

فصل هشتم

دستگاه های معادله ها Systems of Equations

۸.۱ - حل دستگاه های معادله های خطی دو مجهولی

Solving Systems of Linear Equations in Two Variables

دو معادله خطی یا بیشتر تشکیل یک دستگاه معادله های خطی می دهند. چند مثال دستگاه های معادله های خطی دو مجهولی در ذیل مشاهده می کنید.

$$\begin{cases} x - 2y = -7 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ x + \frac{y}{2} = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 = 2y + 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

آیا یک دو گانه مرتب جواب یک دستگاه معادله دو مجهولی است

Determining Whether an Ordered pair is a Solution of a system of linear Equations in Two variables

دو گانه مرتب Ordered Pair

در اینجا دو گانه مرتب منظور این است که عدد اول مقدار x است و عدد دوم مقدار y

مثلا وقتی که می نویسیم $(2, 3)$ منظور ما این است که $y = 3$ و $x = 2$

جواب یک معادله دو مجهولی یک دو گانه مرتب (x, y) است که معادله را بر قرار کند. جواب یک دستگاه دو معادله دو مجهولی یک دو گانه مرتب (x, y) است که هر دو معادله را بر قرار کند. وقتی می گوییم معادله را بر قرار کند، یعنی اگر آن مقدار را در معادله بجای مجهول بگذاریم، یک معادله صحیح بدست آید.

مثال ۱

آیا دو گانه مرتب $(-1, 1)$ یک جواب دستگاه زیر است؟

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

حل

در دستگاه بالا بجای x می گذاریم -1 و بجای y می گذاریم 1

$$\begin{cases} -(-1) + 1 = 2 \\ 2(-1) - 1 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + 1 = 2 \\ -2 - 1 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2 \\ -3 = -3 \end{cases}$$

پس دو گانه مرتب $(-1, 1)$ جواب دستگاه بالا است.

مثال ۲

آیا دو گانه مرتب $(-2, 3)$ یک جواب دستگاه زیر است؟

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

حل

در دستگاه بالا بجای x می گذاریم -2 و بجای y می گذاریم 3

$$\begin{cases} 5(-2) + 3(3) = -1 \\ -2 - (3) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -10 + 9 = -1 \\ -2 - 3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = -1 \\ -5 = 1 \end{cases}$$

چون دو گانه مرتب $(-2, 3)$ در هر دو معادله برقرار نیست، پس جواب دستگاه نیست.

حل یک دستگاه از طریق رسم نمودار Solving a System by Graphing

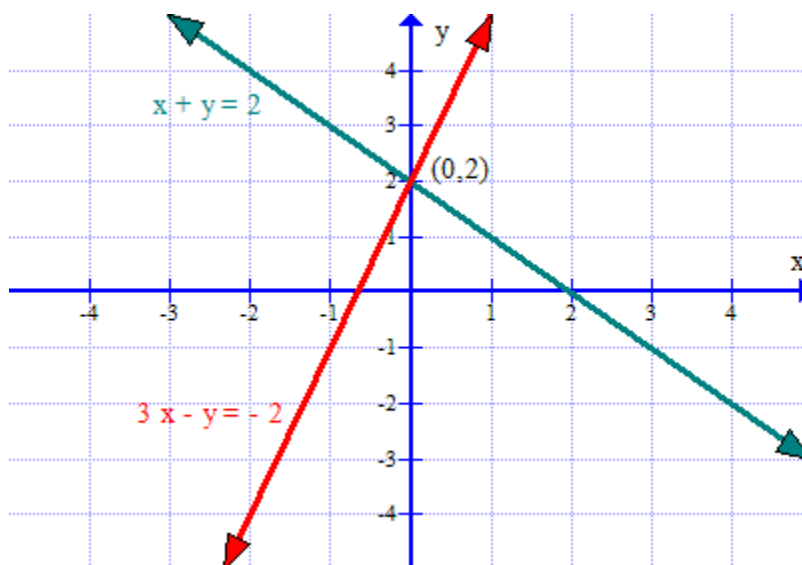
نمودار هر معادله خطی در یک دستگاه، یک خط است. هر نقطه روی هر خط، مربوط است به یک زوج مرتب جواب آن معادله. اگر خط ها با هم برخورد کنند، نقطه تقاطع Pont of Intersection روی هر دو خط قرار دارد و مربوط می شود به زوج مرتب جواب دستگاه. به عبارت دیگر، نقطه تقاطع مربوط است به یک زوج مرتب جواب دستگاه. بنا بر این، می توانیم بجای حل دستگاه، هر کدام از معادله ها را روی یک صفحه مختصات رسم کنیم و مختصات نقطه تقاطع را پیدا کنیم.

مثال ۳

دستگاه زیر را از طریق رسم نمودار حل کنید و اگر دستگاه فقط یک جواب دارد، آنرا حدس بزنید.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

ابتدا هر یک از معادله های خطی را روی یک صفحه مختصات رسم می کنیم. ملاحظه خواهید کرد که دو خط در یک نقطه برخورد می کنند. مختصات آن نقطه $(0, 2)$ است. با قرار دادن مختصات این نقطه در هر یک از معادله ها، آنرا امتحان می کنیم.



$$x + y = 2$$

$$3x - y = -2$$

$$0 + 2 = 2$$

$$3(0) - 2 = -2$$

صحيح است $2 = 2$

صحيح است $2 = 2$

زوج مرتب $(0, 2)$ جواب دستگاه است. یک دستگاه که حد اقل یک جواب داشته باشد، مثل این دستگاه، را بی تناقض Consistent می نامند.

مثال ۴

دستگاه زیر را از طریق رسم نمودار حل کنید. اگر دستگاه فقط یک جواب داشته باشد، آنرا حدس بزنید.

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x = 2y \end{cases}$$

در شکل زیر ملاحظه می کنید که دو خط موازی هستند. اگر معادله این دو خط را به شکل شیب - تقاطع یعنی به شکل $y = mx + b$ بنویسیم خواهیم دید که شیب هر دو خط مساوی هستند.

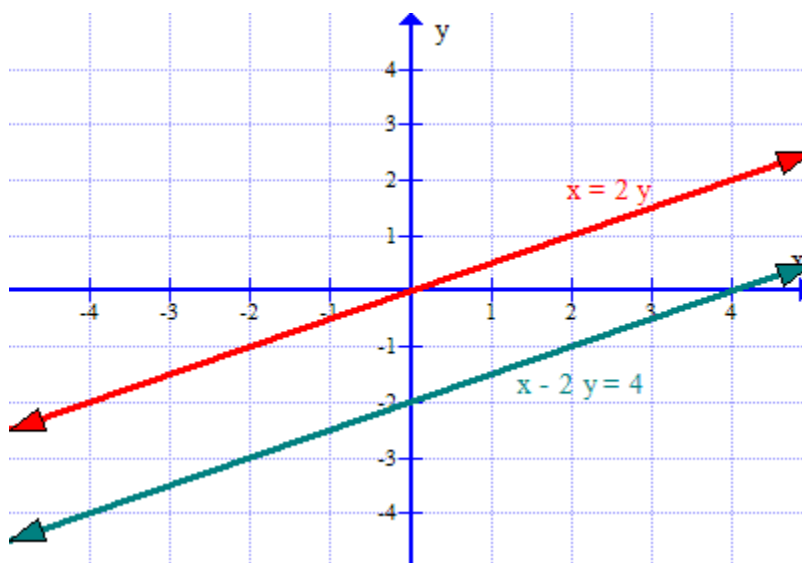
$$x - 2y = 4$$

$$x = 2y$$

$$2y = x - 4$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$



نمودار هر دو خط دارای یک شیب، یعنی $\frac{1}{2}$ است، اما نقطه تلاقی آنها با محور y متفاوت است. پس موازی هستند. بنا بر این دستگاه جوابی ندارد. چون معادله ها هیچ جواب مشترکی ندارد. یا به عبارت دیگر، نقطه برخوردی وجود ندارد. دستگاهی که هیچ جوابی ندارد را متناقض Inconsistent می نامیم.

مثال ۵

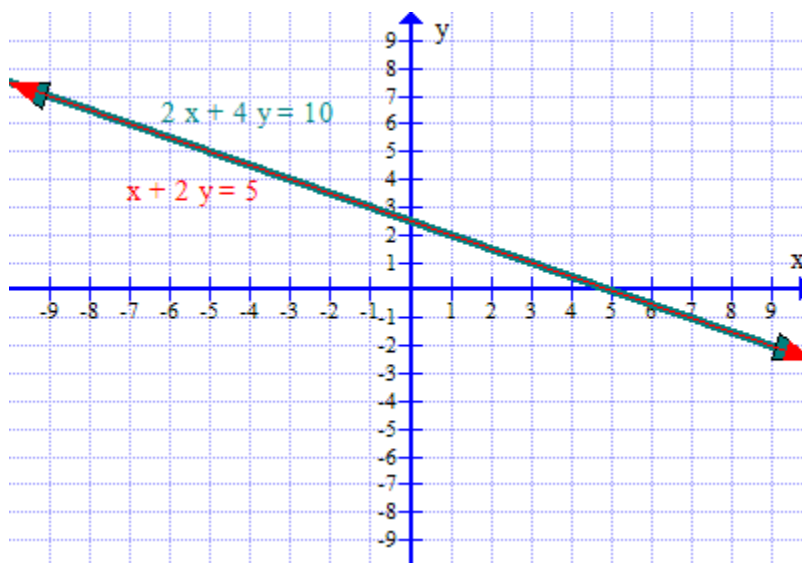
دستگاه زیر را از طریق رسم نمودار، حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

هر یک از معادله ها را رسم می کنیم. ملاحظه خواهید کرد که هر دو معادله یک خط هستند. در حقیقت اگر دو طرف معادله دوم را در ۲ ضرب کنیم، نتیجه معادله اول خواهد بود.

این یعنی معادله ها جواب های یکسان دارند. هر زوج مرتبی که یک معادله را برقرار کند، دیگری را هم برقرار می کند. این معادله ها را معادله های وابسته Dependent Equations می نامند. مجموعه جواب های این دستگاه

عبارت است از $\{(x, y) | x + 2y = 5\}$ و یا $\{(x, y) | 2x + 4y = 10\}$



حل یک دستگاه از طریق جانشینی یا جایگذاری Solving a System Using Substitution

الف - یکی از معادله ها را بر حسب یکی از متغیر ها حل می کنیم.

ب - عبارت بدست آمده برای آن متغیر را در معادله دوم قرار می دهیم.

ج - معادله بدست آمده از مرحله ب را حل می کنیم تا مقدار یکی از متغیر ها بدست آید.

د - مقداری که از مرحله ج بدست آوردیم، در معادله ای که از مرحله الف بدست آوردیم ، می گذاریم تا مقدار متغیر دیگر پیدا شود.

ه - دوگانه مرتب بدست آمده را در هر دو معادله اصلی امتحان می کنیم.

مثال - دستگاه های زیر را حل کنید.

$$۶) \begin{cases} 2x + 4y = -6 \\ x = 2y - 5 \end{cases}$$

در معادله دوم گفته می شود که x مساوی است با $2y - 5$. پس عبارت $2y - 5$ را بجای x در معادله اول می گذاریم. با این کار یک معادله یک مجهولی بدست می آوریم. آنرا حل می کنیم تا مقدار y بدست آید.

$$2x + 4y = -6$$

$$2(2y - 5) + 4y = -6$$

$$4y - 10 + 4y = -6$$

$$8y = 4$$

$$y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

برای بدست آوردن مقدار x ، در معادله اول بجای y می گذاریم $\frac{1}{2}$

$$x = 2y - 5$$

$$x = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = 1 - 5 = -4$$

پس جواب دستگاه $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ است. اگر امتحان کنیم، ملاحظه می کنیم که هر دو معادله این دستگاه برقرار است. یا به عبارت دیگر $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ شرایط هر دو معادله را برآورده می کند.

$$۷) \begin{cases} -\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

ابتدا کسر های معادله ها را حذف می کنیم. کوچک ترین مخرج معادله اول ۶ است. و کوچک ترین مخرج مشترک معادله دوم ۱۲ است.

$$\begin{cases} 6\left(-\frac{x}{6} + \frac{y}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right) \\ 12\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{6}\right) = 12\left(-\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 3y = 3 \\ 4x - 2y = -9 \end{cases}$$

معادله اول را بر حسب x حل می کنیم.

$$-x + 3y = 3$$

$$-x = -3y + 3$$

$$x = 3y - 3$$

اینک در معادله دوم بجای x می گذاریم، $3y - 3$

$$4x - 2y = -9$$

$$4(3y - 3) - 2y = -9$$

$$12y - 12 - 2y = -9$$

$$10y = 3$$

$$y = \frac{3}{10}$$

برای پیدا کردن مقدار x در معادله $x = 3y - 3$ بجای y می گذاریم $\frac{3}{10}$.

$$x = 3\left(\frac{3}{10}\right) - 3 = \frac{9}{10} - 3 = \frac{9}{10} - \frac{30}{10} = -\frac{21}{10}$$

پس جواب دستگاه دو گانه مرتب $\left(-\frac{21}{10}, \frac{3}{10}\right)$ است.

حل یک دستگاه از طریق حذف کردن Solving a System Using Elimination

یاد آوری - اگر $C = D$ و $A = B$ پس $A + C = B + D$

الف - هر یک از معادله ها را به شکل استاندارد $Ax + By = C$ بنویسید.

ب - اگر لازم باشد، یکی از معادله ها و یا هر دوی آنها در عددی ضرب کنید، تا ضریب یکی از متغیر ها در یک معادله، قرینه ضریب همان متغیر در معادله دیگر بشود.

ج - دو معادله را با هم جمع کنید.

د - مقدار یکی از متغیر ها را با حل کردن معادله بدست آمده از مرحله (ج)، بدست آورید.

ه - مقدار متغیر بدست آمده از مرحله (د) را در یکی از معادله های اصلی قرار دهید، تا مقدار متغیر دیگر پیدا شود.

و - دو گانه مرتب بدست آمده را در هر دو معادله اصلی امتحان کنید.

مثال

$$۸) \begin{cases} x - ۵y = -۱۲ \\ -x + y = ۴ \end{cases}$$

ملاحظه می کنید، که ضرایب x در هر دو معادله قرینه یک دیگر هستند، پس هر دو معادله را با هم جمع می کنیم، تا x حذف شود و یک معادله بر حسب یک متغیر y بدست آید.

$$\begin{cases} x - ۵y = -۱۲ \\ -x + y = ۴ \end{cases}$$

$$-۴y = -۸$$

$$y = ۲$$

برای بدست آوردن x بجای y در یکی از معادله های اصلی می گذاریم ۲

$$-x + y = ۴$$

$$-x + ۲ = ۴$$

$$-x = ۲$$

$$x = -۲$$

پس جواب دستگاه $(-۲, ۲)$ است.

$$۹) \begin{cases} ۳x + \frac{y}{۲} = ۲ \\ ۶x + y = ۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\left(3x + \frac{y}{2}\right) = 2(2) \\ 6x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + y = 4 \\ 6x + y = 5 \end{cases}$$

معادله اول را در ۱- ضرب می کنیم.

$$\begin{cases} -6x - y = -4 \\ 6x + y = 5 \end{cases}$$

$$0 = 1$$

ملاحظه می کنید که یک معادله غلط بدست آمد. پس این دستگاه جوابی ندارد. مجموعه جواب های این دستگاه ϕ یا $\{\}$ است. در بخش های آینده که در مورد نمایش هندسی معادله ها و توابع صحبت می کنیم، مفهوم این که دستگاه جوابی ندارد توضیح خواهیم داد. به این نوع دستگاه می گویند متناقض Inconsistent

$$۱۰) \begin{cases} 3x - 2y = 1۰ \\ 4x - 3y = ۱۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4(3x - 2y) = -4(1۰) \\ 3(4x - 3y) = 3(1۵) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x + 8y = -4۰ \\ 12x - 9y = 4۵ \end{cases}$$

$$-y = 5$$

$$y = -5$$

$$3x - 2y = 1۰$$

$$3x - 2(-5) = 1۰$$

$$3x + 10 = 10$$

$$x = 0$$

$$(0, -5)$$

$$11) \quad \begin{cases} -5x - 3y = 9 \\ 10x + 6y = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(-5x - 3y) = 2(9) \\ 10x + 6y = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x - 6y = 18 \\ 10x + 6y = -18 \end{cases}$$

$$0=0$$

معادله بدست آمده $0=0$ برای کلیه مقادیر y یا x صادق است. پس مجموعه جواب های این دستگاه

$$\{(x, y) | -5x - 3y = 9\} \quad \text{یا} \quad \{(x, y) | 10x + 6y = -18\}$$

این دستگاه بی نهایت جواب دارد. به این نوع دستگاه می گویند وابسته Dependent

تمرینات ۸.۱

مشخص کنید آیا دو گانه های داده شده برای هر دستگاه ، پاسخ آن دستگاه است .

$$۱) \quad \begin{cases} x - y = ۳ \\ ۲x - ۴y = ۸ \end{cases} \quad (۲, -۱)$$

$$۲) \quad \begin{cases} ۲x - ۳y = -۹ \\ ۴x + ۲y = -۲ \end{cases} \quad (۳, ۵)$$

دستگاه های زیر را از طریق جایگزینی حل کنید.

$$۳) \quad \begin{cases} x + y = ۱۰ \\ y = ۴x \end{cases}$$

$$۴) \quad \begin{cases} ۴x - y = ۹ \\ ۲x + ۳y = -۲۷ \end{cases}$$

$$۵) \quad \begin{cases} \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۴}y = -\frac{۱}{۴} \\ \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۴}y = ۱ \end{cases}$$

$$۶) \quad \begin{cases} \frac{x}{۳} + y = \frac{۴}{۳} \\ -x + ۲y = ۱۱ \end{cases}$$

$$۷) \begin{cases} ۲x = ۶ \\ y = ۵ - x \end{cases}$$

دستگاه های زیر را از طریق حذف حل کنید.

$$۸) \begin{cases} ۲x - ۴y = ۰ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases}$$

$$۹) \begin{cases} ۵x - ۲y = ۲۷ \\ -۳x + ۵y = ۱۸ \end{cases}$$

$$۱۰) \begin{cases} ۳x + y = ۱ \\ ۲y = ۲ - ۶x \end{cases}$$

$$۱۱) \begin{cases} x - ۲y = ۴ \\ ۲x - ۴y = ۴ \end{cases}$$

$$۱۲) \begin{cases} x = ۳y - ۲ \\ ۵x - ۱۵y = ۰ \end{cases}$$

دستگاه های زیر را از طریق رسم نمودار حل کنید.

$$۱۳) \begin{cases} x + y = ۱ \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}$$

$$۱۵) \begin{cases} ۲x - y = ۸ \\ x + ۳y = ۱۱ \end{cases}$$

$$۱۶) \begin{cases} ۲y - ۴ = ۰ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases}$$

$$۱۷) \begin{cases} ۴x - y = ۶ \\ x - y = ۰ \end{cases}$$

$$۱۸) \begin{cases} ۳x - y = ۴ \\ ۶x - ۲y = ۴ \end{cases}$$

پاسخ تمرینات ۸.۱

مشخص کنید آیا دو گانه های داده شده برای هر دستگاه ، پاسخ آن دستگاه است .

$$۱) \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases} \quad (2, -1)$$

$$\begin{cases} 2 - (-1) = 3 \\ 2(2) - 4(-1) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 4 + 4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 3 \\ 8 = 8 \end{cases}$$

آری

$$۲) \quad \begin{cases} 2x - 3y = -9 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases} \quad (3, 5)$$

$$\begin{cases} 2(3) - 3(5) = -9 \\ 4(3) + 2(5) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - 15 = -9 \\ 12 + 10 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 = -9 \\ 22 = -2 \end{cases}$$

خیر

دستگاه های زیر را از طریق جایگزینی حل کنید.

$$۳) \begin{cases} x + y = ۱۰ & (۱) \\ y = ۴x & (۲) \end{cases}$$

در معادله (۲) مقدار y بر حسب x بدست آمده، پس در معادله (۱) بجای y می گذاریم $۴x$

$$x + ۴x = ۱۰$$

$$۵x = ۱۰$$

$$x = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

حال در معادله (۲) بجای x می گذاریم ۲ تا مقدار y بدست آید.

$$y = ۴x \Rightarrow y = ۴(۲) = ۸$$

پس مجموعه جواب ها $(۲, ۸)$ است.

$$۴) \begin{cases} ۴x - y = ۹ & (۱) \\ ۲x + ۳y = -۲۷ & (۲) \end{cases}$$

از معادله یک y را بر حسب x پیدا می کنیم.

$$۴x - y = ۹$$

$$y = ۴x - ۹$$

اینک در معادله دوم بجای y می گذاریم $۴x - ۹$

$$۲x + ۳y = -۲۷$$

$$۲x + ۳(۴x - ۹) = -۲۷$$

$$۲x + ۱۲x - ۲۷ = -۲۷$$

$$۱۴x = ۰$$

$$x = 0$$

مقدار بدست آمده برای x در یکی از معادله ها قرار می دهیم تا مقدار y پیدا شود.

$$4x - y = 9$$

$$4(0) - y = 9$$

$$y = -9$$

$$(0, -9)$$

$$5) \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y\right) = 4\left(-\frac{1}{4}\right) \\ 4\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y\right) = 4(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$3x - y = 4$$

$$y = 3x - 4$$

$$x + 3y = -1$$

$$x + 3(3x - 4) = -1$$

$$x + 9x - 12 = -1$$

$$10x = 11$$

$$x = \frac{11}{11} = 1$$

$$3x - y = 4$$

$$3(1) - y = 4$$

$$3 - y = 4$$

$$y = -1$$

$$(1, -1)$$

$$۶) \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + y = \frac{4}{3} \\ -x + 2y = 11 \end{cases}$$

$$۷) \quad \begin{cases} 2x = 6 \\ y = 5 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$$3 + y = 5$$

$$y = 2$$

$$(3, 2)$$

دستگاه های زیر را از طریق حذف حل کنید.

$$۸) \begin{cases} ۲x - ۴y = ۰ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x - ۴y = ۰ \\ -۲(x + ۲y) = -۲(۵) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x - ۴y = ۰ \\ -۲x - ۴y = -۱۰ \end{cases}$$

$$-۸y = -۱۰$$

$$y = \frac{-۱۰}{-۸} = \frac{۵}{۴}$$

$$۲x - ۴y = ۰$$

$$۲x - ۴\left(\frac{۵}{۴}\right) = ۰$$

$$۲x - ۵ = ۰$$

$$۲x = ۵$$

$$x = \frac{۵}{۲}$$

$$\left(\frac{۵}{۲}, \frac{۵}{۴}\right)$$

$$۹) \begin{cases} ۵x - ۲y = ۲۷ \\ -۳x + ۵y = ۱۸ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳(۵x - ۲y) = ۳(۲۷) \\ ۵(-۳x + ۵y) = ۵(۱۸) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x - 6y = 81 \\ -15x + 25y = 9 \end{cases}$$

$$19y = 171$$

$$y = \frac{171}{19} = 9$$

$$5x - 2y = 27$$

$$5x - 2(9) = 27$$

$$5x - 18 = 27$$

$$5x = 45$$

$$x = \frac{45}{5} = 9$$

$$(9, 9)$$

$$1 \text{ o) } \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2y = 2 - 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(3x + y) = -2(1) \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 2y = -2 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$0=0$$

$$\{x, y | 3x + y = 1\}$$

$$۱۱) \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(x - 2y) = -2(4) \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = -8 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$0 = -4$$

$$\phi$$

$$۱۲) \begin{cases} x = 3y - 2 \\ 5x - 15y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 5x - 15y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5(x - 3y) = -5(-2) \\ 5x - 15y = 0 \end{cases}$$

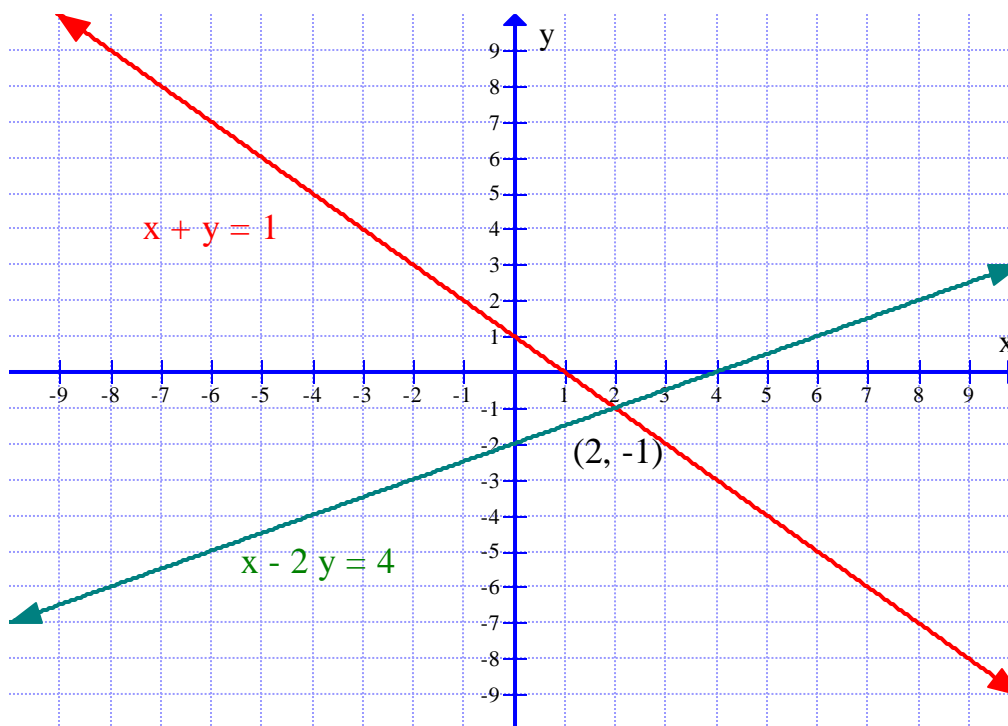
$$\begin{cases} -5x + 15y = 10 \\ 5x - 15y = 0 \end{cases}$$

$$0 = 10$$

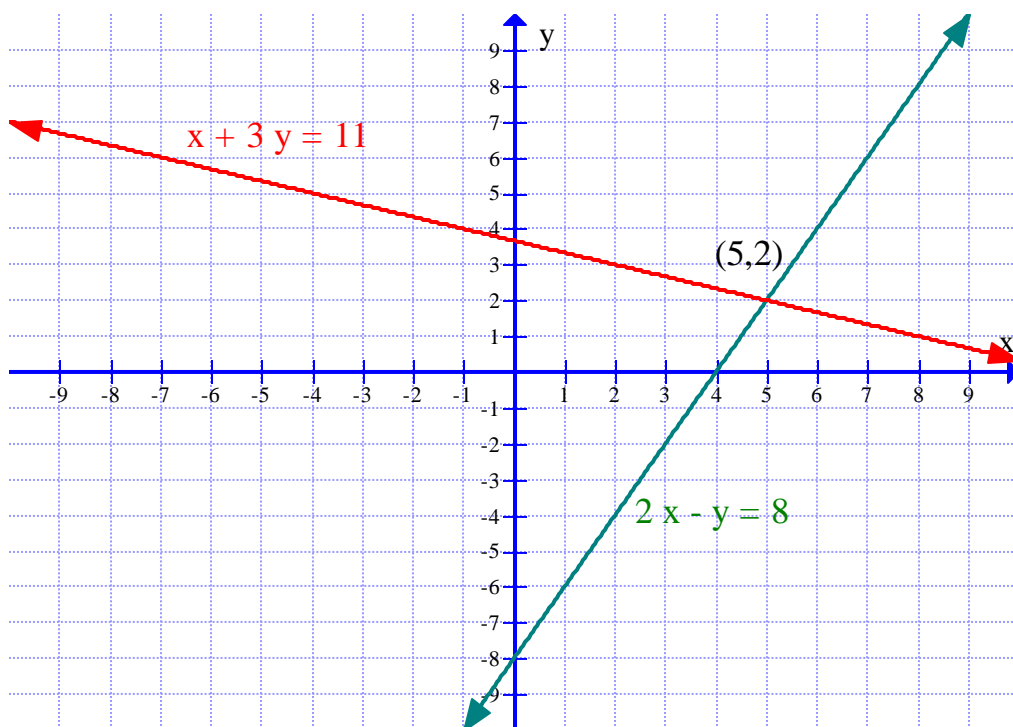
$$\phi$$

دستگاه های زیر را از طریق رسم نمودار حل کنید.

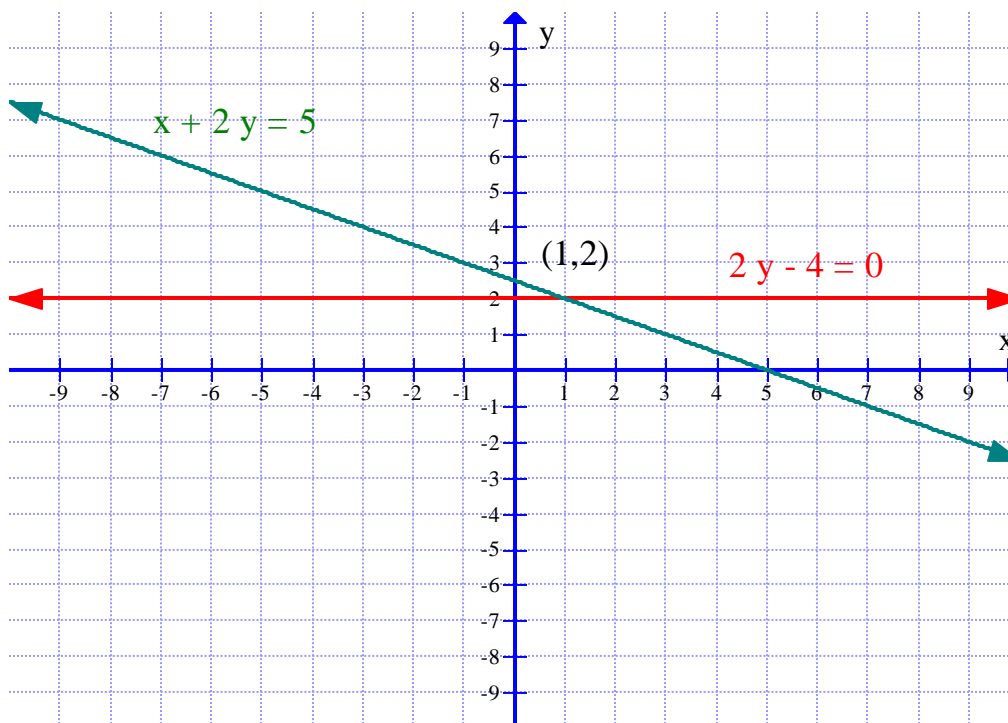
$$۱۳) \begin{cases} x + y = ۱ \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}$$



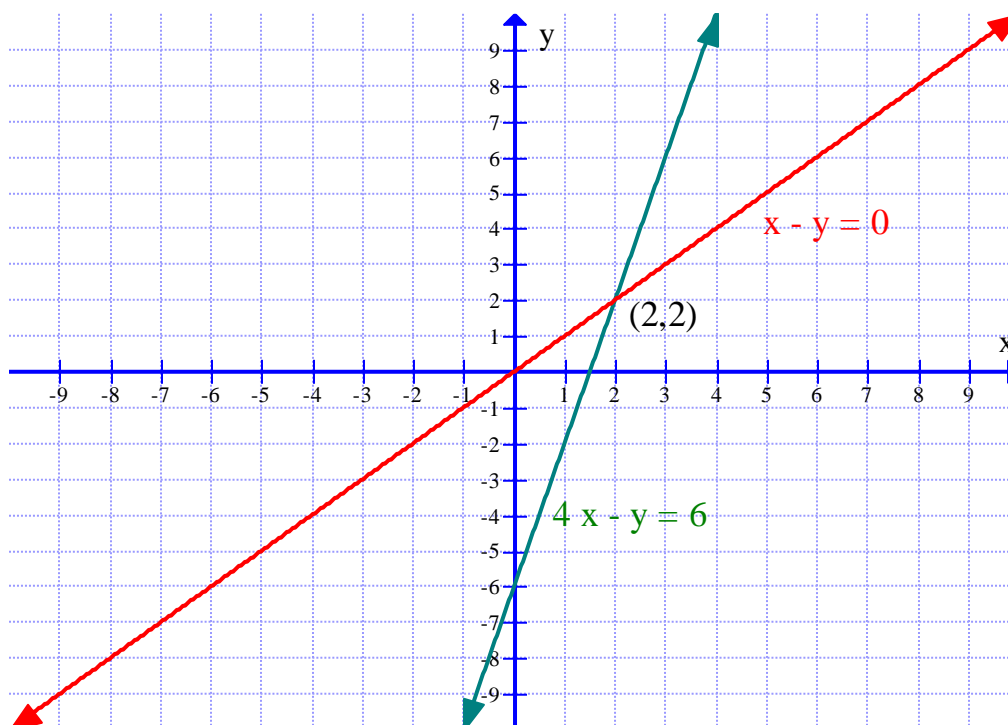
۱۵)
$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$



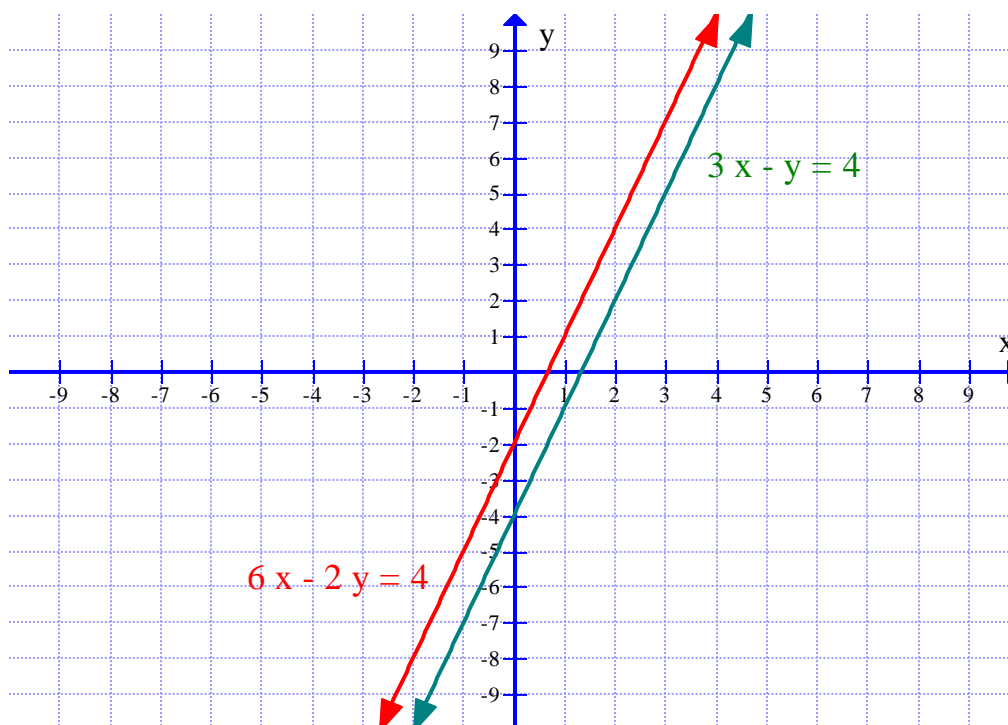
$$۱۶) \begin{cases} ۲y - ۴ = ۰ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases}$$



۱۷)
$$\begin{cases} 4x - y = 6 \\ x - y = 0 \end{cases}$$



$$۱۸) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$



۸.۲ - حل دستگاه های معادله های خطی سه مجهولی

Solving Systems of Linear Equations in Three Variables

در این بخش ، دستگاه های سه معادله خطی سه مجهولی را حل می کنیم. مثلاً معادله $3x - y + z = -15$ را معادله خطی سه مجهولی می نامیم ، زیرا سه متغیر در این معادله وجود دارد و هر سه به توان یک رسیده اند. یک جواب این معادله یک سه تایی مرتب (x, y, z) است که معادله را برقرار می کند. سه تایی مرتب : **Ordered Triple**

مثلاً سه تایی مرتب $(2, 0, -21)$ یک جواب معادله است زیرا اگر بجای x بگذاریم ۲ و بجای y بگذاریم صفر و بجای z بگذاریم -21 - نتیجه یک جمله صحیح خواهد بود.

$$3(2) - 0 + (-21) = -15$$

$$6 - 21 = -15$$

یک جمله صحیح است $-15 = -15$

نمودار این معادله یک صفحه است در فضای سه بعدی ، همان طور که نمودار یک معادله خطی دو مجهولی ، یک خط است در فضای دو بعدی .

صفحه: Plane:

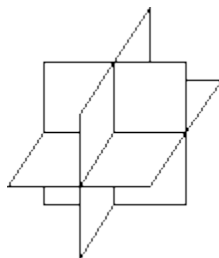
سه بعدی: Three Dimensional:

دو بعدی: Two Dimensional:

فضا: Space:

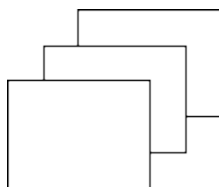
گر چه اینجا قصد نداریم در مورد چگونگی رسم نمودار معادله های سه مجهولی بحث کنیم ، اما برای اینکه بتوانید مجسم کنید که صفحه ها چه گونه با هم برخورد می کنند، در ذیل چند نمونه از برخورد صفحه ها را می آوریم.

الف - سه صفحه ممکن است یک نقطه مشترک داشته باشند. این نقطه ، تنها جواب دستگاه است. این دستگاه را سازگار و یا بی تناقض می نامند.

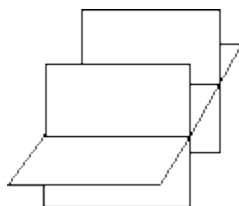


محل تلاقی سه صفحه یک نقطه است

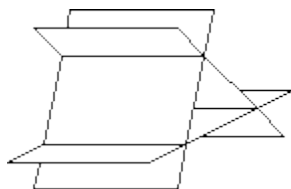
ب - سه صفحه در نقطه که در هر سه صفحه مشترک باشد تلاقی نمی کنند . دستگاه جوابی ندارد . دستگاه متناقض و یا ناسازگار است . چند نمونه ممکن در ذیل می آید.



هر سه صفحه با هم موازی هستند.

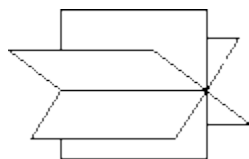


دو صفحه با هم موازی هستند و صفحه سوم آن دو صفحه را هر کدام در یک خط تلاقی می کند.



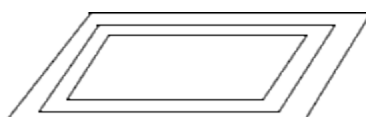
هر صفحه دو صفحه دیگر را در یک خط تلاقی می کند.

ج - هر سه صفحه در یک خط با هم تلاقی می کنند . دستگاه بی نهایت جواب دارد . دستگاه سازگار است .



محل برخورد هر سه صفحه یک خط است.

د - هر سه صفحه در تمام نقاط با هم تلاقی دارند . دستگاه سازگار است و معادله ها به هم وابسته هستند . هر سه صفحه بر هم منطبق هستند.



حل دستگاه سه معادله خطی سه مجهولی

Solving a System of Linear Equations in Three Variables

عیناً مانند دستگاه های دو معادله ای دو مجهولی، می توانیم روش حذفی را برای حل یک دستگاه سه معادله ای سه مجهولی بکار ببریم. برای این کار، یک مجهول را حذف کرده و یک دستگاه دو معادله دو مجهولی بدست آورده و سپس با استفاده از روشی که قبلاً یاد گرفتیم این دستگاه دو معادله دو مجهولی را حل می کنیم.

روش کار

الف - هر سه معادله را به صورت استاندارد $Ax + By + Cz = D$ بنویسید.

ب - دو معادله را انتخاب کنید و یک مجهول را حذف کنید.

ج - دو معادله دیگر را انتخاب کنید و همان مجهولی را که در مرحله ب حذف کرده بودید، حذف کنید.

د - حالا دو معادله دو مجهولی داریم. این دستگاه دو معادله دو مجهولی را مطابق روشی که قبلاً آموخته اید، حل کنید.

ه - اینک مقدار دو مجهول را می دانیم. آنها را در یکی از سه معادله اولیه بگذارید تا مقدار مجهول سوم پیدا شود.

و - سه گانه مرتب بدست آمده را در دستگاه اولیه امتحان کنید.

مثال - دستگاه ها را حل کنید.

$$1) \quad \begin{cases} 3x - y + z = -15 & (1) \\ x + 2y - z = 1 & (2) \\ 2x + 3y - 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

معادله های (۱) و (۲) را با هم جمع می کنیم یا z حذف شود.

$$\begin{cases} 3x - y + z = -15 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$4x + y = -14 \quad (4)$$

حالا معادله های (۳) و (۱) را انتخاب می کنیم و سعی می کنیم همان متغیر z را حذف کنیم. برای این کار معادله (۱) را در عدد دو ضرب می کنیم و با معادله (۳) جمع می کنیم.

$$\begin{cases} 2(3x - y + z) = 2(-15) \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 2y + 2z = -30 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$8x + y = -30 \quad (5)$$

حالا معادله های (۵) و (۴) را حل می کنیم.

$$\begin{cases} 4x + y = -14 & (4) \\ 8x + y = -30 & (5) \end{cases}$$

معادله (۴) را در ۱- ضرب می کنیم.

$$\begin{cases} -1(4x + y) = -1(-14) \\ 8x + y = -30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - y = 14 \\ 8x + y = -30 \end{cases}$$

$$4x = -16$$

$$x = -4$$

حالا بجای x در معادله (۵) یا (۴) می گذاریم -4

$$4x + y = -14$$

$$4(-4) + y = -14$$

$$-16 + y = -14$$

$$y = 2$$

حالا مقادیر بدست آمده برای y و x در یکی از معادله های اصلی می گذاریم تا مقدار z پیدا شود.

$$x + 2y - z = 1$$

$$-4 + 2(2) - z = 1$$

$$-4 + 4 - z = 1$$

$$z = -1$$

پس سه گانه مرتب $(-1, 2, -4)$ جواب دستگاه است. امتحان کنید آیا هر سه معادله برقرار هستند.

$$2) \quad \begin{cases} 2x - 4y + 8z = 2 & (1) \\ -x - 3y + z = 11 & (2) \\ x - 2y + 4z = 0 & (3) \end{cases}$$

اگر معادله های (2) و (3) را با هم جمع کنیم، نتیجه معادله زیر خواهد بود.

$$-5y + 5z = 11 \quad (4)$$

برای حذف x از معادله (1) معادله (2) را در عدد ۲ ضرب می کنیم، نتیجه را با معادله (1) جمع می کنیم.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 8z = 2 & (1) \\ 2(-x - 3y + z) = 2(11) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y + 8z = 2 \\ -2x - 6y + 2z = 22 \end{cases}$$

$$-10y + 10z = 24 \quad (5)$$

معادله (4) را در ۲- ضرب می کنیم و نتیجه را با معادله (5) جمع می کنیم تا z حذف شود.

$$\begin{cases} -2(-5y + 5z) = -2(11) \\ -10y + 10z = 24 \end{cases}$$

$$o = 2$$

چون یک تساوی غلط بدست آمد ، نتیجه می گیریم که دستگاه متناقض است. مجموعه جواب ها ϕ یا $\{\}$ است.

$$3) \begin{cases} 2x + 4y = 1 & (1) \\ 4x - 4z = -1 & (2) \\ y - 4z = -3 & (3) \end{cases}$$

ملاحظه می کنید که در معادله دوم جمله ای وجود ندارد که شامل متغیر y باشد. پس سعی می کنیم y را از معادله های (۳) و (۱) حذف کنیم. برای این کار معادله (۳) را در -4 ضرب می کنیم و نتیجه را با معادله (۱) جمع می کنیم.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ -4(y - 4z) = -4(-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ -4y + 16z = 12 \end{cases}$$

$$2x + 16z = 13 \quad (4)$$

حالا معادله (۴) را در -2 ضرب می کنیم و نتیجه را با معادله (۲) جمع می کنیم.

$$\begin{cases} 4x - 4z = -1 \\ -2(2x + 16z) = -2(13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 4z = -1 \\ -4x - 32z = -26 \end{cases}$$

$$-36z = -27$$

$$z = \frac{-27}{-36} = \frac{3}{4}$$

حالا مقدار z را در معادله (۳) می گیریم تا مقدار y بدست آید.

$$y - 4z = -3$$

$$y - 4\left(\frac{3}{4}\right) = -3$$

$$y - 3 = -3$$

$$y = 0$$

و بالاخره مقدار y را در معادله (۱) می گذاریم تا مقدار x پیدا شود.

$$2x + 4y = 1$$

$$2x + 4(0) = 1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

نتیجه: مجموعه جواب های این دستگاه سه گانه مرتب $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}\right)$ است. امتحان کنید.

$$4) \begin{cases} x - 5y - 2z = 6 & (1) \\ -2x + 10y + 4z = -12 & (2) \\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}y - z = 3 & (3) \end{cases}$$

معادله (۳) را در ۲ ضرب می کنیم تا کسر ها حذف شوند. و معادله (۲) را در $-\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم. نتیجه زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} x - 5y - 2z = 6 \\ x - 5y - 2z = 6 \\ x - 5y - 2z = 6 \end{cases}$$

ملاحظه می کنید که هر سه معادله کاملاً همانند هستند. دستگاه بی نهایت جواب دارد. معادله ها وابسته هستند. مجموعه جوابها $\{(x, y, z) | x - 5y - 2z = 6\}$ است. کاملاً همانند Identical:

تمرینات ۸.۲

دستگاه های زیر را حل کنید.

$$۱) \begin{cases} x + y = ۳ \\ ۲y = ۱۰ \\ ۳x + ۲y - ۳z = ۱ \end{cases}$$

$$(-۲, ۵, ۱)$$

$$۲) \begin{cases} ۲x + ۲y + z = ۱ \\ -x + y + ۲z = ۳ \\ x + ۲y + ۴z = ۰ \end{cases}$$

$$(-۲, ۳, -۱)$$

$$۳) \begin{cases} x - ۲y + z = -۵ \\ -۳x + ۴y - ۳z = ۱۵ \\ ۲x - ۴y + ۲z = -۱۰ \end{cases}$$

$$\{(x, y, z) | x - ۲y + z = -۵\}$$

$$۴) \begin{cases} ۴x - y + ۲z = ۵ \\ ۲y + z = ۴ \\ ۴x + y + ۳z = ۱۰ \end{cases}$$

$$\phi$$

$$۵) \begin{cases} x + ۵z = ۰ \\ ۵x + y = ۰ \\ y - ۳z = ۰ \end{cases}$$

$$(۰, ۰, ۰)$$

$$۶) \begin{cases} ۶x - ۵z = ۱۷ \\ ۵x - y + ۳z = -۱ \\ ۲x + y = -۴۱ \end{cases}$$

$$(-۳, -۳۵, -۷)$$

۸.۳ - دستگاه های معادلات خطی و حل مسائل

Systems of Linear Equations and Problem Solving

حل مسائل از طریق دستگاه های دو معادله ای

Solving Problems Modeled by Systems of Two Equations

تا کنون مسائلی را حل کرده ایم که بتوان آنها را به صورت معادله های یک مجهولی نوشت. بعضی از این مسائل را می توان ، شاید خیلی آسان تر ، از طریق دستگاه های معادلات حل کرد.

مثال ۱ - یک عدد ۴ رقم کمتر از عدد دیگر است. چهار برابر عدد اول ، شش رقم از دو برابر عدد دوم ، بیشتر است. آن دو عدد را پیدا کنید.

حل

عدد اول $x =$ عدد دوم $y =$

چهار کمتر از عدد دوم است عدد اول

$$x = y - 4$$

شش رقم بیشتر از دو برابر عدد دوم است چهار برابر عدد اول

$$4x = 2y + 6$$

دستگاه را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ 4x = 2y + 6 \end{cases}$$

چون معادله اول ، x بر حسب y نوشته شده است، این دستگاه را از طریق جانشینی حل می کنیم. یعنی در معادله دوم بجای x می گذاریم $2y + 6$ و معادله را بر حسب y حل می کنیم.

$$4x = 2y + 6$$

$$4(y - 4) = 2y + 6$$

$$4y - 16 = 2y + 6$$

$$2y = 22$$

$$y = 11 \text{ عدد دوم}$$

$$x = y - 4$$

$$x = 11 - 4$$

$$x = 7 \text{ عدد اول}$$

مثال ۲

دو اتومبیل شهر اصفهان را ترک می کنند ، یکی به طرف مشرق و دیگری به طرف مغرب . بعد از سه ساعت ، ۲۹۷ کیلو متر از هم فاصله دارند . اگر یکی از آنها پنج کیلو متر در ساعت سریع تر از دیگری حرکت کند، سرعت هر کدام چه قدر است؟

حل

سرعت اتومبیل الف x

سرعت اتومبیل ب y

فرض می کنیم اتومبیل الف پنج کیلو متر سریع تر از اتومبیل ب حرکت کند. پس

پنج کیلو متر بیشتر از اتومبیل ب هست سرعت اتومبیل الف

$$x = y + 5 \quad (1)$$

بخاطر دارید که مسافت طی شده طبق فرمول زیر بدست می آید.

$$\text{مسافت} = \text{سرعت} \times \text{زمان}$$

$$distance = rate \times time$$

$$\text{سرعت} \times \text{زمان} = \text{مسافت}$$

اتومبیل الف	x	۳	$3x$
اتومبیل ب	y	۳	$3y$

طبق فرض مساله ، مجموع مسافت طی شده توسط هر دو اتومبیل ۲۹۷ کیلو متر است. پس

۲۹۷ است مسافت طی شده توسط اتومبیل ب + مسافت طی شده توسط اتومبیل الف

$$3x + 3y = 297 \quad (2)$$

لذا دستگاه زیر را خواهیم داشت.

$$\begin{cases} x = y + 5 & (1) \\ 3x + 3y = 297 & (2) \end{cases}$$

دستگاه را از طریق جانشینی حل می کنیم . یعنی در معادله دوم بجای x می گذاریم $y + 5$ تا مقدار y پیدا شود.

$$3x + 3y = 297$$

$$3(y + 5) + 3y = 297$$

$$3y + 15 + 3y = 297$$

$$6y = 282$$

$$y = \frac{282}{6} = 47 \text{ کیلو متر در ساعت}$$

و در نهایت سرعت اتومبیل الف را بدست می آوریم.

$$x = y + 5$$

$$x = 47 + 5$$

$$x = 52 \text{ کیلو متر در ساعت}$$

مثال ۳

آقای درستکار که یک دارو ساز است ۷ لیتر محلول اسید ۵٪ لازم دارد. او یک محلول اسید ۳٪ و یک محلول اسید ۸٪ موجود دارد. معین کنید چند لیتر از هر محلول را باید با هم مخلوط کند تا ۷ لیتر محلول اسید ۷٪ بدست آورد.

حل

مقدار محلول اسید 30% بر حسب لیتر $x =$

مقدار محلول اسید 80% بر حسب لیتر $y =$

مقدار اسید خالص	غلظت اسید	تعداد لیتر ها	
x 30 %	30 %	x	محلول اسید 30 %
y 80 %	80 %	y	محلول اسید 80 %
$(70)(50\%)$	50 %	70	محلول اسید 50 % لازم

$$70 = \text{مقدار محلول اسید } 80\% + \text{مقدار محلول اسید } 30\%$$

$$x + y = 70 \quad (1)$$

$$\text{مقدار اسید خالص در محلول } 50\% = \text{مقدار اسید خالص در محلول } 80\% + \text{مقدار اسید خالص در محلول } 30\%$$

$$(70)(50\%) = (30\%)x + (80\%)y \quad (2)$$

دستگاه را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ (30\%)x + (80\%)y = (70)(50\%) \end{cases}$$

دستگاه را از طریق حذف کردن حل می کنیم. برای این کار معادله اول را در 3- و معادله دوم را در 10 ضرب کرده و سپس آنها را با هم جمع می کنیم.

$$\begin{cases} -3x - 3y = -210 \\ 3x + 8y = 350 \end{cases}$$

$$5y = 140$$

$$y = \frac{140}{5} = 28 \text{ لیتر}$$

و بالاخره

$$x + 28 = 70$$

$$x = 42$$

پس داروساز باید ۴۲ لیتر محلول ۳۰٪ و ۲۸ لیتر محلول ۸۰٪ را با هم مخلوط کند تا ۷۰ لیتر محلول ۵۰٪ بدست آورد.

مثال ۴ - حل مساله از طریق دستگاه سه معادله ای

اندازه بزرگ ترین زاویه یک مثلث ۸۰ درجه بیشتر از اندازه کوچک ترین زاویه است و اندازه زاویه سوم ۱۰ درجه بیشتر از اندازه کوچک ترین زاویه است. اندازه زوایای این مثلث را پیدا کنید.

حل



اندازه کوچک ترین زاویه $x =$

اندازه بزرگ ترین زاویه $y =$

اندازه زاویه سوم $z =$

طبق فرض مساله ، اندازه بزرگ ترین زاویه ۸۰ درجه از اندازه کوچک ترین زاویه بیشتر است. پس

$$y = x + 80 \quad (1)$$

اندازه زاویه سوم ۱۰ درجه از اندازه کوچک ترین زاویه بیشتر است. پس

$$z = x + 10 \quad (2)$$

همچنین میدانیم که مجموع اندازه های زوایای یل مثلث ۱۸۰ درجه است. پس

$$(3) \quad x + y + z = 180$$

دستگاه را می نویسیم و آنرا از طریق جانشینی حل می کنیم.

$$\begin{cases} y = x + 80 \\ z = x + 10 \\ x + y + z = 180 \end{cases}$$

$$x + (x + 80) + (x + 10) = 180$$

$$3x + 90 = 180$$

$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3} = 30 \text{ درجه}$$

$$z = x + 10$$

$$z = 30 + 10 = 40 \text{ درجه}$$

$$x + y + z = 180$$

$$30 + y + 40 = 180$$

$$y = 110 \text{ درجه}$$

حل مسائل مربوط به توابع هزینه و درآمد Solving Problems with Cost and Revenue Functions:

مثال ۵

یک شرکت تولیدی اخیراً تجهیزات جدیدی به مبلغ ۳۰۰۰ میلیون ریال خریده است تا بتواند لوازم التحریر برای فروش به مشتریان تولید کند. هزینه تولید یک بسته لوازم التحریر ۳ میلیون ریال است و به قیمت ۵ / ۵ میلیون ریال به فروش می‌رسد. معین کنید چند بسته لوازم التحریر باید به فروش برسد تا فروش شرکت بی سود و زیان باشد.

حل

تعداد بسته های لوازم التحریر $x =$

هزینه تولید x بسته لوازم التحریر $C(x) =$

در آمد حاصل از فروش x بسته لوازم التحریر $R(x) =$

$$R(x) = 5.5x$$

$$C(x) = 3x + 3000$$

برای اینکه شرکت نه سود ببرد و نه زیان کند، باید فروش مساوی هزینه باشد. یعنی $R(x) = C(x)$

$$5.5x = 3x + 3000$$

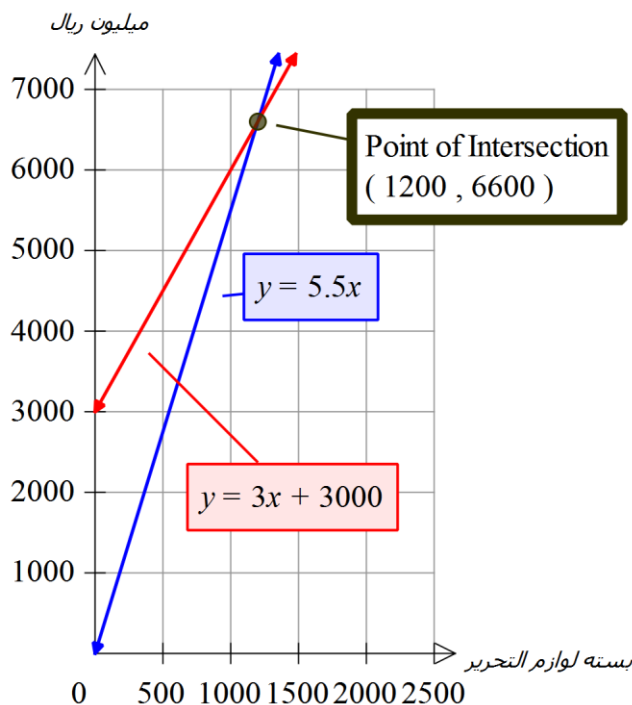
معادله بدست آمده بالا را حل می کنیم.

$$5.5x = 3x + 3000$$

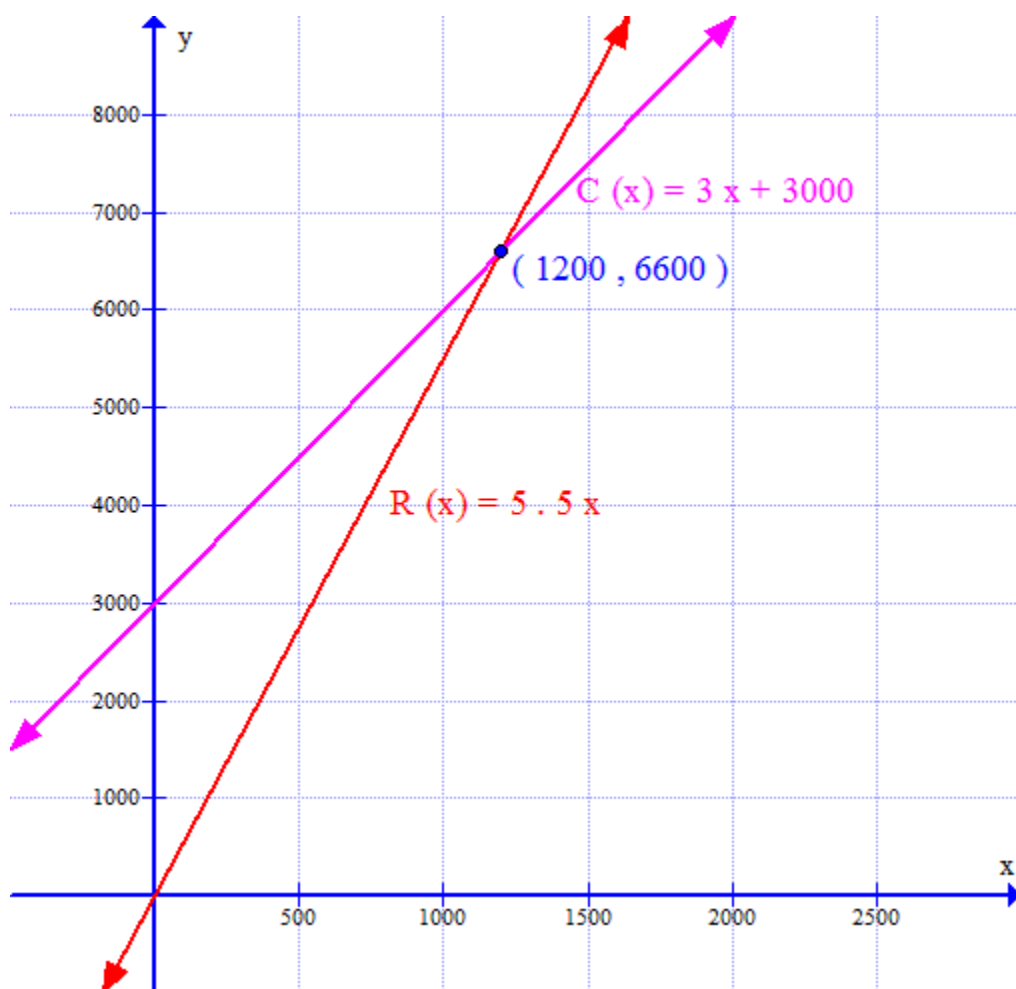
$$2.5x = 3000$$

$$x = \frac{3000}{2.5} = 1200 \text{ بسته}$$

پس شرکت باید ۱۲۰۰ بسته لوازم التحریر بفروشد تا اینکه نه سودی حاصل شود و نه زیانی



میلیون ریال



بسته لوازم التحریر

همان طور که از دو نمودار بالا ملاحظه می کنید، اگر شرکت ۱۲۰۰ بسته لوازم التحریر بفروشد، هزینه مساوی در آمد خواهد بود. و یا به گفته دیگر فروش باید ۶۶۰۰ میلیون ریال باشد.

$$R(x) = 5.5x = 5.5(1200) = 6600 = C(x) = 3x + 3000 = 3(1200) + 3000 = 6600$$

بی سود و زیان شدن: Break Even

نقطه تقاطع: Point of Intersection

تمرینات ۸.۳

۱ – یک عدد دو رقم از عدد دیگر بیشتر است. دو برابر عدد اول، چهار رقم از سه برابر عدد دوم کمتر است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۲ – یک هواپیمای دلتا ۷۲۷ با سرعت ۵۶۰ کیلو متر در ساعت موافق جهت باد حرکت می کند. و خلاف جهت باد با سرعت ۴۸۰ کیلو متر در ساعت پرواز می کند. سرعت هواپیما را در هوای بدون باد و همچنین سرعت باد را پیدا کنید.

۳ – چند لیتر شیر ۴٪ را باید با چند لیتر شیر ۱٪ مخلوط کنیم تا ۶۰ لیتر شیر ۲٪ بدست آید.

۴ – آقای مهربان چند قاب عکس بزرگ خرید هر یک به مبلغ ۱۵ هزار ریال و چند قاب عکس کوچک خرید هر یک به مبلغ ۸ هزار ریال. اگر روی هم ۲۲ قاب عکس خریده باشد، و مبلغ ۲۳۹ هزار ریال پرداخته باشد، آقای مهربان از هر نوع قاب عکس چند عدد خریده است؟

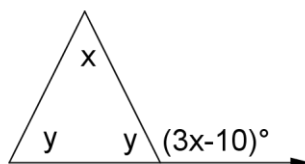
۵ – یک عدد دو رقم کم تر از عدد دیگر است. دو برابر عدد اول، چهار رقم از سه برابر عدد دوم بیشتر است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۶ – یک فروشگاه لوازم التحریر ۷ دفترچه و ۴ قلم فروخت به مبلغ ۶۴۰ تومان و دو دفترچه و ۱۹ قلم به مبلغ ۵۴۰ تومان. قیمت هر یک را حساب کنید.

۷ – یک هواپیما مسافت ۲۱۶۰ کیلو متر را در جهت باد در مدت ۳ ساعت طی می کند. همین هواپیما همین مسافت را خلاف جهت باد در مدت ۴ ساعت طی می کند. سرعت هواپیما در هوای بدون باد و سرعت باد را حساب کنید.

۸ – پیرامون یک چهار ضلعی Equilateral ۲۹ سانتی متر است. بزرگ ترین ضلع دو برابر کوچک ترین ضلع است. دو ضلع دیگر با هم مساوی هستند و ۲ سانتی متر از کوچک ترین ضلع بلند تر هستند. طول هر چهار ضلع را پیدا کنید.

۹ – در مثلث متساوی الساقین زیر اندازه زاویه های γ و x را پیدا کنید.



۱۰

یک شرکت سبد سازی در نظر دارد یک نوع سبد جدید به بازار عرضه کند. این شرکت حدس می زند که برای این کار تجهیزاتی به مبلغ ۵۰۰ هزار تومان لازم است. اگر برای تولید این سبد ها ۱۵ هزار تومان هزینه لازم باشد و قرار است که هر سبد به مبلغ ۳۱ هزار تومان بفروش برسد، به سؤال های زیر پاسخ دهید.

الف - یک تابع $R(x)$ برای در آمد تعداد x سبد بنویسید.

ب - یک تابع $C(x)$ برای هزینه تولید تعداد x سبد بنویسید.

ج - معین کنید این شرکت باید چند سبد بفروشد تا نه سود برده باشد و نه زیان کرده باشد. یعنی Break Even

د - نمودار این مساله را ترسیم کنید.

پاسخ تمرینات ۸.۳

۱ - یک عدد دو رقم از عدد دیگر بیشتر است. دو برابر عدد اول، چهار رقم از سه برابر عدد دوم کمتر است. آن دو عدد را پیدا کنید.

عدد اول $x =$

عدد دوم $y =$

$$\begin{cases} x = y + 2 & (1) \\ 2x = 3y - 4 & (2) \end{cases}$$

$$2x = 3y - 4$$

$$2(y + 2) = 3y - 4$$

$$2y + 4 = 3y - 4$$

$$-y = -8$$

عدد دوم $y = 8$

$$x = y + 2$$

عدد اول $x = 8 + 2 = 10$

۲ - یک هواپیمای دلتا ۷۲۷ با سرعت ۵۶۰ کیلو متر در ساعت موافق جهت باد حرکت می کند. و خلاف جهت باد با سرعت ۴۸۰ کیلو متر در ساعت پرواز می کند. سرعت هواپیما را در هوای بدون باد و همچنین سرعت باد را پیدا کنید.

سرعت هواپیما در هوای ساکن $x =$

سرعت باد $y =$

$$\begin{cases} x + y = 560 & (1) \\ x - y = 480 & (2) \end{cases}$$

$$2x = 1040$$

$$x = \frac{۱۰۴۰}{۲} = ۵۲۰ \text{ کیلو متر در ساعت سرعت هواپیما}$$

$$x + y = ۵۶۰$$

$$۵۲۰ + y = ۵۶۰$$

$$y = ۴۰ \text{ کیلو متر در ساعت سرعت باد}$$

۳- چند لیتر شیر ۴٪ را باید با چند لیتر شیر ۱٪ مخلوط کنیم تا ۶۰ لیتر شیر ۲٪ بدست آید.

$$x = \text{مقدار شیر چهار در صد}$$

$$y = \text{مقدار شیر یک در صد}$$

مقدار شیر خالص	غلظت شیر	تعداد لیتر ها	
$\frac{۰}{۴}x$	۴٪	x	شیر چهار در صد
$\frac{۰}{۱}y$	۱٪	y	شیر یک در صد
$(\frac{۰}{۲})(۶۰)$	۲٪	۶۰	شیر دو در صد لازم

$$x + y = ۶۰ \quad (۱)$$

$$\frac{۰}{۴}x + \frac{۰}{۱}y = (\frac{۰}{۲})(۶۰) \quad (۲)$$

$$\begin{cases} x + y = ۶۰ \\ \frac{۰}{۴}x + \frac{۰}{۱}y = ۱۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۱\{x + y = -۱(۶۰) \\ ۱۰(\frac{۰}{۴}x + \frac{۰}{۱}y = ۱۲) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y = -۶۰ \\ ۴x + y = ۱۲۰ \end{cases}$$

$$۳x = ۶۰$$

$$x = \frac{60}{3} = 20 \text{ لیتر شیر چهار در صد}$$

$$x + y = 60$$

$$20 + y = 60$$

$$y = 40 \text{ لیتر شیر یک در صد}$$

۴ - آقای مهربان چند قاب عکس بزرگ خرید هر یک به مبلغ ۱۵ هزار ریال و چند قاب عکس کوچک خرید هر یک به مبلغ ۸ هزار ریال. اگر روی هم ۲۲ قاب عکس خریده باشد، و مبلغ ۲۳۹ هزار ریال پرداخته باشد، آقای مهربان از هر نوع قاب عکس چند عدد خریده است؟

$$x = \text{تعداد قاب عکس های بزرگ}$$

$$y = \text{تعداد قاب عکس های کوچک}$$

$$x + y = 22 \quad (1)$$

$$15x + 8y = 239 \quad (2)$$

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 15x + 8y = 239 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8(x + y) = -8(22) \\ 15x + 8y = 239 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x - 8y = -176 \\ 15x + 8y = 239 \end{cases}$$

$$7x = 63$$

$$x = \frac{63}{7} = 9 \text{ تعداد قاب عکس های بزرگ}$$

$$x + y = 22$$

$$9 + y = 22$$

تعداد قاب عکس های کوچک $y = 13$

۵ - یک عدد دو رقم کم تر از عدد دیگر است. دو برابر عدد اول، چهار رقم از سه برابر عدد دوم بیشتر است. آن دو عدد را پیدا کنید.

عدد اول $x =$

عدد دوم $y =$

$$x = y - 2 \quad (1)$$

$$2x = 3y + 4 \quad (2)$$

$$\begin{cases} x = y - 2 \\ 2x = 3y + 4 \end{cases}$$

$$2(y - 2) = 3y + 4$$

$$2y - 4 = 3y + 4$$

$$-y = 8$$

عدد دوم $y = -8$

$$x = y - 2$$

$$x = -8 - 2 = -10 \quad \text{عدد اول}$$

۶ - یک فروشگاه لوازم التحریر ۷ دفترچه و ۴ قلم فروخت به مبلغ ۶۴۰ تومان و دو دفترچه و ۱۹ قلم به مبلغ ۵۴۰ تومان. قیمت هر یک را حساب کنید.

قیمت دفترچه $x =$

قیمت قلم $y =$

$$7x + 4y = 640 \quad (1)$$

$$2x + 19y = 540 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 7x + 4y = 640 \\ 2x + 19y = 540 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(7x + 4y) = -2(640) \\ 7(2x + 19y) = 7(540) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14x - 8y = -1280 \\ 14x + 133y = 3780 \end{cases}$$

$$125y = 2500$$

$$y = \frac{2500}{125} = 20 \quad \text{قیمت قلم}$$

$$7x + 4y = 640$$

$$7x + 4(20) = 640$$

$$7x + 80 = 640$$

$$7x = 560$$

$$x = \frac{560}{7} = 80 \quad \text{قیمت دفترچه}$$

۷- یک هواپیما مسافت ۲۱۶۰ کیلو متر را در جهت باد در مدت ۳ ساعت طی می‌کند. همین هواپیما همین مسافت را خلاف جهت باد در مدت ۴ ساعت طی می‌کند. سرعت هواپیما در هوای بدون باد و سرعت باد را حساب کنید.

x = سرعت هواپیما در هوای ساکن

y = سرعت باد

مسافت = زمان × سرعت

حرکت در جهت باد	$x + y$	۳	۲۱۶۰
حرکت خلاف جهت باد	$x - y$	۴	۲۱۶۰

$$3(x + y) = 2160 \quad (1)$$

$$4(x - y) = 2160 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 2160 \\ 4x - 4y = 2160 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(3x + 3y) = 4(2160) \\ 3(4x - 4y) = 3(2160) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 8640 \\ 12x - 12y = 6480 \end{cases}$$

$$24x = 15120$$

$$x = \frac{15120}{24} = 630 \quad \text{کیلو متر در ساعت سرعت هواپیما در هوای ساکن}$$

$$3x + 3y = 2160$$

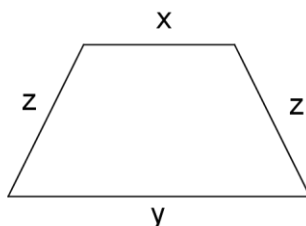
$$3(630) + 3y = 2160$$

$$1890 + 3y = 2160$$

$$3y = 270$$

$$y = \frac{270}{3} = 90 \quad \text{کیلو متر در ساعت سرعت باد}$$

۸- پیرامون یک چهار ضلعی Quadrilateral ۲۹ سانتی متر است. بزرگ ترین ضلع دو برابر کوچک ترین ضلع است. دو ضلع دیگر با هم مساوی هستند و ۲ سانتی متر از کوچک ترین ضلع بلند تر هستند. طول هر چهار ضلع را پیدا کنید.



$x =$ کوچک ترین ضلع

$y =$ بزرگ ترین ضلع

$z =$ یکی از دو ضلع مساوی

پیرامون $Perimeter = x + y + 2z = 29$

$$y = 2x \quad (1)$$

$$z = x + 2 \quad (2)$$

$$x + y + 2z = 29 \quad (3)$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = x + 2 \\ x + y + 2z = 29 \end{cases}$$

$$x + 2x + 2(x + 2) = 29$$

$$x + 2x + 2x + 4 = 29$$

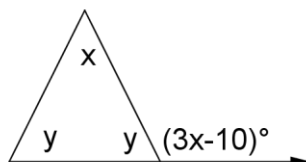
$$5x = 25$$

$$x = \frac{25}{5} = 5 \text{ سانتی متر کوچک ترین ضلع}$$

$$y = 2x = 2(5) = 10 \text{ سانتی متر بزرگ ترین ضلع}$$

سانتی متر یکی از دو ضلع مساوی $z = x + 2 = 5 + 2 = 7$

۹- در مثلث متساوی الساقین زیر اندازه زاویه های x و y را پیدا کنید.



میدانیم که اندازه زاویه نیم صفحه Straight Angle برابر است با 180° درجه. پس

$$y + (3x - 10) = 180 \quad (1)$$

همچنین میدانیم که مجموع اندازه های زوایای یک مثلث برابر است با 180° درجه. پس

$$x + 2y = 180 \quad (2)$$

$$\begin{cases} y + 3x - 10 = 180 \\ x + 2y = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 190 \\ x + 2y = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(3x + y) = -2(190) \\ x + 2y = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 2y = -380 \\ x + 2y = 180 \end{cases}$$

$$-5x = -200$$

$$x = \frac{-200}{-5} = 40 \text{ درجه}$$

$$x + 2y = 180$$

$$40 + 2y = 180$$

$$2y = 140$$

$$y = \frac{140}{2} = 70 \text{ درجه}$$

۱۰

یک شرکت سبد سازی در نظر دارد یک نوع سبد جدید به بازار عرضه کند. این شرکت حدس می زند که برای این کار تجهیزاتی به مبلغ ۵۰۰ هزار تومان لازم است. اگر برای تولید این سبد ها ۱۵ هزار تومان هزینه لازم باشد و قرار است که هر سبد به مبلغ ۳۱ هزار تومان بفروش برسد، به سؤال های زیر پاسخ دهید.

الف - یک تابع $R(x)$ برای در آمد تعداد x سبد بنویسید.

$$R(x) = 31x$$

ب - یک تابع $C(x)$ برای هزینه تولید تعداد x سبد بنویسید.

$$C(x) = 15x + 500$$

ج - معین کنید این شرکت باید چند سبد بفروشد تا نه سود برده باشد و نه زیان کرده باشد. یعنی Break Even

$$R(x) = C(x)$$

$$31x = 15x + 500$$

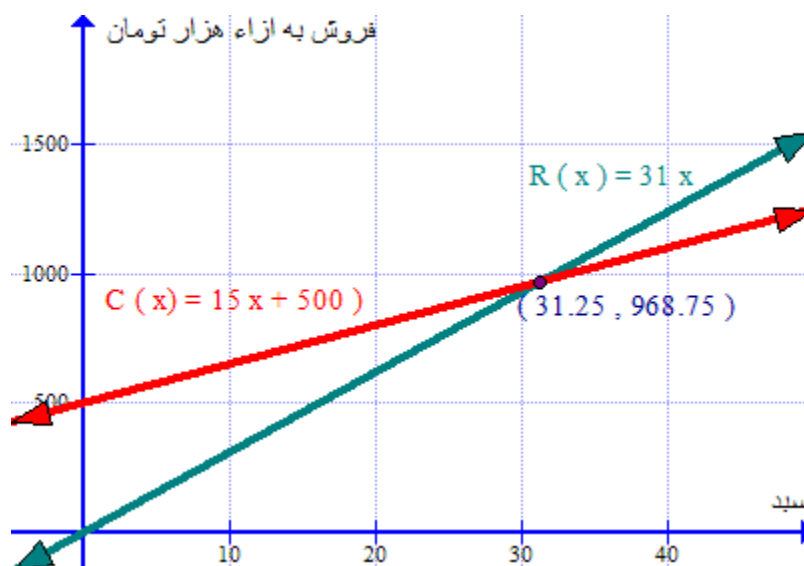
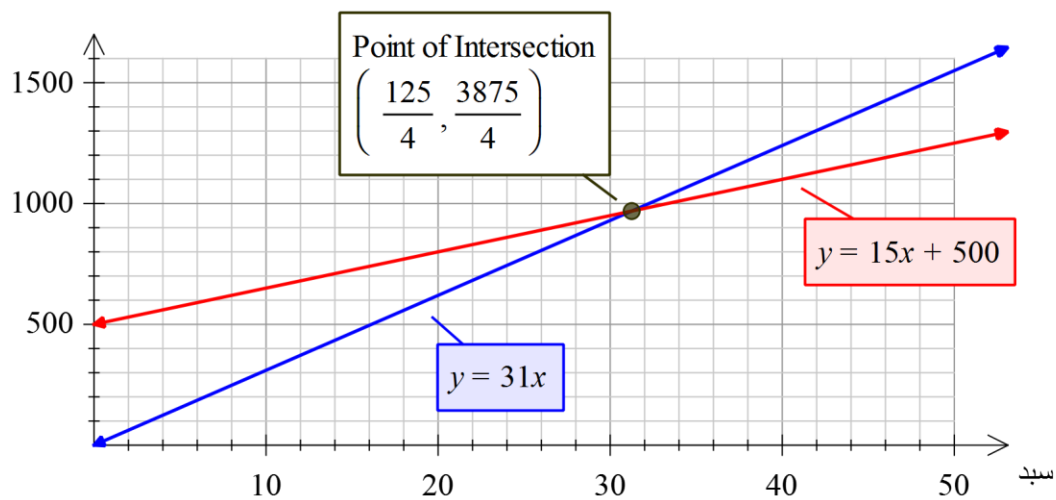
$$16x = 500$$

$$x = \frac{500}{16} = 31.25$$

پس باید ۳۲ سبد بفروشد تا فروش و هزینه مساوی شود.

د - نمودار این مساله را ترسیم کنید.

فروش به ازاء هزار تومان



۸.۴ – حل دستگاه های معادلات از طریق ماتریس ها

Solving Systems of Equations Using Matrices

شاید تا بحال متوجه شده اید که حل یک دستگاه معادلات بستگی به ضریب های معادله ها در این دستگاه دارد و نه به متغیر ها. در این بخش نشان می دهیم که چگونه یک دستگاه معادلات را با استفاده از یک ماتریکس حل کنیم.

ماتریکس: Matrix

ماتریس ها (جمع ماتریکس) Matrices

استفاده از ماتریس ها برای حل یک دستگاه دو معادله ای

Using Matrices to Solve a System of Two Equations

یک ماتریکس عبارت است از یک آرایه مستطیل شکلی از اعداد
چند مثال برای ماتریس ها در ذیل می آید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

اعدادی که به طور افقی تنظیم شده اند در یک ردیف هستند.

اعدادی که به طور عمودی تنظیم شده اند در یک ستون هستند.

ماتریکس زیر دارای دو ردیف و سه ستون است .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ردیف یک} \\ \leftarrow \text{ردیف دو} \end{array}$$

↑
ستون یک

↑
ستون دو

↑
ستون سه

تنظیم کردن یا شدن: Align

ردیف: Row

ستون: Column

آرایه – آرایش منظم شماره ها در ردیف یا ستون: Array

برای درک رابطه بین دستگاه های معادلات و ماتریس ها به مثال زیر توجه کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 & \text{معادله یک} \\ x + y = 0 & \text{معادله دو} \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \text{ردیف یک} \\ \text{ردیف دو} \end{matrix}$$

ملاحظه می کنید که ردیف های ماتریکس مربوط است به معادله های دستگاه. ضریب های هر یک از متغیر ها سمت چپ خط عمودی قرار گرفته اند و اعداد ثابت، سمت راست این خط. هر کدام از این اعداد را یک جز یا عنصر Element می نامند.

روش حل یک ماتریکس بر این اساس است که یک ماتریکس معادل آن بسازیم. دو ماتریکس معادل هستند اگر هر دو یک مجموعه جواب داشته باشند. برای بدست آوردن یک ماتریکس معادل عملیات زیر را که به آن **عملیات ردیفی Row Operations** می گویند انجام می دهیم.

عملیات ردیفی

الف – هر کدام از دو ردیف ماتریکس را می توان جابجا کرد.

ب – اعضای هر یک از ردیف ها را می توان در یک عدد غیر از صفر ضرب و یا بر یک عدد غیر از صفر تقسیم کرد.

ج – اعضای هر یک از ردیف ها را می توان در یک عدد غیر از صفر ضرب و یا بر یک عدد غیر از صفر تقسیم کرد و سپس با عناصر مربوطه یک ردیف دیگر جمع کرد.

مثال – با استفاده از ماتریس ها، دستگاه های زیر را حل کنید.

$$۱) \quad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

ماتریکس مربوط به دستگاه بالا مطابق زیر است.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

سعی می کنیم با استفاده از عملیات ردیفی یک ماتریکس معادل که شبیه ماتریکس زیر باشد بنویسیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \end{array} \right]$$

در ماتریکس اولیه ما، عنصر ردیف اول، اولین ستون، از پیش یک است. حالا یک ماتریکس معادل می سازیم که زیر یک، صفر باشد. برای این کار، عناصر ردیف اول را در -2 ضرب کرده و با عناصر ردیف دوم اضافه می کنیم. پس لازم است فقط ردیف دو را تغییر دهیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ -2(1) + 2 & -2(3) + (-1) & -2(5) + (-4) \end{array} \right]$$

ساده می کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array} \right]$$

حالا -7 را به یک تبدیل می کنیم. برای این کار عناصر ردیف دو را بر -7 تقسیم می کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \\ \frac{-1}{-7} & \frac{-3}{-7} & \frac{-5}{-7} \end{array} \right]$$

ساده می کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

ماتریکس بدست آمده بالا مربوط میشود به دستگاه زیر.

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

برای پیدا کردن x در معادله اول بجای y می گذاریم ۲

$$x + 3y = 5$$

$$x + 3(2) = 5$$

$$x = -1$$

پس زوج مرتب $(-1, 2)$ جواب دستگاه است. امتحان کنید.

$$۲) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

ماتریکس مربوطه مطابق ذیل است.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{array} \right]$$

برای بدست آوردن یک در ردیف اول ، ستون اول ، ردیف یک را بر دو تقسیم می کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{array} \right]$$

ساده می کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{array} \right]$$

برای این که زیر عدد یک ، صفر داشته باشیم، عناصر ردیف اول را در -4 ضرب کرده و با عناصر ردیف دو جمع می کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -4(1) + 2 & -4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 & -4\left(\frac{3}{2}\right) + 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{array} \right]$$

ساده می کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

دستگاه مربوطه مطابق زیر است.

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \\ 0 = -1 \end{cases}$$

چون $0 = -1$ یک معادله غلط است ، پس دستگاه متناقض است. دستگاه جوابی ندارد.

استفاده از ماتریس ها برای حل یک دستگاه سه معادله ای

Using Matrices to Solve a System of Three Variables

برای حل یک دستگاه سه معادله ای سه مجهوله از طریق ماتریس ها ، ماتریکس مربوطه را به شکل زیر می نویسیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & d \\ 0 & 1 & c & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array} \right]$$

$$3) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -2x - y + 2z = 5 \\ x + 3y - 2z = -8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \end{array} \right]$$

هدف ما این است که یک ماتریکس معادل بسازیم بطوری که قطر مستطیل آن عدد یک باشد. به اعداد قرمز رنگ در ماتریکس بالا توجه کنید. و زیر این اعداد یک ، صفر باشد. عنصر اولین ردیف ، و اولین ستون عدد ۱ است. دومین قدم این است که بقیه ارقام ستون اول را به صفر تبدیل کنیم. برای این کار ، اول عناصر ردیف اول را در ۲ ضرب نموده و عناصر جدید را با عناصر ردیف ۲ جمع می کنیم. همچنین عناصر ردیف اول را در ۱- ضرب نموده و با عناصر ردیف سوم جمع می کنیم. ردیف اول را تغییر نمی دهیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2(1) + (-2) & 2(2) + (-1) & 2(1) + 2 & 2(2) + 5 \\ -1(1) + 1 & -1(2) + 3 & -1(1) + (-2) & -1(2) + (-8) \end{array} \right]$$

ساده می کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \end{array} \right]$$

حال برای این که عنصر ردیف دوم ، ستون دوم عدد ۱ باشد ، ردیف های دو و سه را جابجا می کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{array} \right]$$

حالا می خواهیم عنصر ردیف سوم ، ستون دوم ، صفر باشد. برای این کار عناصر ردیف دو را در ۳- ضرب کرده و نتیجه را با عناصر ردیف سوم جمع می کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ -3(0)+0 & -3(1)+3 & -3(-3)+4 & -3(-10)+9 \end{array} \right]$$

ساده می کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array} \right]$$

برای این که ستون سوم از ردیف سوم یه باشد ، ردیف سوم را بر ۱۳ تقسیم می کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

این متریکس مربوط مو شود به دستگاه زیر.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y - 3z = -1 \circ \\ z = 3 \end{cases}$$

پس $z = 3$ است. آنرا در معادله دوم می‌گذاریم تا مقدار y پیدا شود.

$$y - 3z = -1 \circ$$

$$y - 3(3) = -1 \circ$$

$$y = -1$$

و در نهایت

$$x + 2y + z = 2$$

$$x + 2(-1) + 3 = 2$$

$$x - 2 + 3 = 2$$

$$x = 1$$

سه گانه مرتب $(1, -1, 3)$ جواب دستگاه است. امتحان کنید.

تمرینات ۸.۴

دستگاه های زیر را از طریق بکار بردن متریکس ، حل کنید.

$$۱) \begin{cases} x + y = ۱ \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} x + ۳y = ۲ \\ x + ۲y = ۰ \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} x - ۲y = ۴ \\ ۲x - ۴y = ۴ \end{cases}$$

$$۴) \begin{cases} ۳x - ۳y = ۹ \\ ۲x - ۲y = ۶ \end{cases}$$

$$۵) \begin{cases} x - ۴ = ۰ \\ x + y = ۱ \end{cases}$$

$$۶) \begin{cases} x + y = ۳ \\ ۲y = ۱۰ \\ ۳x + ۲y - ۴z = ۱۲ \end{cases}$$

پاسخ تمرینات ۸.۴

دستگاه های زیر را از طریق بکار بردن متریکس ، حل کنید.

برای اختصار بجای کلمه ردیف حروف $R, R_1, R_2, r_1, r_2, \dots$ بکار می بریم مثلاً برای این که بگوییم ردیف یک را در

۲- ضرب می کنیم و با ردیف دو جمع کرده و بجای ردیف دو می گذاریم ، می نویسیم $R_2 = -2r_1 + r_2$

همچنین اگر یک ردیف را در عدد یک بخواهیم ضرب کنیم ، این کار را ذکر نمی کنیم. چون در هر حال نتیجه همان

ردیف است. بجای این که بگوییم ردیف دو را در ۱- ضرب می کنیم. می گویم $-r_1$

$$1) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{array} \right] R_2 = r_1 - r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

$$R_2 = \frac{r_2}{3} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1$$

$$x + y = 1$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 1 + 1$$

$$x = 2$$

$$(2, 1)$$

$$2) \quad \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right] R_2 = r_2 - r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$R_2 = \frac{r_2}{-1} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x + 3y = 2$$

$$x + 3(2) = 2$$

$$x + 6 = 2$$

$$x = -4$$

$$(-4, 2)$$

$$3) \quad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

$$R_2 = -2r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

ϕ

$$4) \quad \begin{cases} 3x - 3y = 9 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 = \frac{r_1}{3}, R_2 = \frac{r_2}{2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\{(x, y) | x - y = 3\}$$

$$5) \quad \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 = r_1 - r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow y = -3$$

$$x + y = 1$$

$$x + (-3) = 1$$

$$x = 4$$

$$(4, -3)$$

$$e) \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = 10 \\ 3x + 2y - 4z = 12 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & -4 & 12 \end{array} \right] R_3 = \frac{r_2}{2} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -4 & 12 \end{array} \right]$$

$$R_3 = r_3 - 3r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 9 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{array} \right] R_3 = r_3 + r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right] R_3 = \frac{r_3}{-4} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 5 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$y = 5 \quad z = -2$$

$$x + y = 3$$

$$x + 5 = 3$$

$$x = -2$$

$$(-2, 5, -2)$$

۸.۵- حل دستگاه های معادلات با استفاده از مبین ها

Solving Systems of Equations Using Determinants

تا کنون دستگاه های معادلات را از چهار طریق حال کرده ایم. از طریق ترسیم نمودار ، از طریق جانشینی ، از طریق حذف و از طریق ماتریس ها. اینک روش دیگری که به نام قاعده کرامر معروف است بر رسی می کنیم.

قاعده کرامر: Cramer's Rule

Evaluating 2X2 Determinants: پیدا کردن مبین های دو در دو

بخاطر دارید که گفتیم یک ماتریکس عبارت است از یک ارایه مستطیلی از اعداد. اگر تعداد ردیف ها و ستون های یک ماتریکس برابر باشد ، به آن ماتریکس مربعی Square Matrix می گویند. ماتریس های زیر مربعی هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

یک مبین A Determinant یک عدد حقیقی در رابطه با یک ماتریکس مربعی است. برای نشان دادن مبین یک ماتریکس مربعی ، بجای نماد $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ نماد $| \quad |$ بکار می بریم. پس اگر a, b, c, d اعداد حقیقی باشند ، نماد

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

یک مبین دو در دو نامیده می شود و مقدار آن ، عدد $ad - bc$ است. یعنی

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال ۱ - مقدار هر یک از مبین ها را پیدا کنید.

$$a) \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \quad b) \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$$

پاسخ

$$a) \quad D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

$$b) \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 7(0) = -10$$

بکار بردن قاعده کرامر برای حل یک دستگاه دو معادله خطی

Using Cramer's Rule to Solve a System of Two Linear Equations

برای بسط دادن Develop قاعده کرامر ، دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases}$$

با استفاده از روش حذف ، سعی می کنیم y را حذف کنیم. برای این کار هر دو طرف معادل اول را در d و دو طرف معادله دوم را در $-b$ ضرب می کنیم.

$$\begin{cases} d(ax + by) = d \times h \\ -b(cx + dy) = -b \times k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} adx + aby = dh \\ -bcx - bdy = -bk \end{cases} \rightarrow adx - bcx = hd - kb \rightarrow$$

$$(ad - bc)x = hd - kb \rightarrow x = \frac{hd - kb}{ad - bc}$$

مقدار بدست آمده برای x را در معادله اول می گذاریم تا مقدار y بدست آید.

$$ax + by = h$$

$$a \frac{hd - kb}{ad - bc} + by = h$$

$$by = h - \frac{ahd - akb}{ad - bc}$$

$$by = \frac{adh - bch - ahd + akb}{ad - bc} = \frac{b(ak - ch) + h(ad - ad)}{ad - bc} = \frac{b(ak - ch)}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\frac{b(ak - ch)}{ad - bc}}{b} = \frac{ak - ch}{ad - bc}$$

ملاحظه می کنید که صورت مقدار x مبین

$$\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix} = hd - kb$$

است و همچنین صورت مقدار y مبین

$$\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix} = ak - hc$$

و بالاخره، مخارج های مقادیر x و y مساوی هستند و مبین

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

برای سهولت، مبین ها را مطابق زیر نام گذاری می کنیم.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}$$

ملاحظه می کنید که ضریب های x در دستگاه اولیه، ستون اول D_y است و ضریب های y در دستگاه اولیه، ستون دوم D_x است.

همچنین اعداد ثابت در دستگاه اولیه، ستون اول D_x و ستون دوم D_y را تشکیل می دهند.

قاعده کرامر برای حل دو معادله خطی دو مجهولی

Cramer's Rule for Two Linear Equations in Two Variables

جواب دستگاه $\begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases}$ مطابق فرمول های زیر بدست می آید.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

به شرطی که $D = ad - bc$ صفر نباشد.

دستگاه های زیر را از طریق قاعده کرامر حل کنید.

$$۲) \quad \begin{cases} ۳x + ۴y = -۷ \\ x - ۲y = -۹ \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۳(-۲) - ۴(۱) = -۱۰$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -۷ & ۴ \\ -۹ & -۲ \end{vmatrix} = (-۷)(-۲) - ۴(-۹) = ۵۰$$

$$D_y = \begin{vmatrix} ۳ & -۷ \\ ۱ & -۹ \end{vmatrix} = ۳(-۹) - (-۷)(۱) = -۲۰$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5 \circ}{-1 \circ} = -5$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2 \circ}{-1 \circ} = 2$$

$$(-5, 2)$$

$$3) \quad \begin{cases} 5x + y = 5 \\ -7x - 2y = -7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 5(-2) - 1(-7) = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 5(-2) - 1(-7) = -3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 5(-7) - 5(-7) = 0$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$(1, 0)$$

Evaluating 3X3 Determinants پیدا کردن مبین های سه در سه

Determinant of A 3 X 3 Matrix مبین یک متریکس سه در سه

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ملاحظه می کنید که مبین یک ماتریکس سه در سه مربوط میشود به مبین سه ماتریس دو در دو. هر کدام از مبین های این سه ماتریس دو در دو، مبین فرعی Minor نامیده میشوند. و هر کدام از عناصر یک ماتریکس سه در سه، یک مبین فرعی مربوطه دارد. مثلاً، مبین فرعی c_2 عبارت است از یک ماتریکس دو در دو که تشکیل شده است از عناصر ماتریکس سه در سه اولیه با حذف آن ستون و ردیفی که c_2 در آن جای دارد. پس

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ مبین فرعی } c_2$$

و مبین فرعی a_1 عبارت است از یک ماتریکس دو در دو که تشکیل شده است از عناصر ماتریکس سه در سه اولیه با حذف آن ستون و ردیفی که a_1 در آن جای دارد. پس

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ مبین فرعی } a_1$$

پس مبین یک ماتریکس سه در سه می توان به صورت زیر نوشت.

$$a_1 \times (\text{مبین فرعی } a_1) - a_2 \times (\text{مبین فرعی } a_2) + a_3 \times (\text{مبین فرعی } a_3)$$

پیدا کردن مبین از طریق استفاده از مبین های فرعی ستون اول، بسط دادن **Expanding** مبین های فرعی ستون اول نامیده میشود.

مقدار مبین را می توان با بسط دادن مبین های فرعی هر ستون و یا هر ردیف پیدا کرد.

ارایه علامت ها **Array of Signs** برای پیدا کردن علامت ها مفید است.

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

مثال ۴ - مقدار مبین ماتریکس زیر را

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

از طریق بسط

الف – اولین ستون

ب – دومین ردیف

پیدا کنید.

پاسخ

الف

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$0(12 - (-4)) - 1(20 - 2) - 2(-5 - 3) = 0 - 18 + 16 = -2$$

ب –

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-1(20 - 2) + 3(0 - (-2)) + 1(0 - (-10)) = -18 + 6 + 10 = -2$$

استفاده از قاعده کرامر برای حل یک دستگاه سه معادله خطی

Using Cramer's Rule to Solve a System of Three Linear Equations

اگر همان روشی را که در ماتریکس دو در دو بکار بردیم و قاعده حل یک دستگاه دو معادله دو مجهولی را بدست آوردیم ، بکار ببریم، قاعده زیر بدست می آید.

قاعده کرامر برای حل سه معادله سه مجهولی

Cramer's Rule for Three Equations in Three Variables

حل دستگاه

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$$

عبارت است از

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

و

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

به شرطی که $D \neq 0$

مثال ۵ - با استفاده از قاعده کرامر ، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ 5x + 5y + 3z = -8 \end{cases}$$

حل

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$1(3 - (-10)) - 3(-6 - 5) + 5(4 - 1) = 13 + 33 + 15 = 61$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-8 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}) =$$

$$4(3 - (-10)) - 3(-6 - 5) - 8(4 - 1) = 52 + 33 - 24 = 61$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & -8 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$1(9 - 16) - 3(12 - (-8)) + 5(-8 - 3) = -7 - 60 - 55 = -122$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1(-8 - 15) - 3(16 - 20) + 5(-6 - 4) = -23 + 12 - 50 = -61$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{61}{61} = 1 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-122}{61} = -2 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-61}{61} = -1$$

$$(1, -2, -1)$$

امتحان کنید.

تمرینات ۸.۵

مقادیر هر یک از مبین ها را پیدا کنید.

$$۱) \begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ -۱ & ۷ \end{vmatrix} \quad D = ۲۶$$

$$۲) \begin{vmatrix} -۵ & ۱ \\ ۱ & -۴ \end{vmatrix} \quad D = ۱۹$$

$$۳) \begin{vmatrix} ۹ & -۲ \\ ۴ & -۳ \end{vmatrix} \quad D = -۱۹$$

$$۴) \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & -۳ \\ ۴ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} \quad D = ۸$$

$$۵) \begin{vmatrix} -۶ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} \quad D = ۹۲$$

$$۶) \begin{vmatrix} ۴ & -۶ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۰ \\ ۴ & -۶ & ۱ \end{vmatrix} \quad D = ۰$$

با استفاده از قاعده کرامر دستگاه های زیر را حل کنید.

$$۷) \begin{cases} ۲y - ۴ = ۰ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases} \quad (۱, ۲)$$

$$۸) \begin{cases} ۴x - y = ۵ \\ ۳x - ۳ = ۰ \end{cases} \quad (۱, -۱)$$

$$۹) \begin{cases} ۳x + y = ۱ \\ ۲y = ۲ - ۶x \end{cases} \quad \{(x, y) | ۳x + y = ۱\}$$

$$۱۰) \begin{cases} ۳x + z = -۱ \\ -x - ۳y + z = ۷ \\ ۳y + z = ۵ \end{cases} \quad (-۲, ۰, ۵)$$

$$۱۱) \begin{cases} ۴y - ۳z = -۲ \\ ۸x - ۴y = ۴ \\ -۸x + ۴y + z = -۲ \end{cases} \quad (۱, ۱, ۲)$$

$$۱۲) \begin{cases} x + y + z = ۸ \\ ۲x - y - z = ۱۰ \\ x - ۲y + ۳z = ۲۲ \end{cases} \quad (۶, -۲, ۴)$$

۸.۶ - دستگاه های نا معادله های خطی Systems of Linear Inequalities

رسم نمودار دستگاه های نا معادله های خطی Graphing Systems of Linear Inequalities

در بخش ۷.۶ نا معادله های خطی دو مجهولی را حل کردیم. همان طور که دو معادله خطی تشکیل یک دستگاه معادله های خطی می دهند، دو نا معادله خطی هم تشکیل یک دستگاه نا معادله خطی می دهند. دستگاه های نا معادله ها در برنامه ریزی خطی **Linear Programming** خیلی اهمیت دارند. بنگاه های تجاری برنامه ریزی خطی را برای پیدا کردن راه های سود آور بکار می برند. مثلا چگونه منابع محدودی مانند کارگر ها ، ماشین الات ، و ساختمان ها مورد استفاده قرار دهند.

یک جواب یک دستگاه نا معادله خطی ، یک دو گانه مرتبی است که هر دو نا معادله را برقرار کند. مجموعه چنین دو گانه های مرتب ، مجموعه جواب های دستگاه است. رسم این مجموعه تصویری از این مجموعه جواب ها را به ما میدهد. می توانیم نموداریک دستگاه نا معادله ها را رسم کنیم به این طریق که هر یک از نا معادله ها را ترسیم کنیم و سپس تداخل قسمت های سایه دار را مشخص کنیم.

رسم جواب های یک دستگاه نا معادله های خطی

Graphing the Solutions of a System of Linear Inequalities

الف - هر یک از نا معادله های در دستگاه را در همان صفحه مختصات رسم کنید.

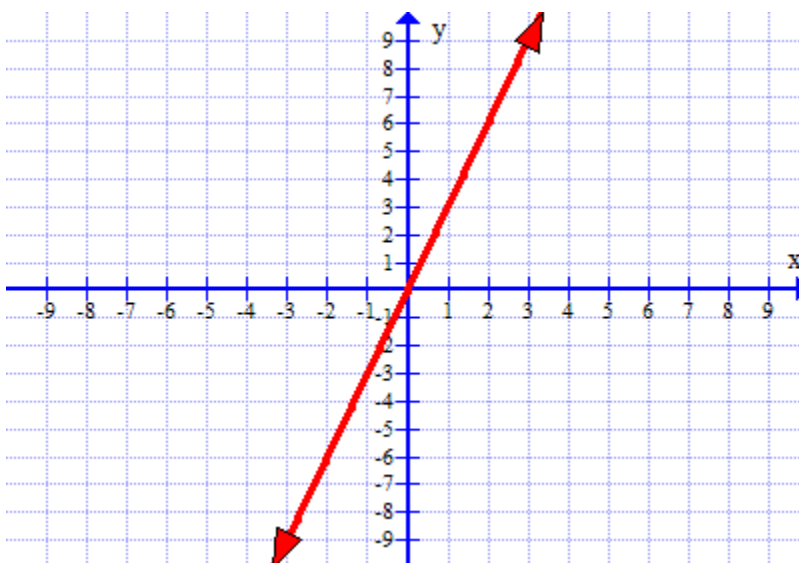
ب - جواب های دستگاه عبارت است از نقاط مشترک در نمودار تمام نا معادله های دستگاه. همان طور که در بخش ۷.۶ اشتراک مجموعه ها دیدیم.

مثال - جواب های دستگاه های زیر را ترسیم کنید.

$$۱) \begin{cases} 3x \geq y \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

ابتدایکی از نا معادله ها را در صفحه مختصات رسم می کنیم. سپس یک نقطه آزمایشی انتخاب می کنیم و در نا معادله قرار می دهیم. اگر آن نقطه آزمایشی ، نا معادله را برقرار کرد ، آن ناحیه که نقطه آزمایشی در آن قرار دارد ، سایه دار می کنیم. همین کار را در مورد نا معادله دیگر انجام می دهیم. جواب دستگاه تداخل قسمت های سایه دار است. آن قسمت را پررنگ تر می کنیم. در اینجا چون نماد های \geq ، \leq داریم ، خط کامل به عنوان خط مرزی رسم می کنیم. اگر نماد های $<$ ، $>$ داشتیم ، نقطه چین رسم می کنیم.

اول نا معادله $3x \geq y$ را رسم می کنیم. خط مرزی نمودار معادله $3x = y$ است. آنرا رسم می کنیم.



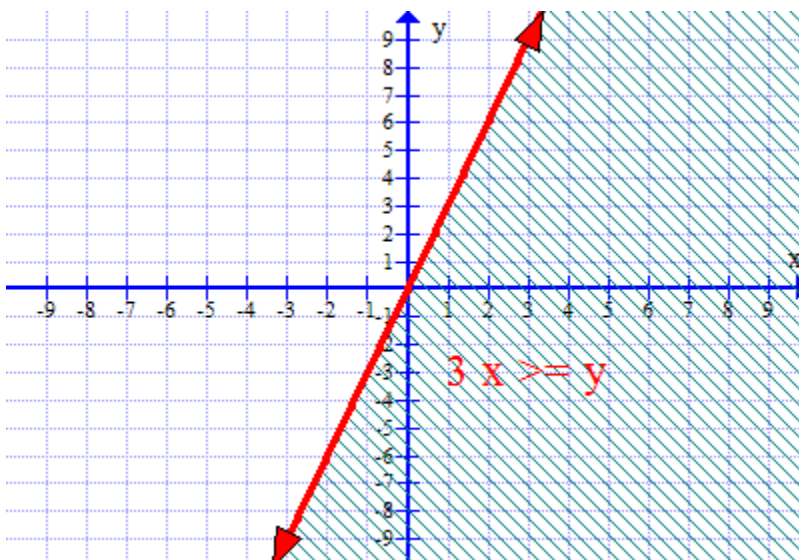
نقطه $(2, -2)$ را به عنوان نقطه آزمایشی انتخاب می کنیم.

$$3x \geq y$$

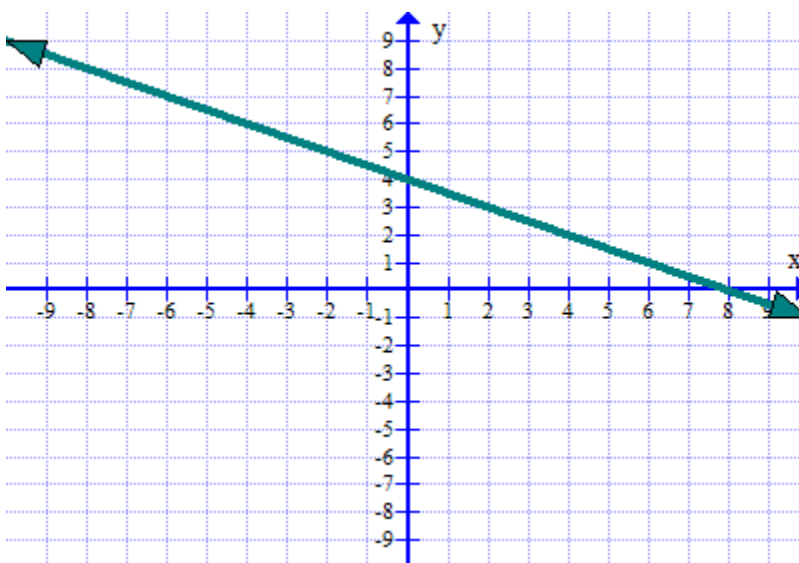
$$3(2) \geq -2$$

$$6 \geq -2$$

نامعادله برقرار است. پس زیر خط را سایه دار می کنیم.



نامعادله $x + 2y \leq 8$ را رسم می کنیم. خط مرزی، نمودار معادله $x + 2y = 8$ است. آنرا رسم می کنیم.



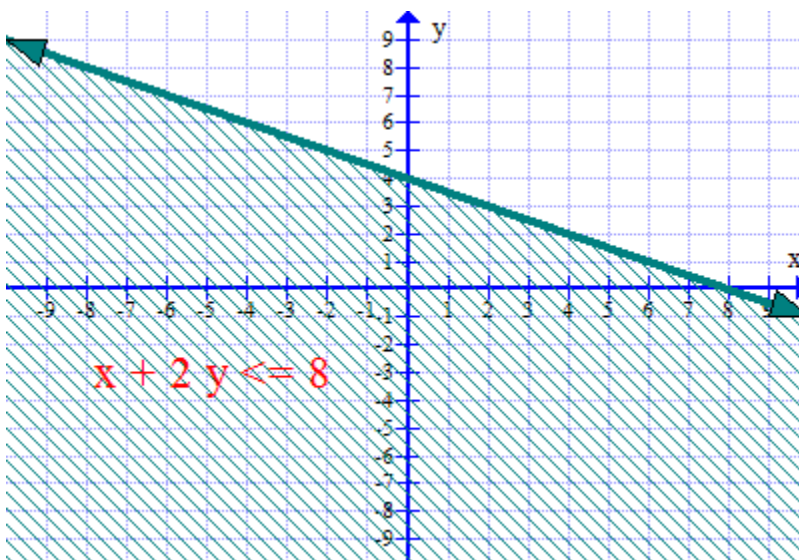
نقطه $(2, -2)$ را به عنوان نقطه آزمایشی ، انتخاب می کنیم.

$$x + 2y \leq 8$$

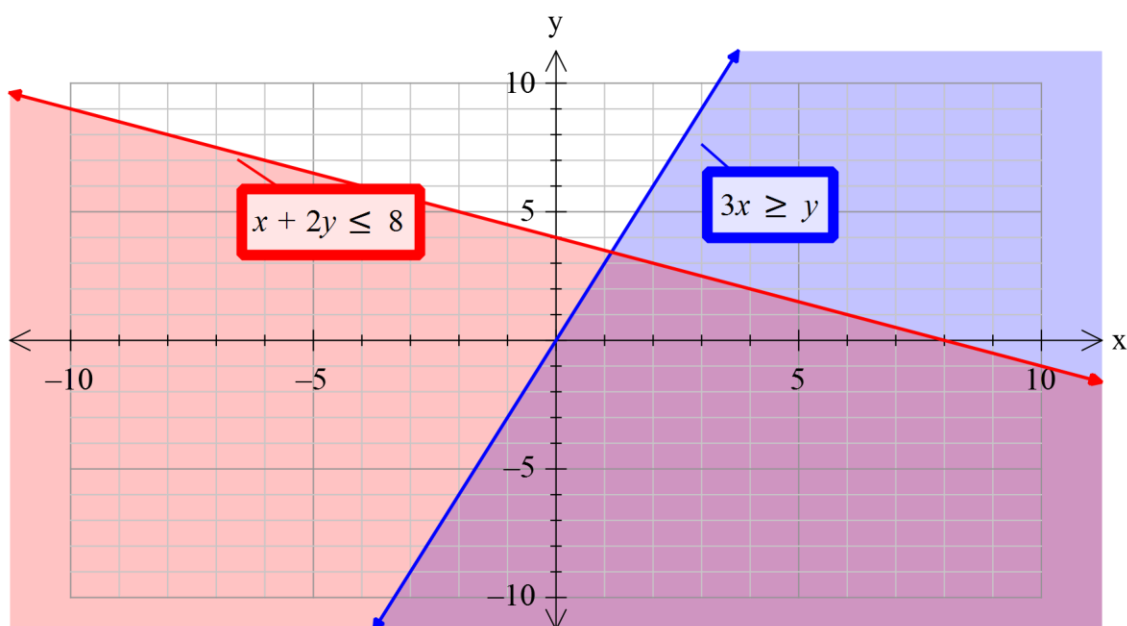
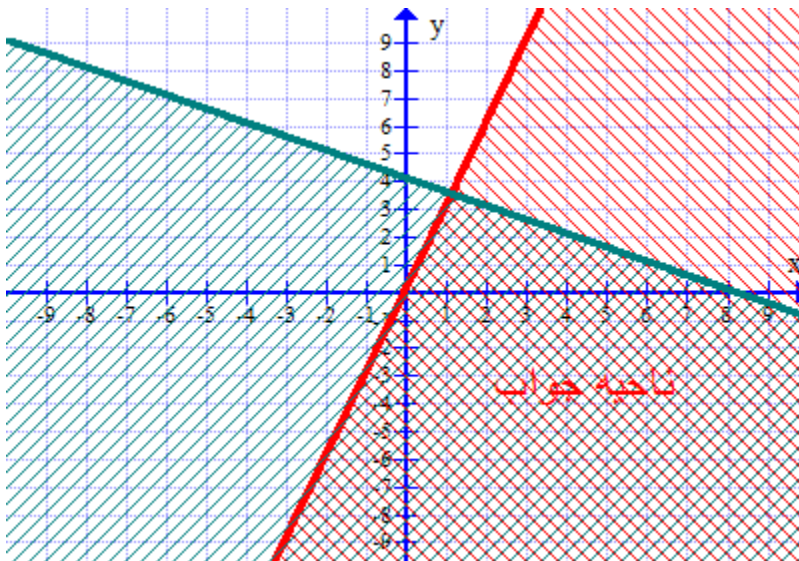
$$2 + 2(-2) \leq 8$$

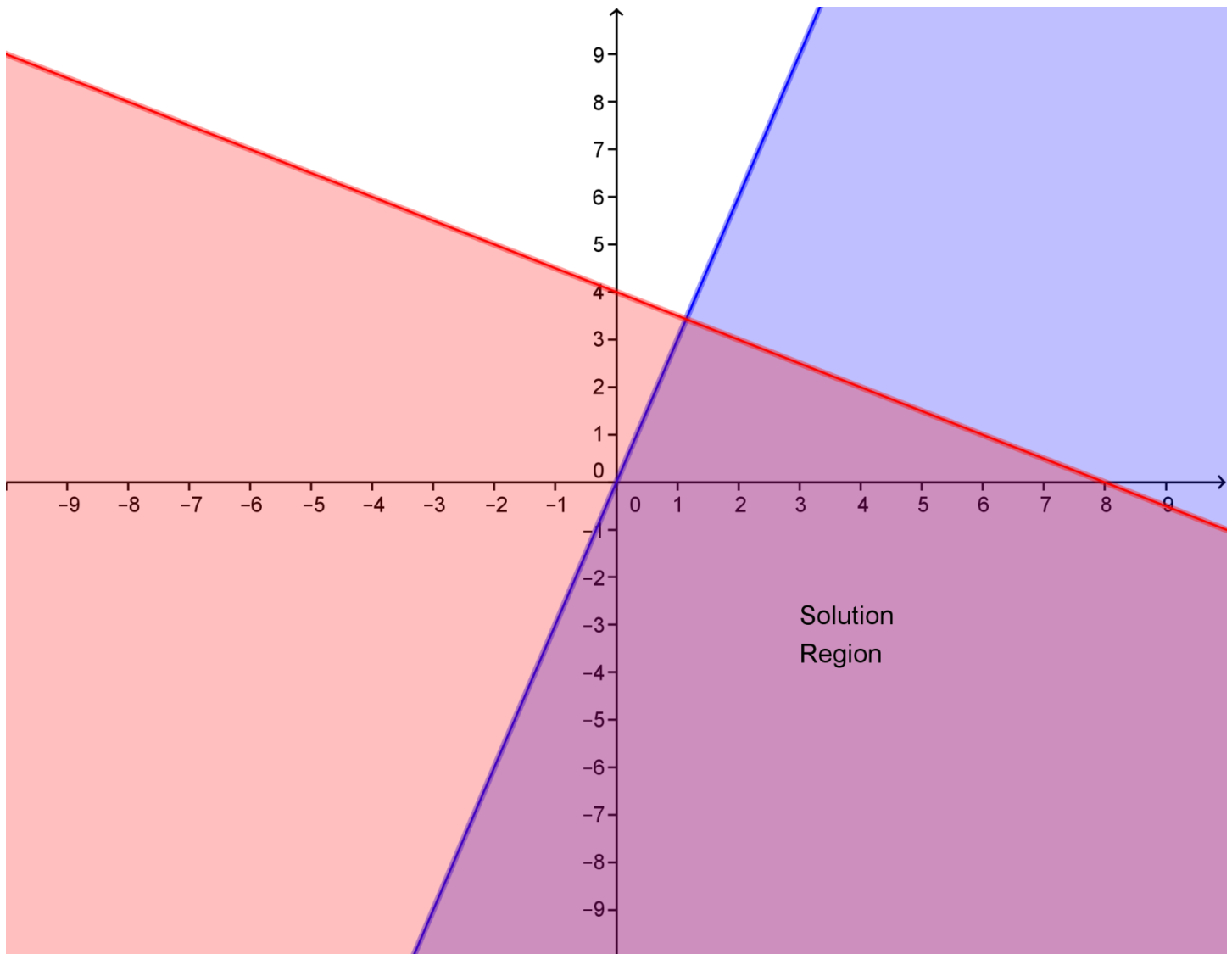
$$-2 \leq 8$$

نامعادله برقرار است. پس زیر خط را سایه در می کنیم.

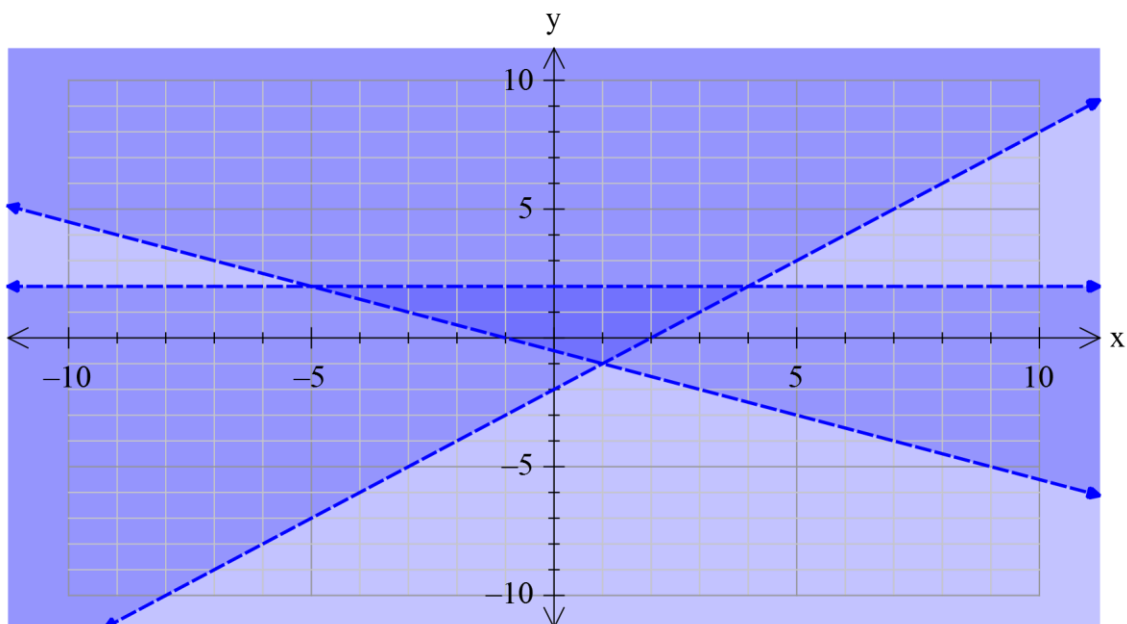


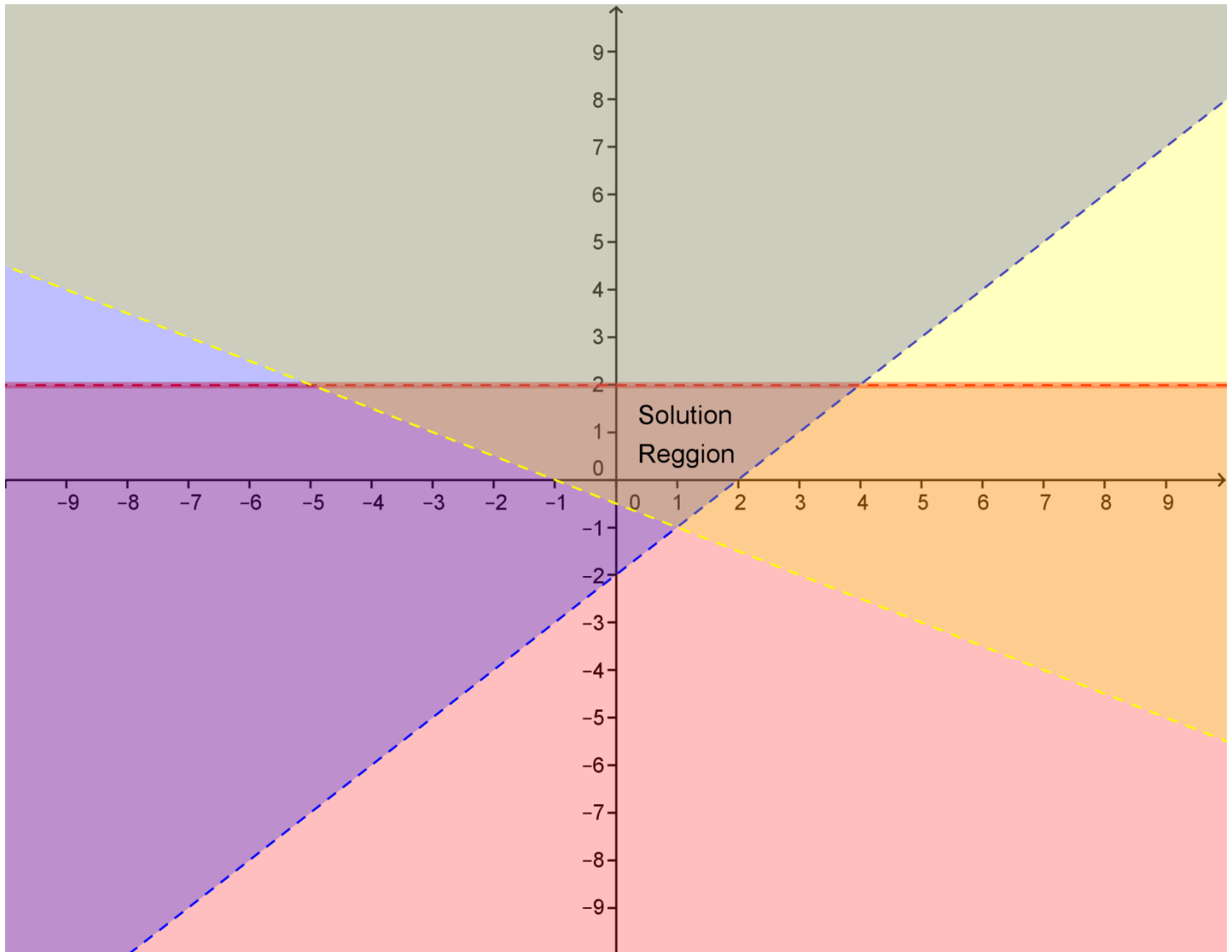
حال هر دو نا معادله را روی یک صفحه مختصات رسم می کنیم.



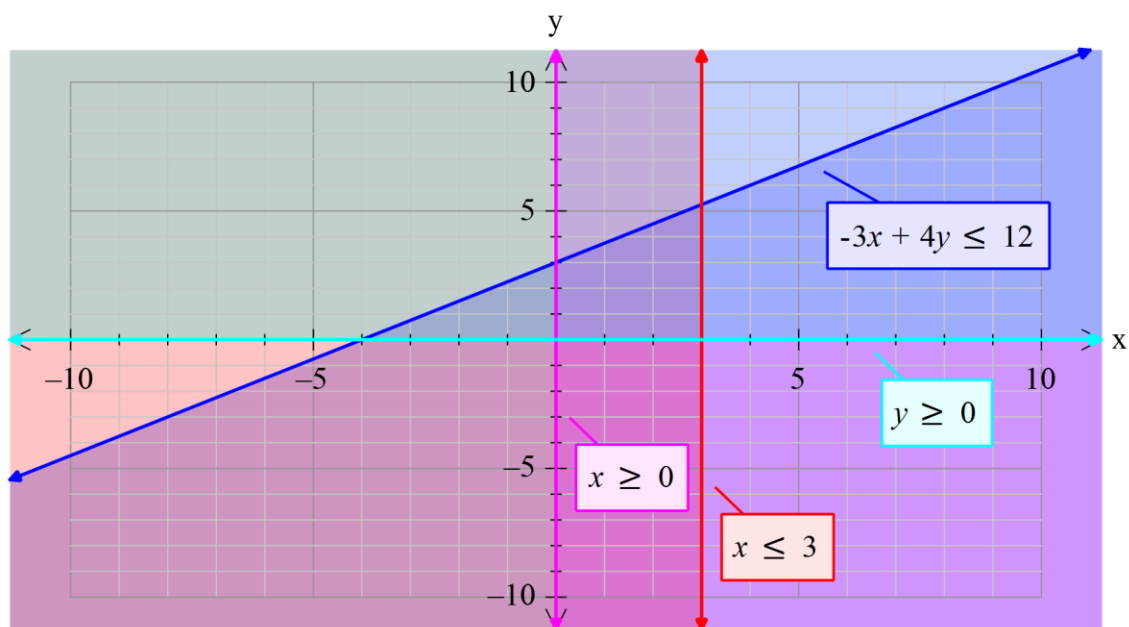


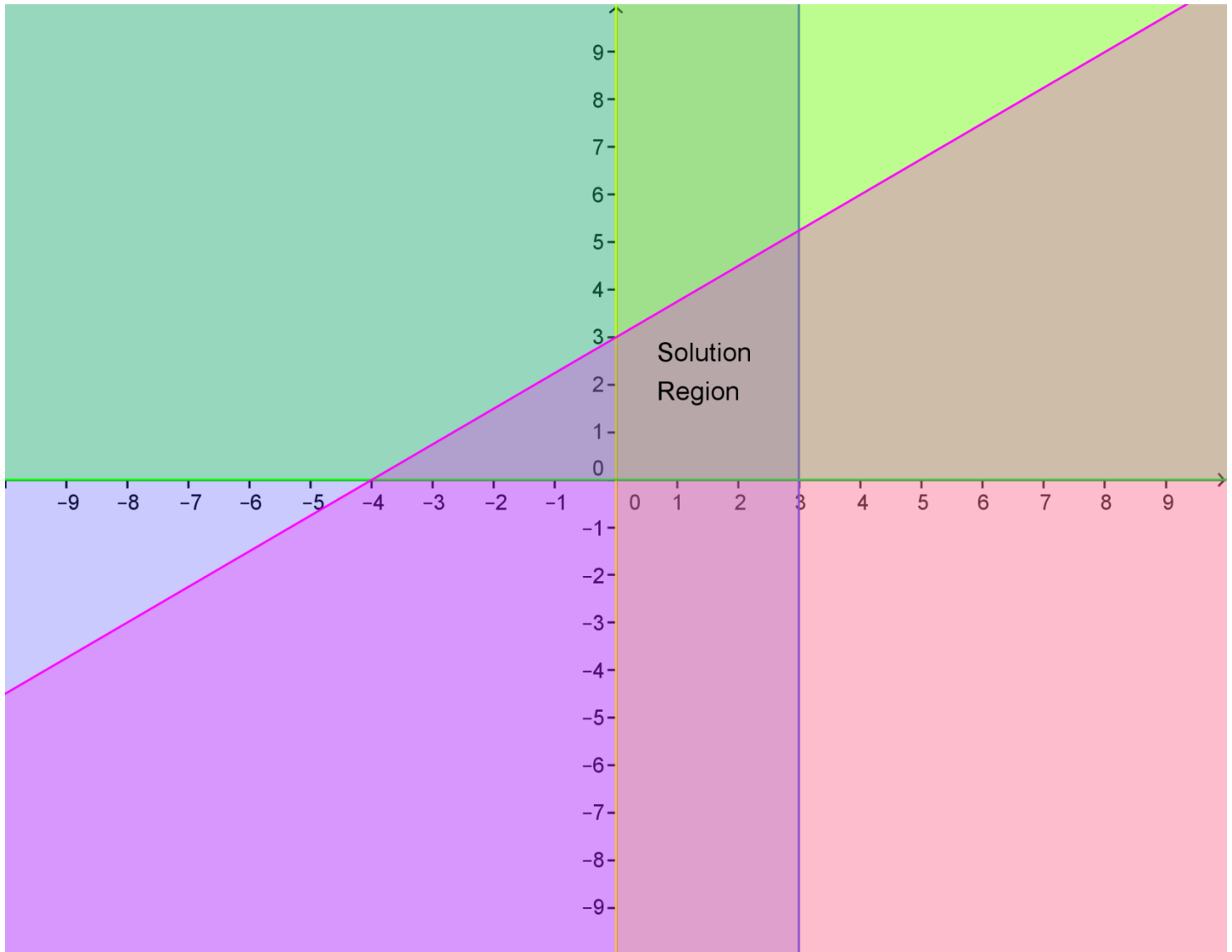
$$۲) \begin{cases} x - y < ۲ \\ x + ۲y > -۱ \\ y < ۲ \end{cases}$$





$$۳) \begin{cases} -3x + 4y \leq 12 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$





تمرینات ۸.۶

جواب های هر یک از دستگاه های نامعادلات زیر را ترسیم کنید.

Solution Region ناحیه جواب

$$۱) \begin{cases} y \geq x + ۱ \\ y \geq ۳ - x \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} y < ۳x - ۴ \\ y \leq x + ۲ \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} y \leq -۲x - ۲ \\ y \geq x + ۴ \end{cases}$$

$$۴) \begin{cases} y \geq -x + ۲ \\ y \leq ۲x + ۵ \end{cases}$$

$$۵) \begin{cases} x \geq ۳y \\ x + ۳y \leq ۶ \end{cases}$$

$$۶) \begin{cases} y + ۲x \geq ۰ \\ ۵x - ۳y \leq ۱۲ \\ y \leq ۲ \end{cases}$$

$$۷) \begin{cases} ۳x - ۴y \geq -۶ \\ ۲x + y \leq ۷ \\ y \geq -۳ \end{cases}$$

$$۸) \quad \begin{cases} ۲x + y \leq ۵ \\ x \leq ۳ \\ x \geq ۰ \\ y \geq ۰ \end{cases}$$

$$۹) \quad \begin{cases} ۴x - y \geq -۲ \\ ۲x + ۳y \leq -۸ \\ y \geq -۵ \end{cases}$$

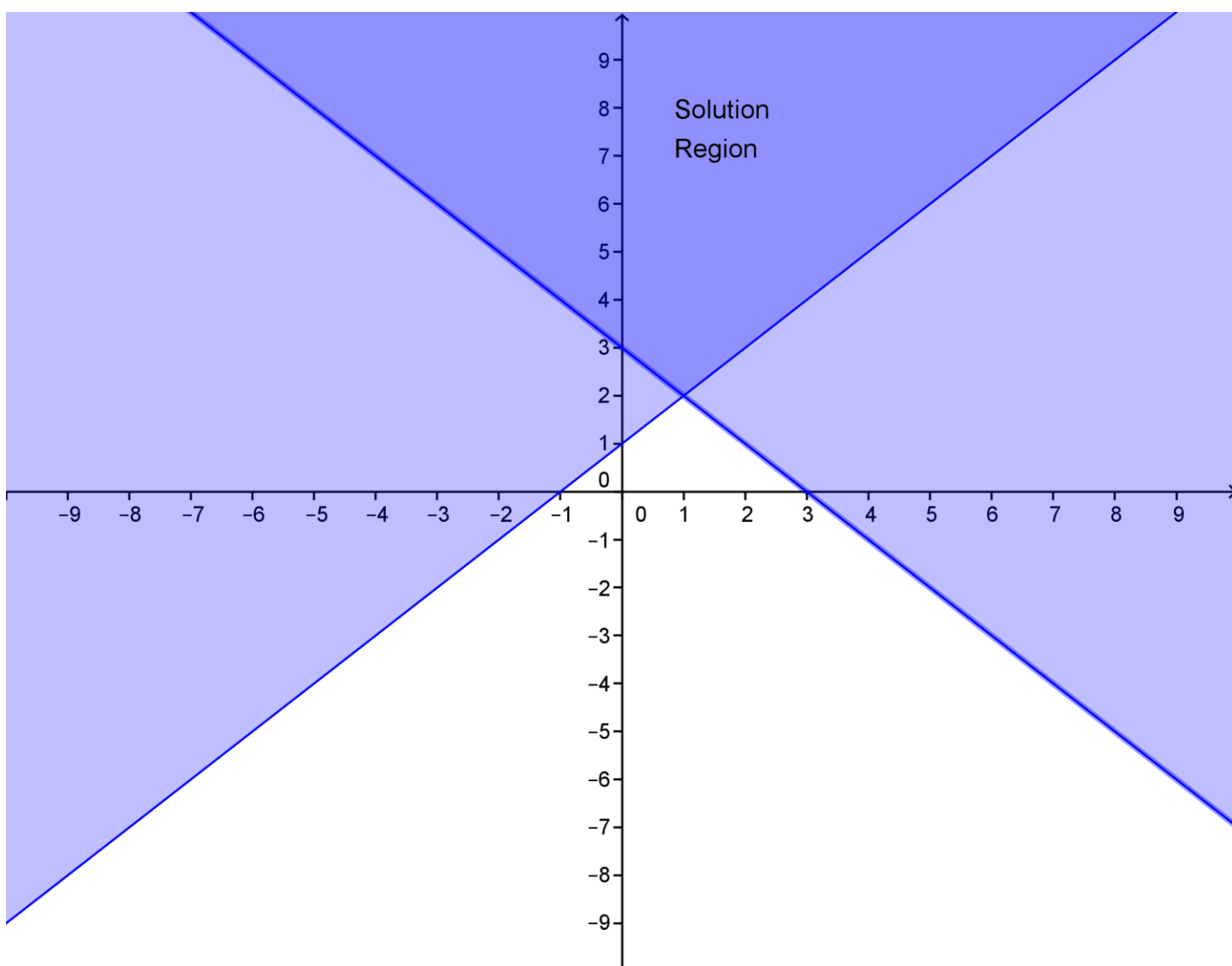
$$۱۰) \quad \begin{cases} ۳x + y \leq ۴ \\ x \leq ۴ \\ x \geq ۰ \\ y \geq ۰ \end{cases}$$

پاسخ تمرینات ۸.۶

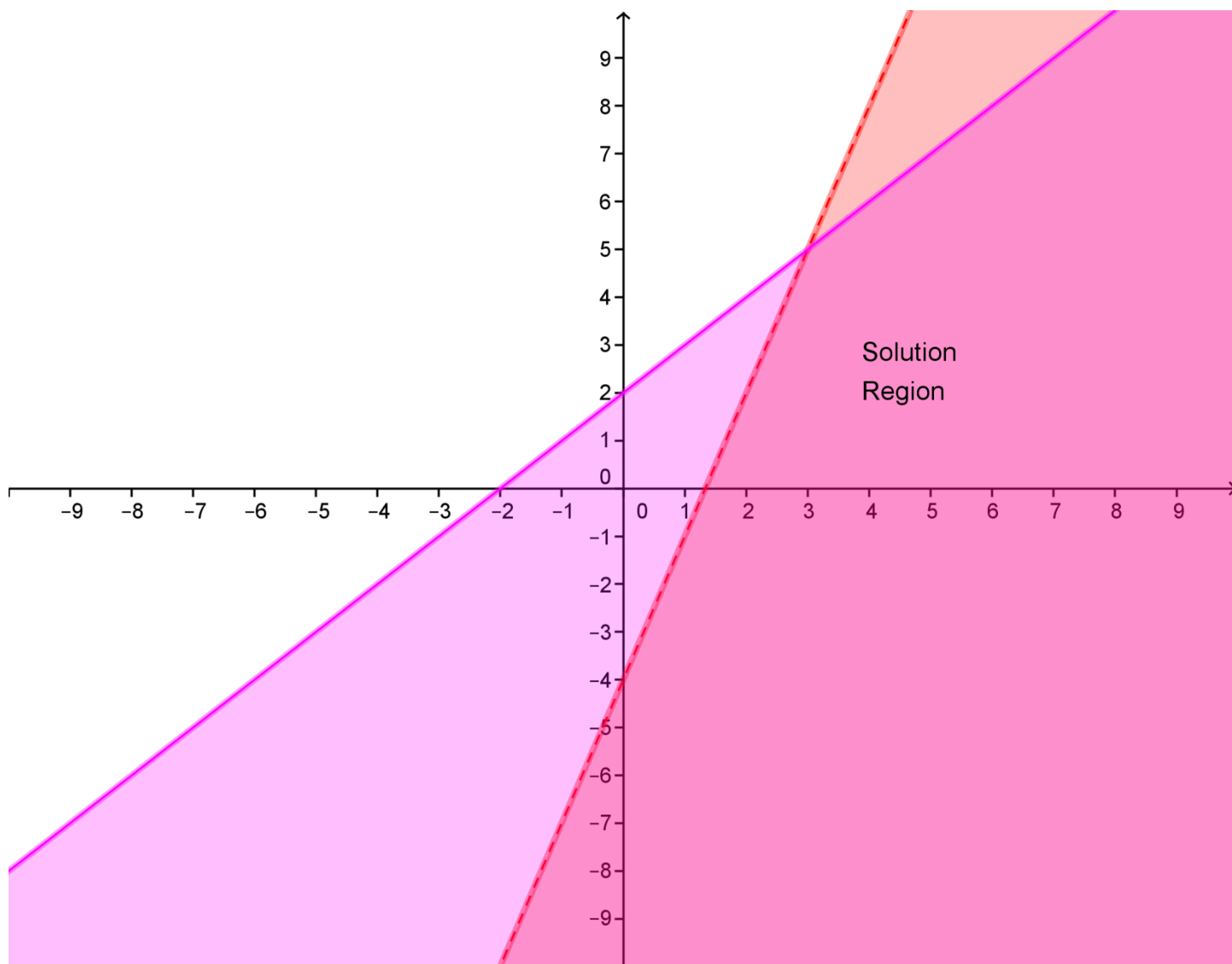
جواب های هر یک از دستگاه های نامعادلات زیر را ترسیم کنید.

ناحیه جواب Solution Region

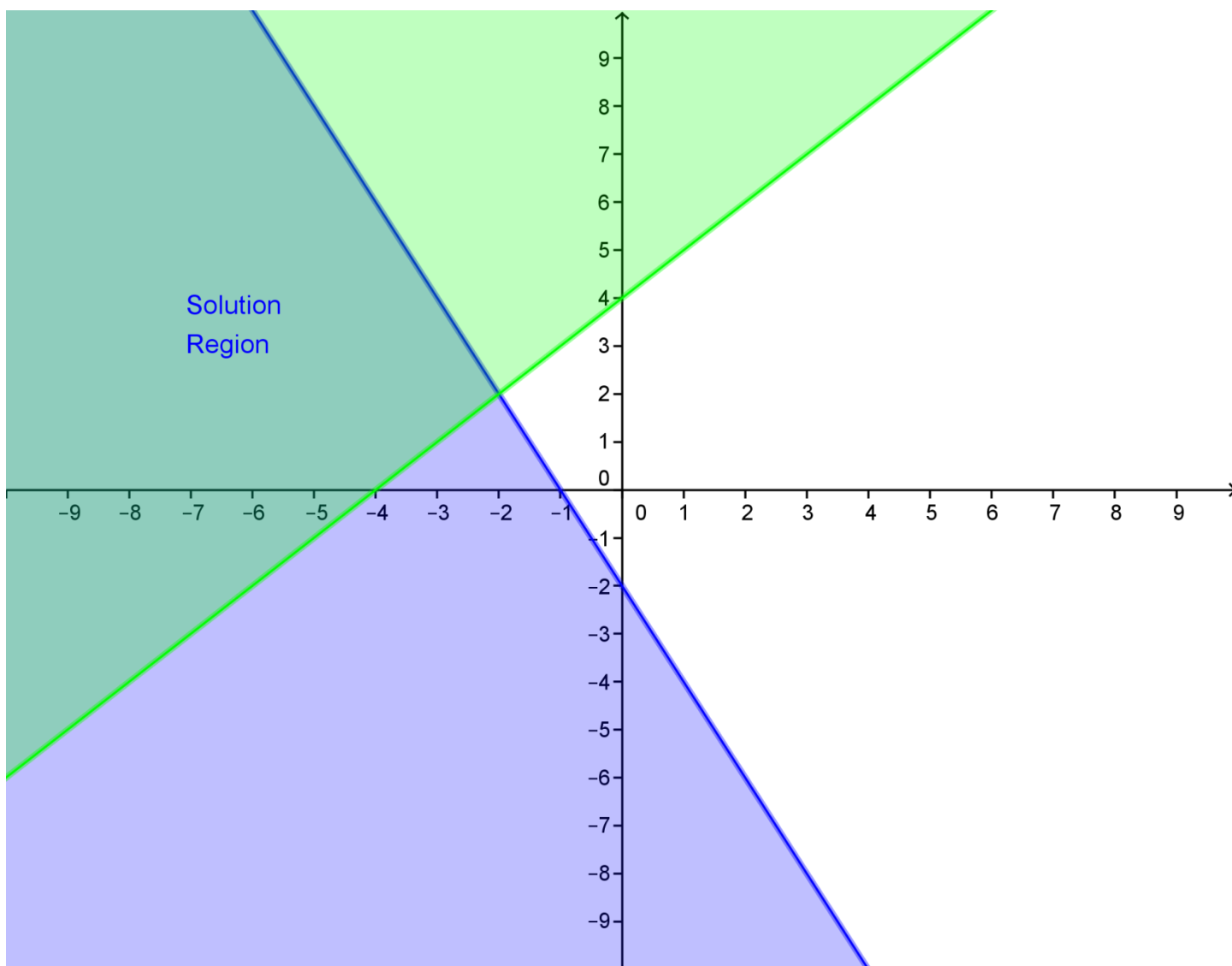
$$۱) \begin{cases} y \geq x + ۱ \\ y \geq ۳ - x \end{cases}$$



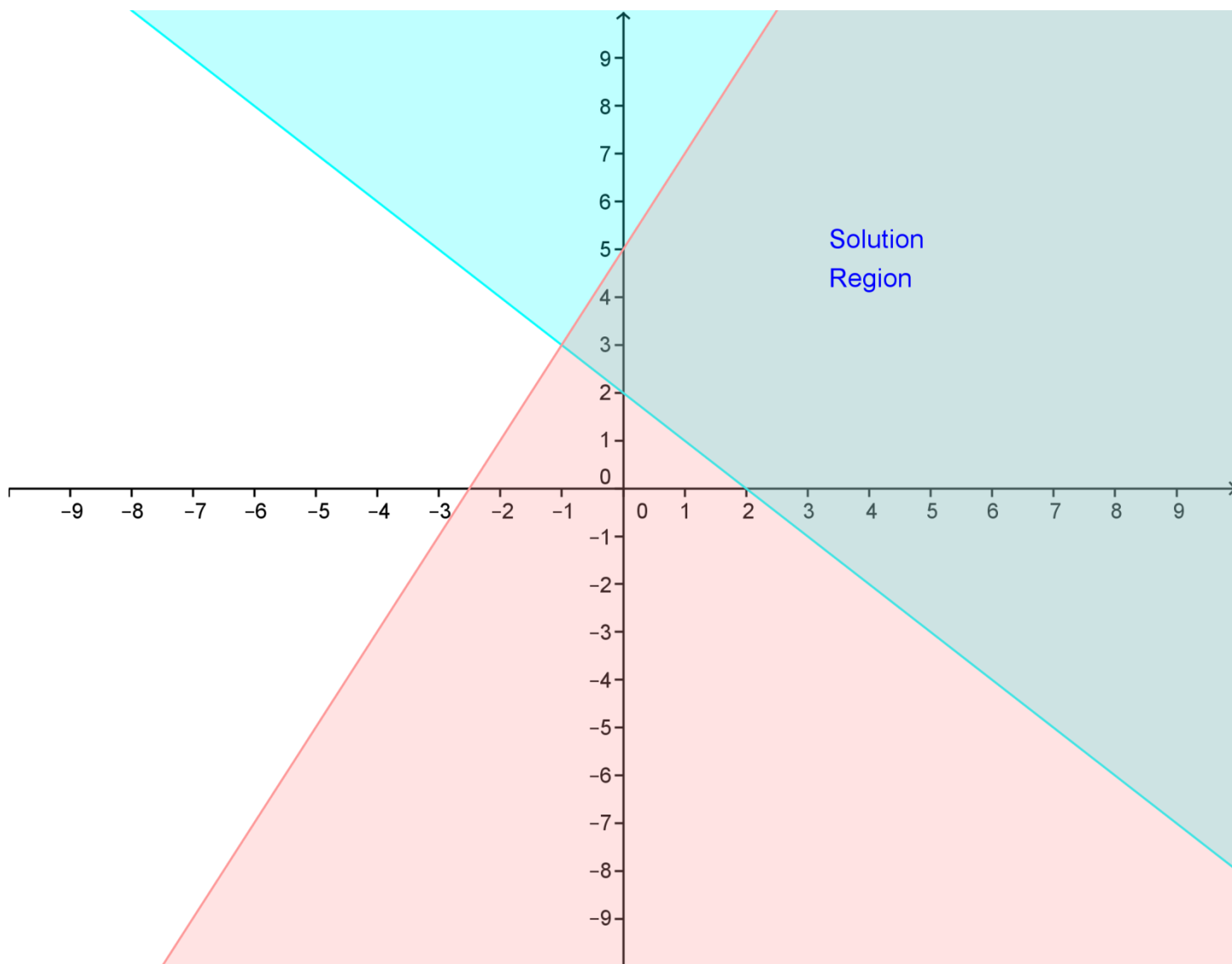
$$۲) \begin{cases} y < ۳x - ۴ \\ y \leq x + ۲ \end{cases}$$



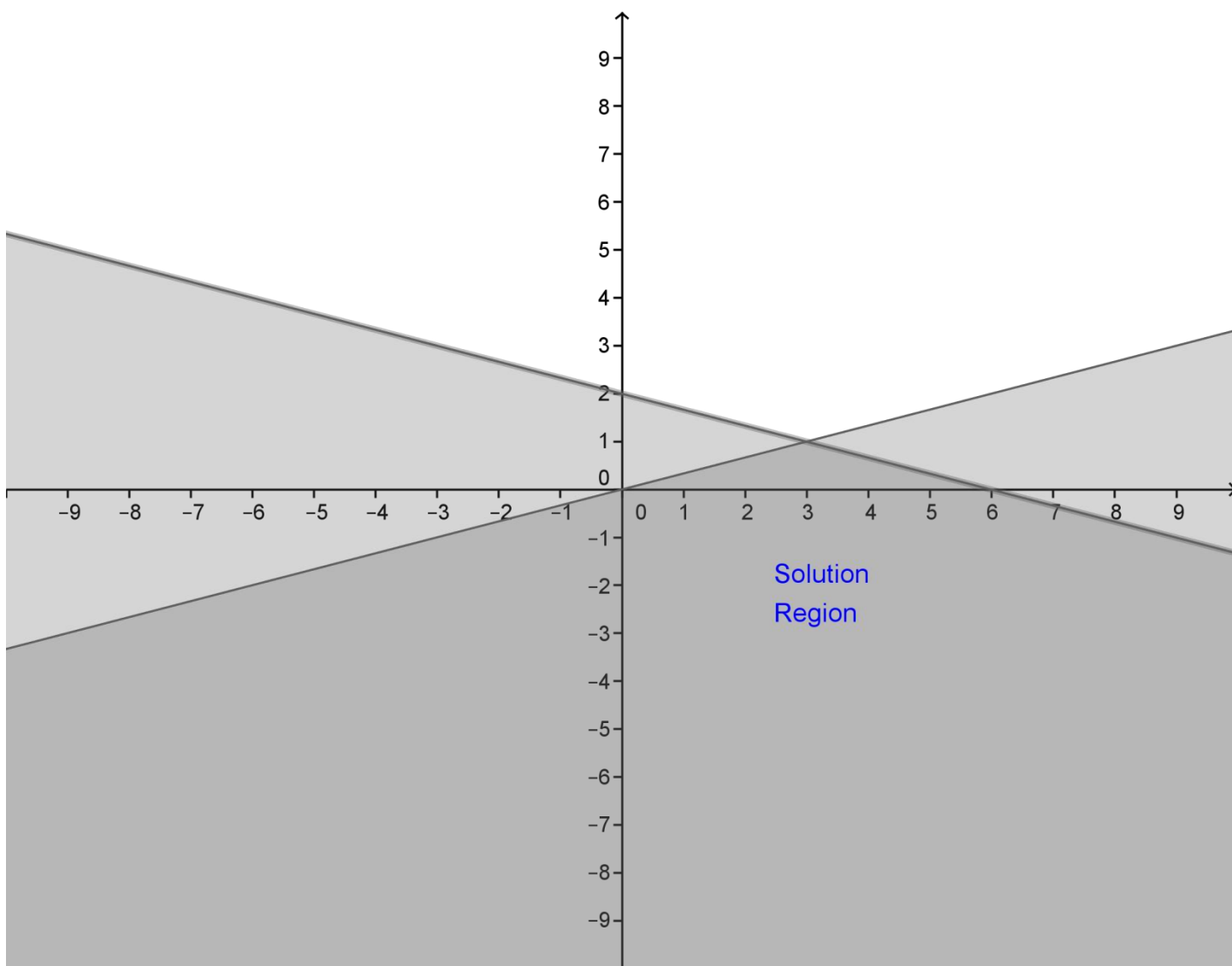
۳)
$$\begin{cases} y \leq -2x - 2 \\ y \geq x + 4 \end{cases}$$



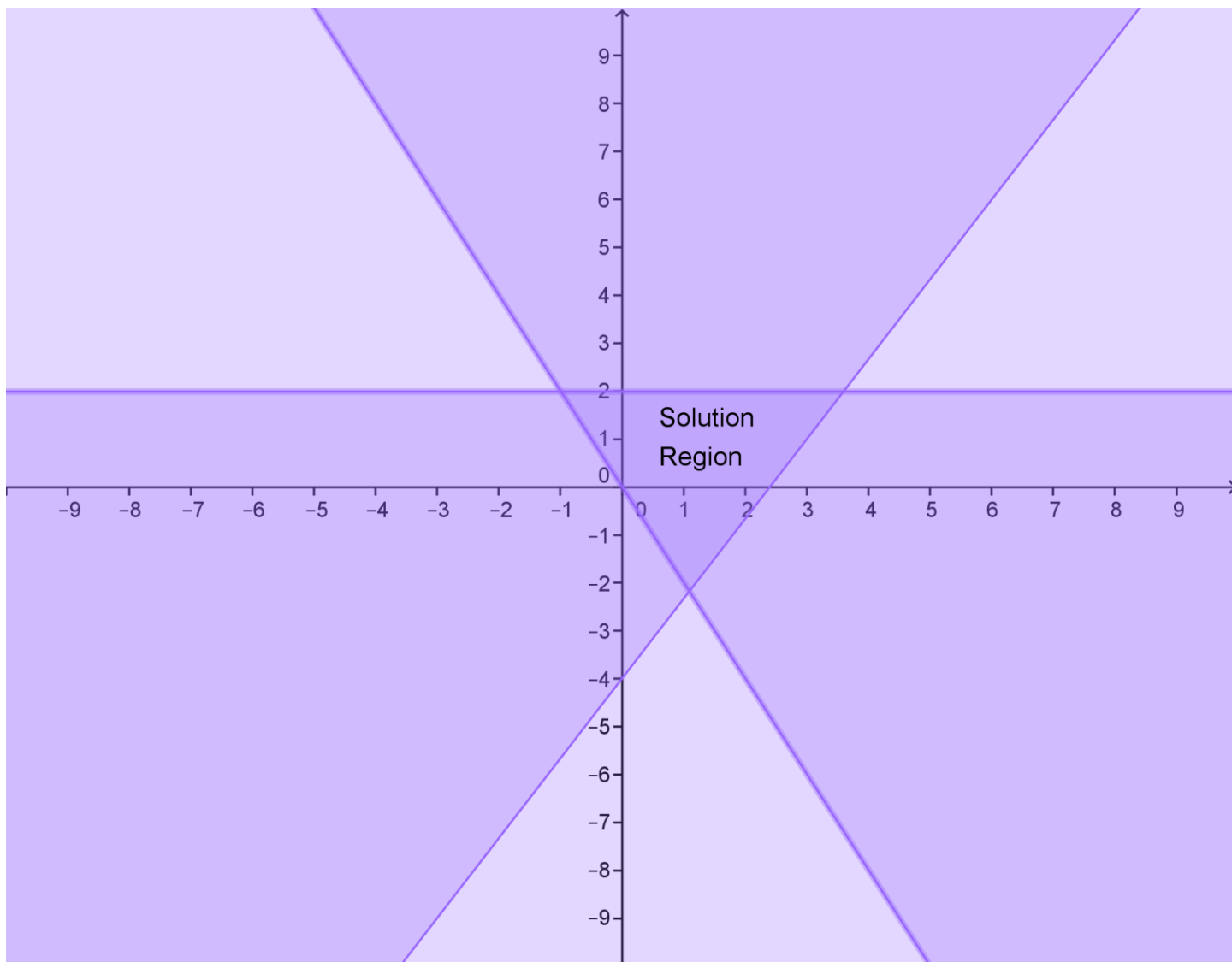
۴)
$$\begin{cases} y \geq -x + 2 \\ y \leq 2x + 5 \end{cases}$$



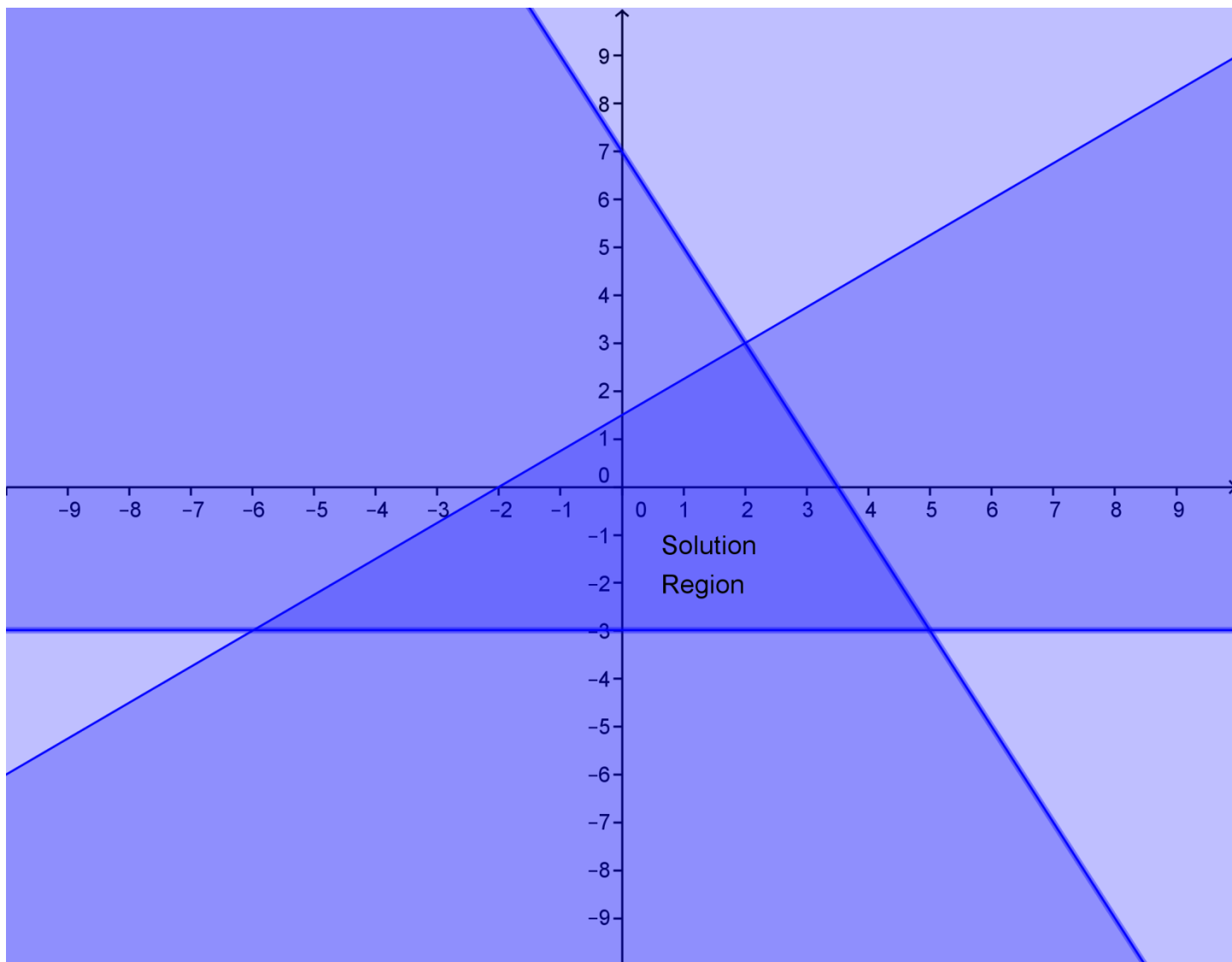
۵)
$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x + 3y \leq 6 \end{cases}$$



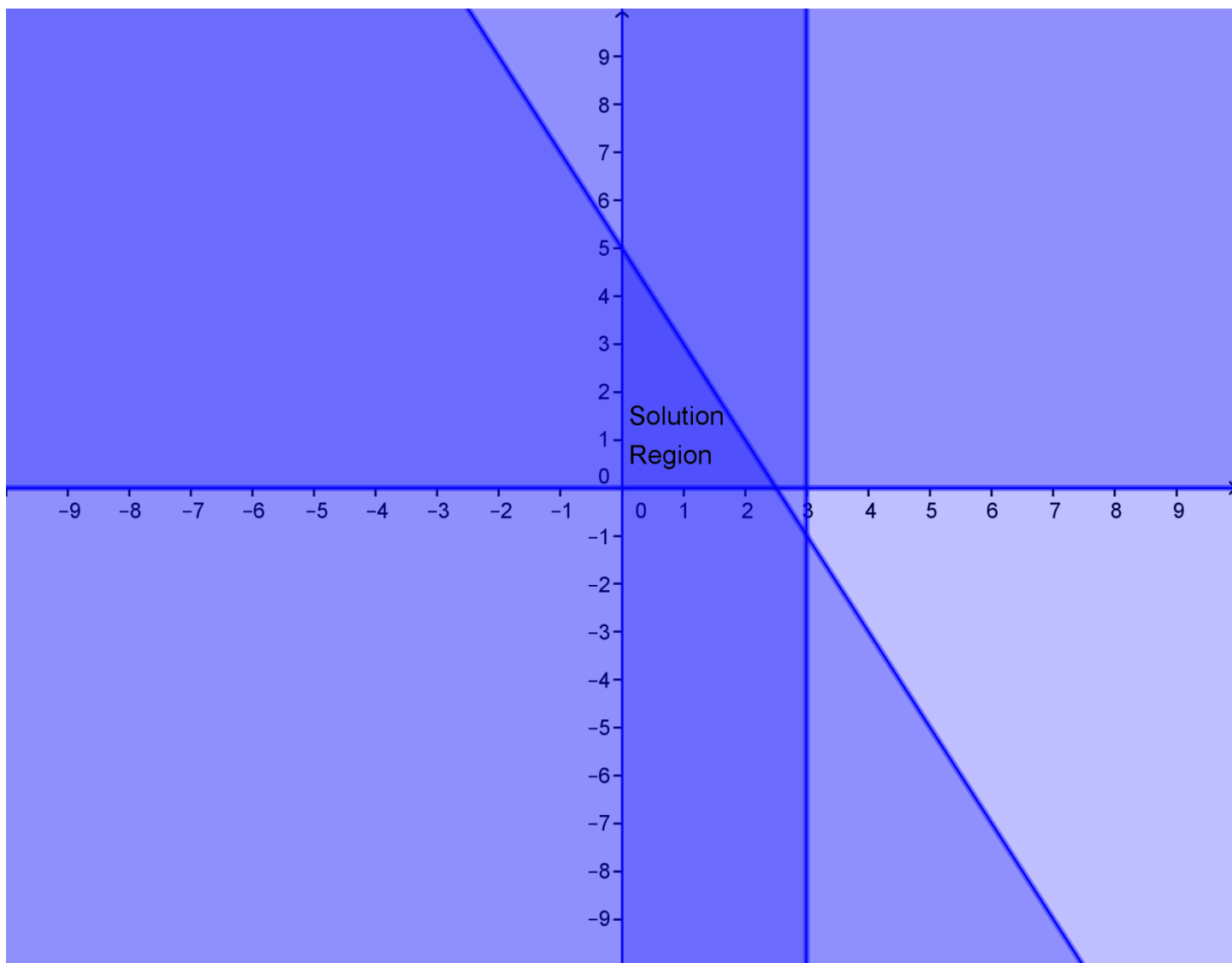
$$۴) \begin{cases} y + ۲x \geq ۰ \\ ۵x - ۳y \leq ۱۲ \\ y \leq ۲ \end{cases}$$



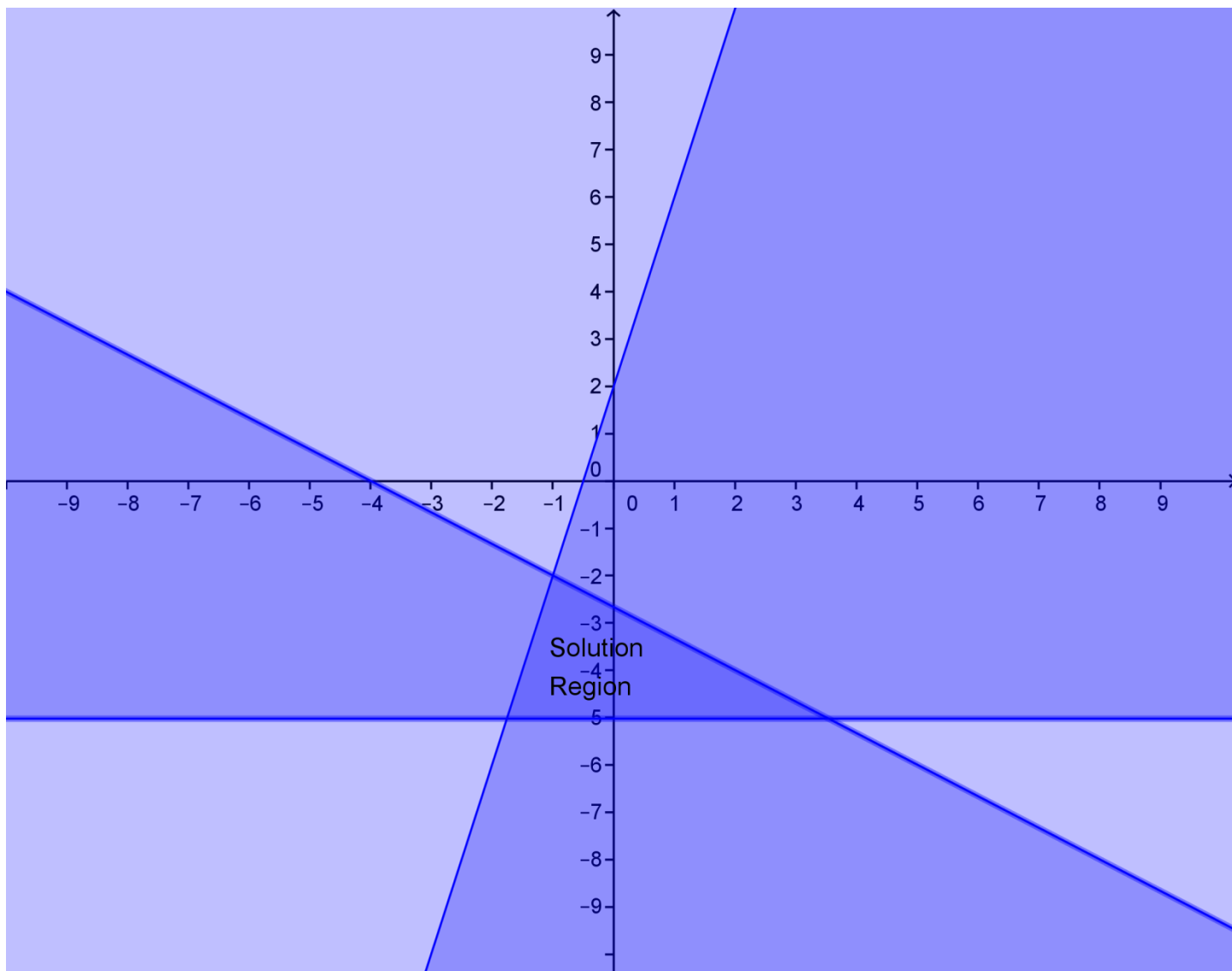
$$۷) \begin{cases} ۳x - ۴y \geq -۶ \\ ۲x + y \leq ۷ \\ y \geq -۳ \end{cases}$$



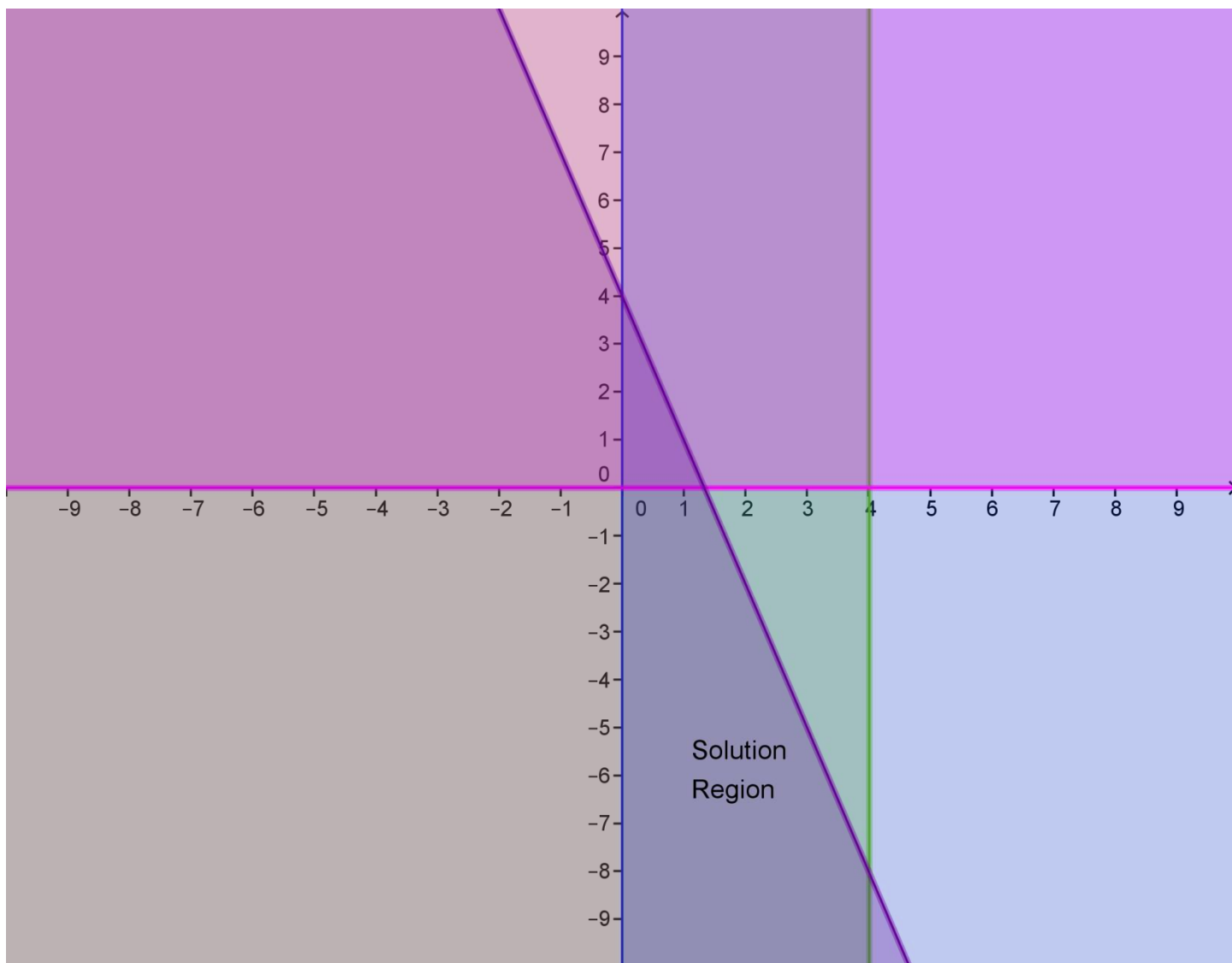
۸)
$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



$$9) \begin{cases} 4x - y \geq -2 \\ 2x + 3y \leq -8 \\ y \geq -5 \end{cases}$$



$$۱۰) \begin{cases} 3x + y \leq 4 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$





سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)