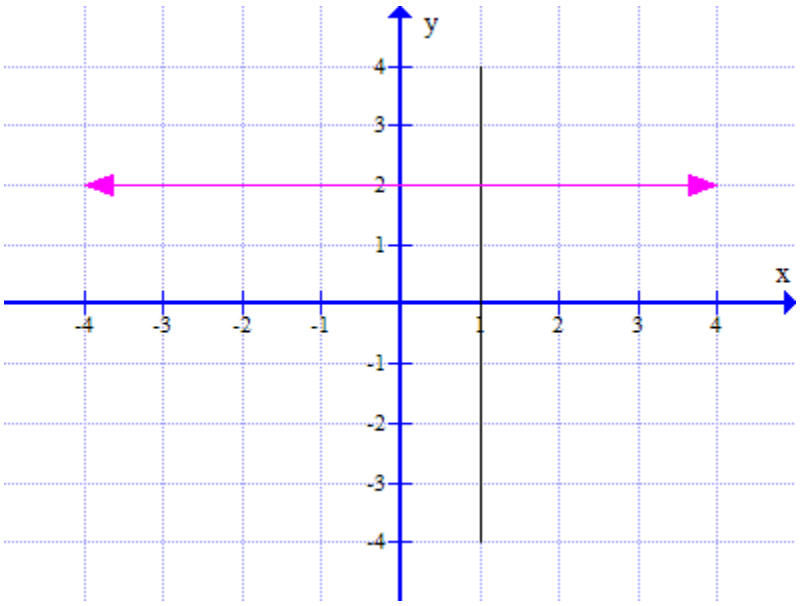
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹)



نمودار بالا ، نمودار یک تابع است.

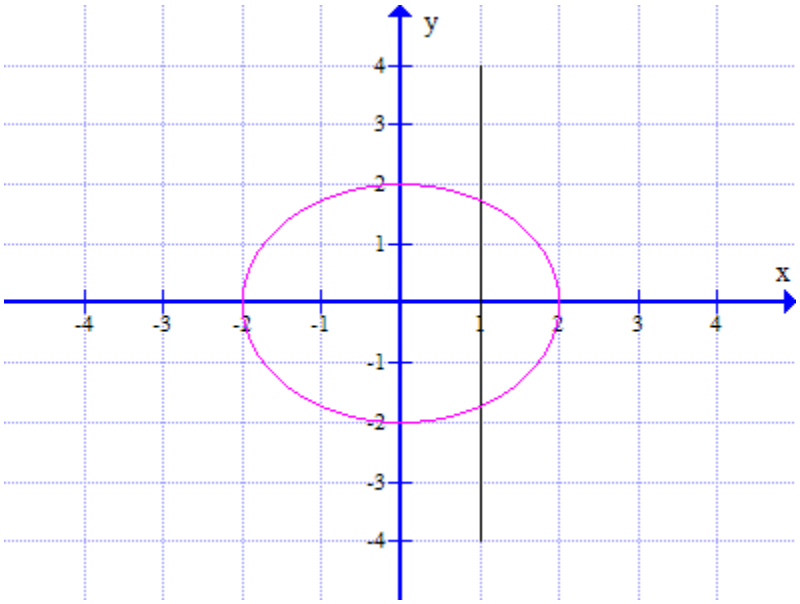
۱۰)



نمودار بالا ، نمودار یک تابع است.

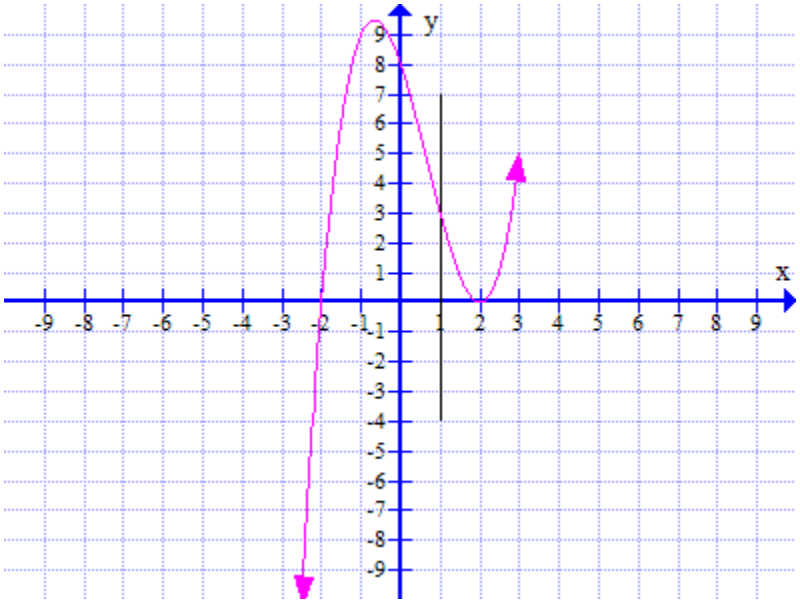
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱)



نمودار بالا ، نمودار یک تابع نیست.

۱۲)



نمودار بالا ، نمودار یک تابع است.

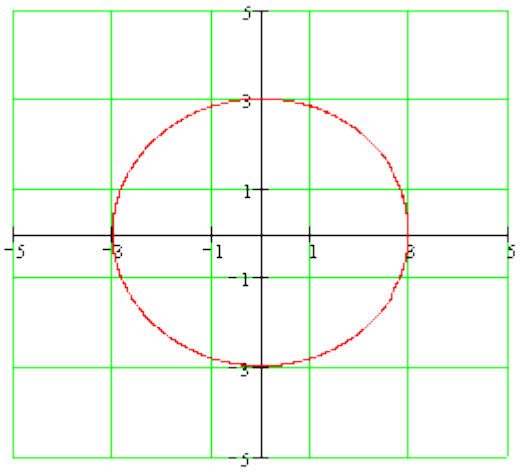
دانلود از سایت ریاضی سرا

پیدا کردن دامنه و برد یک رابطه از نمودار آن رابطه.

Finding Domain and Range From a Graph

مثال –دامنه و برد هر یک از رابطه های زیر را پیدا کنید.

۱۳)



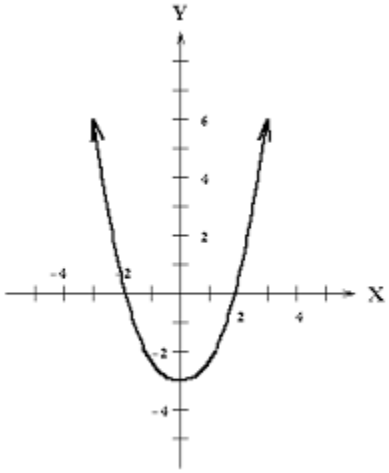
پاسخ

دامنه $[-۳,۳]$

برد $[-۳,۳]$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴)

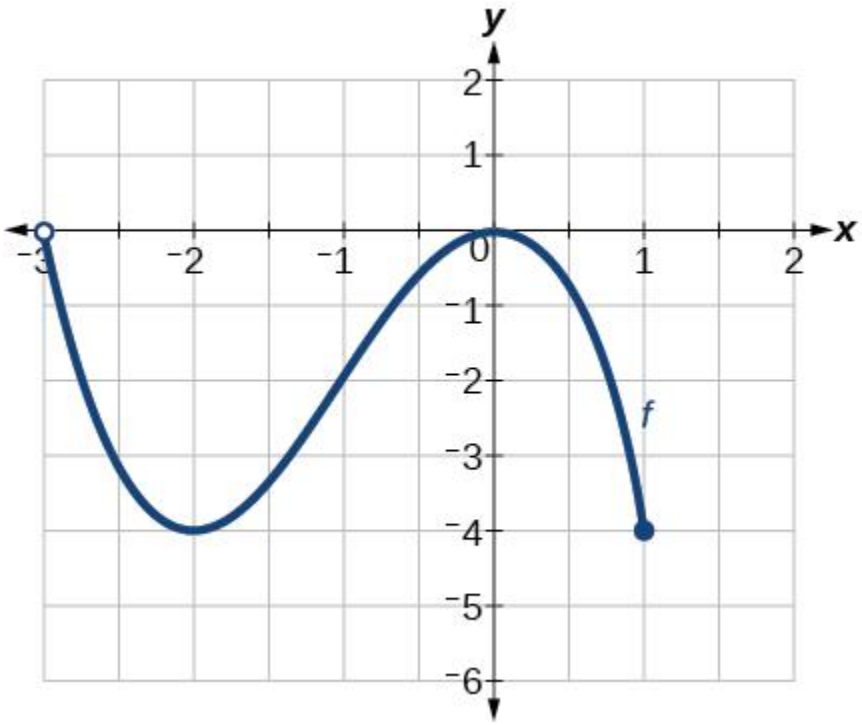


پاسخ

دامنه $(-\infty,\infty)$

برد $[-۳.\infty)$

۱۵)



دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

دامنه $(-۳, ۱]$

برد $[-۴,۰]$

بکار بردن نماد تابع Using Function Notation

بیشتر اوقات حروف f, g, h برای نامیدن تابع ها بکار برده می شوند. برای این که بگوییم y تابعی از x است، می نویسیم $y = f(x)$ این یعنی **y تابعی از x است.** و یا **y بستگی به x دارد.** به همین دلیل به y می گوییم **متقیر وابسته** و x **متغیر مستقل** .نماد $f(x)$ خوانده می شود (اف اکس)

مثلا برای نوشتن تابع $y = ۴x + ۳$ به صورت نماد تابع ، می نویسیم $f(x) = ۴x + ۳$

نماد $f(۱)$ یعنی بجای x بگذارید یک و مقدار y را پیدا کنید. و یا بهتر است بگوییم مقدار تابع را پیدا کنید هنگامی که $x = ۱$ است.

چون

$$f(x) = ۴x + ۳$$

پس

$$f(۱) = ۴(۱) + ۳ = ۷$$

یعنی وقتی که $x = ۱$ است، y و یا $f(x) = ۷$ است. پس زوج مرتب $(۱, ۷)$ خواهیم داشت. در اینجا ورودی یک است و خروجی هفت است.

کمیت هر یک از تابع های زیر را پیدا کنید.

۱۶) $g(x) = ۳x - ۲ \qquad g(۱)$

$$g(۱) = ۳(۱) - ۲ = ۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷) $g(x) = ۳x - ۲ \qquad g(۰)$

$g(۰) = ۳(۰) - ۲ = -۲$

۱۸) $f(x) = ۷x^۲ - ۳x + ۱ \quad f(۱)$

$f(۱) = ۷(۱)^۲ - ۳(۱) + ۱ = ۵$

۱۹) $f(x) = ۷x^۲ - ۳x + ۱ \quad f(-۲)$

$f(-۲) = ۷(-۲)^۲ - ۳(-۲) + ۱ = ۳۵$

پیدا کردن دامنه یک تابع از فرمول آن تابع

دامنه تابع های زیر را پیدا کنید.

۲۰) $f(x) = x^۲ + ۵x$

پاسخ

تابع به ما می گوید، یک عدد را به توان ۲ برسانید، و سپس ۵ برابر آن عدد را اضافه کنید. چون هر دو عملیات نام برده شده را می توان روی کلیه اعداد حقیقی انجام داد ، پس دامنه این تابع کلیه اعداد حقیقی است. و یا می توان نوشت، $(-\infty, \infty)$

۲۱) $f(x) = \dfrac{۳x}{x^۲ - ۴}$

پاسخ

می دانیم که تقسیم بر صفر تعریف نشدنی است، پس مخرج کسر یعنی $x^۲ - ۴$ نباید صفر باشد. لذا باید ببینیم در چه صورتی این عبارت صفر می شود.

$x^۲ - ۴ = ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$(x+۲)(x-۲)=۰$

$x=-۲$ یا $x=۲$

بنا بر این x نباید ۲ و یا ۲− باشد. لذا می گوییم دامنه این تابع $\{x|x\neq ۲, x\neq -۲\}$ یا به عبارت دیگر ، دامنه این تابع کلیه اعداد حقیقی است بجز ۲ و ۲−

۲۲) $h(x)=\sqrt{۴-۳x}$

پاسخ

می دانیم که فقط اعداد نا منفی ریشه دوم و یا کلی تر بگوییم ریشه یک عدد زوج دارند. پس عبارت $۴-۳x$ باید نا منفی باشد.

$۴-۳x\geq ۰$

$-۳x\geq -۴$

$\frac{-۳x}{-۳}\leq\frac{-۴}{-۳}$

$x\leq\frac{۴}{۳}$

پس دامنه این تابع کلیه اعداد حقیقی کوچک تر و یا مساوی $\frac{۴}{۳}$ است. یا

$\left\{x|x\leq\frac{۴}{۳}\right\}$ یا $\left(-\infty,\frac{۴}{۳}\right]$

رسم نمودار تابع های خطی

به خاطر دارید که نمودار یک معادله خطی دو مجهولی ، یک خط است. همچنین دیدیم که اگر خطی ، عمودی نباشد،شرایط تست خط عمود را دارا است. پس تمام معادله های خطی (بجز آنها که نمودارشان یک خط عمودی است) یک تابع هستند. این نوع تابع ها را **تابع خطی** می نامیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

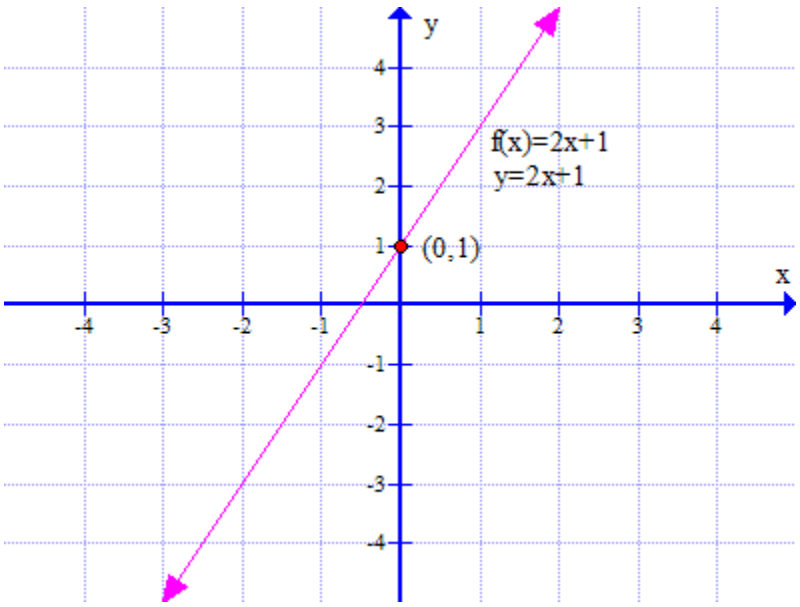
تابع خطی - تابعی است که بتوان آنرا به صورت $f(x) = mx + b$ نوشت.

مثال ۲۳) تابع $f(x) = ۲x + ۱$ را رسم کنید.

پاسخ

چون $y = f(x)$ است، پس می توانیم بجای $f(x)$ بگذاریم y

نمودار $y = ۲x + ۱$ خطی است با شیب ۲ و محل تقاطع با محور y مساوی ۱ .



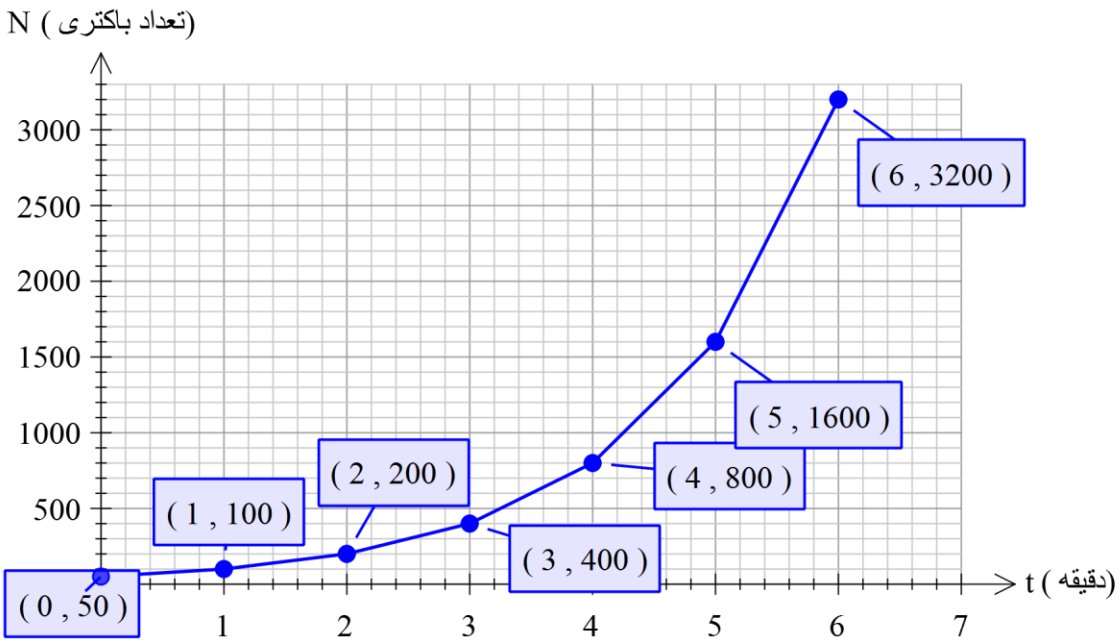
تابع ها اطراف ما هست.

مساحت یک دائره تابع شعاع آن است.

قیمت یک کالا تابع تعداد تقاضای آن کالا است.

تعداد باکتری های کشت شده در محیط مناسب تابع زمان است. در نمودار زیر یک نمونه از این تابع برای یک نوع باکتری نشان داده می شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۵

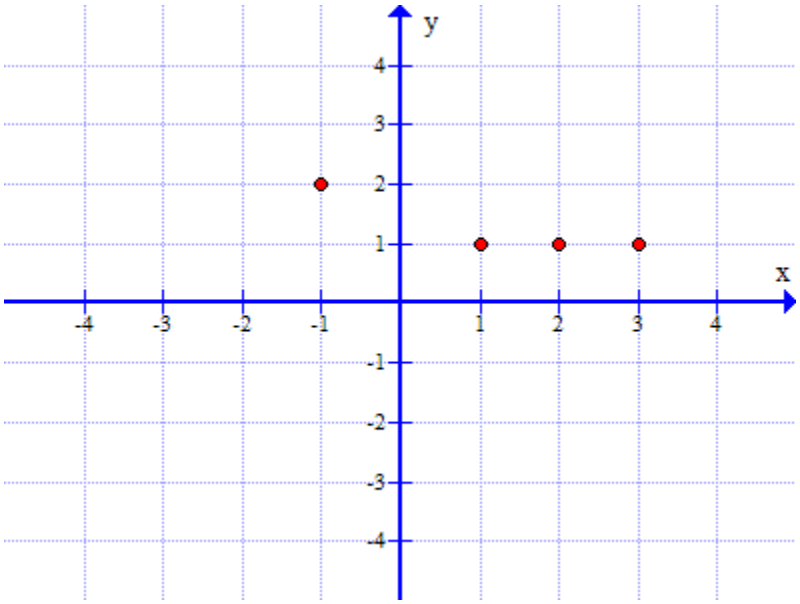
دامنه و برد هر یک از رابطه های زیر را پیدا کنید. همچنین مشخص کنید که آیا آن رابطه، تابع هم دست یانه .

۱) $\{(-۱,-۷),(۰,۶),(-۲,۲),(۵,۶)\}$

۲) $\{(-۲,۴),(۶,۴),(-۲,-۳),(-۷,-۸)\}$

۳) $\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴)\}$

۴)



دانلود از سایت ریاضی سرا

۵)

خروجی	ورودی
درجه سانتی گراد	درجه فارنهایت
۰	۳۲
۴۰	۱۰۴
۱۰۰	۲۱۲
۱۰	۵۰

۶)

خروجی	ورودی
۰	۲
۰	۱−
۰	۵
۰	۱۰۰

آیا رابطه های زیر تابع هم هستند؟

۷) $y = x + ۱$

۸) $y = x^{۲}$

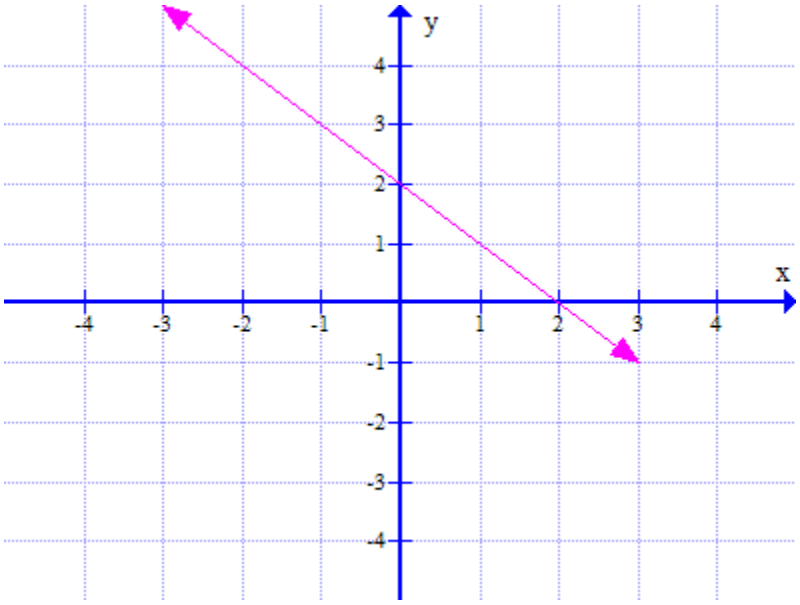
۹) $x = ۲y^{۲}$

۱۰) $y - x = ۷$

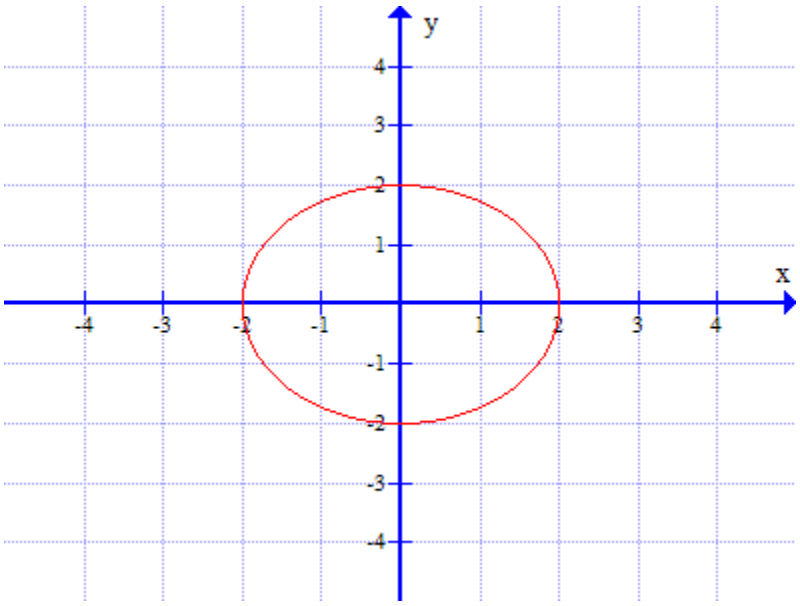
دانلود از سایت ریاضی سرا

با استفاده از تست خط عمودی ، مشخص کنید آیا نمودار های زیر ، نمودار یک تابع است یا نه.

۱۱)

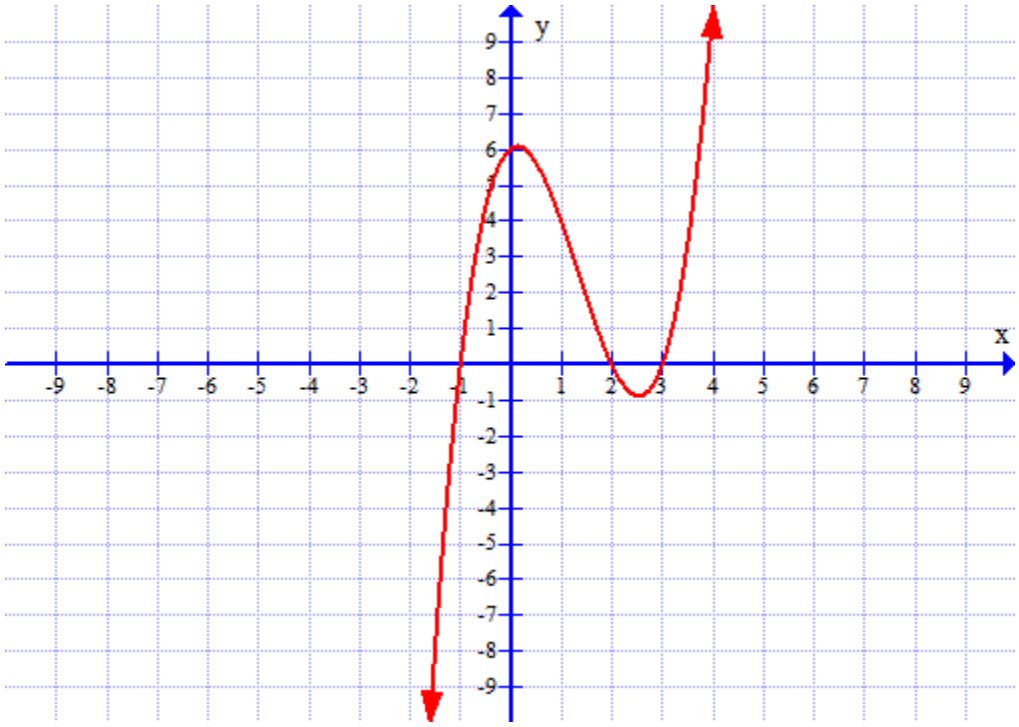


۱۲)



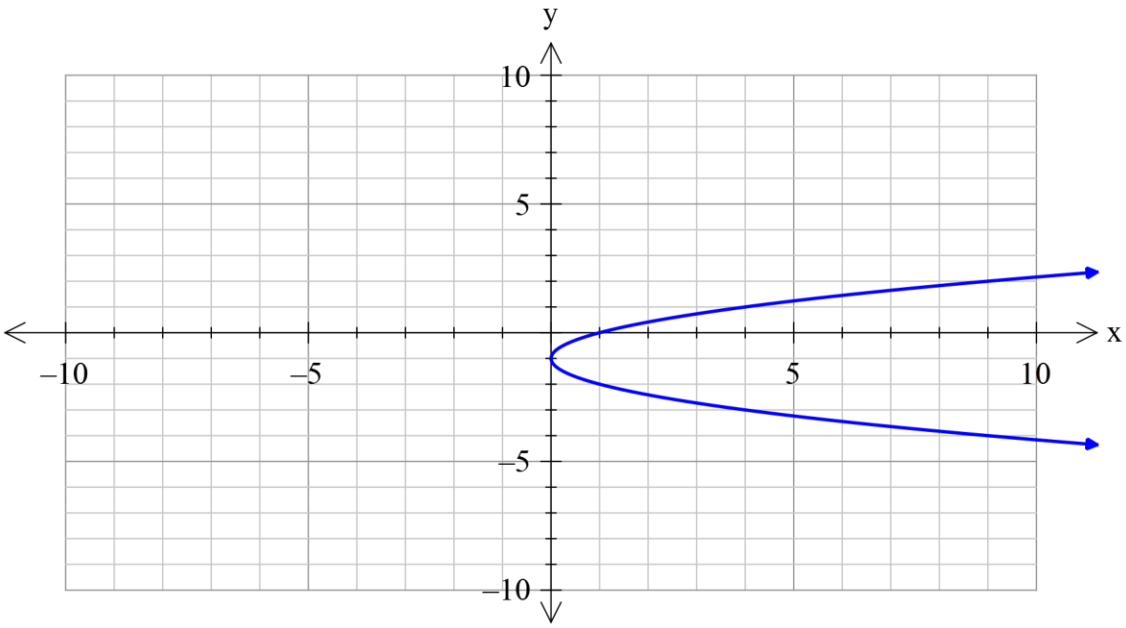
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳)



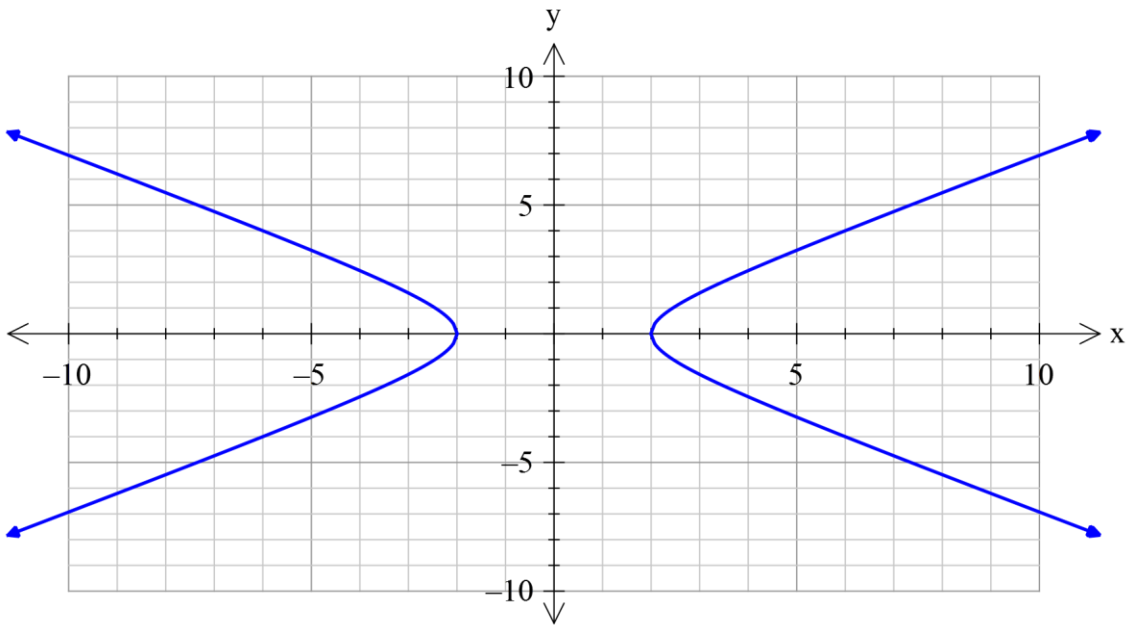
دامنه و برد هر یک از رابطه های زیر را پیدا کنید.

۱۴)

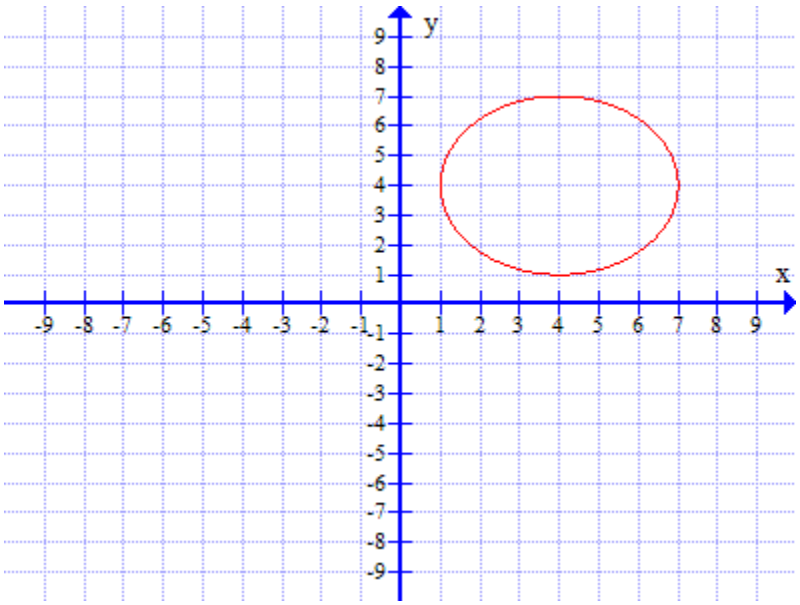


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵)

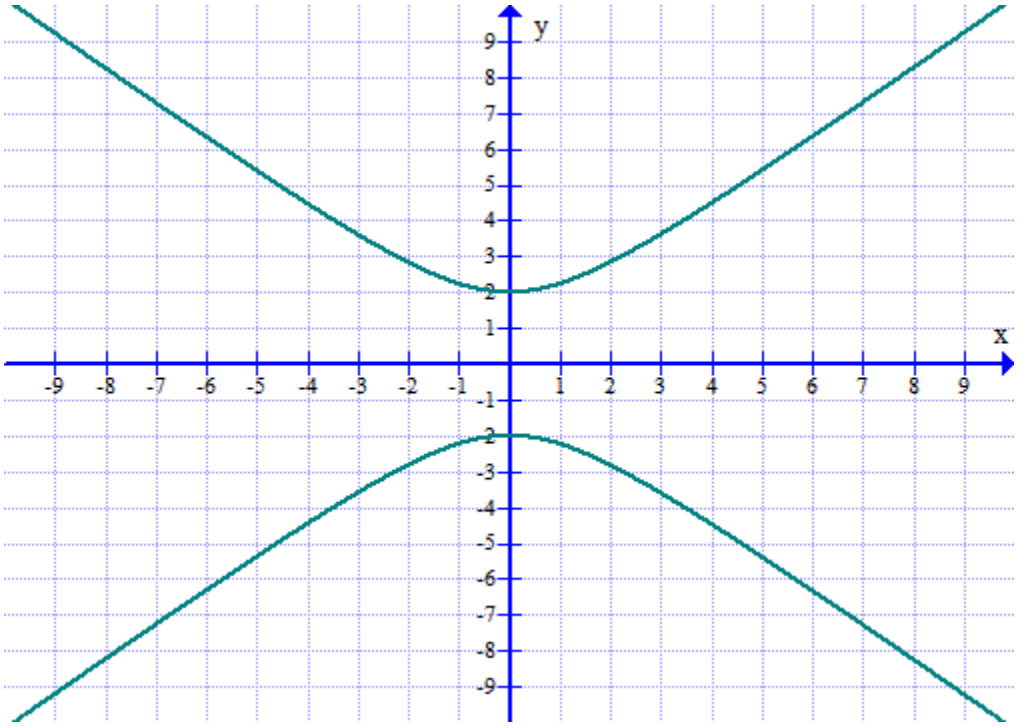


۱۶)

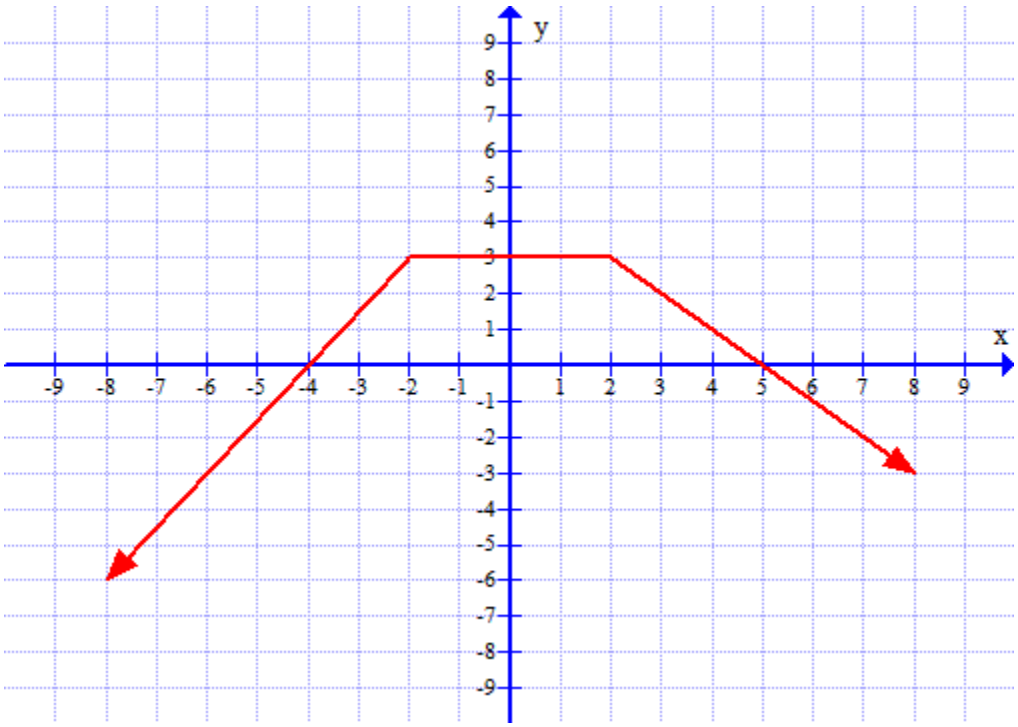


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷



۱۸)



دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر $f(x) = ۳x + ۳$ و $g(x) = ۴x^۲ - ۶x + ۳$ و $h(x) = ۵x^۲ - ۷$ باشد ، مقدار هر یک از تابع های زیر را پیدا کنید.

۱۹) $f(۴)$

۲۰) $h(-۳)$

۲۱) $g(۲)$

نمودار هر یک از تابع های زیر را رسم کنید.

۲۲) $f(x) = ۲x + ۳$

۲۳) $g(x) = -۳x$

دامنه تابع های زیر را پیدا کنید.

۲۴) $f(x) = ۵x + ۴$

۲۵) $h(x) = \dfrac{x}{x^۲ + ۱}$

۲۶) $f(x) = \dfrac{x}{x^۲ - ۱۶}$

۲۷) $g(x) = \sqrt{۳x - ۱۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۷.۵

دامنه و برد هر یک از رابطه های زیر را پیدا کنید. همچنین مشخص کنید که آیا آن رابطه، تابع هم دست یانه .

۱) $\{(-۱,-۷),(۰,۶),(-۲,۲),(۵,۶)\}$

دامنه : $\{-۱,۰,-۲,۵\}$

تابع است.

برد : $\{-۷,۶,۲\}$

۲) $\{(-۲,۴),(۶,۴),(-۲,-۳),(-۷,-۸)\}$

دامنه : $\{-۲,۶,-۷\}$

برد : $\{۴,-۳,-۸\}$

تابع نیست.

۳) $\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴)\}$

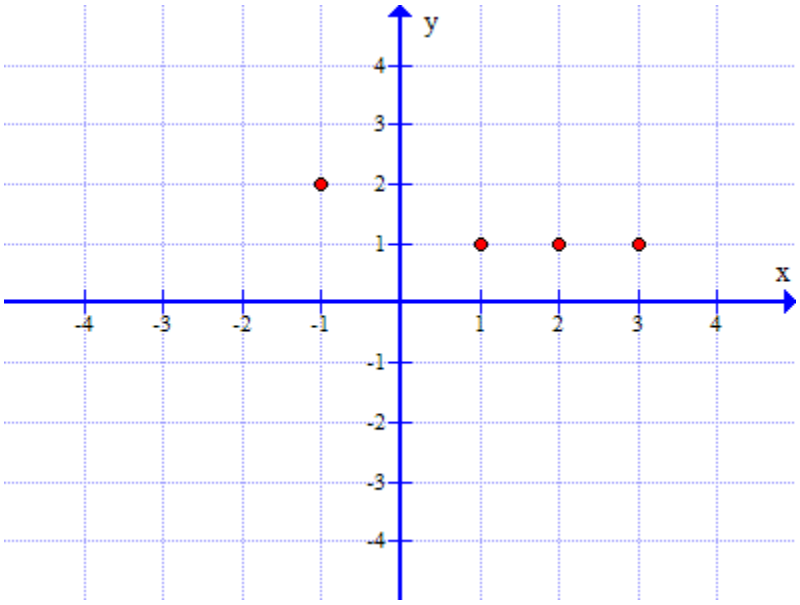
دامنه : $\{۱\}$

برد : $\{۱,۲,۳,۴\}$

تابع نیست.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۴)



دامنه : $\{-۱, ۱, ۲, ۳\}$

برد : $\{۲, ۱\}$

تابع است.

۵)

ورودی	خروجی
درجه فارنهایت	درجه سانتی گراد
۳۲	۰
۱۰۴	۴۰
۲۱۲	۱۰۰

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵۰	۱۰

دامنه : $\{۳۲^\circ, ۱۰۴^\circ, ۲۱۲^\circ, ۵۰^\circ\}$

برد : $\{۰^\circ, ۴۰^\circ, ۱۰۰^\circ, ۱۰^\circ\}$

تابع است.

۶)

ورودی	خروجی
۲	۰
۱−	۰
۵	۰
۱۰۰	۰

دامنه : $\{۲, -۱, ۵, ۱۰۰\}$

برد : $\{۰\}$

تابع است.

آیا رابطه های زیر تابع هم هستند؟

۷) $y = x + ۱$

تابع است.

۸) $y = x^۲$

تابع است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $x = ۲y^۲$

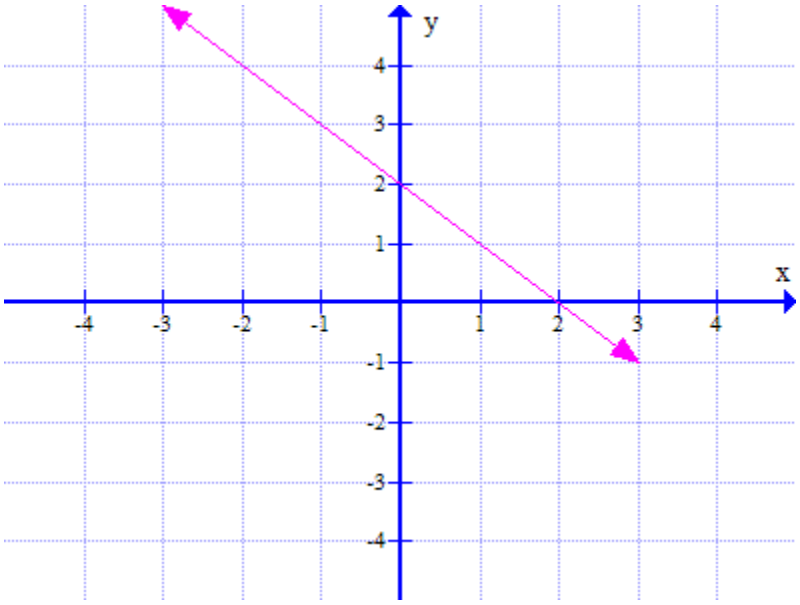
تابع نیست.

۱۰) $y - x = ۷$

تابع است.

با استفاده از تست خط عمودی ، مشخص کنید آیا نمودار های زیر ، نمودار یک تابع است یا نه.

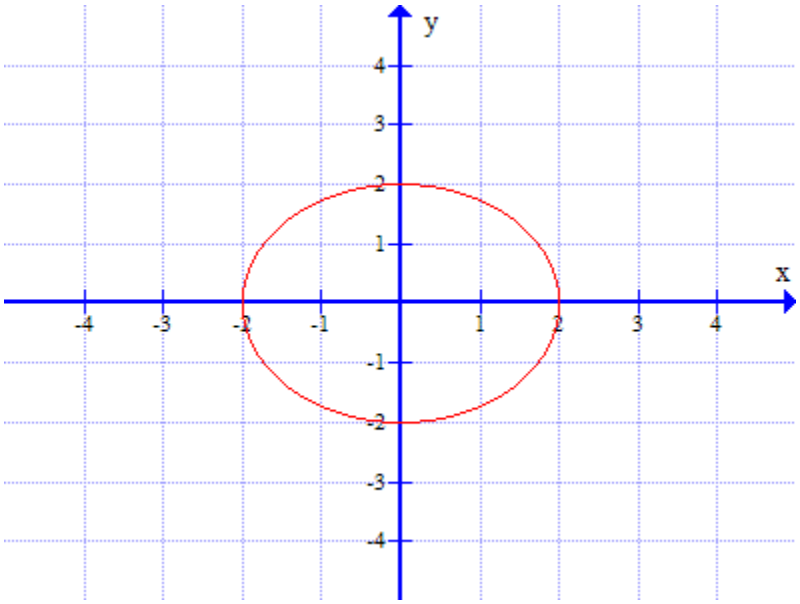
۱۱)



تابع است.

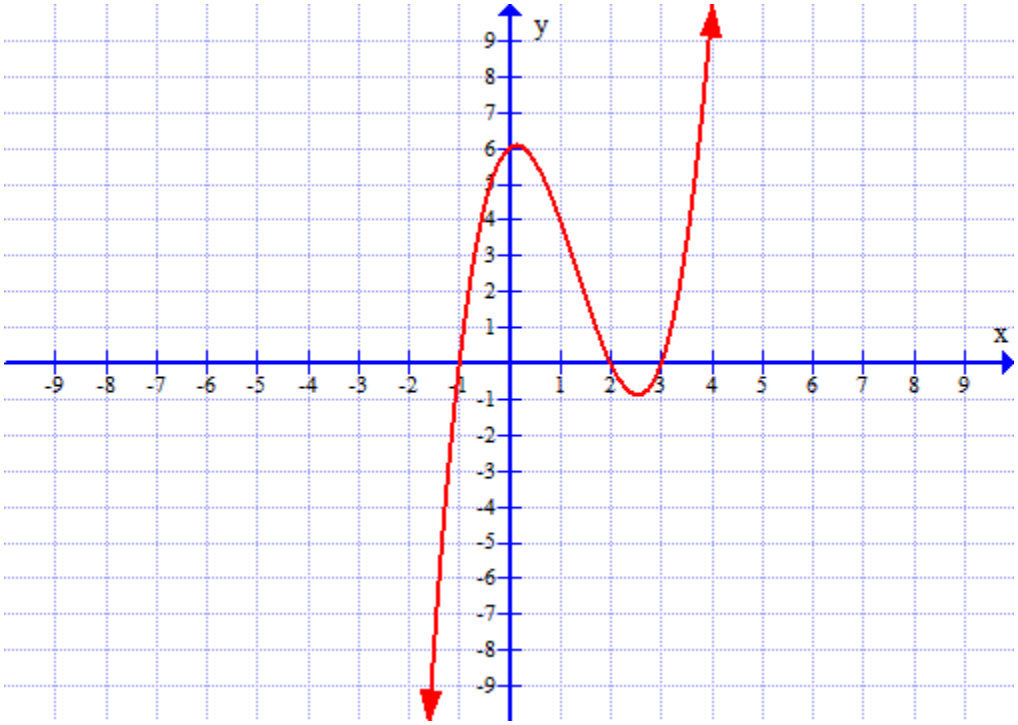
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲)



تابع نیست.

۱۳)

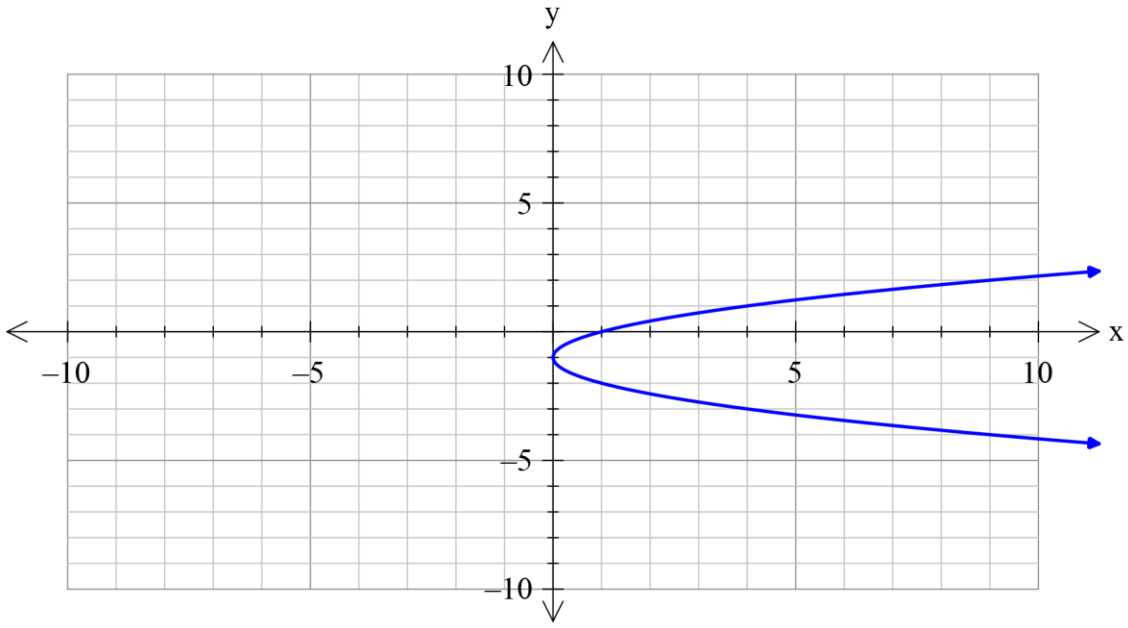


تابع است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

دامنه و برد هر یک از رابطه های زیر را پیدا کنید.

۱۴)

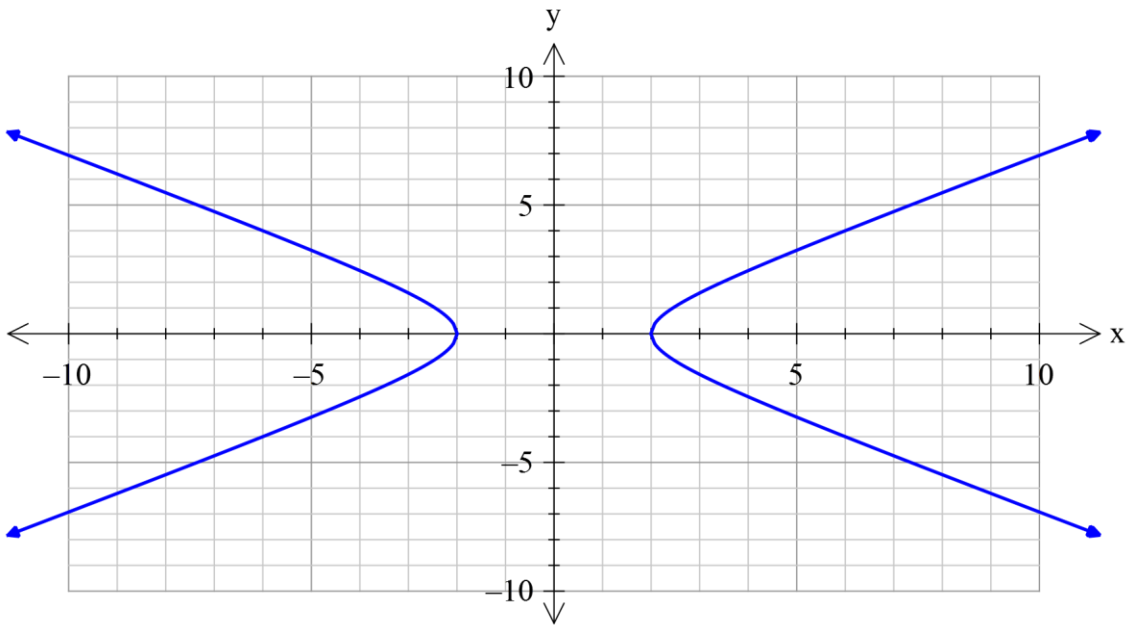


دامنه $[0, \infty)$

برد $(-\infty, \infty)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵)

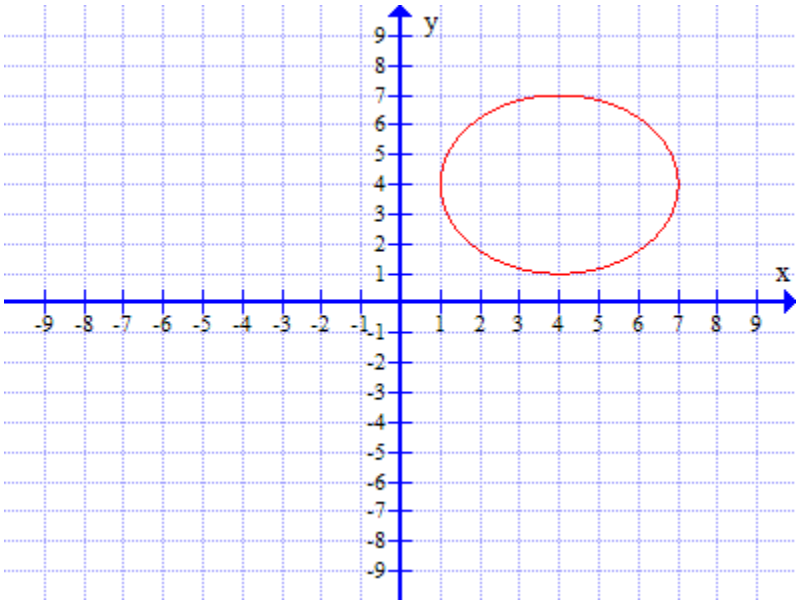


دامنه $(-\infty,-۲]\cup[۲,\infty)$

برد $(-\infty,\infty)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶)

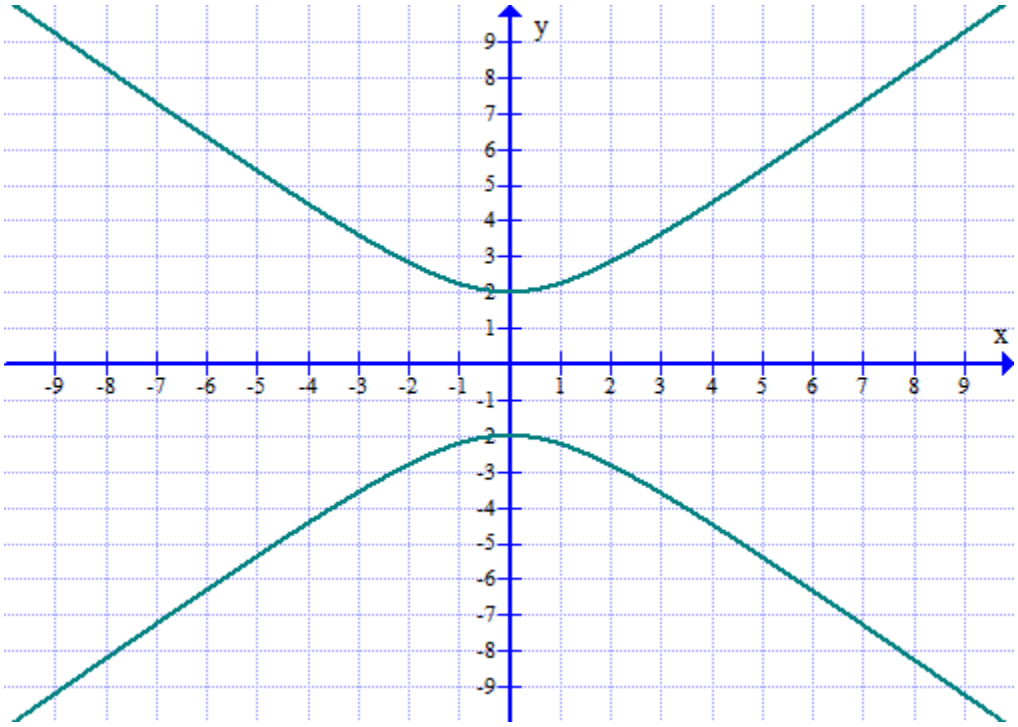


دامنه $[۱,۷]$

برد $[۱,۷]$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷

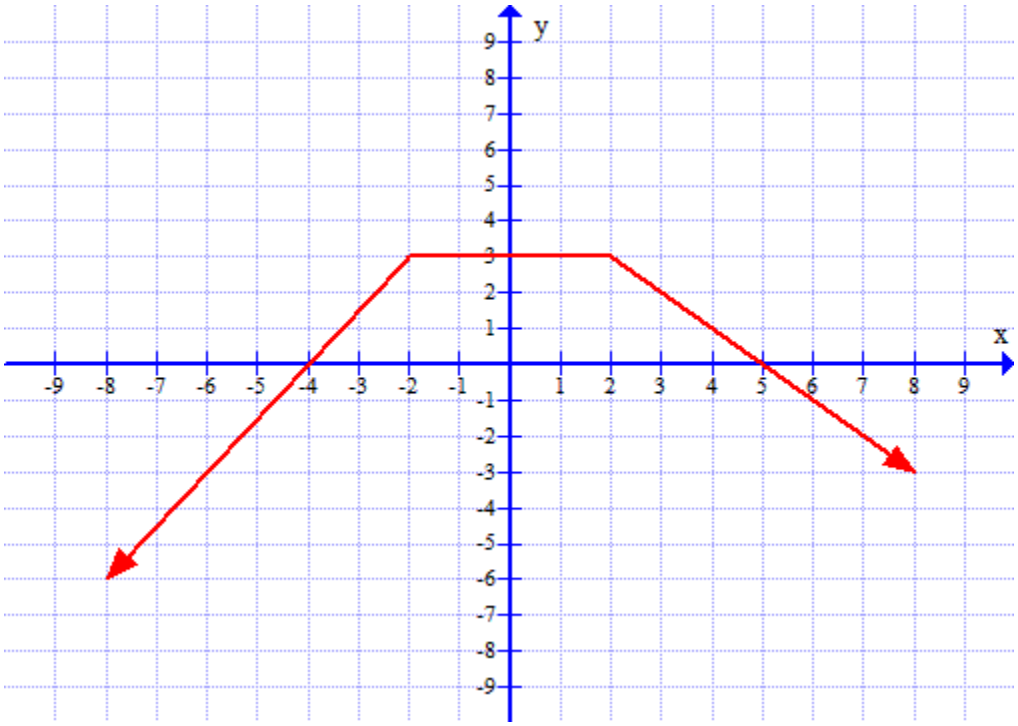


دامنه $(-\infty,\infty)$

برد $(-\infty,-۲]\cup[۲,\infty)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸)



دامنه $(-\infty, \infty)$

برد $(-\infty ۳،]$

اگر $f(x) = ۳x + ۳$ و $g(x) = ۴x^۲ - ۶x + ۳$ و $h(x) = ۵x^۲ - ۷$ باشد ، مقدار هر یک از تابع های زیر را پیدا کنید.

۱۹) $f(۴)$

$$f(۴) = ۳(۴) + ۳ = ۱۲ + ۳ = ۱۵$$

۲۰) $h(-۳)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$h(-۳) = ۵(-۳)^{۲} - ۷ = ۵(۹) - ۷ = ۴۵ - ۷ = ۳۸$$

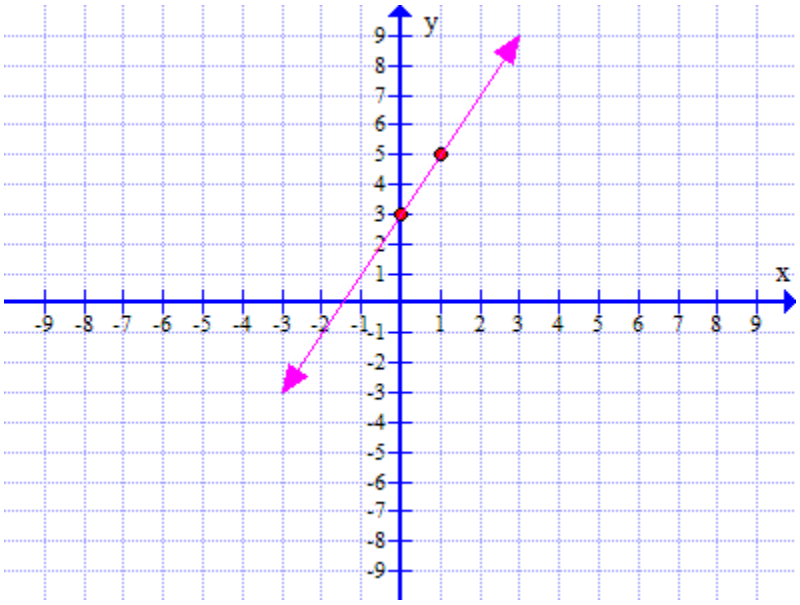
۲۱) $g(۲)$

$$g(۲) = ۴(۲)^{۲} - ۶(۲) + ۳ = ۱۶ - ۱۲ + ۳ = ۷$$

نمودار هر یک از تابع های زیر را رسم کنید.

۲۲) $f(x) = ۲x + ۳$

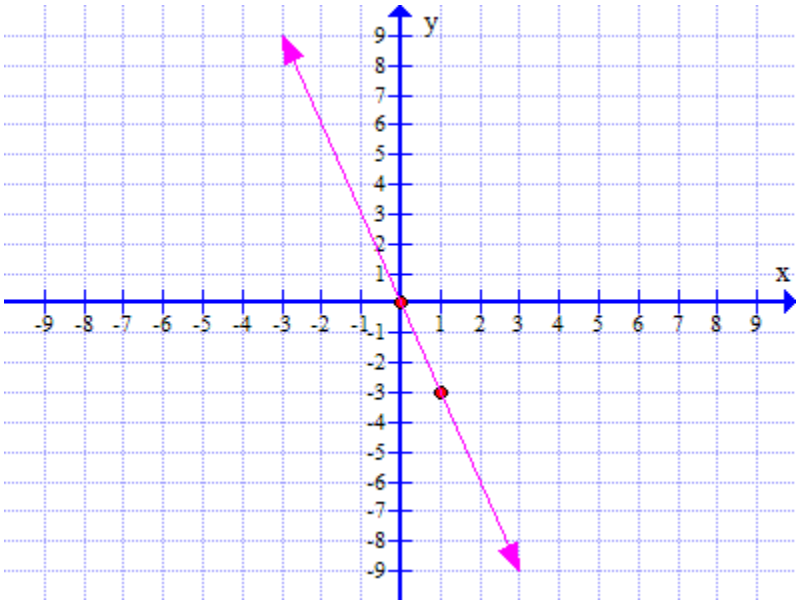
تابع به شکل $f(x) = mx + b$ است ، $b = ۳$ و $m = ۲$ پس نقطه $(۰,۳)$ را روی محور های مختصات مشخص می کنیم، سپس از آن نقطه ۲ واحد به طرف بالا و یک واحد به سمت راست حرکت می کنیم. با این کار یک نقطه دیگر با مختصات $(۱,۵)$ بدست می آوریم. این نقطه را هم مشخص می کنم. حال این دو نقطه را به یک دیگر متصل می کنیم. خط مورد نظر را داریم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳) $g(x) = -۳x$

محل بر خورد این خط با محور y صفر است. یعنی این خط از مبدا می گذرد. شیب این خط ۳− است. پس از مبدا سه واحد به طرف پایین و یک واحد به طرف راست حرکت می کنیم. نقطه $(۱, -۳)$ بدست می آوریم. این دو نقطه را به یک دیگر وصل می کنیم.



دامنه تابع های زیر را پیدا کنید.

۲۴) $f(x) = ۵x + ۴$

دامنه این تابع کلیه اعداد حقیقی است.

۲۵) $h(x) = \dfrac{x}{x^۲ + ۱}$

مخرج نباید صفر بشود. عبارت $x^۲ + ۱$ هرگز صفر نمی شود. چون هر عددی که بجای x بگذاریم ، و سپس به توان ۲ برسانیم، حاصل یک عدد مثبت است. حتی اگر $x = ۰$ باشد، مخرج ۱ خواهد بود. پس دامنه این تابع کلیه اعداد حقیقی است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۶) $f(x) = \frac{x}{x^{۲} - ۱۶}$

$x^{۲} - ۱۶ = ۰$

$(x - ۴)(x + ۴) = ۰$

$x - ۴ = ۰$ یا $x + ۴ = ۰$

$x = ۴$ یا $x = -۴$

بنا بر این مخرج این تابع برای $x = ۴$ و $x = -۴$ صفر می شود. پس

دامنه : $\{x | x \neq -۴, x \neq ۴\}$

و یا

دامنه : $(-\infty, -۴) \cup (-۴, ۴) \cup (۴, \infty)$

۲۷) $g(x) = \sqrt{۳x - ۱۲}$

عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد.

$۳x - ۱۲ \geq ۰$

$۳x \geq ۱۲$

$\frac{۳x}{۳} \geq \frac{۱۲}{۳}$

$x \geq ۴$

دامنه : $\{x | x \geq ۴\}$

و یا

دامنه : $[۴, \infty)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

رسم نمودار نا معادله های خطی Graphing Linear Inequalities

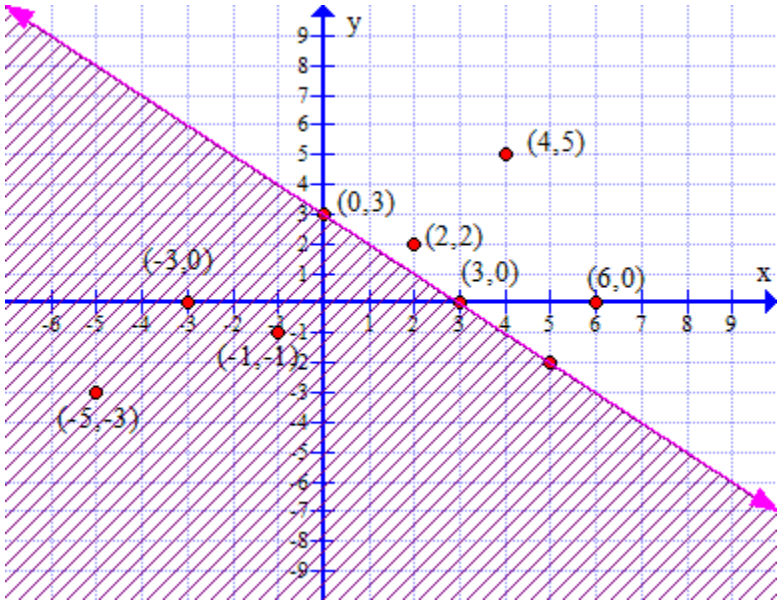
رسم نمودار نا معادله های خطی

بخاطر دارید که گفتیم نمودار یک معادله خطی دو مجهولی ، نمودار کلیه زوج های مرتبی است که معادله را بر قرار می کنند، و مشخص کردیم که نمودار، یک خط است. اینجا نمودار **نا معادله های خطی** دو مجهولی را رسم می کنیم. یعنی نمودار تمام زوج های مرتبی که نا معادله را بر قرار می کنند.

اگر نماد مساوی در یک معادله خطی دو مجهولی را به نماد نا مساوی تبدیل کنیم، نتیجه یک نا معادله خطی دو مجهولی بدست می آید. چند نمونه در ذیل می آید.

$$۳x + ۵y \geq ۶ \qquad ۲x - ۴y < -۳ \qquad ۴x > ۲ \qquad y \leq ۵$$

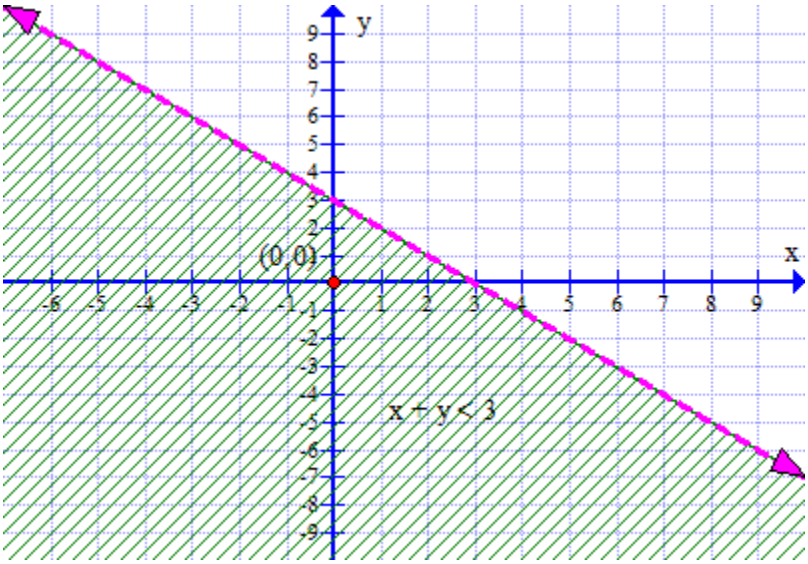
مثلا برای رسم نمودار نا معادله خطی $x + y < ۳$ اول نمودار معادله مربوط به آن یعنی $x + y = ۳$ را رسم می کنیم. نتیجه **خط مرزی** **Boundary Line** شامل کلیه زوج های مرتبی است که مجموع مختصات آنها ۳ است. این خط مرزی ، صفحه را به دو بخش تقسیم می کند، که آنرا **نیم صفحه ها** **Half-Planes** می نامیم.



کلیه نقاطی که بالای خط مرزی هستند، نا معادله $x + y > ۳$ را بر قرار می کنند. کلیه نقاطی که زیر خط مرزی قرار دارند، نا معادله $x + y < ۳$ را بر قرار می کنند. بنا بر این **منطقه جواب** **Solution Region** نا معادله

$x + y < ۳$ نیم صفحه زیر خط مرزی است. خط مرزی هم باید به صورت خط چین نشان داده شود، چون نماد $<$ داریم که دلیل بر آن است، که خود خط قسمتی از جواب نیست. پاسخ صحیح نا معادله فوق در شکل زیر نشان داده می شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا



رسم نا معادله خطی دو مجهولی

الف –نماد نا مساوی را به نماد تساوی تبدیل کنید و خط مرزی را رسم کنید. اگر نماد های $\geq$ یا $\leq$ در نا معادله باشد، **خط کامل Solid Line** رسم کنید. اگر نماد $>$ یا $<$ در نا معادله باشد، **خط چین Dashed Line** رسم کنید.

ب – یک نقطه آزمایشی که روی خط مرزی نباشد انتخاب کنید و مختصات آنرا در نا معادله اصلی امتحان کنید.

ج – اگر نا معادله بر قرار بود ، این نیم صفحه که نقطه آزمایشی در آن قرار دارد، سایه دار کنید. در غیر این صورت ، نیم صفحه دیگر را سایه دار کنید.

مثال – نمودار ها را رسم کنید.

۱) $۲x - y < ۶$

پاسخ

خط مرزی برای این نا معادله $۲x - y = ۶$ است. چون نماد $<$ داریم، خط چین رسم می کنیم. حالا باید یک نقطه آزمایشی انتخاب کنیم. بهترین نقطه $(۰,۰)$ است. پس بجای x و y می گذاریم صفر.

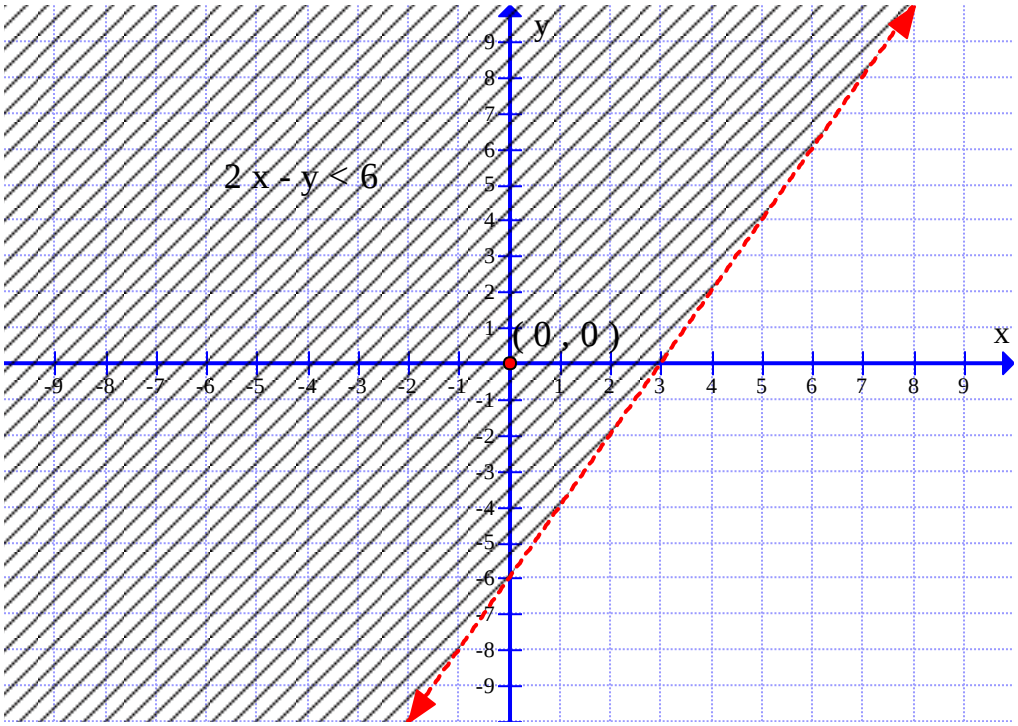
$۲x - y < ۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$۲(۰) - (۰) < ۶$

$۰ < ۶$

نا معادله بر قرار است. پس آن نیم صفحه که نقطه مبدا در آن قرار دارد، سایه دار می کنیم.



۲) $۳x \geq y$

پاسخ

خط مرزی ، نمودار $۳x = y$ است. خط مرزی را کامل رسم می کنیم ، چون نماد $\geq$ داریم. نقطه $(۰,۱)$ را به عنوان نقطه آزمایشی انتخاب می کنیم.

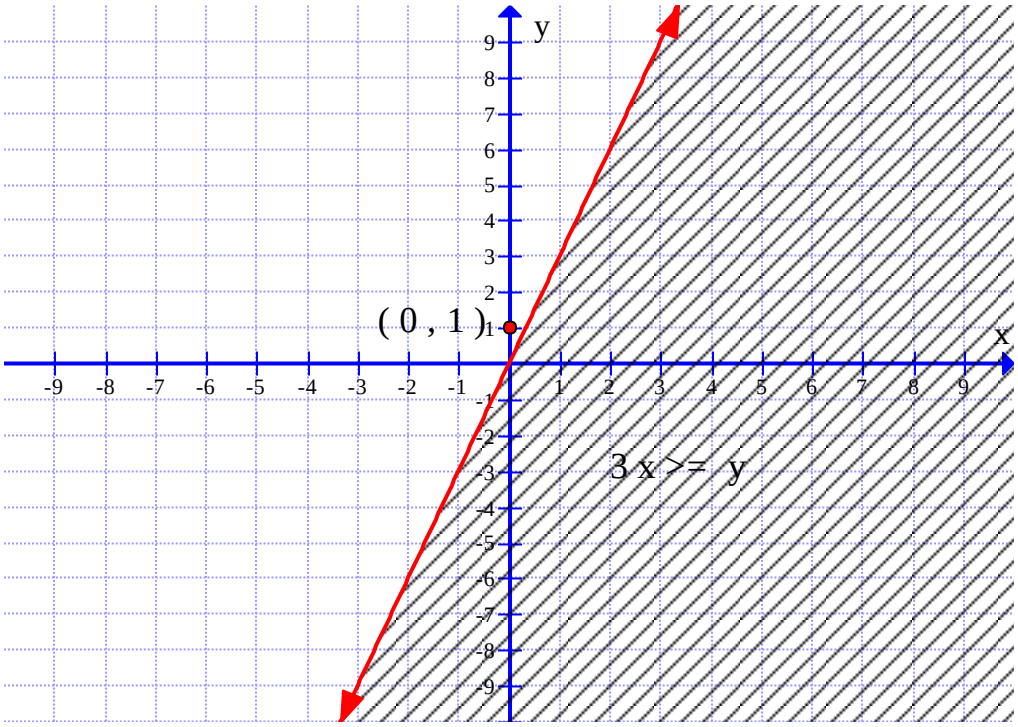
$۳x \geq y$

$۳(۰) \geq ۱$

$۰ \geq ۱$

ملاحظه می کنید که نقطه آزمایشی ، نا معادله را بر قرار نمی کند. پس منطقه جواب ، نیم صفحه دیگر است.

دانلود از سایت ریاضی سرا



نکته – اگر خط مرزی از مبدا عبور نکند، بهترین نقطه آزمایشی همان مبدا یعنی (۰,۰) است.

رسم نمودار های اشتراک ها و اتحاد ها Graphing Intersections and Unions

در فصل اول در مورد اشتراک و اتحاد مجموعه ها صحبت کردیم. گفتیم که اشتراک دومجموعه عبارت است از مجموعه ای که شامل کلیه اجزائ مشترک در هر دو مجموعه باشد. اشتراک دو مجموعه را با " و " یا نماد $\cap$ نشان می دهیم. مانند

$$\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \cap \{۳,۵,۷,۸,۹\} = \{۳,۵\}$$

بهتر است بجای اشتراک مجموعه ها بگوییم فصل مشترک مجموعه ها.

همچنین گفتیم که اتحاد دو مجموعه عبارت است از مجموعه ای است که شامل عناصری است که یا در مجموعه اولی و یا دومی و یا هر دو باشد. اتحاد دو مجموعه را با " یا " و یا نماد $\cup$ نشان می دهیم. مانند

$$\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \cup \{۳,۵,۷,۸,۹\} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$

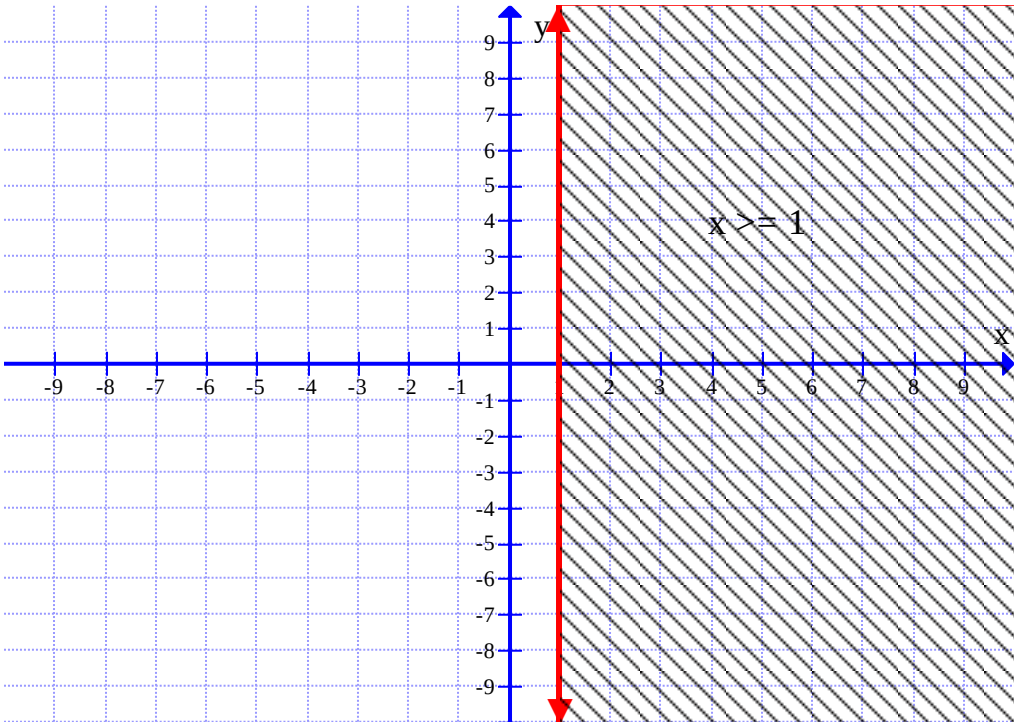
بهتر است بجای اتحاد مجموعه ها بگوییم اجتماع مجموعه ها.

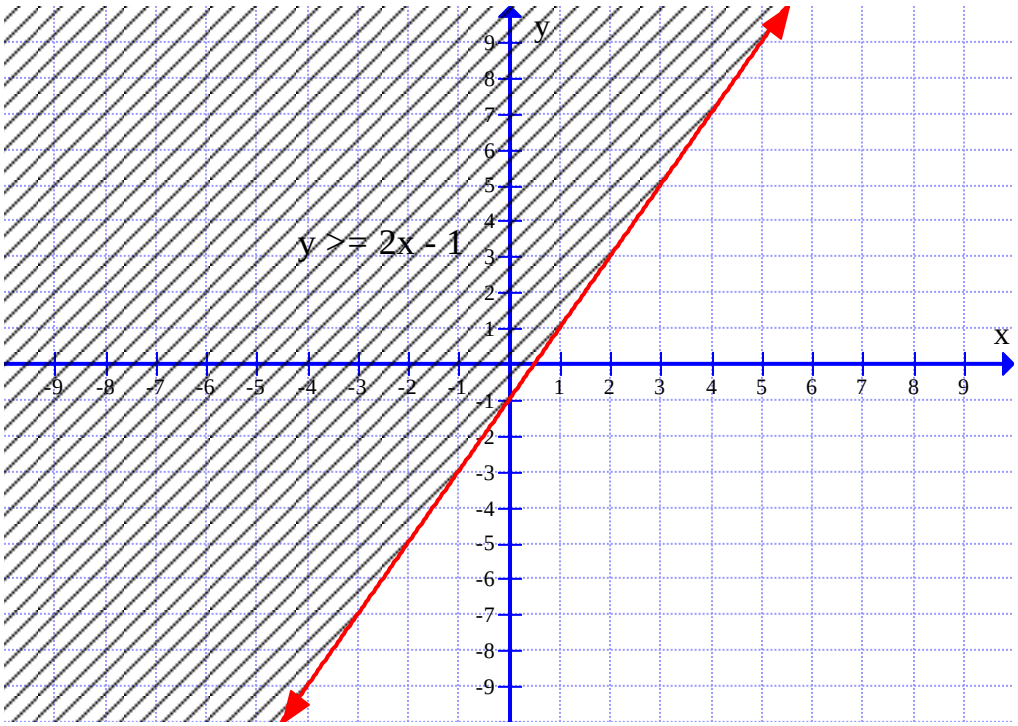
می دانیم نا معادله ها هم مجموعه هستند. پس می توانیم اشتراک و یا اتحاد دو یا چند نا معادله داشته باشیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

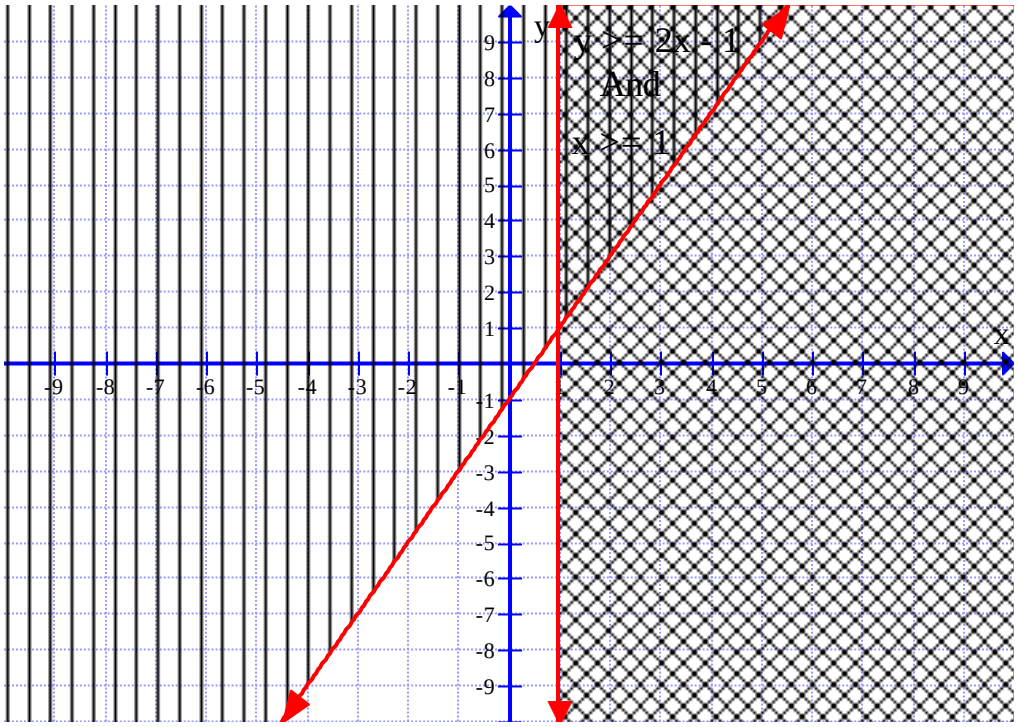
مثال ۳ – نمودار فصل مشترک $x \geq ۱$ و $y \geq ۲x - ۱$ را رسم کنید.

ابتدا هر یک از نا معادله ها را جداگانهٔ رسم می کنیم. فصل مشترک دو نمودار ، عبارت است از کلیه نقاطی که در هر دو منطقه مشترک باشد.





دانلود از سایت ریاضی سرا

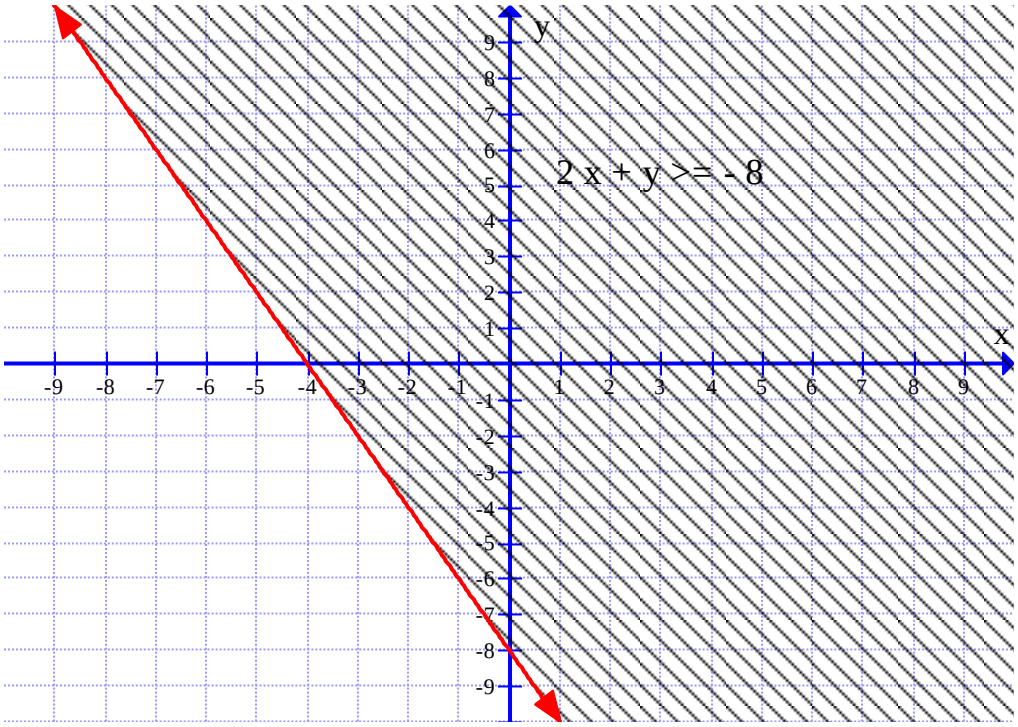


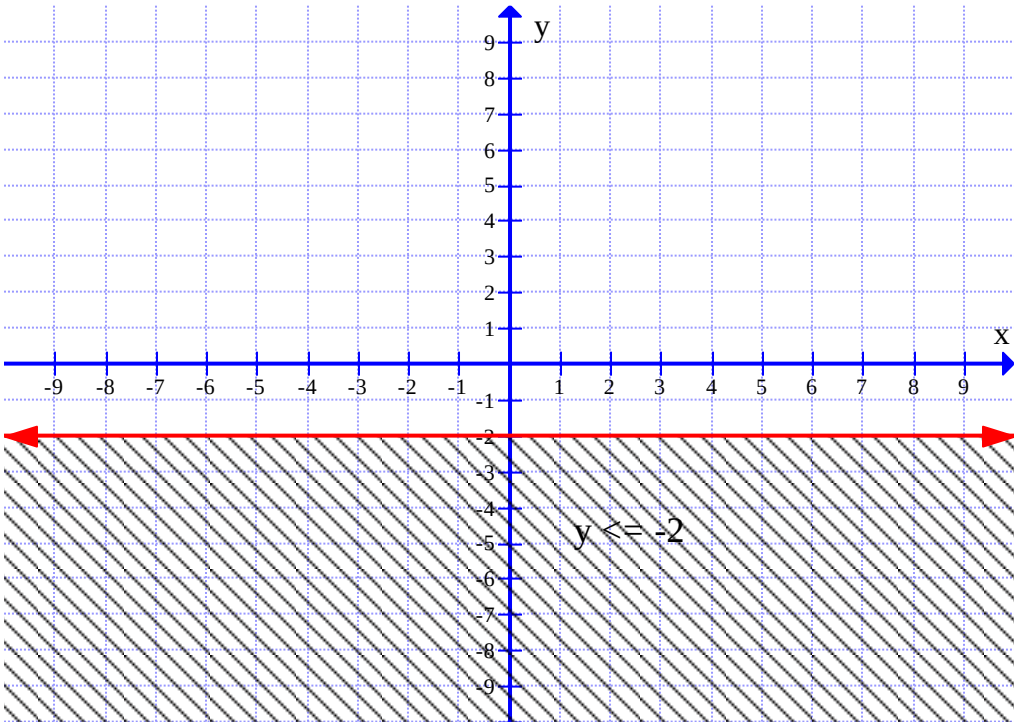
فصل مشترک دو نا معادله سایه تیره تر نشان داده شده است.

مثال ۴ – اجتماع مجموعه $۲x + y \geq -۸$ **یا** $y \leq -۲$ **را رسم کنید.**

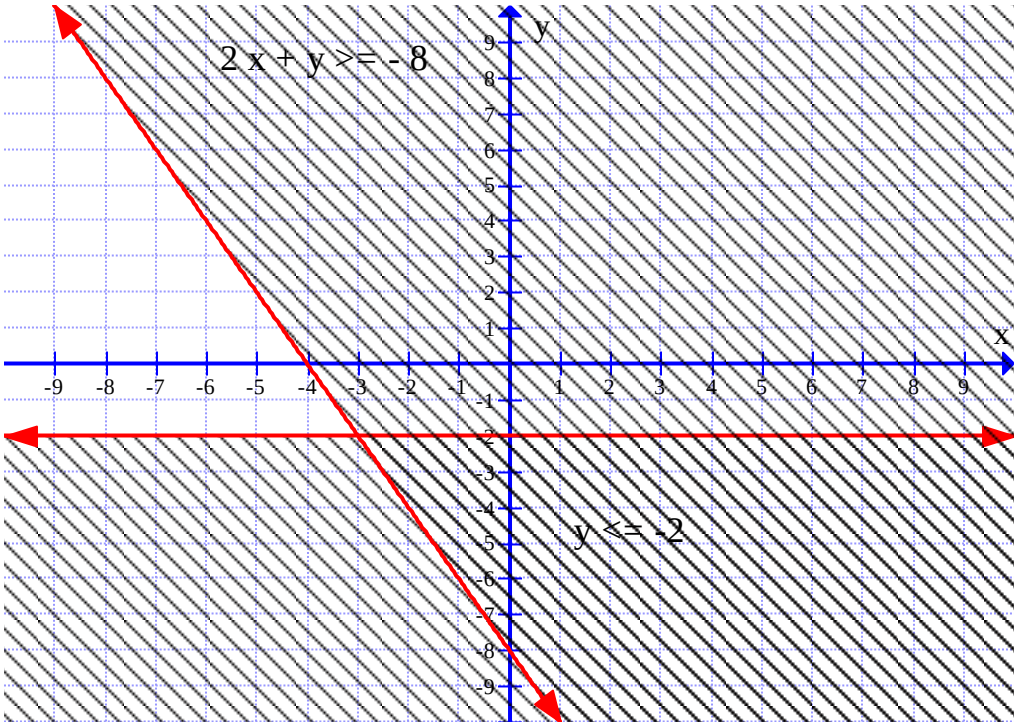
ابتدا هر یک از نا معادله ها را جدا گانه رسم می کنیم. اجتماع دو نا معادله شامل هر دو منطقه سایه دار است و همچنین هر دو خط مرزی

دانلود از سایت ریاضی سرا





دانلود از سایت ریاضی سرا



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۶

نا معادله های زیر را رسم کنید.

۱) $x < ۲$

۲) $x - y \geq ۷$

۳) $۳x + y > ۶$

۴) $y \leq -۲x$

۵) $۲x + ۴y \geq ۸$

۶) $۵x + ۳y > -۱۵$

اتحاد یا اشتراک نا معادله های زیر را رسم کنید.

۷) $x \geq ۳ \cap y \leq -۲$

۸) $x \leq -۲ \cup y \geq ۴$

۹) $x - y < ۳ \cap x > ۴$

۱۰) $x + y \leq ۳ \cup x - y \geq ۵$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $x - y \geq ۲ \cup y < ۵$

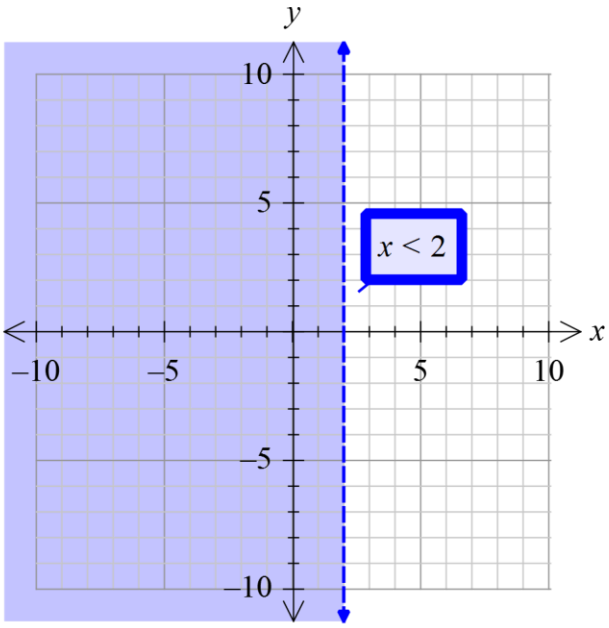
۱۲) $x + y \leq ۱ \cap y \leq -۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

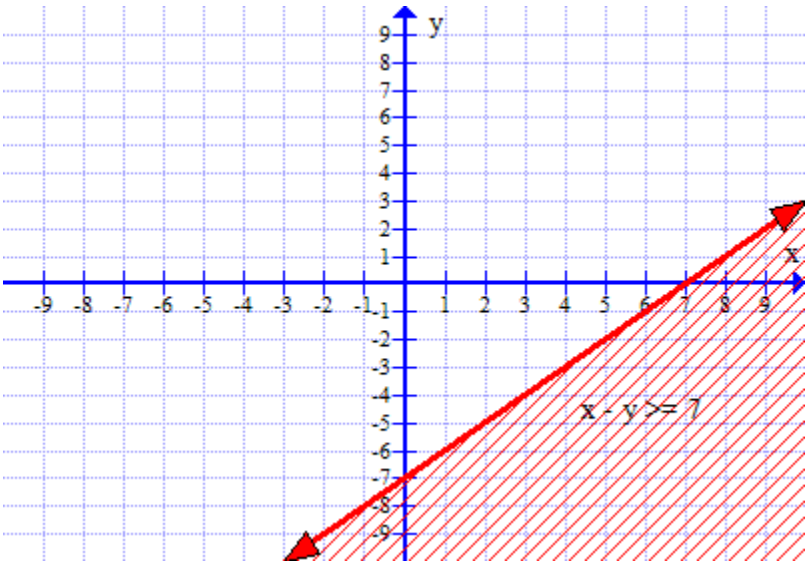
پاسخ تمرینات ۷.۶

نا معادله های زیر را رسم کنید.

۱) $x < ۲$

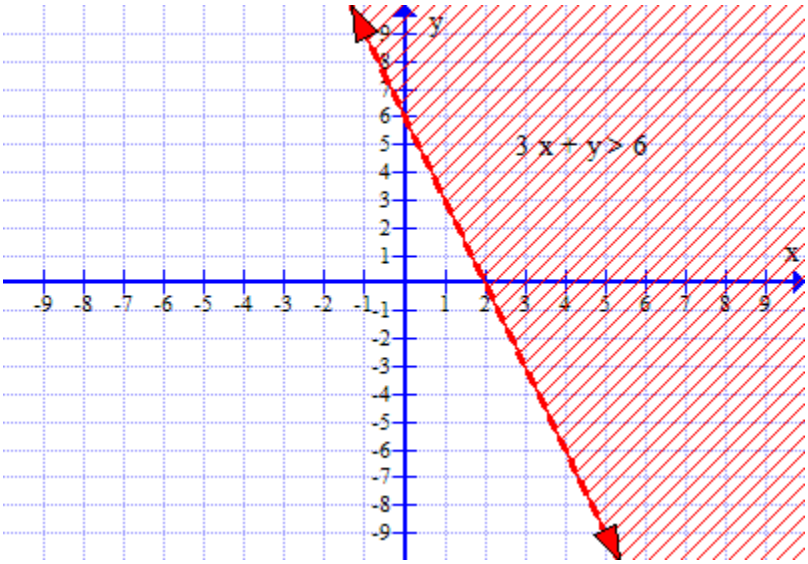


۲) $x - y \geq ۷$

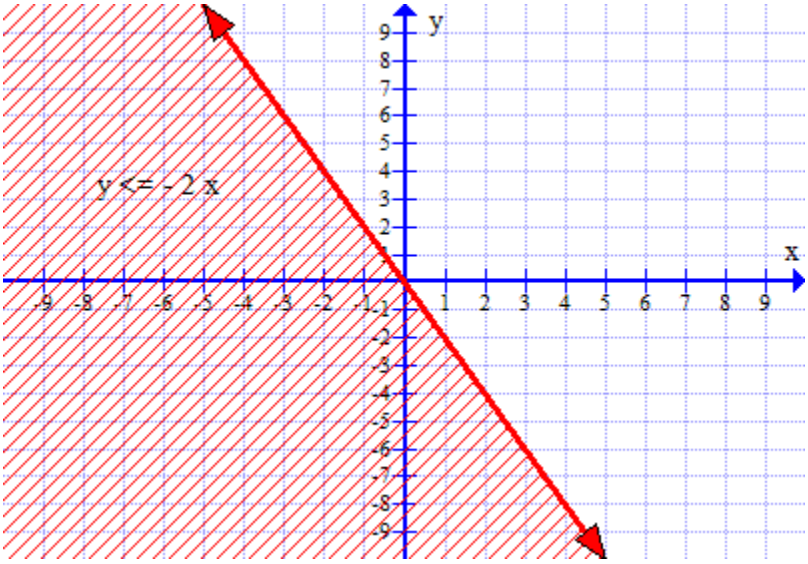


دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $۳x + y > ۶$

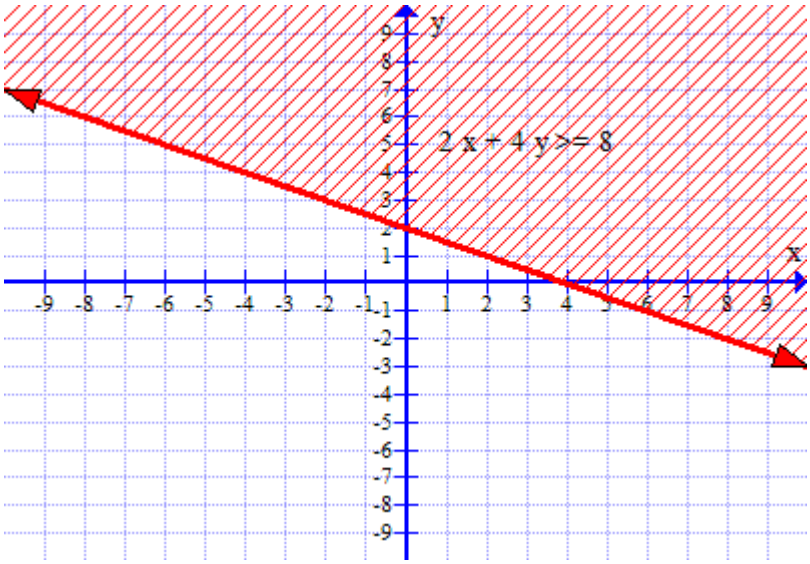


۴) $y \leq -۲x$

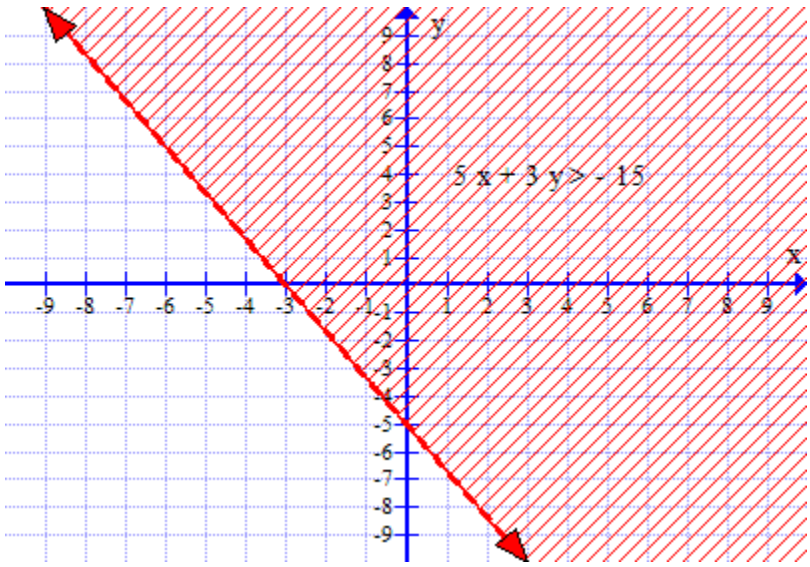


دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $۲x + ۴y \geq ۸$



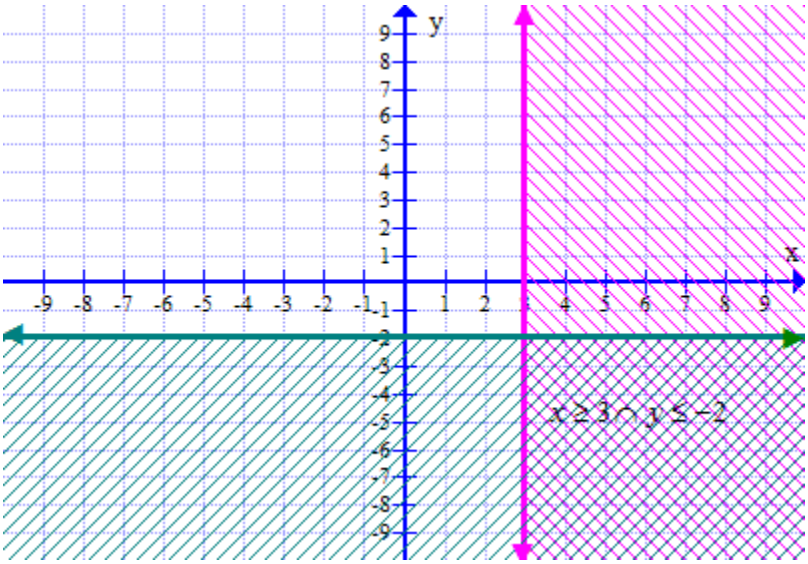
۶) $۵x + ۳y > -۱۵$



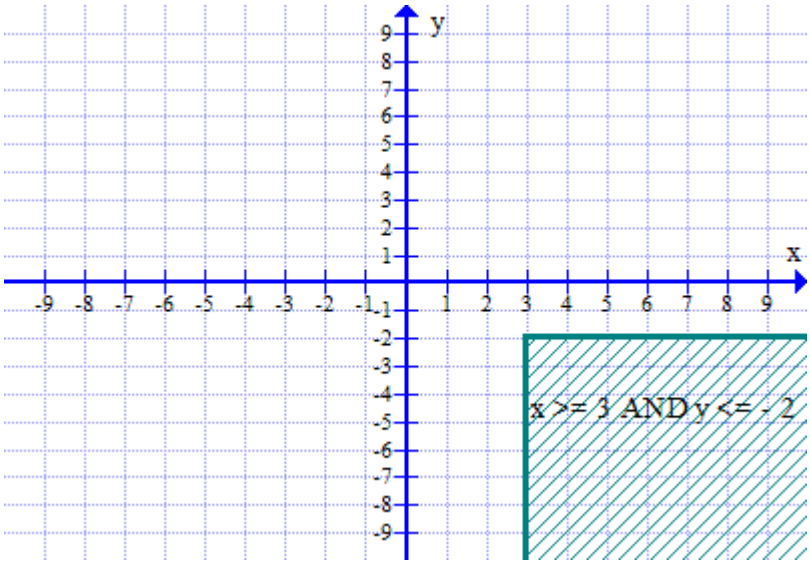
دانلود از سایت ریاضی سرا

اتحاد یا اشتراک نا معادله های زیر را رسم کنید.

۷) $x \geq ۳ \cap y \leq -۲$

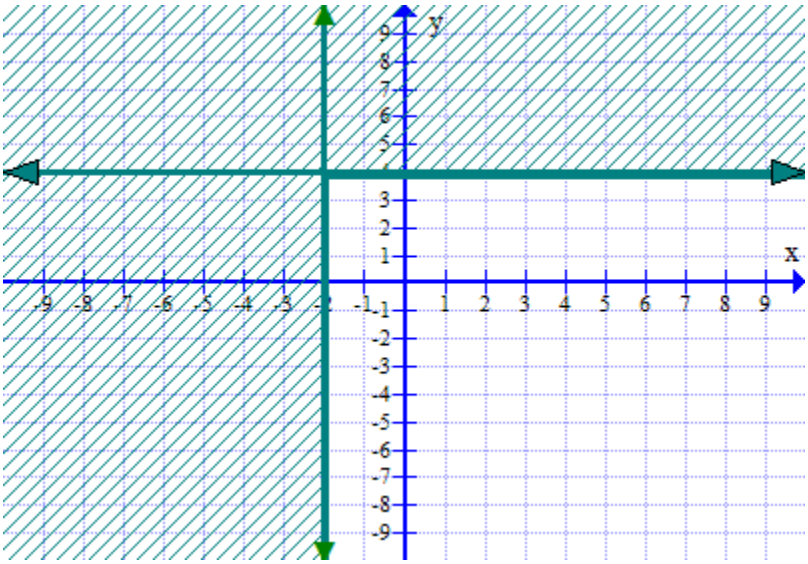


یا

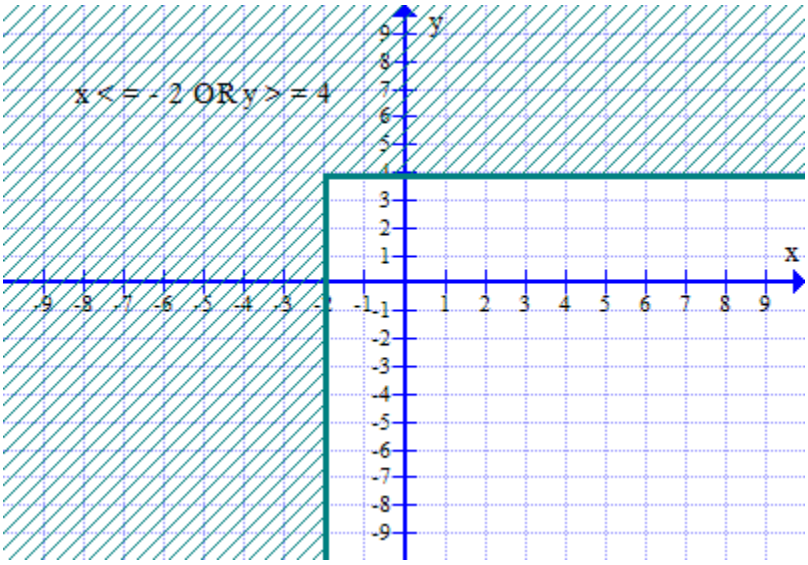


دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $x \leq -۲ \cup y \geq ۴$

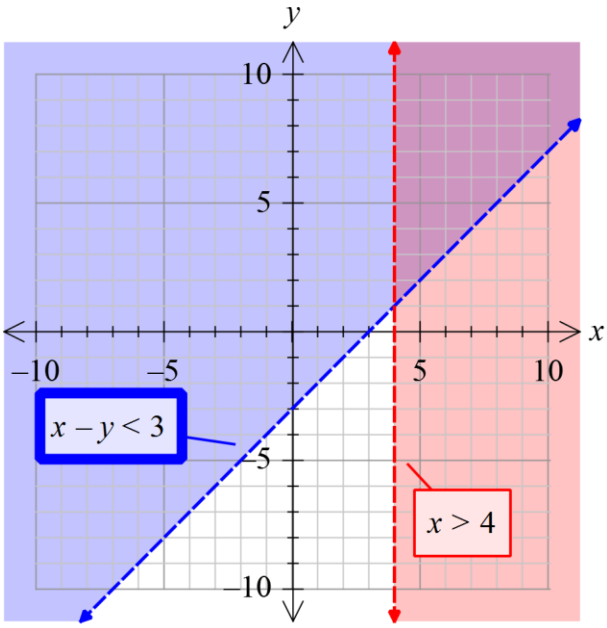


یا

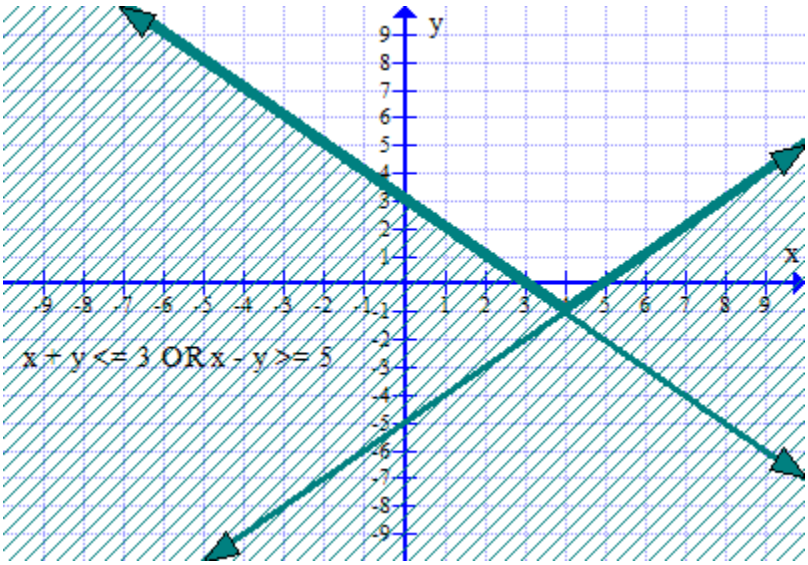


دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $x - y < ۳ \cap x > ۴$

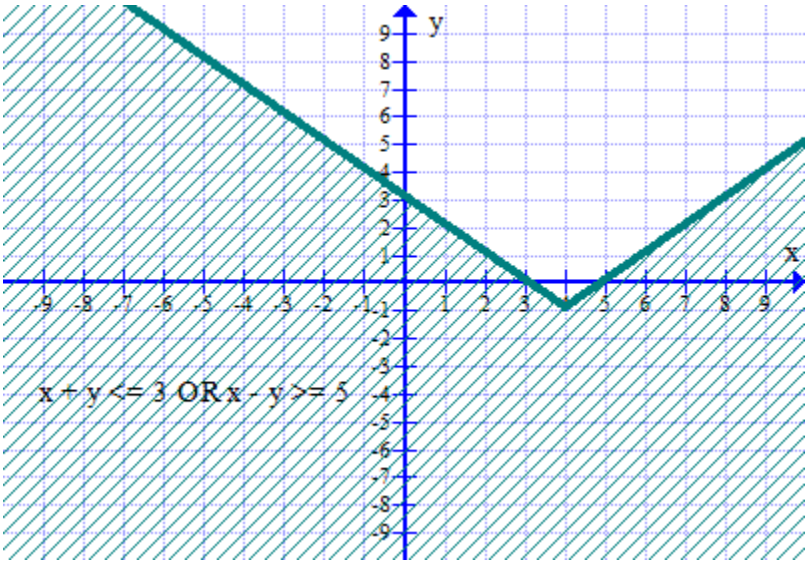


۱۰) $x + y \leq ۳ \cup x - y \geq ۵$

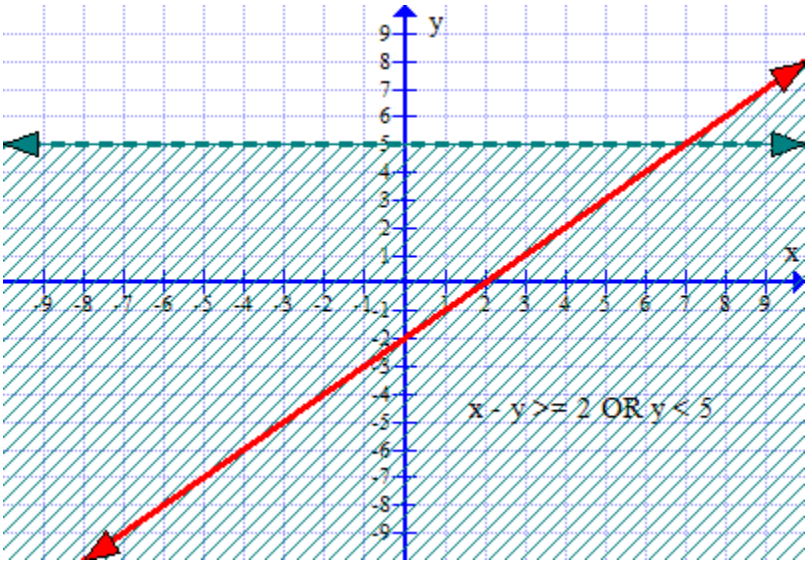


یا

دانلود از سایت ریاضی سرا

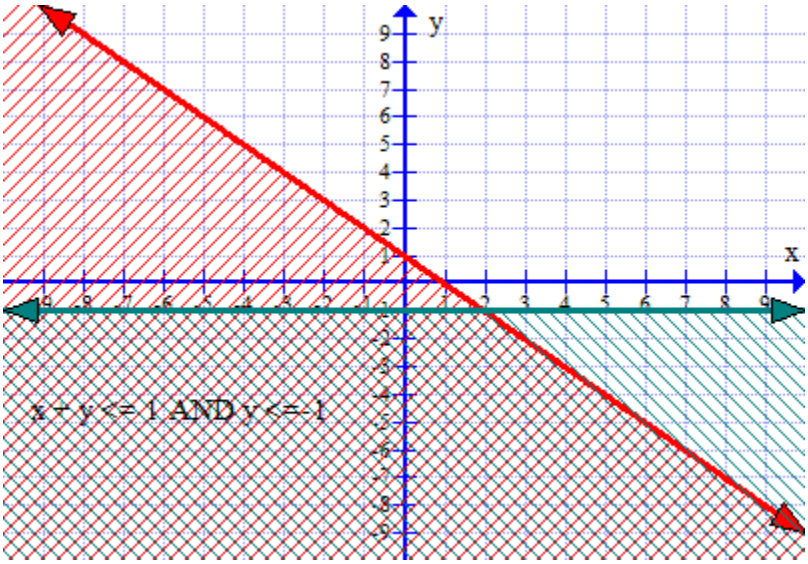


۱۱) $x - y \geq ۲ \cup y < ۵$

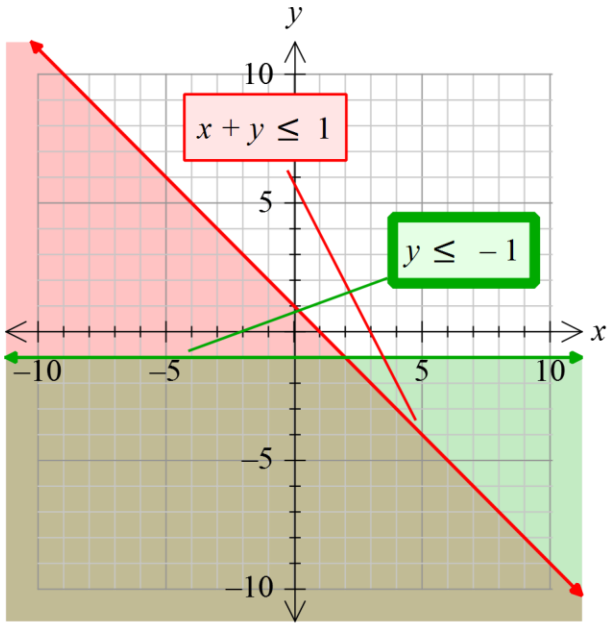


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲) $x + y \leq ۱ \cap y \leq -۱$



یا



دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۷ – مقدمه ای بر رسم نمودار توابع چند جمله ای

An Introduction to Graphing Polynomial Functions

تجزیه و تحلیل نمودارتوابع چند جمله ای Analyzing Graphs of Polynomial Functions

در بخش های قبل در مورد چند جمله ای و همچنین تابع صحبت کرده ایم. اکثر اوقات بهتر است که نماد تابع را برای نشان دادن چند جمله ای ها بکار بریم. مثلا می توانیم $P(x)$ را برای نشان دادن چند جمله ای $۳x^۳ - ۲x - ۵$ بریم و بنویسیم $P(x) = ۳x^۳ - ۲x - ۵$

این تابع به نام **تابع چند جمله ای** موسوم است.

چند مثال تابع چند جمله ای

$f(x) = ۲x - ۶$ تابع خطی درجه یک

$f(x) = ۵x^۲ - x + +۳$ تابع درجه دوم

$f(x) = ۷x^۳ + ۳x^۲ - ۱$ تابع درجه سوم

$f(x) = -۸x^۴ - ۳x^۳ + ۲x^۲ + ۲$ تابع درجه چهارم

تمام توابع بالا ، تابع های چند جمله ای هم هستند.

مثال ۱ – در تابع $g(x)$ زیر به سوال های زیر پاسخ دهید.

الف –دامنه و برد تابع را پیدا کنید.

ب –محل تلاقی نمودار با محور ها را بنویسید.

ج - مختصات نقطه ای که دارای بیشترین مقدار y است بنویسید.

د -مختصات نقطه ای که دارای کمترین مقدار y است بنویسید .

پاسخ

الف –

دامنه : کلیه اعداد حقیقی. با نماد بازه $(-\infty, \infty)$

برد : $[-۴, \infty)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

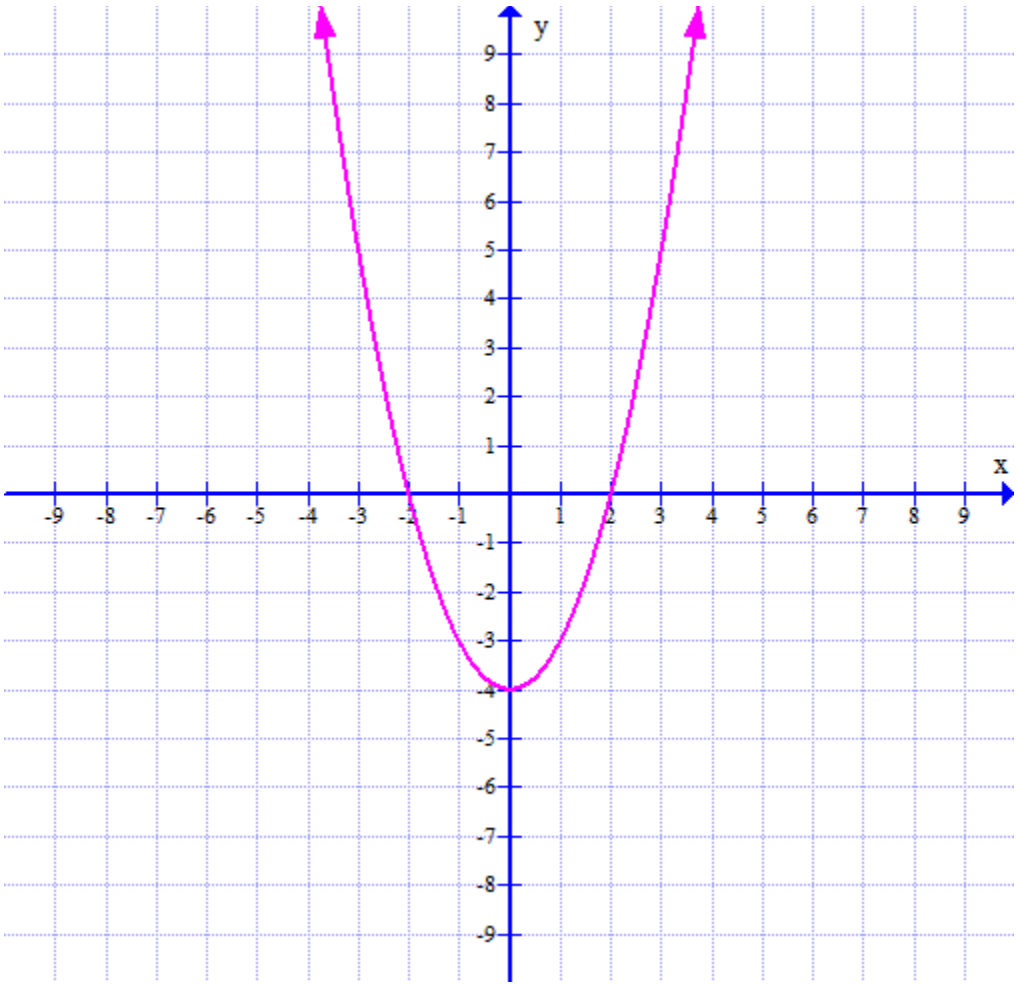
ب –

محل تلاقی با محور x $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$

محل تلاقی به محور y $(۰,-۴)$

ج –نقطه ای نیست که بیشترین مقدار y داشته باشد. ملاحظه می کنید که نمودار تا بی نهایت ادامه دارد.

د –مختصات نقطه ای با کمترین مقدار y نقطه $(۰,-۴)$ است .



دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار هر تابع چند جمله ای را می توان با مشخص کردن تعداد کافی زوج های مرتبی که تابع را بر قرار کند و سپس متصل کردن آنها با یک منحنی یک دست و صاف ترسیم کرد. نمودار کلیه توابع چند جمله ای آزمایش خط عمودی را پاس می کنند زیرا آنها نمودار توابع هستند.

تا کنون ترسیم نمودار توابع خطی را یاد گرفته ایم. حالا رسم نمودار توابع درجه دوم را بر رسی می کنیم و خصوصیات مخصوص نمودارآنها را مورد بحث قرار می دهیم.

تابع درجه دوم Quadratic Function

یک تابع درجه دوم تابعی است که بتوان آنرا به صورت $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ نوشت . a, b, c اعداد حقیقی هستند و $a \neq ۰$

می دانیم که $f(x) = ax^{۱} + bx + c$ را می توان به صورت $y = ax^{۲} + bx + c$ نوشت. پس هر دوفرمول یک تابع درجه دوم را بیان می کنند.

مثال ۲- نمودار تابع $f(x) = x^{۲}$ را از طریق پیدا کردن نقاط ، رسم کنید.

پاسخ

این تابع ، خطی نیست و نمودار آن یک خط مستقیم نیست. برای شروع کار چند دوگانه های مرتب پیدا می کنیم ، و سپس آن نقاط را روی صفحه مختصات مشخص کرده و انهار را با یک منحنی یک دست Smooth Curve به هم متصل می کنیم.

اگر $x = -۳$ پس $f(-۳) = (-۳)^{۲} = ۹$

اگر $x = -۲$ پس $f(-۲) = (-۲)^{۲} = ۴$

اگر $x = -۱$ پس $f(-۱) = (-۱)^{۲} = ۱$

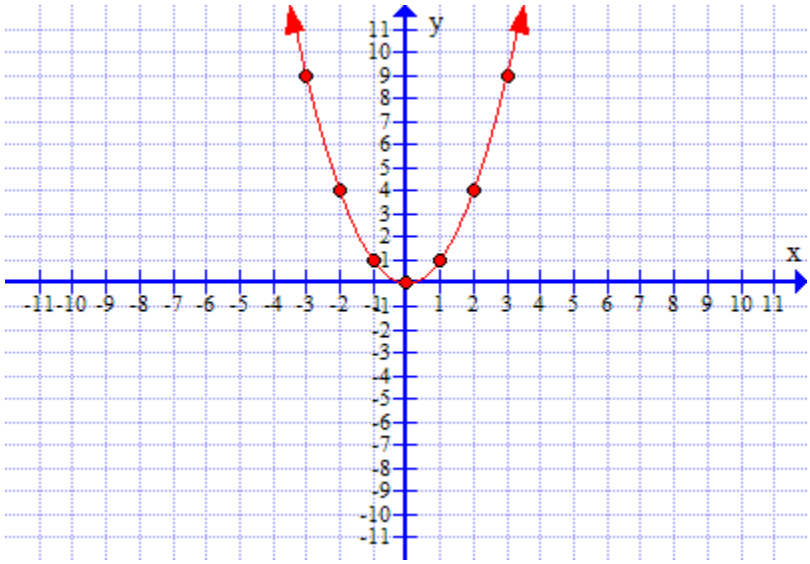
اگر $x = ۰$ پس $f(۰) = (۰)^{۲} = ۰$

اگر $x = ۱$ پس $f(۱) = (۱)^{۲} = ۱$

اگر $x = ۲$ پس $f(۲) = (۲)^{۲} = ۴$

اگر $x = ۳$ پس $f(۳) = (۳)^{۲} = ۹$

دانلود از سایت ریاضی سرا



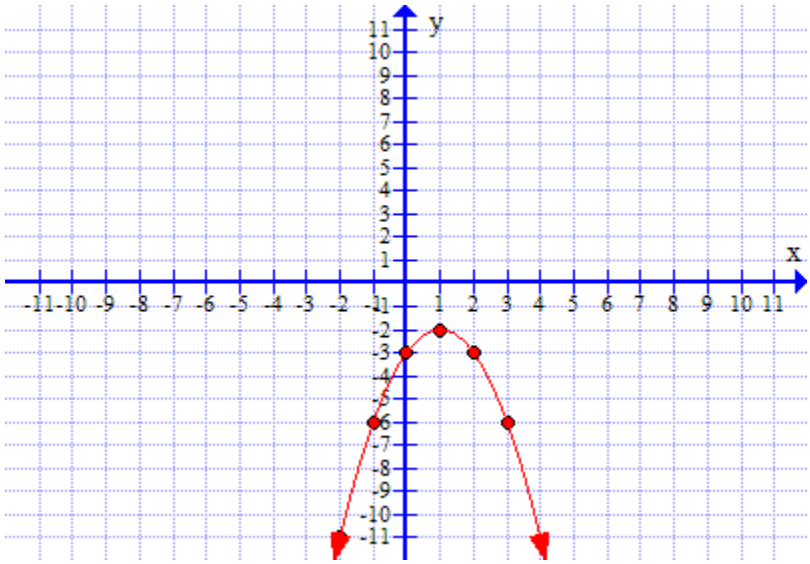
ملاحظه می کنید که نمودار مثال ۲ آزمایش خط عمودی را پاس می کند. پس یک تابع است. این منحی را سهمی Parabola می نامند. بالا ترین نقطه روی سهمی که به طرف پایین باز می شود و یا پایین ترین نقطه سهمی که به طرف بالا باز می شود را راس Vertex سهمی می نامند. راس این سهمی نقطه (۰,۰) است. که پایین ترین نقطه روی نمودار است. اگر این نمودار را در طول محور y روی هم تا کنیم، می بینیم که دو ضلع سهمی روی هم منطبق Coincide می شوند.این یعنی نمودار در اطراف محور y قرینه Symmetric است. و محور y و یا خط $x=۰$ را محور تقارن Axis of Symmetry می نامند. نمودار هر تابع درجه دوم ، یک سهمی است و یک محور تقارن دارد. محور تقارن یک خط عمودی است که از راس سهمی می گذرد.

مثال ۳ - نمودار تابع درجه دوم $f(x) = -x^۲ + ۲x - ۳$ را از طریق پیدا کردن نقاط ، رسم کنید.

پاسخ

x	$y = f(x)$
−۲	−۱۱
−۱	−۶
۰	−۳
۱	−۲
۲	−۳
۳	−۶

دانلود از سایت ریاضی سرا



راس این سهمی نقطه $(۱,-۲)$ است. و خط عمود $x = ۱$ محور تقارن است. بخاطر دارید که برای پیدا کردن نقطه برخورد نمودار با محور x باید $y = ۰$ باشد. یعنی $۰ = -x^۲ + ۲x - ۳$ و چون نمودار ، محور x را قطع نمی کند، پس $۰ = -x^۲ + ۲x - ۳$ جواب حقیقی ندارد.

ملاحظه می کنید که سهمی $f(x) = -x^۲ + ۲x - ۳$ به طرف پایین باز می شود در صورتی که سهمی $f(x) = x^۲$ به طرف بالا باز می شود. پس نتیجه می گیریم که هنگامی که تابع درجه دوم به صورت

$$f(x) = ax^۲ + bx + c$$

نوشته شده باشد، اگر ضریب متغیر درجه دو مثبت باشد، سهمی به طرف بالا باز می شود ، و اگر منفی باشد ، به طرف پایین باز می شود.

پیدا کردن راس یک سهمی Finding the Vertex of a Parabola

ملاحظه کردید که در هر دو مثال بالا ، برای رسم نمودار ها ، یکی از نقاطی را که پیدا کردیم، راس سهمی بود. و چون پیدا کردن راس سهمی به ما کمک می‌کند که سریع تر نمودار را رسم کنیم ، پس لازم است که روشی بکار بریم تا بتوانیم راس سهمی را پیدا کنیم. در ذیل فرمولی برای پیدا کردن راس سهمی می نویسیم و در بخش های آینده توضیح می دهیم که این فرمول چگونه بدست آمده است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

فرمول راس Vertex Formula

نمودار $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ ، $a \neq ۰$ یک سهمی است با راس

$$\left(\frac{-b}{۲a}, f\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)$$

همچنین می توانیم محل تلاقی نمودار را با محور های y و x را پیدا کنیم. این کار ما را در ترسیم نمودار کمک می کند. به خاطر دارید که برای پیدا کردن محل بر خورد نمودار با محور x باید بجای y بگذاریم صفر و معادله را حل کنیم تامقدار x پیدا شود. و برای پیدا کردن محل تلاقی نمودار با محور y باید بجای x بگذاریم صفر و معادله را حل کنیم تا مقدار y پیدا شود.

مثال ۴ ـ تابع $f(x) = x^{۲} + ۲x - ۳$ را رسم کنید. از طریق پیدا کردن راس و محل تلاقی نمودار با محورها

پاسخ

برای پیدا کردن راس ، از فرمول راس استفاده می کنیم. اینجا $b = ۲$ ، $a = ۱$ پس

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(۱)} = -۱$$

$$f(-۱) = (-۱)^{۲} + ۲(-۱) - ۳ = ۱ - ۲ - ۳ = -۴$$

پس راس نقطه $(-۱, -۴)$ است و چون $a = ۱$ مثبت است پس سهمی به طرف بالا باز میشود. همچنین چون راس زیر محور x قرار دارد، نتیجه می گیریم که سهمی ، محور x را در دو نقطه قطع می کند. برای پیدا کردن محل تلاقی نمودار بامحور x بجای y می گذاریم صفر و معادله را حل می کنیم.

$$f(x) = x^{۲} + ۲x - ۳$$

$$۰ = x^{۲} + ۲x - ۳$$

$$۰ = (x + ۳)(x - ۱)$$

$$x + ۳ = ۰ \quad \text{یا} \quad x - ۱ = ۰$$

$$x = -۳ \quad \text{یا} \quad x = ۱$$

محل تلاقی نمودار با محور x عبارت است از ۱ و ۳− که مربوط میشوند به نقاط $(۱,۰)$ و $(-۳,۰)$ نقاط بدست آمده را روی محور اعداد مشخص می کنیم

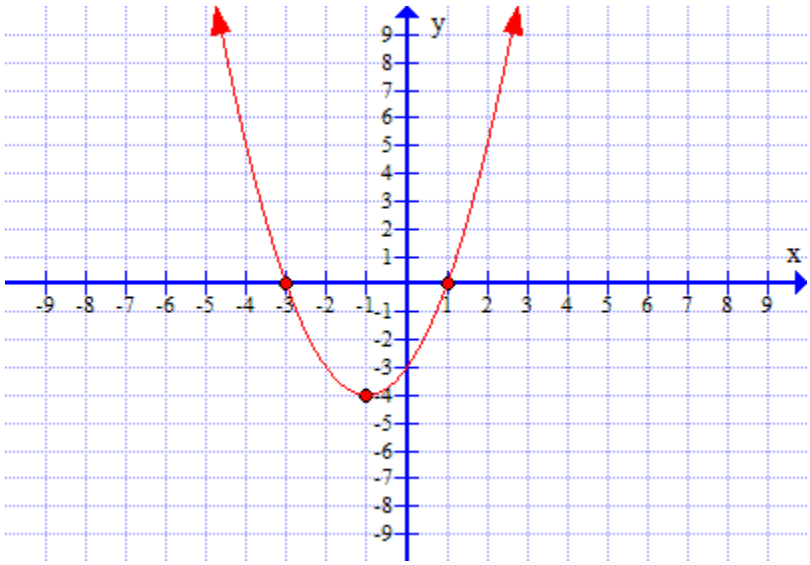
دانلود از سایت ریاضی سرا

برای پیدا کردن محل تلاقی نمودار با محور y بجای x می گذاریم صفر نتیجه می شود

$$f(۰) = (۰)^۲ + ۲(۰) - ۳ = -۳$$

پس نقطه $(۰, -۳)$ محل تلاقی نمودار با محور y است.

حالا نقاط بدست آمده را با یک منحنی یکدست به هم متصل می کنیم.



مثال ۵ – تابع $f(x) = -x^۲ + ۴$ را رسم کنید و راس و نقاط تلاقی با محور ها را مشخص کنید.

پاسخ

برای بدست آوردن راس از فرمول مربوطه استفاده می کنیم. اینجا $a = -۱$ و $b = ۰$ است. پس

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۰}{۲(-۱)} = ۰$$

$$f(۰) = (۰)^۲ + ۴ = ۴$$

لذا مختصات راس $(۰, ۴)$ است. و چون $a < ۰$ است پس سهمی به طرف پایین باز می شود.

برای بدست آوردن محل تلاقی نمودار با محور x باید بجای y بگذریم صفر و معادله بدست آمده را حل کنیم.

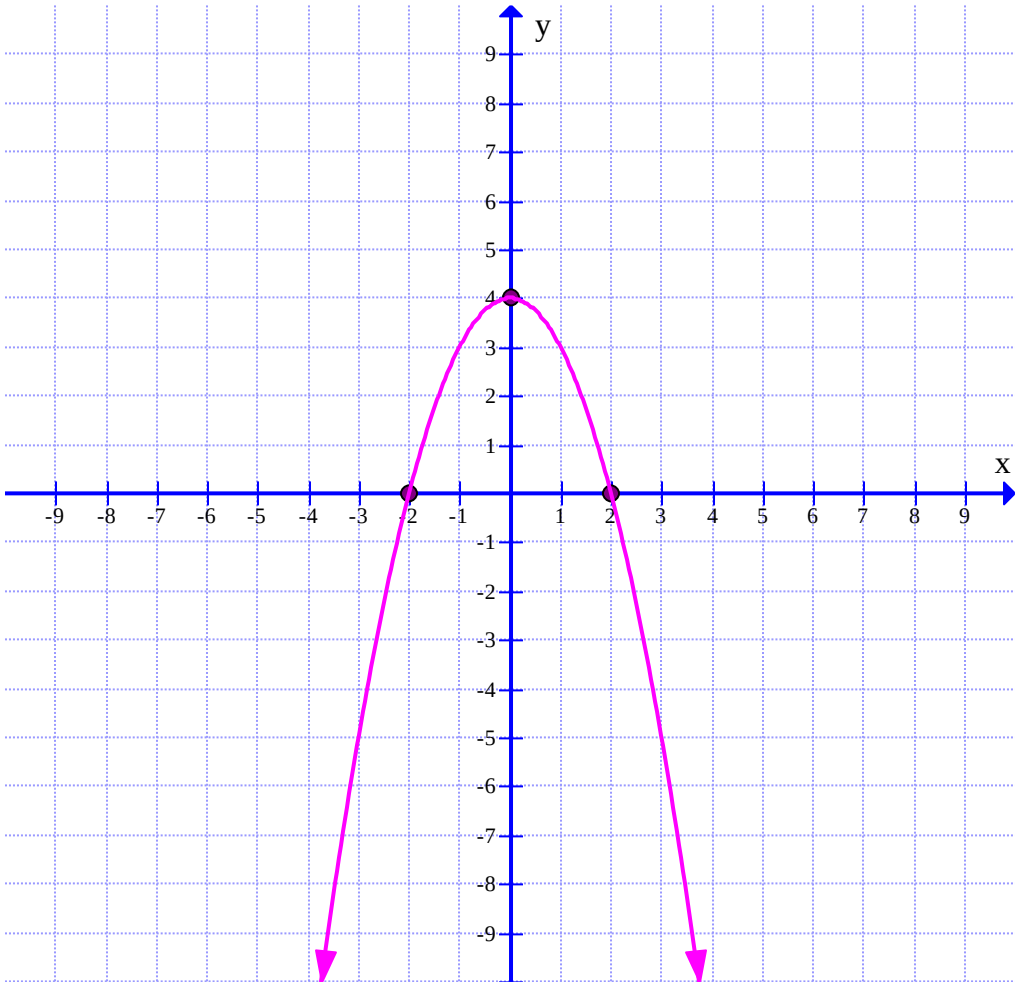
$$-x^۲ + ۴ = ۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$x^{۲} = ۴$

$x = \pm ۲$

پس محل تلاقی نمودار با محور x نقاط $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ است. نمودار مطابق شکل زیر است.



رسم نمودار توابع درجه سه Graphing Cubic Functions

برای رسم نمودار تابع درجه سه چند نقطه روی نمودار را پیدا می کنیم و آنها را با یک منحنی صاف و یک دست به هم وصل می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۶ – نمودار $f(x) = x^{۳} - ۴x$ را رسم کنید.

پاسخ

برای پیدا کردن محل تلاقی با محور x باید $f(x) = ۰$ قرار دهیم و معادله را حل کنیم تا مقدار x پیدا شود.

$$f(x) = x^{۳} - ۴x$$

$$۰ = x^{۳} - ۴x$$

$$۰ = x\left(x^{۲} - ۴\right)$$

$$x = ۰ \quad \text{یا} \quad x^{۲} - ۴ = ۰$$

$$x = ۰ \quad \text{یا} \quad (x - ۲)(x + ۲) = ۰$$

$$x = ۰ \quad \text{یا} \quad x = ۲ \quad \text{یا} \quad x = -۲$$

این نمودار در سه نقطه با محور x تلاقی می کند.

برای پیدا کردن محل تلاقی با محور y بجای x می گذاریم صفر .پس خواهیم داشت

$$f(۰) = (۰)^{۳} - ۴(۰) = ۰$$

ملاحظه می کنید که محل تلاقی این نمودار با محور y همان مبدا محور ها یعنی $(۰,۰)$ است.

چند نقطه دیگر هم پیدا می کنیم.

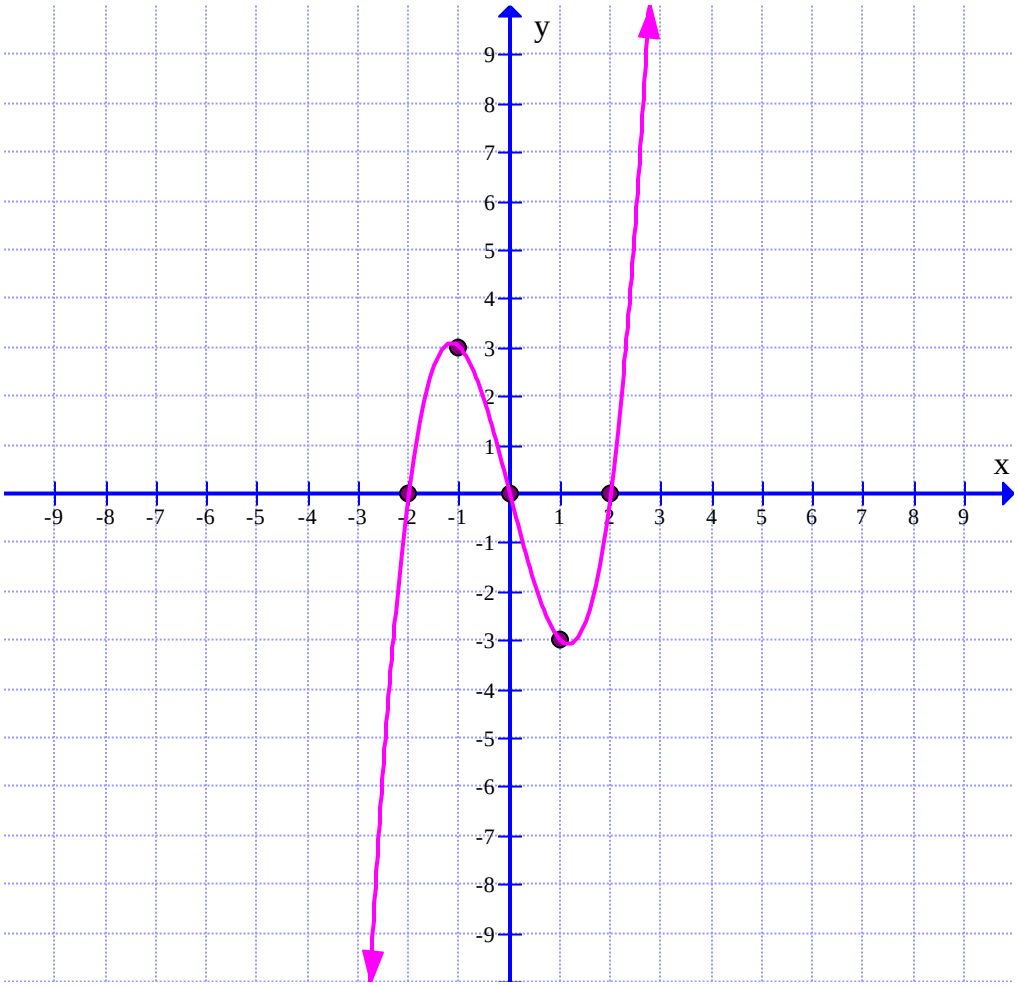
$$f(۱) = (۱)^{۳} - ۴(۱) = -۳$$

$$f(-۱) = (-۱)^{۳} - ۴(-۱) = ۳$$

در نتیجه این نقاط بدست آمد.

$$(۰,۰) \quad (۲,۰) \quad (-۲,۰) \quad (۱,-۳) \quad (-۱,۳)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا



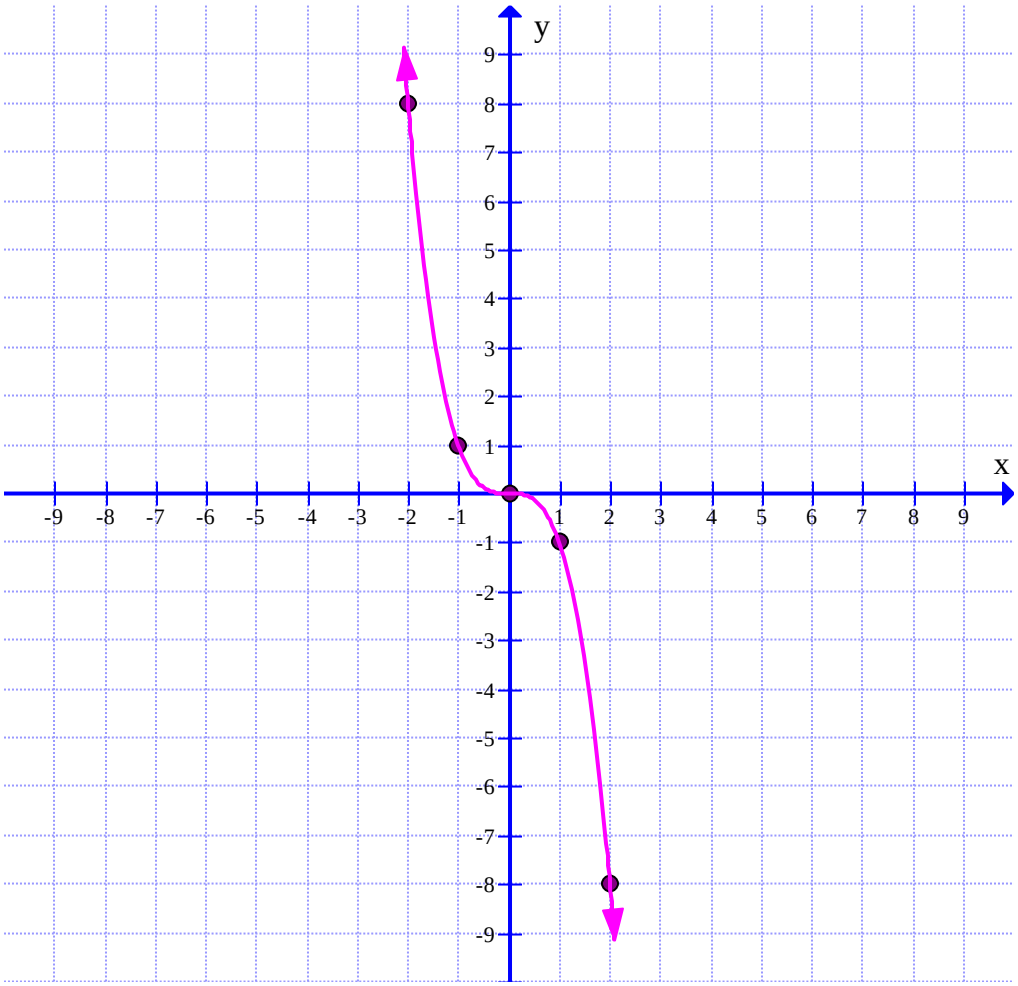
مثال ۷ – تابع $f(x) = -x^{۳}$ را رسم کنید.

پاسخ

چند نقطه را روی نمودار پیدا می کنیم و سپس آنها را به هم وصل می کنیم.

x	$f(x)$
۰	۰
۱−	۱
۲−	۸
۱	۱−
۲	۸−

دانلود از سایت ریاضی سرا



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۷

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = ۲x^۲$

۲) $f(x) = -۳x^۲$

۳) $f(x) = x^۲ + ۱$

۴) $f(x) = x^۲ - ۲$

۵) $f(x) = -x^۲$

۶) $f(x) = \frac{۱}{۲}x^۲$

۷) $f(x) = x^۲ + ۸x + ۷$

۸) $f(x) = x^۲ + ۶x + ۵$

۹) $f(x) = ۴x^۳ - ۹x$

۱۰) $f(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ - ۳x$

دانلود از سایت ریاضی سرا

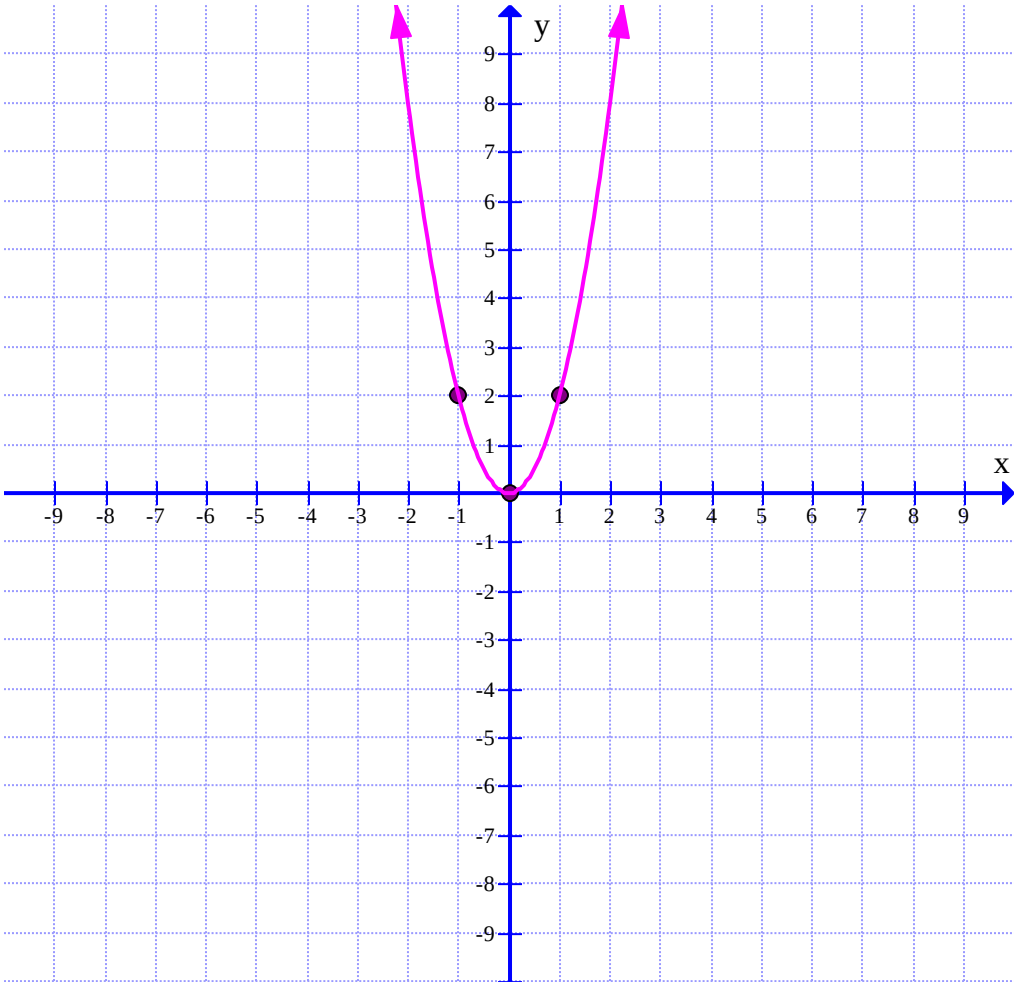
۱۱) $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - x - ۳$

۱۲) $f(x) = x(x - ۲)(x + ۳)(x + ۵)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

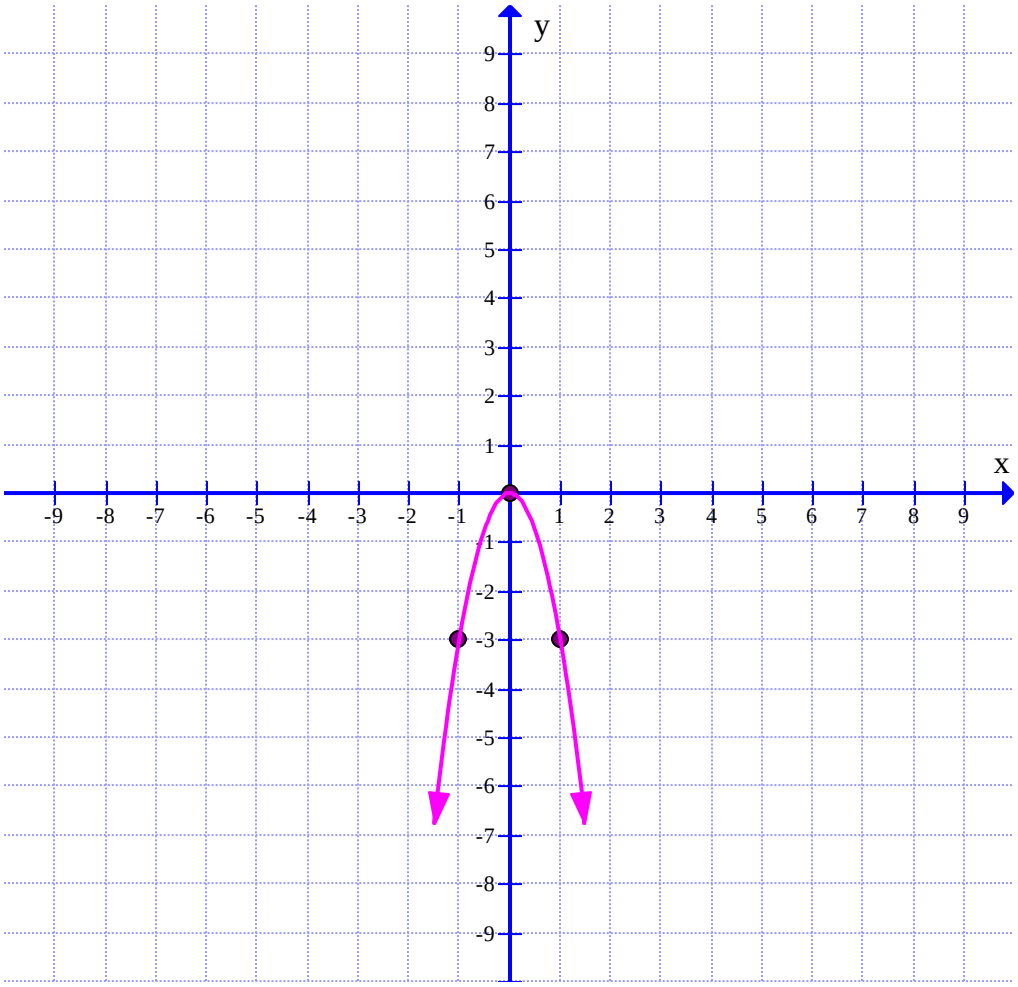
پاسخ تمرینات ۷.۷ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = ۲x^۲$



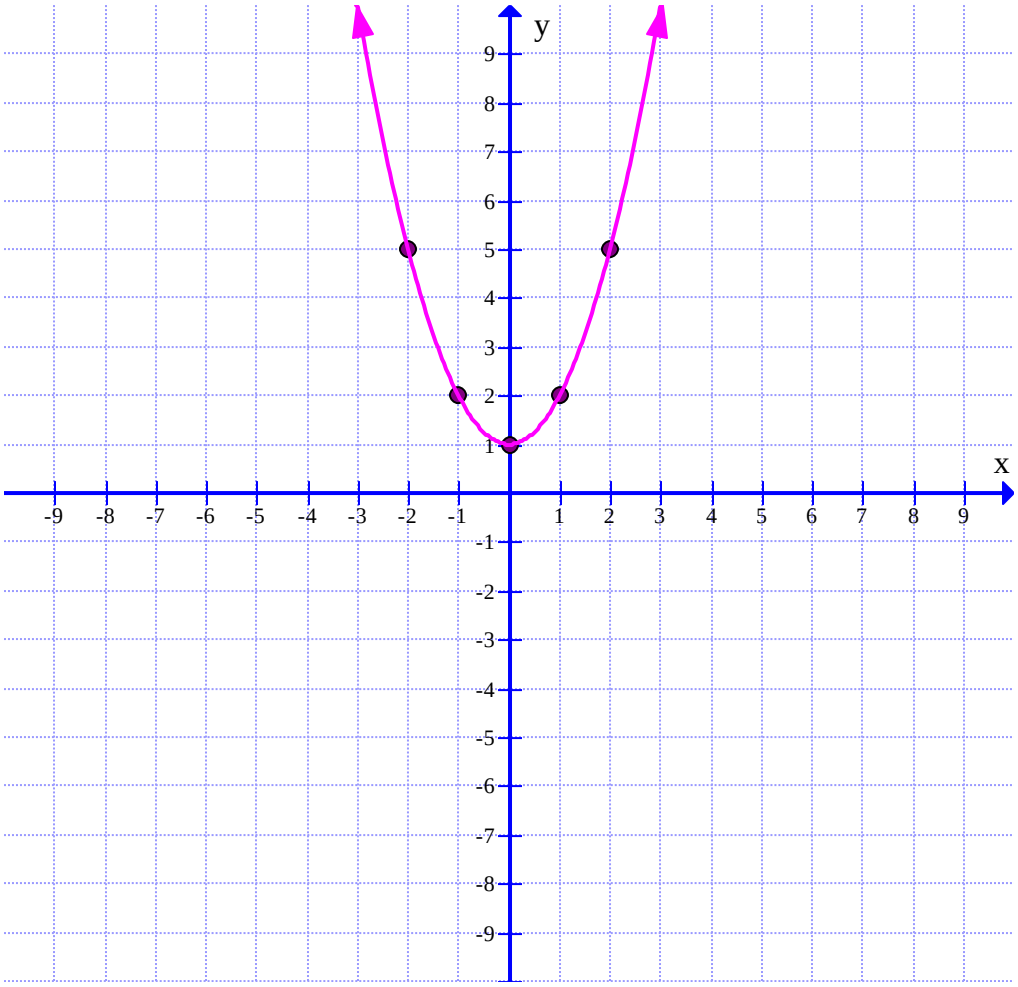
دانلود از سایت ریاضی سرا

۲) $f(x) = -۳x^{۲}$



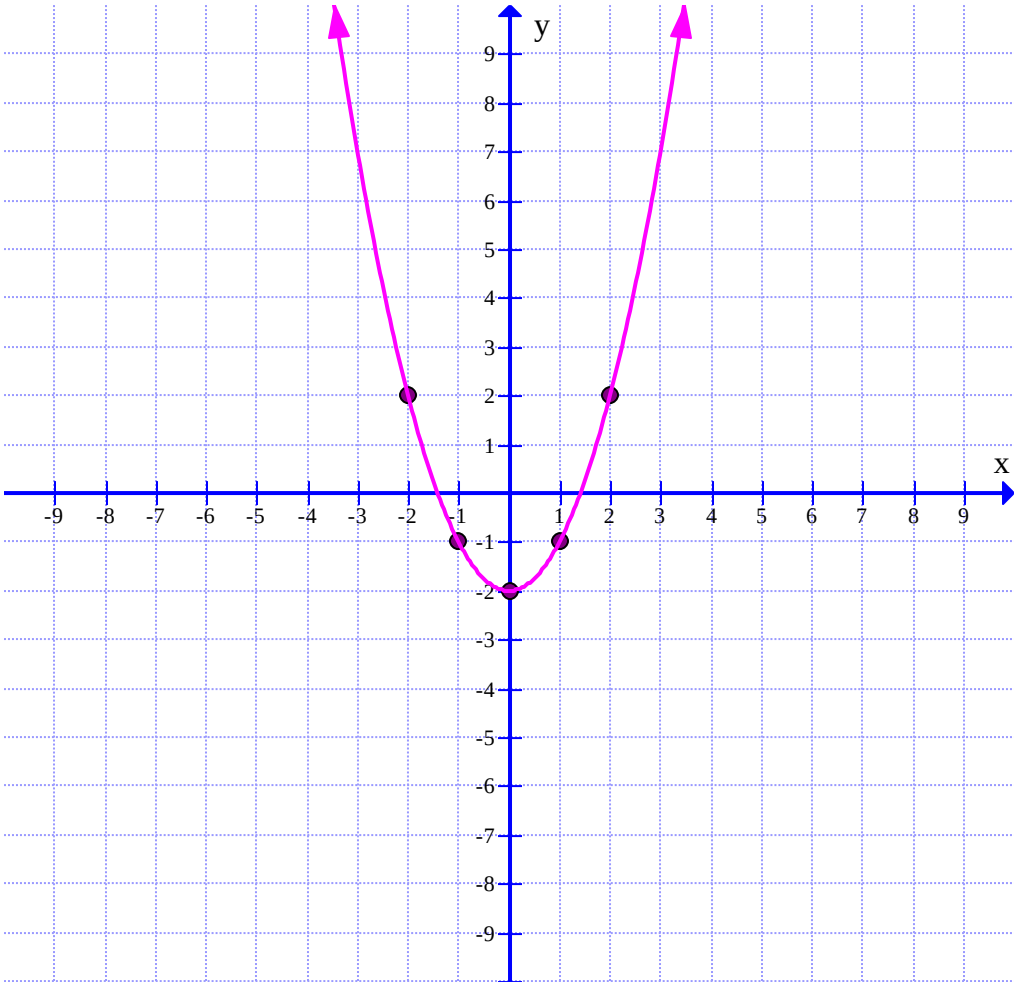
دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $f(x) = x^{۲} + ۱$



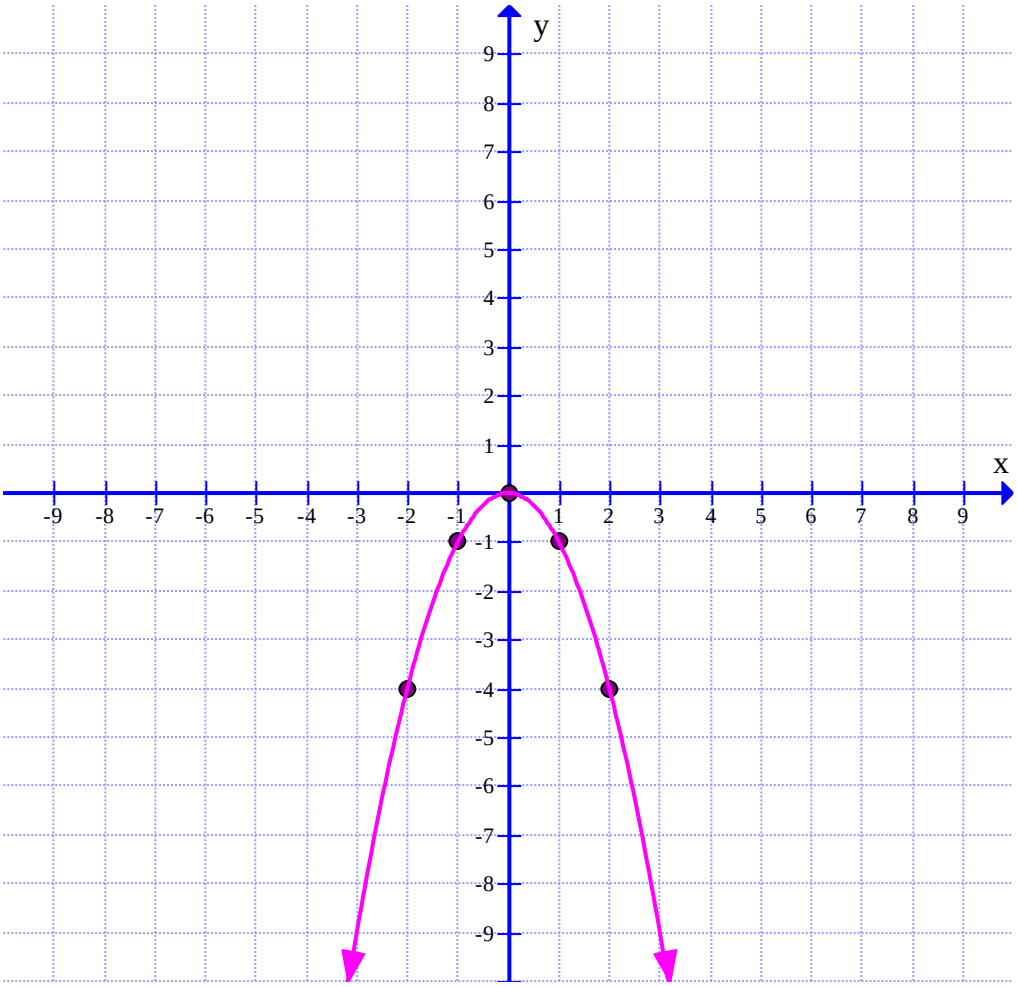
دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $f(x) = x^{۲} - ۲$



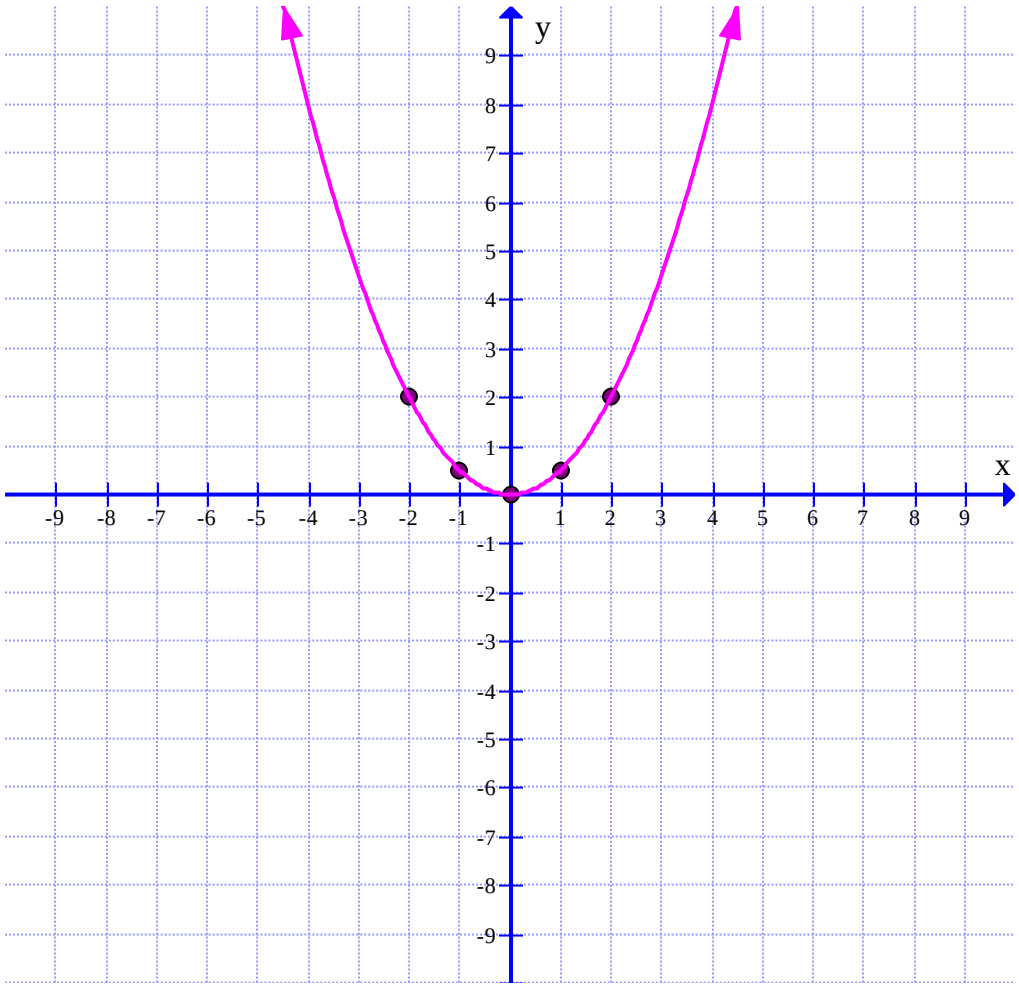
دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $f(x) = -x^{۲}$



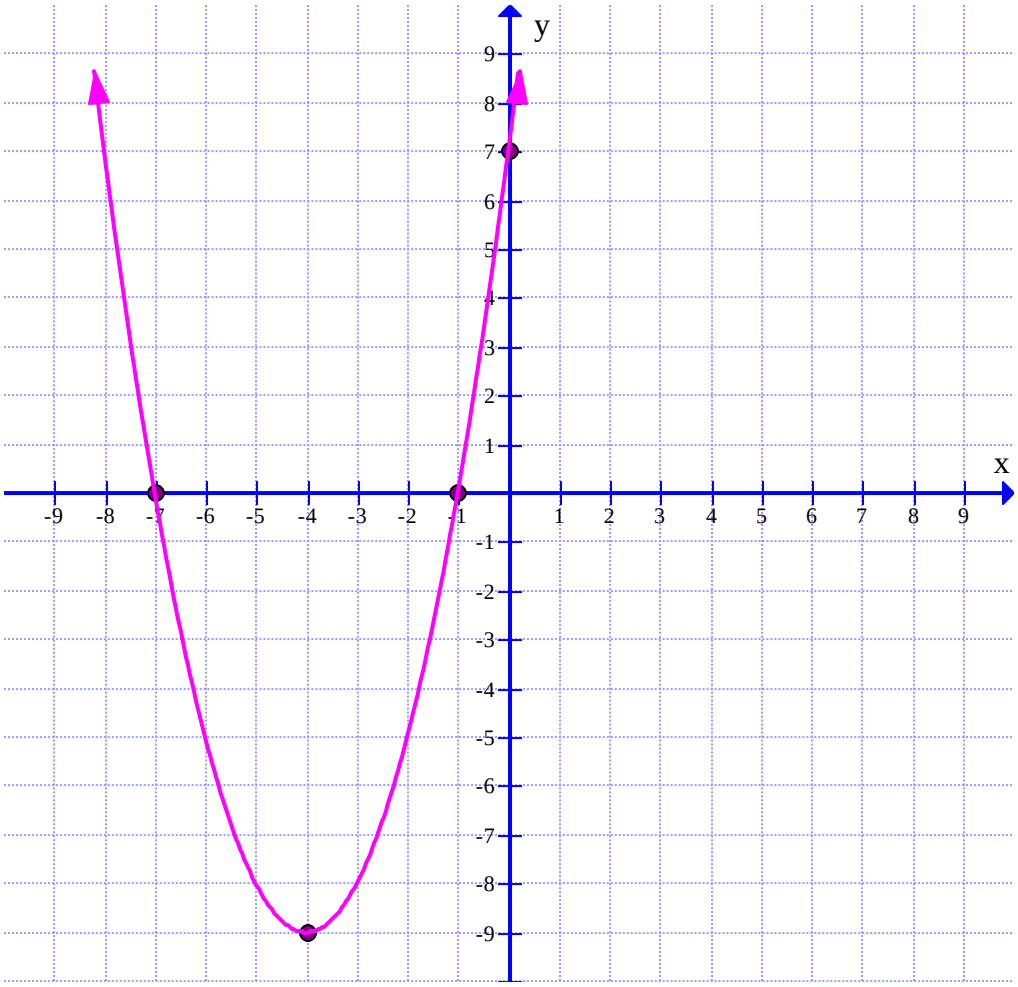
دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $f(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲}$



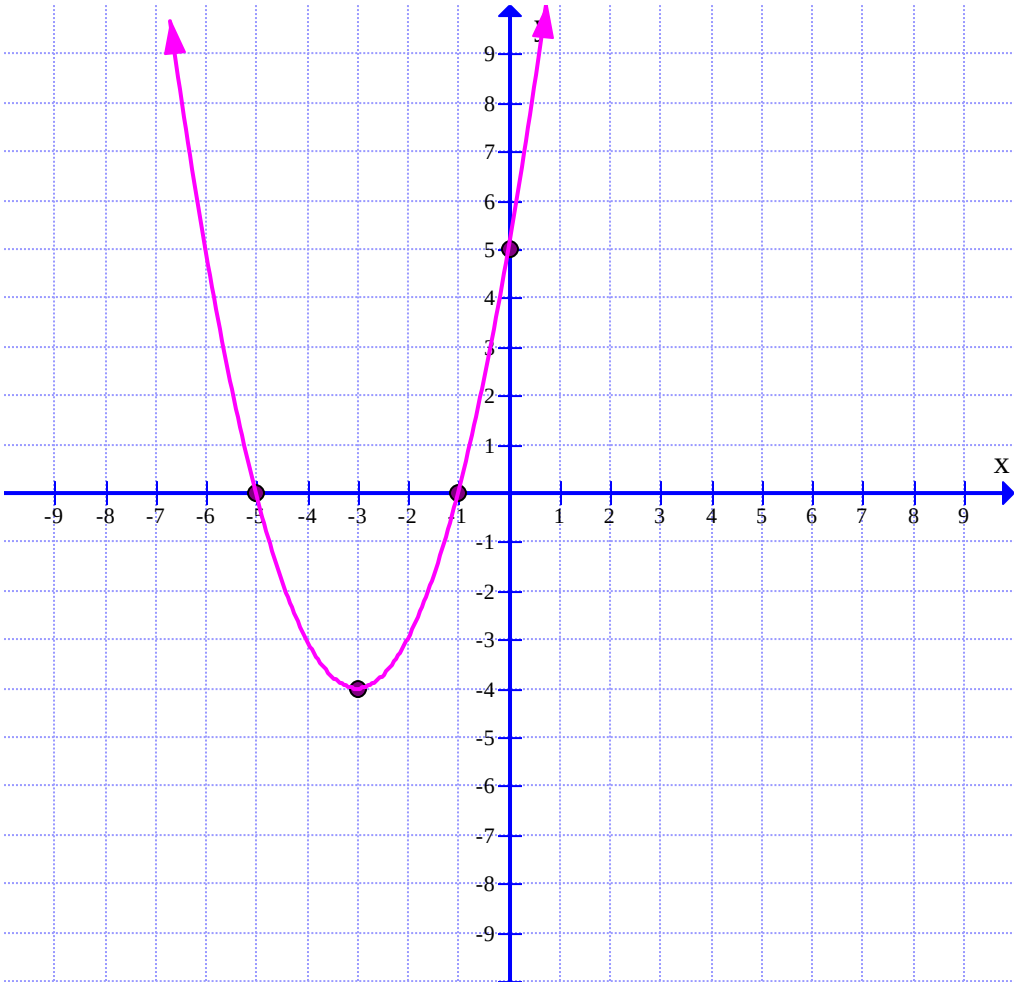
دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $f(x) = x^{۲} + ۸x + ۷$



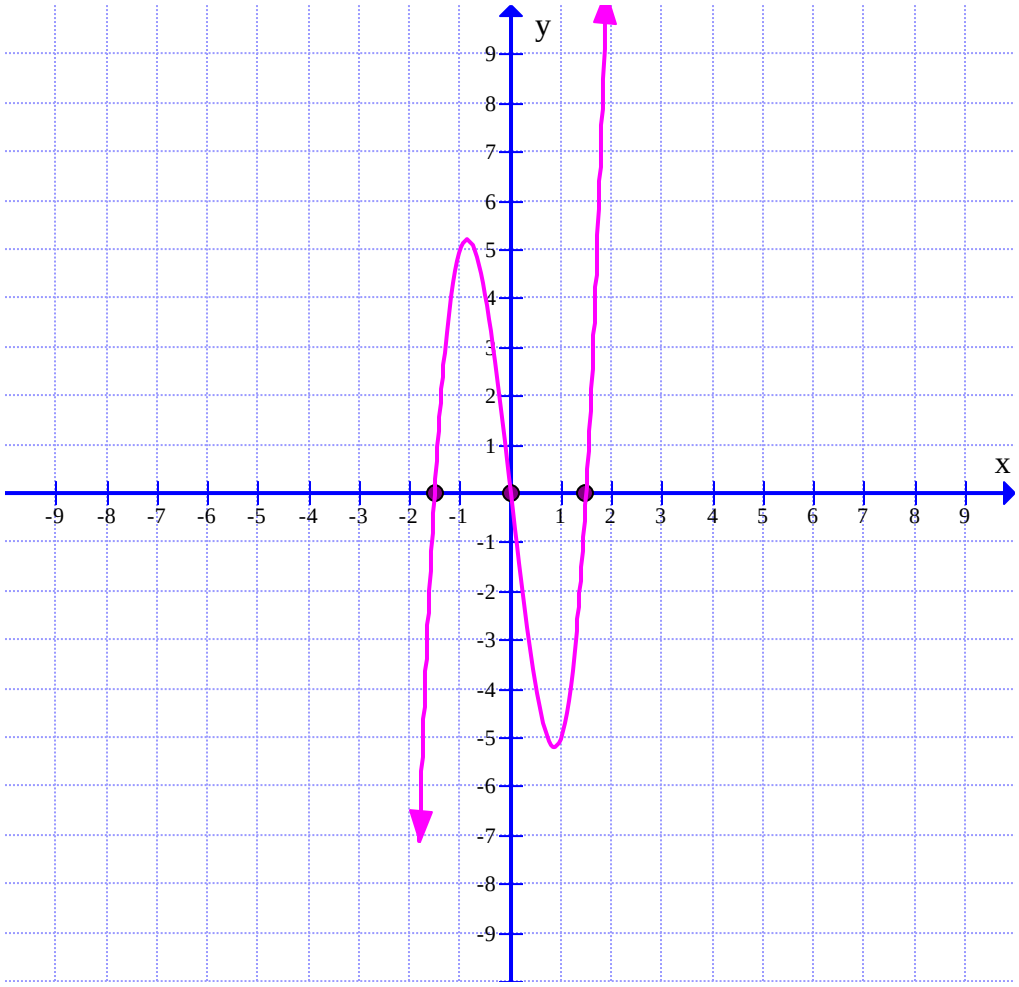
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $f(x) = x^{۲} + ۶x + ۵$



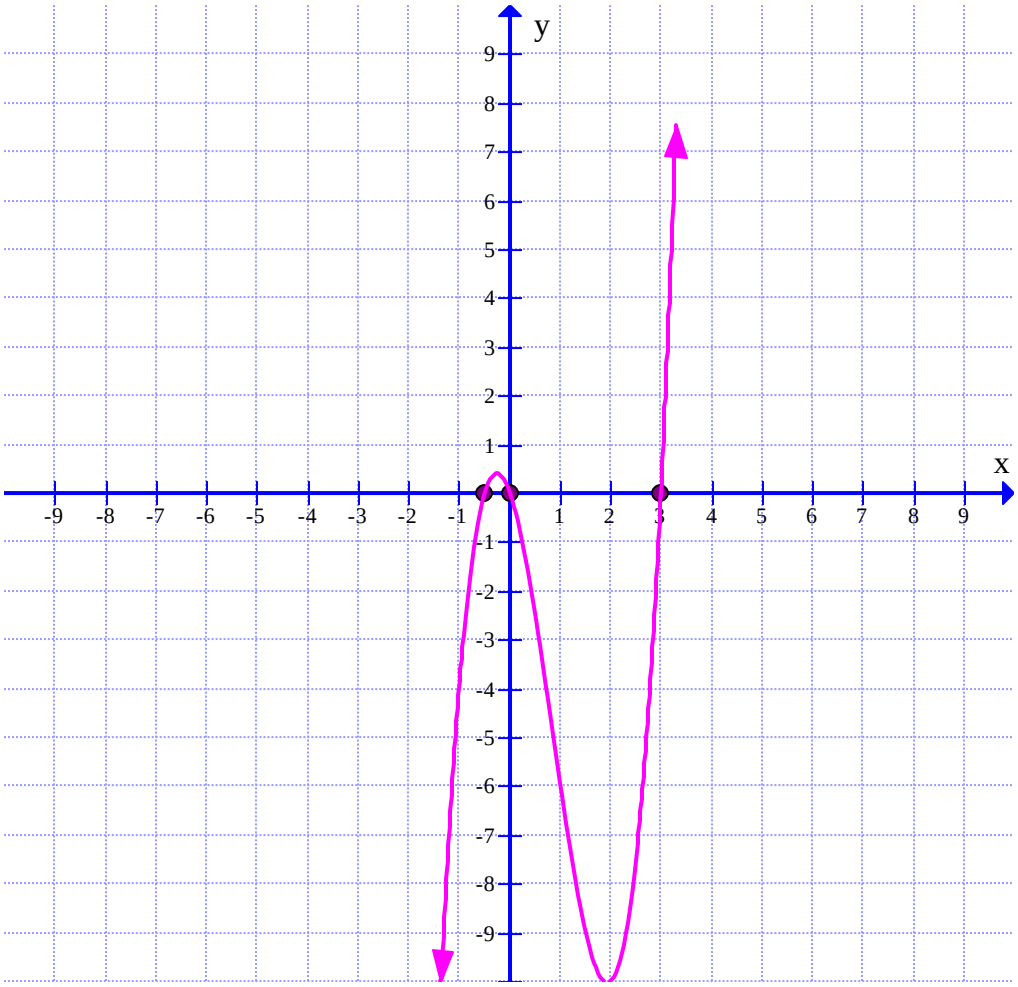
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $f(x) = ۴x^{۳} - ۹x$



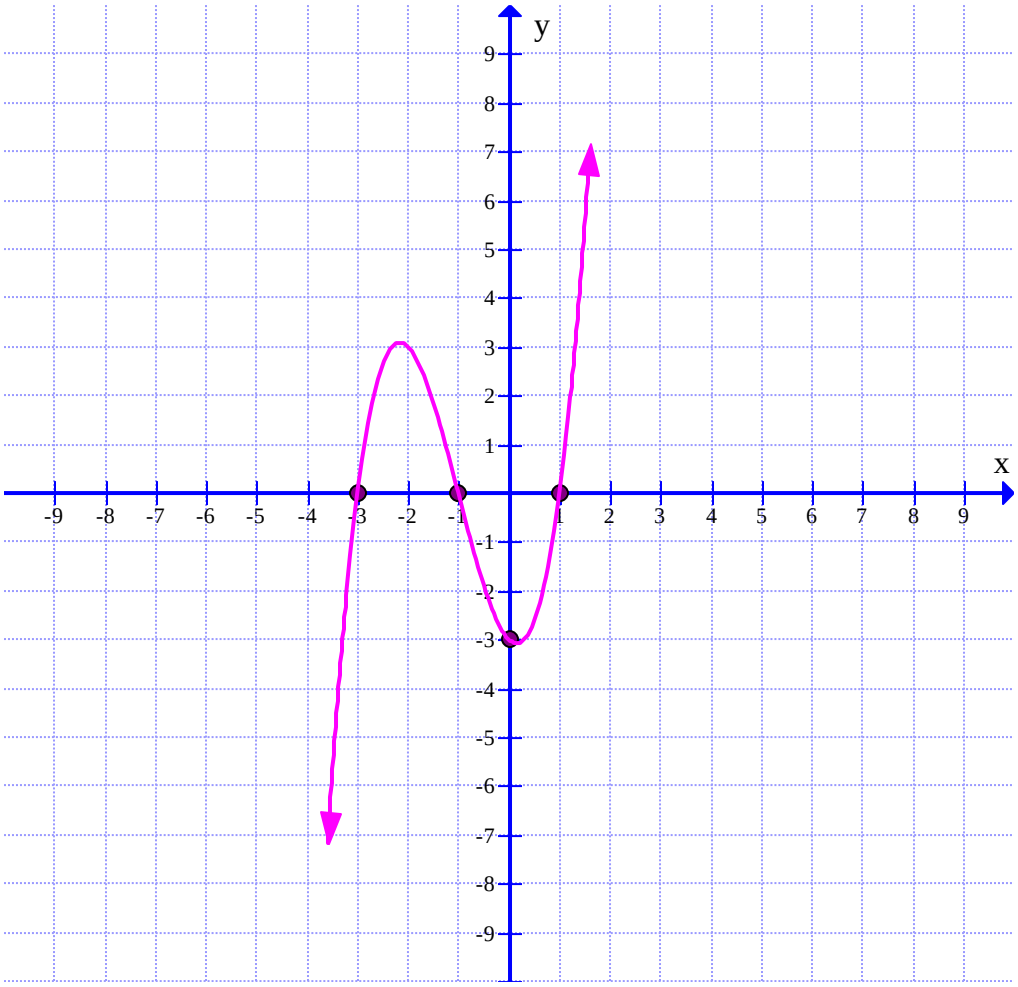
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $f(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ - ۳x$



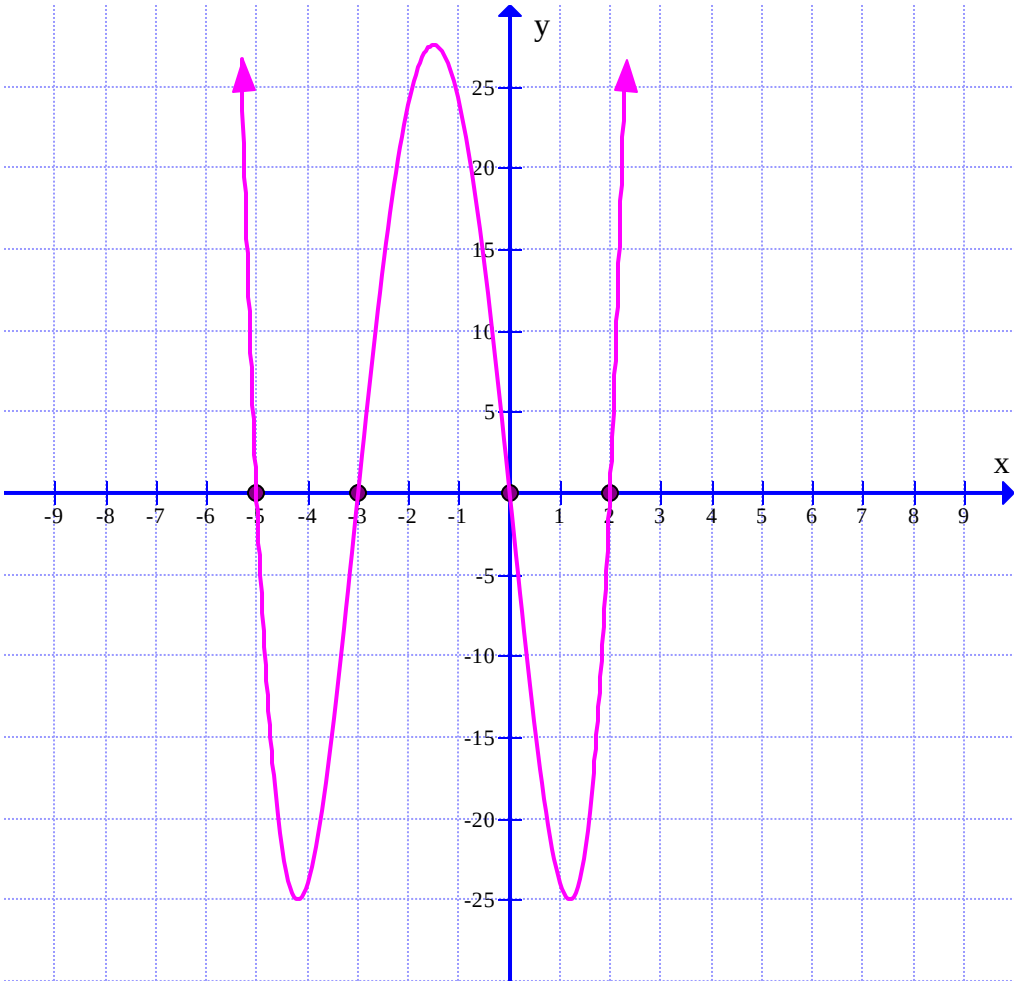
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - x - ۳$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲) $f(x) = x(x-۲)(x+۳)(x+۵)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۸ – توابع درجه دوم و نمودار آنها Quadratic Functions and Their Graphs

رسم نمودار $f(x) = x^۲ + k$

در بخش ۷.۷ نمودار تابع درجه دوم $f(x) = x^۲$ را رسم کردیم. در آن بخش دانستیم که نمودار یک تابع درجه دوم یک سهمی است که یا به طرف بالا و یا به طرف پایین باز می شود. حالا با ادامه مطالعه در مورد این تابع ، جزئیات بیشتری در مورد توابع درجه دوم و نمودار آنها کشف می کنیم.

بخاطر دارید که گفتیم یک تابع درجه دوم ، تابعی است که بتوان آنرا به صورت زیر نوشت.

$$f(x) = x^۲ + bx + c \quad ، \quad a، b، c \text{ اعداد حقیقی هستند} \quad ، \quad a \neq ۰$$

توجه دارید که معادله ها ی به صورت $y = x^۲ + bx + c$ هم توابع درجه دوم را بیان می کنند ، زیرا y یک تابعی از x است و یا بهتر است بگویم $y = f(x)$

همچنین بخاطر دارید که اگر $a > ۰$ باشد ، سهمی به طرف بالا باز می شود و اگر $a < ۰$ باشد ، سهمی به طرف پایین باز می شود. همچنین می دانید که راس سهمی ، پایین ترین نقطه است اگر سهمی به طرف بالا باز شود و بالا ترین نقطه است اگر به طرف پایین باز شود. محور تقارن هم خط عمودی است که از راس می گذرد.

مثال ۱ – تابع $f(x) = x^۲$ و تابع $g(x) = x^۲ + ۳$ را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.

پاسخ

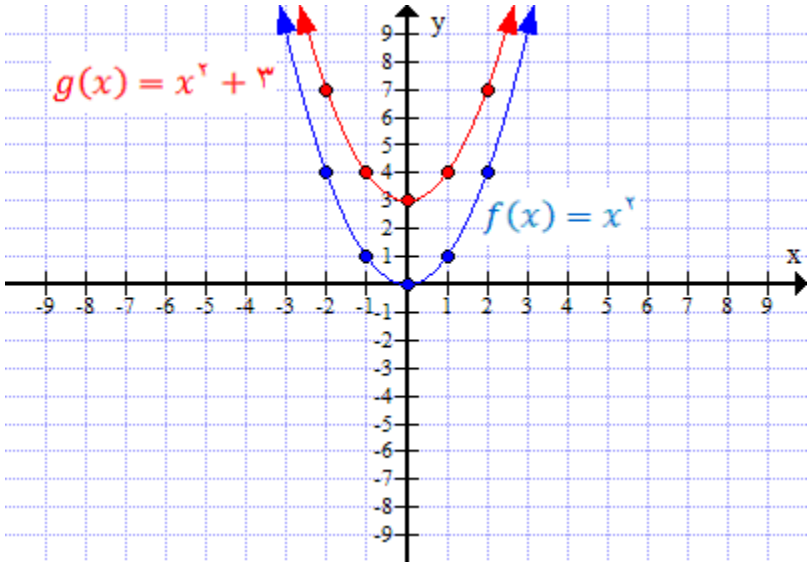
ابتدا برای هر یک از توابع ، جدولی برای مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ می سازیم. توجه داشته باشید که هر مقدار x برای تابع $g(x)$ باید سه رقم بیشتر از مقدار مربوط به $f(x)$ باشد. چون $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x^۲ + ۳$

به عبارت دیگر ، نمودار $g(x) = x^۲ + ۳$ مانند نمودار $f(x) = x^۲$ است با این تفاوت که سه واحد به طرف بالا تغییر مکان داده است. محور تقارن هر دو تابع همان محور y است.

تغییر مکان دادن Shift

x	$f(x) = x^۲$	$g(x) = x^۲ + ۳$
۲–	۴	۷
۱–	۱	۴
۰	۰	۳
۱	۱	۴
۲	۴	۷

دانلود از سایت ریاضی سرا



به طور کلی ، خصوصیات Properties زیر را خواهیم داشت.

نمودار سهمی $f(x) = x^۲ + k$

الف – اگر k مثبت باشد ، نمودار $f(x) = x^۲ + k$ مانند نمودار $y = x^۲$ که به اندازه k واحد به طرف بالا تغییر مکان داده شود.

ب -اگر k منفی باشد ، نمودار $f(x) = x^۲ + k$ مانند نمودار $y = x^۲$ که به اندازه $|k|$ واحد به طرف پایین تغییر مکان داده شود.

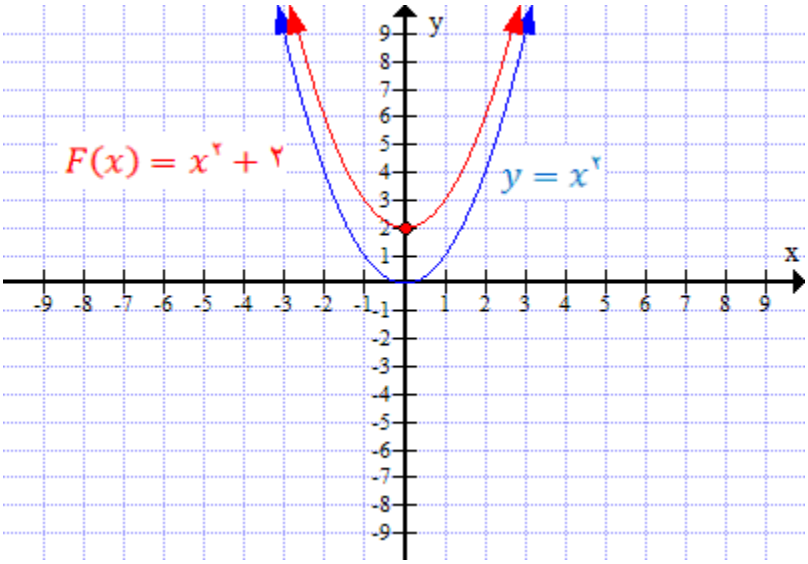
ج –مختصات راس $(۰, k)$ است و محور تقارن محور y است.

مثال ۲ – نمودار $F(x) = x^۲ + ۲$ را رسم کنید.

پاسخ

نمودار $F(x) = x^۲ + ۲$ با تغییر مکان دادن $y = x^۲$ به اندازه ۲ واحد به طرف بالا بدست می آید.

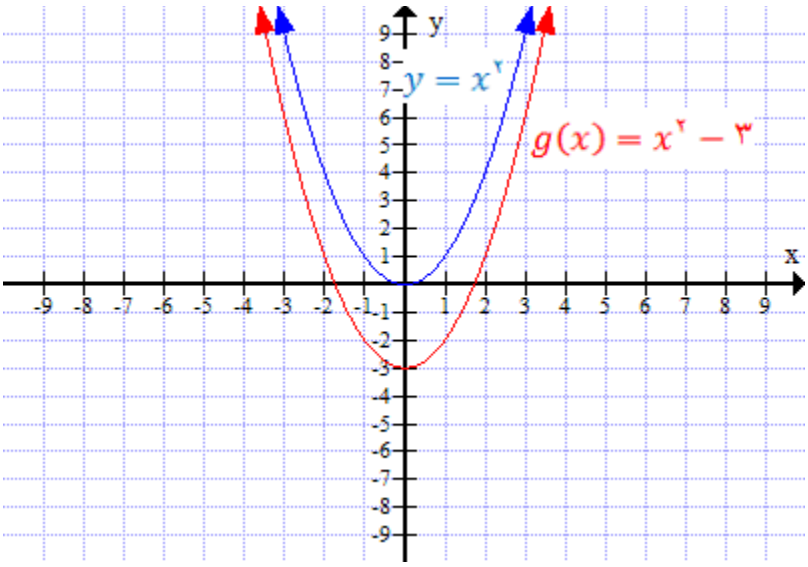
دانلود از سایت ریاضی سرا



مثال ۳ نمودار $g(x) = x^{۲} - ۳$ را رسم کنید.

پاسخ

نمودار $g(x) = x^{۲} - ۳$ با تغییر مکان دادن $y = x^{۲}$ به اندازه ۳ واحد به طرف پایین بدست می آید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

رسم نمودار $f(x) = (x-h)^{۲}$

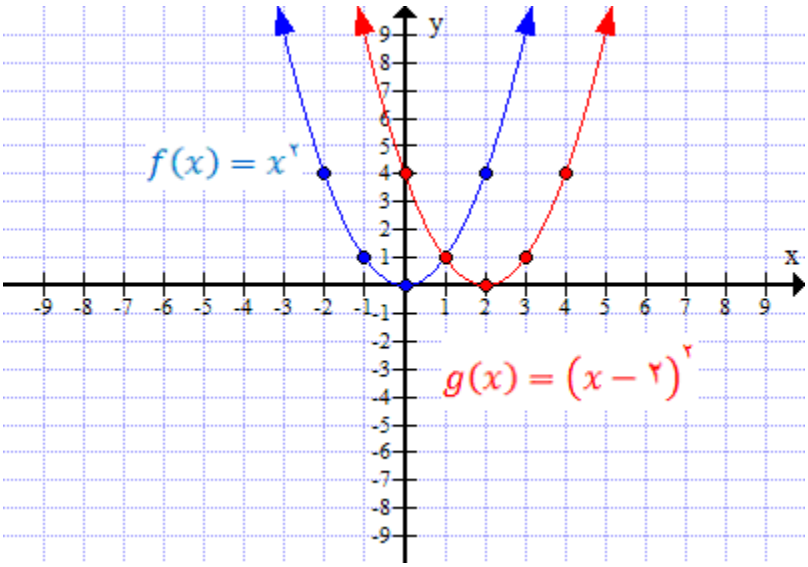
مثال ۴ – نمودار $g(x) = (x-۲)^{۲}$ **و** $f(x) = x^{۲}$ **را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.**

پاسخ

ابتدا جدولی برای هر دو تابع ترسیم می کنیم.

x	$f(x) = x^{۲}$	x	$g(x) = (x-۲)^{۲}$
۲−	۴	۰	۴
۱−	۱	۱	۱
۰	۰	۲	۰
۱	۱	۳	۱
۲	۴	۴	۴

ملاحظه می کنید که هنگامی که مقدار $f(x) = g(x)$ است ، مقدار x در $g(x)$ دو واحد بیشتر از مقدار x در $f(x)$ است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

در نتیجه خواص زیر را خواهیم داشت.

نمودار سهمی $f(x) = (x-h)^{۲}$

الف – اگر h مثبت باشد ، نمودار $f(x) = (x-h)^{۲}$ مانند نمودار $y = x^{۲}$ است که به اندازه h واحد به طرف راست تغییر مکان داده شود.

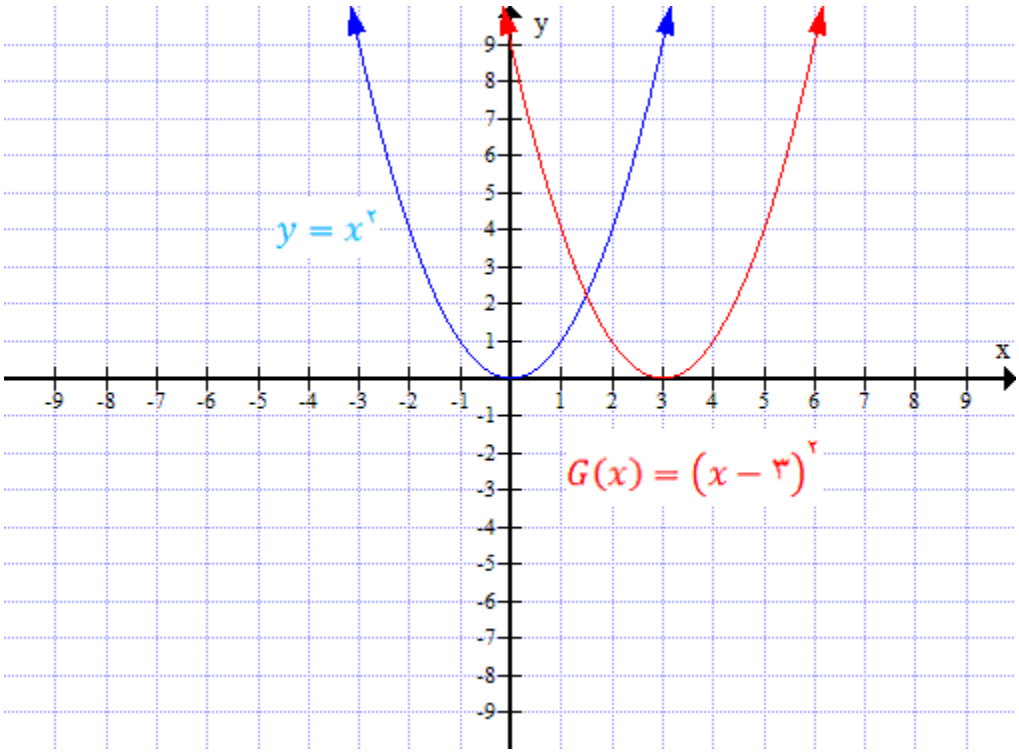
ب - اگر h منفی باشد ، نمودار $f(x) = (x-h)^{۲}$ مانند نمودار $y = x^{۲}$ است که به اندازه $|h|$ واحد به طرف چپ تغییر مکان داده شود.

مختصات راس $(h,۰)$ است و محور تقارن خط عمودی $x = h$ است.

مثال – توابع زیر را رسم کنید.

۵- $G(x) = (x-۳)^{۲}$

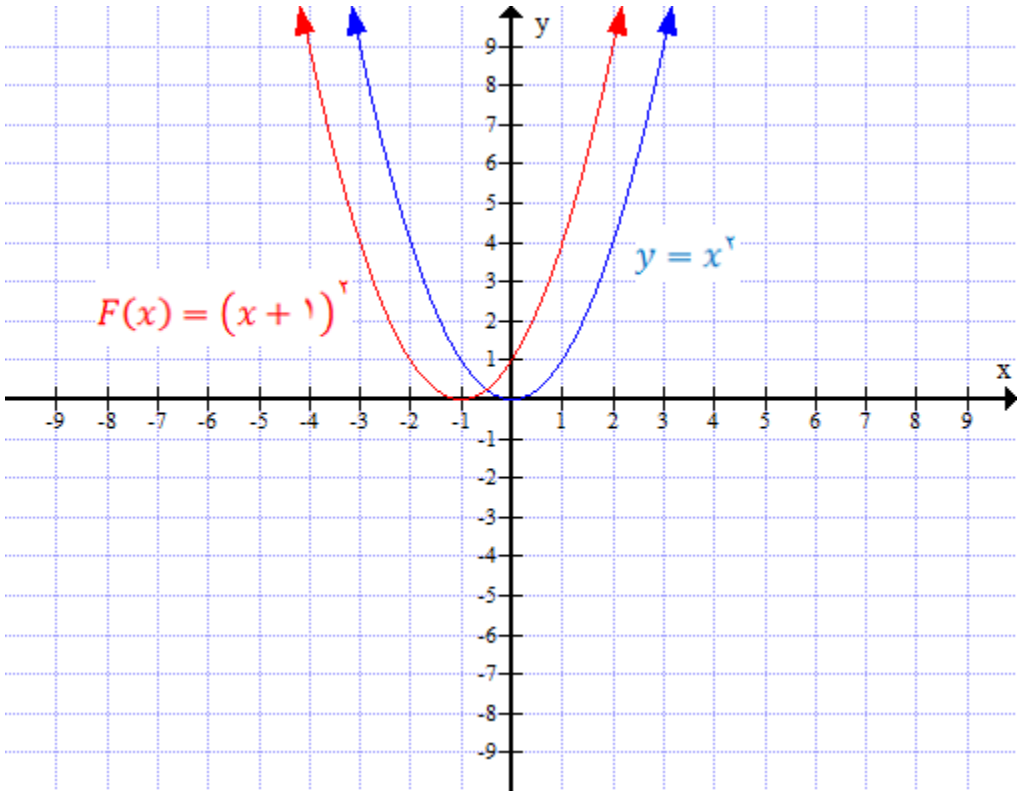
پاسخ



دانلود از سایت ریاضی سرا

$F(x) = (x+۱)^۲ - ۶$

پاسخ



نمودار $f(x) = (x-h)^۲ + k$

نمودار $f(x) = (x-h)^k + k$ ماند نمودار $y = x^۲$ با راس (h,k) و محور تقارن خط عمودی $x = h$

پس ممکن است که نمودار را عمودی و یا افقی تغییر مکان داد.

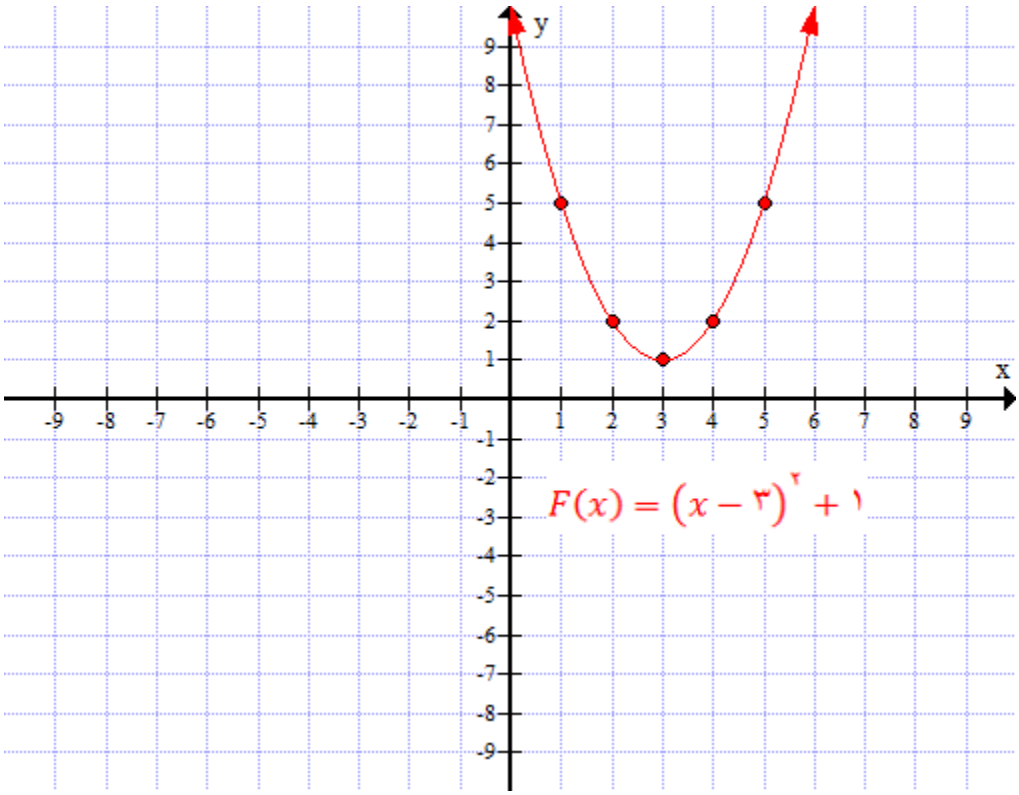
مثال ۷ – نمودار $F(x) = (x-۳)^۲ + ۱$

پاسخ

مختصات راس نقطه $(۳,۱)$ است. برای پیدا کردن مختصات نقاط دیگری روی نمودار ، چند مقدار سمت چپ ۳ به x می دهیم و مقدار $F(x)$ را پیدا می کنیم. و به همین طریق چند عدد طرف راست ۳ به x می دهیم و مقدار $F(x)$ را پیدا می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

x	$F(x) = (x - ۳)^{۲} + ۱$
۳	۱
۱	۵
۲	۲
۴	۲
۵	۵



دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار $f(x) = ax^{۲}$

حالا تغیرات شکل نمودار وقتی که ضریب $x^{۲}$ یعنی a یک نیست ، بر رسی می کنیم.

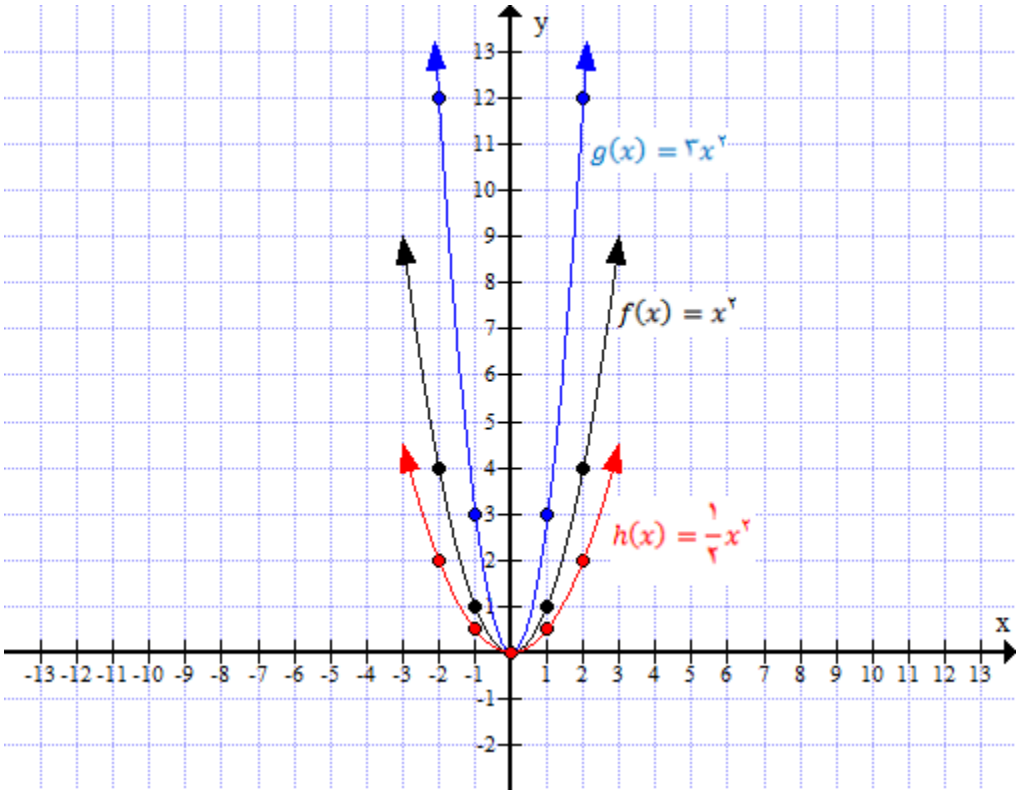
مثال ۸ – نمودار توابع $h(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲}$ ، $g(x) = ۳x^{۲}$ ، $f(x) = x^{۲}$ **را روی یک صفحه مختصات رسم کنید.**

x	$f(x) = x^{۲}$
-۲	۴
-۱	۱
۰	۰
۱	۱
۲	۴

x	$g(x) = ۳x^{۲}$
-۲	۱۲
-۱	۳
۰	۰
۱	۳
۲	۱۲

x	$h(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲}$
-۲	۲
-۱	$\frac{۱}{۲}$
۰	۰
۱	$\frac{۱}{۲}$
۲	۲

دانلود از سایت ریاضی سرا



نتیجه این که نمودار $g(x) = ۳x^۲$ باریک تر از نمودار $f(x) = x^۲$ است. و نمودار $h(x) = \frac{۱}{۲}x^۲$ پهن تر از نمودار $f(x) = x^۲$ است. مختصات حرس سه ، نقطه $(۰,۰)$ است. و محور تقارن ، محور y است.

نمودار سهمی $f(x) = ax^۲$

اگر a مثبت باشد ، سهمی به طرف بالا باز مو شود و اگر منفی باشد ، به طرف پایین باز می شود.

اگر $|a| > ۱$ باشد ، نمودار سهمی باریک تر از نمودار $y = x^۲$ است.

اگر $|a| > ۱$ باشد ، نمودار سهمی باریک تر از نمودار $y = x^۲$ است.

اگر $|a| > ۱$ باشد ، نمودار سهمی باریک تر از نمودار $y = x^۲$ است.

اگر $|a| < ۱$ باشد ، نمودار سهمی پهن تر از نمودار $y = x^۲$ است.

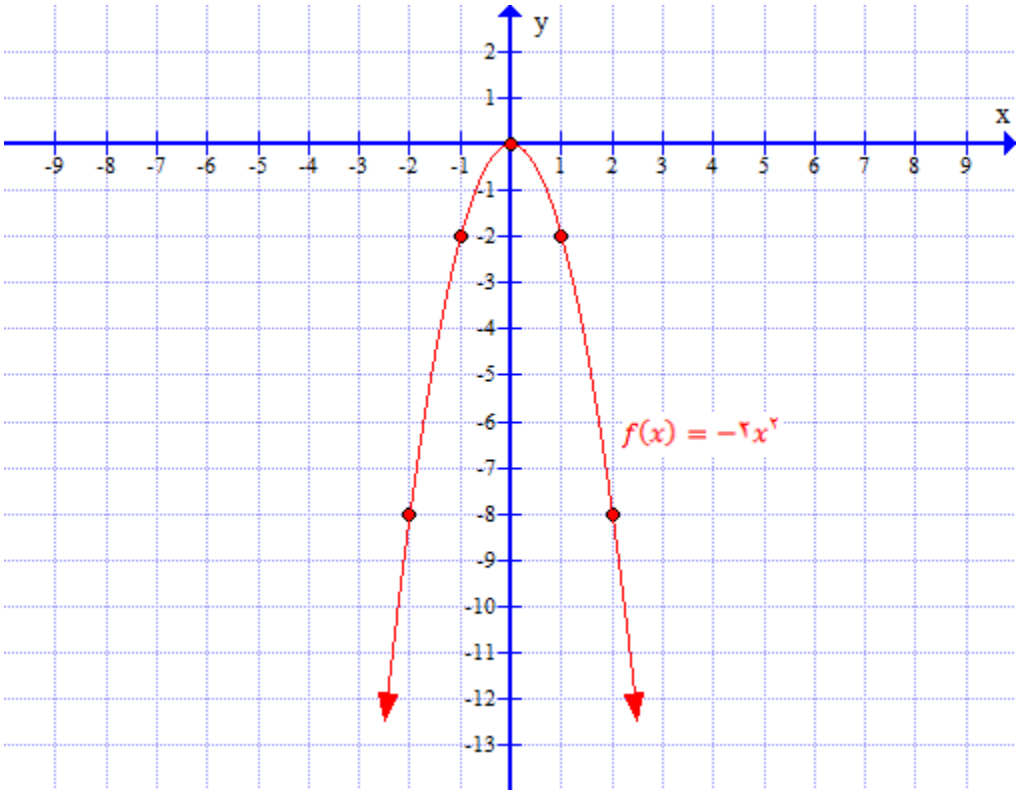
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۹ – نمودار $f(x) = -۲x^۲$ را رسم کنید.

پاسخ

چون $a = -۲$ منفی است ، پس سهمی به طرف پایین باز می شود. چون $|-۲| = ۲ > ۱$ پس سهمی باریک تر از نمودار $y = x^۲$ است. مختصات راس ، نقطه $(۰,۰)$ است و محور تقارن ، محور y است.

x	$f(x) = -۲x^۲$
-۲	-۸
-۱	-۲
۰	۰
۱	-۲
۲	-۸



دانلود از سایت ریاضی سرا

رسم نمودار $f(x) = a(x-h)^{۲} + k$

مثال ۱۰

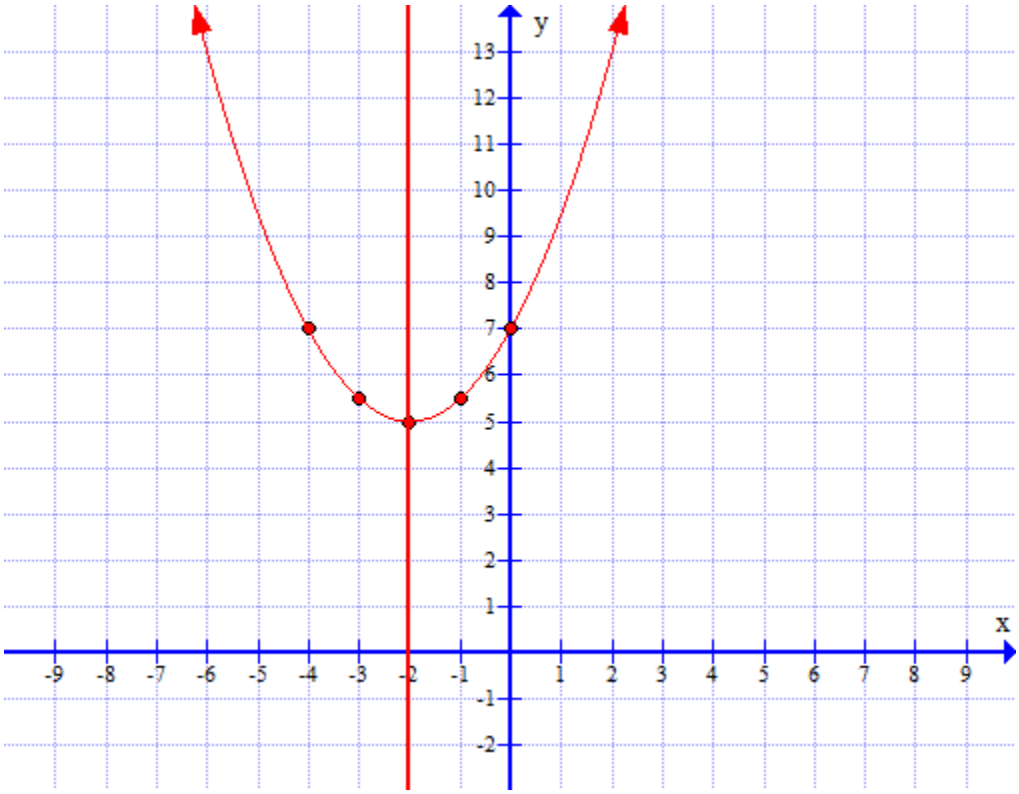
نمودار $g(x) = \frac{۱}{۲}(x+۲)^{۲} + ۵$ **را رسم کنید.**

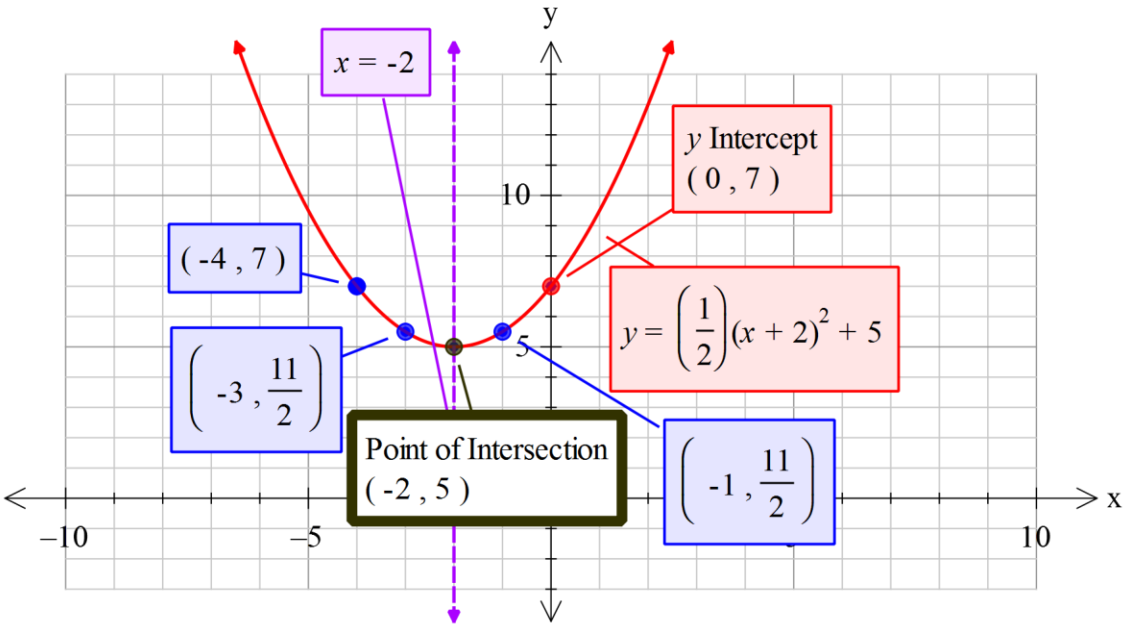
پاسخ

تابع $g(x) = \frac{۱}{۲}(x+۲)^{۲} + ۵$ را می توان به صورت $g(x) = \frac{۱}{۲}\left(x-(-۲)\right)^{۲} + ۵$ نوشت. پس شکل نمودار مانند شکل نمودار $y = x^{۲}$ است با این تفاوت که ۲ واحد به طرف چپ و ۵ واحد به طرف بالا تغییر مکان داده شود. چون $a = \frac{۱}{۲} < ۱$ شکل سهمی پهن تر است. مختصات راس ، نقطه $(-۲,۵)$ و محور تقارن خط $x = -۲$ است.

x	$g(x) = \frac{۱}{۲}(x+۲)^{۲} + ۵$
-۴	۷
-۳	$۵\frac{۱}{۲}$
-۲	۵
-۱	$۵\frac{۱}{۲}$
۰	۷

دانلود از سایت ریاضی سرا





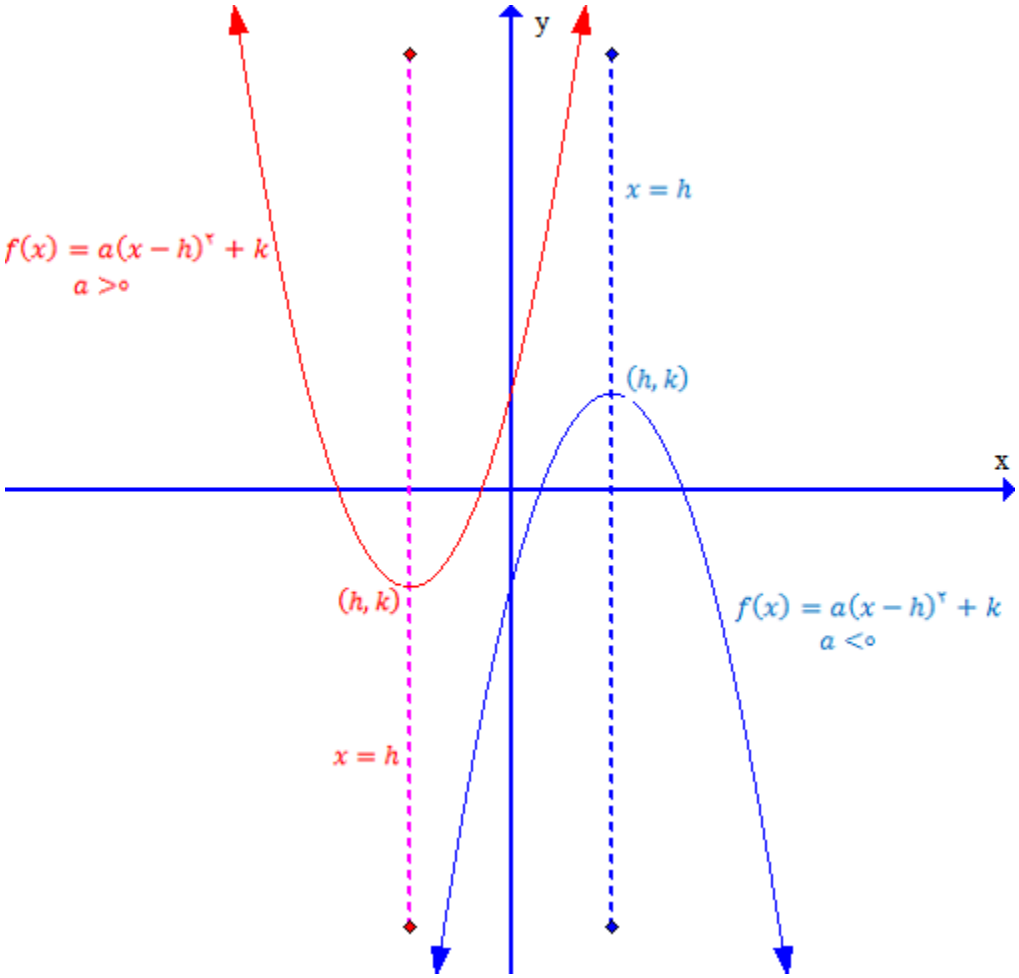
دانلود از سایت ریاضی سرا

پس به طور کلی

نمودار یک تابع درجه دوم Graph of a Quadratic Function

نمودار یک تابع درجه دوم که به صورت $f(x) = a(x-h)^{۲} + k$ نوشته شده باشد ، یک سهمی است که راس آن نقطه (h,k) است. اگر $a > ۰$ باشد ، سهمی به طرف بالا و اگر $a < ۰$ باشد ، سهمی به طرف پایین باز می شود.

محور تقارن خط $x = h$ است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۸

نمودار تابع های زیر را رسم کنید. راس را مشخص کنید و محور تقارن را رسم کنید.

۱) $f(x) = x^{۲} - ۱$

۲) $f(x) = x^{۲} + ۳$

۳) $f(x) = (x - ۵)^{۲}$

۴) $f(x) = (x + ۵)^{۲}$

۵) $f(x) = x^{۲} + ۵$

۶) $f(x) = x^{۲} - ۴$

۷) $f(x) = (x - ۲)^{۲} + ۵$

۸) $f(x) = (x - ۶)^{۲} + ۱$

۹) $f(x) = (x + ۱)^{۲} + ۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $f(x) = (x+۳)^۲ + ۳$

۱۱) $f(x) = -x^۲$

۱۲) $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۲$

۱۳) $f(x) = -۳x^۲$

۱۴) $f(x) = -\frac{۱}{۴}x^۲$

۱۵) $f(x) = -(x-۲)^۲ - ۶$

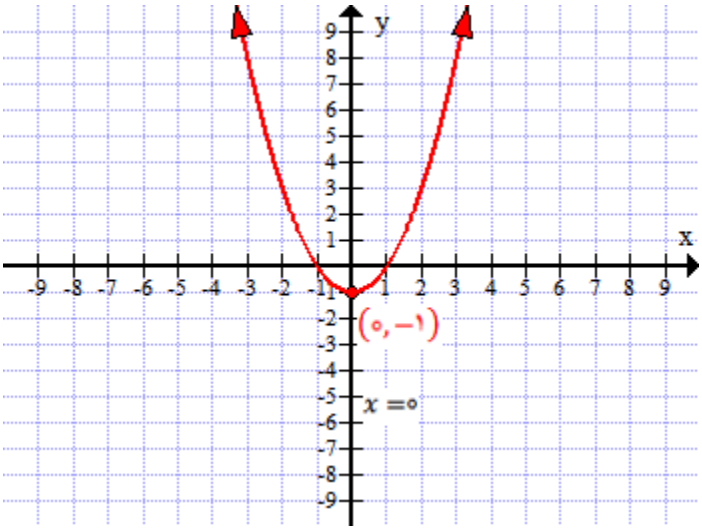
۱۶) $f(x) = ۲(x+۳)^۲$

پاسخ تمرینات ۷.۸

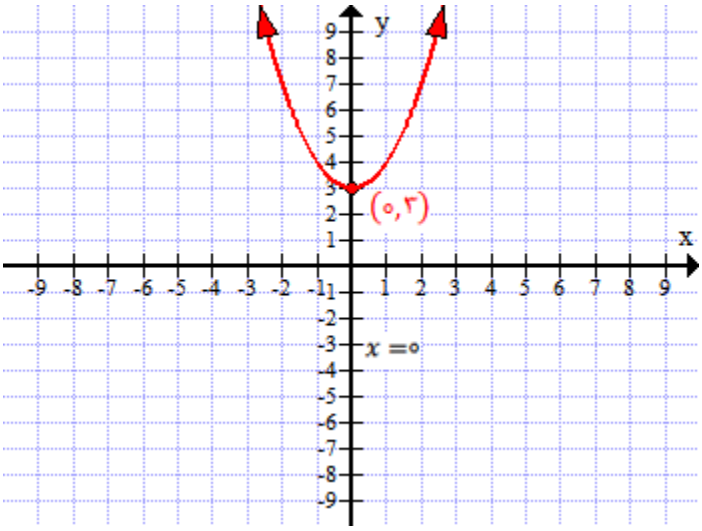
دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار تابع های زیر را رسم کنید. راس را مشخص کنید و محور تقارن را رسم کنید.

۱) $f(x) = x^{۲} - ۱$

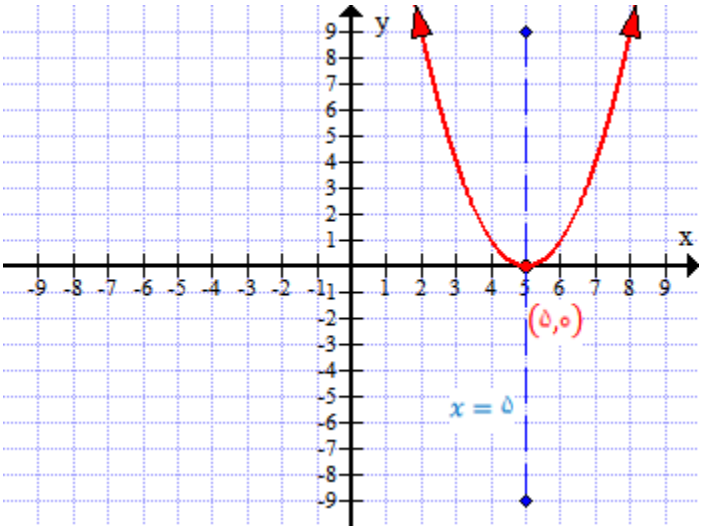


۲) $f(x) = x^{۲} + ۳$

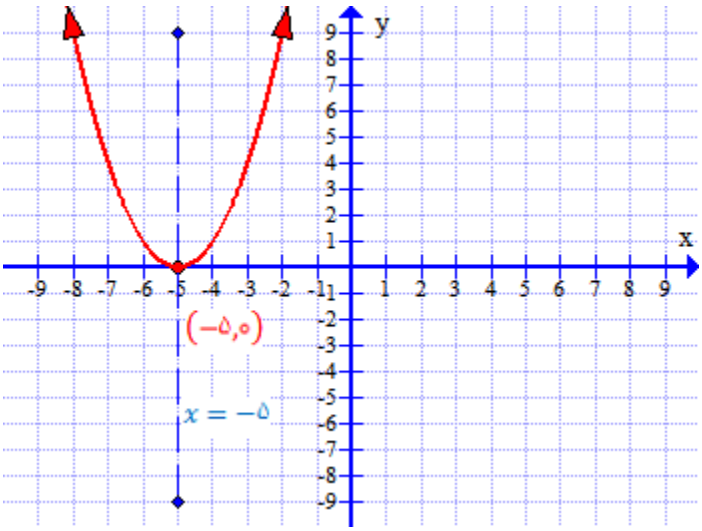


۳) $f(x) = (x - ۵)^{۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

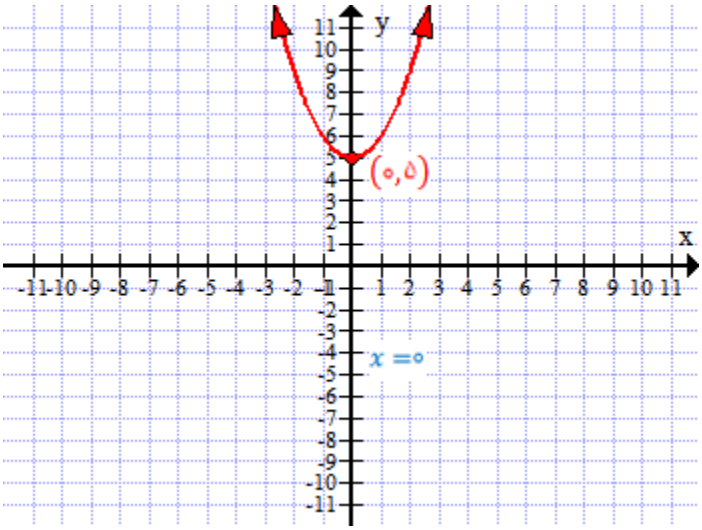


۴) $f(x) = (x + ۵)^{۲}$

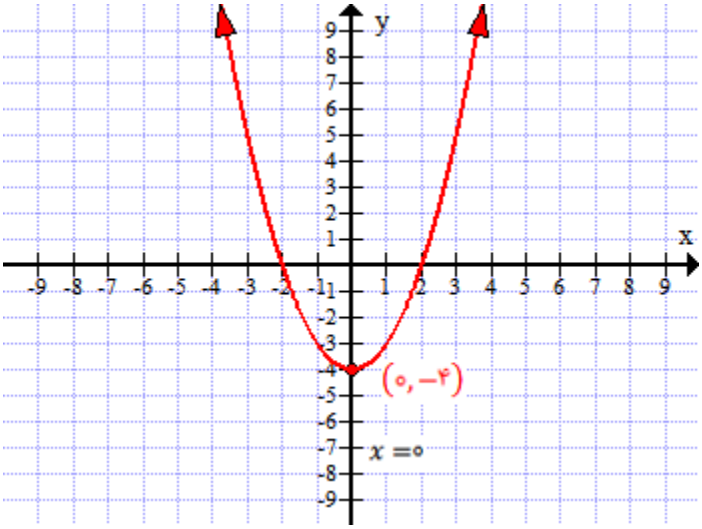


۵) $f(x) = x^{۲} + ۵$

دانلود از سایت ریاضی سرا

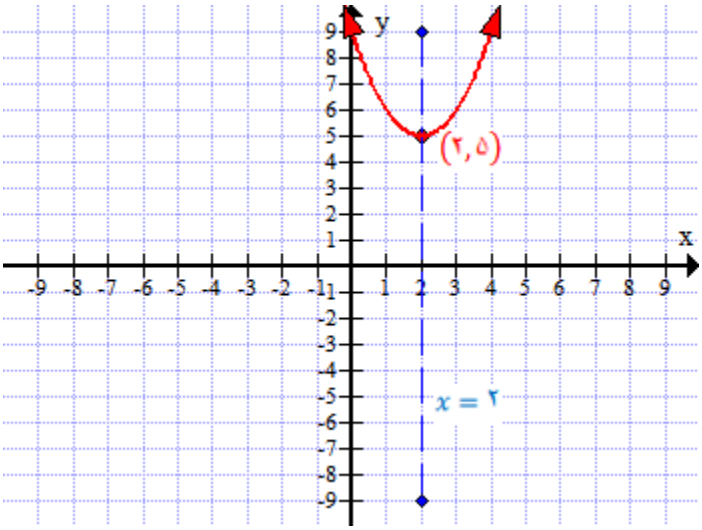


۶) $f(x) = x^{۲} - ۴$

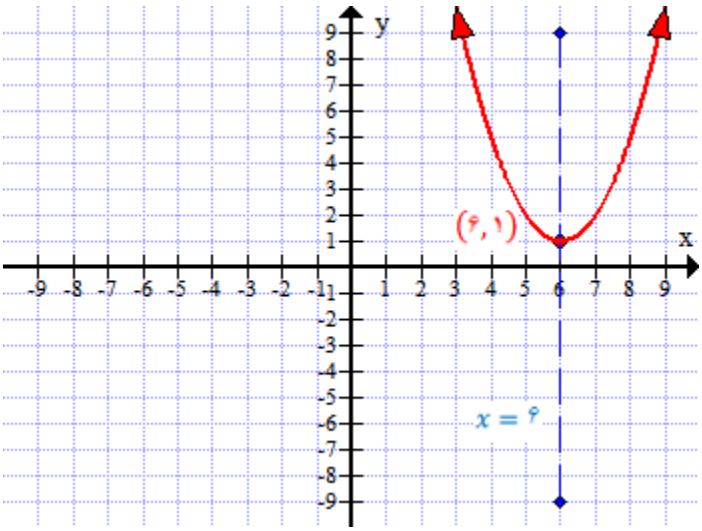


۷) $f(x) = (x - ۲)^{۲} + ۵$

دانلود از سایت ریاضی سرا

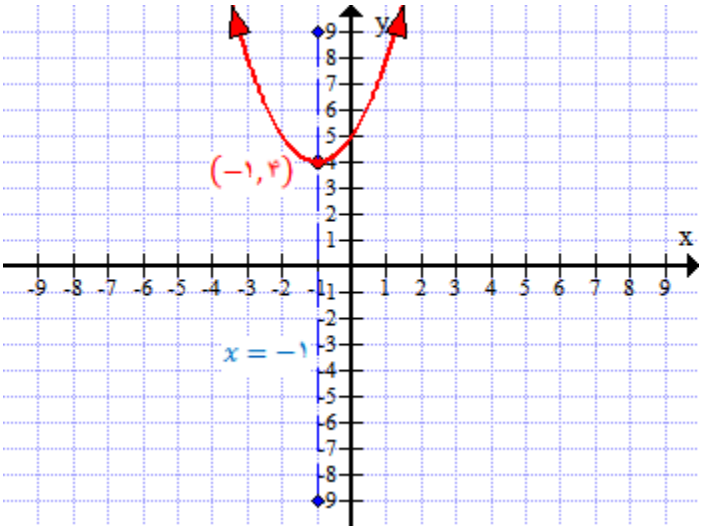


۸) $f(x) = (x - ۶)^{۲} + ۱$

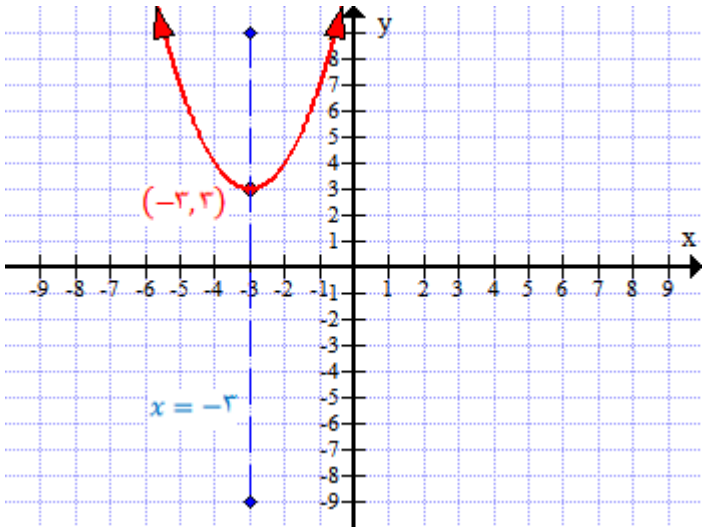


۹) $f(x) = (x + ۱)^{۲} + ۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

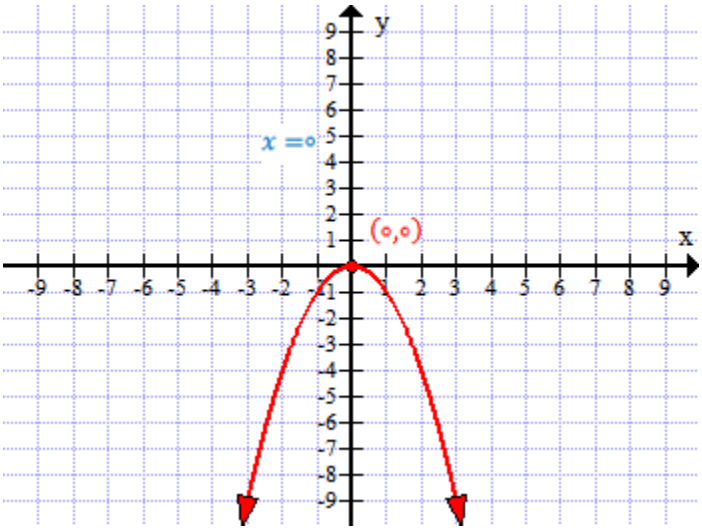


۱۰) $f(x) = (x+۳)^{۲} + ۳$

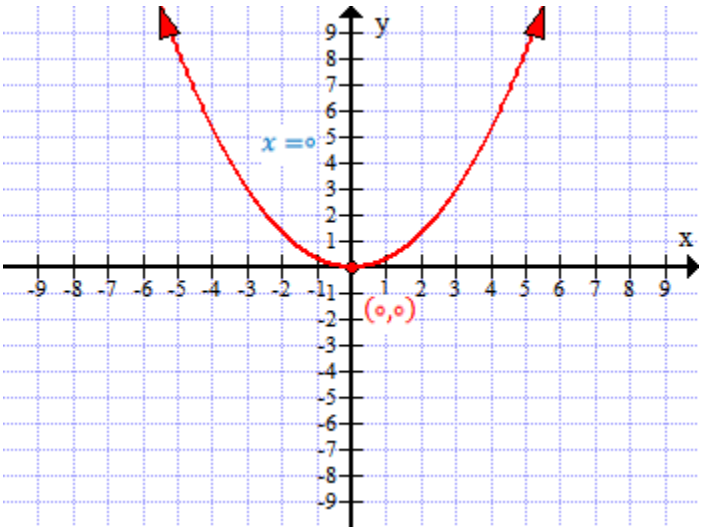


۱۱) $f(x) = -x^{۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

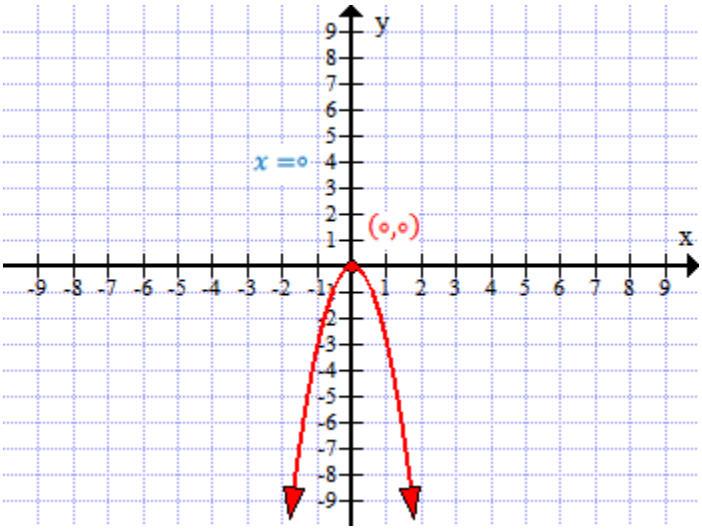


۱۲) $f(x) = \frac{۱}{۳}x^{۲}$

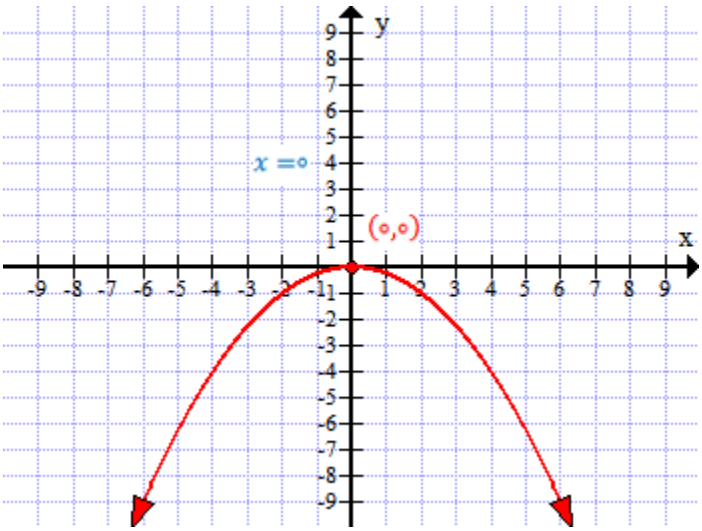


۱۳) $f(x) = -۳x^{۲}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

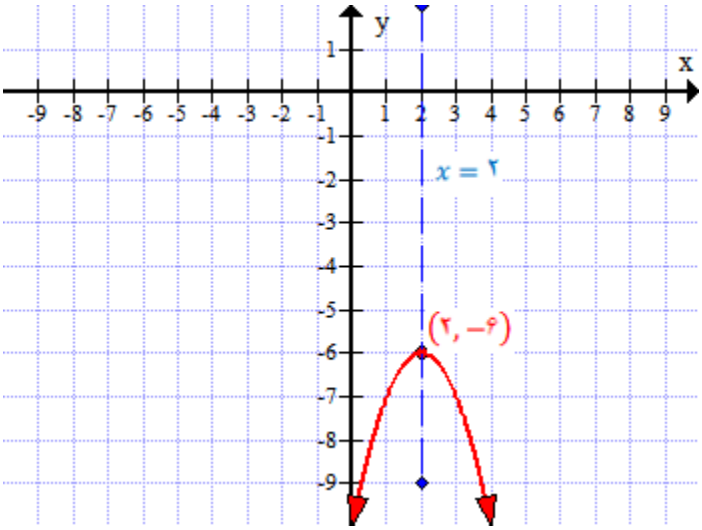


۱۴) $f(x) = -\frac{۱}{۴}x^{۲}$

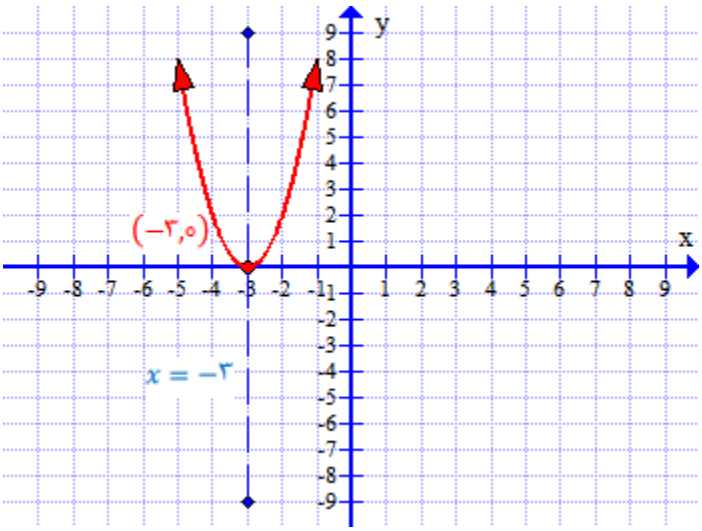


۱۵) $f(x) = -(x-۲)^{۲} - ۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا



۱۶) $f(x) = ۲(x+۳)^{۲}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۹ – مطالب بیشتر در مورد توابع درجه دوم More Subjects on Quadratic Functions

نوشتن توابع درجه دوم به صورت $y = a(x-h)^۲ + k$

Writing Quadratic Functions in the form $y = a(x-h)^2 + k$

میدانیم که نمودار یک تابع درجه دوم ، یک سهمی است. اگر تابع درجه دوم به صورت

$$f(x) = a(x-h)^۲ + k$$

نوشته شود ، به اسانی می توان مختصات راس (h,k) را پیدا کرد و سهمی را رسم نمود. برای نوشتن یک تابع درجه دوم به این صورت ، لازم است که عملیات مربع کامل Complete the Square انجام دهیم. (به بخش ۶.۱ مراجعه شود)

مثال ۱ – تابع $f(x) = x^۲ - ۴x - ۱۲$ را رسم کنید. مختصات راس و محل تلاقی با محور ها را پیدا کنید.

حل

نمودار این تابع درجه دوم ، یک سهمی است. برای پیدا کردن راس سهمی ، دو جمله ای $x^۲ - ۴x$ را مربع کامل می کنیم. برای راحتی کار بجای $f(x)$ می نویسیم y

$$y = x^۲ - ۴x - ۱۲$$

$$y + ۱۲ = x^۲ - ۴x$$

حالا مربع $\frac{b}{۲}$ را به هر دو طرف معادله اضافه می کنیم.

$$\left(\frac{b}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{-۴}{۲}\right)^۲ = (-۲)^۲ = ۴$$

پس

$$y + ۱۲ + ۴ = x^۲ - ۴x + ۴$$

$$y + ۱۶ = (x-۲)^۲$$

$$y = (x-۲)^۲ - ۱۶$$

از معادله بالا نتیجه می گیریم که مختصات راس سهمی $(۲ - ۱۶)$است. و محور تقارن ، خط $x = ۲$ می باشد .

دانلود از سایت ریاضی سرا

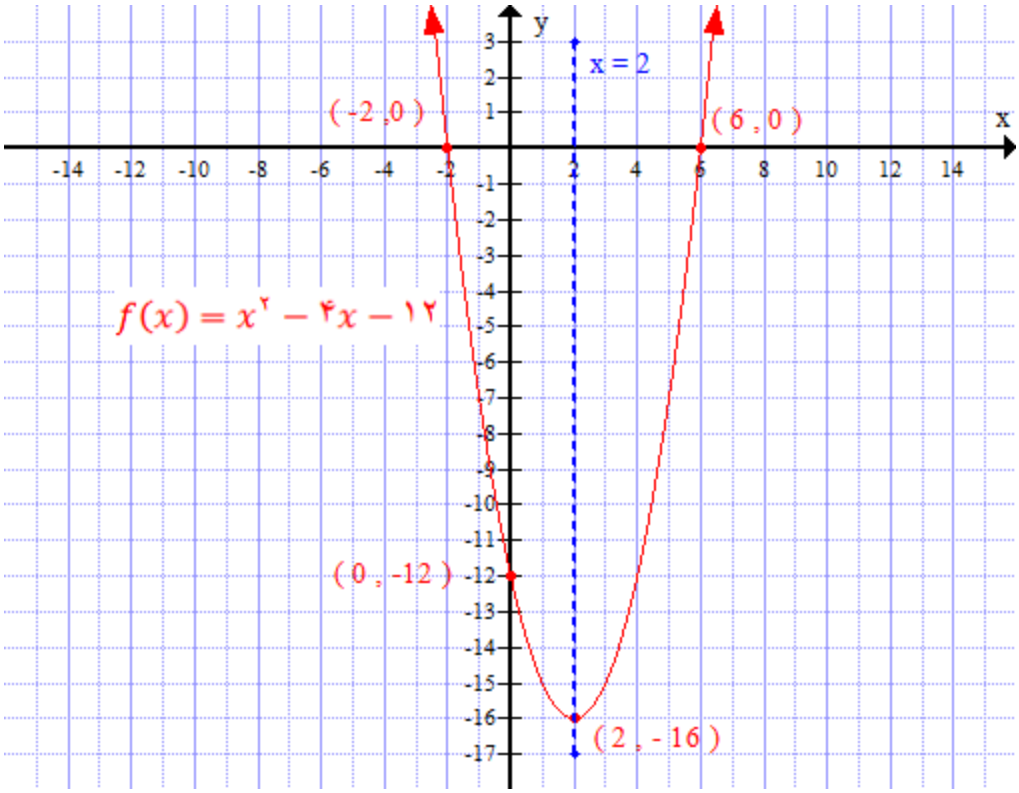
چون $a = ۱ > ۰$ است ، پس سهمی به طرف بالا باز می شود. و چون راس سهمی زیر محور x است ، پس سهمی در دو نقطه با این محور تلاقی می کند. برای پیدا کردن این دو نقطه ، y را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$۰ = x^۲ - ۴x - ۱۲$$

$$۰ = (x - ۶)(x + ۲)$$

$$x = ۶ \qquad x = -۲$$

همچنین محل تلاقی سهمی با محور y نقطه $(۰, -۱۲)$ است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ - نمودار $f(x) = ۳x^۲ + ۳x + ۱$ را رسم کنید. مختصات راس سهمی و محل تلاقی با محور ها را پیدا کنید.

حل

بجای $f(x)$ می گذاریم y و دو جمله ای که شامل متغیر x است مربع کامل می کنیم تا به صورت

$$y = a(x-h)^۲ + k$$

نوشته شود.

$$y = ۳x^۲ + ۳x + ۱$$

$$y - ۱ = ۳x^۲ + ۳x$$

عدد ۳ را از $۳x^۲ + ۳x$ فاکتور می گیریم.

$$y - ۱ = ۳\left(x^۲ + x\right)$$

$$\left(\frac{b}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

پس $\frac{۱}{۴}$ را به داخل پرانتز اضافه می کنیم. پس در حقیقت $۳\left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۳}{۴}$ به سمت چپ معادله اضافه کرده ایم.

لذا به سمت راست هم $\frac{۳}{۴}$ اضافه می کنیم.

$$y - ۱ + \frac{۳}{۴} = ۳\left(x^۲ + x + \frac{۱}{۴}\right)$$

$$y - \frac{۱}{۴} = ۳\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^۲$$

$$y = ۳\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۴}$$

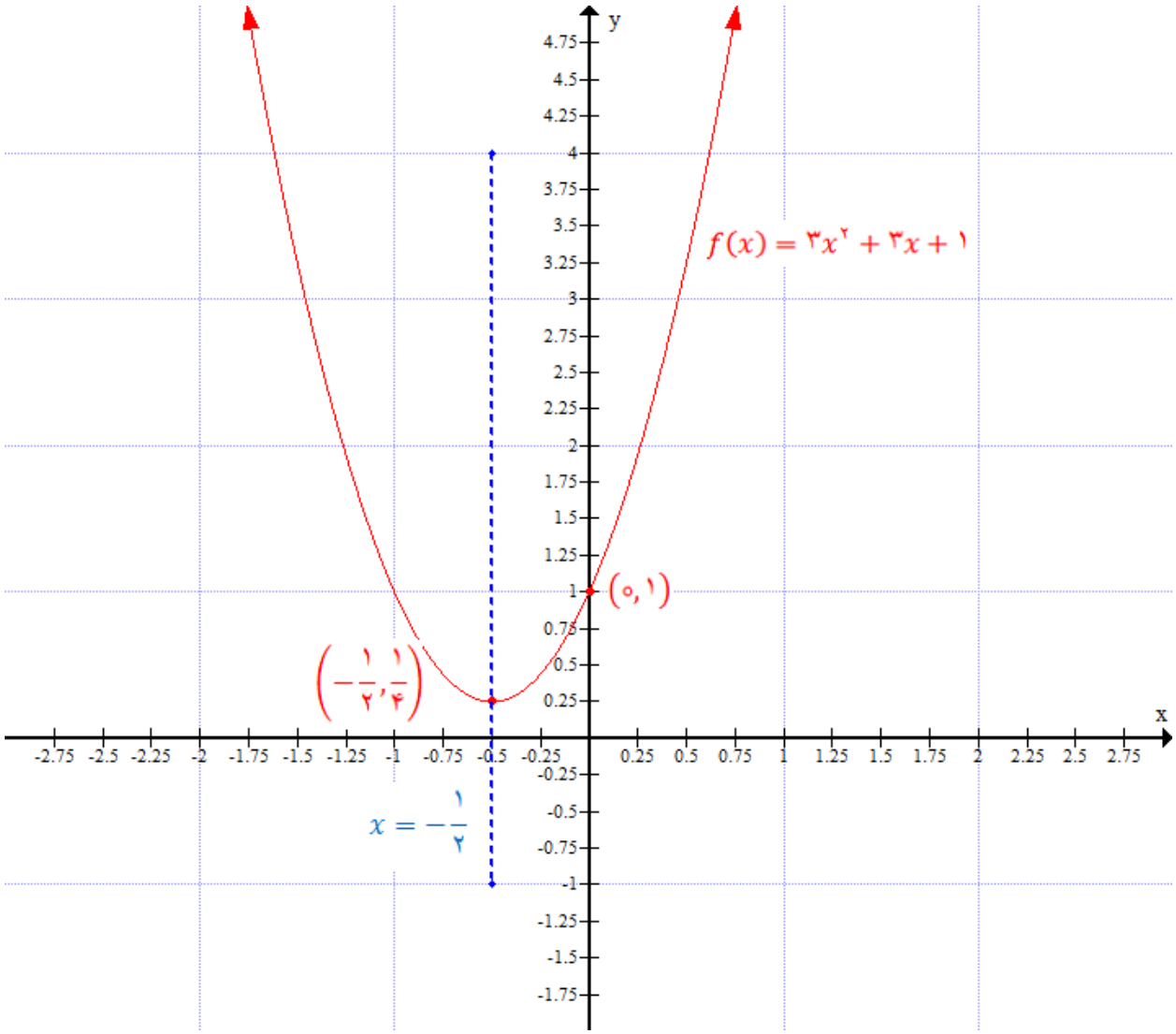
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(x) = ۳\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \frac{۱}{۴}$$

لذا مختصات راس سهمی $\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)$ است. چون $a = ۳ > ۰$ سهمی به طرف بالا باز می شود و چون راس بالای محور x قرار دارد پس سهمی با محور x تلاقی‌نمی کند. برای پیدا کردن محل تلاقی نمودار با محور y به x می دهیم صفر، پس خواهیم داشت.

$$f(۰) = ۳(۰)^{۲} + ۳(۰) + ۱ = ۱$$

محور تقارن هم خط $x = -\frac{۱}{۲}$ است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳ - نمودار $f(x) = -x^{۲} - ۲x + ۳$ را رسم کنید. مختصات راس سهمی و محل تلاقی با محور ها را پیدا کنید.

پاسخ

با کامل کردن مربع ، تابع را به صورت $f(x) = a(x-h)^{۲} + k$ می نویسیم. ابتدا بجای $f(x)$ می گذاریم y

$$f(x) = -x^{۲} - ۲x + ۳$$

$$y = -x^{۲} - ۲x + ۳$$

$$y - ۳ = -x^{۲} - ۲x$$

از -۱ سمت راست فاکتور می گیریم.

$$y - ۳ = -۱\left(x^{۲} + ۲x\right)$$

$$\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{۲}{۲}\right)^{۲} = ۱$$

به داخل پرانتز سمت راست ۱ اضافه می کنیم و به سمت چپ -۱

البته می دانید چرا.

$$y - ۳ - ۱ = -۱\left(x^{۲} + ۲x + ۱\right)$$

$$y - ۴ = -۱\left(x + ۱\right)^{۲}$$

$$y = -۱\left(x + ۱\right)^{۲} + ۴$$

$$f(x) = -۱\left(x + ۱\right)^{۲} + ۴$$

چون $a = -۱ < ۰$ پس سهمی به طرف پایین باز می شود با راس $(-۱, ۴)$ و لذا نمودار در دو نقطه محور x را قطع می کند. برای پیدا کردن آنها $f(x)$ را مساوی صفرقرار می دهیم.

$$۰ = -x^{۲} - ۲x + ۳$$

$$x^{۲} + ۲x - ۳ = ۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

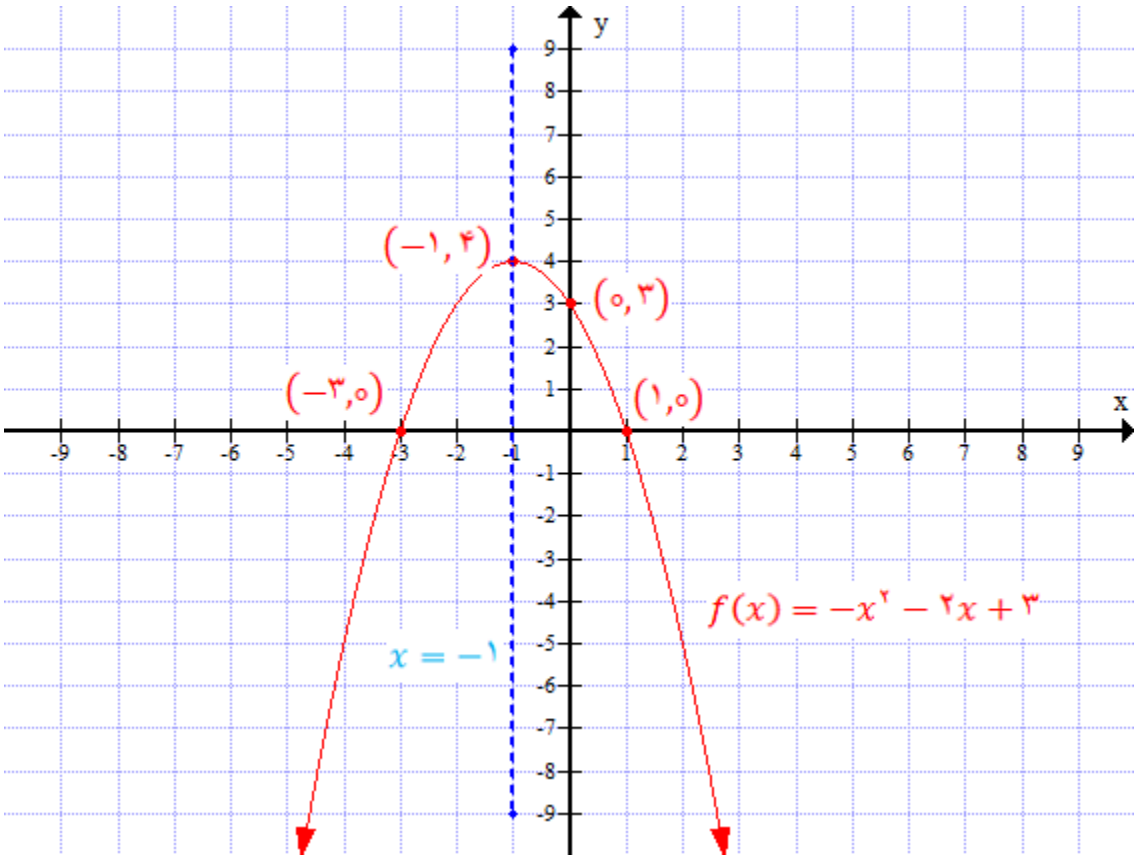
$(x+۳)(x-۱)=۰$

$x=-۳ \quad x=۱$

برای پیدا کردن محل تلاقی نمودار با محور y به x می دهیم صفر.

$f(۰)=-(۰)^۲-۲(۰)+۳=۳$

محور تقارن خط $x=-۱$ است.



استنتاج فرمولی برای پیدا کردن راس Deriving a Formula for Finding the Vertex

در بخش ۷.۷ فرمولی را به شما معرفی کردیم برای پیدا کردن راس یک سهمی. حالا که کامل کردن مربع را تمرین کرده ایم ، نشان می دهیم که مختصات x راس $f(x)$ و یا $y=ax^۲=bx+c$ با فرمول $x=\frac{-b}{۲a}$ بدست می آید.
برای این کار ، روی جملاتی که دارای متغیر x هستند ، عمل کامل کردن مربع انجام می دهیم.

ابتدا بجای $f(x)$ می گذاریم y

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(x) = ax^{۲} + bx + c$$

$$y = ax^{۲} + bx + c$$

$$y - c = ax^{۲} + bx$$

$$y - c = a\left(x^{۲} + \frac{b}{a}x\right)$$

حالا مربع نصف $\frac{b}{a}$ را به طرف راست داخل پرانتز اضافه می کنیم.

$$\left(\frac{b}{۲a}\right)^{۲} = \frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$$

بخاطر فاکتور a در حقیقت

$$a\left(\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}\right) = \frac{b^{۲}}{۴a}$$

به طرف راست اضافه کرده ایم پس همین مقدار هم به سمت چپ اضافه می کنیم.

$$y - c + \frac{b^{۲}}{۴a} = a\left(x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}\right)$$

$$y - c + \frac{b^{۲}}{۴a} = a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^{۲}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^{۲} + c + \frac{b^{۲}}{۴a}$$

این فرمول را با $f(x) = a(x-h)^{۲} + k$ مقایسه کنید. ملاحظه می کنید که مختصات x راس h و یا $\frac{-b}{۲a}$است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۴ – مختصات راس تابع $f(x) = x^{۲} - ۴x - ۱۲$ **را پیدا کنید.**

پاسخ

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۴)}{۲(۱)} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

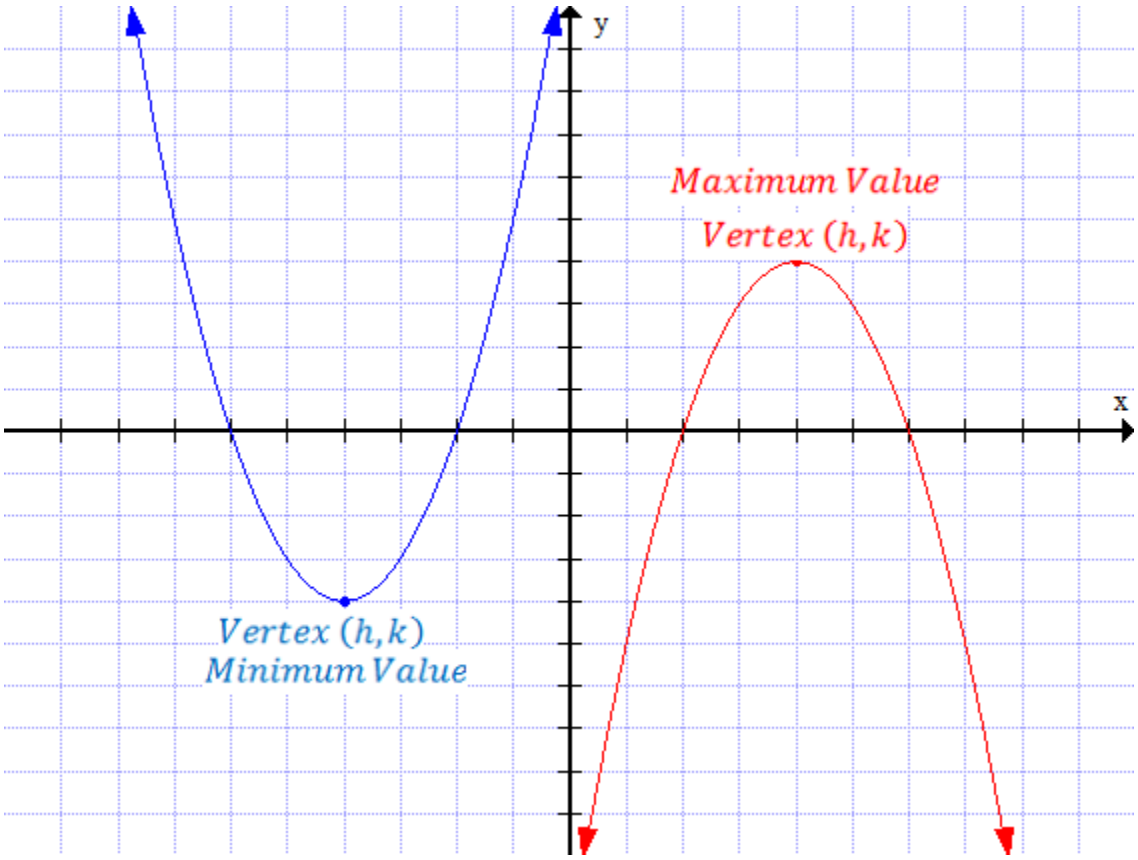
مقدار x راس ۲ است .

$$f(۲) = (۲)^{۲} - ۴(۲) - ۱۲ = -۱۶$$

پس مختصات راس $(۲, -۱۶)$ است

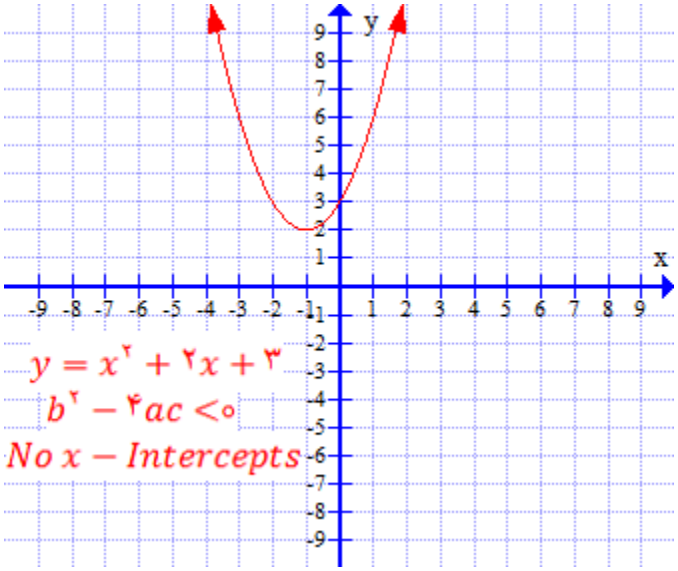
پیدا کردن مقادیر حد اکثر و حد اقل Finding Maximum and Minimum Values

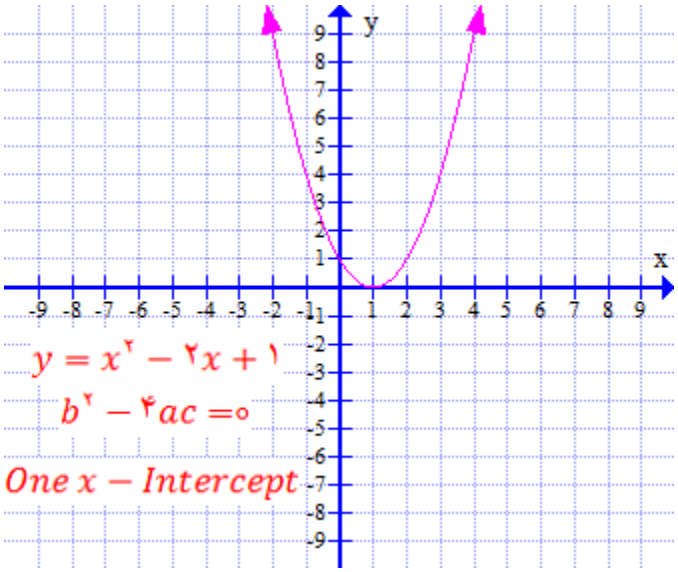
تابع درجه دوم که نمودار آن یک سهمی است که به طرف بالا باز می شود ، یک مقدار حد اقلی دارد. و تابع درجه دوم که نمودار آن به طرف پایین باز می شود ، یک مقدار حد اکثری دارد. $f(x)$ و یا مقدار y راس حد اکثر و یا حد اقل تابع است.



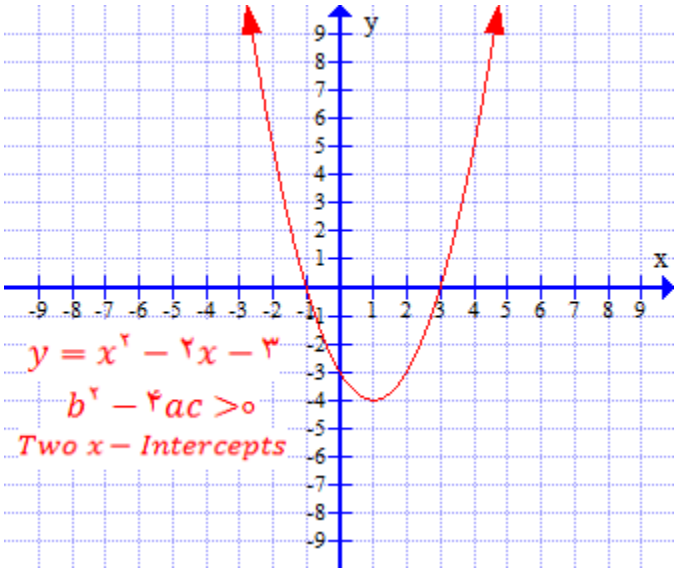
دانلود از سایت ریاضی سرا

یاد آوری – در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ مبین Discriminant که $b^۲ - ۴ac$ است ، به ما میگوید که معادله ، چند جواب دارد. به عبارت دیگر می توان گفت که نمودار $y = ax^۲ + bx + c$ چند نقطه تلاقی با محور x دارد.





دانلود از سایت ریاضی سرا



مثال ۵– یک سنگ از سطح زمین به طرف بالا پرتاب می شود. ارتفاع آن از زمین بر حسب فوت ، بعد از t ثانیه با تابع $f(t) = -۱۶t^{۲} + ۲۰t$ بیان می شود.

الف –حد اکثر فاصله سنگ تا زمین و اینکه پس از چند ثانیه این ارتفاع حاصل می شود.

پاسخ

الف –حد اکثر ارتفاع سنگ یعنی بیشترین مقدار $f(t)$. چون تابع $f(t) = -۱۶t^{۲} + ۲۰t$ یک تابع درجه دوم است ، نمودار آن یک سهمی است و چون $a = -۱۶ < ۰$ پس به طرف پایین باز می شود. بنا بر این حد اکثر مقدار $f(t)$ یعنی مقدار مختصات y راس سهمی. لذا لازم است که مختصات راس سهمی را پیدا کنیم.

فرمول مختصات راس سهمی $\left(\frac{-b}{۲a}, f\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)$

$a = -۱۶ \quad b = ۲۰ \quad c = ۰$

$$h = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲۰}{۲(-۱۶)} = \frac{۲۰}{۳۲} = \frac{۵}{۸}$$

$$f\left(\frac{۵}{۸}\right) = -۱۶\left(\frac{۵}{۸}\right)^{۲} + ۲۰\left(\frac{۵}{۸}\right) = -۱۶\left(\frac{۲۵}{۶۴}\right) + \frac{۲۵}{۲} = -\frac{۲۵}{۴} + \frac{۵۰}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مختصات راس سهمی $\left(\frac{۵}{۸}, \frac{۲۵}{۴}\right)$

پس حد اکثر ارتفاع سنگ $۶\frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$ فوت است و این ارتفاع بعد از $\frac{۵}{۸}$ ثانیه حاصل می شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۹

مختصات راس نمودار هر یک از توابع درجه دوم زیر را پیدا کنید. آیا نموداربه طرف پایین یا به طرف بالا باز می شود. محل تلاقی نمودار با محور ها را پیدا کنید. و در نهایت نمودار را رسم کنید.

۱) $f(x) = x^{۲} + ۴x - ۵$

۲) $f(x) = -x^{۲} + ۲x - ۱$

۳) $f(x) = x^{۲} - ۴$

۴) $f(x) = ۴x^{۲} + ۴x - ۳$

۵) $f(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲} + ۴x + \frac{۱۵}{۲}$

۶) $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$

۷) $f(x) = ۲x^{۲} + ۴x + ۵$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مسائل زیر را حل کنید.

۸ – یک موشک با سرعت اولیه ۹۶ فوت در ثانیه از سطح زمین مستقیما به طرف بالا شلیک می شود. ارتفاع موشک بعاد از t ثانیه با تابع $h(t) = -۱۶t^۲ + ۹۶t$ بیان می شود. حد اکثر ارتفاع موشک را پیدا کنید. . این ارتفاع در چه زمانی اتفاق می افتد؟

۹ - دو عدد را پیدا کنید که مجموع آنها ۶۰ است و حاصل ضرب آنها حد اکثر ممکن .

۱۰

دو عدد را پیدا کنید که تفاضل آنها ۱۰ است و حاصل ضرب آنها حد اقل ممکن.

۱۱ – مجموع طول و عرض یک مستطیل ۴۰ واحد است و حاصل ضرب آنها حد اکثر ممکن. طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.

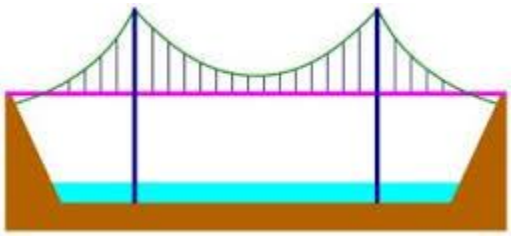
۱۲ – یک شئی با سرعت ۱۹ / ۶ متر در ثانیه از یک سکو به ارتفاع ۵۸/۸ متر به طرف بالا پرتاب می شود. ارتفاع شئی بعد از t ثانیه با تابع $s(t) = -۴/۹t^۲ + ۱۹/۶t + ۵۸ / ۸$ نشان داده می شود. s بر حسب متر است. بعد از چند ثانیه شئی با زمین بر خورد می کند؟

۱۳ – یک شئی با سرعت ۶۴ فوت در ثانیه از یک سکو به ارتفاع ۸۰ فوت مستقیما به طرف بالا پرتاب می شود. حد اکثر ارتفاع شئی چه مقدار خواهد بود و در چه زمانی این مقدار بدست می اید؟

۱۴ – یک سنگ از بالای یک پل که تا سطح آب ۲۵۶ فوت فاصله دارد ، با سرعت ۳۲ فوت در ثانیه به طرف بالا پرتاب می شود.

الف –حد اکثر ارتفاع این سنگ را پیدا کنید.

ب - پیدا کنید در چه زمانی سنگ به سطح آب بر خورد می کند.



پاسخ تمرینات ۷.۹

مختصات راس نمودار هر یک از توابع درجه دوم زیر را پیدا کنید. آیا نموداربه طرف پایین یا به طرف بالا باز می شود. محل تلاقی نمودار با محور ها را پیدا کنید. و در نهایت نمودار را رسم کنید.

۱) $f(x) = x^{۲} + ۴x - ۵$

مختصات راس

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲} = -۲$$

$$f(-۲) = (-۲)^{۲} + ۴(-۲) - ۵ = ۴ - ۸ - ۵ = -۹$$

$(-۲, -۹)$ مختصات راس

چون $a = ۱ > ۰$ پس نمودار به طرف بالا باز می شود.

برای پیدا کردن محل تلاقی منحنی با محور x باید $f(x) = ۰$ باشد. پس

$$۰ = x^{۲} + ۴x - ۵$$

$$۰ = (x + ۵)(x - ۱)$$

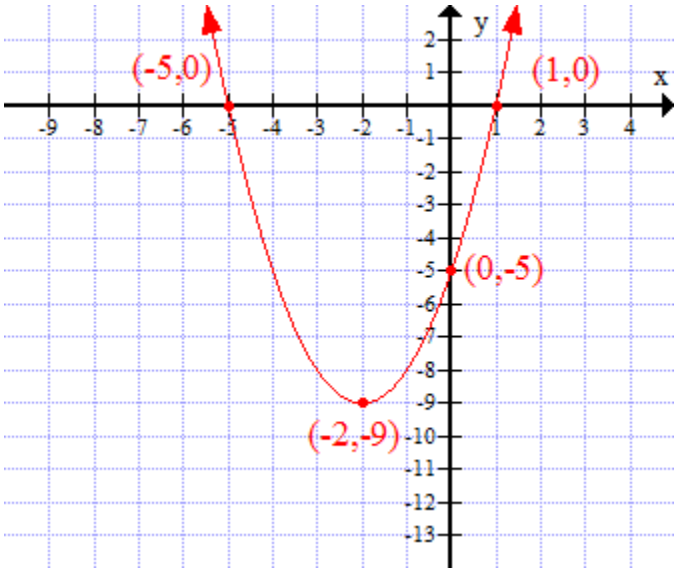
$$x = -۵ \qquad x = ۱$$

برای پیدا کردن محل تلاقی منحنی با محور y باید $x = ۰$ باشد. پس

$$f(۰) = (۰)^{۲} + ۴(۰) - ۵ = -۵$$

به طرف بالا باز می شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲) $f(x) = -x^{۲} + ۲x - ۱$

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(-۱)} = \frac{-۲}{-۲} = ۱$$

$$f(۱) = -۱^{۱} + ۲(۱) - ۱ = ۰$$

مختصات راس $(۱,۰)$

چون $a = -۱ < ۰$ پس سهمی به طرف پایین باز می شود.

$$۰ = -x^{۲} + ۲x - ۱$$

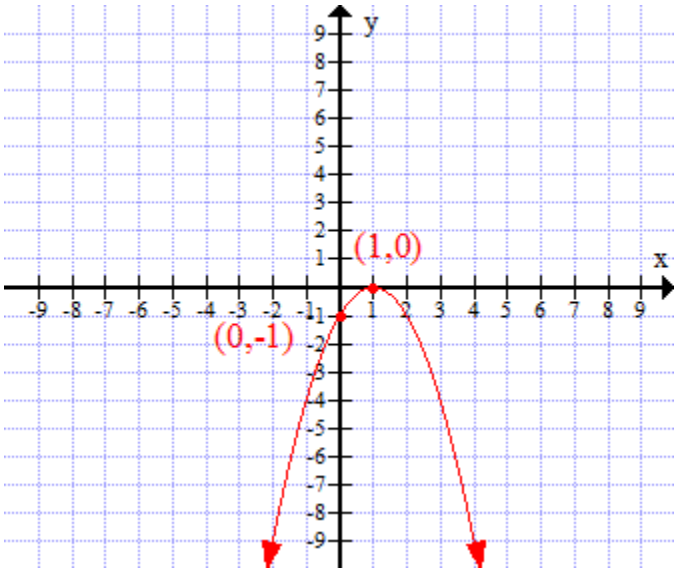
$$۰ = x^{۲} - ۲x + ۱$$

$$(x - ۱)^{۲} = ۰$$

$x = ۱ \quad x - intercept$

$f(۰) = -(۰)^{۲} + ۲(۰) - ۱ = -۱ \quad y - intercept$

به طرف پایین باز می شود.



دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $f(x) = x^{۲} - ۴$

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-(۰)}{۲(۱)} = ۰$$

$f(۰) = (۰)^{۲} - ۴ = -۴$

$(۰, -۴)$ مختصات راس

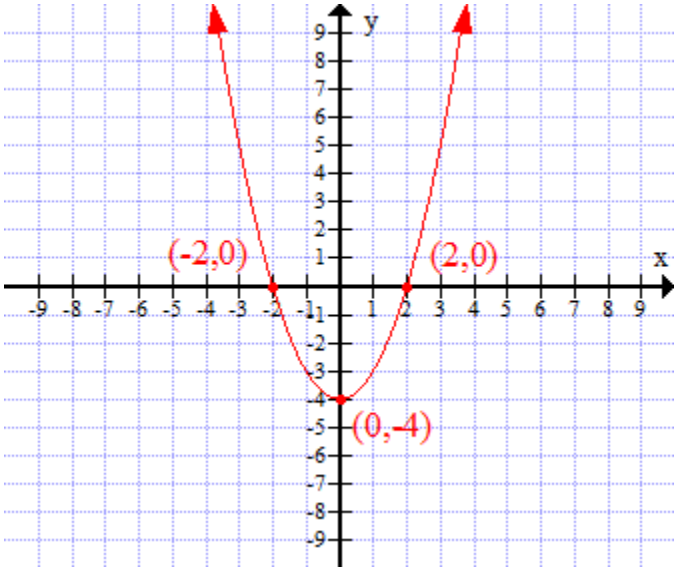
$۰ = x^{۲} - ۴$

$۰ = (x - ۲)(x + ۲)$

$x = ۲ \quad x = -۲ \quad x - intercepts$

$f(۰) = (۰)^{۲} - ۴ = -۴ \;\; y - intercept$

به طرف بالا باز می شود.



دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $f(x) = ۴x^۲ + ۴x - ۳$

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(۴)} = -\frac{۱}{۲}$$

$$f\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ + ۴\left(-\frac{۱}{۲}\right) - ۳ = -۴$$

$\left(-\frac{۱}{۲}, -۴\right)$ مختصات راس

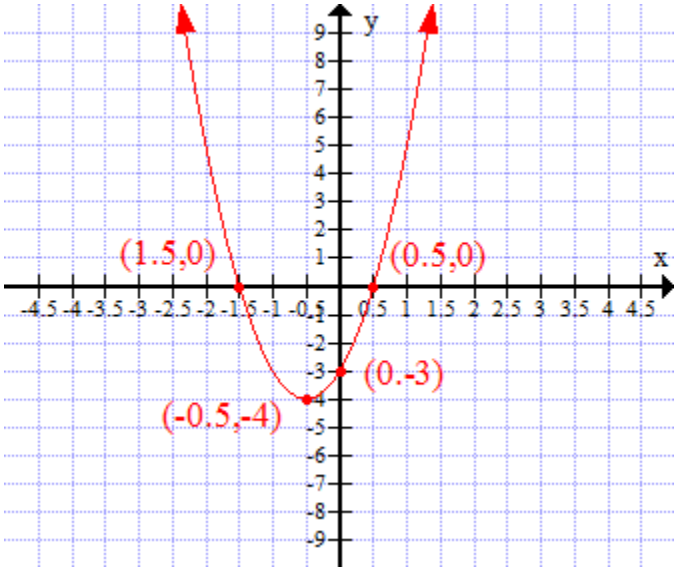
$$۰ = ۴x^۲ + ۴x - ۳$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{-۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۴(۴)(-۳)}}{۲(۴)} = \frac{-۴ \pm \sqrt{۱۶ + ۴۸}}{۸} = \frac{-۴ \pm \sqrt{۶۴}}{۸} = \frac{-۴ \pm ۸}{۸}$$

$x = -\frac{۳}{۲}$ $\quad x = \frac{۱}{۲}$ $\quad x - intercepts$

$f(۰) = ۰ + ۰ - ۳ = -۳$ $\quad y - intercept$

به طرف بالا باز می شود.



دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}+۴x+\frac{۱۵}{۲}$

$$\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{-۴}{۱}=-۴$$

$$f(-۴)=\frac{۱}{۲}(-۴)^{۲}+۴(-۴)+\frac{۱۵}{۲}=۸-۱۶+\frac{۱۵}{۲}=-۸+\frac{۱۵}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$\left(-۴,-\frac{۱}{۲}\right)$ مختصات راس

$$۰=\frac{۱}{۲}x^{۲}+۴x+\frac{۱۵}{۲}$$

$$۰=x^{۲}+۸x+۱۵$$

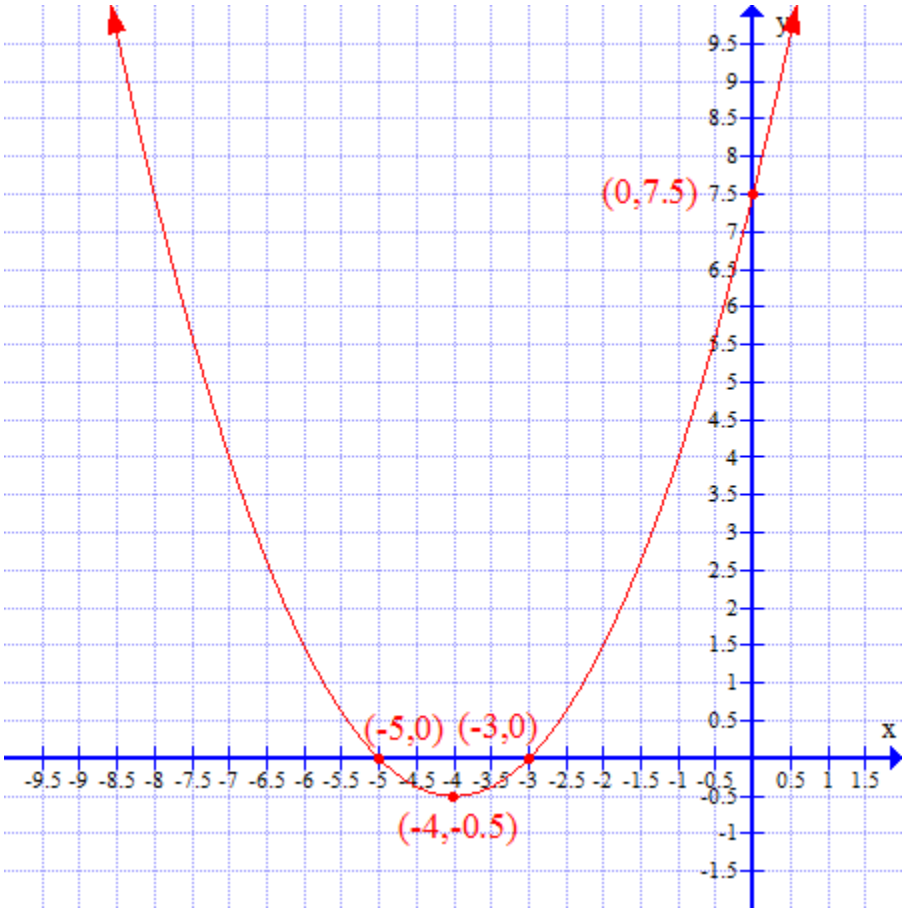
$$۰=(x+۳)(x+۵)$$

$x=-۳ \quad x=-۵ \quad x-intercepts$

$f(۰)=۰+۰+\frac{۱۵}{۲}=\frac{۱۵}{۲} \quad y-intercept$

به طرف بالا باز می شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا



دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۴)}{۲(۱)} = ۲$$

$$f(۲) = ۲^{۲} - ۴(۲) + ۵ = ۱$$

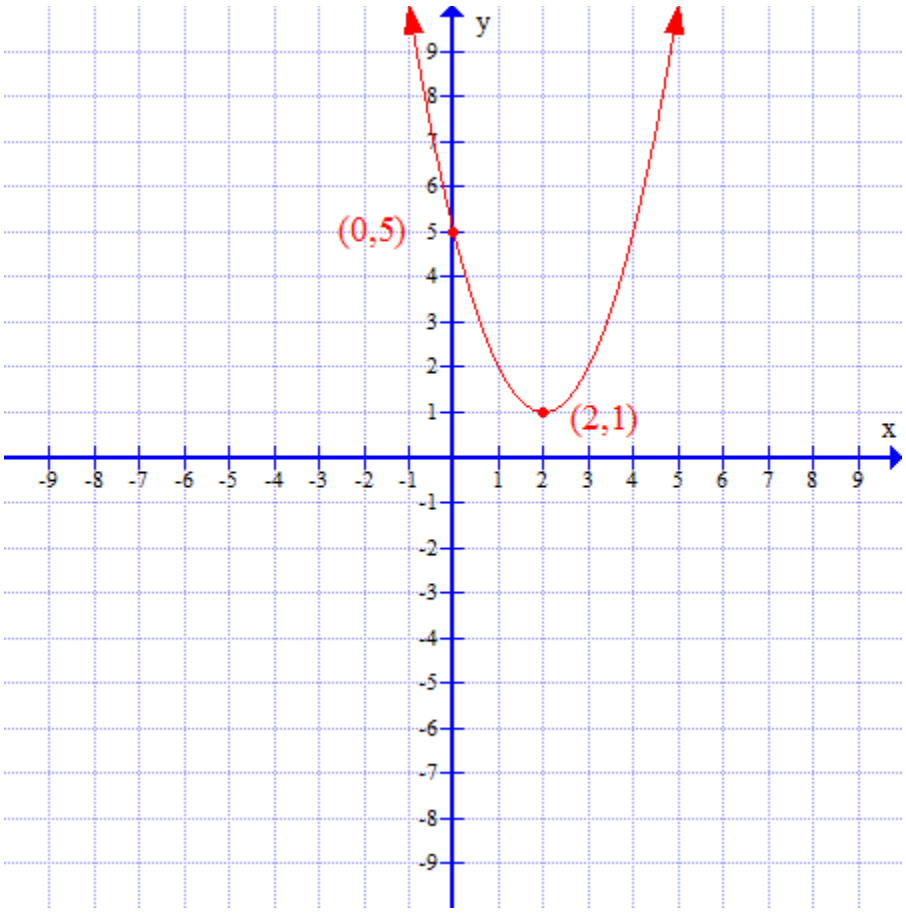
$(۲, ۱)$ مختصات راس

$$۰ = x^{۲} - ۴x + ۵$$

$$b^{۲} - ۴ac = (-۴)^{۲} - ۴(۱)(۵) - ۱۶ - ۲۰ = -۴ < ۰ \qquad No\ x - intercepts$$

$$f(۰) = ۰ - ۰ + ۵ = ۵ \quad y - intercept$$

به طرف بالا باز می شود.



دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $f(x) = ۲x^{۲} + ۴x + ۵$

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(۲)} = -۱$$

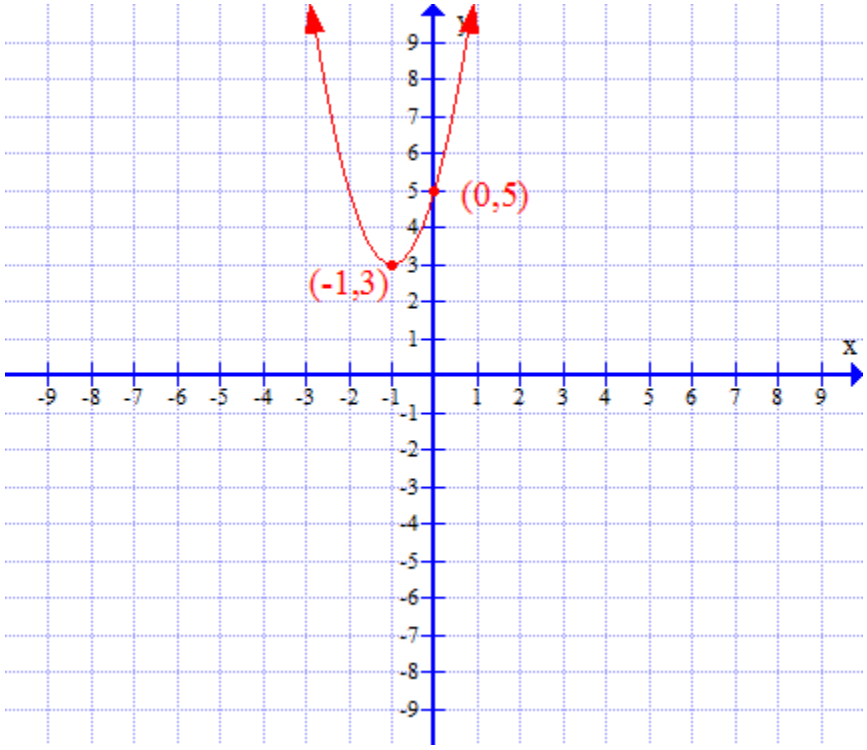
$$f(-۱) = ۲(-۱)^{۲} + ۴(-۱) + ۵ = ۳$$

$(-۱, ۳)$ مختصات راس

$b^{۲} - ۴ac = ۴^{۲} - ۴(۲)(۵) = ۱۶ - ۴۰ = -۲۴ < ۰$ $No\ x - intercepts$

$f(۰) = ۰ + ۰ + ۵$ $y - intercept$

به طرف بالا باز می شود.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مسائل زیر را حل کنید.

۸ – یک موشک با سرعت اولیه ۹۶ فوت در ثانیه از سطح زمین مستقیما به طرف بالا شلیک می شود. ارتفاع موشک بعاد از t ثانیه با تابع $h(t) = -۱۶t^۲ + ۹۶t$ بیان می شود. حد اکثر ارتفاع موشک را پیدا کنید. این ارتفاع در چه زمانی اتفاق می افتد؟

$$\left(\frac{-b}{۲a}, f\left(\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)\right)$$

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-۹۶}{۲(-۱۶)} = \frac{-۹۶}{-۳۲} = ۳$$

$$f(۳) = -۱۶(۳)^۲ + ۹۶(۳) = -۱۶(۹) + ۲۸۸ = -۱۴۴ + ۲۸۸ = ۱۴۴ \text{ فوت}$$

این ارتفاع بعد از ۳ ثانیه اتفاق می افتاد.

۹- دو عدد را پیدا کنید که مجموع آنها ۶۰ است و حاصل ضرب آنها حد اکثر ممکن .

$x =$ یکی از اعداد

$۶۰ - x$ عدد دیگر

حاصل ضرب باید حد اکثر ممکن باشد. یک تابع با حاصل ضرب این دو عدد می نویسیم.

$$f(x) = x(۶۰ - x)$$

$$f(x) = -x^۲ + ۶۰x$$

ملاحظه می کنید که $a = -۱ < ۰$ پس سهمی به طرف پایین باز می شود ، به عبارت دیگر این تابع دارای حد اکثر است. مختصات x راس این تابع را پیدا می کنیم.

$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶۰}{-۲} = ۳۰$ یکی از اعداد

$۶۰ - x = ۶۰ - ۳۰ = ۳۰$ عدد دیگر

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰

دو عدد را پیدا کنید که تفاضل آنها ۱۰ است و حاصل ضرب آنها حد اقل ممکن.

$x =$ یکی از اعداد

$۱۰ + x =$ عدد دیگر

$f(x) = x(۱۰ + x)$

$f(x) = x^۲ + ۱۰x$

$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۰}{۲} = -۵$ یکی از اعداد

$۱۰ + (-۵) = ۵$ عدد دیگر

۱۱ – مجموع طول و عرض یک مستطیل ۴۰ واحد است و حاصل ضرب آنها حد اکثر ممکن. طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.

$x =$ طول

$۴۰ - x =$ عرض

$A(x) = x(۴۰ - x)$

$A(x) = -x^۲ + ۴۰x$

$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴۰}{-۲} = ۲۰$ طول

$۴۰ - ۲۰ = ۲۰$ عرض

۱۲ – یک شئی با سرعت ۱۹/۶ متر در ثانیه از یک سکو به ارتفاع ۵۸/۸ متر به طرف بالا پرتاب می شود. ارتفاع شئی بعد از t ثانیه با تابع $s(t) = -۴/۹t^۲ + ۱۹/۶t + ۵۸/۸$ نشان داده می شود. s بر حسب متر است. بعد از چند ثانیه شئی با زمین بر خورد می کند؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

ارتفاع شئیتا زمین هنگامی که به زمین می رسد صفر است. پس می خواهیم پیدا کنیم که بعد از چند ثانیه $s=۰$ می شود.

$$۰= -۴/۹t^۲ + ۱۹/۶t + ۵۸/۸$$

$$۰= t^۲ - ۴t - ۱۲$$

$$۰= (x-۶)(x+۲)$$

$$x=۶ \quad x=-۲$$

جوان منفی برای ثانیه قابل قبول نیست ، پس شئی بعد از ۶ ثانیه به زمین می‌رسد.

توضیح در مورد این نوع مسائل –ارتفاع اولیه ۵۸/۸ متر است و عدد ثابت در تابع بالا هم ۵۸/۸ است. سرعت اولیه ۱۹/۶ متر در ثانیه است و ضریب x هم ۱۹/۶ است. این موضوع برای پرتاب کردن اشیاءهمیشه صادق است.
سرعت اولیه ، ضریب جمله دوم است و ارتفاع اولیه ، عدد ثابت. ضریب جمله درجه دوم یعنی $t^۲$ نیروی جاذبه است. این ضریب منفی است ، چون نیروی جاذبه به طرف پایین کشش دارد. مقدار این نیرو ۴/۹ است ، اگر واحد متر باشد و ۱۶ است ، اگر واحد فوت باشد. پس فرمول کلی به شکل زیر است.

$$s(t) = -gt^۲ + v_۰t + h_۰$$

۱۳ – یک شئی با سرعت ۶۴ فوت در ثانیه از یک سکو به ارتفاع ۸۰ فوت مستقیما به طرف بالا پرتاب می شود. حد اکثر ارتفاع شئی چه مقدار خواهد بود و در چه زمانی این مقدار بدست می اید؟

پاسخ

بر اساس مطالب گفته شده در تمرین شماره ۱۲ فرمول تابع به صورت زیر خواهد بود.

$$s(t) = -۱۶t^۲ + ۶۴t + ۸۰$$

باید مختصات راس را پیدا کنیم.

$$\left(\frac{-b}{۲a}, s\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-۶۴}{۲(-۱۶)} = \frac{۶۴}{۳۲} = ۲$$

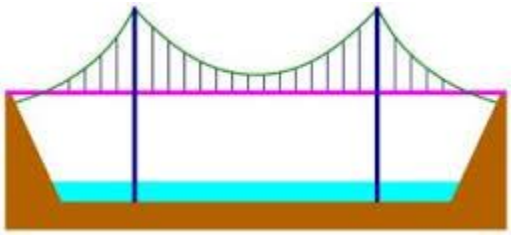
$$s(۲) = -۱۶(۲)^{۲} + ۶۴(۲) + ۸۰ = -۶۴ + ۱۲۸ + ۸۰ = ۱۴۴ \text{ فوت}$$

پس ، بعد از ۲ ثانیه به حد اکثر ارتفاع یعنی ۱۴۴ فوت می رسد.

۱۴ – یک سنگ از بالای یک پل که تا سطح آب ۲۵۶ فوت فاصله دارد ، با سرعت ۳۲ فوت در ثانیه به طرف بالا پرتاب می شود.

الف –حد اکثر ارتفاع این سنگ را پیدا کنید.

ب - پیدا کنید در چه زمانی سنگ به سطح آب بر خورد می کند.



پاسخ

طبق توضیحات تمرین شماره ۱۲ فرمول تابع مطابق زیر است.

$$s(t) = -۱۶t^{۲} + ۳۲t + ۲۵۶$$

الف برای پیدا کردن حد اکثر ارتفاع سنگ باید مختصات راس سهمی را پیدا کنیم.

$$\left(\frac{-b}{۲a}, s\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)$$

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{-۳۲}{۲(-۱۶)} = \frac{-۲۳}{-۳۲} = ۱$$

$$s(۱) = -۱۶(۱)^{۲} + ۳۲(۱) + ۲۵۶ = ۲۷۲ \text{ فوت}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ب –

هنگامی که سنگ با سطح آب بر خورد می کند ، ارتفاع سنگ صفر است. پس

$$-۱۶t^{۲} + ۳۲t + ۲۵۶ = ۰$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{۲a} = \frac{-۳۲ \pm \sqrt{۳۲^{۲} - ۴(-۱۶)(۲۵۶)}}{۲(-۱۶)} = \frac{-۳۲ \pm \sqrt{۱۰۲۴ + ۱۶۳۸۴}}{-۳۲}$$

$$= \frac{-۳۲ \pm \sqrt{۱۷۴۰۸}}{-۳۲} = \frac{-۳۲ \pm ۱۳۱/۹۴}{-۳۲}$$

$$t = \frac{-۳۲ - ۱۳۱/۹۴}{-۳۲} = \frac{-۱۶۳/۹۴}{-۳۲} = ۵/۱۲ \text{ ثانیه}$$

پاسخ منفی را قبول نمی کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۱۰

خواص توابع Properties of Functions

میزان متوسط تغییر Average Rate of Change

در بخش ۷.۲ در مورد شیب یک خط صحبت کردیم. شیب را می توان به میزان متوسط تغییر و یا نرخ تغییر تعبیر و تفسیر کرد. اغلب مایل هستیم مقدار متوسط یک تابع را بدانیم. برای پیدا کردن نرخ متوسط تغییر یک تابع بین دو نقطه روی نمودار ، شیب خطی را که آن دو نقطه در بر دارند حساب می کنیم.

مثال ۱- پیدا کردن نرخ متوسط تغییر یک تابع Finding the Average Rate of Change of a Function

جدول زیر هزینه متوسط شهریه دانشگاه ها به دلار نشان می دهد.

هزینه متوسط به دلار	سال
۲۱۵۹	۱۹۹۱
۲۴۱۰	۱۹۹۲
۲۶۰۴	۱۹۹۳
۲۸۲۰	۱۹۹۴
۲۹۷۷	۱۹۹۵
۳۱۵۱	۱۹۹۶
۳۳۲۱	۱۹۹۷

الف - نمودار پرکندگی این اطلاعات را رسم کنید. سال را متغیر مستقل فرض کنید. فرض کنید $t=۰$ مربوط به سال ۱۹۹۱ است.

ب –یک خط از نقاط $(۱۹۹۱,۲۱۵۹)$ و $(۱۹۲,۲۴۱۰)$ عبور دهید.

ج –میزان متوسط تغییر شهریه از سال ۱۹۹۱ تا ۱۹۹۲ را پیدا کنید.

د – یک خط از نقاط $(۱۹۹۵,۲۹۷۷)$ و $(۱۹۹۶,۳۱۵۱)$ بکشید

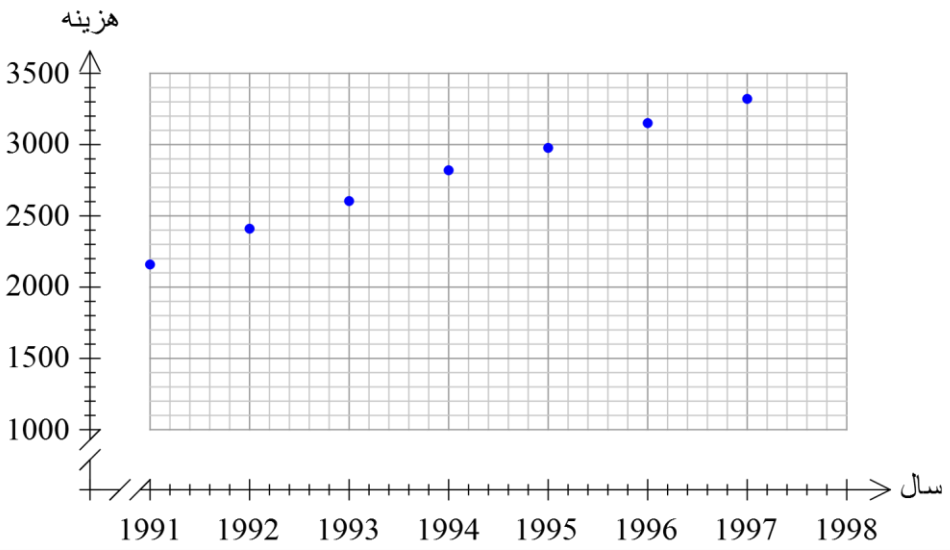
ه -میزان متوسط تغییر شهریه از سال ۱۹۹۵ تا ۱۹۹۶ را پیدا کنید.

و –در طول این مدت چه اتفاقی برای میزان متوسط تغییر می افتد؟

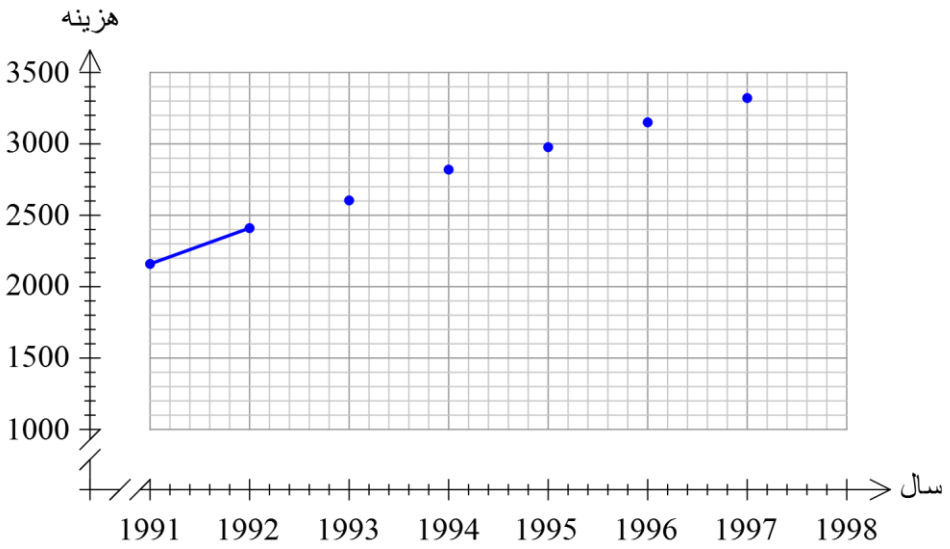
دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

الف –



ب –

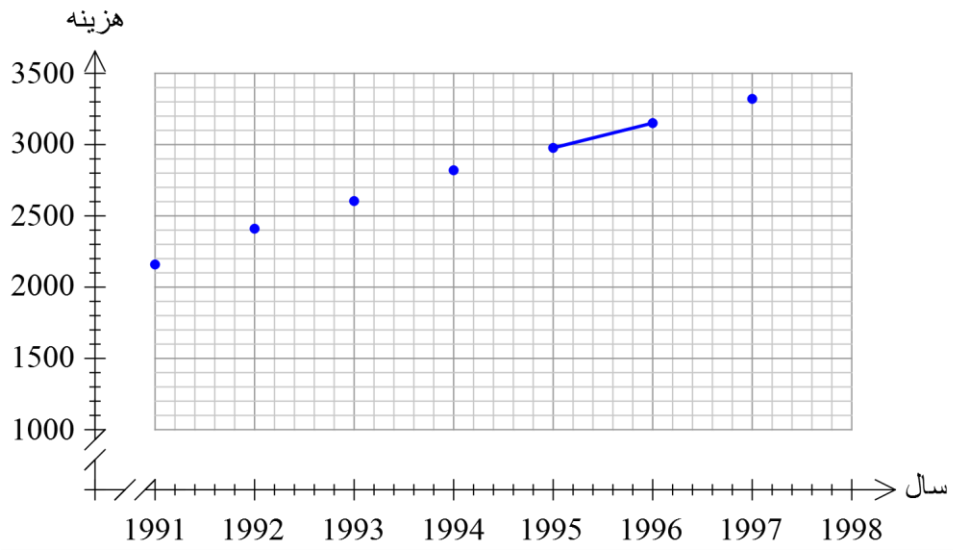


ج -

$$\text{نرخ متوسط تغییر} = \frac{۲۴۱۰ - ۲۱۵۹}{۱۹۹۲ - ۱۹۹۱} = \frac{۲۵۱}{۱} = ۲۵۱ \text{ دلار در سال}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

د –



ه –

$$\text{نرخ متوسط تغییر} = \frac{۳۱۵۱ - ۲۹۷۷}{۱۹۹۶ - ۱۹۹۵} = \frac{۱۷۴}{۱} = ۱۷۴ \text{ دلار در سال}$$

و –در طول این سال ها هزینه شهریه بالا می رود ، اما نرخ بالا رفتن کاهش یافته است.

اگر بدانیم که تابع $C(t)$ بین سال t و هزینه C رابطه بر قرار می کند. پس میزان تغییر متوسط بین سال ۱۹۹۱ تا ۱۹۹۲ را می توان مطابق زیر بیان کرد.

$$\text{نرخ متوسط تغییر} = \frac{C(۱۹۹۲) - C(۱۹۹۱)}{۱۹۹۲ - ۱۹۹۱} = \frac{۲۵۱}{۱} = ۲۵۱ \text{ دلار در سال}$$

عبارت هایی مانند بالا در حسابان مکرر دیده می شوند. پس می توان گفت

اگر c در محدوده دامنه یک تابع $y = f(x)$ باشد ، **نرخ متوسط تغییر f از** c تا x این گونه بیان می شود.

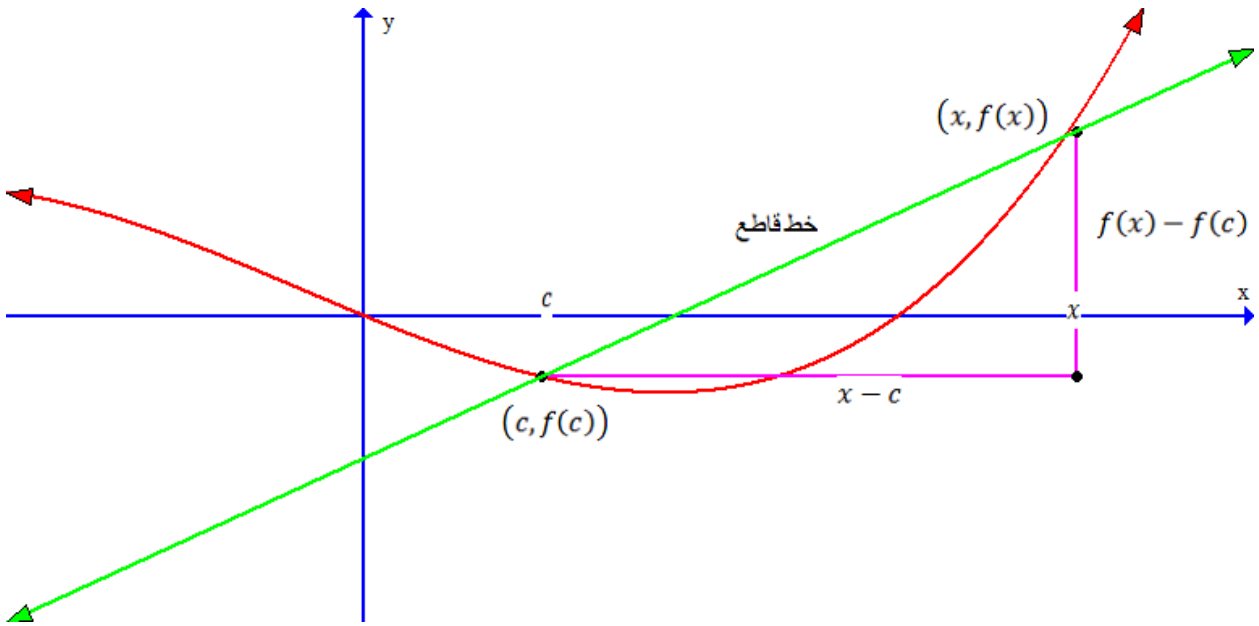
$$\text{نرخ متوسط تغییر} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad , x \neq c$$

عبارت بالا به نام خارج قسمت تفاوت f در نقطه c نامیده می شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نرخ متوسط تغییر یک تابع ، تفسیر هندسی مهمی دارد. به نمودار $y = f(x)$ که در پایین می آید ، نگاه کنید. دو نقطه را روی نمودار علامت گذاری کرده ایم. $(c, f(c))$ و $(x, f(x))$ خطی که شامل این دو نقطه است ، به نام **خط قاطع Secant Line موسوم است.** و شیب آن

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



قضیه –شیب خط قاطع یا خط سکانت Slope of the Secant Line

نرخ متوسط تغییر یک تابع مساوی است با شیب خط قاطع که شامل دو نقطه روی نمودار این تابع است.

مثال ۲ – پیدا کردن میزان متوسط تغییر یک تابع Finding the average Rate of Change of a function

الف میزان متوسط تغییر تابع $f(x) = ۲x^۲ - ۳x$ از ۱ تا x را پیدا کنید.

ب –با استفاده از نتیجه قسمت الف ، شیب خط قاطع که شامل نقاط $(۱, f(۱))$ و $(۲, f(۲))$ است ، پیدا کنید.

ج –معادله خط قاطع را پیدا کنید.

پاسخ –

الف –نرخ متوسط تغییر f از ۱ تا x عبارت است از :

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{\left(۲x^{۲}-۳x\right)-(-۱)}{x-۱}=\frac{۲x^{۲}-۳x+۱}{x-۱}=\frac{(۲x-۱)(x-۱)}{x-۱}=۲x-۱$$

ب –شیب خط قاطع که شامل نقاط $\left(۱,f(۱)\right)$ و $\left(۲,f(۲)\right)$ باشد ، میزان متوسط تغییر f است از ۱ تا ۲

در قسمت الف بدست آوردیم

$$m_{sec}=۲(۲)-۱=۳$$

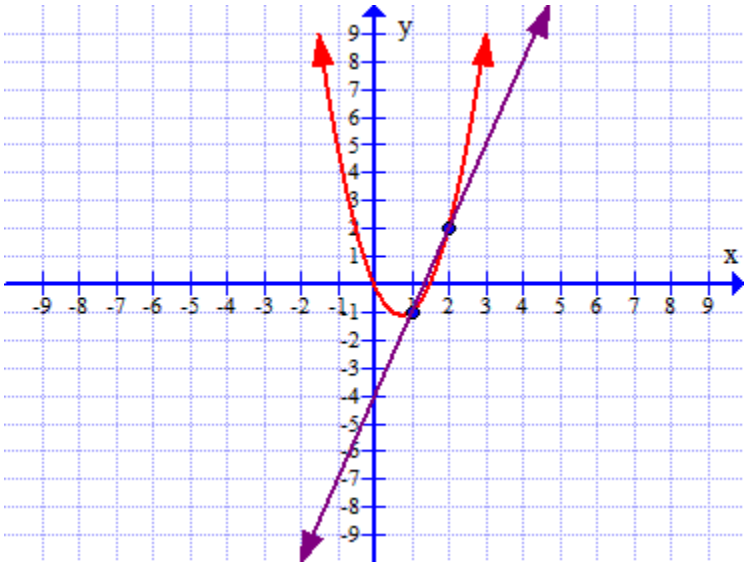
ج –برای پیدا کردن معادله خط قاطع ، از فرمول نقطه –شیب استفاده می کنیم.

$$y-y_{۱}=m(x-x_{۱})$$

$$y+۱=۳(x-۱)$$

$$y=۳x-۴$$

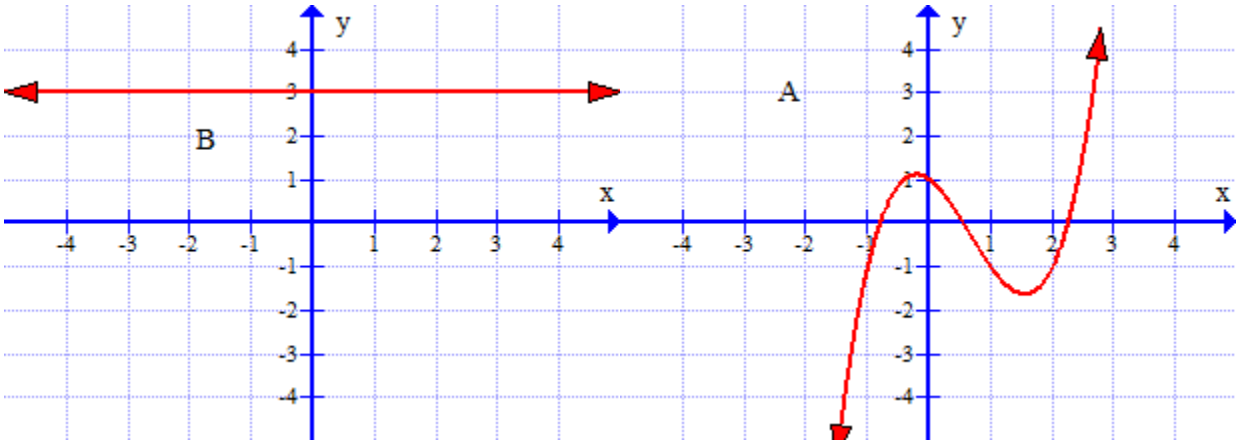
گر چه از ما خواسته نشده ، اما برای اینکه مطالب این مثال را با چشم ببینیم ، نمودار ها را رسم می کنیم.



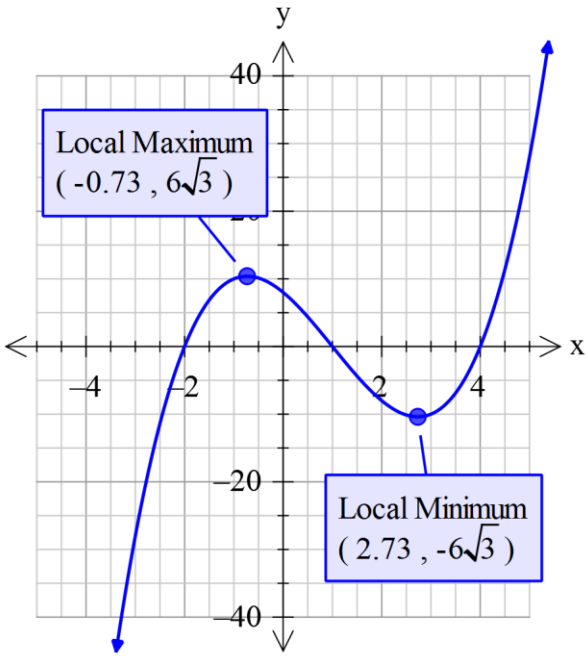
توابع صعودی و نزولی Increasing and Decreasing Functions

نمودار A را ملاحظه کنید. اگر از چپ به راست به نمودار تابع نگاه کیند ، متوجه می شوید که قسمتی از نمودار بالا می رود و قسمتی پائین .هنگامی که نمودار از چپ به راست به طرف بالا می رود ، می گویند تابع صعودی است و قسمتی که پایین می رود ، می گویند تابع نزولی است. اما نمودار B افقی است. در این حالت می گویند تابع ثابت Constantاست.

دانلود از سایت ریاضی سرا



مثال ۳ – در نمودار زیر ، کجا تابع صعودی است و کجا نزولی



پاسخ

برای پاسخ به این سوال که کجا تابع صعودی است و کجا نزولی ، یا نماد نا معادله که شامل متغیر x باشد بکار می بریم و یا نماد بازه بازمربوط به مختصات x

نمودار بالا از بی نهایت منفی تا نقطه $\left(-۰/۷۳, ۶\sqrt{۳}\right)$ صعودی واز نقطه $\left(-۰/۷۳, ۶\sqrt{۳}\right)$ تا نقطه

دانلود از سایت ریاضی سرا

$\left(۲/۷۳, -۶\sqrt{۳}\right)$ نزولی

و از نقطه $\left(۲/۷۳, -۶\sqrt{۳}\right)$ تا بی نهایت مثبت صعودی است. پس می توان چنین نوشت :

تابع صعودی است در بازه باز $(-\infty, -۰/۷۳)$ و $(۲/۷۳, \infty)$ یا

برای $-\infty < x < -۰/۷۳$ و $۲/۷۳ < x < \infty$

و تابع نزولی است برای

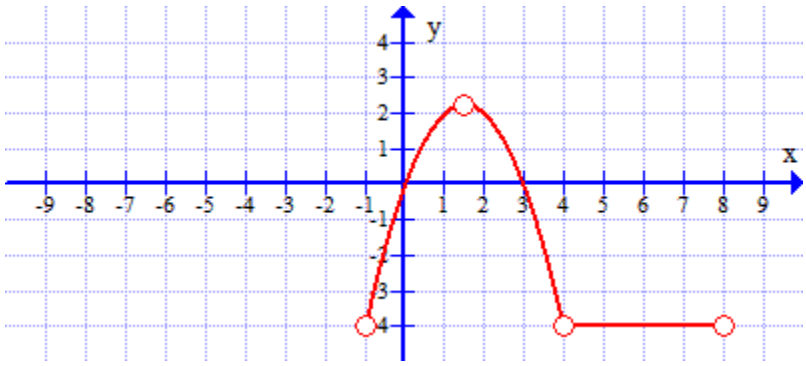
$-۰/۷۳ < x < ۲/۷۳$ و یا در بازه باز $(-۰/۷۳, ۲/۷۳)$

تعریف

یک تابع مانند f در بازه باز I **صعودی** **Increasing** است ، اگر برای هر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۱ < x_۲$ پس $f(x_۱) < f(x_۲)$ باشد.

یک تابع مانند f در بازه باز I **نزولی** **Decreasing** است ، اگر برای هر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۱ < x_۲$ پس $f(x_۱) > f(x_۲)$ باشد.

یک تابع مانند f در بازه باز I **ثابت** **Constant** است ، اگر برای هرانتخابی از x پس $f(x_۱) = f(x_۲)$ باشد.



دانلود از سایت ریاضی سرا

ماگزیمم و مینیمم محلی Local Maximum and Minimum

وقتی که نمودار یک تابع در طرف چپ $x = c$ صعودی است و در طرف راست $x = c$ نزولی است ، پس در نقطه c مقدار f بیشترین است. این مقدار را ماگزیمم محلی f می گویند.

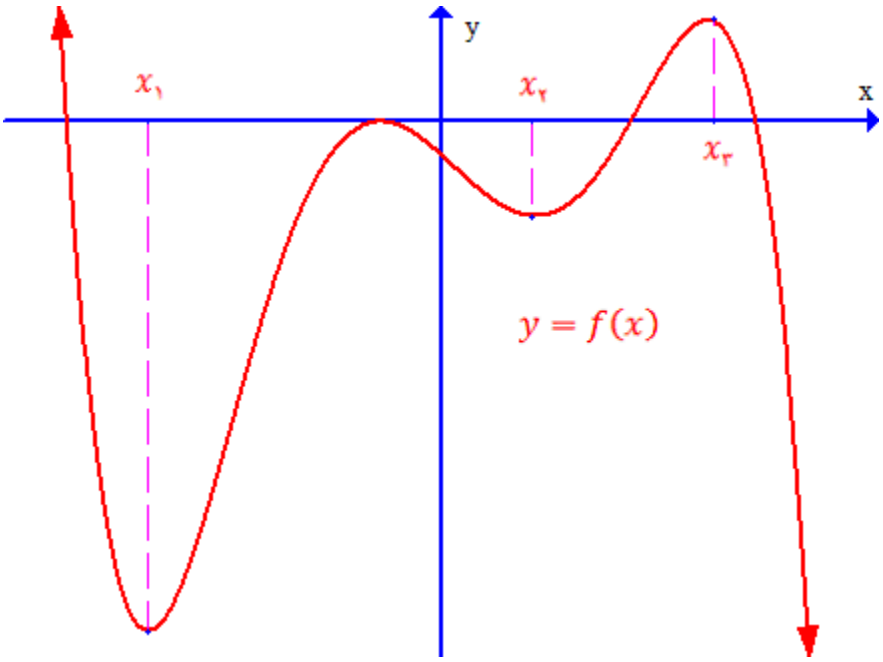
وقتی که نمودار یک تابع در طرف چپ $x = c$ نزولی است و در طرف راست $x = c$ صعودی است ، پس در نقطه c مقدار f کمترین است. این مقدار را مینیمم محلی f می گویند.

کلمه **محلی Local** بکار برده می شود ، زیرا فقط نزدیک c مقدار $f(c)$ بیشترین و یا کمترین است.

خلاصه

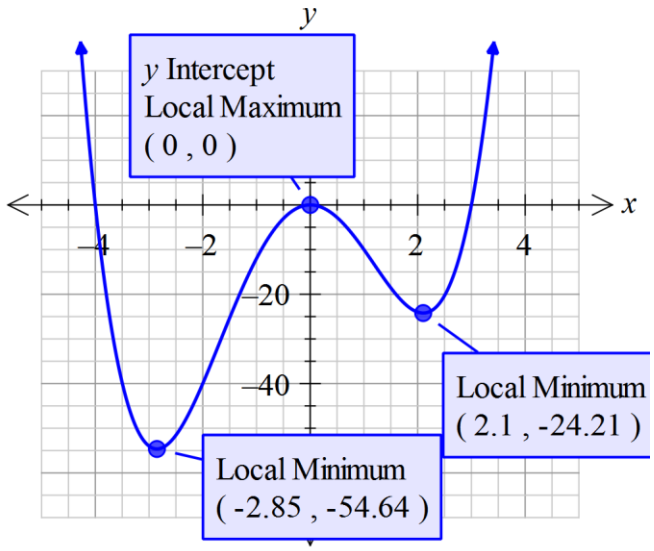
تابع f در نقطه c یک **ماگزیمم محلی** دارد ، اگر یک بازه باز مانند I که شامل c هم است وجود داشته باشد ، به طوری که برای کلیه مقادیر $x \neq c$ در آن بازه ، $f(x) < f(c)$ باشد ، در این صورت $f(c)$ را **ماگزیمم محلی f** می نامیم.

تابع f در نقطه c یک **مینیمم محلی** دارد ، اگر یک بازه باز مانند I که شامل c هم است وجود داشته باشد ، به طوری که برای کلیه مقادیر $x \neq c$ در آن بازه ، $f(x) > f(c)$ باشد ، در این صورت $f(c)$ را **مینیمم محلی f** می نامیم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۴ – شکل زیر نمودار تابع f است.



حالا به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف –برای چه اعدادی f ماگزیمم محلی دارد؟

ب –ماگزیمم های محلی کدام هستند؟

ج –برای چه اعدادی f مینیمم محلی دارد؟

د –مینیمم های محلی کدام هستند؟

پاسخ

الف - f در صفر ماگزیمم محلی دارد.

ب –ماگزیمم محلی $f(۰) = ۰$ است.

ج - f در $-۲/۸۵$ و در $۲/۱$ مینیمم محلی دارد.

د –مینیمم های محلی $f(-۲/۸۵) = -۵۴/۶۴$ و $f(۲/۱) = -۲۴/۲۱$ است.

توابع زوج و فرد Even and Odd Functions

تابع f یک تابع زوج است ، فقط و فقط هر گاه نقطه (x, y) روی نمودار f باشد ، نقطه $(-x, y)$ هم روی نمودار باشد. به زبان جبری می توان گفت

دانلود از سایت ریاضی سرا

تابع f زوج است اگر برای هر عدد x در محدوده دامنه آن ، عدد $-x$ هم در محدوده دامنه آن قرار داشته باشد و

$$f(-x) = f(x)$$

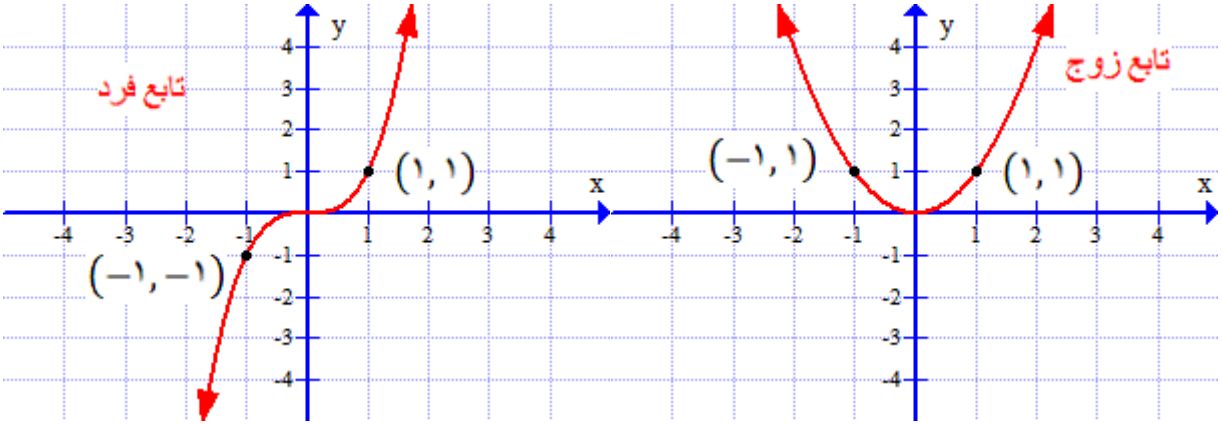
تابع f یک تابع فرد است ، فقط و فقط هر گاه نقطه (x, y) روی نمودار f باشد ، نقطه $(-x, -y)$ هم روی نمودار باشد. به زبان جبری می توان گفت

تابع f فرد است اگر برای هر عدد x در محدوده دامنه آن ، عدد $-x$ هم در محدوده دامنه آن قرار داشته باشد و

$$f(-x) = -f(x)$$

قضیه ــیک تابع زوج است اگر فقط و فقط نمودار آن نسبت به محور y قرینه باشد.

یک تابع فرد است اگر فقط و فقط نمودار آن نسبت به مبدا مختصات قرینه باشد.



در نمودار سمت راست بالا که نمودار یک تابع زوج است $x = -۱$ ، $x = ۱$ هر دو روی نمودار هستند و $f(۱) = ۱ = f(-۱)$ یعنی $f(-x) = f(x)$

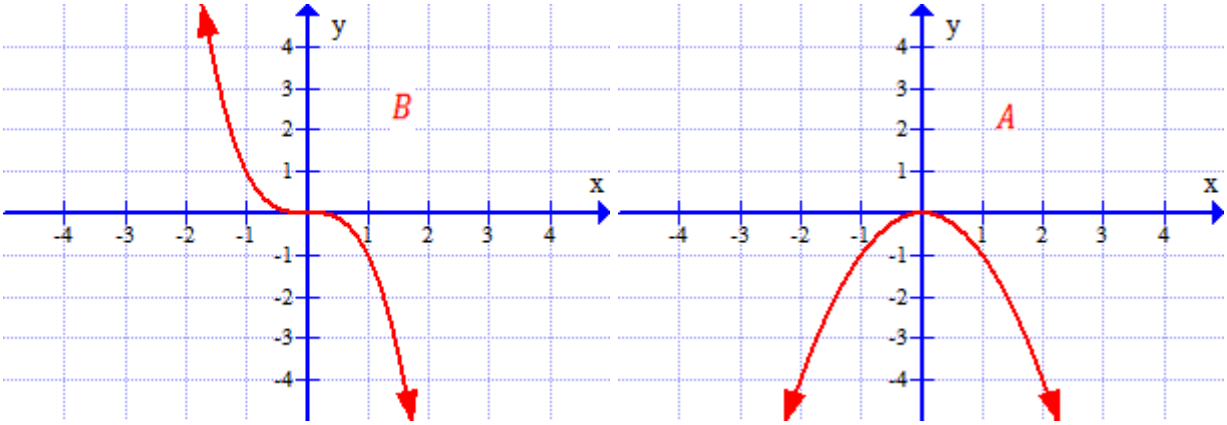
در نمودار سمت چپ بالا که نمودار یک تابع فرد است $x = -۱$ ، $x = ۱$ هر دو روی نمودار هستند ، اما

$$f(۱) = ۱ \quad \text{ولی} \quad f(-۱) = -۱$$

یعنی در تابع فرد $f(-x) = -f(x)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۵ – کدام یک از نمودار های زیر مربوط به تابع فرد و کدام مربوط به تابع زوج است.



پاسخ -

نمودار A مربوط است به تابع زوج و نمودار B مربوط است به تابع فرد.

تشخیص توابع زوج و فرد به زبان جبری

Identifying Even and Odd Functions Algebraically

مشخص کنید آیا توابع زیر ، زوج هستند و یا فرد و یا هیچ کدام. سپس بگویید آیا نمودار نسبت به محور y قرینه است یا نسبت مبدا مختصات.

$(a)\ f(x)\ x^{۲} - ۵$ $\qquad$ $(b)\ \ g(x) = x^{۳} - ۱$

$(c)\ h(x) = ۵x^{۳} - x$ $\qquad$ $(d)\ F(x) = |x|$

پاسخ

(a)

برای این که تشخیص دهیم آیا f فرد است یا زوج و یا هیچ کدام ، در $f(x) = x^{۲} - ۵$ بجای x می گذاریم $-x$ پس داریم

$$f(-x) = (-x)^{۲} - ۵ = x^{۲} - ۵ = f(x)$$

چون $f(-x) = f(x)$ نتیجه می گیریم که f یک تابع زوج است. و لذا نمودار نسبت به محور y قرینه است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

(b)

در $g(x) = x^{۳} - ۱$ بجای x می گذاریم $-x$ پس داریم

$$g(-x) = (-x)^{۳} - ۱ = -x^{۳} - ۱$$

چون $g(-x) \neq g(x)$ و $g(-x) \neq -g(x) = -\left(x^{۳} - ۱\right) = -x^{۳} + ۱$ نتیجه می گیریم که g نه زوج است و نه فرد. نمودار هم نه نسبت به محور y قرینه است و نه نسبت به مبدا مختصات.

(c)

در $h(x) = ۵x^{۳} - x$ بجای x می گذاریم $-x$ پس داریم

$$h(-x) = ۵(-x)^{۳} - (-x) = -۵x^{۳} + x = -\left(۵x^{۳} - x\right) = -h(x)$$

چون $g(-x) = -g(x)$ پس h یک تابع فرد است و لذا نمودار آن نسبت به مبدا قرینه است.

(d)

در $F(x) = |x|$ بجای x می گذاریم $-x$ پس داریم

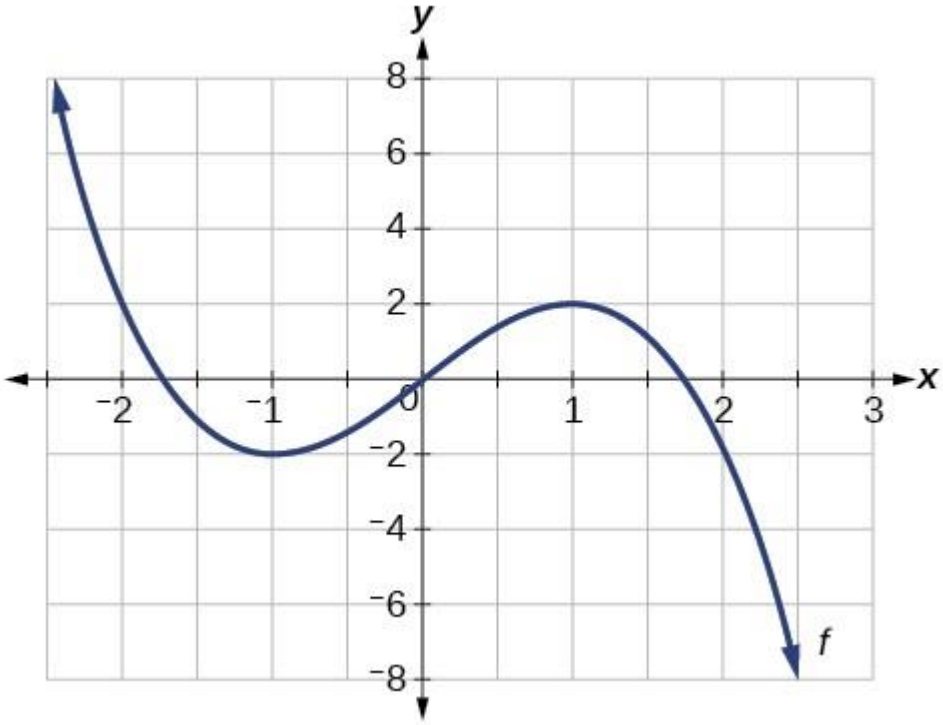
$$F(-x) = |-x| = \left|-۱\right| * |x| = |x| = F(x)$$

چون $F(-x) = F(x)$ پس F یک تابع زوج است و نسبت به محور y قرینه است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۱ ه

برای پاسخ به تمرینات ۴ – ۱ از نمودار تابع f که در ذیل آمده استفاده کنید.



۱ - در کدام بازه یا بازه ها ، f صعودی است.

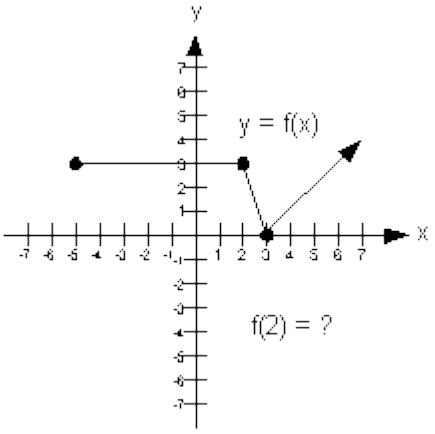
۲ – در کدام بازه یا بازه ها ، f نزولی است؟

۳ – عدد یا اعدادی ، اگر وجود داشته باشد ، که در آن یا آنها f دارای ماگزیمم محلی است. آن ماگزیمم ها چقدر هستند؟

۴ - عدد یا اعدادی ، اگر وجود داشته باشد ، که در آن یا آنها f دارای مینیمم محلی است. آن مینیمم ها چقدر هستند؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای پاسخ به تمرینات ۷ – ۵ از نمودار تابع $y = f\ (x)$ که در ذیل آمده استفاده کنید.



۵ - محل تقاطع با محور ها ، اگر وجود داشته باشد.

۶ - دامنه و برد تابع

۷ - بازه هایی که در آنها تابع صعودی ، نزولی و یا ثابت است.

برای تمرینات ۱۰ – ۸

الف –برای هر کدام از توابع ، میزان متوسط تغییر f را از ۱ تا x پیدا کنید.

$$\frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} \quad , x \neq ۱$$

ب –نتیجه قسمت الف را بکار ببرید و میزان متوسط تغییر را از $x = ۱$ تا $x = ۲$ را حساب کنید. اگر لازم باشد ، ساده کنید.

ج –معادله خط قاطع که شامل $\big(۱, f(۱)\big)$ و $\big(۲, f(۲)\big)$ است ,پیدا کنید.

۸) $f(x) = ۵x$

۹) $f(x) = ۱ - ۳x$

۱۰) $f(x) = x^۲ - ۲x$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱ – اطلاعات جدول زیر در آمد فروش تعداد x دوچرخه در یک شرکت را نشان می دهد.

تعداد دو چرخ ها x	مجموع در آمد به دلار $R(x)$
۰	۰
۲۵	۲۸ ۰۰۰
۶۰	۴۵ ۰۰۰
۱۰۲	۵۳۴ ۰۰
۱۵۰	۵۹۱۶۰
۱۹۰	۶۲۳۶۰
۲۲۳	۶۴۸۳۵
۲۴۹	۶۶۵۲۵

الف - یک نمودار پراکنده از این اطلاعات را رسم کنید. تعداد دچرخه ها را متغیر مستقل فرض کنید.

ب –یک خط از نقاط $(۰,۰)$ و $(۲۵, ۲۸۰۰۰)$ عبور دهید .

ج –میزان متوسط تغییردرامد را از صفر تا ۲۵ دوچرخه را پیدا کنید.

د –نتیجه بدست آمده از قسمت ج را تفسیر کنید.

ه - یک خط از نقاط $(۱۹۰, ۶۲۳۶۰)$ و $(۲۲۳, ۶۴۸۳۵)$ عبور دهید.

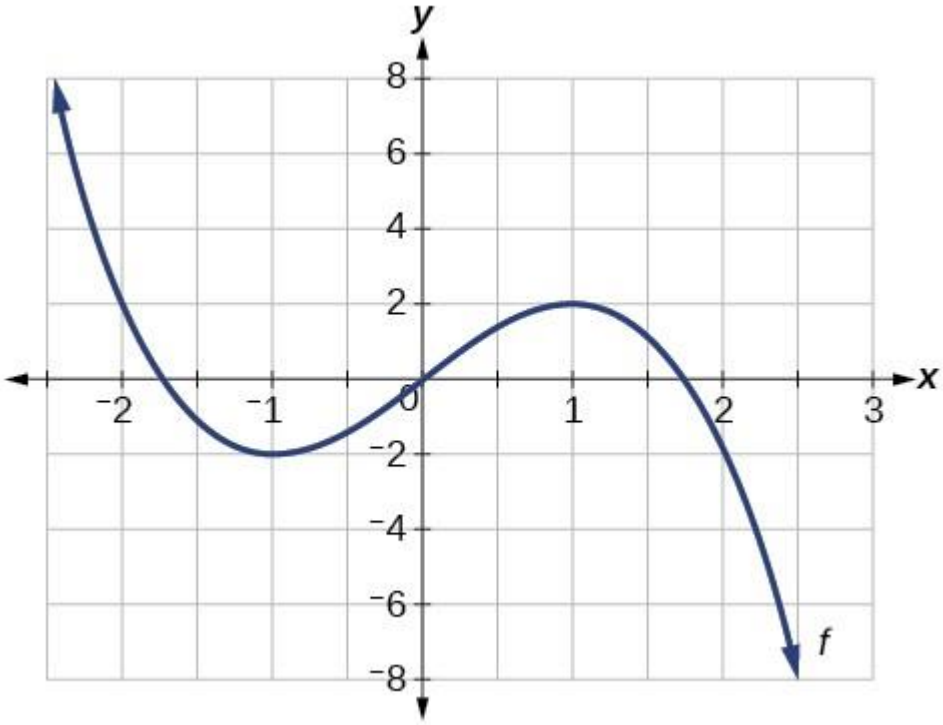
و –میزان متوسط تغییر درامد را از ۱۹۰ تا ۲۲۳ دچرخه را پیدا کنید.

ز - نتیجه بدست آمده از قسمت (و)را تفسیر کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۷.۱ ه

برای پاسخ به تمرینات ۴ – ۱ از نمودار تابع f که در ذیل آمده استفاده کنید.



۱ - در کدام بازه یا بازه ها ، f صعودی است.

پاسخ

در بازه باز $(-۱,۱)$ صعودی است.

۲ – در کدام بازه یا بازه ها ، f نزولی است؟

پاسخ

در بازه های $(-\infty,-۱)$ و $(۱,\infty)$ نزولی است.

۳ – عدد یا اعدادی ، اگر وجود داشته باشد ، که در آن یا آنها f دارای ماگزیمم محلی است. آن ماگزیمم ها چقدر هستند؟

پاسخ

در $x = ۱$ ماگزیمم محلی وجود دارد و مقدار آن $f(۱) = ۲$ است.

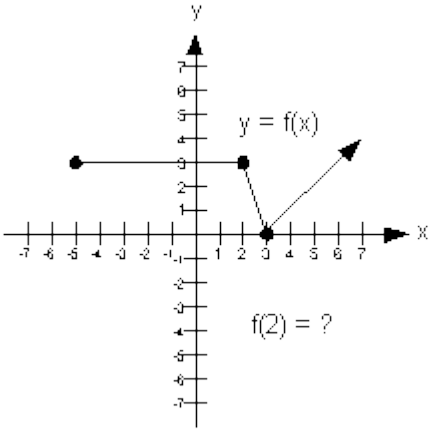
دانلود از سایت ریاضی سرا

۴ - عدد یا اعدادی ، اگر وجود داشته باشد ، که در آن یا آنها f دارای مینیمم محلی است. آن مینیمم ها چقدر هستند؟

پاسخ

در $x = -۱$ مینیمم محلی وجود دارد و مقدار آن $f(-۱) = -۲$ است.

برای پاسخ به تمرینات ۷ – ۵ از نمودار تابع $y = f(x)$ که در ذیل آمده استفاده کنید.



۵ - محل تقاطع با محور ها ، اگر وجود داشته باشد.

پاسخ

تقاطع با محور y در ۳ و مماس با x در ۳

۶ - دامنه و برد تابع

پاسخ

دامنه $(-۵, \infty)$, برد $(۰, \infty)$

۷ - بازه هایی که در آنها تابع صعودی ، نزولی و یا ثابت است.

پاسخ

در بازه $(-۵, ۲)$ ثابت ، در بازه $(۲, ۳)$ نزولی ، در بازه $(۳, \infty)$ صعودی

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای تمرینات ۱۰ – ۸

الف –برای هر کدام از توابع ، میزان متوسط تغییر f را از ۱ تا x پیدا کنید.

$$\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \quad ,x \neq ۱$$

ب –نتیجه قسمت الف را بکار ببرید و میزان متوسط تغییر را از $x=۱$ تا $x=۲$ را حساب کنید. اگر لازم باشد ، ساده کنید.

ج –معادله خط قاطع که شامل $\big(۱,f(۱)\big)$ و $\big(۲,f(۲)\big)$ است ,پیدا کنید.

۸) $\boldsymbol{f(x)=۵x}$

الف –

پاسخ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۵x-۵(۱)}{x-۱}=\frac{۵x-۵}{x-۱}=\frac{۵(x-۱)}{x-۱}=۵$$

ب –

پاسخ

$m_{sec}=۵$

ج –

پاسخ

$f(۱)=۵(۱)=۵$

$y-y_۱=m(x-x_۱)$

$y-۵=۵(x-۱)$

$y=۵x-۵+۵$

$y=۵x$

دانلود از سایت ریاضی سرا

در حقیقت تابع اولیه یک تابع خطی است و نمودار آن یک خط مستقیم است با شیب ۵

۹) $\boldsymbol{f(x) = ۱ - ۳x}$

الف

پاسخ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \frac{۱ - ۳x - \left(۱ - ۳(۱)\right)}{x - ۱} = \frac{۱ - ۳x - ۱ + ۳}{x - ۱} = \frac{۳ - ۳x}{x - ۱} = \frac{-۳(x - ۱)}{x - ۱} = -۳$$

ب –

پاسخ

$m_{sec} = -۳$

ج –

پاسخ

$f(۱) = ۱ - ۳(۱) = -۲$

$y - y_۱ = m(x - x_۱)$

$y - (-۲) = -۳(x - ۱)$

$y = -۳x + ۳ - ۲$

$y = -۳x + ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $f(x) = x^{۲} - ۲x$

پاسخ

الف

پاسخ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \frac{x^{۲} - ۲x - \left(۱^{۲} - ۲(۱)\right)}{x - ۱} = \frac{x^{۲} - ۲x - ۱ + ۲}{x - ۱} = \frac{x^{۲} - ۲x + ۱}{x - ۱} = x - ۱$$

ب –

پاسخ

با استفاده از قسمت الف و بکار بردن $x = ۲$ خواهیم داشت

$m_{sec} = ۲ - ۱ = ۱$

ج –

پاسخ

$f(۲) = ۲^{۲} - ۲(۲) = ۰$

$y - y_{۱} = m(x - x_{۱})$

$y - ۰ = ۱(x - ۲)$

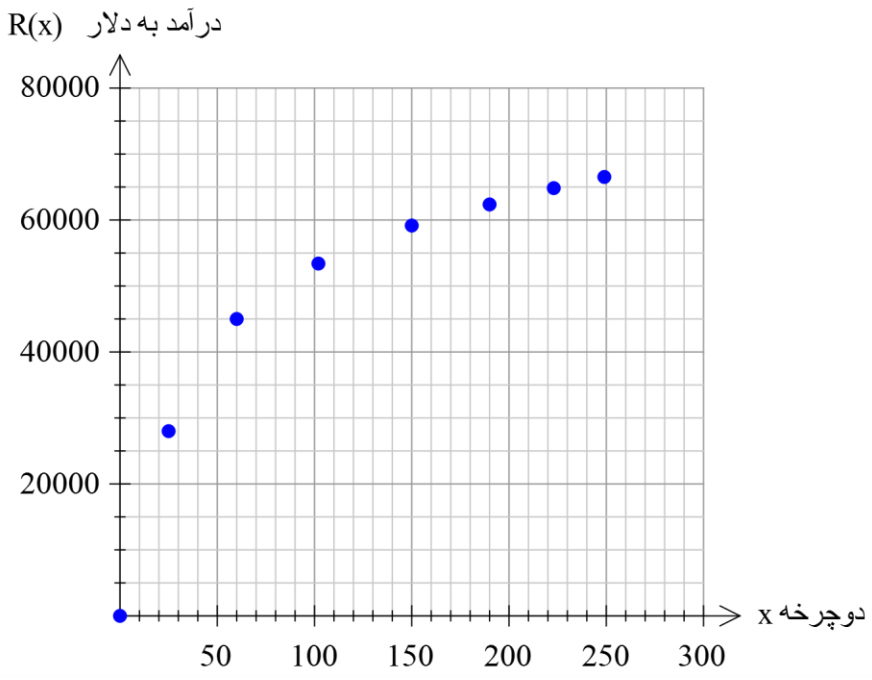
$y = x - ۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱ – اطلاعات جدول زیر در آمد فروش تعداد x دوچرخه در یک شرکت را نشان می دهد.

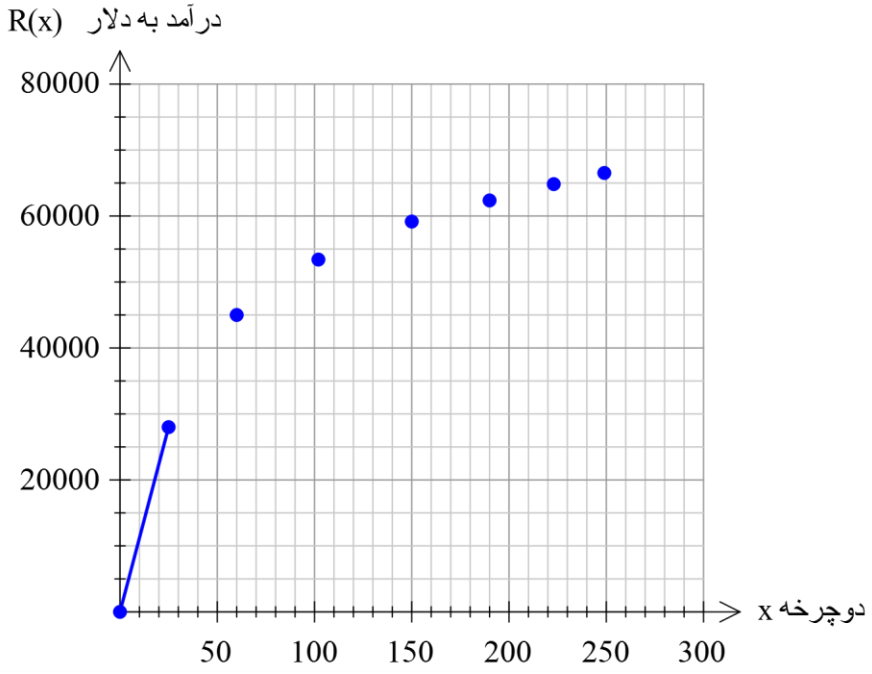
تعداد دو چرخ ها x	مجموع در آمد به دلار $R(x)$
۰	۰
۲۵	۲۸ ۰۰۰
۶۰	۴۵ ۰۰۰
۱۰۲	۵۳۴ ۰۰
۱۵۰	۵۹۱۶۰
۱۹۰	۶۲۳۶۰
۲۲۳	۶۴۸۳۵
۲۴۹	۶۶۵۲۵

الف - یک نمودار پراکنده از این اطلاعات را رسم کنید. تعداد دچرخه ها را متغیر مستقل فرض کنید.



دانلود از سایت ریاضی سرا

ب –یک خط از نقاط (۰,۰) و (۲۵, ۲۸۰۰۰) عبور دهید .



ج –میزان متوسط تغییردرامد را از صفر تا ۲۵ دوچرخه را پیدا کنید.

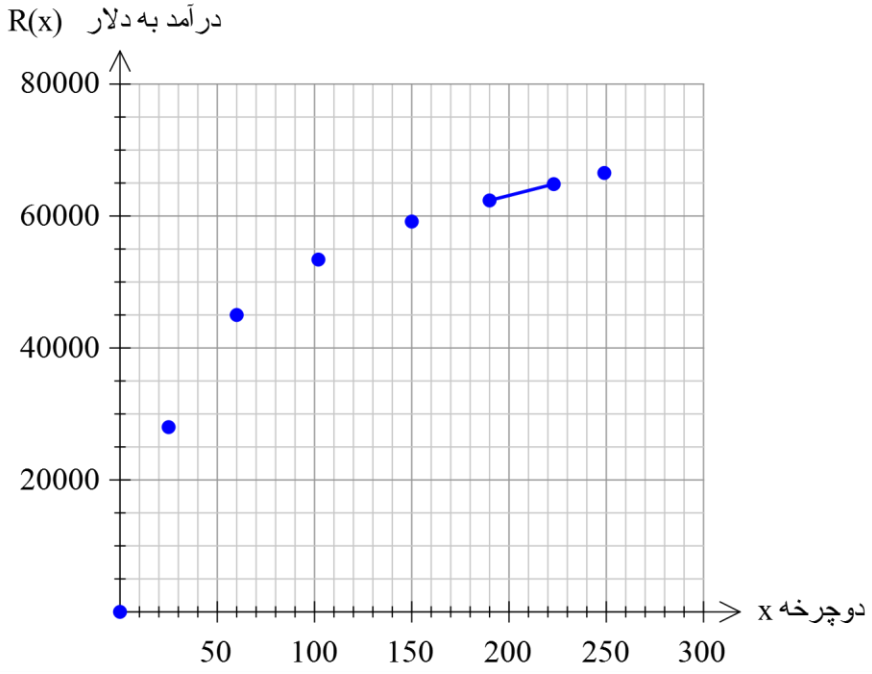
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰ - ۲۸۰۰۰}{۰ - ۲۵} = ۱۱۲۰$$

د –نتیجه بدست آمده از قسمت ج را تفسیر کنید.

پاسخ –به ازائ هر دوچرخه اضافی ، بین صفر و ۲۵ , که فروخته شود ، درامد ۱۱۲۰ دلار افزایش می یابد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

ه - یک خط از نقاط (۱۹۰, ۶۲۳۶۰) و (۲۲۳, ۶۴۸۳۵) عبور دهید.



و –میزان متوسط تغییر درامد را از ۱۹۰ تا ۲۲۳ دچرخه را پیدا کنید.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۶۴۸۳۵ - ۶۲۳۶۰}{۲۲۳ - ۱۹۰} = \frac{۲۴۷۵}{۳۳} = ۷۵ \text{ دوچرخه هر برای دلار}$$

ز - نتیجه بدست آمده از قسمت (و)را تفسیر کنید.

پاسخ –به ازائ هر دوچرخه اضافی ، بین , ۱۹۰ و ۲۲۳ که فروخته شود ، درامد ۷۵ دلار افزایش می یابد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۱۱ - مجموعه توابع ،توابع چند ضابطه ای Library of Functions; Piecewise Functions

در این بخش از چند تابع که بعضی از آنها را قبلا دیده ایم ، نام می بریم. به خواص و شکل نمودار آنها توجه کنید.

توابع خطی Linear Functions

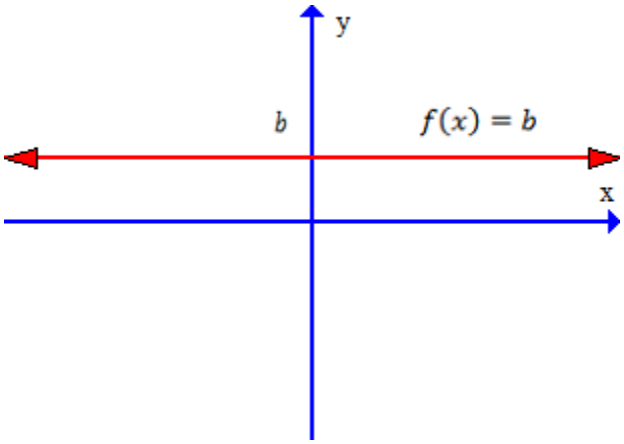
$$f(x) = mx + b \ ; \qquad m \in \mathbb{R}، \ b \in \mathbb{R}$$

دامنه یک تابع خطی f شامل کلیه اعداد حقیقی است. نمودار این تابع یک خط غیر عمودی است با شیب m و b محل تقاطع با محور y یک تابع خطی صعودی است اگر $m > ۰$ نزولی است اگر $m < ۰$ و ثابت اگر $m = ۰$ باشد.

تابع ثابت Constant Function

$$f(x) = b \ ؛ \quad b \in \mathbb{R}$$

یک تابع ثابت ، یک تابع خطی مخصوص است با $m = ۰$ دامنه آن کلیه اعداد حقیقی است ، و برد آن شامل مجموعه تنها یک عدد b نمودار آن یک خط افقی است که محل تلاقی آن با محور y نقطه b است.

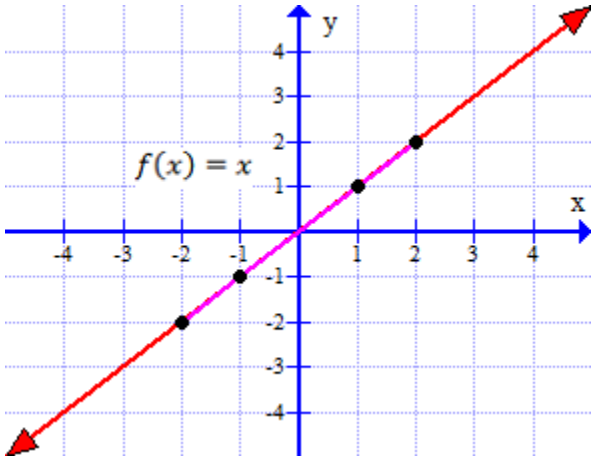


تابع همانی Identity Function

$$f(x) = x$$

تابع همانی هم یک نوع مخصوص تابع خطی است. دامنه و برد آن شامل کلیه اعداد حقیقی است. نمودار آن خطی است با شیب $m = ۱$ و از مبدا مختصات می گذرد. خط شامل تمام نقاطی است که مختصات x و y با هم برابر هستند.
تابع همانی یک تابع فرد است که در خلال دامنه آن ، صعودی است. این تابع ، ربع اول و سوم را نصف می کند.

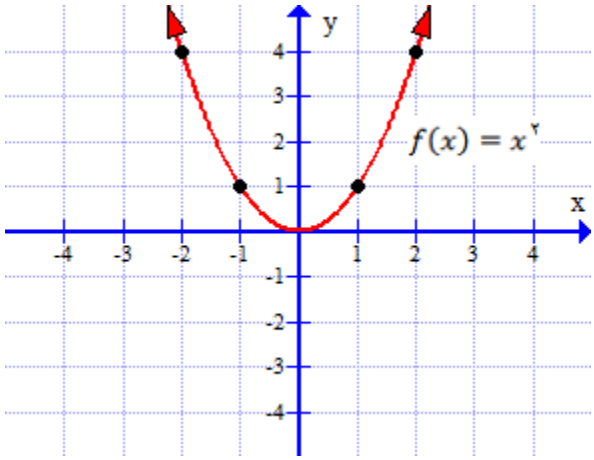
دانلود از سایت ریاضی سرا



تابع درجه دوم Square Function

$$f(x) = x^{۲}$$

دامنه تابع درجه دوم کلیه اعداد حقیقی است و برد آن کلیه اعداد غیر منفی. نمودار این تابع ، یک سهمی است که تقاطع آن با محور ها $(۰,۰)$ است. تابع درجه دوم ، یک تابع زوج است که در بازه $(-\infty,۰)$ نزولی است و در بازه $(۰,\infty)$ صعودی است.

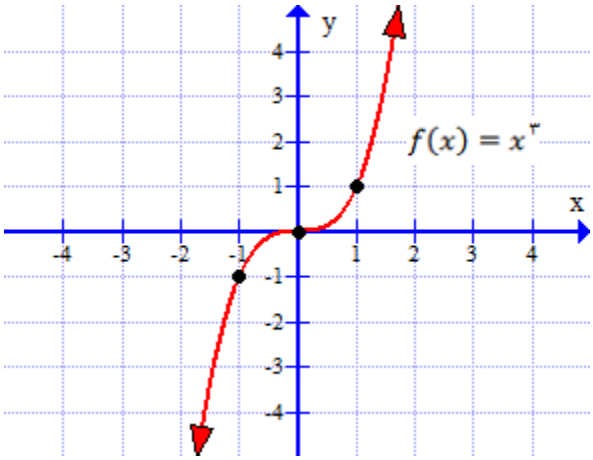


تابع درجه سه Cube Function

$$f(x) = x^{۳}$$

دامنه و برد این تابع کلیه اعداد حقیقی است و محل تقاطع با محور ها در $(۰,۰)$ تابع درجه سه یک تابع فرد است و صعودی است در $(-\infty,\infty)$

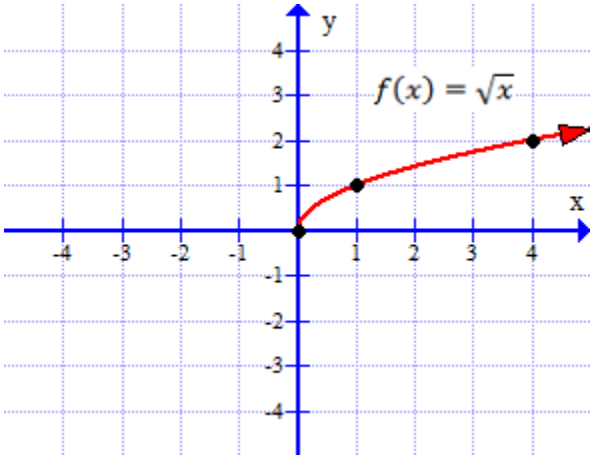
دانلود از سایت ریاضی سرا



تابع ریشه دوم یا تابع جذری Square Root Function

$$f(x) = \sqrt{x}$$

دامنه و برد تابع جذری شامل کلیه اعداد حقیقی نا منفی است. محل تقاطع با محور ها در (۰,۰) تابع جذری نه فرد است و نه زوج ، و صعودی است در $(۰, \infty)$

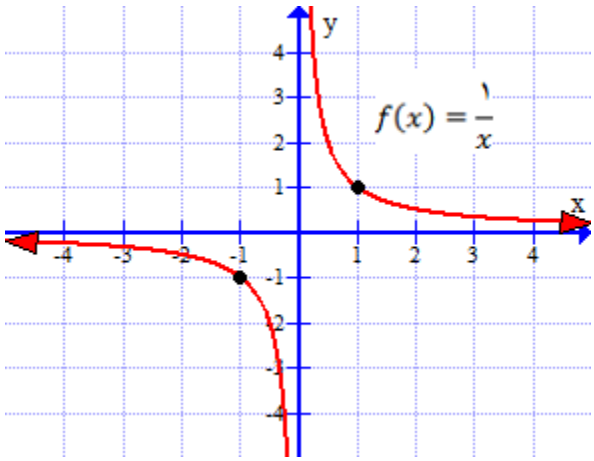


دانلود از سایت ریاضی سرا

تابع بازگون Reciprocal Function

$$f(x) = \frac{۱}{x}$$

دامنه و برد تابع بازگون کلیه اعداد حقیقی غیر از صفر است. نمودار با محور ها تقاطع ندارد. تابع بازگون در $(-\infty,۰)$ و $(۰,\infty)$نزولی است. این تابع یک تابع فرد است.

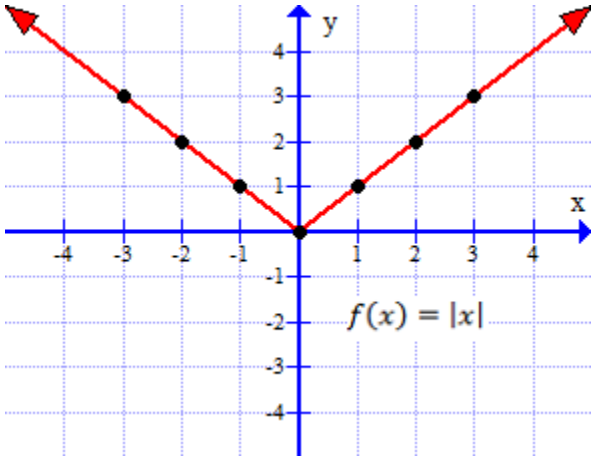


تابع قدر مطلق Absolute Value Function

$$f(x) = |x|$$

دامنه تابع قدر مطلق کلیه اعداد حقیقی است و برد آن کلیه اعداد نا منفی. محل تلاقی با محور ها در $(۰,۰)$ اگر $x \geq ۰$ باشد ، پس $f(x) = x$ و نمودار f قسمتی از خط $y = x$ است. و اگر $x < ۰$ باشد ،

پس $f(x) = -x$ و نمودار f قسمتی از خط $y = -x$ است. تابع قدر مطلق ، یک تابع زوج است و نزولی است در بازه $(-\infty,۰)$و صعودی در $(۰,\infty)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

نماد $int(x)$ بجای بزرگ ترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x بکار می رود. مثلا

$int(۱) = ۱$ $int(۲ / ۵) = ۲$ $int(۰/ ۷۵) =۰$ $int(- ۰/ ۵۷) = -۱$ $- int(\pi) = ۳$

تابع بزرگ ترین عدد صحیح Greatest Integer Function

تابع پلکانی یا پله ای Step Function

بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی $f(x) = int(x) = x$

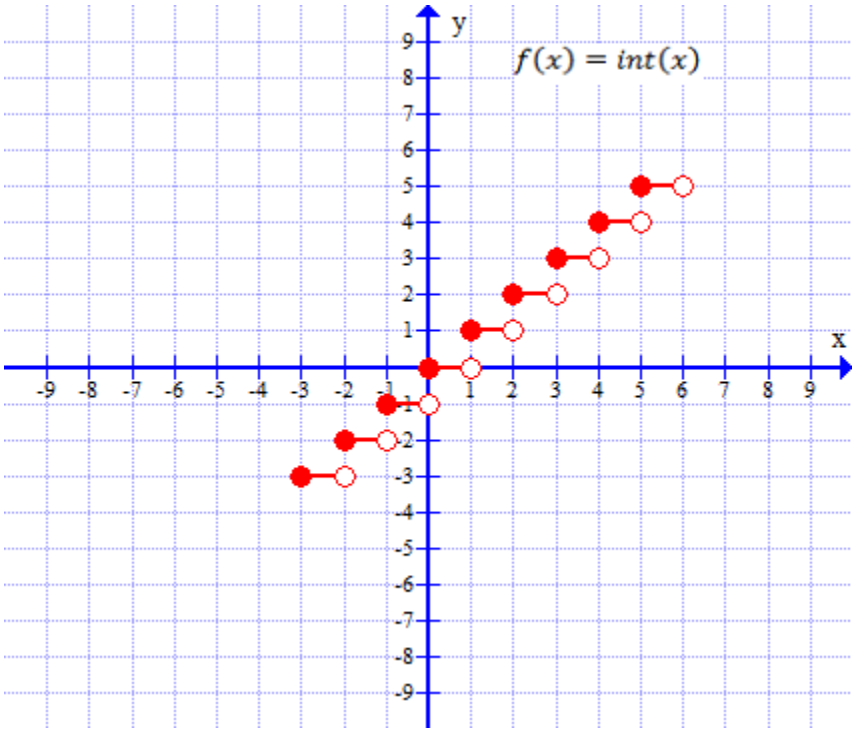
توجه –بعضی کتب نماد $f(x) = [\![x]\!]$ را بجای $f(x) = int(x)$ بکار می برند.

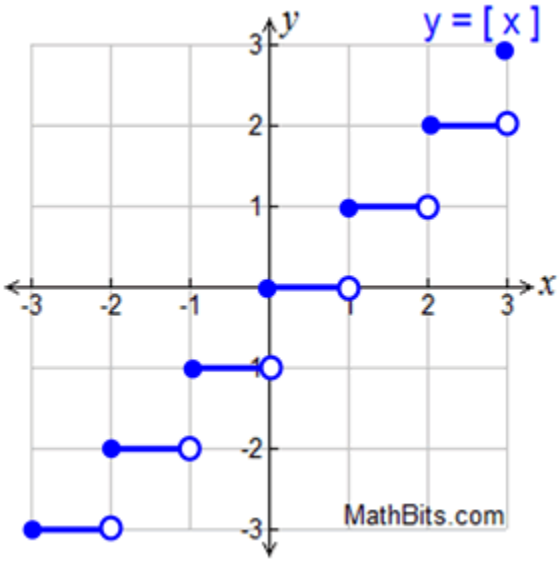
برای بدست آوردن نمودار $f(x) = int(x)$ چند نقطه روی صفحه مختصات مشخص می کنیم. به جدول زیر توجه کنید. برای $-۱ \leq x <۰$ مقدار $f(x) = iny(x)$ میشود -۱ برای $۰\leq x < ۱$ مقدار f میشود ۰

نمودار تابع هم بعد از جدول ملاحظه می کنید.

x	$y = f(x) = int(x)$	(x, y)
-۱	-۱	$(-۱, -۱)$
$-\frac{۱}{۲}$	-۱	$\left(-\frac{۱}{۲}, -۱\right)$
$-\frac{۱}{۴}$	-۱	$\left(-\frac{۱}{۴}, -۱\right)$
۰	۰	$(۰,۰)$
$\frac{۱}{۴}$	۰	$\left(\frac{۱}{۴}, ۰\right)$
$\frac{۱}{۲}$	۰	$\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right)$
$\frac{۳}{۴}$	۰	$\left(\frac{۳}{۴}, ۰\right)$

دانلود از سایت ریاضی سرا





دامنه تابع پله ای کلیه اعداد حقیقی است و برد آن مجموعه اعداد صحیح. محل تلاقی نمودار با محور y صفر است و محل تلاقی با محور x بازه $[۰ , ۱)$ این تابع نه زوج است و نا فرد.

این تابع یک تابع ثابت است در بازه هایی به شکل $[k, k+۱)$ برای یک عدد صحیح k

در نمودار های بالا ، نقطه تو پر بکار می بریم که مثلا نشان دهیم در $x = ۱$ مقدار تابع $f(۱) = ۱$

یک دائره تو خالی بکار می بریم که بگویم تابع در $x = ۱$ مقدار صفر نمی پذیرد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

این تابع را تابع پله ای هم می نامند زیرا در $x = ۰, x = \pm ۱, x = \pm ۲, x = \pm ۳$ و غیرو ,نمودار نا پیوسته است. یعنی در مقادیر اعداد صحیح ، نمودار ناگهان از یک پله به پله دیگر می رود بدون این که مقادیر فی ما بین را در بر بگیرد.

مثلا بلا فاصله سمت چپ $x = ۳$ مختصات y دو است و بلا فاصله سمت راست $x = ۳$ مختصات y سه است.

توابع چند ضابطه ای Piecewise-Defined Functions

گاهی اوقات یک تابع در قسمت های مختلف دامنه اش ، با ضابطه های مختلف تعریف می شود. مثلا تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$

در حقیقت با دو تابع بیان می شود. یعنی $f(x) = x$ اگر $x \geq ۰$ باشد و $f(x) = -x$ اگر $x < ۰$ باشد. برای سهولت ما معمولا این دو تابع را در یک عبارت به هم متصل می کنیم. مانند

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq ۰ \\ -x & \text{اگر } x < ۰ \end{cases}$$

وقتی که یک تابع با بیش از یک معادله تعریف می شود ، به آن تابع **چند ضابطه ای** می گویند.

مثال ۱ – تابع f به صورت زیر تعریف شده است.

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} -\boldsymbol{x} + ۱ & \text{اگر } -۱ \leq \boldsymbol{x} < ۱ \\ ۲ & \text{اگر } \boldsymbol{x} = ۱ \\ \boldsymbol{x}^۲ & \text{اگر } \boldsymbol{x} > ۱ \end{cases}$$

الف –مقادیر $f(۰), f(۱), f(۲)$ را پیدا کنید.

ب –دامنه f را مشخص کنید.

ج - نمودار f را رسم کنید.

د –با استفاده از نمودار ، برد f را پیدا کنید.

پاسخ –

الف –وقتی که $x = ۰$ طبق تعریف اول این تابع $f(x) = -x + ۱$ پس

$$f(۰) = -۰ + ۱ = ۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

وقتی که $x = ۱$ طبق تعریف دوم این تابع $f(x) = ۲$ پس

$$f(۱ = ۲)$$

وقتی که $x = ۲$ طبق تعریف سوم این تابع $f(x) = x^۲$ پس

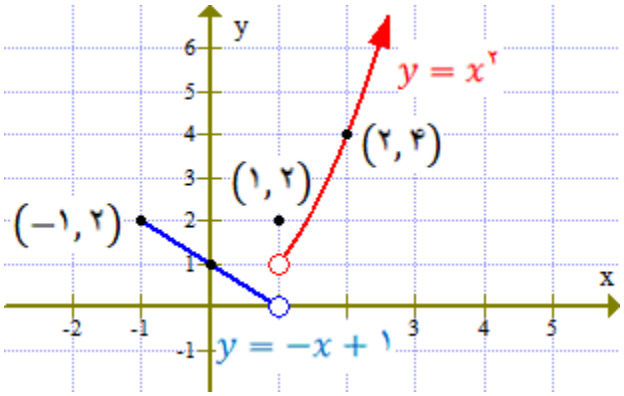
$$f(۲) = ۲^۲ = ۴$$

ب –برای پیدا کردن دامنه f به تعریف آن نگاه می کنیم. نتیجه می گیریم که دامنه f

$$[-۱, \infty) \quad \text{یا} \quad \{x | x \geq -۱\}$$

است.

ج –



برای رسم نمودار ، هر قسمت را قدم به قدم رسم می کنیم. ابتدا خط $y = -x + ۱$ را فقط برای قسمت

$$-۱ \leq x < ۱$$

سپس نقطه $(۱, ۲)$ را رسم می کنیم. زیرا وقتی که $x = ۱$ است $f(x) = ۲$

و در نهایت ، سهمی را رسم می کنیم ، فقط آن قسمت که $x > ۱$ است.

د –از نمودار نتیجه می گیریم که برد $\{y | y > ۰\}$ و یا $(۰, \infty)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ – شرکت برق برای هر مشترک ماهانه ۸۰۲ تومان هزینه ثابت در نظر می گیرد و ۸/۷۷ تومان هر کیلو وات در ساعت $(kWhr)$ برای اولین ۴۰۰ کیلو وات در ساعت وبرای هر کیلو وات در ساعت اضافی مبلغ ۶/۵۷۴ تومان

الف –اگر یک مشترک دریک ماه ۳۰۰ کیلو وات در ساعت مصرف داشته باشد ، چه مبلغی باید بپردازد ؟

ب –اگر در یک ماه ۷۰۰ کیلو وات در ساعت مصرف داشته باشد ، چه مبلغی باید پرداخت کند؟

ج -اگر C هزینه ماهانه برای x کیلو وات در ساعت باشد ، C را به عنوان تابعی از x بنویسید.

پاسخ

الف –هزینه ۳۰۰ کیلو وات در ساعت برای یک ماه

$$\text{هزینه} = ۳۰۰\left(۸/۷۷\right) + ۸۰۲ = ۳۴۳۳ \text{ تومان}$$

ب –

$$\text{هزینه} = ۴۰۰\left(۸/۷۷\right) + ۸۰۲ + ۳۰۰\left(۶/۵۷۴\right) = ۶۲۸۲/۲ \text{ تومان}$$

ج -

اگر $۰ \leq x \leq ۴۰۰$ باشد ،

$$C(x) = ۸/۷۷x + ۸۰۲$$

اگر $x > ۴۰۰$ باشد

$$C(x) = ۴۰۰\left(۸/۷۷\right) + ۸۰۲ + \left(x - ۴۰۰\right)\left(۶/۵۷۴\right) = ۶/۵۷۴x + ۱۶۸۰/۴$$

پس قاعده برای محاسبه هزینه برق ماهانه مطابق زیر است.

$$C(x) = \begin{cases} C(x) = ۸/۷۷x + ۸۰۲ & \text{اگر } ۰ \leq x \leq ۴۰۰ \\ C(x) = ۶/۵۷۴x + ۱۶۸۰/۴ & \text{اگر } x > ۴۰۰ \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۱۱

نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید. سه نقطه روی نمودار را مشخص کنید.

۱) $f(x) = x$

۲) $f(x) = x^{۲}$

۳) $f(x) = x^{۳}$

۴) $f(x) = \sqrt{x}$

۵) $f(x) = \frac{۱}{x}$

۶) $f(x) = |x|$

۷) $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & \text{اگر } x < ۰ \\ ۲ & \text{اگر } x = ۰ \\ ۲x + ۱ & \text{اگر } x > ۰ \end{cases}$

مقادیر $f(۲)$, $f(۰)$ ، $f(-۲)$ را برای تمرین شماره ۷ پیدا کنید.

۸) $f(x) = \begin{cases} x^{۳} & \text{اگر } x < ۰ \\ ۳x + ۲ & \text{اگر } x \geq ۰ \end{cases}$

مقادیر $f(۱)$, $f(۰)$ ، $f(-۱)$ را برای تمرین شماره ۸ پیدا کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) اگر $f(x) = int(۲x)$

مقادیر $f(-۱/۸)$ ، $f(۱/۶)$ ، $f(۱/۲)$ را پیدا کنید. **یاد آوری** / نماد اعشار در فارسی است. مثلا ۱/۲ یعنی یک و دو دهم. ۱/۶ یعنی یک و شش دهم.

۱۰) اگر $f(x) = int\left(\frac{x}{۲}\right)$

مقادیر $f(-۱/۸)$ ، $f(۱/۶)$ ، $f(۱/۲)$ را پیدا کنید.

برای تمرینات زیر

الف- دامنه هر یک از توابع را مشخص کنید.

ب –محل تلاقی با محور ها را مشخص کنید.

ج - نمودار آنرا رسم کنید.

د –از روی نمودار ، برد تابع را مشخص کنید.

۱۱) $f(x) = \begin{cases} ۲x & \text{اگر } x \neq ۰ \\ ۱ & \text{اگر } x = ۰ \end{cases}$

۱۲) $f(x) = \begin{cases} ۳x & \text{اگر } x \neq ۰ \\ ۴ & \text{اگر } x = ۰ \end{cases}$

۱۳) $f(x) = \begin{cases} x + ۳ & \text{اگر } -۲ \leq x < ۱ \\ ۵ & \text{اگر } x = ۱ \\ -x + ۲ & \text{اگر } x > ۱ \end{cases}$

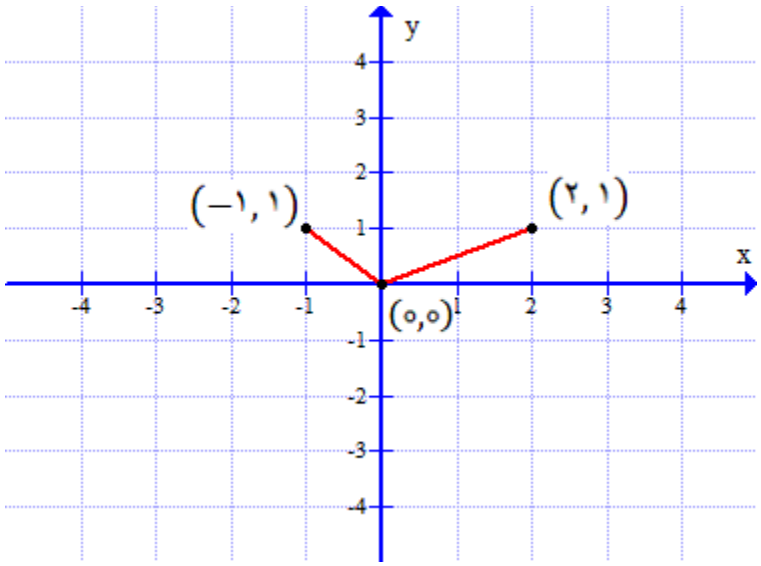
۱۴) $f(x) = ۲int(x)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

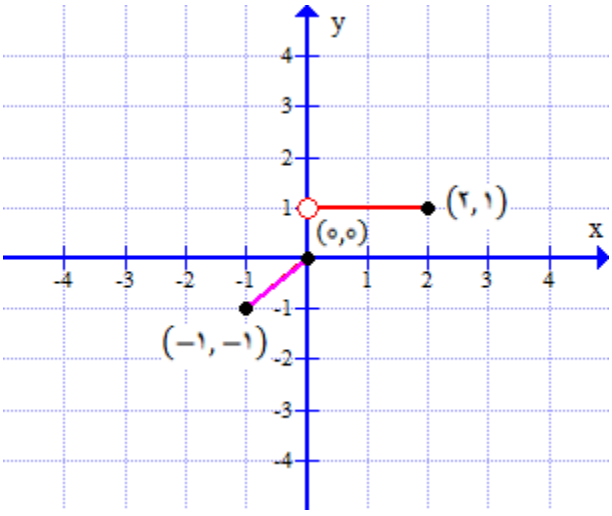
۱۵) $f(x) = int(۲x)$

نمودار توابع چند ضابطه ای در ذیل مشاهده می کنید. برای هر کدام ضابطه مربوطه را بنویسید.

۱۶)

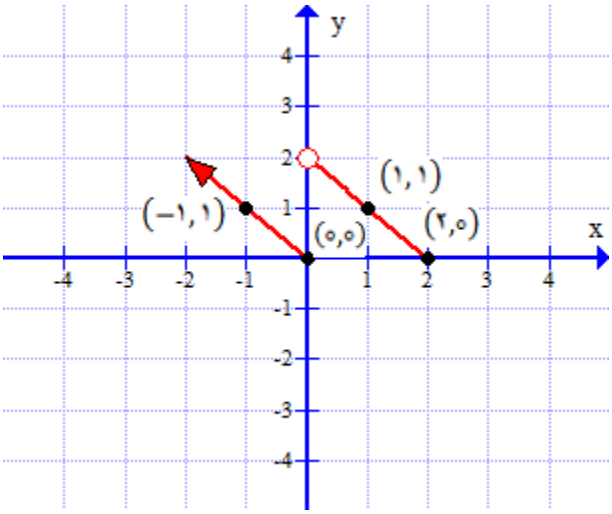


۱۷)

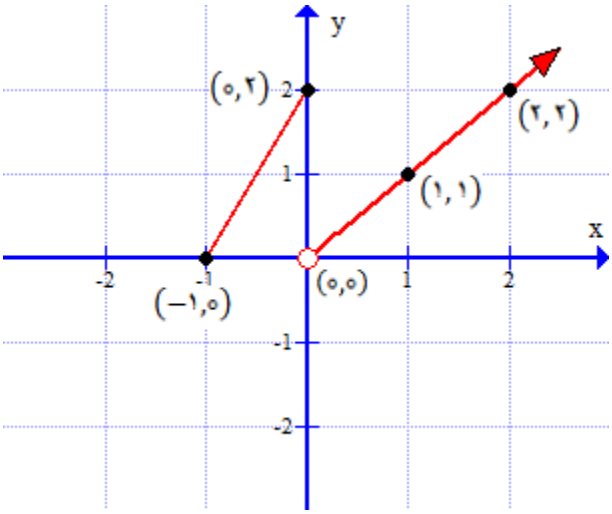


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸)



۱۹)

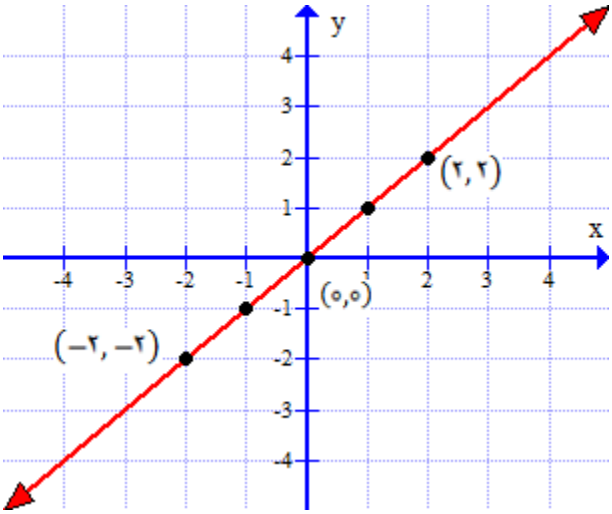


دانلود از سایت ریاضی سرا

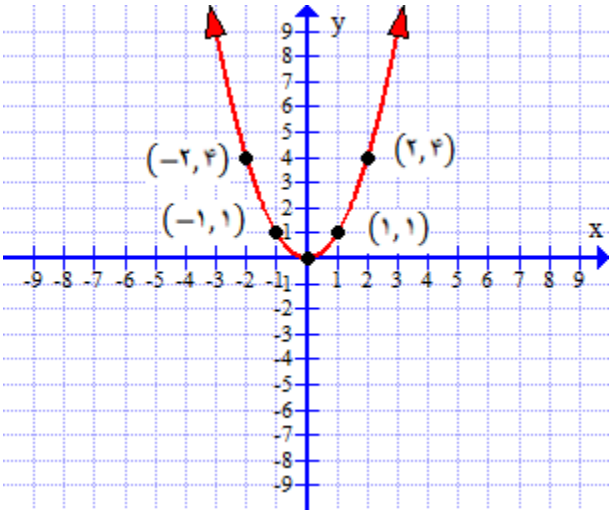
پاسخ تمرینات ۷.۱۱

نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید. سه نقطه روی نمودار را مشخص کنید.

۱) $f(x) = x$

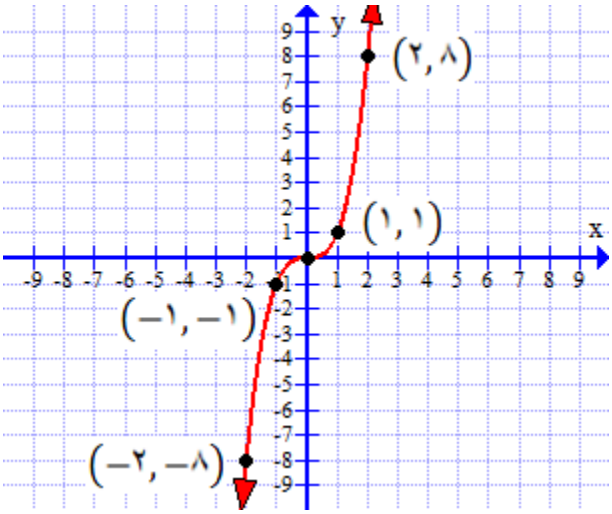


۲) $f(x) = x^{۲}$

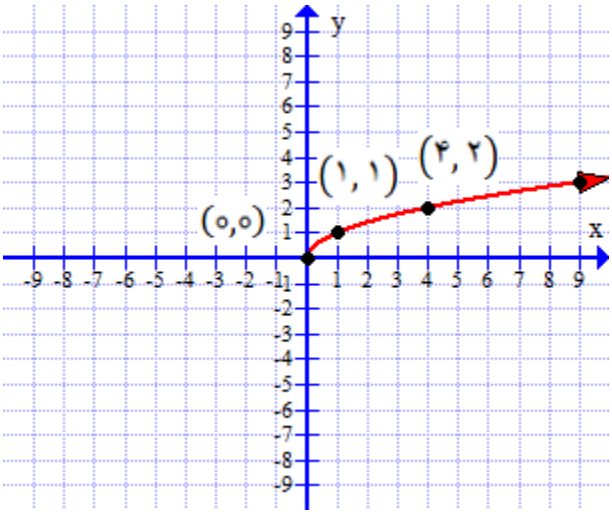


دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $f(x) = x^{۳}$

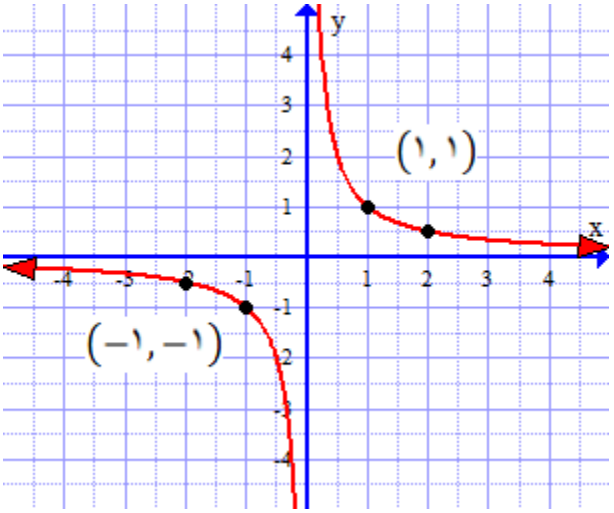


۴) $f(x) = \sqrt{x}$

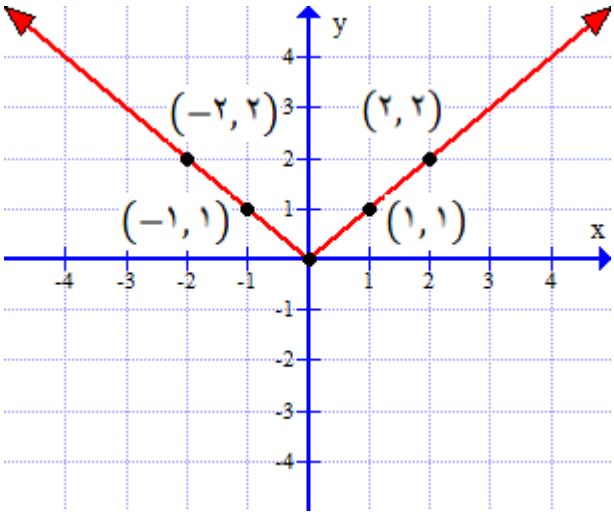


دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $f(x) = \frac{۱}{x}$

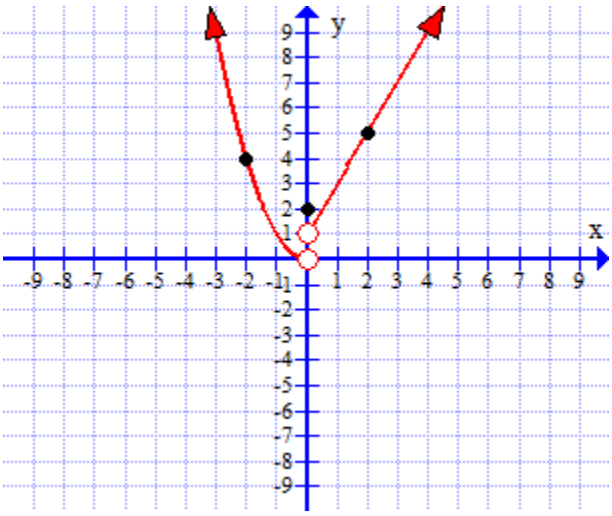


۶) $f(x) = |x|$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & \text{اگر} \quad x<۰ \\ ۲ & \text{اگر} \quad x=۰ \\ ۲x+۱ & \text{اگر} \quad x>۰ \end{cases}$

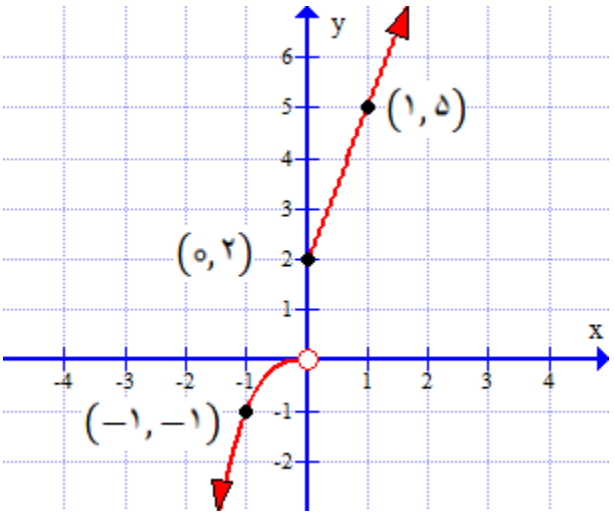


مقادیر $f(۲)$, $f(۰)$ ، $f(-۲)$ را برای تمرین شماره ۷ پیدا کنید.

$f(-۲)=۴ \qquad f(۰)=۲ \qquad f(۲)=۵$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $f(x)=\begin{cases} x^{۳} & \text{اگر} \quad x<۰ \\ ۳x+۲ & \text{اگر} \quad x\geq ۰ \end{cases}$

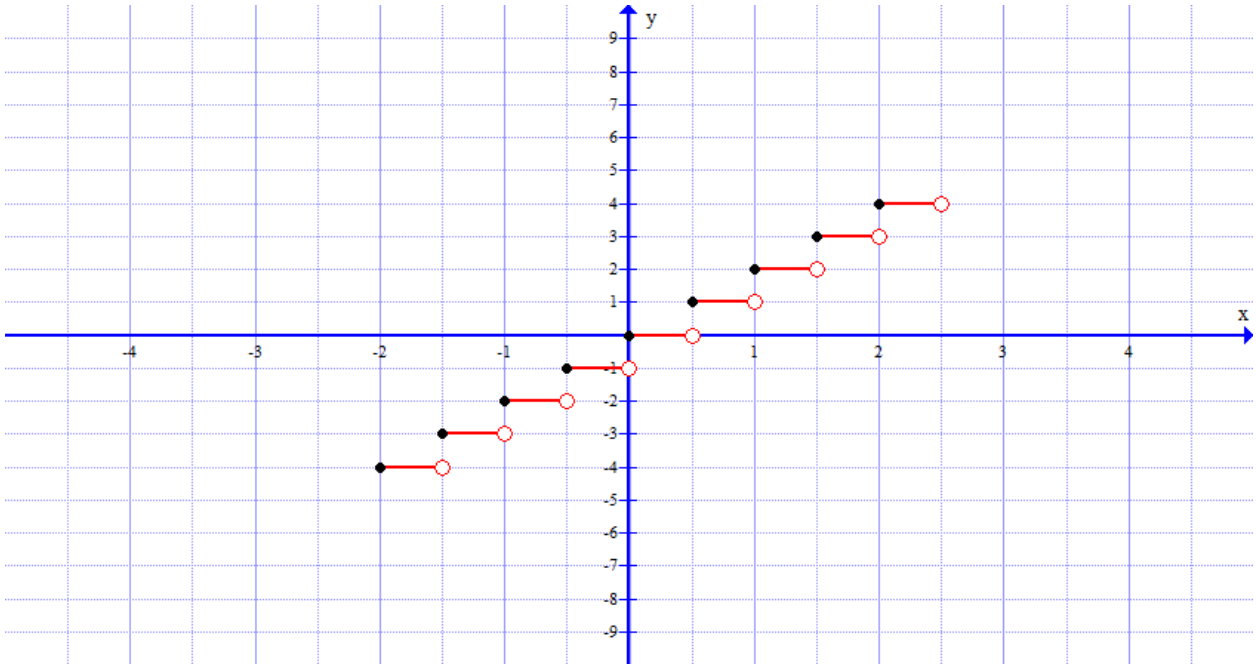


مقادیر $f(۱)$, $f(۰)$ ، $f(-۱)$ را برای تمرین شماره ۸ پیدا کنید.

$f(-۱)=-۱$ $\quad f(۰)=۲$ $\quad f(۱)=۵$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) اگر $f(x) = int(۲x)$

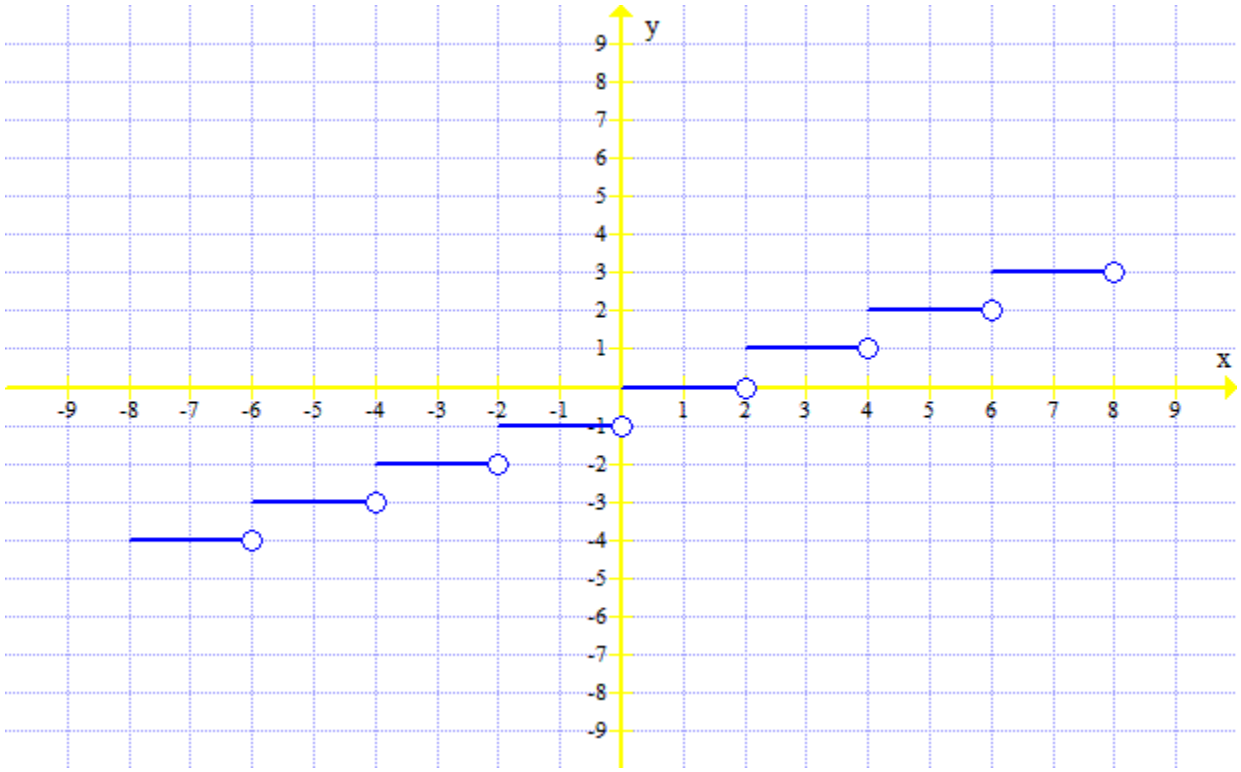


مقادیر $f(-۱/۸)$ ، $f(۱/۶)$ ، $f(۱/۲)$ را پیدا کنید. **یاد آوری** / نماد اعشار در فارسی است.
مثلا ۱/۲ یعنی یک و دو دهم. ۱/۶ یعنی یک و شش دهم.

$f(۱/۲) = f(1.2) = ۲$ $f(۱/۶) = f(1.6) = ۳$ $f(-۱/۸) = f(-1.8) = -۵$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) اگر $f(x) = int\left(\frac{x}{۲}\right)$



مقادیر $f(-۱/۸)$ ، $f(۱/۶)$ ، $f(۱/۲)$ را پیدا کنید.

$f(-۱/۸) = f(-1.8) = -۱$ $\quad f(۱/۶) = f(1.6) = ۰$ $\quad f(۱/۲) = f(1.2) = ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای تمرینات زیر

الف- دامنه هر یک از توابع را مشخص کنید.

ب –محل تلاقی با محور ها را مشخص کنید.

ج - نمودار آنرا رسم کنید.

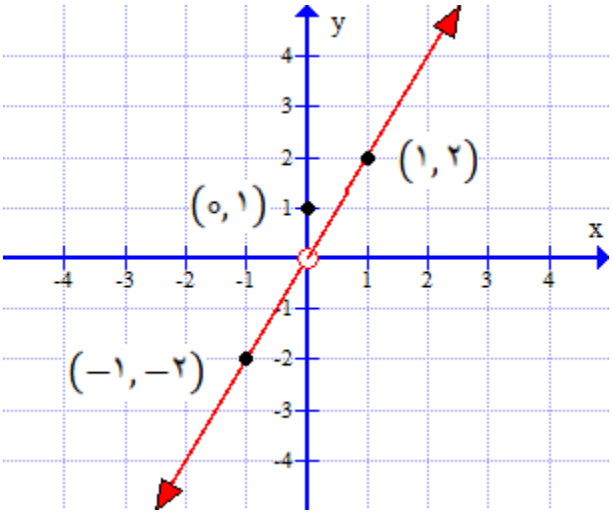
د –از روی نمودار ، برد تابع را مشخص کنید.

$$۱۱)\quad f(x)=\begin{cases} ۲x & \text{اگر } x\neq ۰ \\ ۱ & \text{اگر } x=۰ \end{cases}$$

الف - دامنه کلیه اعداد حقیقی

ب -تلاقی با محور ها $(۰,۱)$

ج –نمودار



د – برد $\{y|y\neq ۰\}$ یا کلیه اعداد حقیقی بجز صفر.

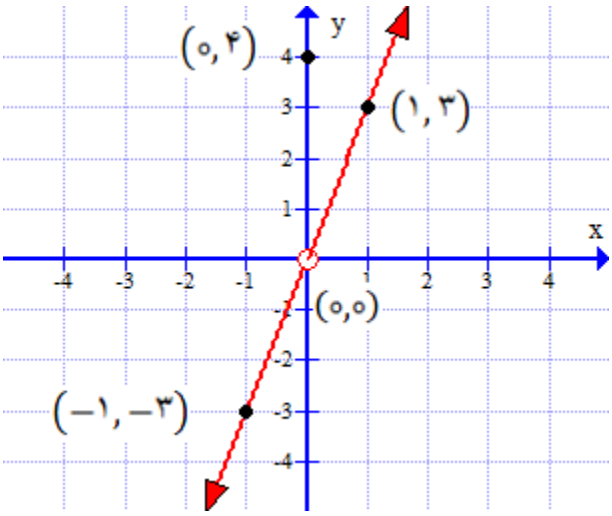
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲) $f(x)=\begin{cases} ۳x & \text{اگر} \quad x\neq ۰ \\ ۴ & \text{اگر} \quad x=۰ \end{cases}$

الف ـ دامنه کلیه اعداد حقیقی

ب -تلاقی با محور ها $(۰,۴)$

ج – نمودار



د – برد $\{y|y\neq ۰\}$ یا کلیه اعداد حقیقی بجز صفر.

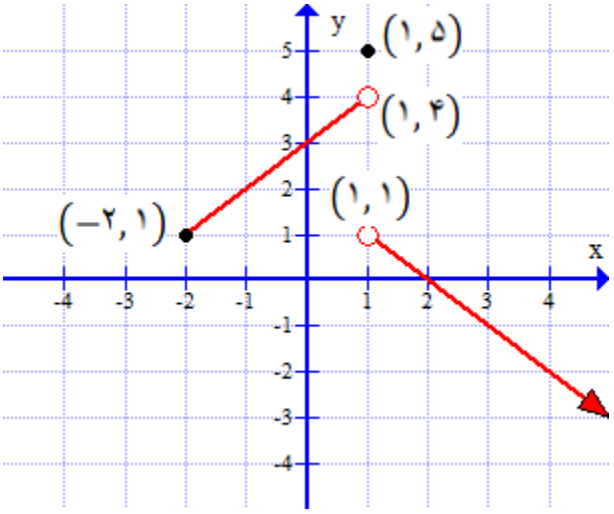
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳) $f(x)=\begin{cases} x+۳ & \text{اگر} \quad -۲\le x<۱ \\ ۵ & \text{اگر} \quad x=۱ \\ -x+۲ & \text{اگر} \quad x>۱ \end{cases}$

الف - دامنه $\{x|x\ge -۲\}$ یا $[-۲,\infty)$

ب - تلاقی با محور ها $(۰,۳)$ و $(۲,۰)$

ج - نمودار



د - $\{y|y<۴, y=۵\}$ یا $(-\infty,۴)\cup[۴]$

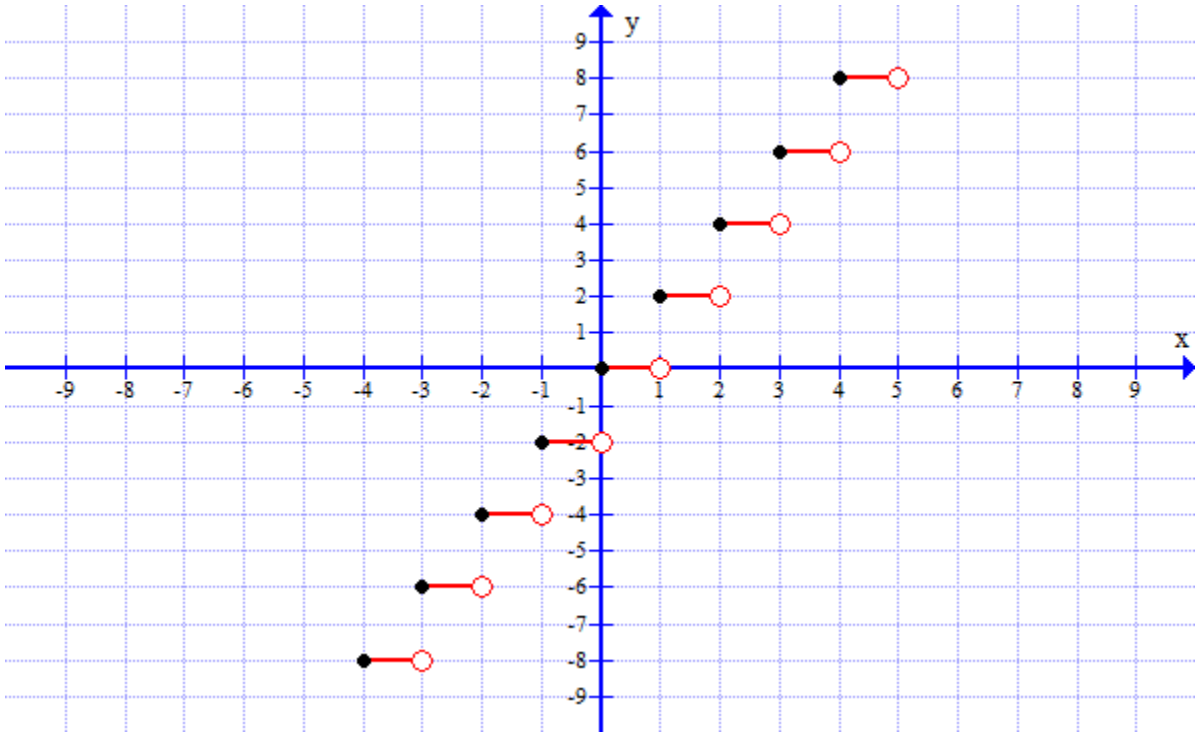
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴) $f(x) = ۲int(x)$

الف –دامنه کلیه اعداد حقیقی.

ب – تلاقی با محور ها $(x,۰)$ برای $۰ \leq x < ۱$

ج –نمودار



د – مجموعه اعداد صحیح زوج

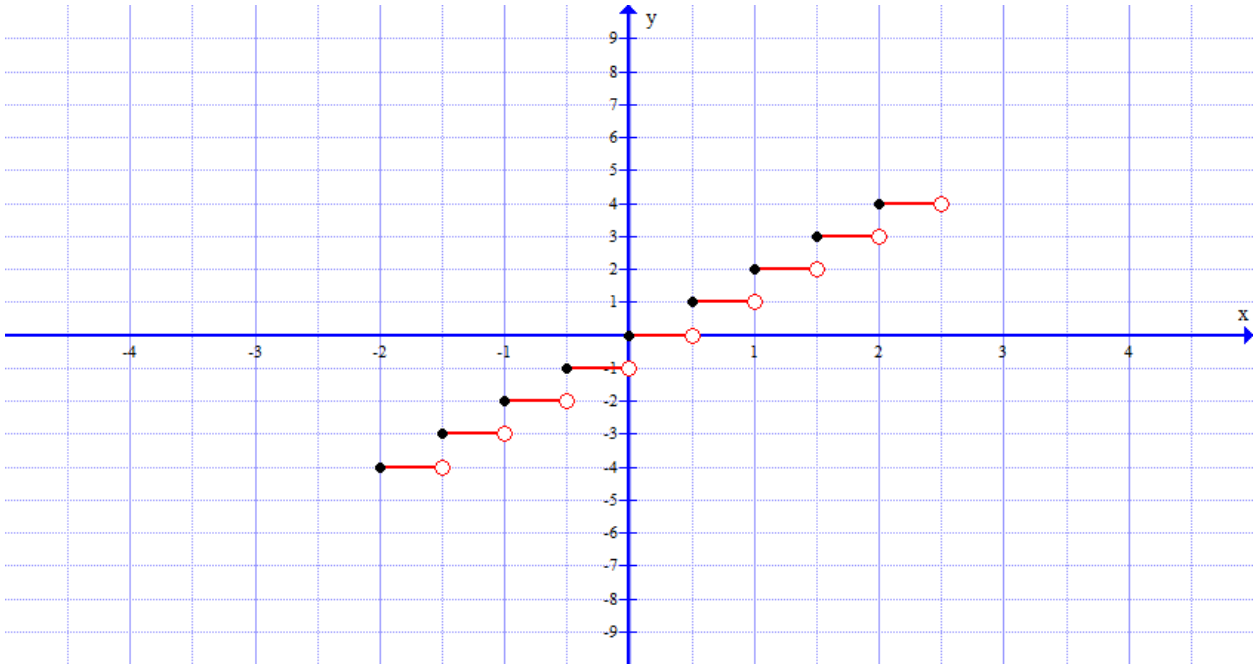
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵) $f(x) = int(۲x)$

الف –دامنه کلیه اعداد حقیقی

ب -تلاقی با محور ها $(x,۰)$ برای $۰ \leq x < \frac{۱}{۲}$

ج – نمودار

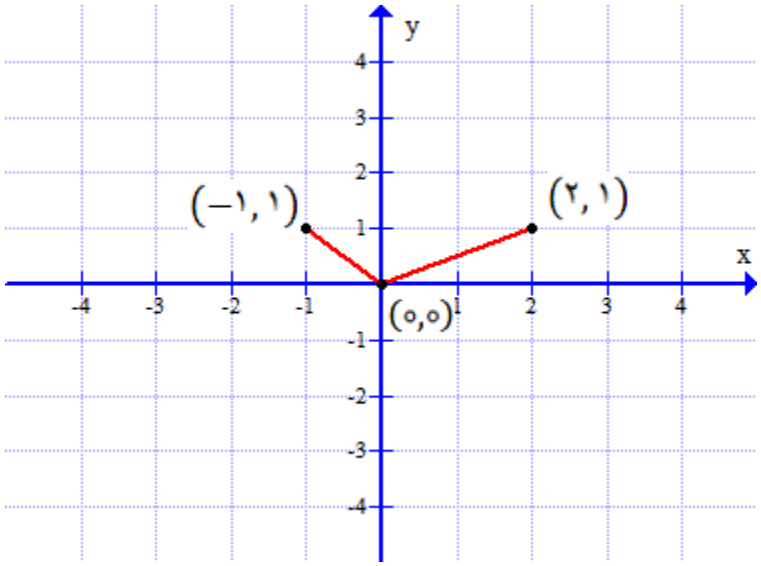


د –کلیه اعداد صحیح

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار توابع چند ضابطه ای در ذیل مشاهده می کنید. برای هر کدام ضابطه مربوطه را بنویسید.

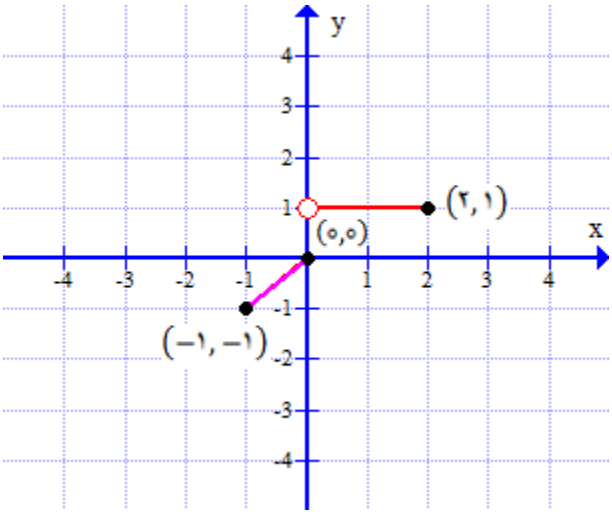
۱۶)



$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{اگر} \quad -۱ \le x \le ۰ \\ \frac{۱}{۲}x & \text{اگر} \quad ۰ < x \le ۲ \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

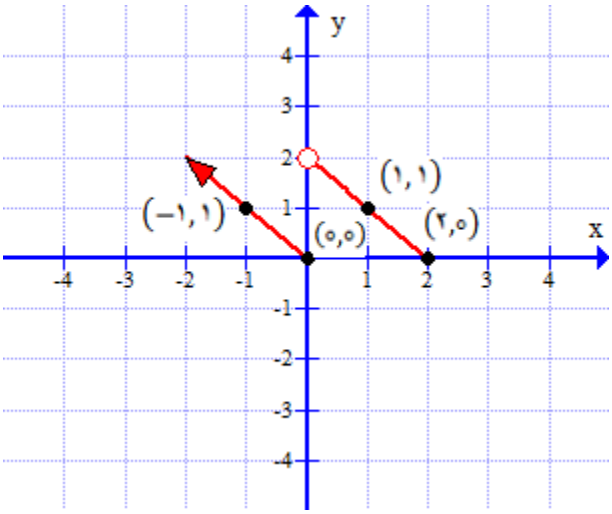
۱۷)



$$f(x)=\begin{cases} x & \text{اگر} \quad -۱ \le x \le ۰ \\ ۱ & \text{اگر} \quad ۰ < x \le ۲ \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

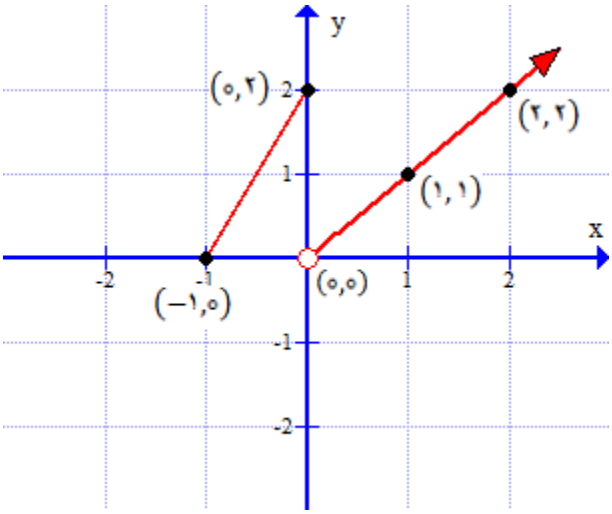
۱۸)



$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{اگر} \quad x \leq ۰ \\ -x+۲ & \text{اگر} \quad ۰< x \leq ۲ \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹)



$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۲ & \text{اگر} \quad -۱\le x\le ۰ \\ x & \text{اگر} \quad x>۰ \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۱۲ – انجام عملیات روی توابع Operations on Functions

اگر g و f دو تابع باشند ،

جمع $\boldsymbol{f+g}$ هم یک تابع است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

دامنه $f+g$ شامل اعداد x است که هم در دامنه f است و هم g

تفاضل $\boldsymbol{f-g}$ هم یک تابع است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

دامنه $f-g$ شامل اعداد x است که هم در دامنه f است و هم g

حاصل ضرب $\boldsymbol{(f\cdot g)(x)}$ هم یک تابع است با تعریف زیر

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

دامنه $f\cdot g$ شامل اعداد x است که هم در دامنه f است و هم g

خارج قسمت یا تقسیم $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$ هم یک تابع است طبق تعریف ریز

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\qquad g(x)\neq 0$$

دامنه $\frac{f}{g}$ شامل اعداد x است به شرطی که $g(x)\neq 0$ و در دامنه هم f است و هم g

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱ – فرض کنید دو تابع g و f طبق تعریف زیر داریم

$$f(x)=\sqrt{x+۲} \quad \text{و} \quad g(x)\sqrt{۳-x}$$

عملیات زیر را انجام دهید و در هر مورد دامنه توابع بدست آمده را مشخص کنید.

الف - $(g+g)(x)$

ب - $(f-g)(x)$

ج - $(f\cdot g)(x)$

د - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

پاسخ

$$a)\ \ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳-x}$$

$$b)\ \ (f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+۲}-\sqrt{۳-x}$$

$$c)\ \ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(\sqrt{x+۲}\right)\left(\sqrt{۳-x}\right)=\sqrt{(x+۲)(۳-x)}$$

$$d)\ \ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۳-x}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x+۲}\right)\left(\sqrt{۳-x}\right)}}{۳-x}$$

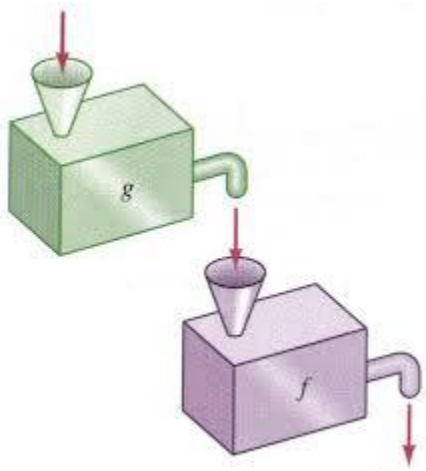
دامنه f شامل کلیه اعداد x است که $x\geq -۲$ باشد ، دامنه g شامل کلیه اعداد x است که $x\leq ۳$ باشد ، اعداد x که در هر دو این دامنه ها مشترک باشد ، آنهایی است که $-۲\leq x\leq ۳$ باشد. در نتیجه اعداد x که $-۲\leq x\leq ۳$ یا بازه $[-۲,۳]$ دامنه $f+g$ و $f-g$ و $f\cdot g$ را شامل می شوند اما برای $\frac{f}{g}$ باید عدد ۳ را مستثنی کنیم زیرا این عدد مخرج را صفر می کند. لذا دامنه $\frac{f}{g}$ شامل کلیه اعداد x است که $-۲\leq x<۳$ و یا بازه $[-۲,۳)$ باشد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

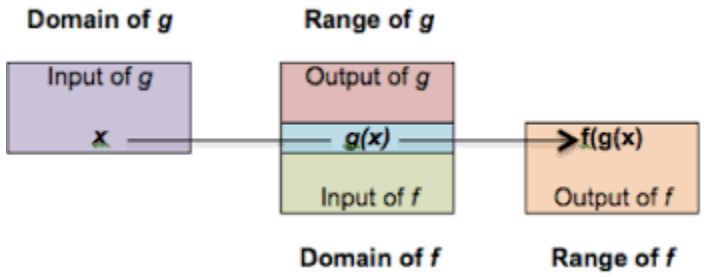
توابع ترکیبی یا توابع مرکب Composite Functions

هرگاه خروجی یک تابع را به عنوان ورودی یک تابع دیگر استفاده کنیم ، دو تابع را با هم ترکیب کرده ایم.

درشکل زیر ، خروجی g به عنوان ورودی f بکار رفته است.



در شکل زیر همان مفهوم بکار رفته ، در اینجا دامنه g به عنوان ورودی بکار رفته و برد g که همان خروجی باشد به عنوان دامنه و یا ورودی f بکار رفته و در نتیجه خروجی و یا برد f بدست می آید. یعنی f را با g ترکیب کرده ایم.



تابع $y = (۲x + ۳)^۲$ را در نظر بگیرید. اگر بنویسیم $y = f(u) = u^۲$ و $u = ۲x + ۳$ پس در جریان جای گزینی ، می توانیم تابع اصلی را بدست آوریم. یعنی

$$y = f(u) = f(g(x)) = (۲x + ۳)^۲$$

این جریان را ترکیب Composition می نامند.

بطور کلی ، فرض کنید f و g دو تابع هستند و x یک عدد است در دامنه g اگر مقدار g را برای x بدست آوریم ، خواهیم داشت $g(x)$ حال اگر $g(x)$ در دامنه f باشد ، پس می توانیم f را برای

دانلود از سایت ریاضی سرا

$g(x)$بدست آوریم. و در نتیجه عبارت $f\big(g(x)\big)$ بدست آوریم.. این ارتباط بین x و $f\big(g(c)\big)$ را تابع ترکیبی $f \circ g$ می نامند.

توجه این نماد $\circ$ که بین f و g ملاحظه می کنید ، نماد ترکیب دو تابع است و با صفر فارسی که تا بحال در این کتاب آورده ایم ، اشتباه نشود.

اگر دو تابع f و g داشته باشیم ، تابع ترکیبی که با نماد $f \circ g$ نشان می دهیم ، به صورت زیر تعریف می شود.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

نماد $f \circ g$ خوانده می شود ترکیب f با g (f composed with g)

دامنه $f \circ g$ مجموعه اعداد x در دامنه g بشرطی که $g(x)$ در دامنه f باشد.

مثال ۲ – پیدا کردن مقدار یک تابع مرکب Evaluating a Composite Function

فرض کنید $f(x) = ۲x^۲ - ۳$ و $g(x) = ۴x$ باشد ، مقادیر زیر را بدست اورید.

$a)\ (f \circ g)(۱)$ $\quad b)\ (g \circ f)(۱)$ $\quad c)\ (f \circ f)(-۲)$ $\quad d)\ (g \circ g)(-۱)$

پاسخ

$a)\ (f \circ g)(۱) = f\big(g(۱)\big) = f(۴) = ۲(۴)^۲ - ۳ = ۳۲ - ۳ = ۲۹$

$b)\ (g \circ f)(۱) = g\big(f(۱)\big) = g(۲ - ۳) = g(-۱) = ۴(-۱) = -۴$

$c)\ (f \circ f)(-۲) = f\big(f(-۲)\big) = f\big(۲(-۲)^۲ - ۳\big) = f(۵) = ۲(۵)^۲ - ۳ = ۴۷$

$d)\ (g \circ g)(-۱) = g\big(g(-۱)\big) = g(-۴) = ۴(-۴) = -۱۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۳ – پیدا کردن دامنه $f \circ g$ **Finding the Domain of $f \circ g$**

اگر

$$f(x) = \frac{۱}{x+۲} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{۴}{x-۱}$$

باشد ، دامنه $(f \circ g)(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ

میدانیم که $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ پس اول باید دامنه g را پیدا کنیم. دامنه g شامل کلیه اعداد حقیقی است بجز عدد یک و یا $\{x|x \neq ۱\}$ پس باید عدد یک را از دامنه $f \circ g$ مستثنی کنیم. دامنه f شامل کلیه اعداد حقیقی است بجز -۲ و یا $\{x|x \neq -۲\}$ یعنی $g(x)$ نمی تواند مساوی -۲ باشد. پس باید تساوی زیر را حل کنیم.

$$\frac{۴}{x-۱} = -۲$$

$$۴ = -۲(x-۱)$$

$$۴ = -۲x + ۲$$

$$۲ = -۲x$$

$$x = -۱$$

پس باید -۱ را هم مستثنی کنیم. در نهایت دامنه $f \circ g$ شامل $\{x|x \neq ۱, x \neq -۱\}$ است.

امتحان می کنیم.

برای $x = ۱$ تابع $g(x) = \frac{۴}{x-۱}$ تعریف نشدنی است ، پس $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ تعریف نشدنی است.

برای $x = -۱$ خواهیم داشت $g(-۱) = \frac{۴}{-۲} = -۲$ و $(f \circ g)(-۱) = f\big(g(-۱)\big) = f(-۲)$ تعریف نشدنی است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۴ – پیدا کردن یک تابع مرکب Finding a Composite Function

اگر

$$f(x)=\frac{۱}{x+۲} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{۴}{x-۱}$$

باشد ، توابع مرکب زیر را پیدا کنید.

$a)\ \ f\circ g \qquad b)\ \ g\circ f \qquad c)\ \ f\circ f \qquad d)\ \ g\circ g$

پاسخ

$$a)\ \ (f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{۴}{x-۱}\right)=\frac{۱}{\frac{۴}{x-۱}+۲}=\frac{۱}{\frac{۴+۲(x-۱)}{x-۱}}=\frac{۱}{\frac{۴+۲x-۲}{x-۱}}$$

$$=\frac{۱}{\frac{۲+۲x}{x-۱}}=\frac{x-۱}{۲+۲x}$$

$$b)\ \ (g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g\left(\frac{۱}{x+۲}\right)=\frac{۴}{\frac{۱}{x+۲}-۱}=\frac{۴}{\frac{۱-x-۲}{x+۲}}=\frac{۴}{\frac{-x-۱}{x+۲}}=\frac{۴(x+۲)}{-x-۱}$$

$$c)\ \ (f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big)=f\left(\frac{۱}{x+۲}\right)=\frac{۱}{\frac{۱}{x+۲}+۲}=\frac{۱}{\frac{۱+۲x+۴}{x+۲}}=\frac{x+۲}{۲x+۵}$$

$$d)\ \ (g\circ g)(x)=g\big(g(x)\big)=g\left(\frac{۴}{x-۱}\right)=\frac{۴}{\frac{۴}{x-۱}-۱}=\frac{۴}{\frac{۴-x+۱}{x-۱}}=\frac{۴(x-۱)}{۵-x}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۵ – نشان دادن این که دو تابع مرکب مساوی هستند

Showing That Two Composite Functions Are Equal

اگر $f(x) = ۳x - ۴$ و $g(x) = \frac{۱}{۳}(x + ۴)$ باشد ، نشان دهید که رابطه زیر برای کلیه مقادیر x بر قرار است.

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پاسخ

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x + ۴}{۳}\right) = ۳\left(\frac{x + ۴}{۳}\right) - ۴ = x$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(۳x - ۴\big) = \frac{۱}{۳}\big[\big(۳x - ۴\big) + ۴\big] = \frac{۱}{۳}\big(۳x\big) = x$$

پس $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ است.

مثال ۶ – پیدا کردن اجزا یک تابع مرکب Finding the Component of a Composite Function

دو تابع f و g پیدا کنید بطوری که $f \circ g = H$ اگر $H = \left(x^۲ + ۱\right)^{۵۰}$ باشد.

پاسخ

تابع H عبارت $x^۲ + ۱$ را می گیرد و به توان ۵۰ می رساند. پس برای تجزیه کردن Decompose H می توان گفت $g(x) = x^۲ + ۱$ و $f(x) = x^{۵۰}$ پس

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(x^۲ + ۱\right) = \left(x^۲ + ۱\right)^{۵۰} = H$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۷ –

دو تابع f و g پیدا کنید بطوری که $f \circ g = H$ اگر $H = \frac{۱}{x+۱}$ باشد.

پاسخ

می توان گفت $g(x) = x + ۱$ و $f(x) = \frac{۱}{x}$ پس

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(x + ۱\big) = \frac{۱}{x + ۱} = H$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۱۲

در تمرینات ۴-۱ برای توابع f و g توابع زیر را پیدا کنید و دامنه هر کدام را مشخص نمائید.

$a)\ f+g \qquad b)\ f-g \qquad c)\ f\cdot g \qquad d)\ \frac{f}{g}$

۱) $f(x)=۳x+۴; \quad g(x)=۲x-۳$

۲) $f(x)=۲x+۱; \quad g(x)=۳x-۲$

۳) $f(x)=\sqrt{x-۲}; \quad g(x)=\sqrt{۴-x}$

۴) $f(x)=\frac{۲x+۳}{۳x-۲}; \quad g(x)=\frac{۴x}{۳x-۲}$

۵ – اگر $f(x)=۳x+۱$ و $(f+g)(x)=۶-\frac{۱}{۲}x$ باشد ، تابع g را پیدا کنید.

۶ – اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+۱}{x^۲-x}$ باشد ، تابع g را پیدا کنید.

در تمرینات ۹-۷ برای توابع داده شده f و g مقادیر زیر را پیدا کنید.

$a)\ (f\circ g)(۴) \qquad b)\ (g\circ f)(۲) \qquad c)\ (f\circ f)(۱) \qquad d)\ (g\circ g)(۰)$

۷) $f(x)=۲x; \quad g(x)=۳x^۲+۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $f(x) = ۳x + ۲ \qquad g(x) = ۲x^{۲} - ۱$

۹) $۴x^{۲} - ۳ \qquad g(x) = ۳ - \frac{۱}{۲}x^{۲}$

در تمرینات ۱۲ – ۱۰ دامنه تابع مرکب $f \circ g$ را پیدا کنید.

۱۰) $f(x) = \frac{۳}{x - ۱}; \qquad g(x) = \frac{۲}{x}$

۱۱) $f(x) = \frac{۱}{x + ۳}\ ; \qquad g(x) = \frac{-۲}{x}$

۱۲) $f(x) = \frac{x}{x - ۱} \qquad g(x) = \frac{-۴}{x}$

در تمرینات ۱۵ – ۱۳ برای توابع داده شده f و g توابع زیر را پیدا کنید.

$a)\ f \circ g \qquad b)\ g \circ f \qquad c)\ f \circ f \qquad d)\ g \circ g$

۱۳) $f(x) = ۲x + ۳\ ; \qquad g(x) = ۳x$

۱۴) $f(x) = -x\ ; \qquad g(x) = ۲x - ۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵) $f(x) = ۳x + ۱ \qquad g(x) = x^{۲}$

برای تمرینات ۱۷ – ۱۶ توابع f و g را پیدا کنید بطوری که $f \circ g = H$ باشد.

۱۶) $H = (۲x + ۳)^{۴}$

۱۷) $H = \sqrt{x^{۲} + ۱}$

۱۸ – سطح جانبی یک بالون هوای گرم مطابق تساوی زیر بدست می آید. (برحسب متر مربع)

$$S(r) = ۴\pi r^{۲}$$

در فرمول بالا r شعاع بالون برحسب متر است. اگر شعاع بالون در طول زمان t طبق تساوی زیر

$$r(t) = \frac{۲}{۳}t^{۳} \quad , t \geq ۰$$

زیاد شود ، فرمول سطح جانبی بالون را بر حسب تابع زمان t پیدا کنید. اینجا زمان بر حسب ثانیه است.

۱۹ - حجم بالون هوای گرم مساله شماره ۱۸ طبق تساوی زیر بدست می آید.

$$V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

اگر شعاع r همان تابع مساله شماره ۱۸ باشد ، حجم بالون را بر حسب تابع زمان t پیدا کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۷.۱۲

در تمرینات ۴-۱ برای توابع f و g توابع زیر را پیدا کنید و دامنه هر کدام را مشخص نمائید.

$a)\ f+g \qquad b)\ f-g \qquad c)\ f\cdot g \qquad d)\ \frac{f}{g}$

۱) $f(x)=۳x+۴; \quad g(x)=۲x-۳$

پاسخ

$a)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=۳x+۴+۲x-۳=۵x+۱$

دامنه کلیه اعداد حقیقی

$b)\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)=۳x+۴-(۲x-۳)=x+۷$

دامنه کلیه اعداد حقیقی

$c)\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(۳x+۴)(۲x-۳)=x^۲-x-۱۲$

دامنه کلیه اعداد حقیقی

$d)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۳x+۴}{۲x-۳}$

دامنه $\left\{x|x\neq\frac{۳}{۲}\right\}$

۲) $f(x)=۲x+۱; \quad g(x)=۳x-۲$

$a)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=۲x+۱+۳x-۲=۵x-۱$

دامنه کلیه اعداد حقیقی

$b)\ (f-g)(x)=۲x+۱-(۳x-۲)=-x+۳$

دامنه کلیه اعداد حقیقی

$c)\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(۲x+۱)(۳x-۲)=۶x^۲-x-۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا

دامنه کلیه اعداد حقیقی

$$d)\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۲x+۱}{۳x-۲}$$

دامنه $\left\{x|x\neq \frac{۲}{۳}\right\}$

۳) $f(x)=\sqrt{x-۲};\qquad g(x)=\sqrt{۴-x}$

$$a)\quad (f+g)(x)=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۴-x}$$

دامنه $\{x|۲\leq x\leq ۴\}$

$$b)\quad (f-g)(x)=\sqrt{x-۲}-\sqrt{۴-x}$$

دامنه $\{x|۲\leq x\leq ۴\}$

$$c)\quad (f\cdot g)(x)=\left(\sqrt{x-۲}\right)\left(\sqrt{۴-x}\right)=\sqrt{-x^{۲}+۶x-۸}$$

دامنه $\{x|۲\leq x\leq ۴\}$

$$d)\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{۴-x}}=\frac{\sqrt{-۶x-۸}}{۴-x}$$

دامنه $\{x|۲\leq x< ۴\}$

۴) $f(x)=\frac{۲x+۳}{۳x-۲}\ ;\qquad g(x)=\frac{۴x}{۳x-۲}$

$$a)\quad (f+g)(x)=\frac{۲x+۳}{۳x-۲}+\frac{۴x}{۳x-۲}=\frac{۶x+۳}{۳x-۲}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

دامنه $\left\{x|x \neq \frac{۲}{۳}\right\}$

$$b)\quad (f-g)(x)=\frac{۲x+۳}{۳x-۲}-\frac{۴x}{۳x-۲}=\frac{-۲x+۳}{۳x-۲}$$

دامنه $\left\{x|x \neq \frac{۲}{۳}\right\}$

$$c)\quad (f\cdot g)(x)=\frac{۲x+۳}{۳x-۲}\times\frac{۴x}{۳x-۲}=\frac{۸x^{۲}+۱۲x}{(۳x-۲)^{۲}}$$

دامنه $\left\{x|x \neq \frac{۲}{۳}\right\}$

$$d)\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{۲x+۳}{۳x-۲}}{\frac{۴x}{۳x-۲}}=\frac{(۲x+۳)(۳x-۲)}{(۴x)(۳x-۲)}=\frac{۲x+۳}{۴x}$$

دامنه $\left\{x|x \neq ۰ \text{ ، } x \neq \frac{۲}{۳}\right\}$

۵ – اگر $f(x)=۳x+۱$ و $(f+g)(x)=۶-\frac{۱}{۲}x$ باشد ، تابع g را پیدا کنید.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

پس

$$g(x)=(f+g)(x)-f(x)=۶-\frac{۱}{۲}x-۳x-۱=۵-\frac{۷}{۲}x$$

۶ – اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+۱}{x^{۲}-x}$ باشد ، تابع g را پیدا کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

پس

$$g(x)=\frac{f(x)}{\left(\frac{f}{g}\right)(x)}=\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{x+۱}{x^{۲}-x}}=\frac{x^{۲}-x}{x(x+۱)}=\frac{x(x-۱)}{x(x+۱)}=\frac{x-۱}{x+۱}$$

در تمرینات ۹-۷ برای توابع داده شده f و g مقادیر زیر را پیدا کنید.

$\boldsymbol{a})\ (f\circ g)(۴)$ $\boldsymbol{b})\ (g\circ f)(۲)$ $\boldsymbol{c})\ (f\circ f)(۱)$ $\boldsymbol{d})\ (g\circ g)(۰)$

۷) $f(x)=۲x;\qquad g(x)=۳x^{۲}+۱$

$a)\ (f\circ g)(۴)=f\left(g(۴)\right)=f\left(۳*۴^{۲}+۱\right)=f(۴۹)=۲*۴۹=۹۸$

$b)\ (g\circ f)(۲)=g\left(f(۲)\right)=g(۴)=۳*۴^{۲}+۱=۴۹$

$c)\ (f\circ f)(۱)=f\left(f(۱)\right)=f(۲)=۴$

$d)\ (g\circ g)(۰)=g\left(g(۰)\right)=g(۱)=۴$

۸) $f(x)=۳x+۲\qquad g(x)=۲x^{۲}-۱$

$a)\ (f\circ g)(۴)=f\left(g(۴)\right)=f(۳۱)=۳*۳۱+۲=\ ۹۵$

$b)\ (g\circ f)(۲)=g\left(f(۲)\right)=g(۸)=۱۲۷$

$c)\ (f\circ f)(۱)=f\left(f(۱)\right)=f(۵)=۳(۵)+۲=۱۷$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$d)\ \ (g \circ g)(۰) = g\big(g(۰)\big) = g\big(-۱\big) = ۲ - ۱ = ۱$

۹) $۴x^{۲} - ۳$ $\qquad g(x) = ۳ - \frac{۱}{۲}x^{۲}$

$a)\ \ (f \circ g)\big(۴\big) = f\left(g\big(۴\big)\right) = f\big(-۵\big) = ۹۷$

$b)\ \ (g \circ f)\big(۲\big) = g\left(f\big(۲\big)\right) = g\big(۱۳\big) = -\frac{۱۶۳}{۲}$

$c)\ \ (f \circ f)\big(۱\big) = f\left(f\big(۱\big)\right) = f\big(۱\big) = ۱$

$d)\ \ (g \circ g)(۰) = g\big(g(۰)\big) = g\big(۳\big) = -\frac{۳}{۲}$

در تمرینات ۱۲ــ ۱۰ دامنه تابع مرکب $f \circ g$ را پیدا کنید.

۱۰) $f(x) = \frac{۳}{x - ۱}; \qquad g(x) = \frac{۲}{x}$

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

متوجه هستیم که دامنه g کلیه اعداد حقیقی است بجز صفر یعنی $\{x|x \neq ۰\}$

پس باید صفر را از دمنه $f \circ g$ مستثنی کنیم.

دامنه f کلیه عادا حقیقی است بجز یک یعنی $\{x|x \neq ۱\}$

این یعنی $g(x)$ نمی تواند عدد یک باشد. پس باید معادله زیر را حل کنیم تا ببینیم چه وقت $g(x) = ۱$ است.

$$\frac{۲}{x} = ۱$$

$$x = ۲$$

پس ۲ را هم باید مستثنی کنیم. در نتیجه دامنه $f \circ g$ شامل $\{x|x \neq ۲, x \neq ۰\}$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $f(x)=\frac{۱}{x+۳}$; $g(x)=\frac{-۲}{x}$

دامنه g کلیه اعداد حقیقی است بجز صفر یا $\{x|x\neq ۰\}$

پس صفر را باید از دامنه $f\circ g$ مستثنی کنیم.

دامنه f کلیه اعداد حقیقی است بجز -۳ و یا $\{x|x\neq -۳\}$

پس $g(x)\neq -۳$ یعنی باید تساوی زیر را حل کنیم.

$$\frac{-۲}{x}=-۳$$

$$-۳x=-۲$$

$$x=\frac{۲}{۳}$$

پس $\frac{۲}{۳}$ را هم باید مستثنی کنیم.

لذا دامنه $f\circ g$ شامل $\{x\}|x\neq ۰, x\neq \frac{۲}{۳}$ است.

۱۲) $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ $g(x)=\frac{-۴}{x}$

دامنه g شامل کلیه اعداد حقیقی است بجز صفر و یا $\{x|x\neq ۰\}$

دامنه f کلیه اعداد حقیقی است بجز یک پس $g(x)$ نباید مساوی یک باشد ،

$$\frac{-۴}{x}=۱$$

$$x=-۴$$

یعنی $g(x)$ نباید -۴ باشد ، پس دامنه $f\circ g$ شامل $\{x|x\neq ۰, x\neq -۴\}$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

در تمرینات ۱۵ – ۱۳ برای توابع داده شده f و g توابع زیر را پیدا کنید.

$a)\ f \circ g \qquad b)\ g \circ f \qquad c)\ f \circ f \qquad d)\ g \circ g$

۱۳) $f(x) = ۲x + ۳\,; \qquad g(x) = ۳x$

$a)\ f \circ g = f\big(g(x)\big) = f\big(۳x\big) = ۲\big(۳x\big) + ۳ = ۶x + ۳$

$b)\ g \circ f = g\big(f(x)\big) = g\big(۲x + ۳\big) = ۳\big(۲x + ۳\big) = ۶x + ۹$

$c)\ f \circ f = f\big(f(x)\big) = f\big(۲x + ۳\big) = ۲\big(۲x + ۳\big) + ۳ = ۴x + ۹$

$d)\ g \circ g = g\big(g(x)\big) = g\big(۳x\big) = ۳\big(۳x\big) = ۹x$

۱۴) $f(x) = -x\,; \qquad g(x) = ۲x - ۴$

$a)\ f \circ g = f\big(g(x)\big) = f\big(۲x - ۴\big) = -\big(۲x - ۴\big) = -۲x + ۴$

$b)\ g \circ f = g\big(f(x)\big) = g(-x) = -۲x - ۴$

$c)\ f \circ f = f\big(f(x)\big) = f(-x) = x$

$d)\ g \circ g = g\big(g(x)\big) = g\big(۲x - ۴\big) = ۲\big(۲x - ۴\big) - ۴ = ۴x - ۱۲$

۱۵) $f(x) = ۳x + ۱ \qquad g(x) = x^{۲}$

$a)\ f \circ g = f\big(g(x)\big) = f\left(x^{۲}\right) = ۳x^{۲} + ۱$

$b)\ g \circ f = g\big(f(x)\big) = g\big(۳x + ۱\big) = \big(۳x + ۱\big)^{۲} = ۹x^{۲} + ۶x + ۱$

$c)\ f \circ f = f\big(f(x)\big) = f\big(۳x + ۱\big) = ۳\big(۳x + ۱\big) + ۱ = ۹x + ۴$

$d)\ g \circ g = g\big(g(x)\big) = g\left(x^{۲}\right) = \left(x^{۲}\right)^{۲} = x^{۴}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای تمرینات ۱۷ – ۱۶ توابع f و g را پیدا کنید بطوری که $f \circ g = H$ باشد.

۱۶) $H = (۲x + ۳)^{۴}$

$g(x) = ۲x + ۳$

$f(x) = x^{۴}$

۱۷) $H = \sqrt{x^{۲} + ۱}$

$g(x) = x^{۲} + ۱$

$f(x) = \sqrt{x}$

۱۸ – سطح جانبی یک بالون هوای گرم مطابق تساوی زیر بدست می آید. (برحسب متر مربع)

$$S(r) = ۴\pi r^{۲}$$

در فرمول بالا r شعاع بالون برحسب متر است. اگر شعاع بالون در طول زمان t طبق تساوی زیر

$$r(t) = \frac{۲}{۳}t^{۳} \quad , t \geq ۰$$

زیاد شود ، فرمول سطح جانبی بالون را بر حسب تابع زمان t پیدا کنید. اینجا زمان بر حسب ثانیه است.

پاسخ

$S(r) = ۴\pi r^{۲}$

$r(t) = \frac{۲}{۳}t^{۳}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(S \circ r) = S\big(r(t)\big) = S\left(\frac{۲}{۳}t^{۳}\right) = ۴\ \pi \left(\frac{۲}{۳}t^{۳}\right)^{۲} = ۴\ \pi\ \frac{۴}{۹}t^{۶} = \frac{۱۶}{۹}\ \pi\ \ t^{۶}$$

۱۹ - حجم بالون هوای گرم مساله شماره ۱۸ طبق تساوی زیر بدست می آید.

$$V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

اگر شعاع r همان تابع مساله شماره ۱۸ باشد ، حجم بالون را بر حسب تابع زمان t پیدا کنید.

$$V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

$$r(t) = \frac{۲}{۳}t^{۳}$$

$$(V \circ r) = V\big(r(t)\big) = V\big(r(t)\big) = V\left(\frac{۲}{۳}t^{۳}\right) = \frac{۴}{۳}\ \pi \left(\frac{۲}{۳}t^{۳}\right)^{۳} = \frac{۴}{۳}\ \pi\ \frac{۸}{۲۷}t^{۹} = \frac{۳۲}{۸۱}\ \pi\ \ t^{۹}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۷.۱۳ روش های رسم نمودار - تبدیل Graphing Techniques : Transformations

در مورد نمودار سهمی دیدیم که چگونه از یک نمودار ، نمودار دیگری ترسیم کنیم. این عمل را تبدیل می نامند. اینک اینها را برای نمودار های توابع دیگر تعمیم می دهیم.

جا بجا یی های عمودی Vertical Shifts

۱ - جا بجا یی عمودی به طرف بالا Vertical Shift Up

مثال ۱– با استفاده از نمودار $f(x) = x^{۲}$ نمودار $g(x) = x^{۲} + ۳$ را رسم کنید.

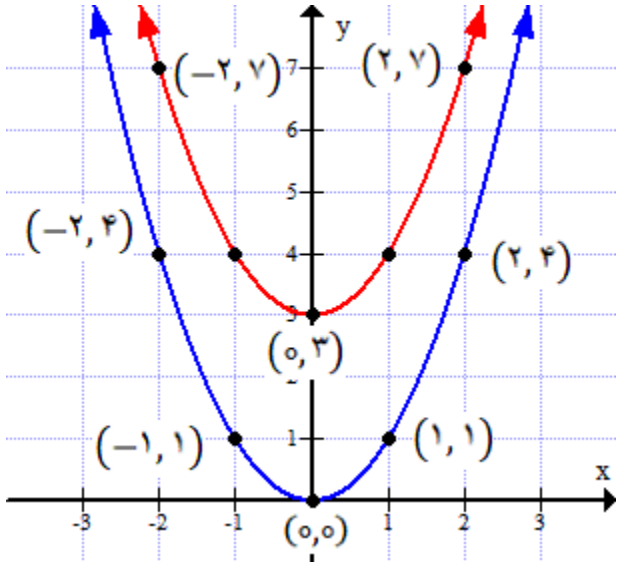
پاسخ

چند نقطه را روی نمودار پیدا می کنیم. مثلا وقتی که $x = ۰$ است ، $y = f(۰) = ۰$ و $y = g(۰) = ۳$

وقتی که $x = ۱$ است ، $y = f(۱) = ۱$ و $y = g(۱) = ۴$

جدول زیر چند نقطه دیگر را روی نمودار نشان می دهد.

x	$y = f(x) = x^{۲}$	$y = g(x) = x^{۲} + ۳$
-۲	۴	۷
-۱	۱	۴
۰	۰	۳
۱	۱	۴
۲	۴	۷



دانلود از سایت ریاضی سرا

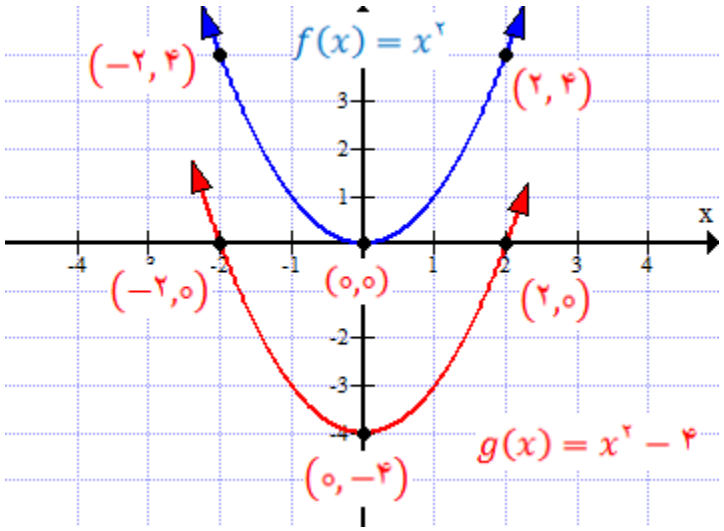
اگر یک عدد حقیقی k به طرف راست یک تابع $y = f(x)$ اضافه شود ،نمودار تابع جدید $y = f(x) + k$ همان نمودار f است که k واحدعمودی جابجا شده باشد. اگر $k > ۰$ به طرف بالا و اگر $k < ۰$ به طرف پایین

۲- جا بجایی عمودی به طرف پایین Vertical Shift Down

مثال ۲– با استفاده از نمودار $f(x) = x^۲$ نمودار $g(x) = x^۲ - ۴$ را رسم کنید.

پاسخ جدول زیر چند نقطه را روی نمودار نشان می دهد.

x	$y = f(x) = x^۲$	$y = g(x) = x^۲ - ۴$
-۲	۴	۰
-۱	۱	-۳
۰	۰	-۴
۱	۱	-۳
۲	۴	۰



جا بجا یی های افقی Horizontal Shifts

۱ - جا بجا یی افقی به طرف راست Horizontal Shift to the Right

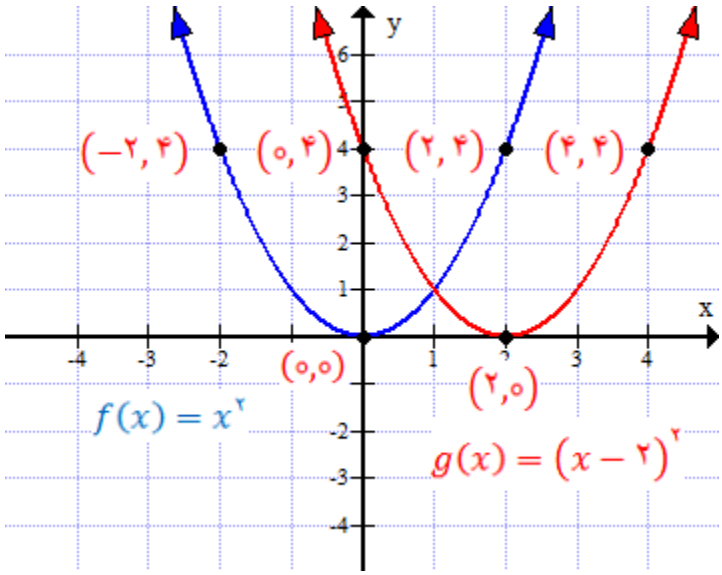
مثال ۳ - با استفاده از نمودار $f(x) = x^۲$ نمودار $g(x) = (x - ۲)^۲$ را رسم کنید.

جدول زیر چند نقطه را روی نمودار نشان می دهد. ملاحظه می کنید وقتی که $f(x) = ۰$ است ، پس $x = ۰$ و وقتی که $g(x) = ۰$ است ، پس $x = ۲$ و همچنین وقتی که $f(x) = ۴$ پس $x = -۲$ یا $x = ۲$ و وقتی که

دانلود از سایت ریاضی سرا

$g(x) = ۴$ آنوقت $x = ۰$ یا $x = ۴$ پس نتیجه می گیریم که نمودار g مانند نمودار f است جز این که دو واحد به طرف راست جابجا شده است.

x	$y = f(x) = x^۲$	$y = g(x) = (x-۲)^۲$
-۲	۴	۱۶
۰	۰	۴
۲	۴	۰
۴	۱۶	۴

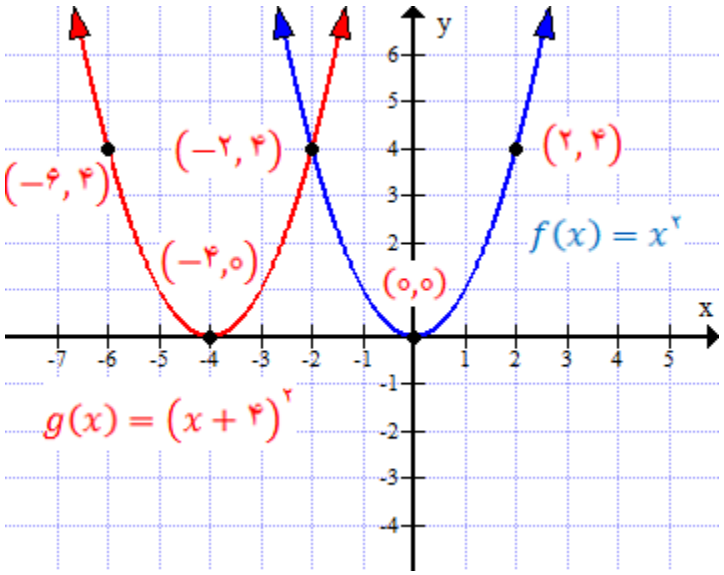


نمودار $y = f(x-h)$ مانند نمودار $y = f(x)$ است که h واحد، افقی جابجا شده باشد. اگر $h > ۰$ به طرف راست و اگر $h < ۰$ به طرف چپ.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲ – جابجایی افقی به سمت چپ Horizontal Shift to the Left

مثال ۴ - با استفاده از نمودار $f(x) = x^{۲}$ **نمودار** $g(x) = (x+۴)^{۲}$ **را رسم کنید.**



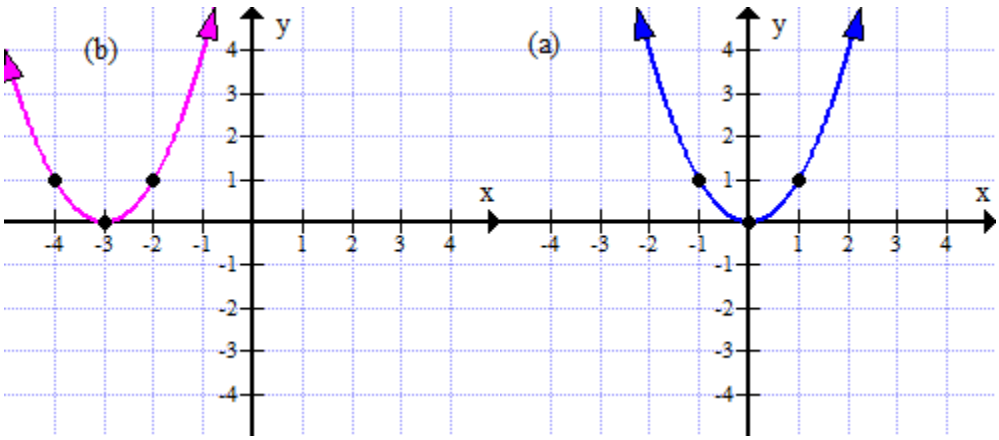
تلفیق کردن جابجایی های عمودی و افقی Combining Vertical and Horizontal Shifts

مثال ۵- نمودار $f(x) = (x+۳)^{۲} - ۵$ **را رسم کنید.**

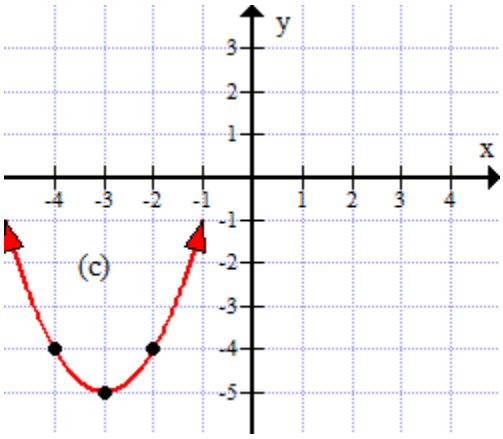
پاسخ –این تابع را قدم به قدم رسم می کنیم. ابتدا نمودار $y = x^{۲}$ را رسم می کنیم. نمودار (a)

سپس نمودار $y = (x+۳)^{۲}$ را رسم می کنیم. نمودار (b)

و در نهایت ، نمودار $f(x) = (x+۳)^{۲} - ۵$ نمودار (c)



دانلود از سایت ریاضی سرا



فشردگی و کشش یا انقباض و انبساط Compression and Stretch

انبساط عمودی Vertica Stretch

مثال ۶ – با استفاده از نمودارتابع $f(x) = |x|$ نمودار $g(x) = ۲|x|$ را رسم کنید.

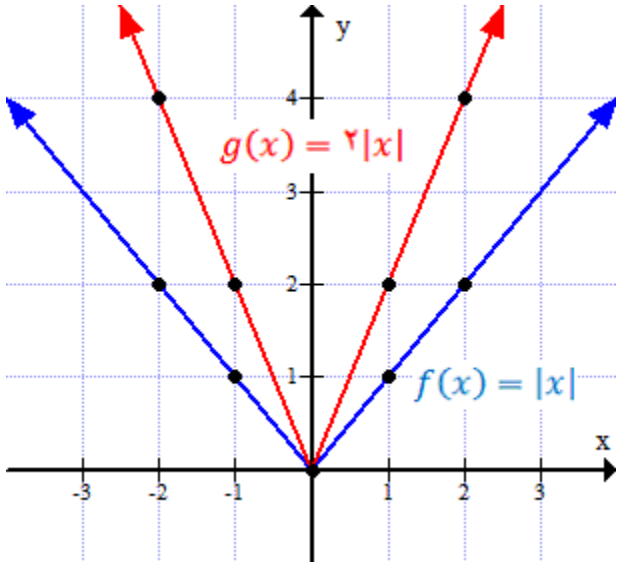
پاسخ

برای اینکه رابطه بین f و g را ببینید ، یک جدول می سازیم و نقاطی را روی هر دو نمودار در آن وارد می کنیم.

x	$y = f(x) = \|x\|$	$y = g(x) = ۲\|x\|$
۲−	۲	۴
۱−	۱	۲
۰	۰	۰
۱	۱	۲
۲	۲	۴

ملاحظه می کنید که برای هر x مختصات y نمودار g دو برابر مختصات y مربوطه روی نمودار f است. یعنی نمودار $f(x) = |x|$ بطور عمودی با ضریب دو ، منقبض شده است. به این معنی که از نقطه $(۱,۱)$ به نقطه $(۱,۲)$ می رسیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا



انقباض عمودی Vertical Compression

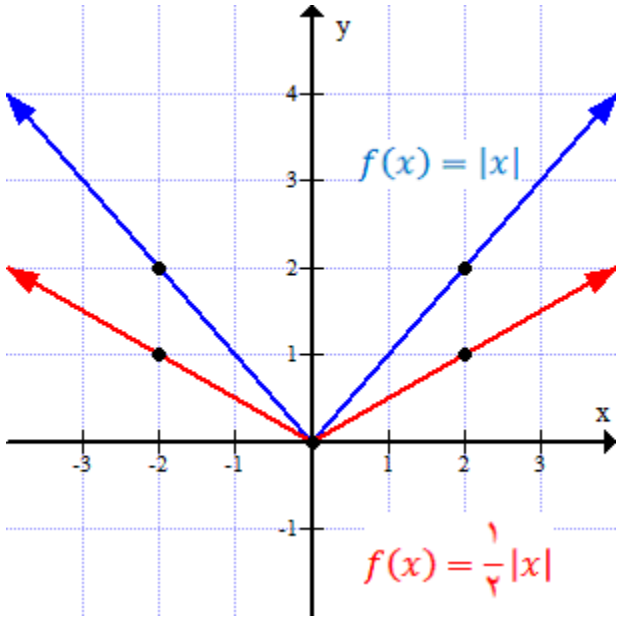
مثال ۷ – با استفاده از نمودار $f(x) = |x|$ نمودار $g(x) = \frac{۱}{۲}|x|$ را رسم کنید.

پاسخ

برای هر x مختصات y یک نقطه روی نمودار g نصف مختصات y مربوطه روی نمودار f است. یعنی نمودار $f(x) = |x|$ بطور عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض شده است. به عبارت دیگر از نقطه $(۲,۲)$ به نقطه $(۲,۱)$ میرسیم.

x	$y = f(x) = \|x\|$	$y = g(x) = ۲\|x\|$
-۲	۲	۱
-۱	۱	$\frac{۱}{۲}$
۰	۰	۰
۱	۱	$\frac{۱}{۲}$
۲	۲	۱

دانلود از سایت ریاضی سرا



هنگامی که طرف راست یک تابع $y = f(x)$ در یک عدد مثبت مانند a ضرب می شود ، نمودار تابع جدید $y = af(x)$ با ضرب کردن هر کدام از مختصات y تابع $y = f(x)$ در a بدست می آید.

اگر $۰ < a < ۱$ باشد انقباض عمودی و اگر $a > ۱$ باشد انبساط عمودی خواهیم داشت.

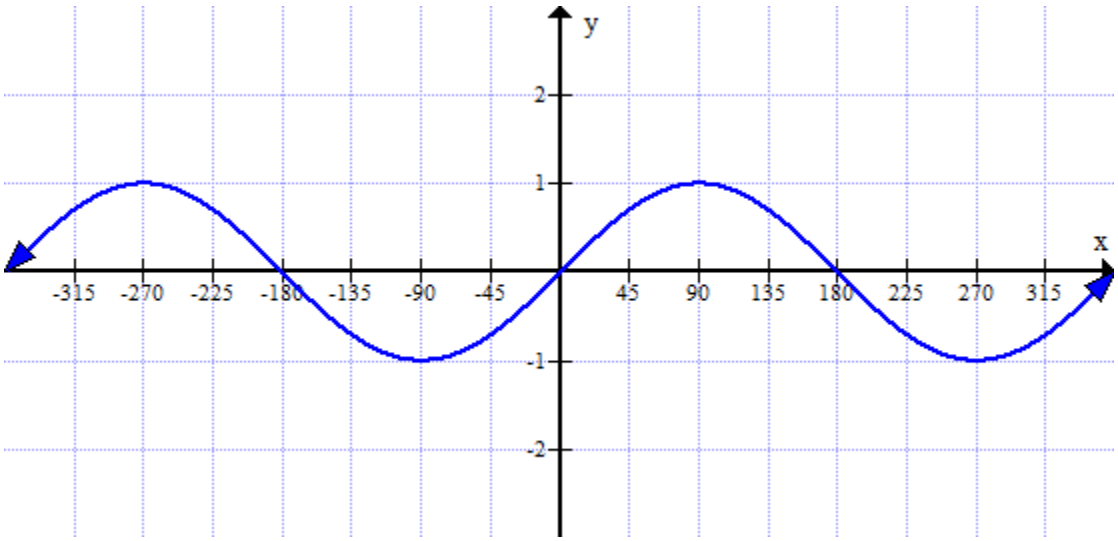
انقباض و انبساط افقی Horizontal Compression and Stretch

اگر شناسه x یک تابع مانند $y = f(x)$ در یک عدد مثبت مانند a ضرب شود ، نمودار تابع جدید یعنی $y = f(ax)$ با ضرب کردن هر کدام از مختصات x تابع $y = f(x)$ در $\frac{۱}{a}$ بدست می آید. اگر $a > ۱$ باشد ، انقباض افقی و اگر $۰ < a < ۱$ باشد ، انبساط افقی خواهیم داشت.

دانلود از سایت ریاضی سرا

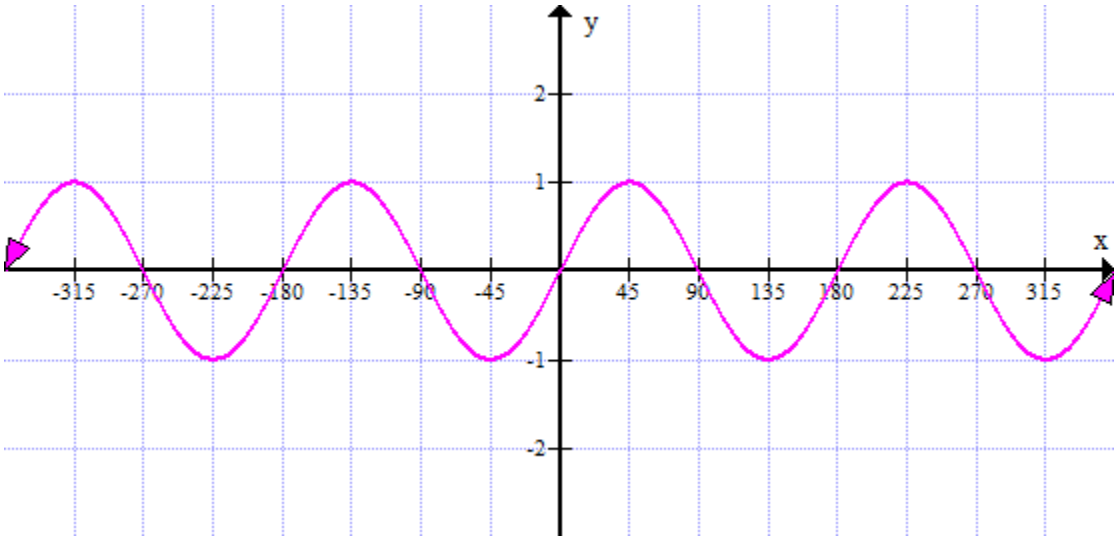
مثال ۸ – در ذیل سه نمودار ملاحظه می کنید.

$a)\ \ y = f(x)$



$b)\ \ y = f(۲x)$

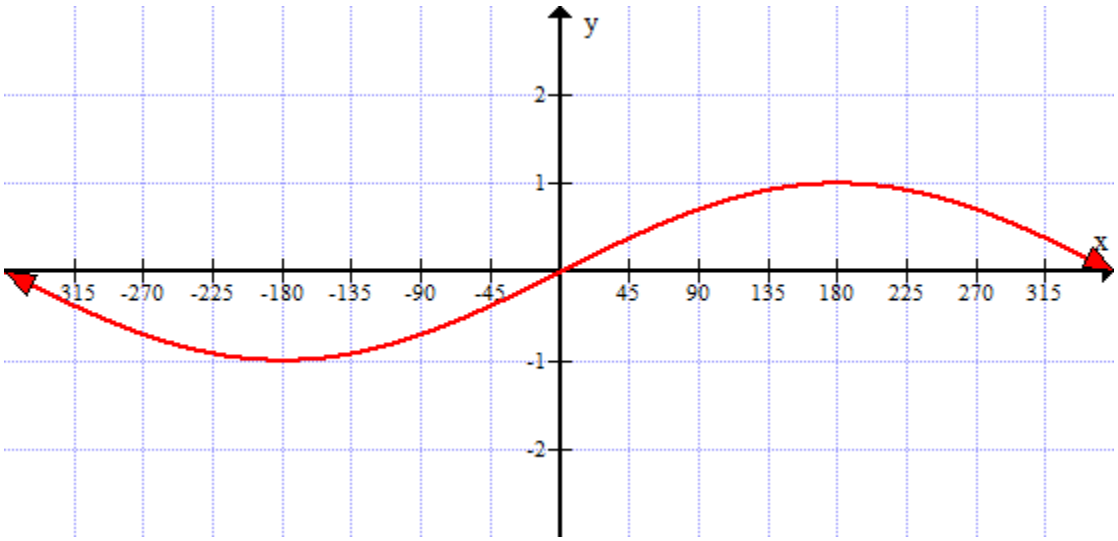
انقباض افقی



دانلود از سایت ریاضی سرا

$c)\quad y = f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$

انبساط افقی



- انعکاس گرد محور x **Reflection about the x-axis**

مثال ۹– با استفاده از نمودار $f(x) = x^۲$ نمودار $f(x) = -x^۲$ را رسم کنید.

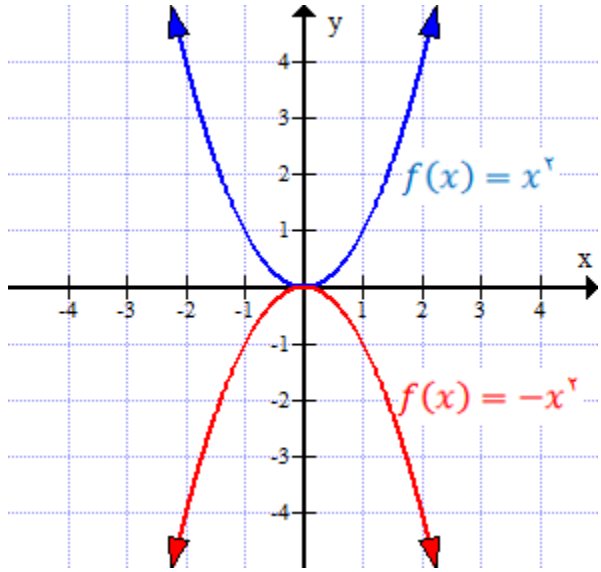
پاسخ

به جدول زیر نگاه کنید.

x	$y = f(x) = x^۲$	$y = f(x) = -x^۲$
۲–	۴	۴–
۱–	۱	۱–
۰	۰	۰
۱	۱	۱–
۲	۴	۴–

ملاحظه می کنید که مختصات y هر نقطه تغییر کرده ولی مختصات x آن نقاط تغییر نکرده است. این هم نمودار :

دانلود از سایت ریاضی سرا



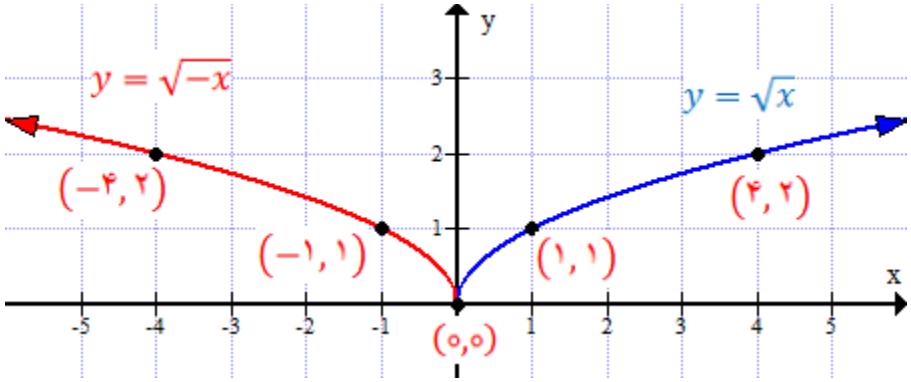
اگر طرف راست تابع $y = f(x)$ در ۱− ضرب شود ، نمودار تابع جدید یعنی $y = -f(x)$ انعکاس تابع $y = f(x)$ است گرد محور x

انعکاس گرد محور y Reflection about the y-axis

مثال ۱۰ − نمودار تابع $f(x) = \sqrt{-x}$ را رسم کنید.

پاسخ

ملاحظه می کنید که دامنه f شامل کلیه اعداد حقیقی است بطوری که $-x \geq ۰$ و یا $x \leq ۰$ باشد. برای بدست آوردن نمودار $f(x) = \sqrt{-x}$ با نمودار $y = \sqrt{x}$ شروع می کنیم. همان طور که در نمودار زیر ملاحظه می کنید ، برای هر نقطه (x, y) روی نمودار $y = \sqrt{x}$ نقطه $(-x, y)$ روی نمودار $y = \sqrt{-x}$ قرار دارد. در نتیجه ، نمودار $y = \sqrt{-x}$ با انعکاس نمودار $y = \sqrt{x}$ حول محور y بدست می آوریم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را بدانیم ، نمودار تابع جدید $y = f(-x)$ انعکاس نمودار تابع $y = f(x)$ است گرد محور y

مثال ۱۱ – تابعی را که در نهایت در نتیجه تغییرات زیر ، روی تابع $y = |x|$ بدست می آید پیدا کنید.

$a)$ دو واحد جابجائی به طرف چپ

$b)$ سه واحد جابجائی به طرف بالا

$c)$ y انعکاس گرد محور

پاسخ

$a)\ \ y = |x + ۲|$

$b)\ \ y = |x + ۲| + ۳$

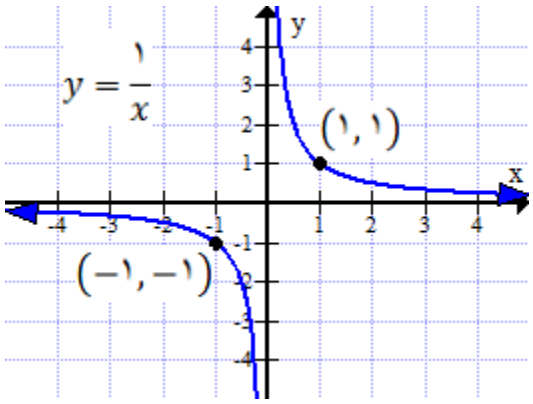
$c)\ \ y = |-x + ۲| + ۳$

مثال ۱۲– نمودار تابع زیر را قدم به قدم رسم کنید.

$$f(x) = \frac{۳}{x - ۲} + ۱$$

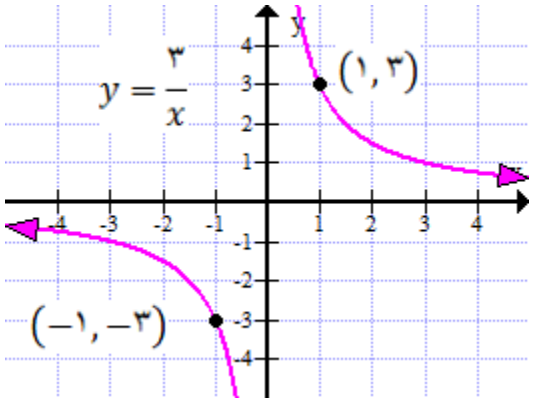
پاسخ

الف با رسم $y = \frac{۱}{x}$ شروع می کنیم.

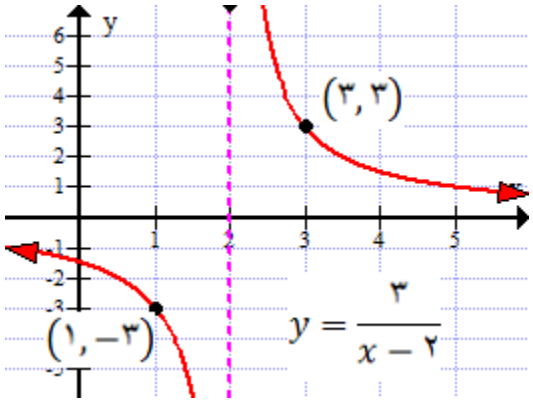


دانلود از سایت ریاضی سرا

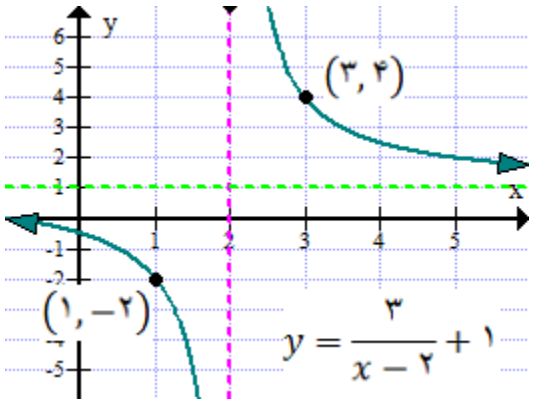
ب - $y = \frac{۳}{x}$ را رسم می کنیم. ضرب در سه. انبساط عمودی.



ج - $y = \frac{۳}{x-۲}$ بجای x می گذاریم $x - ۲$ یعنی دو واحد جا بجا یی افقی به طرف راست.



د - $y = \frac{۳}{x-۲} + ۱$ را رسم می کنیم. یک واحد جا بجا یی عمودی.



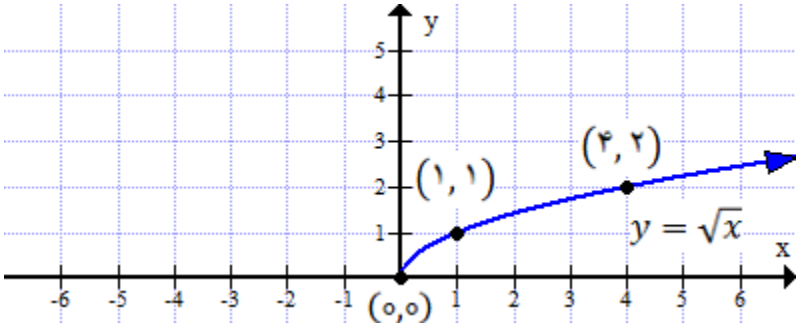
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۱۳ــ - نمودار تابع زیر را قدم به قدم رسم کنید.

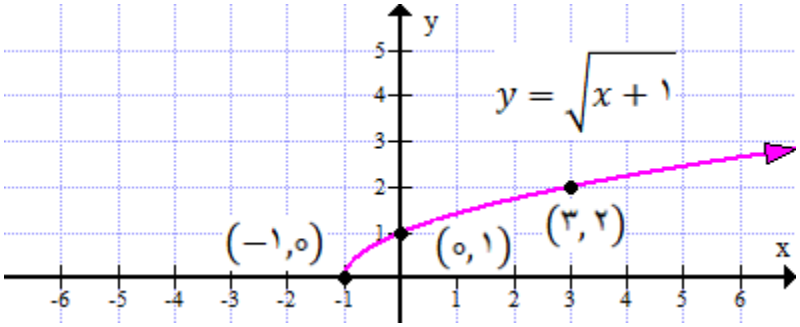
$$f(x) = \sqrt{۱ - x} + ۲$$

پاسخ

الف ــبا رسم نمودار $y = \sqrt{x}$ شروع می کنیم.

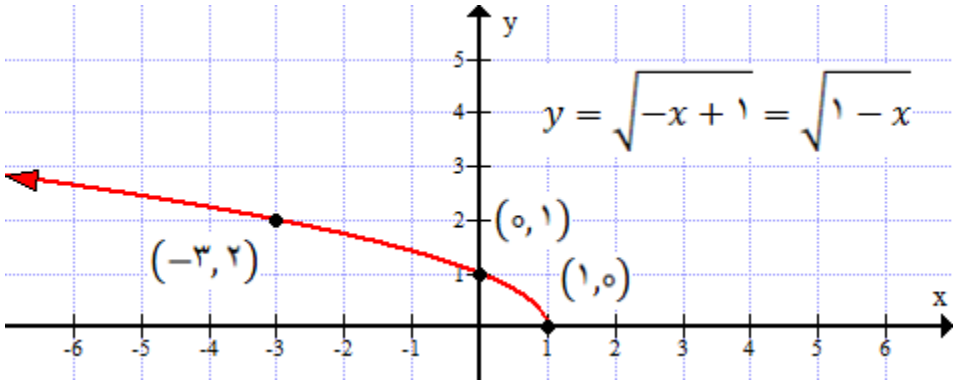


ب ــنمودار $y = \sqrt{x + ۱}$ را رسم می کنیم. بجای x می گذاریم $x + ۱$ یعنی یک واحد جا بجا یی افقی به طرف چپ.

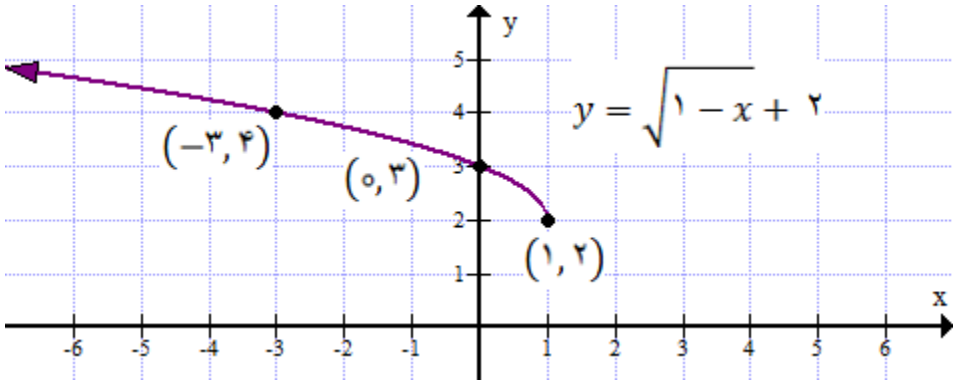


ج ــنمودار $y = \sqrt{-x + ۱} = \sqrt{۱ - x}$ را رسم می‌کنیم. یعنی بجای x می گذاریم $-x$ انعکاس گرد محور y

دانلود از سایت ریاضی سرا



د – در نهایت نمودار $y = \sqrt{۱ - x} + ۲$ را رسم می کنیم. دو اضافه می کنیم. یعنی دو واحد جا بجا یی عمودی به طرف بالا.



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۷.۱۳

برای تمرینات ۸-۱ تابعی بنویسید که نمودار آن نمودار $y = x^{۳}$ باشد ، اما

۱-چهار واحد به طرف راست جابجا شده است.

۲ – چهار واحد به طرف چپ جابجا شده است.

۳ – چهار واحد به طرف بالا جابجا شده است.

۴ - چهار واحد به طرف پایین جابجا شده است.

۵ – حول محور y انعکاس یافته است.

۶ – حول محور x انعکاس یافته است.

۷ – با ضریب چهار عمودی انبساط یافته است.

۸ - باضریب چهار افقی انبساط یافته است.

برای تمرینات ۱۲-۹ تابعی بنویسید که در نهایت نمودار آن مانند نمودار $y = \sqrt{x}$ بعد از تغییرات زیر که روی آن انجام شده است ، باشد.

۹ -

الف -دو واحد به طرف بالا جابجا شده است.

ب –حول محور x انعکاس یافته .

ج –حول محور y انعکاس یافته.

۱۰

الف -حول محور x انعکاس یافته

ب –سه واحد به طرف راست جابجا شده .

ج –دو واحد به طرف پایین جابجا شده.

۱۱ -

الف -حول محور x انعکاس یافته

ب –دو واحد به طرف بالا جابجا شده.

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –سه واحد به طرف چپ جابجا شده.

۱۲ -

الف - دو واحد به طرف بالا جابجا شده.

ب – -حول محور y انعکاس یافته

ج –سه واحد به طرف چپ جابجا شده.

۱۳ – اگر نقطه $(۳,۰)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد ، کدام یک از نقاط زیر باید روی نمودار $y = -f(x)$ باشد ؟

$a)\ (۰,۳)$ $b)\ (۰,-۳)$ $c)\ (۳,۰)$ $d)\ (-۳,۰)$

۱۴ – اگر نقطه $(۳,۰)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد ، کدام یک از نقاط زیر باید روی نمودار $y = f(-x)$ باشد؟

$a)\ (۰,۳)$ $b)\ (۰,-۳)$ $c)\ (۳,۰)$ $d)\ (-۳,۰)$

۱۵ - اگر نقطه $(۰,۳)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد ، کدام یک از نقاط زیر باید روی نمودار $y = ۲f(x)$ باشد؟

$a)\ (۰,۳)$ $b)\ (۰,۲)$ $c)\ (۰,۶)$ $d)\ (۶,۰)$

با استفاده از روش های جابجا یی ، انقباض ، انبساط ، و یا انعکاس نمودار توابع زیر را رسم کنید. با نمودار تابع پایه مثلا $y = x^۲$ شروع کنید.

۱۶) $f(x) = x^۲ - ۱$

۱۷) $f(x) = x^۲ + ۴$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸) $f(x) = x^{۳} + ۱$

۱۹) $f(x) = x^{۳} - ۱$

۲۰) $f(x) = \sqrt{x - ۲}$

۲۱) $f(x) = \sqrt{x + ۱}$

۲۲) $f(x) = (x - ۱)^{۳} + ۲$

۲۳) $f(x) = (x + ۲)^{۳} - ۳$

۲۴) $f(x) = \sqrt[۴]{x}$

۲۵) $f(x) = \frac{۴}{x}$

۲۶) $f(x) = -|x|$

۲۷) $f(x) = -\sqrt{x}$

۲۸) $f(x) = ۲|۱ - x|$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۷.۱۳

برای تمرینات ۸-۱ تابعی بنویسید که نمودار آن نمودار $y = x^{۳}$ باشد ، اما

۱-چهار واحد به طرف راست جابجا شده است.

$$y = (x - ۴)^{۳}$$

۲ – چهار واحد به طرف چپ جابجا شده است.

$$y = (x + ۴)^{۳}$$

۳ – چهار واحد به طرف بالا جابجا شده است.

$$y = x^{۳} + ۴$$

۴ - چهار واحد به طرف پایین جابجا شده است.

$$y = x^{۳} - ۴$$

۵ – حول محور y انعکاس یافته است.

$$y = -x^{۳}$$

۶ – حول محور x انعکاس یافته است.

$$y = -x^{۳}$$

۷ – با ضریب چهار عمودی انبساط یافته است.

$$y = ۴x^{۳}$$

۸ - باضریب چهار افقی انبساط یافته است.

$$y = \left(\frac{۱}{۴}x\right)^{۳} = \frac{۱}{۶۴}x^{۳}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

برای تمرینات ۱۲-۹ تابعی بنویسید که در نهایت نمودار آن مانند نمودار $y = \sqrt{x}$ بعد از تغییرات زیر که روی آن انجام شده است ، باشد.

۹ -

الف -دو واحد به طرف بالا جابجا شده است.

$$y = \sqrt{x} + ۲$$

ب –حول محور x انعکاس یافته .

$$y = -(\sqrt{x} + ۲)$$

ج –حول محور y انعکاس یافته.

$$y = -(\sqrt{-x} + ۲)$$

۱۰

الف -حول محور x انعکاس یافته

$$y = -\sqrt{x}$$

ب –سه واحد به طرف راست جابجا شده .

$$y = -\sqrt{x - ۳}$$

ج –دو واحد به طرف پایین جابجا شده.

$$y = -\sqrt{x - ۳} - ۲$$

۱۱ -

الف -حول محور x انعکاس یافته

$$y = -\sqrt{x}$$

ب –دو واحد به طرف بالا جابجا شده.

$$y - -\sqrt{x} + ۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –سه واحد به طرف چپ جابجا شده.

$$y = -\sqrt{x + ۳} + ۲$$

۱۲ -

الف - دو واحد به طرف بالا جابجا شده.

$$y = \sqrt{x} + ۲$$

ب – -حول محور y انعکاس یافته

$$y = \sqrt{-x} + ۲$$

ج –سه واحد به طرف چپ جابجا شده.

$$y = \sqrt{-x + ۳} + ۲$$

۱۳ – اگر نقطه $(۳,۰)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد ، کدام یک از نقاط زیر باید روی نمودار $y = -f(x)$ باشد؟

$a)\ (۰,۳)$ $b)\ (۰,-۳)$ $c)\ (۳,۰)$ $d)\ (-۳,۰)$

پاسخ

$c \quad (۳,۰)$

۱۴ – اگر نقطه $(۳,۰)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد ، کدام یک از نقاط زیر باید روی نمودار $y = f(-x)$ باشد

$a)\ (۰,۳)$ $b)\ (۰,-۳)$ $c)\ (۳,۰)$ $d)\ (-۳,۰)$

پاسخ

$d)\ (-۳,۰)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵ - اگر نقطه $(۰,۳)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد ، کدام یک از نقاط زیر باید روی نمودار $y = ۲f(x)$ باشد؟

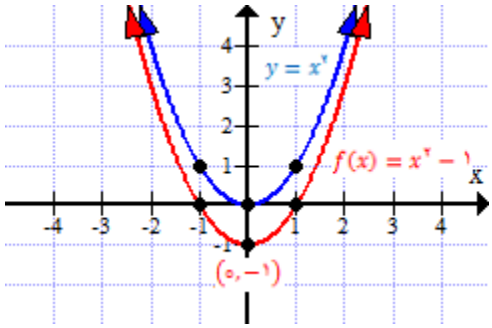
$a)\ (۰,۳)$ $b)\ (۰,۲)$ $c)\ (۰,۶)$ $d)\ (۶,۰)$

پاسخ

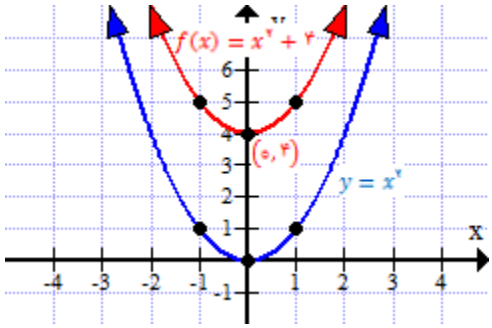
$c)\ (۰,۶)$

با استفاده از روش های جابجا یی ، انقباض ، انبساط ، و یا انعکاس نمودار توابع زیر را رسم کنید. با نمودار تابع پایه مثلا $y = x^۲$ شروع کنید.

۱۶) $f(x) = x^۲ - ۱$

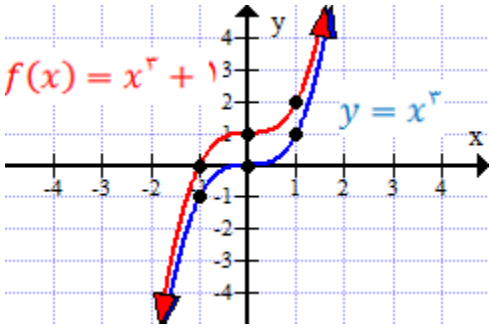


۱۷) $f(x) = x^۲ + ۴$

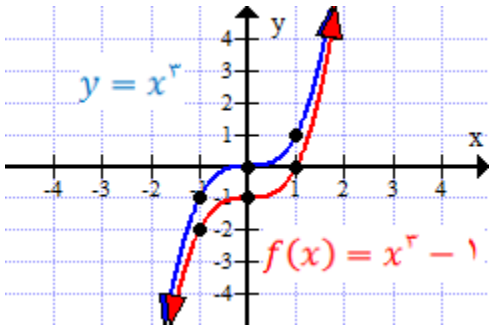


دانلود از سایت ریاضی سرا

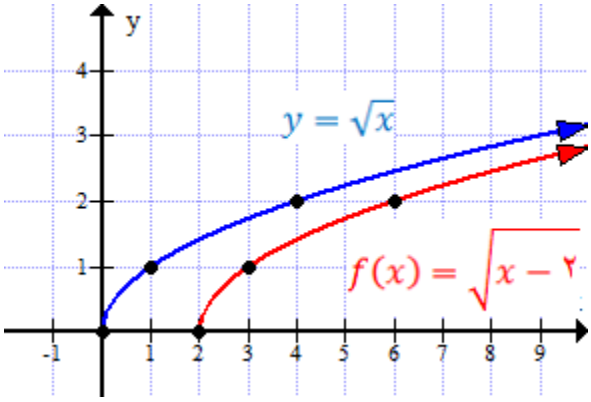
۱۸) $f(x) = x^{۳} + ۱$



۱۹) $f(x) = x^{۳} - ۱$

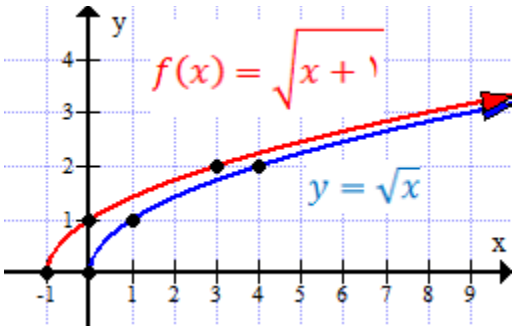


۲۰) $f(x) = \sqrt{x - ۲}$

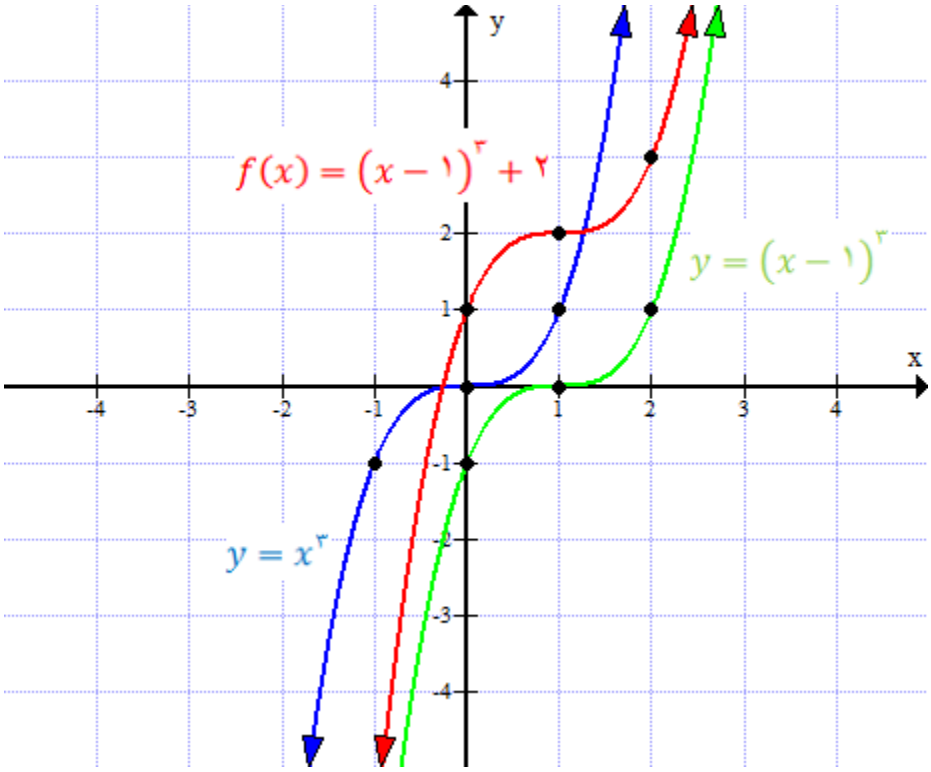


دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۱) $f(x) = \sqrt{x + ۱}$

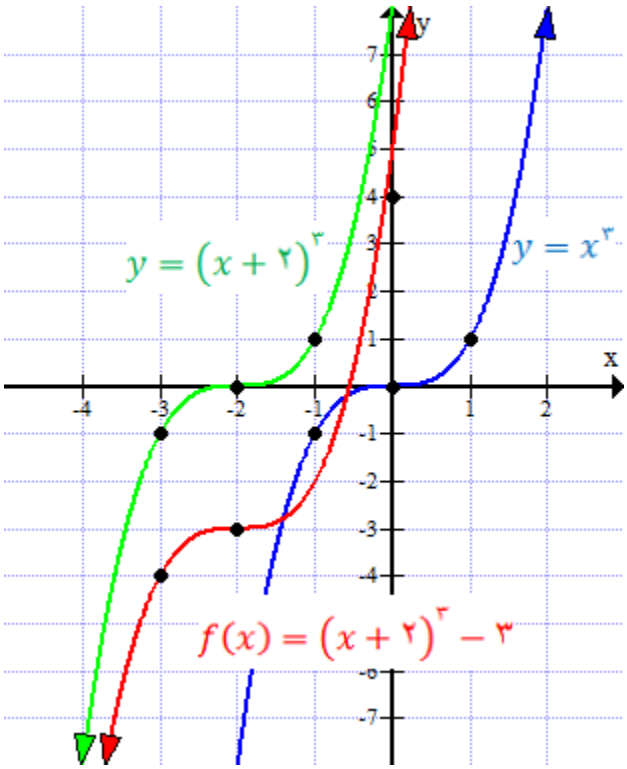


۲۲) $f(x) = (x - ۱)^۳ + ۲$



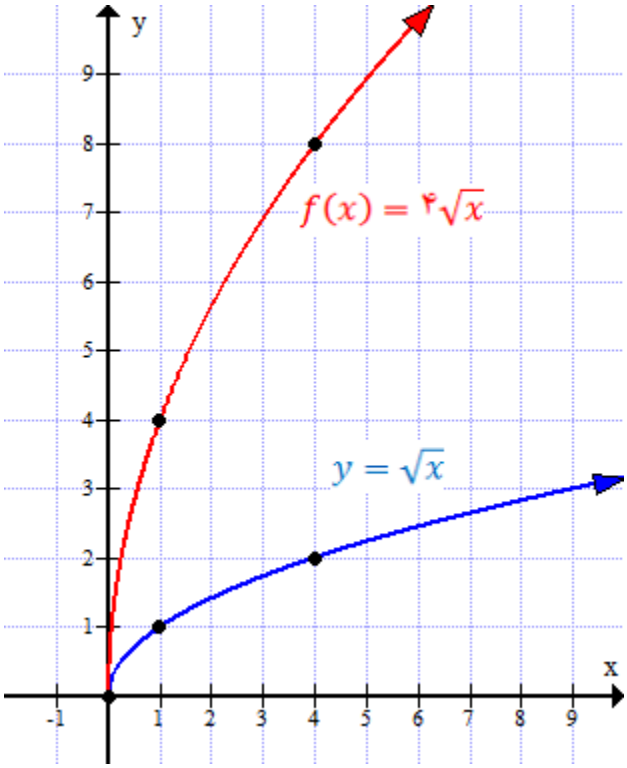
دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳) $f(x) = (x+۲)^{۳} - ۳$

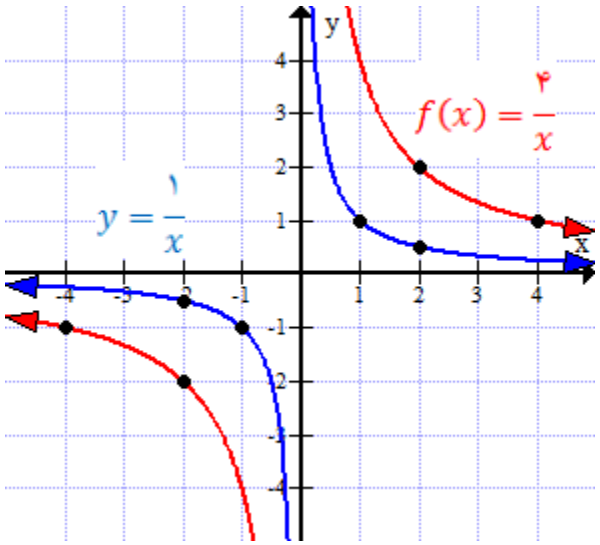


دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۴) $f(x) = ۴\sqrt{x}$

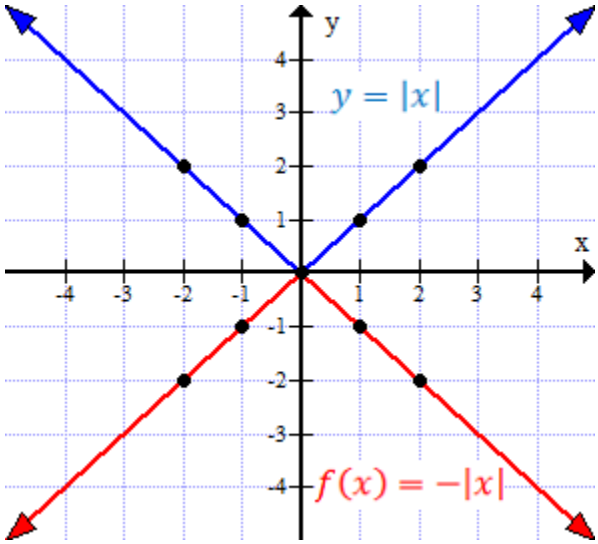


۲۵) $f(x) = \frac{۴}{x}$

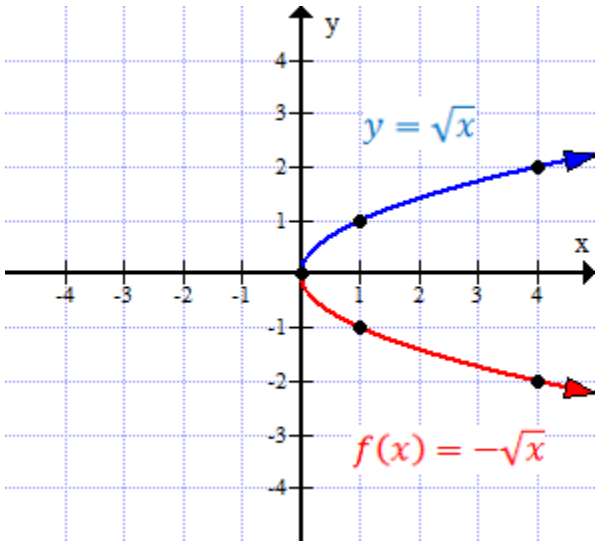


دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۶) $f(x) = -|x|$

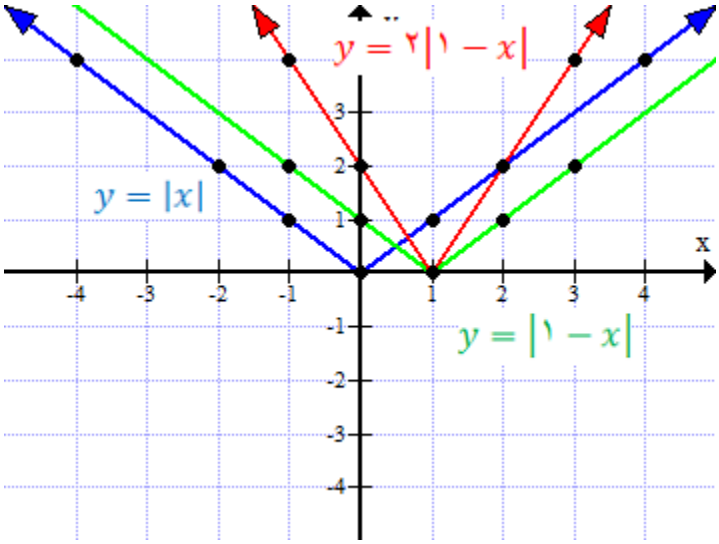


۲۷) $f(x) = -\sqrt{x}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۸) $f(x) = ۲|۱ - x|$



دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)