فصل نهم

مقاطع مخروطی Conic Sections

در این فصل بعضی از روابط Connections مهم بین سهمی و معادله آن مورد تجزیه و تحلیل Analyze قرار می دهیم. سهمی ها خود مهم هستند ، اما مهم تر اینکه آنها قسمتی از یک مجموعه منحنی هایی بنام مقاطع مخروطی هستند . این فصل به معادله های درجه دوم دو مجهولی و نمودار مقاطع مخروطی اختصاص دارد. نمودار هایی ماند سهمی ، دائره ، بیضی ، و هذلولی

اشکال مقاطع مخروطی موارد استفاده زیادی دارند. آنها در معماری برای طراحی پل ها ، طاق ها و گنبد ها بکار می روند. آنها همچنین در ستاره شناسی برای الگو سازی مدار های سیارات ، ستاره های دنباله دار و ماهواره ها مورد استفاده قرار می گیرند. در مهندسی هم برای طراحی چرخ دنده ها و منعکس کننده ها کار برد دارد.

معماری Architecture

طراحی Design

طاق Arch

گنبد Vault

ستاره شناسی Astronomy

الگوسازی Model

مدار – دور زدن – در مدار حرکت کردن Orbit

سیاره Planet

ستاره دنباله در Comet

ماهواره Satellite

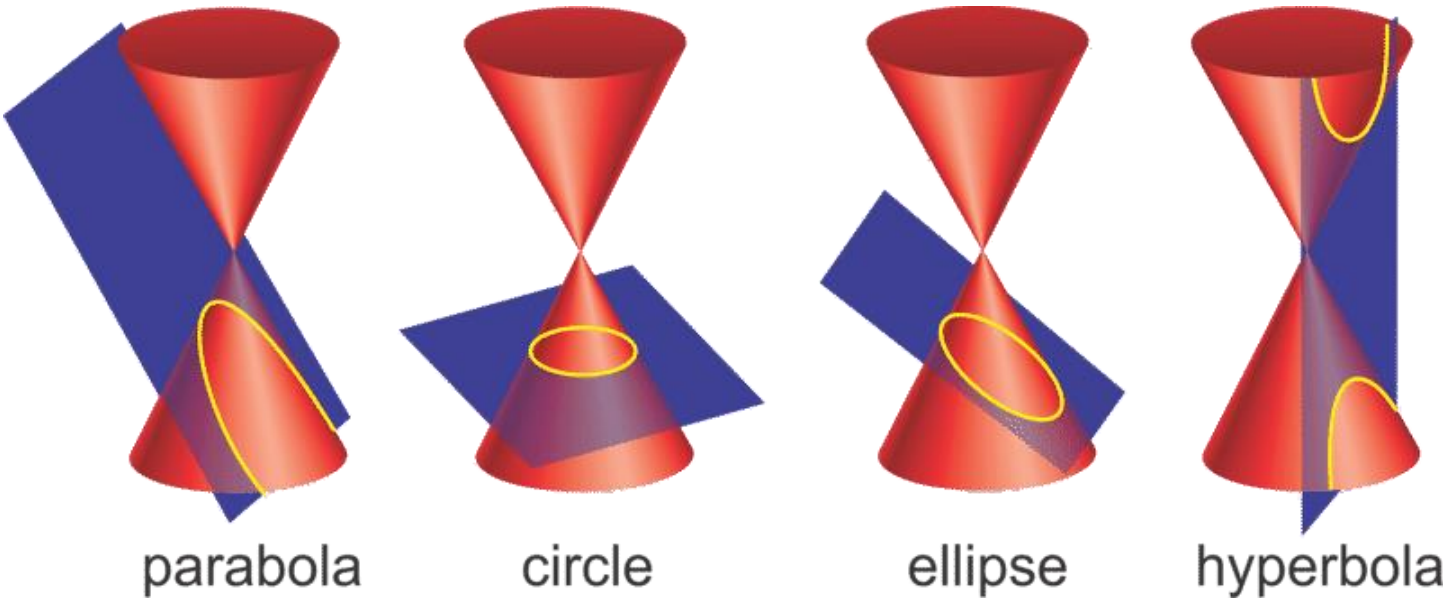
چرخ دنده Gear

منعکس کننده Reflector

۹.۱ – سهمی و دائره The Parabola and the Circle

نام مقاطع مخروطی برای این نمودار ها انتخاب شده ، زیرا هر کدام از منحنی ها از تقاطع یک مخروط مدور راست با یک صفحه به دست می آید. دائره ، سهمی ، بیضی ، و هذلولی ، مقاطع مخروطی هستند.

دانلود از سایت ریاضی سرا



سهمی دائره بیضی هذ لولی

رسم نمودار سهمی ها Graphing Parabolas

تا کنون دیده ایم که $f(x)$ و یا $y = a(x-h)^2 + k$ معادله یک سهمی است که به طرف بالا باز می شود اگر $a > 0$ باشد ، و به طرف پایین باز می شود اگر $a < 0$ باشد. یک سهمی می تواند به طرف راست ، یا چپ و یا یک وری Slant باشد. اما معادله های این نوع سهمی ، تابع نیستند ، زیرا آزمایش خط عمودی را پاس نمی کنند. در این بخش , سهمی هایی که به طرف راست و یا چپ باز می شوند ، را به شما معرفی می کنیم. اما سهمی که یک وری و یا کج باز می شود را در این کتاب بحث نمی کنیم.

عیناً همان طور که $y = a(x-h)^2 + k$ معادله یک سهمی است که به طرف بالا و یا پایین باز شود

$x = a(y-k)^2 + h$ معادله یک سهمی است که به طرف راست و یا چپ باز می شود . سهمی به طرف راست باز می شود ، اگر $a > 0$ باشد ، به طرف چپ باز می شود ، اگر $a < 0$ باشد. راس سهمی نقطه (h, k) است و محور تقارن خط $y = k$ می باشد.

اشکال $y = a(x-h)^2 + k$ و $x = a(y-k)^2 + h$ را اشکال استاندارد می نامند.

دانلود از سایت ریاضی سرا

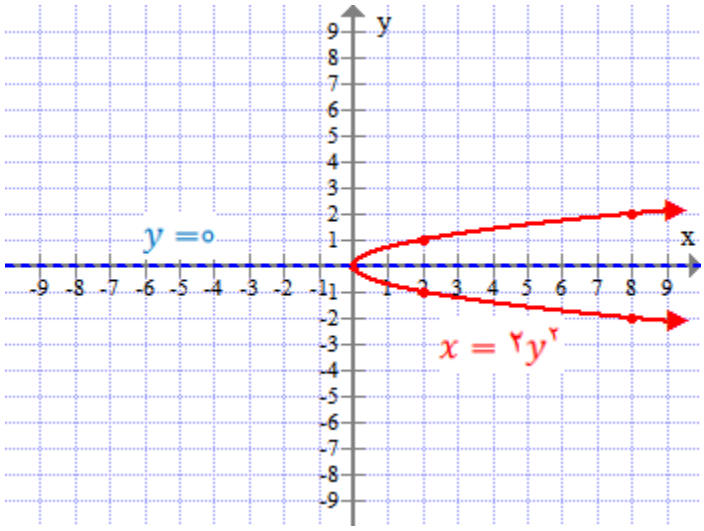
مثال ۱ - $x = ۲y^۲$ **را رسم کنید.**

پاسخ

معادله $x = ۲y^۲$ به شکل استاندار می شود ، $x = ۲(y - ۰)^۲ + ۰$ اینجا $k = ۰$ ، $h = ۰$ ، $a = ۲ > ۰$ پس نمودار آن یک سهمی است که به طرف راست باز می شود ، راس آن $(۰,۰)$ است و محور تقارن $y = ۰$

چند نقطه روی این منحنی پیدا می کنیم و مطابق آنچه قبلا آموخته ایم ، نمودار را رسم می کنیم.

x	y
۸	۲−
۲	۱−
۰	۰
۲	۱
۸	۲



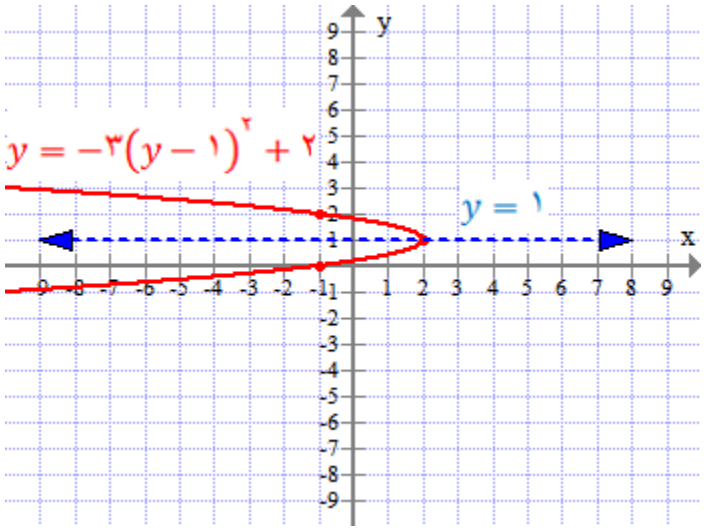
مثال ۲ – نمودار $x = -۳(y - ۱)^۲ + ۲$ **را رسم کنید.**

پاسخ

دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله به صورت $x = a(y-k)^{۲} + h$ است با $h = ۲$ ، $k = ۱$ ، $a = -۳ < ۰$ پس سهمی به طرف چپ باز می شود و راس نقطه $(۲,۱)$ و محور تقارن خط افقی $y = ۱$

اگر $y = ۰$ باشد ، $x = -۱$ است یعنی محل تلاقی منحنی با محور x نقطه $(-۱,۰)$ است. چند نقطه دیگر هم پیدا می کنیم. مثلا نقطه $(-۱,۲)$



مثال ۳ – نمودار $y = -x^{۲} - ۲x + ۱۵$ را رسم کنید.

پاسخ

برای پیدا کردن مختصات راس از فرمول راس استفاده می کنیم.

$$\left(\frac{-b}{۲a}, f\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)$$

$$x = \frac{-(-۲)}{۲(-۱)} = -۱$$

$$f(-۱) = -(-۱)^{۲} - ۲(-۱) + ۱۵ = ۱۶$$

پس مختصات راس $(-۱,۱۶)$ است. اگر $x = ۰$ باشد ، $y = ۱۵$ محل تلاقی منحنی با محور y است. چون راس بالای محور x است ، پس منحنی در دو نقطه با محور x تلاقی می کند.

$$۰ = -x^{۲} - ۲x + ۱۵$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

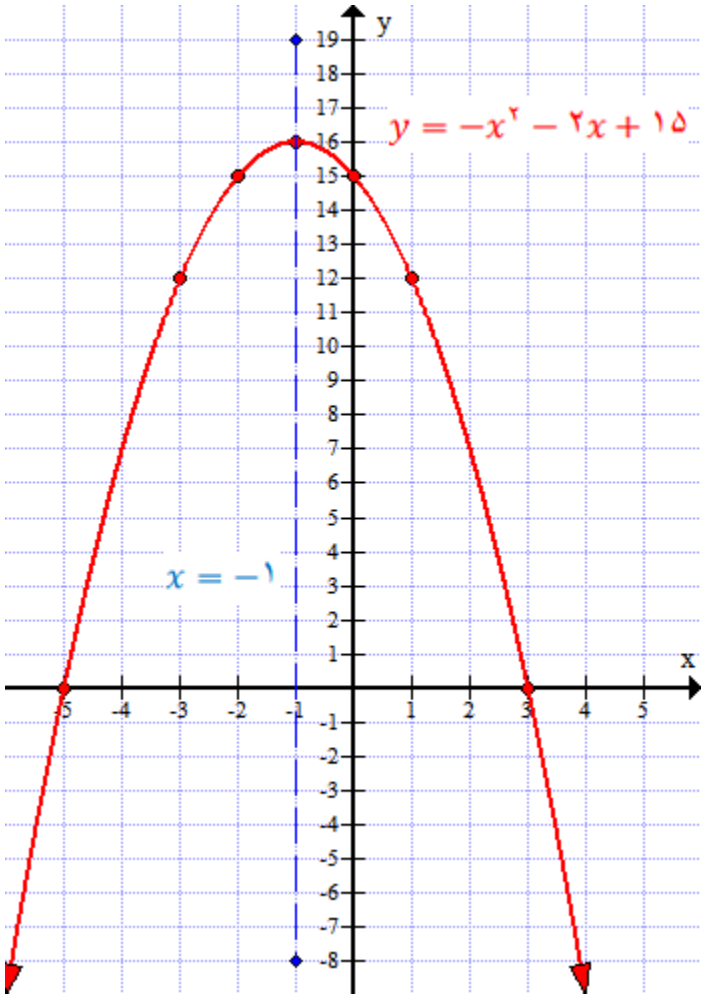
$$۰= x^{۲} + ۲x - ۱۵$$

$$۰= (x + ۵)(x - ۳)$$

$$x = -۵ \quad x = ۳$$

x	y
-۱	۱۶
۰	۱۵
-۲	۱۵
۱	۱۲
-۳	۱۲
۳	۰
-۵	۰

دانلود از سایت ریاضی سرا



مثال ۴ – نمودار $x = ۲y^{۲} + ۴y + ۵$ را رسم کنید.

پاسخ

ملاحظه می کنید که معادله درجه دوم بر حسب y است و چون $a = ۲ > ۰$ پس سهمی به طرف راست باز می شود.

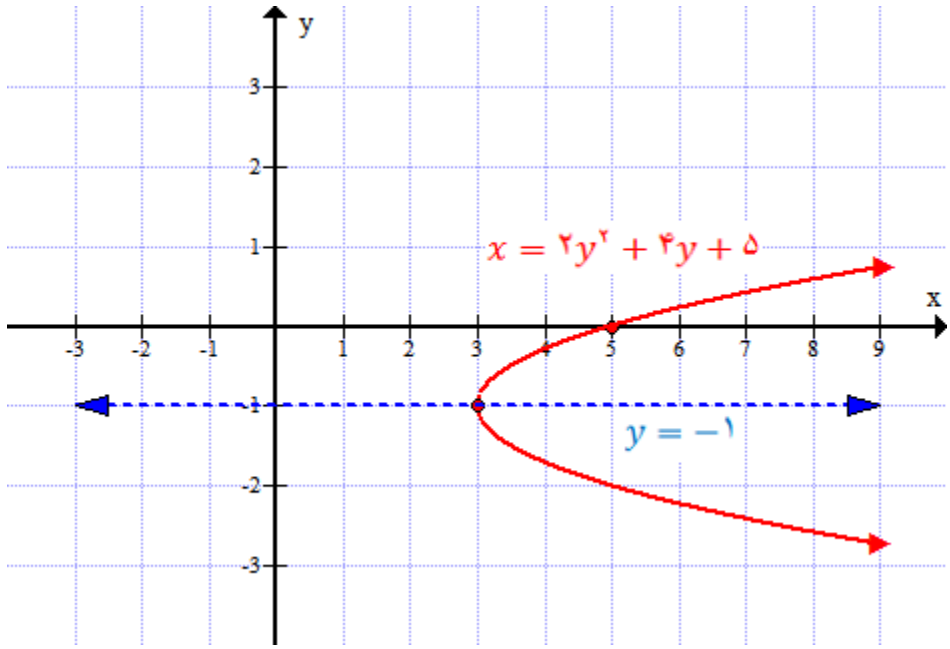
برای پیدا کردن مختصات راس از فرمول راس استفاده می کنیم. چون معادله بر حسب y است لذا

$$y = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(۲)} = -۱$$

$$x = ۲(-۱)^{۲} + ۴(-۱) + ۵ = ۳$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پس مختصات راس $(۳,-۱)$ است. محور تقارن خط افقی $y=-۱$ می باشد. $x=۵$ محل تلاقی منحنی با محور x است.



استفاده از فرمول های فاصله و نقطه میانی Using the Distance and Midpoint Formulas

محور مختصات به ما کمک می کند تا بتوانیم فاصله دو نقطه را مجسم Visualize کنیم. برای پیدا کردن فاصله دو نقطه فرمول فاصله Distance Formula را بکار می بریم ، که از قضیه فیثاغورث گرفته شده است.

برای پیدا کردن طول d بین نقاط $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ همان طور که در شکل زیر می‌بینید ، یک خط عمودی و یک خط افقی رسم می کنیم تا یک مثلث قائم الزویه تشکیل شود. ملاحظه می کنید که طول ضلع a برابر است با $x_۲-x_۱$ و طول ضلع b برابر است با $y_۲-y_۱$ قضیه فیثاغورث به ما می گوید که

$$d^۲ = a^۲ + b^۲$$

و یا

$$d^۲ = (x_۲-x_۱)^۲ + (y_۲-y_۱)^۲$$

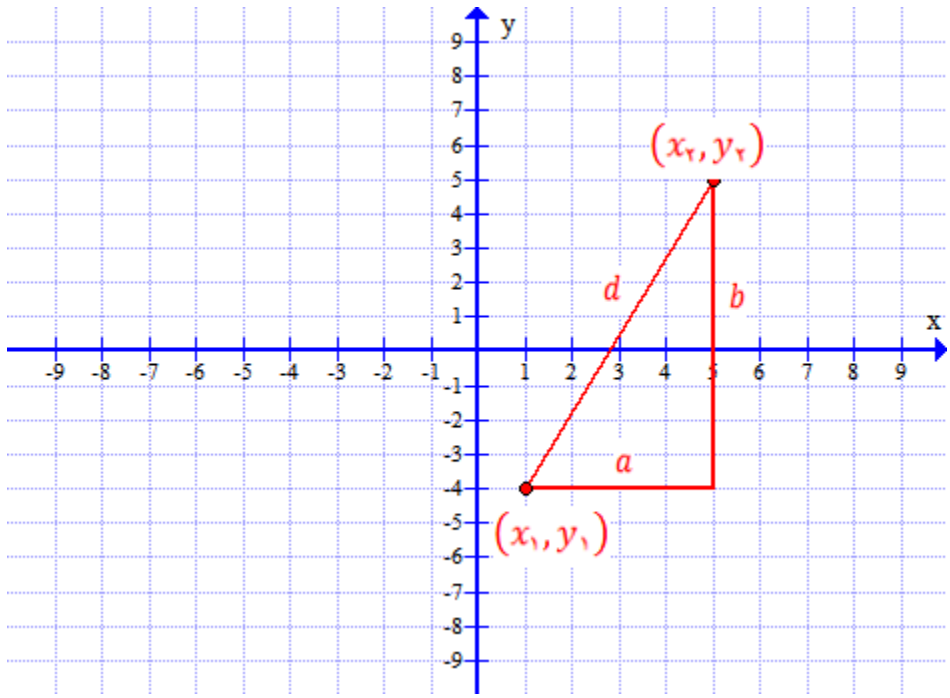
و یا

$$d = \sqrt{(x_۲-x_۱)^۲ + (y_۲-y_۱)^۲}$$

لذا **فاصله بین دو نقطه $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ مطابق فرمول زیر بدست می آید.**

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$d = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$



مثال ۵ ـ فاصله بین نقاط $(۲,-۵)$ و $(۱,-۴)$ **را پیدا کنید. جواب را تا سه مرتبه اعشاری حساب کنید.**

پاسخ

تفاوتی ندارد که کدام نقطه را $(x_۱, y_۱)$ به حساب آوریم. هر دو را امتحان می کنیم.

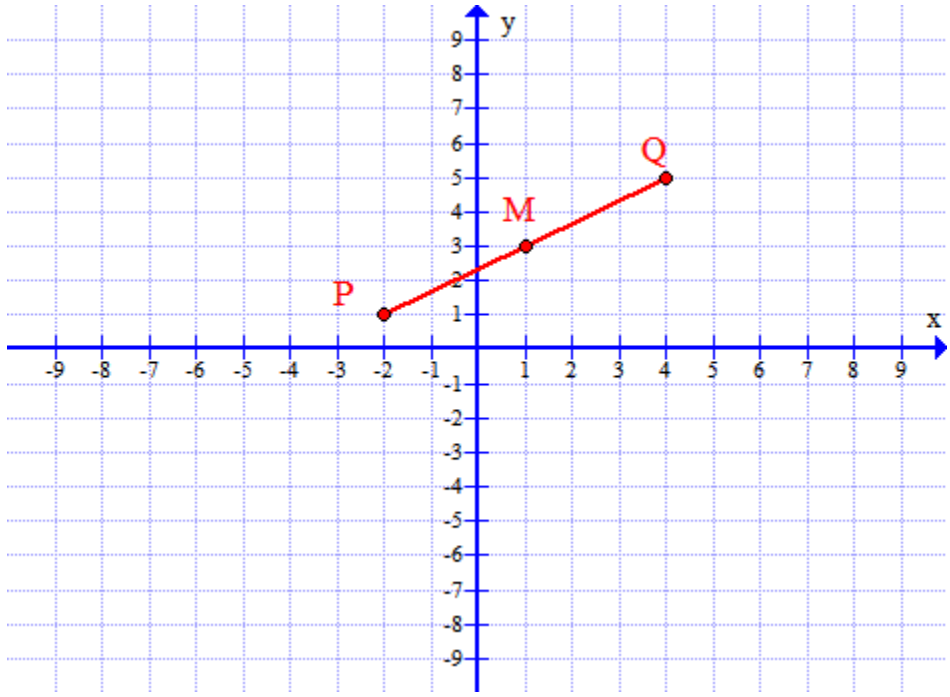
$$d = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (-۴-(-۵))^۲} = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲} = ۱/۴۱۴$$

و یا

$$d = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (-۵-(-۴))^۲} = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲} = ۱/۴۱۴$$

نقطه میانی Midpoint یک پاره خط ، عینا وسط بین دو انتهای Endpoint پاره خط قراردارد.

دانلود از سایت ریاضی سرا



n

در شکل بالا نقطه M نقطه میانی پاره خط PQ است. بنا بر این فاصله M تا P مساوی فاصله M تا Q است. پس

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{۲} \qquad y_M = \frac{y_P + y_Q}{۲}$$

فرمول نقطه میانی Midpoint Formula

نقطه میانی پاره خطی که نقاط انتهائ آن نقاط $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ است ، نقطه ای است با مختصات زیر

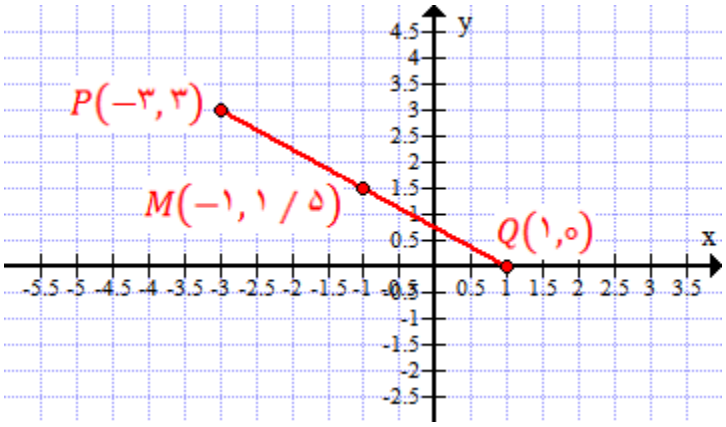
$$\left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}, \frac{y_۱ + y_۲}{۲}\right)$$

مثال ۶ – نقطه میانی پاره خط PQ که مختصات نقاط انتهایی آن $P(-,۳۳)$ و $Q(۱,۰)$ است پیدا کنید.

پاسخ

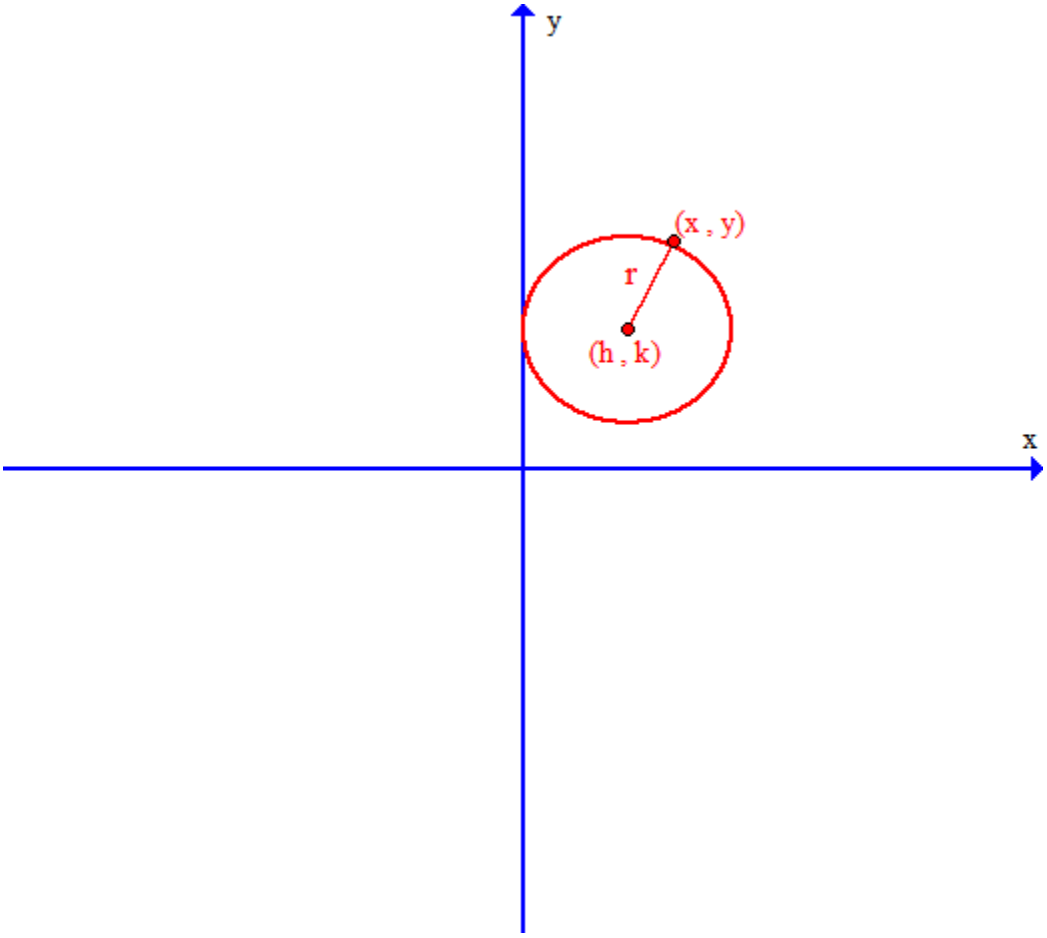
$$Midpoint = \left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}, \frac{y_۱ + y_۲}{۲}\right) = \left(\frac{-۳ + ۱}{۲}, \frac{۳ + ۰}{۲}\right) = \left(\frac{-۲}{۲}, \frac{۳}{۲}\right) = \left(-۱, \frac{۳}{۲}\right)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا



رسم نمودار دائره ها Graphing Circles

یکی دیگر از مقاطع مخروطی دائره است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

تعریف دائره ـیک دائره عبارت است از مجموعه کلیه نقاطی که نسبت به یک نقطه ثابت بنام مرکز Center به یک فاصله باشند. این فاصله را شعاع Radius دایره می نامند. برای پیدا کردن یک معادله یا تساوی به صورت استاندارد ، فرض می کنیم مختصات مرکز دایره (h,k) باشد. و فرض می کنیم ، (x,y) مختصات یک نقطه روی دایره باشد. فاصله بین (h,k) و (x,y) که شعاع تبین می شود ، r واحد فرض می کنیم، با استفاده از فرمول فاصله می توانیم طول r را پیدا کنیم.

$$r=\sqrt{(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}}$$

$$r^{۲}=(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}$$

پس

دائره

نمودار $(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}=r^{۲}$ یک دائره است با مرکز (h,k) و شعاع r

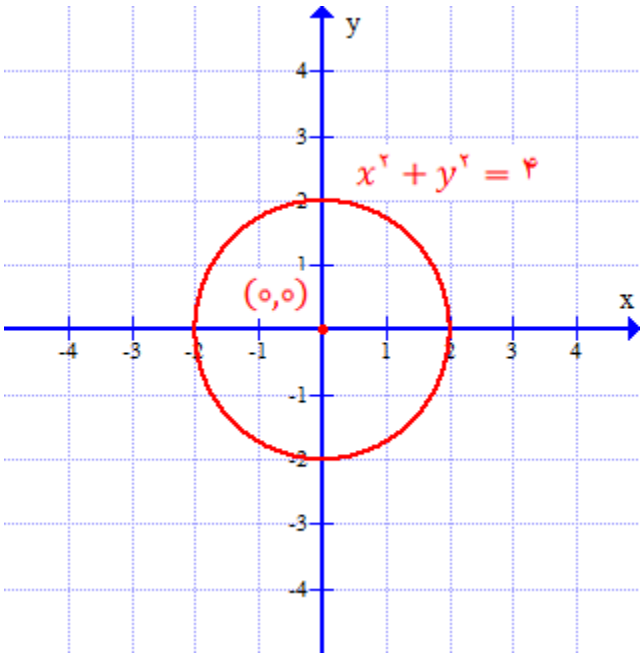
معادله $(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}=r^{۲}$ شکل استاندارد دائره است و اگر یک معادله را بتوان به این صورت نوشت ، نمودار آن یک دائره است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۷ – نمودار $x^۲ + y^۲ = ۴$ را رسم کنید.

پاسخ

معادله فوق را می توان به صورت $(x - ۰)^۲ + (y - ۰)^۲ = ۲^۲$ نوشت. پس نمودار این معادله یک دائره است به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۲ واحد .

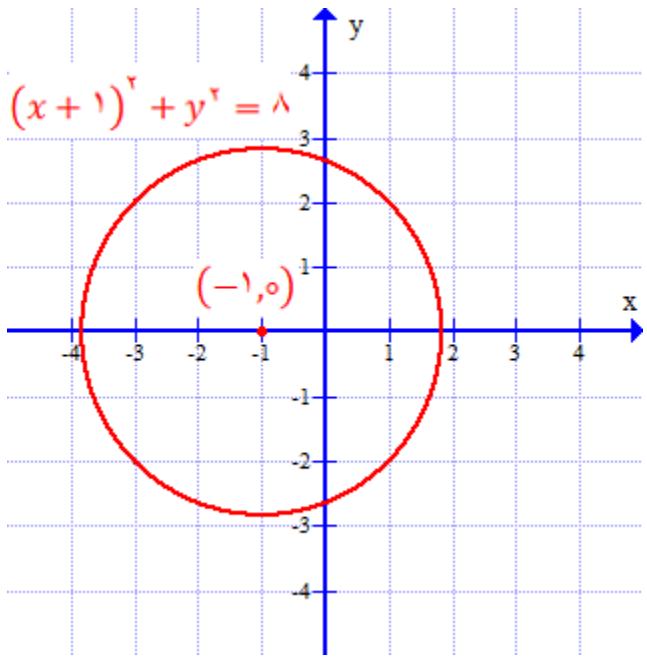


دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۸ – نمودار $(x+۱)^۲ + y^۲ = ۸$ را رسم کنید.

پاسخ

معادله را می توان به صورت $(x+۱)^۲ + (y+۰)^۲ = ۸$ نوشت. $r = \sqrt{۸}$ $k = ۰$ $h = -۱$ و مرکز به مختصات $(-۱,۰)$ و $\sqrt{۸} \simeq ۲/۸$



نوشتن معادله یک دائره Writing Equation of a Circle

چون یک دائره تنها فقط با مرکز و شعاع آن مشخص می شود ، پس تنها همین دو داده لازم است تا معادله یک دائره را بنویسیم.

مثال ۹ – معادله دائره ای را با مرکز $(-۷,۳)$ و شعاع ۱۰ را بنویسید.

پاسخ

$h = -۷ \quad k = ۳ \quad r = ۱۰$

$(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = r^۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\left(x-(-۷)\right)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱۰^{۲}$$

$$(x+۷)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱۰۰$$

پیدا کردن مرکز و شعاع یک دائره Finding the Center and the Radius of a Circle

برای پیدا کردن شعاع و مرکز یک دائره ، باید معادله را به صورت استاندارد بنویسیم. برای این کار ، باید جمله های x و y را هر دو مربع کامل کنیم.

مثال ۱۰ نمودار $x^{۲}+y^{۲}+۴x-۸y=۱۶$ را رسم کنید.

پاسخ

چون این معادله شامل جملات $x^{۲}$ و $y^{۲}$ است و هر دو در یک طرف معادله قرار دارند با ضریب های مساوی ، پس نمودار آن یک دائره است. برای نوشتن معادله به صورت استاندارد ، جملاتی که شامل x هستند را در یک گروه و جملاتی که شامل y هستند در گروه دیگر، گرد می آوریم و سپس روی هر دوی آنها کامل کردن مربع را انجام می دهیم.

$$\left(x^{۲}+۴x\right)+\left(y^{۲}-۸y\right)=۱۶$$

$$\frac{۱}{۲}(۴)=۲ \qquad ۲^{۲}=۴ \qquad \frac{۱}{۲}(-۸)=-۴ \qquad (-۴)^{۲}=۱۶$$

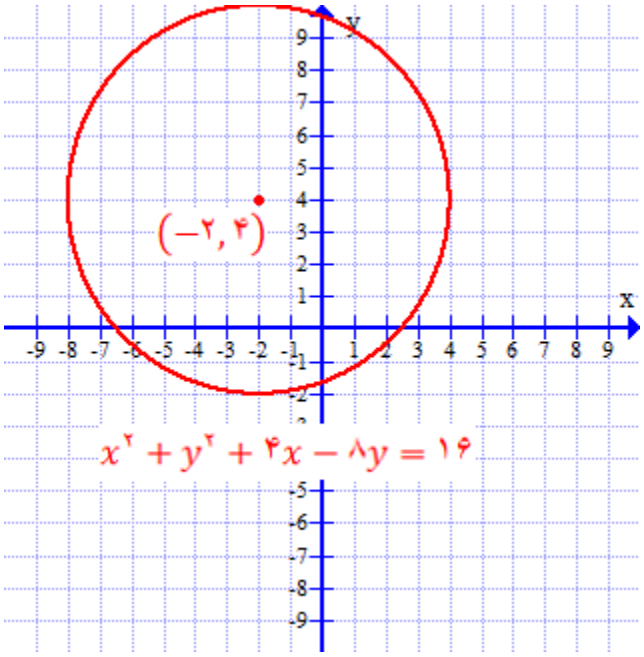
اعداد ۴ و ۱۶ را به هر دو طرف اضافه می کنیم.

$$\left(x^{۲}+۴x+۴\right)+\left(y^{۲}-۸y+۱۶\right)=۱۶+۴+۱۶$$

$$(x+۲)^{۲}+(y-۴)^{۲}=۳۶$$

پس مرکز به مختصات $(-۲,۴)$ و شعاع ۶

دانلود از سایت ریاضی سرا



تمرینات ۹.۱

نمودارهر یک از معادله های زیر سهمی است ,راس سهمی را پیدا کنید و سپس آنرا رسم کنید.

۱) $x = ۳y^۲$

۲) $x = (y - ۲)^۲ + ۳$

۳) $y = ۳(x - ۱)^۲ + ۵$

۴) $x = y^۲ + ۶y + ۸$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $y = x^{۲} + ۱۰x + ۲۰$

۶) $x = -۲y^{۲} + ۴y + ۶$

فاصله بین هر زوج نقاط زیر را پیدا کنید. با سه مرتبه اعشاری .

۷) $(۵,۱)$ و $(۸,۵)$

۸) $(-۳,۲)$ و $(۱,-۳)$

۹) $(-۹,۴)$ $(-۸,۱)$

نقطه میانی هر یک از پاره خط های زیر که مختصات انتهایی آنها داده شده را پیدا کنید.

۱۰) $(۶,-۸),(۲,۴)$

۱۱) $(-۲,-۱),(-۸,۶)$

نمودار هر یک از معادله های زیر ، یک دائره است. مرکز و شعاع آنرا پیدا کنید و سپس آنرا رسم کنید.

۱۲) $x^{۲} + y^{۲} = ۹$

۱۳) $x^{۲} + (y-۲)^{۲} = ۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴) $(x-۵)^۲+(y+۲)^۲=۱$

۱۵) $x^۲+y^۲+۶y=۰$

۱۶) $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۴$

۱۷) $x^۲+y^۲-۴x-۸y-۲=۰$

معادله هر یک از دائره ها که مرکز و شعاع آنها در زیر داده شده را بنویسید.

۱۸) $(۲,۳):۶$

۱۹) $(۰,۰):\sqrt{۳}$

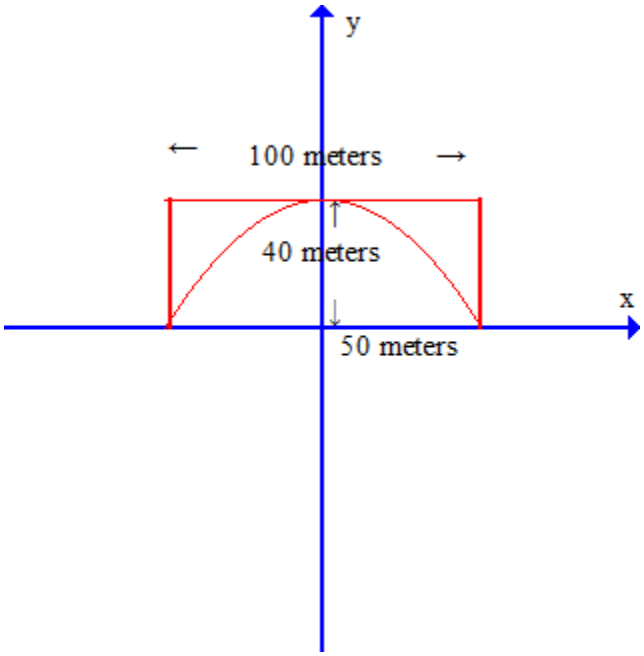
۲۰) $(-۵,۴):۳\sqrt{۵}$

۲۱ – آیا مثلث ABC یک مثلث متساوی الساقین است اگر مختصات راس های آن عبارت باشد از

$A(۰\ -۲)$ $B(۲,۶)$ $C(۵,۱)$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۲ – یک پل به شکل سهمی روی یک رود خانه بنا شده است. اگر طول جاده روی طاق پل ۱۰۰ متر و حد اکثر ارتفاع طاق پل ۴۰ متر باشد ، یک معادله برای این پل سهمی بنویسید.



۲۳ – یک مهندس ساختمان در حال کشیدن نقشه یک استخر مدور با یک فواره وسط آن روی کاغذ مخصوص نقشه کشی است. کاغذ بر حسب سانتی متر مدرج شده است. و هر سانتی متر نماد یک فوت است. روی کاغذ ، قطر استخر ۲۰ سانتی متر است و فواره روی نقطه (۰,۰) قرار دارد.

الف –نقشه این مهندس را رسم کنید.

ب –معادله این استخر مدور را بنویسید.

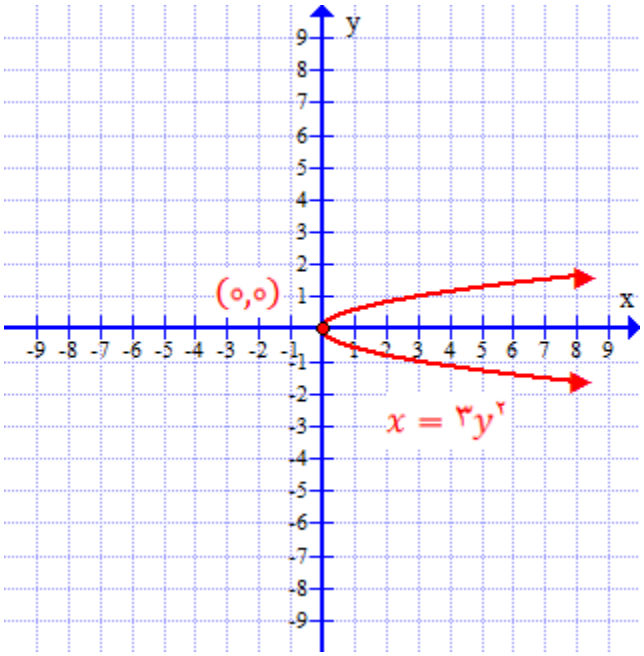
ج –سپس مهندس یک دائره از چراغ اطراف فواره طرح می کند ، به طوری که هر چراغ ۵ سانتی متر از فواره فاصله دارد. معادله این چراغ های مدور را بنیویسید ، و طرح آن را رسم کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

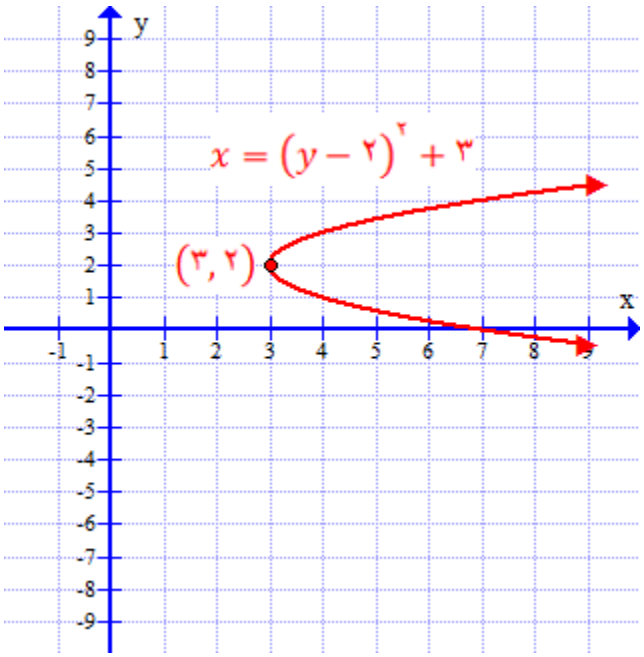
پاسخ تمرینات ۹.۱

نمودارهر یک از معادله های زیر سهمی است ,راس سهمی را پیدا کنید و سپس آنرا رسم کنید.

۱) $x = ۳y^۲$

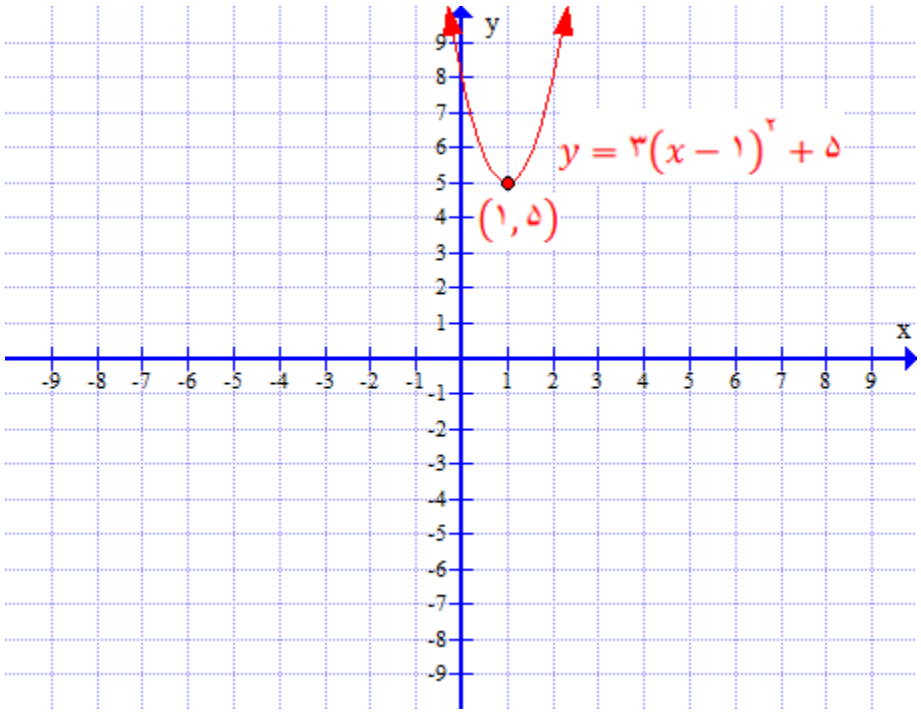


۲) $x = (y - ۲)^۲ + ۳$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $y = ۳(x-۱)^۲ + ۵$



دانلود از سایت ریاضی سرا

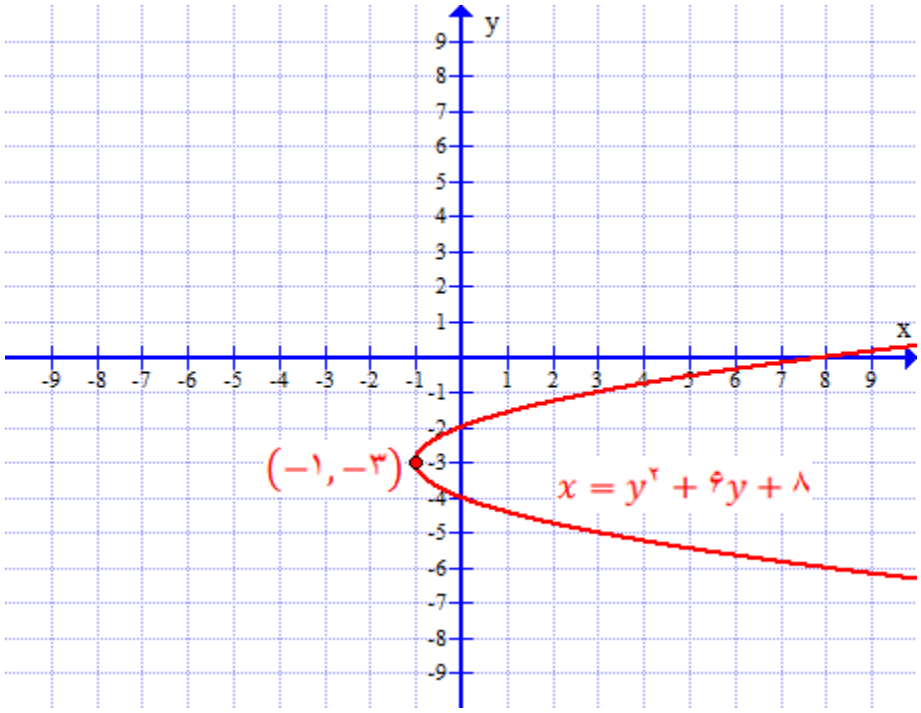
۴) $x = y^{۲} + ۶y + ۸$

برای پیدا کردن راس ، دو راه داریم. یا روی جمله های y مربع کامل انجام دهیم و یا از فرمول راس استفاده کنیم. این معادله چون بر حسب y است .پس

$$y = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{۲(۱)} = \frac{-۶}{۲} = -۳$$

$$x = (-۳)^{۲} + ۶(-۳) + ۸ = ۹ - ۱۸ + ۸ = -۱$$

راس $(-۱, -۳)$



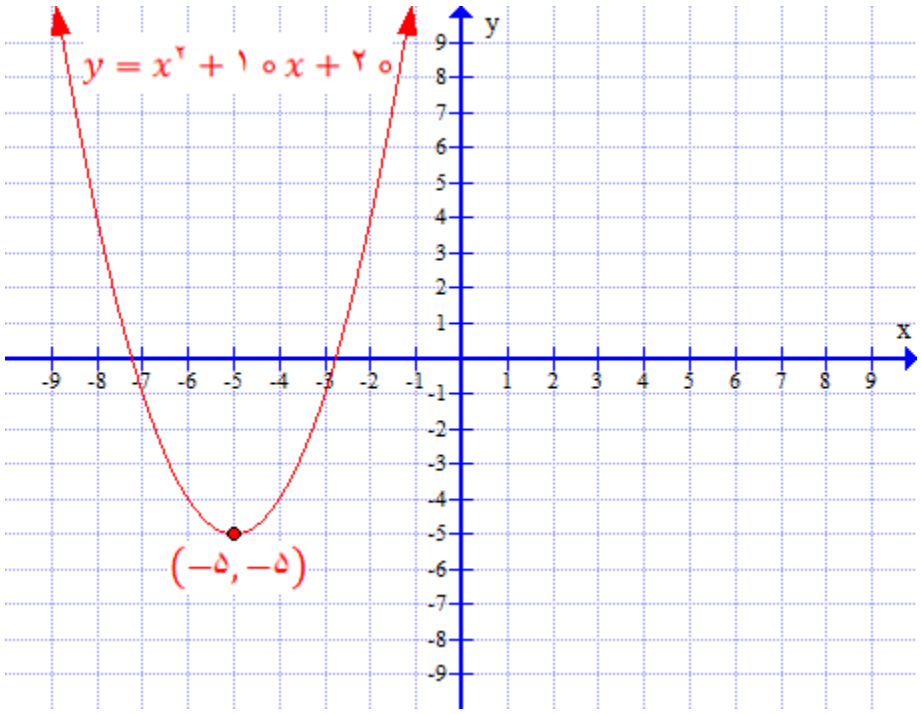
دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $y = x^{۲} + ۱۰x + ۲۰$

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۰}{۲(۱)} = -۵$$

$$y = (-۵)^{۲} + ۱۰(-۵) + ۲۰ = ۲۵ - ۵۰ + ۲۰ = -۵$$

راس $(-۵, -۵)$



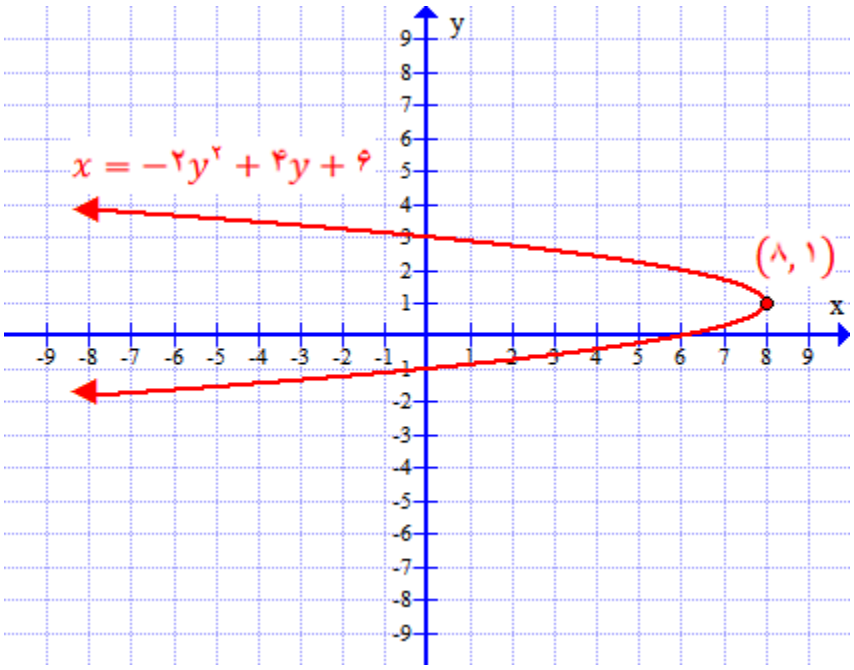
دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $x = -۲y^۲ + ۴y + ۶$

$$y = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۲)} = ۱$$

$$x = -۲(۱)^۲ + ۴(۱) + ۶ = -۲ + ۴ + ۶ = ۸$$

راس $(۸, ۱)$



فاصله بین هر زوج نقاط زیر را پیدا کنید. با سه مرتبه اعشاری .

۷) $(۵, ۱)$ و $(۸, ۵)$

$$d = \sqrt{(۵ - ۸)^۲ + (۱ - ۵)^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $(-۳,۲)$ و $(۱,-۳)$

$$d=\sqrt{(-۳-۱)^{۲}+\left(۲-(-۳)\right)^{۲}}=\sqrt{۱۶+۲۵}=\sqrt{۴۱}=۶/۴۰۳$$

۹) $(-۹,۴)$ $(-۸,۱)$

$$d=\sqrt{\left(-۹-(-۸)\right)^{۲}+(۴-۱)^{۲}}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}=۳/۱۶۲$$

نقطه میانی هر یک از پاره خط های زیر که مختصات انتهایی آنها داده شده را پیدا کنید.

۱۰) $(۶,-۸),(۲,۴)$

$$M=\left(\frac{۶+۲}{۲},\frac{-۸+۴}{۲}\right)=\left(\frac{۸}{۲},\frac{-۴}{۲}\right)=(۴,-۲)$$

۱۱) $(-۲,-۱),(-۸,۶)$

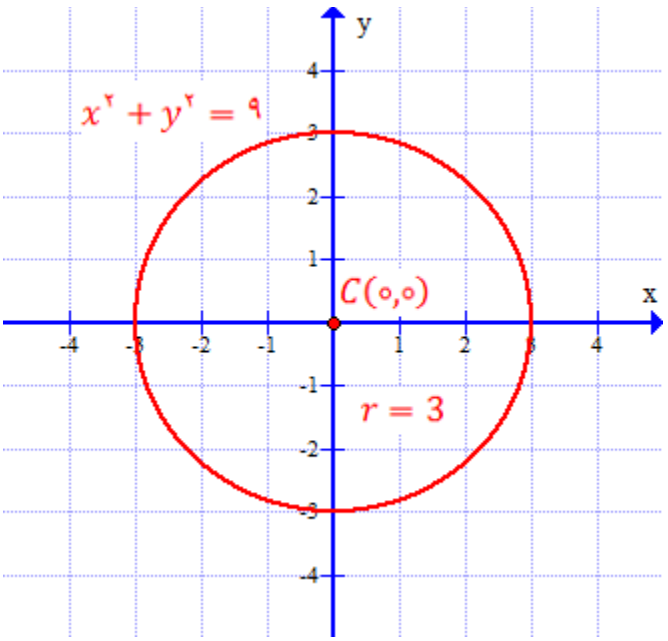
$$M=\left(\frac{-۲+(-۸)}{۲},\frac{-۱+۶}{۲}\right)=\left(\frac{۱۰}{۲},\frac{۵}{۲}\right)=\left(۵,\frac{۵}{۲}\right)$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار هر یک از معادله های زیر ، یک دائره است. مرکز و شعاع آنرا پیدا کنید و سپس آنرا رسم کنید.

۱۲) $x^۲ + y^۲ = ۹$

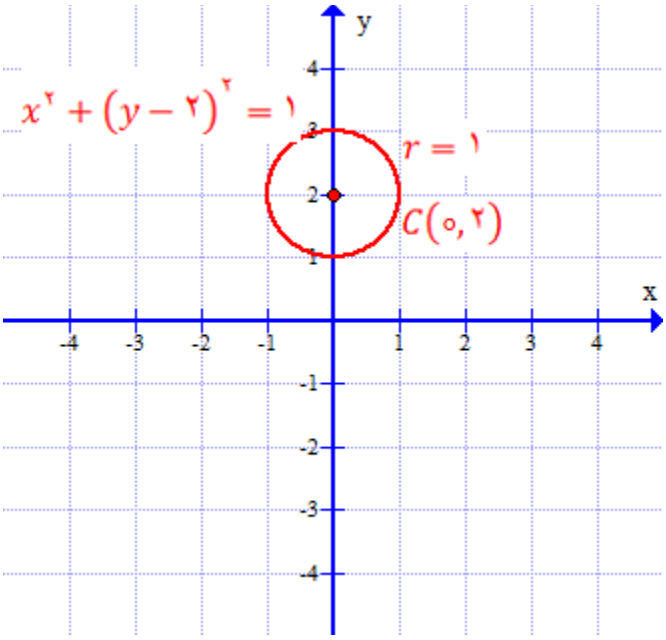
$C\ (۰,۰) \qquad r = ۳$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳) $x^{۲} + (y - ۲)^{۲} = ۱$

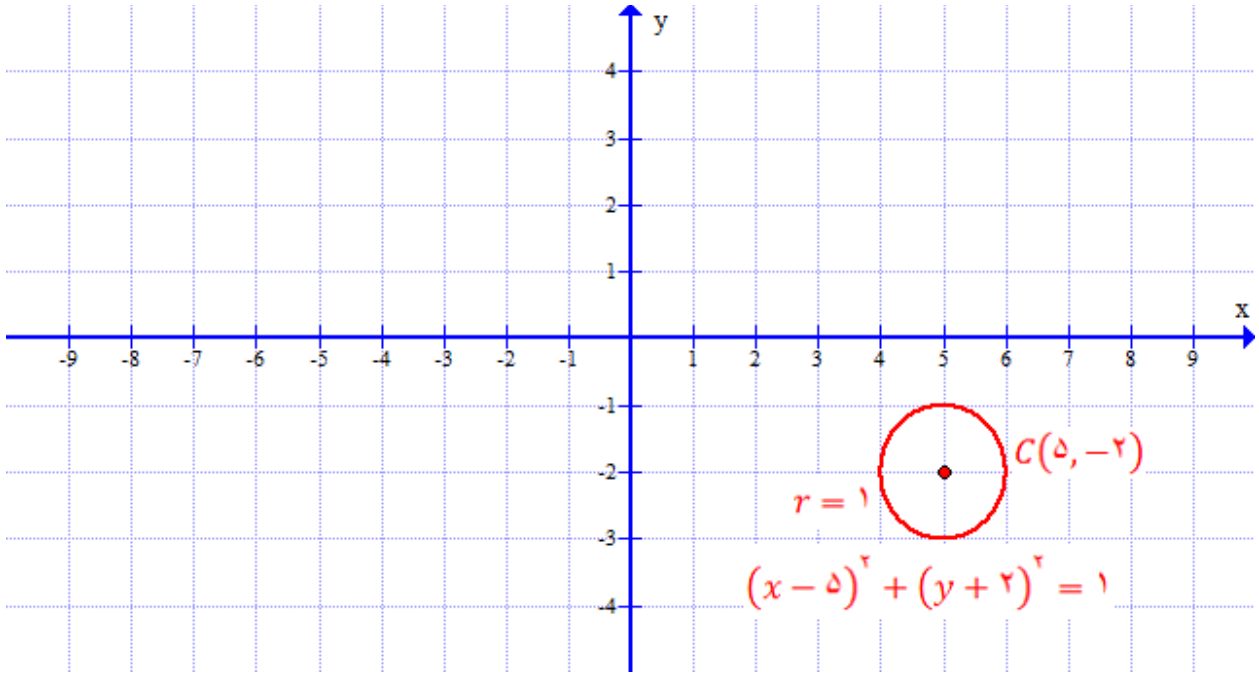
$C(۰, ۲) \qquad r = ۱$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴) $(x-۵)^۲+(y+۲)^۲=۱$

$C(۵,-۲) \quad r=۱$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵) $x^{۲} + y^{۲} + ۶y = ۰$

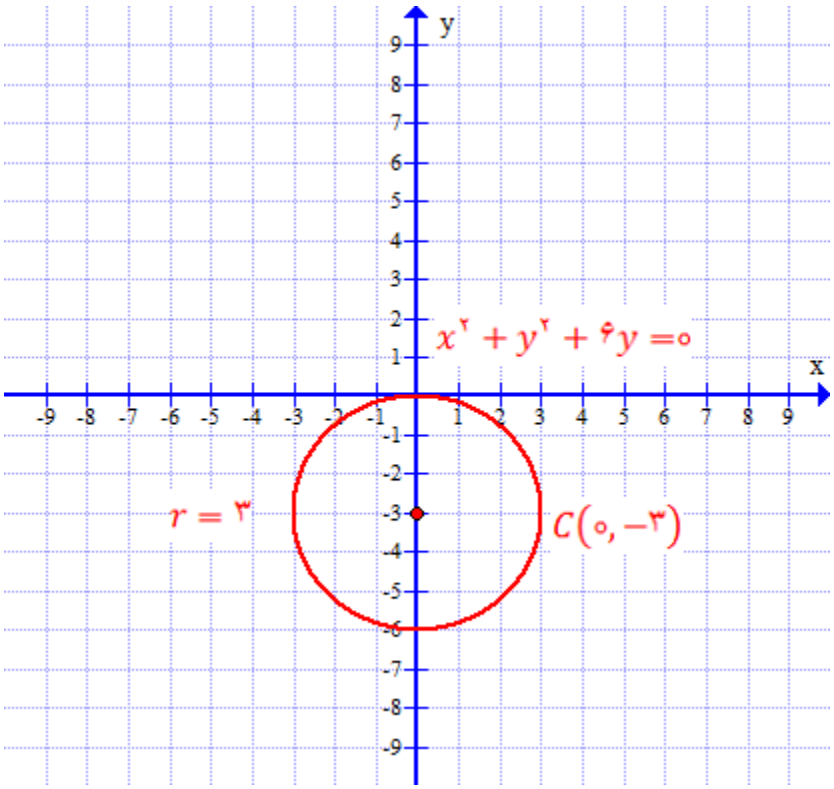
باید روی y مربع کامل انجام دهیم.

$$\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{۶}{۲}\right)^{۲} = ۳^{۲} = ۹$$

$x^{۲} + y^{۲} + ۶y + ۹ = ۹$

$x^{۲} + (y + ۳)^{۳} = ۹$

$C(۰, -۳) \quad r = ۳$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۴$

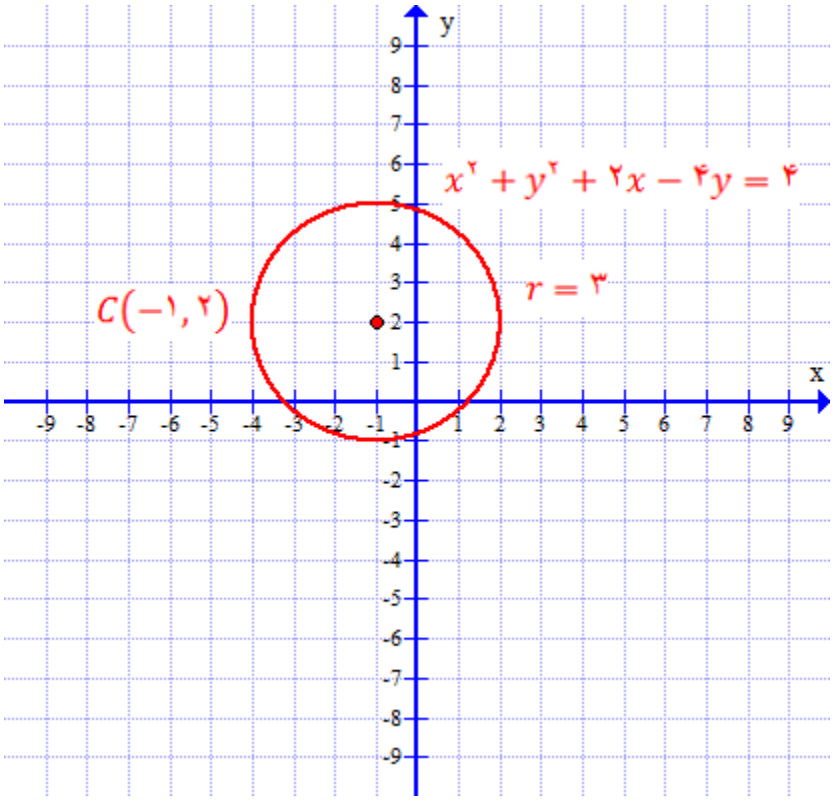
باید هم روی x و هم روی y مربع کامل انجام دهیم.

$$(x^۲ + ۲x) + (y^۲ - ۴y) = ۴$$

$$\left(x^۲ + ۲x + ۱\right) + \left(y^۲ - ۴y + ۴\right) = ۴ + ۱ + ۴$$

$$(x + ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۹$$

$$C(-۱, ۲) \quad r = ۳$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷) $x^{۲}+y^{۲}-۴x-۸y-۲=۰$

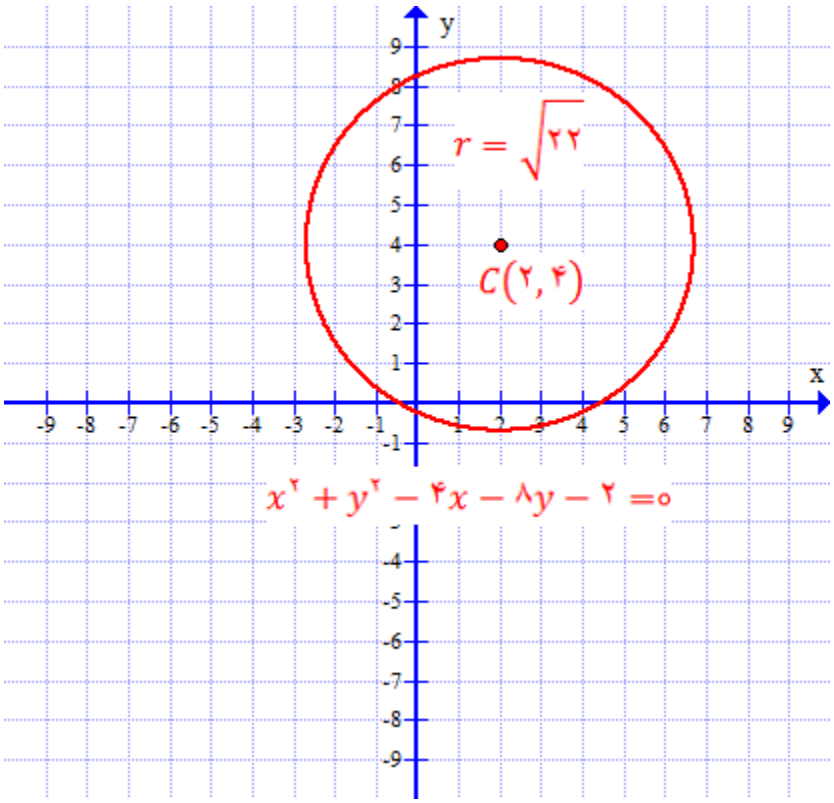
باید هم روی x و هم روی y مربع کامل انجام دهیم.

$$\left(x^{۲}-۴x\right)+\left(y^{۲}-۸y\right)=۲$$

$$\left(x^{۲}-۴x++۴\right)+\left(y^{۲}-۸y+۱۶\right)=۲+۴+۱۶$$

$$(x-۲)^{۲}+(y-۴)^{۲}=۲۲$$

$$C(۲,۴) \quad r=\sqrt{۲۲}$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

معادله هر یک از دائره ها که مرکز و شعاع آنها در زیر داده شده را بنویسید.

۱۸) $(۲,۳):۶$

$$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۳۶$$

۱۹) $(۰,۰):\sqrt{۳}$

$$x^۲+y^۲=۳$$

۲۰) $(-۵,۴):۳\sqrt{۵}$

$$(x+۵)^۲+(y-۴)^۴=۴۵$$

۲۱ – آیا مثلث ABC یک مثلث متساوی الساقین است اگر مختصات راس های آن عبارت باشد از

$$A(۰\ -۲) \qquad B(۲,۶) \qquad C(۵,۱)$$

باید اول طول اضلاع این مثلث را پیدا کنیم.

$$\text{طول } AB=\sqrt{(۰-۲)^۲+(-۲-۶)^۲}=\sqrt{۴+۶۴}=\sqrt{۶۸}$$

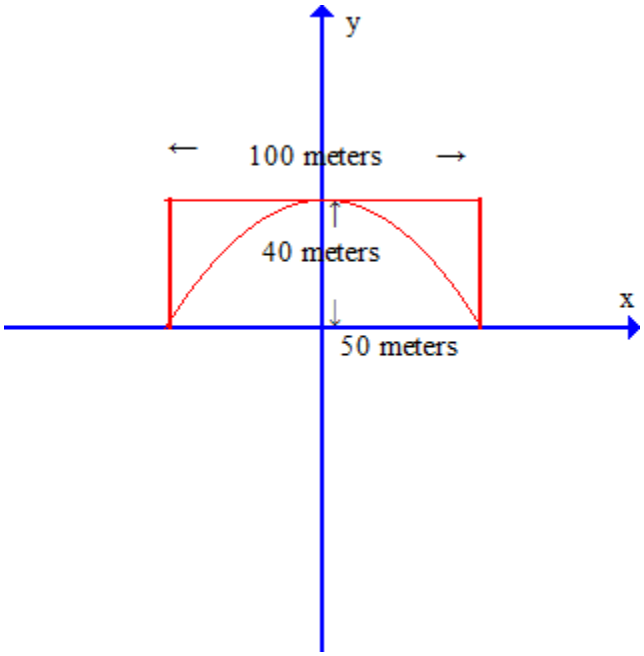
$$\text{طول } BC=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۶-۱)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

$$\text{طول } AC=\sqrt{(۰-۵)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۲۵+۹}=\sqrt{۳۴}$$

چون $AC=BC$ پس این مثلث متساوی الساقین است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۲ – یک پل به شکل سهمی روی یک رود خانه بنا شده است. اگر طول جاده روی طاق پل ۱۰۰ متر و حد اکثر ارتفاع طاق پل ۴۰ متر باشد ، یک معادله برای این پل سهمی بنویسید.



پاسخ

شکل استاندارد سهمی $y = a(x-h)^۲ + k$ است و مختصات راس آن (h,k)

بنا بر فرض مساله و شکل ، مختصات راس $(۰,۴۰)$ است. پس خواهیم داشت

$$y = ax^۲ + ۴۰$$

اما لازم است مقدار a را پیدا کنیم. باز طبق فرض مساله و شکل داده شده اگر $y=۰$ باشد ، $x = ۵۰$ است. پس

$$۰= a(۵۰)^۲ + ۴۰$$

$$۲۵۰۰\,a = -۴۰$$

$$a = \frac{-۴۰}{۲۵۰۰} = -\frac{۲}{۱۲۵}$$

پس :

$$y = -\frac{۲}{۱۲۵}x^۲ + ۴۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳ – یک مهندس ساختمان در حال کشیدن نقشه یک استخر مدور با یک فواره وسط آن روی کاغذ مخصوص نقشه کشی است. کاغذ بر حسب سانتی متر مدرج شده است. و هر سانتی متر نماد یک فوت است. روی کاغذ ، قطر استخر ۲۰ سانتی متر است و فواره روی نقطه (۰,۰) قرار دارد.

الف –نقشه این مهندس را رسم کنید.

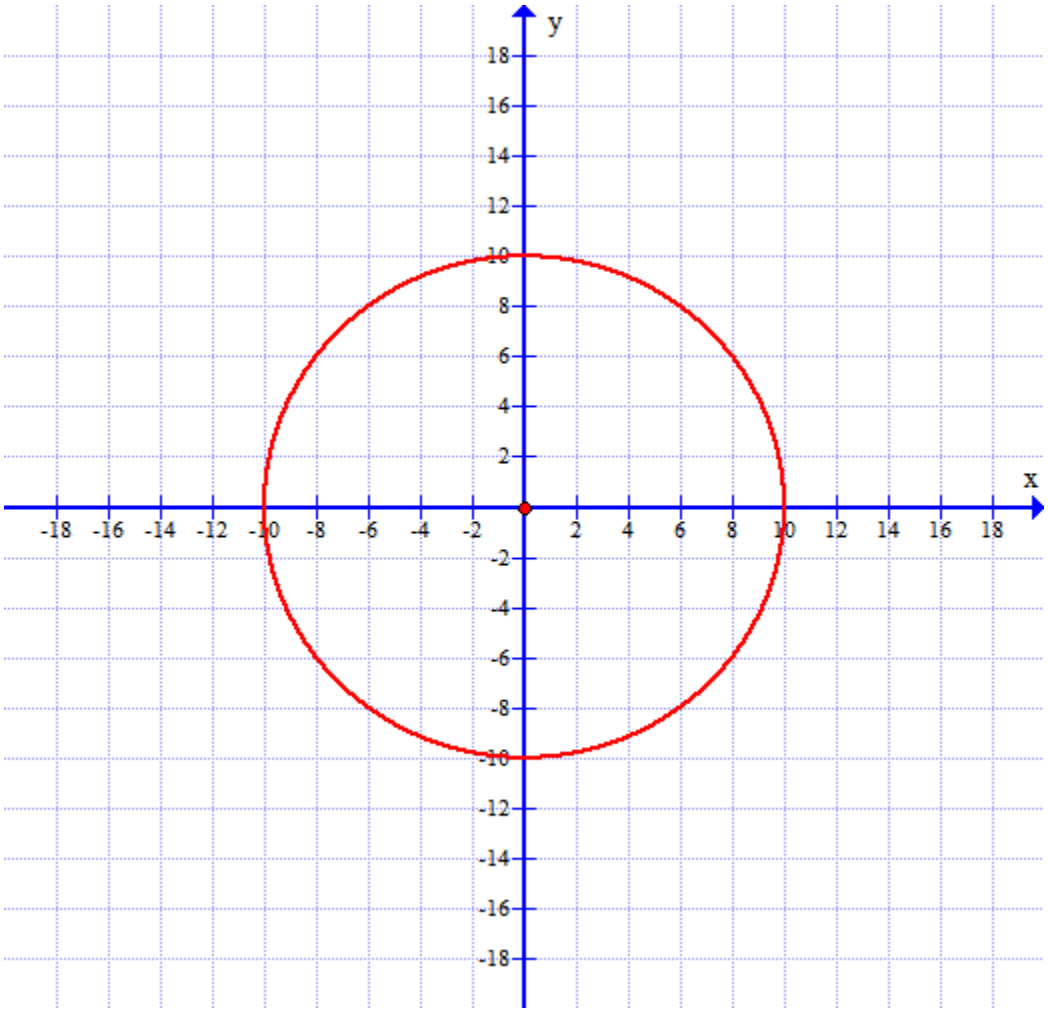
ب –معادله این استخر مدور را بنویسید.

ج –سپس مهندس یک دائره از چراغ اطراف فواره طرح می کند ، به طوری که هر چراغ ۵ سانتی متر از فواره فاصله دارد. معادله این چراغ های مدور را بنیویسید ، و طرح آن را رسم کنید.

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ

الف –

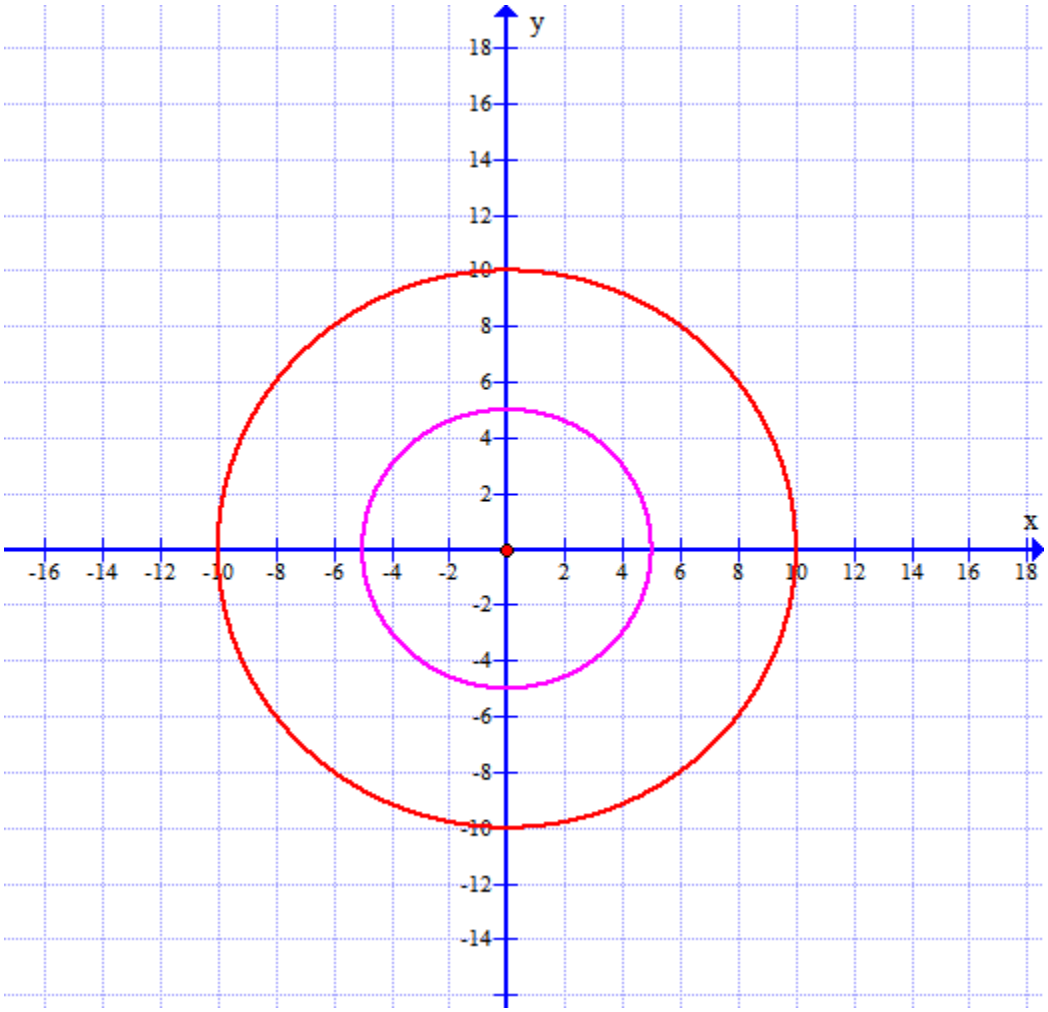


ب –

$$x^{۲} + y^{۲} = ۱۰۰$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

ج –



$$x^{۲} + y^{۲} = ۲۵$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

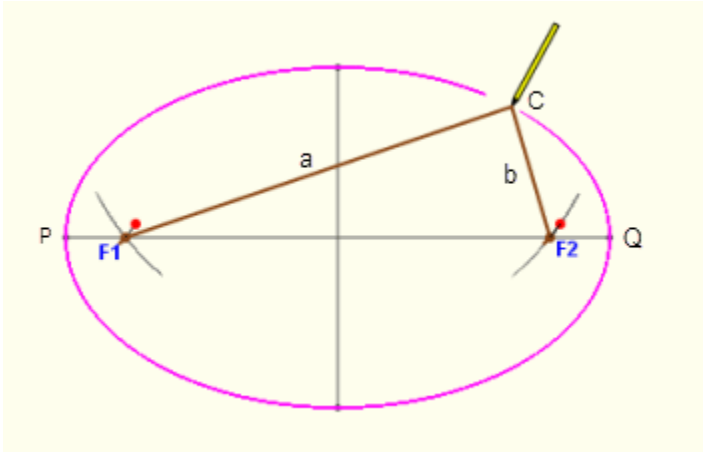
۹.۲ بیضی و هذ لولی The Ellipse and the Hyperbola

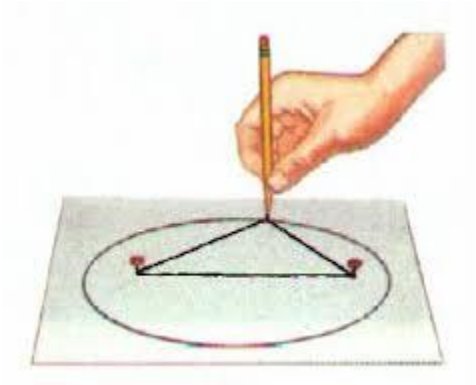
تعریف بیضی –یک بیضی عبارت است از مجموعه ای از نقاط روی یک صفحه به طوری که مجموع فواصل آن نقاط تا دو نقطه ثابت ، یکسان است. هر کدام از این نقاط ثابت را کانون Focus می نامند. جمع کانون میشود کانون ها Foci

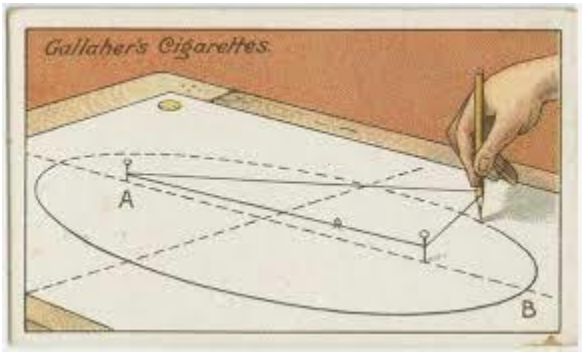
نقطه میانی بین دو کانون را مرکز می نامند.

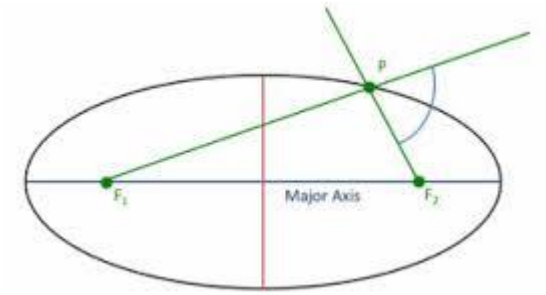
طریق رسم بیضی با دست –ابزار لازم ، دو میخ کوتاه و یا پونز ، یک قطعه نخ ، یک مداد.

دو میخ را روی یک صفحه مقوا ثابت کنید. هر طرف ریسمان را به یکی از میخ ها ببندید .با استفاده از مداد ، نخ را محکم بکشید و بیضی را رسم کنید. این دو میخ ، کانون های بیضی را تشکیل می دهند. در زیر چند طرح رسم بیضی نشان داده می شود.

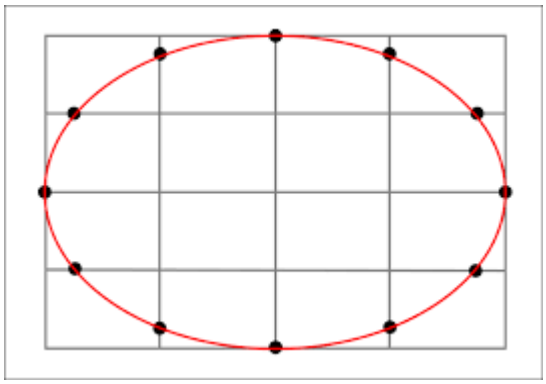


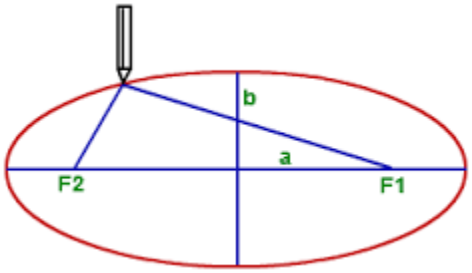






دانلود از سایت ریاضی سرا



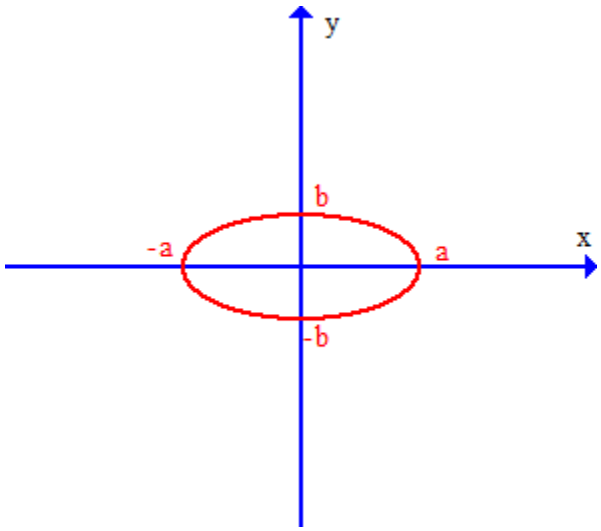


بیضی با مرکز به مختصات (۰,۰)

نمودار معادله $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ یک بیضی است با مرکز (۰,۰) محل تلاقی منحنی با محور x عبارت است از $-a$ و a و محل تلاقی منحنی با محور y عبارت است از $-b$ و b

شکل استاندارد بیضی با مرکز (۰,۰) مطابق ذیل است.

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

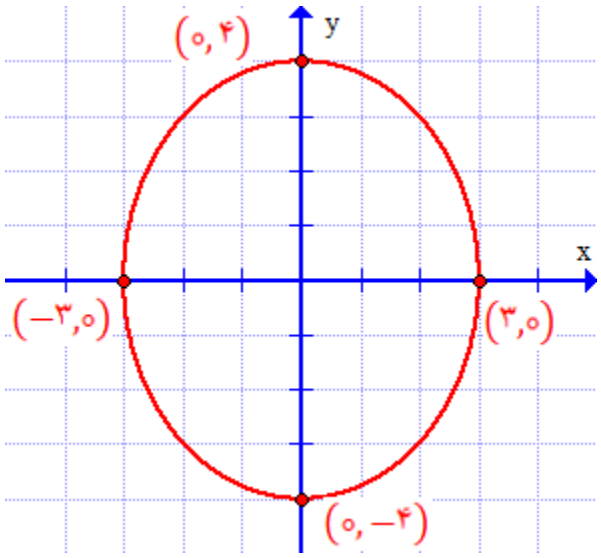
مثال ۱ – نمودار زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۱۶}=۱$$

پاسخ

$$a=۳ \qquad b=۴ \qquad C(۰,۰)$$

محل تلاقی منحنی با محور x نقاط ۳ – و ۳ است و محل تلاقی با محور y نقاط ۴ – و ۴ است و مرکز (۰,۰)



مثال ۲ – نمودار زیر را رسم کنید.

$$۴x^{۲}+۱۶y^{۲}=۶۴$$

پاسخ

گرچه معادله دارای جملات $y^{۲}$ و $x^{۲}$ است و هر دو در یک طرف معادله قرار دارند ، اما معادله دائره نیست ، زیرا ضریب آنها مساوی نیستند. وقتی که چنین اتفاقی رخ می دهد ، نمودار یک بیضی است. چون در شکل استاندارد معادله بیضی ، یک طرف باید ۱ باشد ,پس هر دو طرف معادله را بر ۶۴ تقسیم می کنیم.

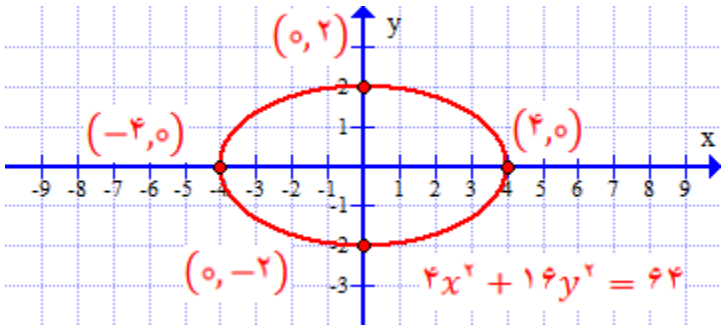
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$۴x^۲ + ۱۶y^۲ = ۶۴$$

$$\frac{۴x^۲}{۶۴} + \frac{۱۶y^۲}{۶۴} = \frac{۶۴}{۶۴}$$

$$\frac{x^۲}{۱۶} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$$

پس مرکز بیضی $(۰,۰)$ است و محل تلاقی با محور x عبارت است از -۴ و ۴ و محل تلاقی با محور y عبارت است از -۲ و ۲



شکل استاندارد معادله بیضی با مرکز (h,k) مطابق شکل زیر است.

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲} + \frac{(y-k)^۲}{b^۲} = ۱$$

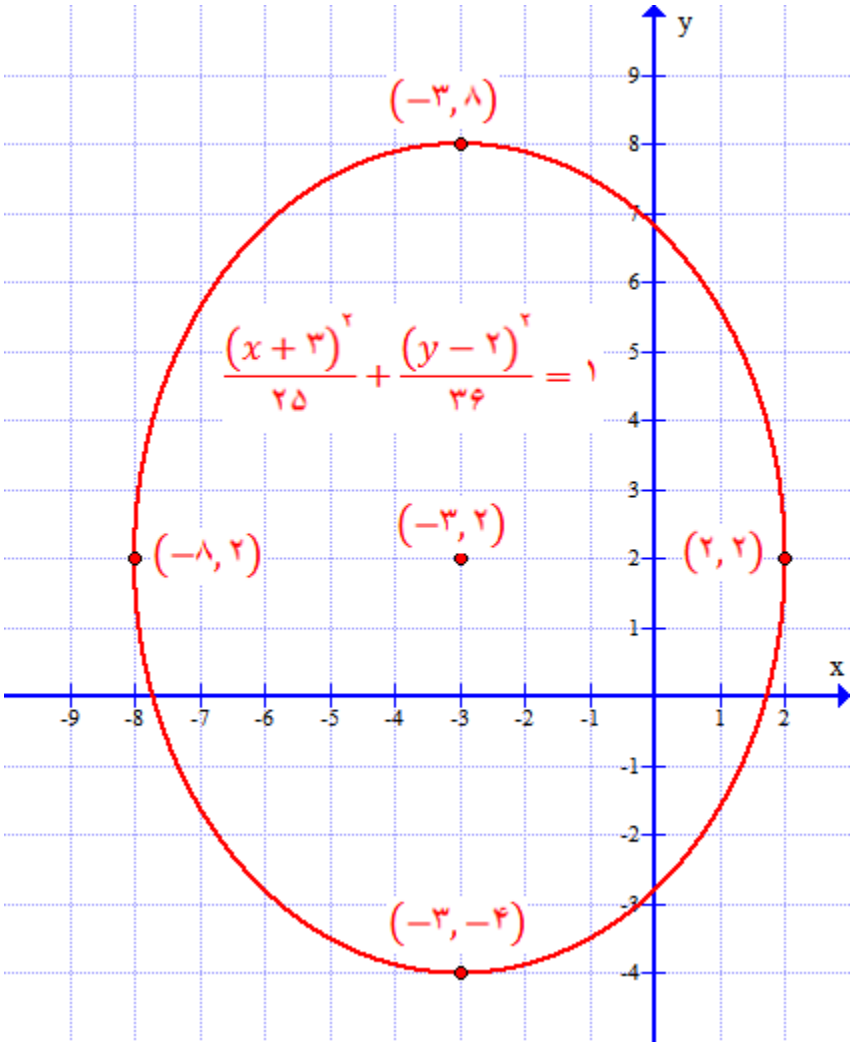
مثال ۳ – نمودار زیر را رسم کنید.

$$\frac{(x+۳)^۲}{۲۵} + \frac{(y-۲)^۲}{۳۶} = ۱$$

پاسخ

این بیضی دارای مرکز $(-۳,۴)$ است. $b = ۶$ و $a = ۵$ برای پیدا کردن چهار نقطه روی بیضی ، اول مرکز $(-۳,۴)$ را روی صفحه مختصات مشخص می کنیم ، و چون $a = ۵$ است ، از مرکز پنج واحد به طرف راست و پنج واحد به طرف چپ می شمریم و این نقاط را مشخص می کنیم. وچون $b = ۶$ است ، از مرکز شش واحد به طرف بالا و شش واحد به طرف پایین می شمریم و این نقاط را مشخص می کنیم. چهار نقطه روی بیضی مشخص شده. بیضی را رسم می کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا



رسم نمودار هذ لولی Graphing Hyperbolas

یک هذ لولی عبارت است از مجموعه نقاطی روی صفحه به طوری که قدر مطلق تفاضل فاصله آن نقاط تا دو نقطه معین Fixed ، ثابت است. هر یک از این دو نقطه معین را کانون می نامند. نقطه میانی بین این دو کانون را مرکز می گویند. با استفاده از فرمول فاصله Distance Formulaمی توان نشان داد که نمودار

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

یک هذ لولی است با مرکز (۰,۰) که با محور x در نقاط $-a$ و a تلاقی می کند. همچنین

$$\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{x^۲}{a^۲}=۱$$

یک هذ لولی است با مرکز که با محور y در نقاط $-b$ و b تلاقی می کند.

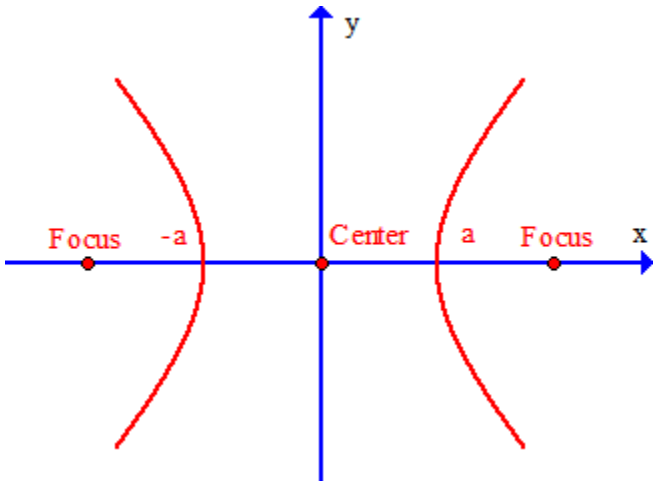
دانلود از سایت ریاضی سرا

هذ لولی با مرکز (۰,۰)

نمودار معادله

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} - \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$$

یک هذ لولی است با مرکز (۰,۰) که با محور x در نقاط $-a$ و a تلاقی می کند.



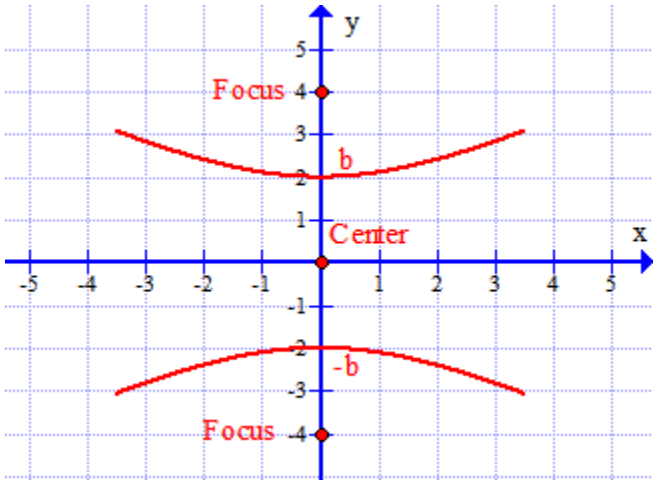
توجه – اگر هر یک از انتهای منحنی ها ویا خط مستقیم مثل شکل بالا فلش یا پیکان نباشد ، یعنی منحنی تا بی نهایت در آن انتها ادامه دارد. این موضوع در سر تا سر این کتاب صادق است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار معادله

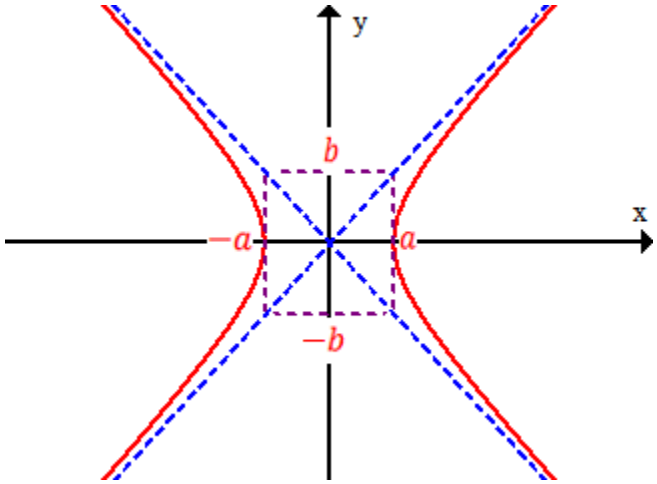
$$\frac{y^{۲}}{b^{۲}}-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

یک هذ لولی است با مرکز $(۰,۰)$ که با محور y در نقاط $-b$ و b تلاقی می کند.



رسم نمودار یک هذ لولی مانند

$$\frac{\boldsymbol{x}^{۲}}{\boldsymbol{a}^{۲}}-\frac{\boldsymbol{y}^{۲}}{\boldsymbol{b}^{۲}}=۱$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

آسان تر خواهد بود اگر یکی از مهم ترین خواص آنرا تشخیص دهیم. به شکل بالا توجه کنید. ملاحظه می کنید که چگونه انتهائ شاخه های هذ لولی تا بی نهایت ادامه دارد و به نظر می رسد که به خط های نقطه چین Dashed Lines نزدیک می شوند ، اما با آنها تلاقی نمی کنند. این خطوت نقطه چین را خطوت مجانب Asymptotes می نامند.

برای رسم این خط ها ، و یا همان خط های مجانب ، یک مستطیل با رئوس $(a,b),(-a,b)(a,-b),(-a,-b)$ رسم کنید .خط های مجانب هذ لولی ، قطر های Diagonals این مستطیل هستند اگر انها را ادامه دهیم.

مثال ۴ نمودار زیر را رسم کنید.

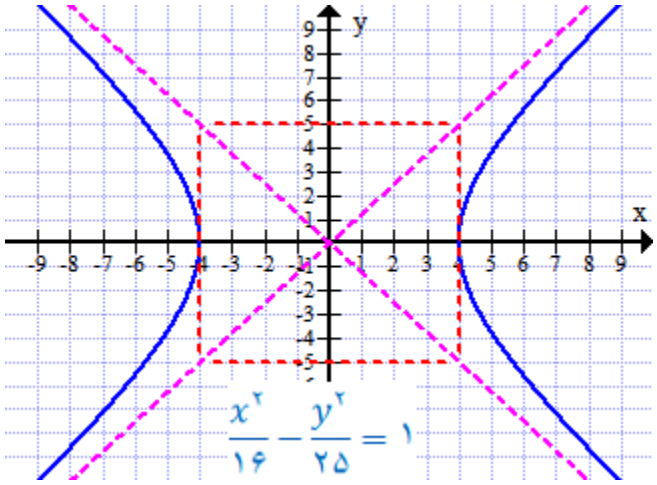
$$\frac{x^{۲}}{۱۶}-\frac{y^{۲}}{۲۵}=۱$$

پاسخ

نمودار معادله بالا یک هذ لولی است با مرکز $(۰,۰)$ و محل تلاقی با محور x نقاط $(-۴,۰)$ $(۴,۰)$ است. ابتدا خطوط مجانب را رسم می کنیم. قطر های ادامه یافته مستطیل با مختصات

$$(۴,۵),(۴,-۵),(-۴,۵),(-۴,-۵)$$

خط های مجانب هذ لولی خواهد بود. سپس با استفاده از این خط های مجانب ، نمودار را رسم می کنیم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۵ – نمودار زیر را رسم کنید.

$$۴y^۲ - ۹x^۲ = ۳۶$$

پاسخ

چون این معادله یک تفاضل مربع جمله های y و x است و هر دو در یک طرف قرار دارند ، پس نمودار آن یک هذلولی است. شکل استاندارد یک هذ لولی ، عدد یک در یک طرف معادله است ، لذا هر دو طرف معادله را بر ۳۶ تقسیم می کنیم.

$$۴y^۲ - ۹x^۲ = ۳۶$$

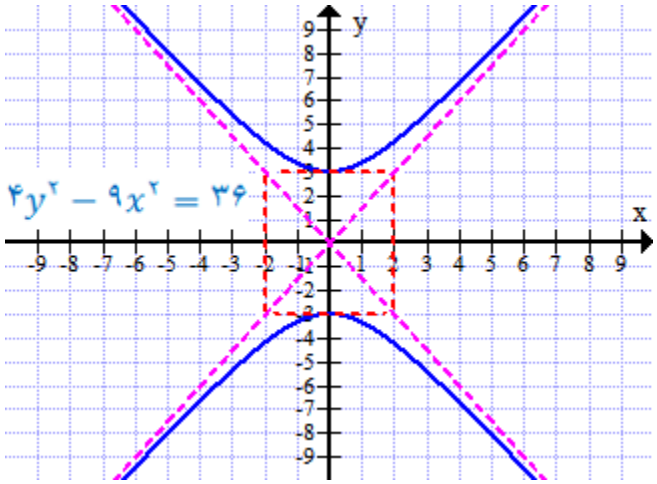
$$\frac{۴y^۲}{۳۶} - \frac{۹x^۲}{۳۶} = \frac{۳۶}{۳۶}$$

$$\frac{y^۲}{۹} - \frac{x^۲}{۴} = ۱$$

معادله بدست آمده بالا معادله یک هذ لولی است با مرکز $(۰,۰)$ و محل تلاقی با محور y در نقاط

$(۰,۳)$ $(۰,-۳)$

ملاحظه می کنید که $y = ۳$ و $a = ۲$ است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۹.۲

نمودار معادله های زیر را رسم کنید.

۱) $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۲۵}=۱$

۲) $\frac{x^{۲}}{۹}+y^{۲}=۱$

۳) $\frac{x^{۲}}{۱۶}+\frac{y^{۲}}{۹}=۱$

۴) $x^{۲}+\frac{y^{۲}}{۴}=۱$

۵) $۹x^{۲}+۴y^{۲}=۳۶$

۶) $x^{۲}+۴y^{۲}=۱۶$

۷) $\frac{(x+۱)^{۲}}{۳۶}+\frac{(y-۲)^{۲}}{۴۹}=۱$

۸) $\frac{(x-۳)^{۲}}{۹}+\frac{(y+۳)^{۲}}{۱۶}=۱$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{(y-۱)^۲}{۲۵}=۱$

۱۰) $\frac{(x+۳)^۲}{۱۶}+\frac{(y+۲)^۲}{۴}=۱$

۱۱) $\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۹}=۱$

۱۲) $\frac{x^۲}{۳۶}-\frac{y^۲}{۳۶}=۱$

۱۳) $\frac{y^۲}{۲۵}-\frac{x^۲}{۱۶}=۱$

۱۴) $\frac{y^۲}{۲۵}-\frac{x^۲}{۴۹}=۱$

۱۵) $x^۲-۴y^۲=۱۶$

۱۶) $۴x^۲-y^۲=۳۶$

دانلود از سایت ریاضی سرا

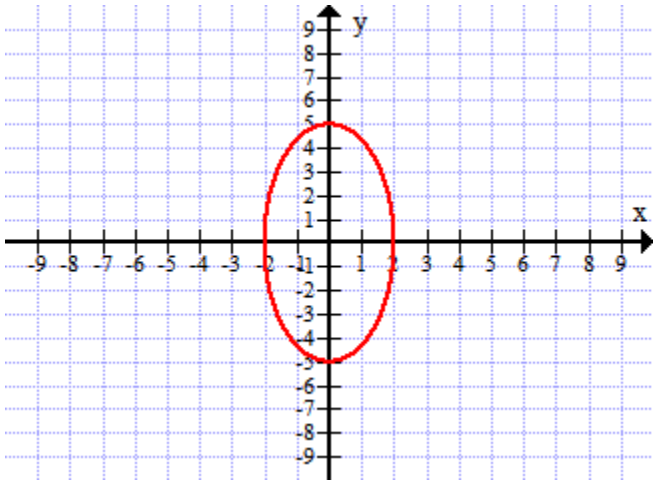
پاسخ تمرینات ۹.۲

نمودار معادله های زیر را رسم کنید.

۱) $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۲۵}=۱$

مرکز $(۰,۰)$

نقاط تلاقی با محور ها $(-۲,۰),(۲,۰),(۰,۵),(۰,-۵)$

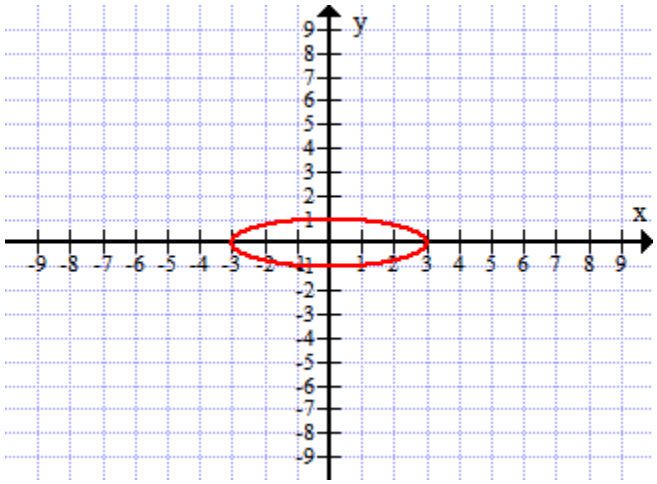


دانلود از سایت ریاضی سرا

۲) $\frac{x^۲}{۹} + y^۲ = ۱$

مرکز $(۰,۰)$

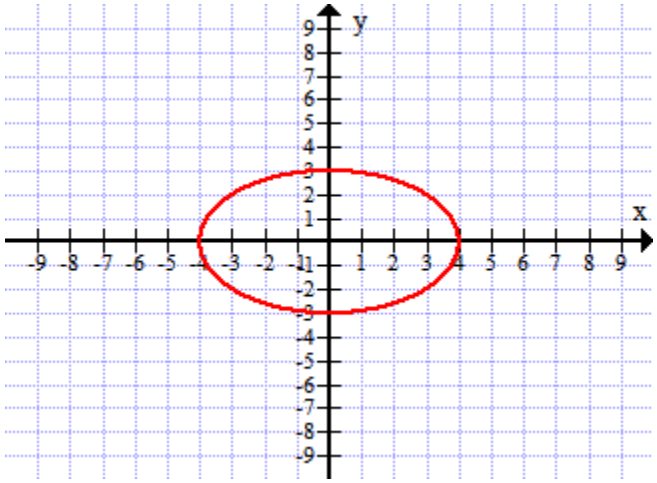
نقاط تلاقی با محور ها $(-۳,۰), (۳,۰), (۰,۱), (۰,-۱)$



۳) $\frac{x^۲}{۱۶} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$

مرکز $(۰,۰)$

نقاط تلاقی با محور ها $(-۴,۰), (۴,۰), (۰,۳), (۰,-۳)$

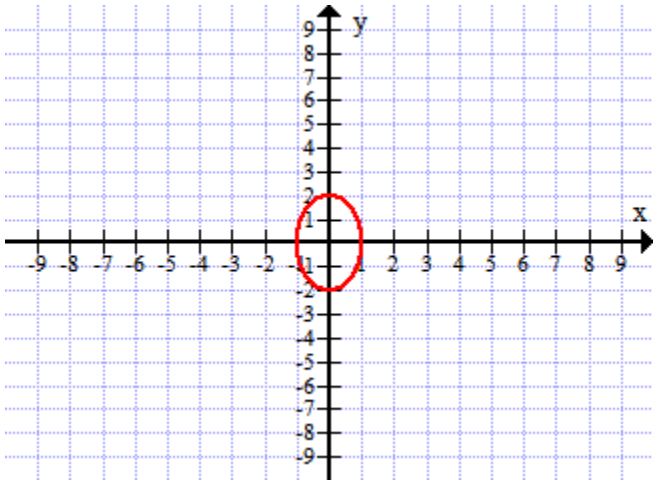


دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $x^{۲} + \frac{y^{۲}}{۴} = ۱$

مرکز $(۰,۰)$

نقاط تلاقی با محور ها $(۰,-۲), (۰,۲), (۱,۰), (-۱,۰)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $۹x^۲ + ۴y^۲ = ۳۶$

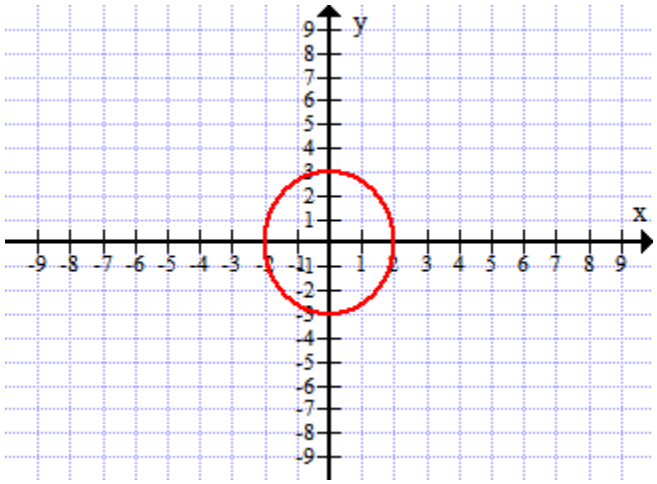
برای این که به شکل استاندار بنویسیم ، باید طرفین را بر ۳۶ تقسیم کنیم.

$$\frac{۹x^۲}{۳۶} + \frac{۴y^۲}{۳۶} = \frac{۳۶}{۳۶}$$

$$\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$$

مرکز $(۰,۰)$

نقاط تلاقی با محور ها $(-۲,۰), (۲,۰), (۰,۳), (۰,-۳)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $x^{۲} + ۴y^{۲} = ۱۶$

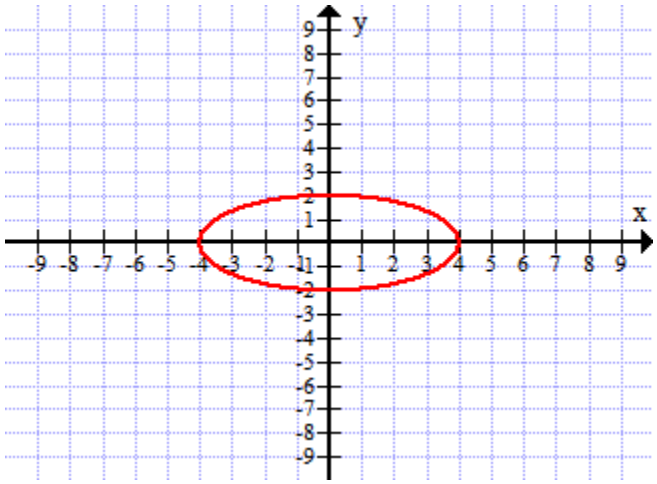
طرفین را بر ۱۶ تقسیم می کنیم.

$$\frac{x^{۲}}{۱۶} + \frac{۴y^{۲}}{۱۶} = \frac{۱۶}{۱۶}$$

$$\frac{x^{۲}}{۱۶} + \frac{y^{۲}}{۴} = ۱$$

مرکز $(۰,۰)$

نقاط تلاقی با محور ها $(-۴,۰), (۴,۰), (۰,۲), (۰,-۲)$

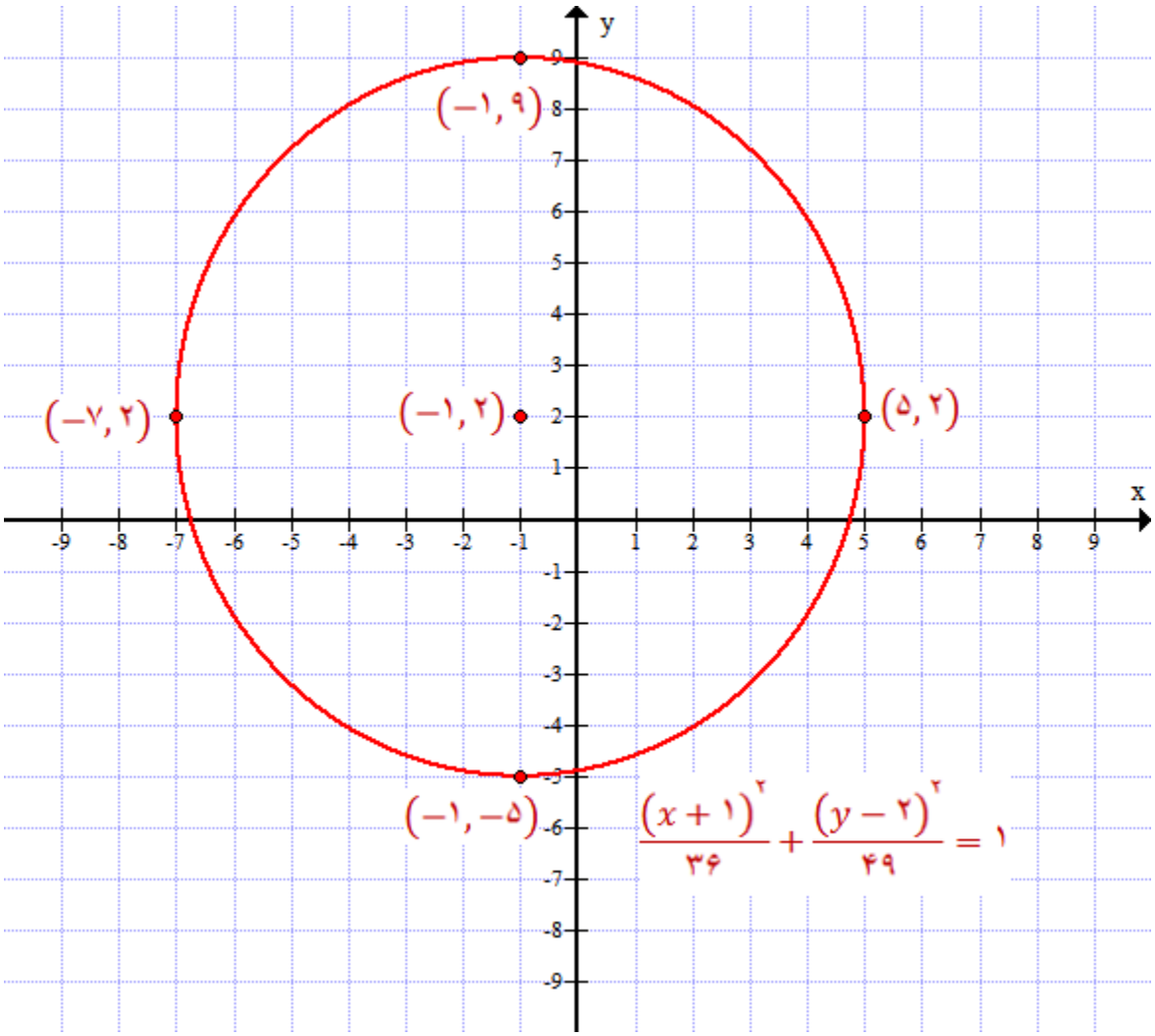


دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $\frac{(x+۱)^۲}{۳۶}+\frac{(y-۲)^۲}{۴۹}=۱$

مرکز $(-۱,۲)$

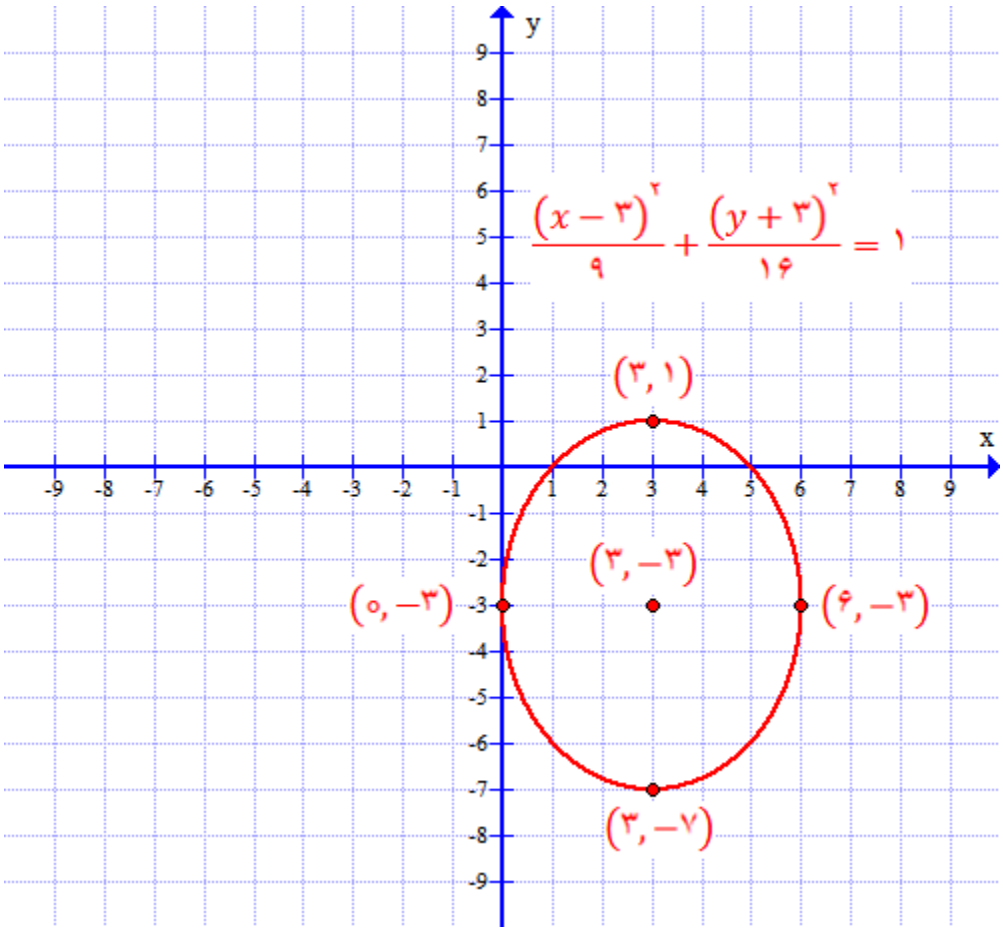
چون مرکز از $(۰,۰)$ به $(-۱,۲)$ جا بجا شده محل دقیق تلاقی با محور ها مشکل است ولی چندان هم لازم نیست.
برای ما b و a مهم است. $b=۷$ و $a=۶$ لذا از مرکز ۶ واحد به طرف راست و ۶ واحد به طرف چپ حرکت می کنیم و آنجا را نقطه گذاری می کنیم. به همین ترتیب ۷ واحد به طرف بالا و ۷ واحد به طرف پایین حرکت می کنیم و نقطه گذاری می کنیم. حالا می توانیم بیضی را مطابق قبل رسم کنیم.



دانلود از سایت ریاضی سرا

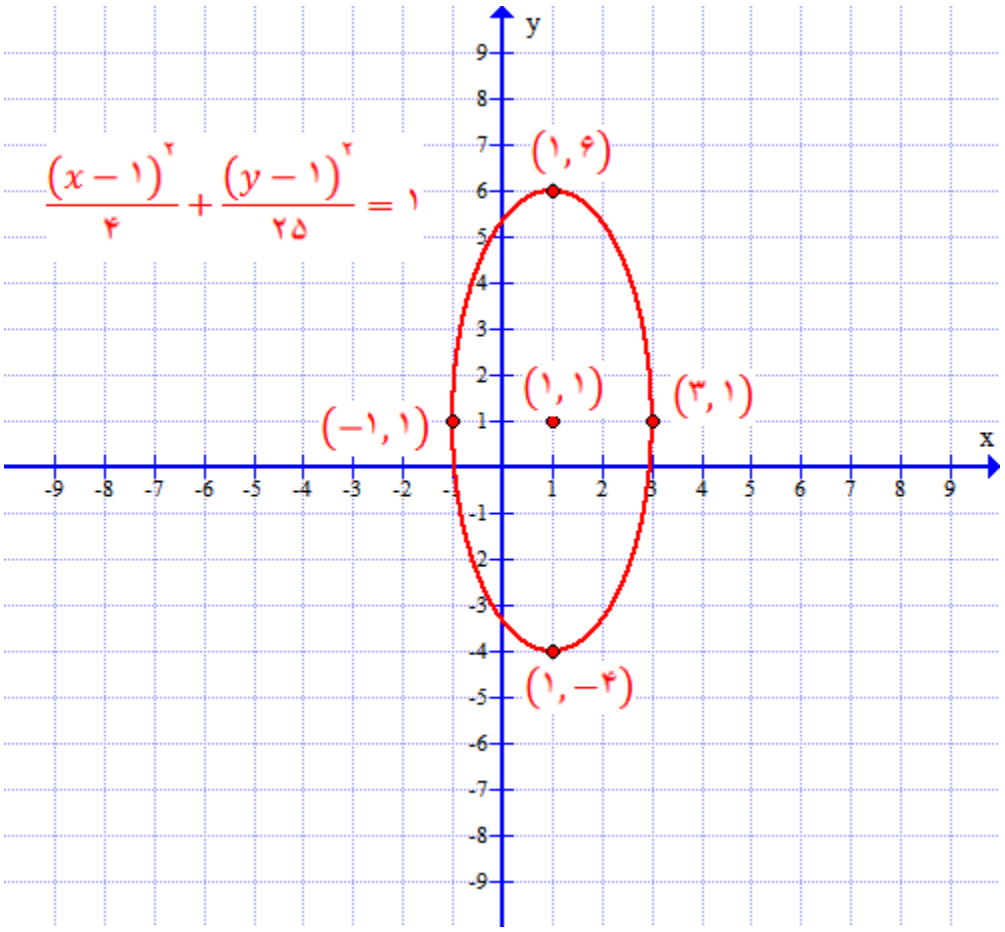
۸) $\frac{(x-۳)^۲}{۹}+\frac{(y+۳)^۲}{۱۶}=۱$

اینجا هم مطابق تمرین ۷ عمل می کنیم.



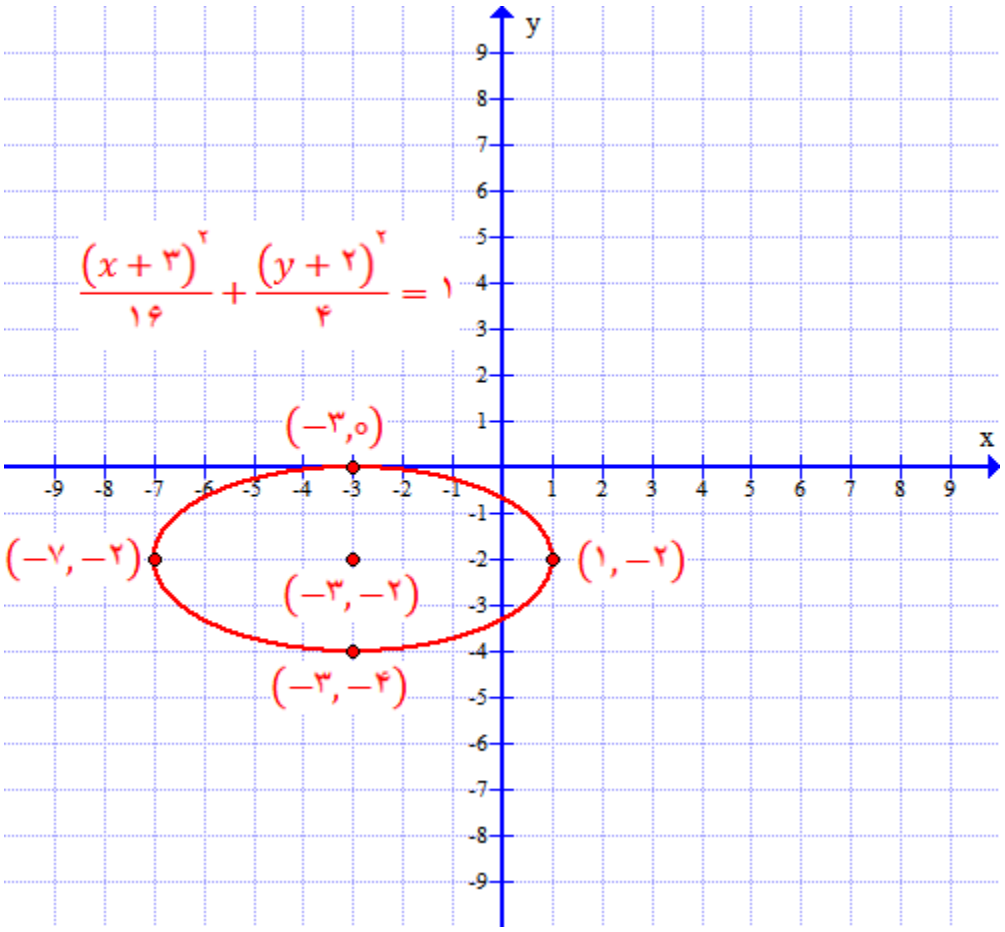
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{(y-۱)^۲}{۲۵}=۱$



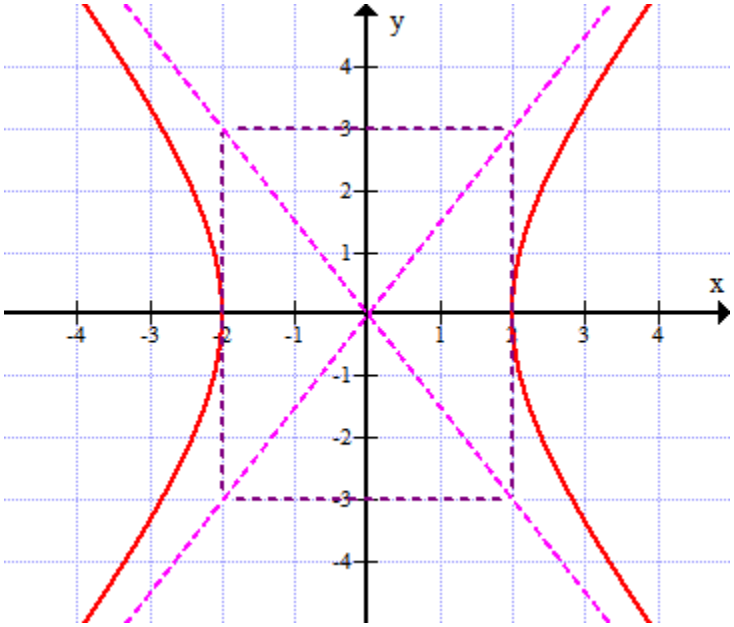
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $\frac{(x+۳)^۲}{۱۶}+\frac{(y+۲)^۲}{۴}=۱$

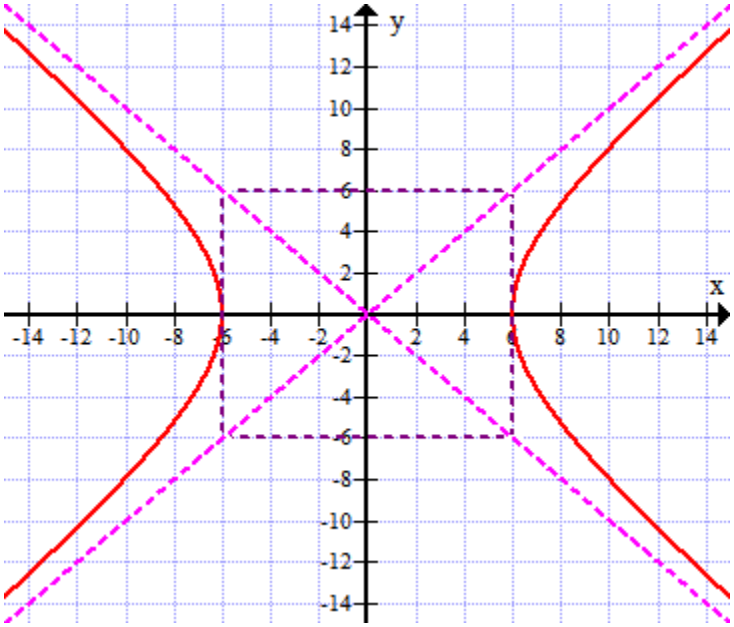


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $\frac{x^{۲}}{۴}-\frac{y^{۲}}{۹}=۱$

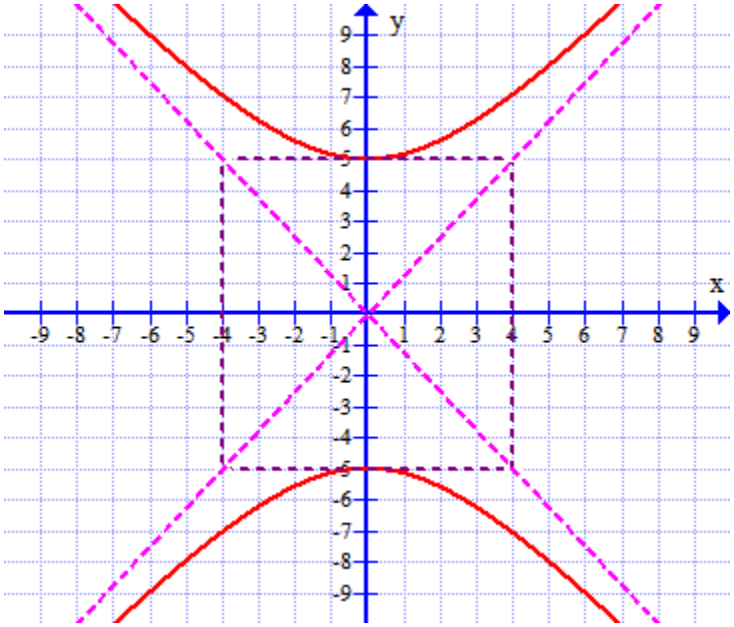


۱۲) $\frac{x^{۲}}{۳۶}-\frac{y^{۲}}{۳۶}=۱$

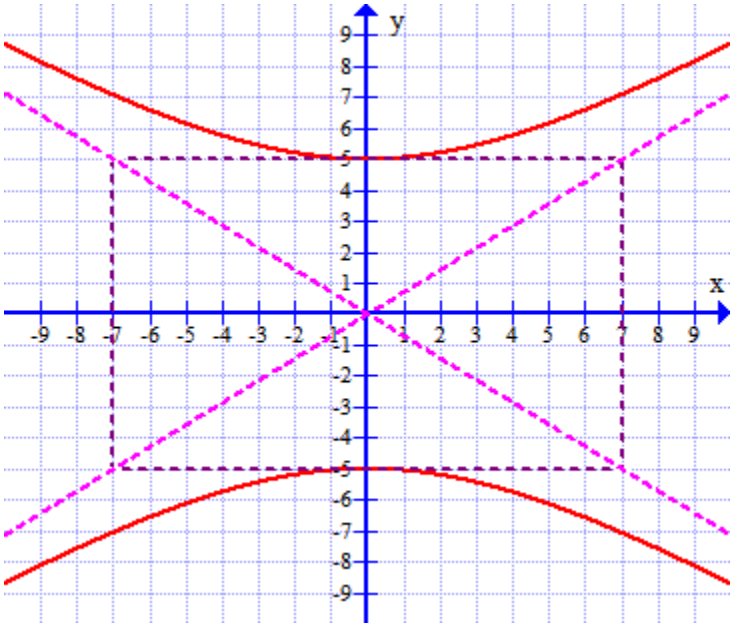


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳) $\frac{y^{۲}}{۲۵} - \frac{x^{۲}}{۱۶} = ۱$



۱۴) $\frac{y^{۲}}{۲۵} - \frac{x^{۲}}{۴۹} = ۱$



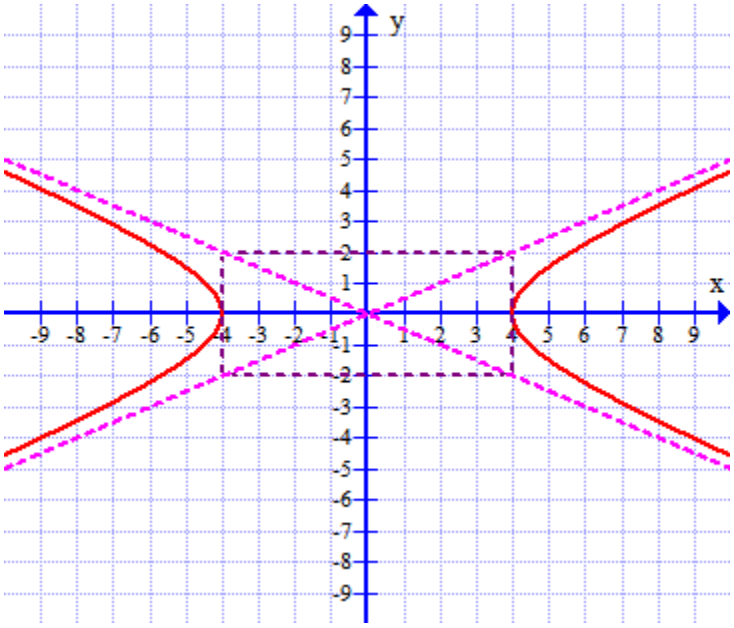
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵) $x^{۲} - ۴y^{۲} = ۱۶$

طرفین را بر ۱۶ تقسیم می کنیم.

$$\frac{x^{۲}}{۱۶} - \frac{۴y^{۲}}{۱۶} = \frac{۱۶}{۱۶}$$

$$\frac{x^{۲}}{۱۶} - \frac{y^{۳}}{۴} = ۱$$



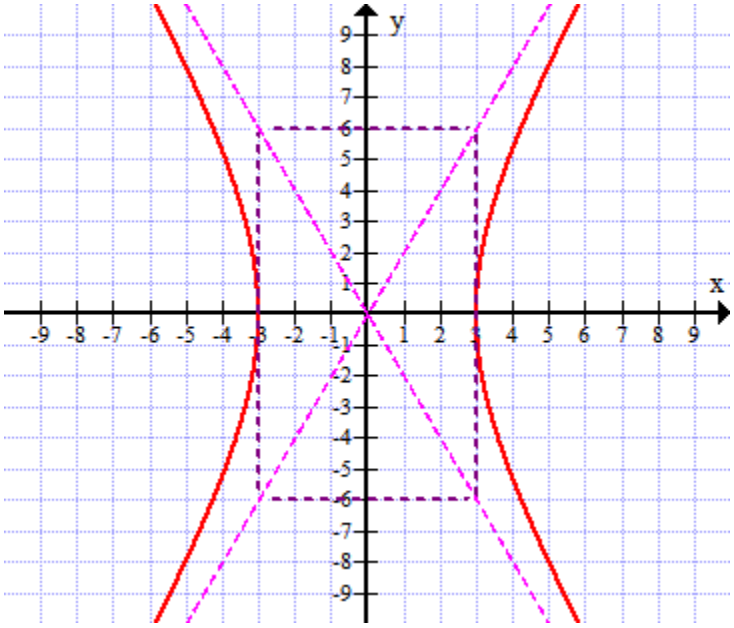
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶) $۴x^۲ - y^۲ = ۳۶$

طرفین را بر ۳۶ تقسیم می کنیم.

$$\frac{۴x^۲}{۳۶} - \frac{y^۲}{۳۶} = \frac{۳۶}{۳۶}$$

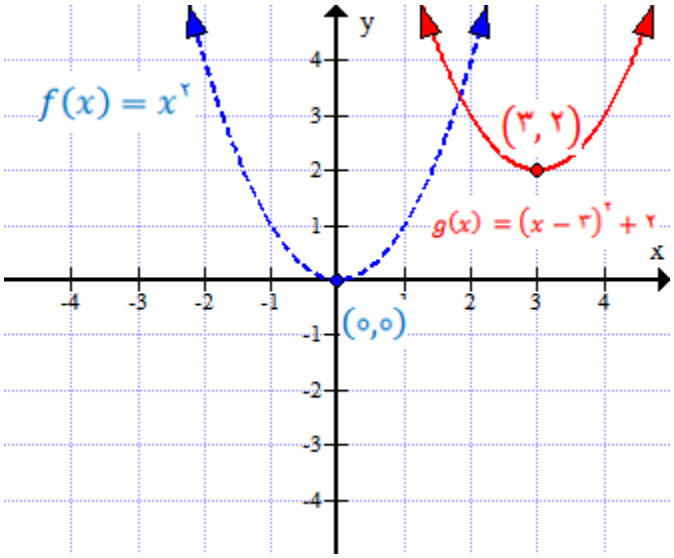
$$\frac{x^۲}{۹} = \frac{y^۲}{۳۶} = ۱$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۹.۳ – رسم نمودار توابع غیر خطی Graphing Nonlinear Functions

بخاطر دارید که نمودار $f(x) = x^{۲}$ یک سهمی است با راس $(۰,۰)$ مقایسه کنید این نمودار را با نمودار $g(x) = (x - ۳)^{۲} + ۲$ نمودار این تابع هم یک سهمی است اما با راس $(۳, ۲)$ به عبارت دیگر نمودار تابع $g(x)$ مانند نمودار $f(x)$ است ، بجز اینکه سه واحد به طرف راست و دو واحد به طرف بالا جا بجا شده است. این موضوع را به خاطر داشته باشید تا تابع های دیگر را بر رسی کنیم.



مثال ۱ – نمودار $f(x) = |x|$ را رسم کنید.

پاسخ –این یک تابع خطی نیست و نمودار آن یک خط مستقیم نیست. چون نمیدانیم نمودار آن چه شکلی دارد ، چندین زوج مرتب روی نمودار را پیدا می کنیم. مقادیری برای x انتخاب می کنیم ، تا مقدار مربوطه y پیدا شود.

$x = -۳ \Rightarrow y = |-۳| = ۳$

$x = -۲ \Rightarrow y = |-۲| = ۲$

$x = -۱ \Rightarrow y = |-۱| = ۱$

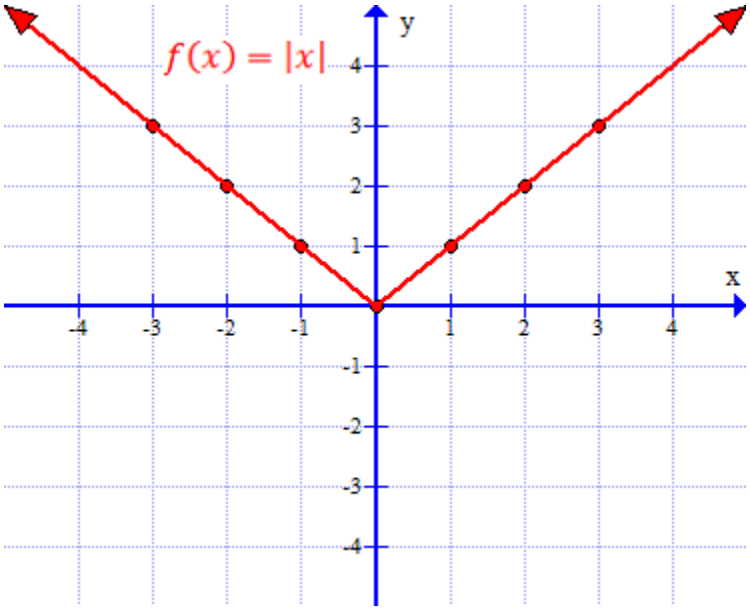
$x = ۰ \Rightarrow y = |۰| = ۰$

$x = ۱ \Rightarrow y = |۱| = ۱$

$x = ۲ \Rightarrow y = |۲| = ۲$

$x = ۳ \Rightarrow y = |۳| = ۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا



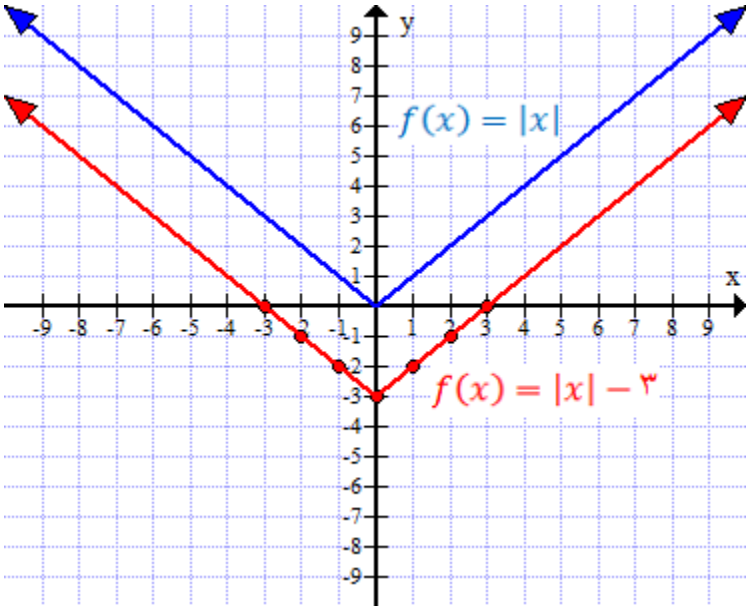
از نقطه گذاری زوج های مرتب روی صفحه مختصات ، نتیجه می گیریم که نمودار این تابع قدر مطلق به شکل V است.

مثال ۲ – نمودار $f(x) = |x| - ۳$ **را رسم کنید.**

پاسخ –اینجا نیز به x مقادیری می دهیم تا مقادیری برای y پیدا شود.

x	y
۳–	۰
۲–	۱–
۱–	۲–
۰	۳–
۱	۲–
۲	۱–
۳	۰

دانلود از سایت ریاضی سرا



همان طور که قبلا دیدیم ، نمودار $y = x^{۲} - ۳$ مانند نمودار $y = x^{۲}$ است که سه واحد به طرف پایین جا بجا شده است. به همین ترتیب نمودار $y = |x| - ۳$ مانند نمودار $y = |x|$ است که سه واحد به طرف پایین جا بجا شده است.

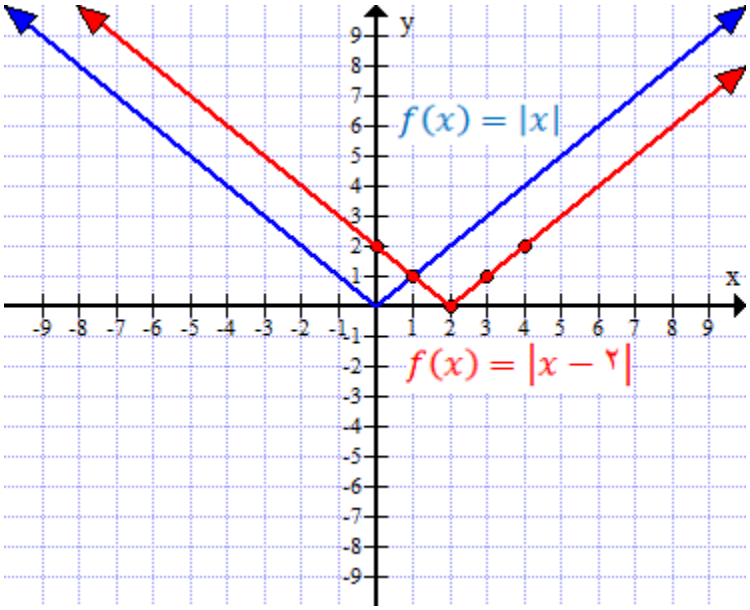
مثال ۳ – نمودار $f(x) = |x - ۲|$ را رسم کنید.

پاسخ – ابتدا به خاطر بیاورید نمودار $y = (x - ۲)^{۲}$ این معادله یک سهمی است با راس $(۲,۰)$ به عبارت دیگر نمودار $y = (x - ۲)^{۲}$ مانند نمودار $y = x^{۲}$ است که دو واحد به طرف راست جا بجا شده است.

به همین طریق نمودار $y = |x - ۲|$ مانند نمودار $y = |x|$ است که دو واحد به طرف راست جا بجا شده است.

x	y
۰	۲
۱	۱
۲	۰
۳	۱
۴	۲

دانلود از سایت ریاضی سرا



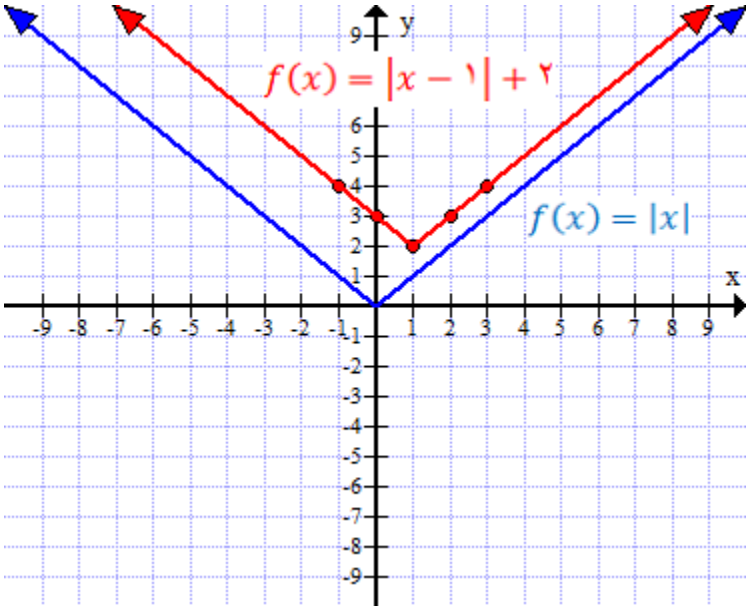
مثال ۴ – نمودار $f(x) = |x - ۱| + ۲$

پاسخ - به خاطر دارید که نمودار $y = (x - ۱)^۲ + ۲$ دارای راس $(۱, ۲)$ است. به عبارت دیگر نمودار این معادله مانند نمودار $y = x^۲$ است که یک واحد به طرف راست و دو واحد به طرف بالا جا بجا شده است.

همین موضوع برای $f(x) = |x - ۱| + ۲$ صادق است.

x	y
۱−	۴
۰	۳
۱	۲
۲	۳
۳	۴

دانلود از سایت ریاضی سرا



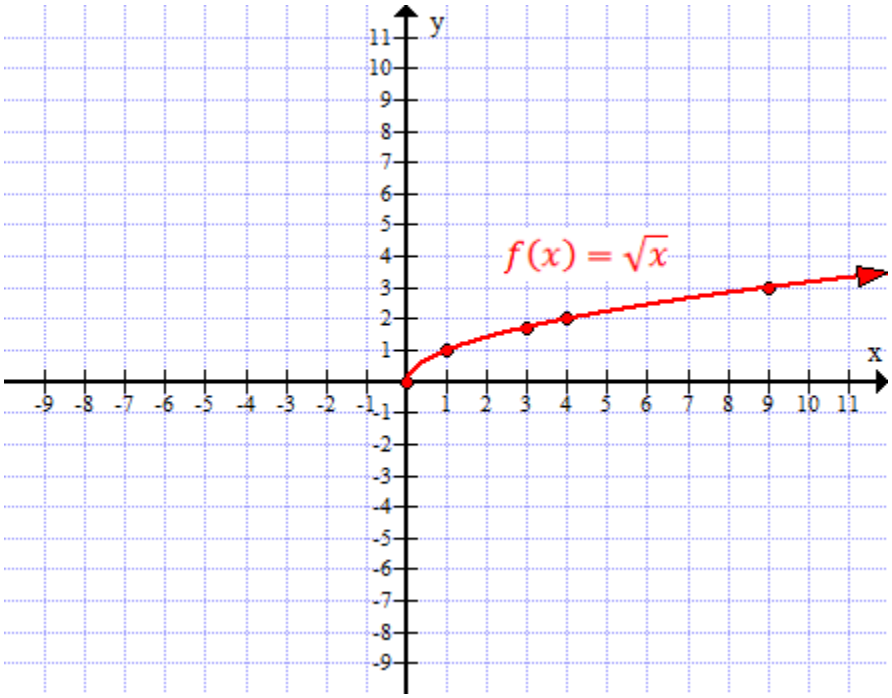
به خاطر دارید که گفتیم ، دامنه یک تابع عبارت است از مجموعه مقادیر ممکن برای x آن تابع است. دامنه تابع هایی که تا بحال بحث کرده ایم شامل مجموعه تمام اعداد حقیقی بوده اند. اما در مورد تابع مثال بعد ، یعنی تابع ریشه دوم ، صادق نیست.

مثال ۵ – نمودار تابع ریشه دوم $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید.

پاسخ –به خاطر دارید که گفتیم ، ریشه دوم اعداد منفی ، یک عدد حقیقی نیست. پس دامنه این تابع کلیه اعداد غیر منفی است.

x	y
۰	۰
۱	۱
۳	$\sqrt{۳} \approx ۱/۷$
۴	۲
۹	۳

دانلود از سایت ریاضی سرا

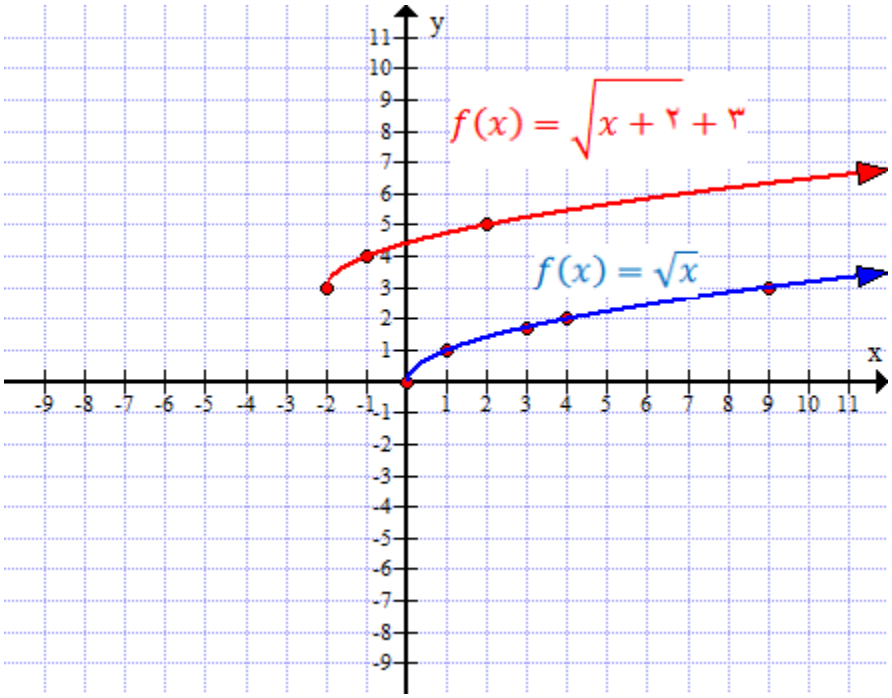


مثال ۶ – نمودار $f(x) = \sqrt{x + ۲} + ۳$ **را رسم کنید.**

پاسخ – مطابق آنچه تا بحال گفته شد ، نمودار این تابع مانند تابع $f(x) = \sqrt{x}$ که دو واحد به طرف چپ و سه واحد به طرف بالا جا بجا شده باشد.

x	y
۲−	۳
۱−	۴
۲	۵

دانلود از سایت ریاضی سرا



این جابجایی افقی و عمودی برای کلیه تابع ها کار برد دارد.

نمودار تابع $F(x) = f(x-h) + k$ مانند نمودار تابع $f(x)$ است که h واحد به طرف راست و یا چپ و k واحد به طرف بالا و یا پایین جا بجا شده باشد. به طرف راست اگر $h > ۰$ به طرف چپ اگر $h < ۰$ به طرف بالا اگر $k > ۰$ به طرف پایین اگر $k < ۰$

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۹.۳

نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = |x| + ۳$

۲) $f(x) = |x| - ۲$

۳) $f(x) = \sqrt{x} - ۲$

۴) $f(x) = \sqrt{x} + ۳$

۵) $f(x) = |x - ۴|$

۶) $f(x) = |x + ۳|$

۷) $f(x) = \sqrt{x + ۲}$

۸) $f(x) = \sqrt{x - ۲}$

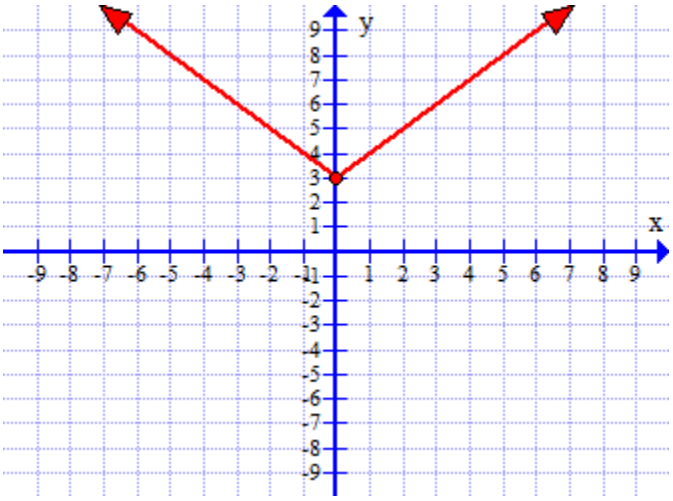
۹) $f(x) = \sqrt{x - ۲} + ۳$

دانلود از سایت ریاضی سرا

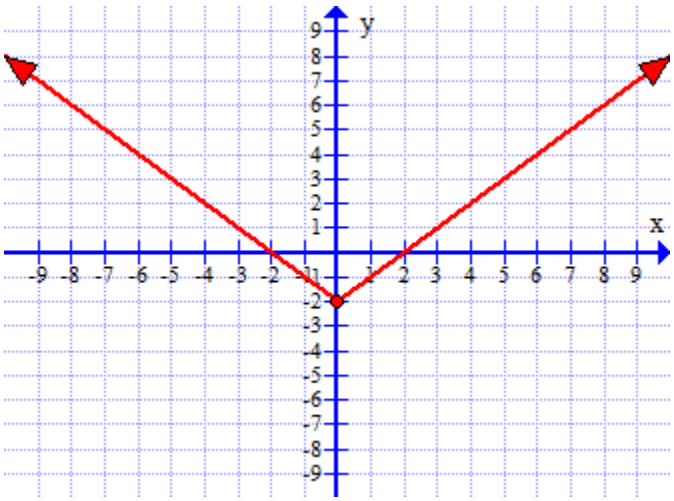
پاسخ تمرینات ۹.۳

نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = |x| + ۳$

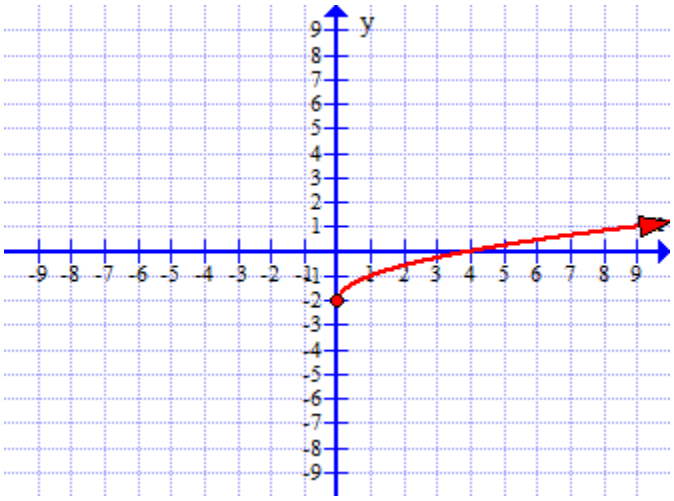


۲) $f(x) = |x| - ۲$

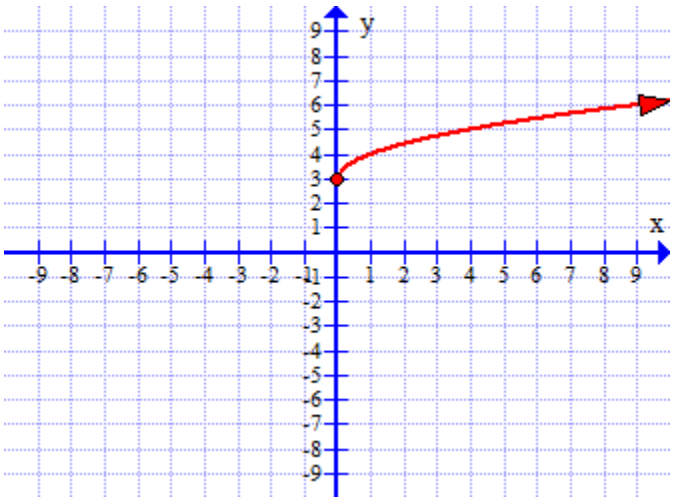


دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $f(x) = \sqrt{x} - ۲$

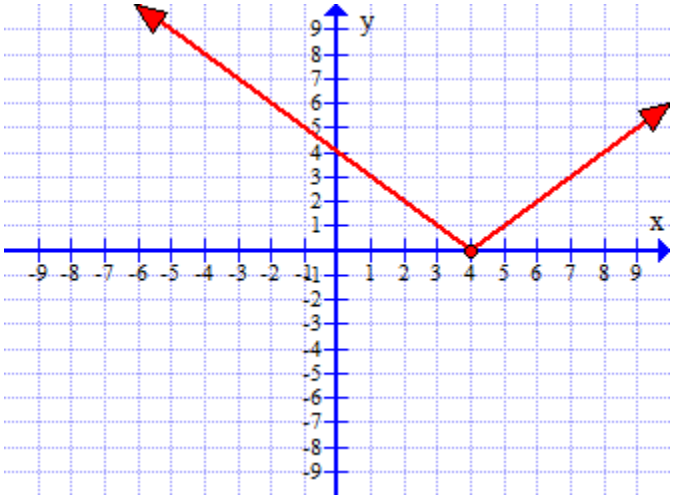


۴) $f(x) = \sqrt{x} + ۳$

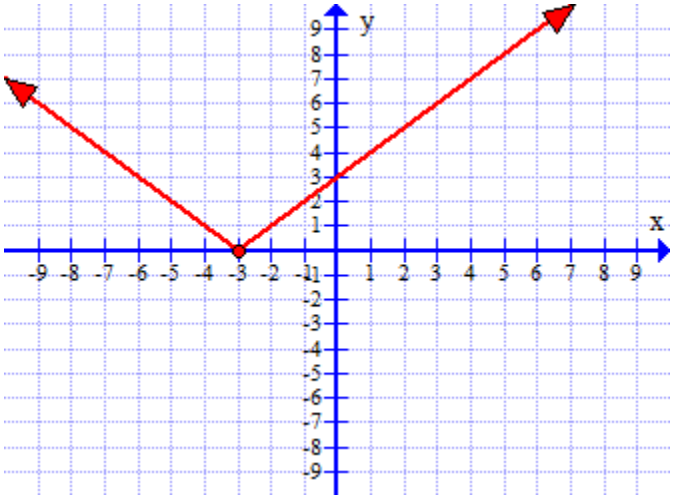


دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $f(x) = |x - ۴|$

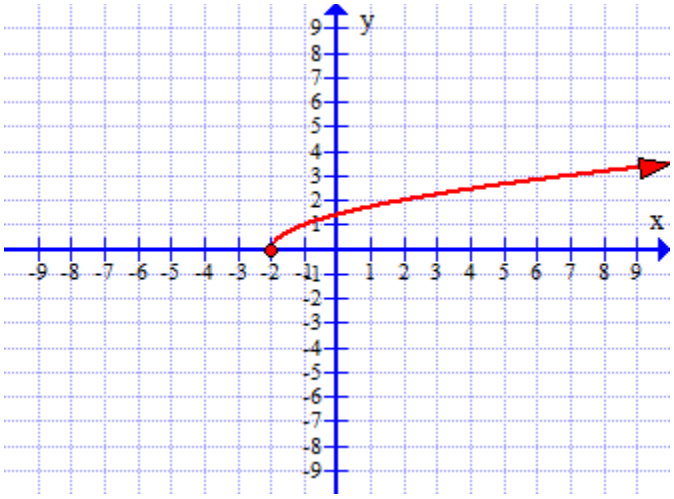


۶) $f(x) = |x + ۳|$

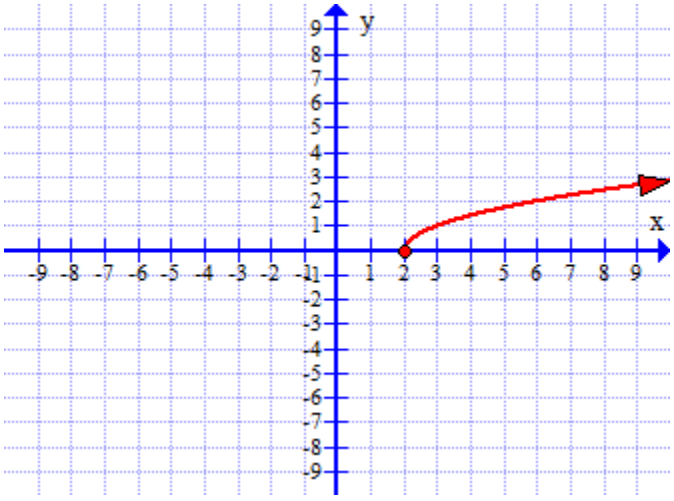


دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $f(x) = \sqrt{x + ۲}$

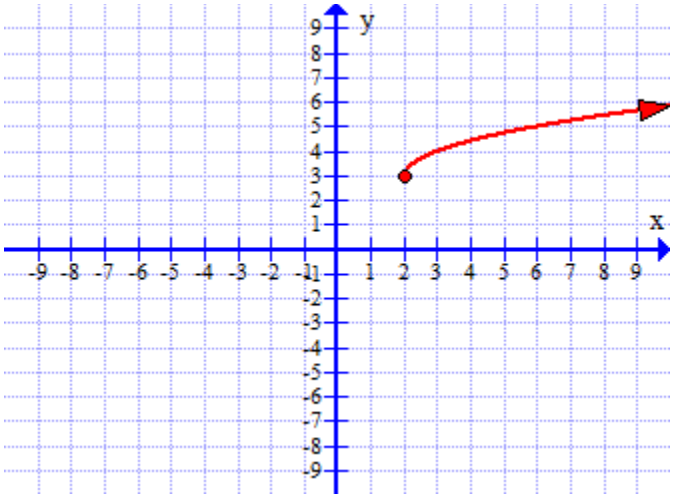


۸) $f(x) = \sqrt{x - ۲}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $f(x) = \sqrt{x - ۲} + ۳$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۹.۴ – حل دستگاه های معادلات غیر خطی Solving Nonlinear Systems of Equations

در بخش ۸.۱ با استفاده از رسم نمودار ، روش های جانشینی و حذف ، جواب های دستگاه های معادلات خطی دو مجهولی را بدست آوردیم. حالا همان روش ها را برای پیدا کردن جواب های دستگاه های معادلات غیر خطی دو مجهولی بکار می بریم.

دستگاه معادلات غیر خطی دستگاه معادلاتی است که حد اقل یکی از معادلات ، خطی نیست. چون معادلات در هر دستگاه را رسم می کنیم ، پس فقط جواب های اعداد حقیقی مورد نظر است.

حل دستگاه های غیر خطی از طریق جانشینی Solving Nonlinear Systems by Substitution

مثال ۱ -دستگاه زیر را از طریق جانشینی حل کنید.

$$\begin{cases} x^{۲} - ۳y = ۱ \\ x - y = ۱ \end{cases}$$

بهترین انتخاب این است که معادله دوم را برای y حل کنیم.

$$x - y = ۱$$

$$y = x - ۱$$

حالا در معادله اول بجای y می گذاریم $x - ۱$ و معادله بدست آمده را برای x حل می کنیم.

$$x^{۲} - ۳y = ۱$$

$$x^{۲} - ۳(x - ۱) = ۱$$

$$x^{۲} - ۳x + ۳ - ۱ = ۰$$

$$x^{۲} - ۳x + ۲ = ۰$$

$$(x - ۱)(x - ۲) = ۰$$

$$x = ۱ \qquad x = ۲$$

حالا $x = ۱$ و $x = ۲$ را در معادله دوم می گذاریم تا مقادیر مربوطه y پیدا شوند.

اگر $x = ۲$

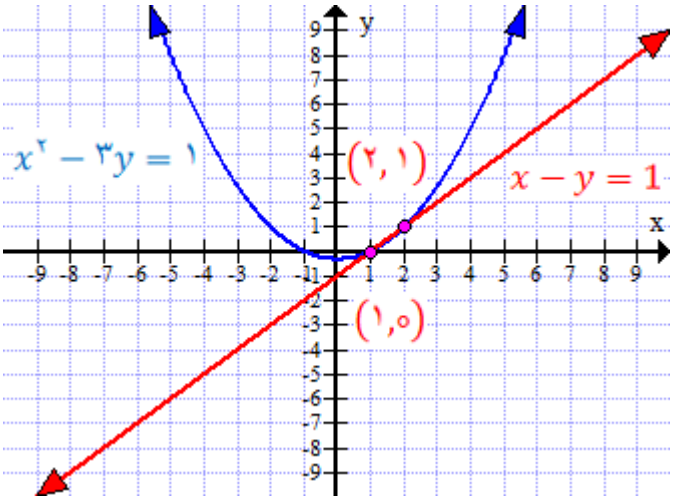
$$x - y = ۱ \Rightarrow ۲ - y = ۱ \quad \Rightarrow y = ۱$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر $x = ۱$

$x - y = ۱ \Rightarrow ۱ - y = ۱ \quad y = ۰$

پس مجموعه جواب ها $\{(۱,۰),(۲,۱)\}$ است. اگر این دو جواب را در دستگاه امتحان کنیم ، هر دو معادله بر قرار هستند. نمودار این دستگاه هم مطابق زیر است.



مثال ۲ – دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x^۲ + y^۲ = ۶ \end{cases}$$

پاسخ –این دستگاه برای روش جانشینی ایده ال است چون در معادله اول y بر حسب x داده شده است. توجه داشته باشید که چون $y = \sqrt{x}$ است ، پس هم x و هم y باید نا منفی باشند. پس در معادله دوم بجای y می گذاریم $\sqrt{x}$ و معادله را برای x حل می کنیم.

$x^۲ + y^۲ = ۶$

$x^۲ + (\sqrt{x})^۲ = ۶$

$x^۲ + x - ۶ = ۰$

$(x + ۳)(x - ۲) = ۰$

$x = -۳ \qquad x = ۲$

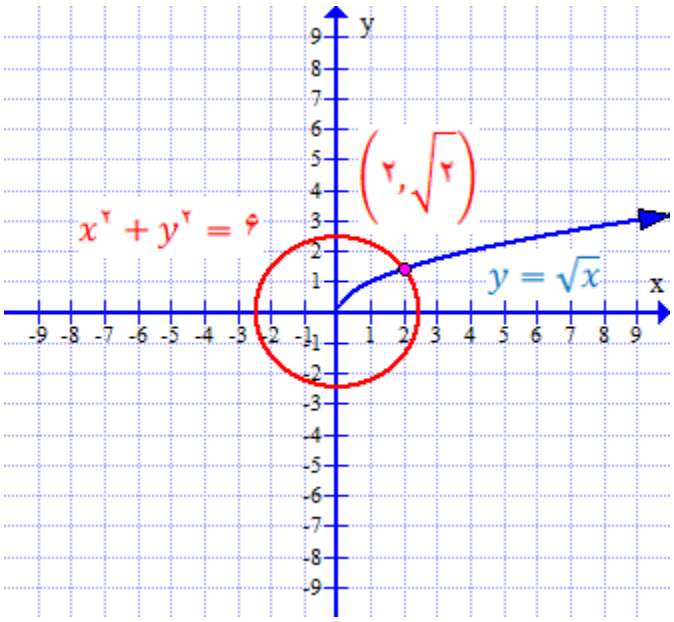
جواب ۳– را قبول نمی کنیم ، زیرا قبلا گفتیم که x باید نا منفی باشد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر $x = ۲$

$$y = \sqrt{x} \quad \Rightarrow y = \sqrt{۲}$$

چون فقط جواب های اعداد حقیقی مورد نظر ما است پس جواب دستگاه $\left\{\left(۲, \sqrt{۲}\right)\right\}$ است. نمودار دستگاه را رسم می کنیم.



مثال ۳ ــ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۴ \\ x + y = ۳ \end{cases}$$

پاسخ روش جانشینی را بکار می بریم. برای این کار معادله دوم را برای x حل می کنیم.

$$x + y = ۳$$

$$x = -y + ۳$$

حالا مقدار x را در معادله اول می گذاریم و معادله را حل می کنیم. تا مقدار y پیدا شود.

$$x^۲ + y^۲ = ۴$$

$$\left(-y + ۳\right)^۲ + y^۲ = ۴$$

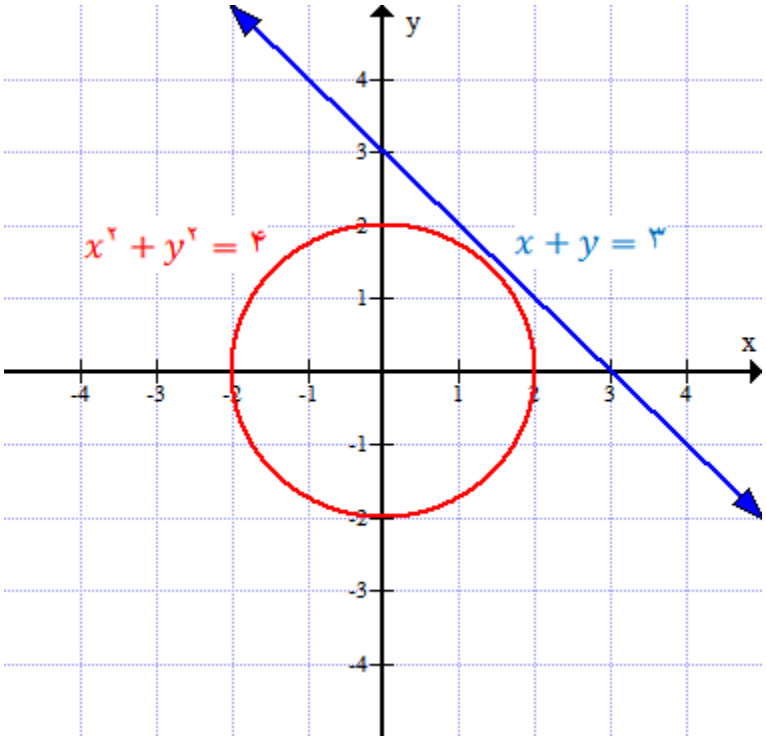
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y^{۲} - ۶y + ۹ + y^{۲} = ۴$$

$$۲y^{۲} - ۶y + ۵ = ۰$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{۲a} = \frac{-(-۶) \pm \sqrt{(-۶)^{۲} - ۴(۲)(۵)}}{۲(۲)} = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۶ - ۴۰}}{۴} = \frac{۶ \pm \sqrt{-۴}}{۴}$$

ملاحظه می کنید که $\sqrt{-۴}$ عدد حقیقی نیست پس دستگاه جواب حقیقی ندارد. اگر معادله ها را رسم کنیم ، ملاحظه می کنید که دو دائره و خط یک دیگر را قطع نمی کنند.



حل دستگاه های غیر خطی از طریق حذف Solving Nonlinear Systems by Elimination

بعضی از دستگاه های غیر خطی را نی توان از طریق حذف کردن حل کرد.

مثال ۴ – دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x^{۲} + ۲y^{۲} = ۱۰ \\ x^{۲} - y^{۲} = ۱ \end{cases}$$

اینجا روش حذفی و یا به عبارتی ، جمع ، بکار می بریم.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} x^۲ + ۲y^۲ = ۱۰ \\ x^۲ - y^۲ = ۱ \end{cases}$$

معادله دوم را در ۱− ضرب می کنیم و با معادله اول جمع می کنیم.

$$\begin{cases} x^۲ + ۲y^۲ = ۱۰ \\ -۱(x^۲ - y^۲ = ۱) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^۲ + ۲y^۲ = ۱۰ \\ -x^۲ + y^۲ = -۱ \end{cases}$$

$$۳y^۲ = ۹$$

$$y^۲ = ۳$$

$$y = \pm\sqrt{۳}$$

برای پیدا کردن مقادیر x بجای y می گذاریم $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$

$$x^۲ - y^۲ = ۱$$

$$y = \sqrt{۳}$$

$$x^۲ - \left(\sqrt{۳}\right)^۲ = ۱$$

$$x^۲ - ۳ = ۱$$

$$x^۲ = ۴$$

$$x = \pm ۲$$

$$y = -\sqrt{۳}$$

$$x^۲ - \left(-\sqrt{۳}\right)^۲ = ۱$$

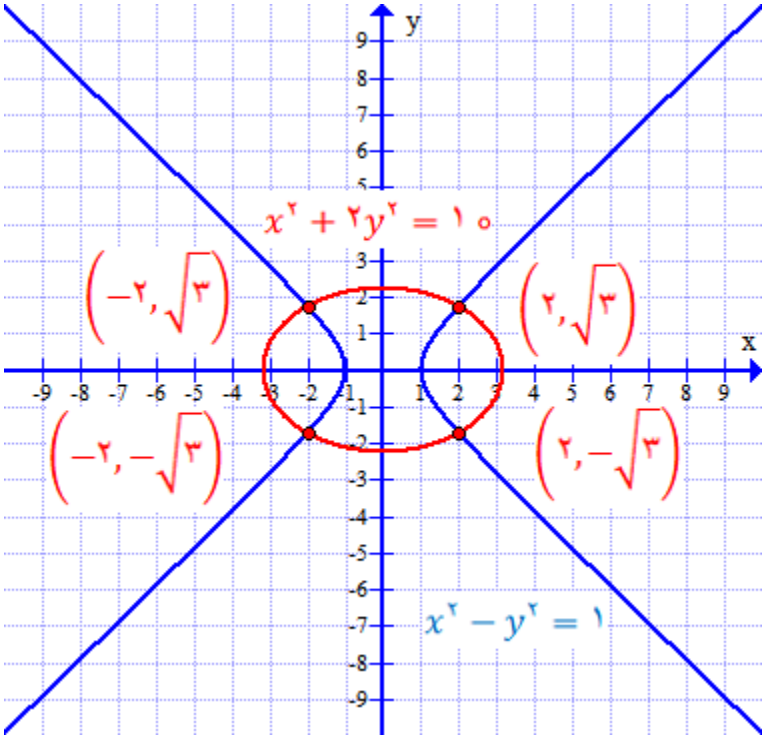
$$x^۲ - ۳ = ۱$$

$$x^۲ = ۴$$

$$x = \pm ۲$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

پس مجموعه جواب های این دستگاه $\left\{\left(۲,\sqrt{۳}\right),\left(-۲,\sqrt{۳}\right),\left(۲,-\sqrt{۳}\right),\left(-۲,-\sqrt{۳}\right)\right\}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۹.۴

دستگاه های زیر را حل کنید.

۱) $\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} = ۲۵ \\ ۴x + ۳y = ۰ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x^{۲} + ۴y^{۲} = ۱۰ \\ y = x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} y^{۲} = ۴ - x \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} = ۹ \\ ۱۶x^{۲} - ۴y^{۲} = ۶۴ \end{cases}$

۵) $\begin{cases} x^{۲} + ۲y^{۲} = ۲ \\ x - y = ۲ \end{cases}$

۶) $\begin{cases} y = x^{۲} - ۳ \\ ۴x - y = ۶ \end{cases}$

۷) $\begin{cases} y = x^{۲} \\ ۳x + y = ۱۰ \end{cases}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $\begin{cases} y = ۲x^۲ + ۱ \\ x + y = -۱ \end{cases}$

۹) $\begin{cases} y = x^۲ - ۴ \\ y = x^۲ - ۴x \end{cases}$

۱۰) $\begin{cases} ۲x^۲ + ۳y^۲ = ۱۴ \\ -x^۲ + y^۲ = ۳ \end{cases}$

۱۱) $\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱ \\ x^۲ + (y + ۳)^۲ = ۴ \end{cases}$

۱۲ – اگر یک دستگاه معادله که نمودارهای آن شامل یک دائره و یک سهمی است ، چند جواب حقیقی ممکن است این دستگاه داشته باشد؟

۱۳ – مجموع مربع های دو عدد ۱۳۰ است و تفاضل مربع آنها ۳۲ آن اعداد را پیدا کنید.

۱۴ – مساحت یک مربع مستطیل ۲۸۵ سانتی متر مربع است و محیط آن ۶۸ سانتی متر. ابعاد این مستطیل را پیدا کنید.

۱۵ - اگر نمودار یک دستگاه معادله شامل یک بیضی و یک خط باشد ، چند جواب حقیقی ممکن است داشته باشد؟

دانلود از سایت ریاضی سرا

پاسخ تمرینات ۹.۴

دستگاه های زیر را حل کنید.

۱) $\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۲۵ \\ ۴x+۳y=۰ \end{cases}$

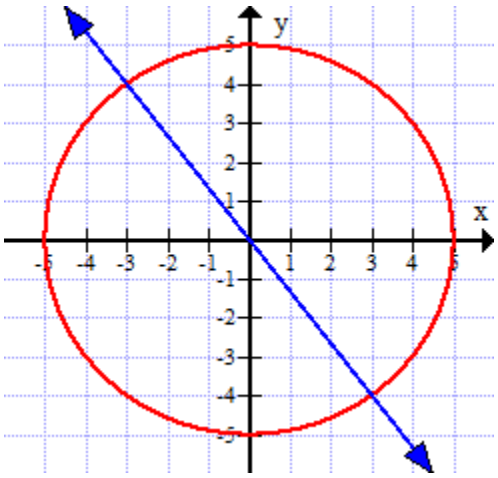
$$۴x+۳y=۰ \Rightarrow ۴x=-۳y \Rightarrow x=-\frac{۳}{۴}y$$

$$x^{۲}+y^{۲}=۲۵ \Rightarrow \frac{۹}{۱۶}y^{۲}+y^{۲}=۲۵ \Rightarrow ۹y^{۲}+۱۶y^{۲}=۴۰۰ \Rightarrow ۲۵y^{۲}=۴۰۰$$

$$y^{۲}=۱۶ \Rightarrow y=\pm ۴$$

$y=۴$	$y=-۴$
$۴x+۳y=۰$	$۴x+۳y=۰$
$۴x+۳(۴)=۰$	$۴x+۳(-۴)=۰$
$۴x=-۱۲$	$۴x=۱۲$
$x=-۳$	$x=۳$

$\{(۳,-۴),(-۳,۴)\}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲) $\begin{cases} x^{۲} + ۴y^{۲} = ۱۰ \\ y = x \end{cases}$

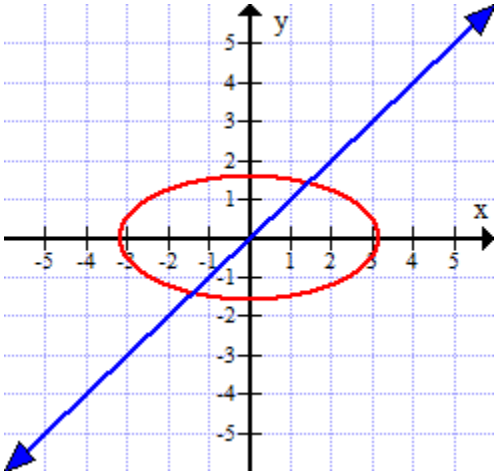
$x^{۲} + ۴y^{۲} = ۱۰ \Rightarrow x^{۲} + ۴x^{۲} = ۱۰ \Rightarrow ۵x^{۲} = ۱۰ \Rightarrow x^{۲} = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$

$x = \sqrt{۲}$ $\qquad$ $x = -\sqrt{۲}$

$y = x$ $\qquad$ $y = x$

$y = \sqrt{۲}$ $\qquad$ $y = -\sqrt{۲}$

$\left\{\left(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}\right), \left(-\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}\right)\right\}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $\begin{cases} y^{۲} = ۴ - x \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}$

$\begin{cases} x + y^{۲} = ۴ \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}$

$\begin{cases} x + y^{۲} = ۴ \\ -x + ۲y = -۴ \end{cases}$

$y^{۲} + ۲y = ۰ \Rightarrow y(y + ۲) = ۰ \Rightarrow y = ۰$ یا $y = -۲$

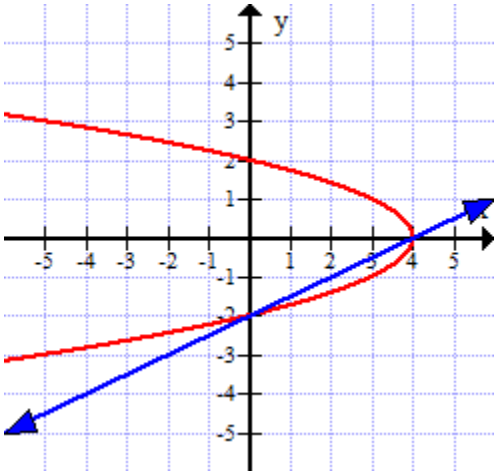
$y = -۲$ $\qquad$ $y = ۰$

$-x + ۲y = -۴$ $\qquad$ $-x + ۲y = -۴$

$-x + ۲(-۲) = -۴$ $\qquad$ $-x + ۲(۰) = -۴$

$x = ۰$ $\qquad$ $x = ۴$

$\{(۰, -۲), (۴, ۰)\}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۴) $\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۹ \\ ۱۶x^{۲}-۴y^{۲}=۶۴ \end{cases}$

$$\begin{cases} ۴\left(x^{۲}+y^{۲}\right)=۴(۹) \\ ۱۶x^{۲}-۴y^{۲}=۶۴ \end{cases}$$

$$۴x^{۲}+۱۶x^{۲}=۱۰۰$$

$$۲۰x^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow x^{۲}=۵ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۵}$$

$x=\sqrt{۵}$ $\qquad$ $x=-\sqrt{۵}$

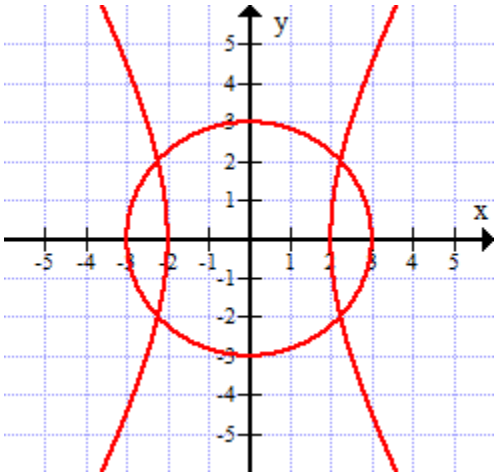
$x^{۲}+y^{۲}=۹$ $\qquad$ $x^{۲}+y^{۲}=۹$

$۵+y^{۲}=۹$ $\qquad$ $۵+y^{۲}=۹$

$y^{۲}=۴$ $\qquad$ $y^{۲}=۴$

$y=\pm۲$

$$\left\{\left(\sqrt{۵},۲\right),\left(\sqrt{۵},-۲\right),\left(-\sqrt{۵},۲\right),\left(-\sqrt{۵},-۲\right)\right\}$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

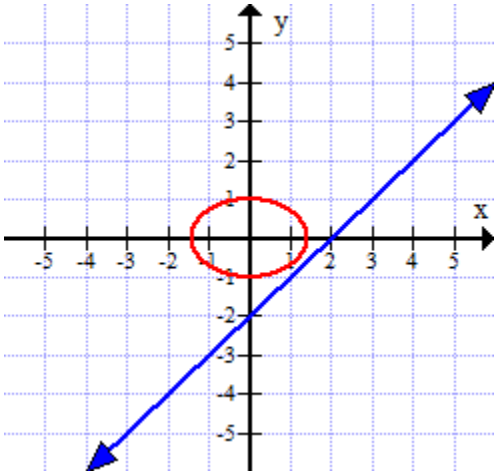
۵) $\begin{cases} x^{۲} + ۲y^{۲} = ۲ \\ x - y = ۲ \end{cases}$

$x - y = ۲ \Rightarrow x = y + ۲$

$(y + ۲)^{۲} + ۲y^{۲} = ۲ \Rightarrow y^{۲} + ۴y + ۴ + ۲y۲ = ۲ \Rightarrow ۳y^{۲} + ۴y + ۲ = ۰$

$\sqrt{b^{۲} - ۴ac} = \sqrt{۱۶ - ۴(۳)(۲)} = \sqrt{۱۶ - ۲۴} = \sqrt{-۸}$

ملاحظه می کنید که این دستگاه جواب حقیقی ندارد. پس مجموعه جواب ها ϕ است.



دانلود از سایت ریاضی سرا

۶) $\begin{cases} y = x^{۲} - ۳ \\ ۴x - y = ۶ \end{cases}$

بجای y در معادله دوم ، مقدار y از معادله اول می گذاریم.

$۴x - \left(x^{۲} - ۳\right) = ۶ \Rightarrow ۴x - x^{۲} + ۳ = ۶ \Rightarrow x^{۲} - ۴x + ۳ = ۰$

$(x - ۳)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۳$ یا $x = ۱$

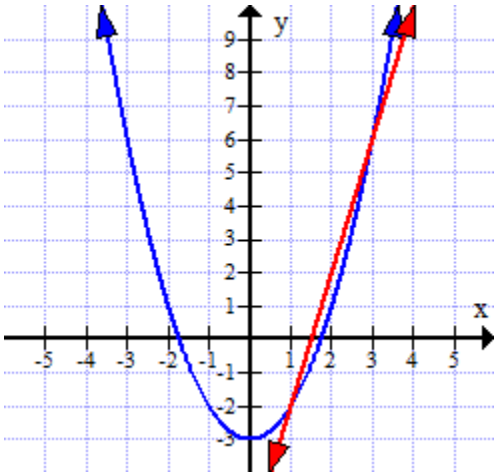
$x = ۳$ $\qquad$ $x = ۱$

$۴x - y = ۶$ $\qquad$ $۴x - y = ۶$

$۴(۳) - y = ۶$ $\qquad$ $۴(۱) - y = ۶$

$y = ۶$ $\qquad$ $y = -۲$

$\{(۳, ۶), (۱, -۲)\}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $\begin{cases} y = x^{۲} \\ ۳x + y = ۱۰ \end{cases}$

$$\begin{cases} -y = -x^{۲} \\ ۳x + y = ۱۰ \end{cases}$$

$$۳x = -x^{۲} + ۱۰ \Rightarrow x^{۲} + ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x+۵)(x-۲) = ۰$$

$x = -۵$ یا $x = ۲$

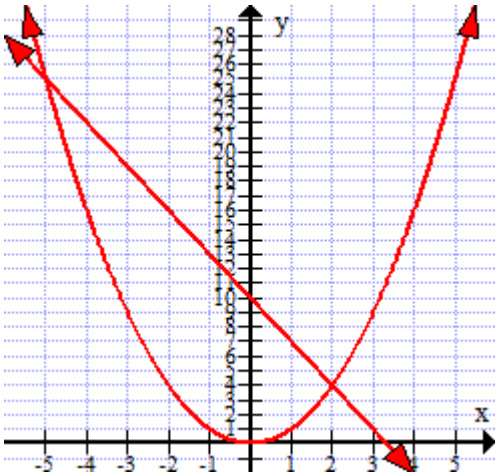
$x = -۵$ $\qquad$ $x = ۲$

$۳x + y = ۱۰$ $\qquad$ $۳x + y = ۱۰$

$۳(-۵) + y = ۱۰$ $\qquad$ $۳(۲) + y = ۱۰$

$y = ۲۵$ $\qquad$ $y = ۴$

$\{(-۵, ۲۵), (۲, ۴)\}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۸) $\begin{cases} y = ۲x^۲ + ۱ \\ x + y = -۱ \end{cases}$

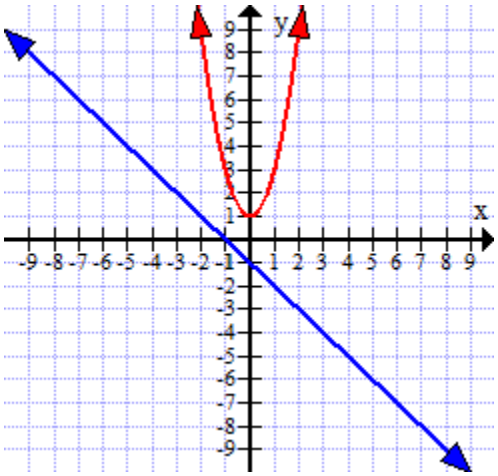
در معادله دوم بجای y می گذاریم $۲x^۲ + ۱$

$$x + ۲x^۲ + ۱ = -۱ \implies ۲x^۲ + x + ۲ = ۰$$

اما

$$b^۲ - ۴ac = ۱^۲ - ۴(۲)(۲) = -۱۵ < ۰$$

پس این معادله جوان حقیقی ندارد. و در نهایت مجموعه جواب های این دستگاه ϕ است. نمودار هم نشان می دهد که خط و سهمی با هم تلاقی نمی کنند.



دانلود از سایت ریاضی سرا

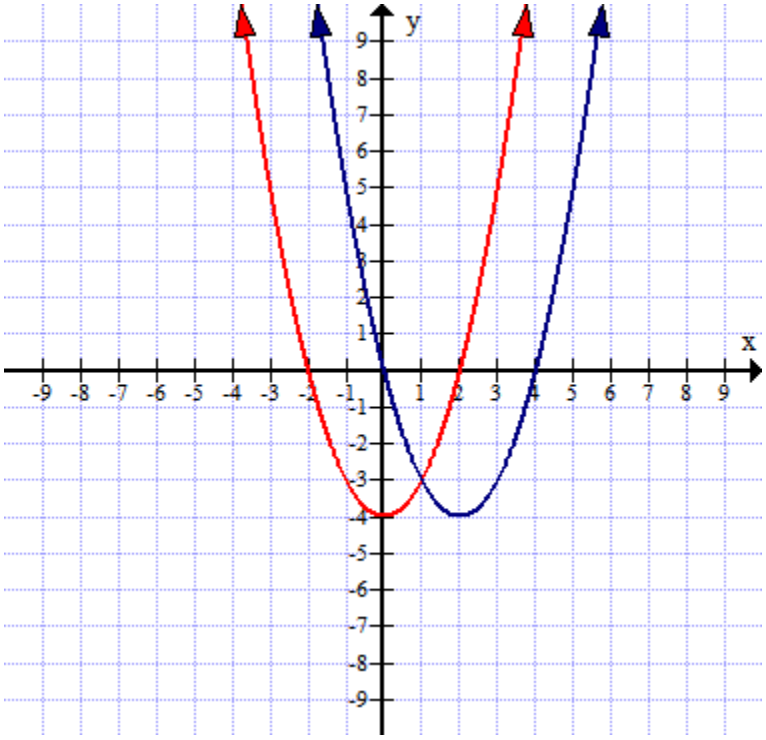
۹) $\begin{cases} y = x^{۲} - ۴ \\ y = x^{۲} - ۴x \end{cases}$

$x^{۲} - ۴ = x^{۲} - ۴x \Rightarrow -۴x = -۴ \Rightarrow x = ۱$

در معادله اول بجای x می گذاریم ۱

$y = ۱^{۲} - ۴ = -۳$

$\{(۱, -۳)\}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $\begin{cases} ۲x^۲ + ۳y^۲ = ۱۴ \\ -x^۲ + y^۲ = ۳ \end{cases}$

معادله دوم را در ۲ ضرب کرده و با معادله اول جمع می کنیم.

$$\begin{cases} ۲x^۲ + ۳y^۲ = ۱۴ \\ ۲\left(-x^۲ + y^۲\right) = ۲(۳) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x^۲ + ۳y^۲ = ۱۴ \\ -۲x^۲ + ۲y^۲ = ۶ \end{cases}$$

$$۵y^۲ = ۲۰ \Rightarrow y^۲ = ۴ \Rightarrow y = \pm ۲$$

مقادیر بدست آمده برای y در معادله دیوم می گذاریم تا مقادیر x پیدا شوند.

$y = ۲$ $\qquad$ $y = -۲$

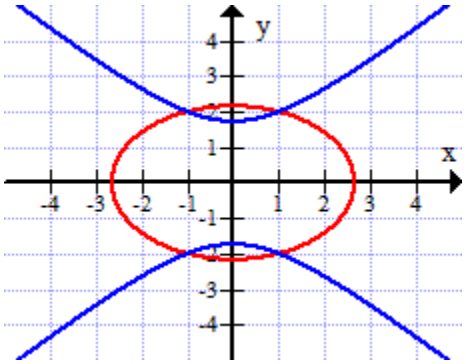
$-x^۲ + y^۲ = ۳$ $\qquad$ $-x^۲ + y^۲ = ۳$

$-x^۲ + ۲^۲ = ۳$ $\qquad$ $-x^۲ + (-۲)^۲ = ۳$

$-x^۲ = -۱$ $\qquad$ $-x^۲ = -۱$

$x = \pm ۱$ $\qquad$ $x = \pm ۱$

$\{(۱,۲),(-۱,۲),(۱,-۲),(-۱,-۲)\}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱ \\ x^۲ + (y+۳)^۲ = ۴ \end{cases}$

معادله اول را در ۱– ضرب کرده و سپس با معادله دوم جمع می کنیم.

$$\begin{cases} -x^۲ - y^۲ = -۱ \\ x^۲ + (y+۳)^۲ = ۴ \end{cases}$$

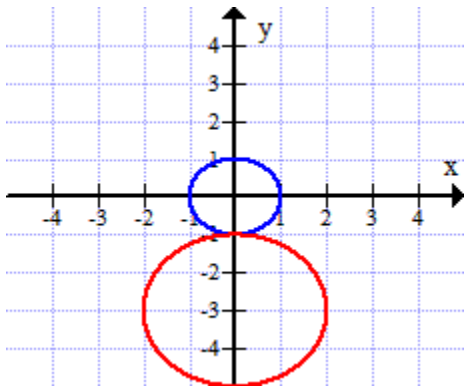
$$(y+۳)^۲ - y^۲ = ۳$$

$$y^۲ + ۶y + ۹ - y^۲ = ۳ \implies ۶y = -۶ \implies y = -۱$$

مقدار بدست آمده برای y را در معادله اول می گذاریم تا مقدار x بدست آید.

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \implies x^۲ + (-۱)^۲ = ۱ \implies x = ۰$$

$$\{(۰, -۱)\}$$



۱۲ – اگر یک دستگاه معادله که نمودارهای آن شامل یک دائره و یک سهمی است ، چند جواب حقیقی ممکن است این دستگاه داشته باشد؟

پاسخ – هیچ ، یک ، دو ، سه و یا چهار

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳ – مجموع مربع های دو عدد ۱۳۰ است و تفاضل مربع آنها ۳۲ آن اعداد را پیدا کنید.

$x =$ یکی از اعداد

$y =$ عدد دیگر

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱۳۰ \\ x^۲ - y^۲ = ۳۲ \end{cases}$$

$$۲x^۲ = ۱۶۲ \implies x^۲ = ۸۱ \implies x = \pm ۹$$

مقادیر بدست آمده را در معادله دوم می گذاریم تا مقادیر y پیدا شوند.

$x = ۹$ $\qquad$ $x = -۹$

$x^۲ - y^۲ = ۳۲$ $\qquad$ $x^۲ - y^۲ = ۳۲$

$۹^۲ - y^۲ = ۳۲$ $\qquad$ $(-۹)^۲ - y^۲ = ۳۲$

$y^۲ = ۴۹$ $\qquad$ $y^۲ = ۴۹$

$y = \pm ۷$ $\qquad$ $y = \pm ۷$

$$\{(۹,۷),(۹,-۷),(-۹,۷),(-۹,-۷)\}$$

۱۴ – مساحت یک مربع مستطیل ۲۸۵ سانتی متر مربع است و محیط آن ۶۸ سانتی متر. ابعاد این مستطیل را پیدا کنید.

پاسخ

x یک ضلع

y ضلع دیگر

$$\begin{cases} xy = ۲۸۵ \\ ۲x + ۲y = ۶۸ \end{cases}$$

معادله دوم را برای y حل می کنیم و نتیجه را در معادله اول می گذاریم تا مقداریا مقادیر x پیدا شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا

$۲x + ۲y = ۶۸$

$x + y = ۳۴$

$y = ۳۴ - x$

$xy = ۲۸۵$

$x(۳۴ - x) = ۲۸۵$

$۳۴x - x^۲ = ۲۸۵$

$x^۲ - ۳۴x + ۲۸۵ = ۰$

$(x - ۱۵)(x - ۱۹) = ۰$

$x = ۱۵ \quad x = ۱۹$

مقادیر بدست آمده برای x در معادله اول می گذاریم تا مقادیر y پیدا شوند.

$x = ۱۵$	$x = ۱۹$
$xy = ۲۸۵$	$xy = ۲۸۵$
$۱۵y = ۲۸۵$	$۱۹y = ۲۸۵$
$y = ۱۹$	$y = ۱۵$

پس یک ضلع ۱۵ سانتی متر و دیگری ۱۹ سانتی متر و یا بر عکس .

۱۵ - اگر نمودار یک دستگاه معادله شامل یک بیضی و یک خط باشد ، چند جواب حقیقی ممکن است داشته باشد؟

پاسخ :هیچ ، یا یک ، یا دو

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹.۵ – نا معادله های غیر خطی و دستگاه های نا معادلات

Nonlinear Inequalities and Systems of Inequalities

رسم نمودار نا معادله های غیر خطی Graphing Nonlinear Inequalities

می توانیم نمودارنا معادله های غیر خطی دو مجهولی را به همان طریقی که نا معادله های خطی دو مجهولی را ترسیم می کردیم ، رسم کنیم.

ابتدا ، معادله مربوطه را رسم می کنیم که خط مرزی را تشکیل می دهد. سپس یک نقطه آزمایشی انتخاب می کنیم و تصمیم می گیریم که کدام منطقه را سایه دار کنیم.

مثال ۱ –نمودار نا معادله زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۱۶}\leq ۱$$

پاسخ

ابتدا نمودار معادله مربوطه را رسم می کنیم.

$$\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۱۶}= ۱$$

چون نماد $\leq$ داریم ، پس خط کامل Solid Line رسم می کنیم. نمودار معادله ، یک بیضی است. این بیضی صفحه را به دو منطقه Region تقسیم می کند. یعنی داخل Inside و خارج Outside بیضی

می توانیم یک نقطه در هر یک از منطقه ها که مایل باشیم ، به عنوان نقطه آزمایشی انتخاب کنیم. در این مثال نقطه (۰,۰) انتخاب خوبی است.

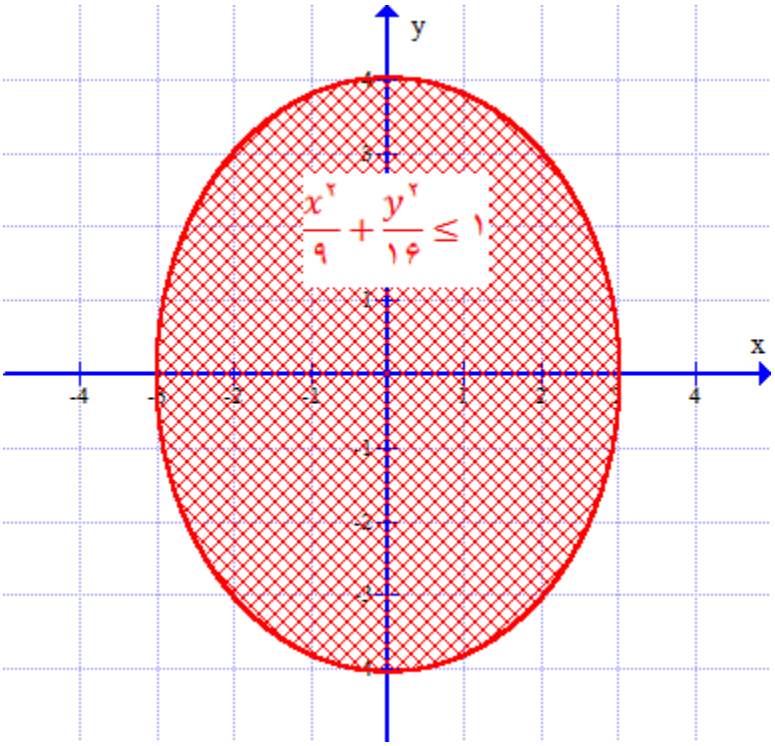
$$\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۱۶}\leq ۱$$

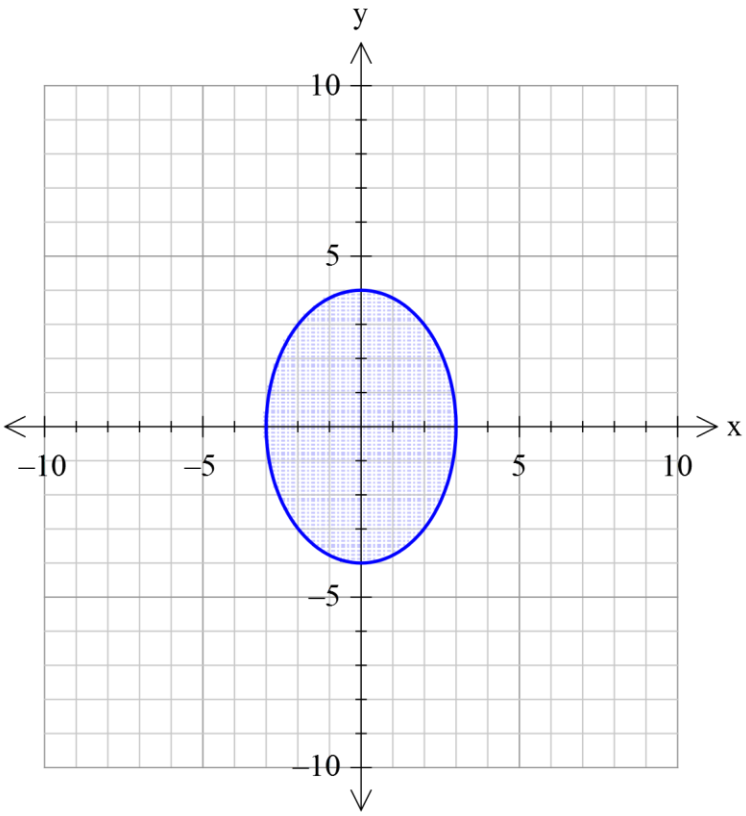
$$\frac{۰^۲}{۹}+\frac{۰^۲}{۱۶}\leq ۰$$

$$۰\leq ۱$$

چون یک تساوی صحیح بدست آوردیم ، پس مجموعه جواب ها در منطقه ای است که (۰,۰) در آن قرار دارد. یعنی داخل بیضی.

دانلود از سایت ریاضی سرا





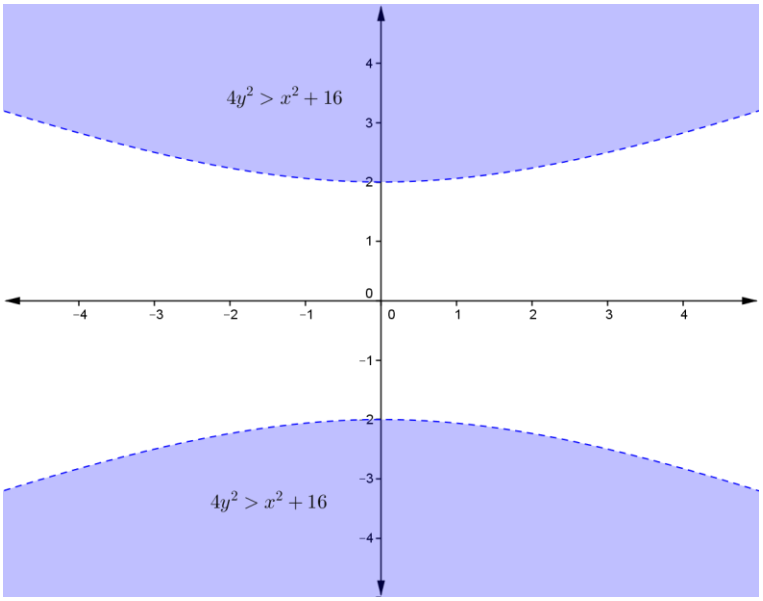
دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال ۲ – نمودار $۴y^۲ > x^۲ + ۱۶$ **را رسم کنید.**

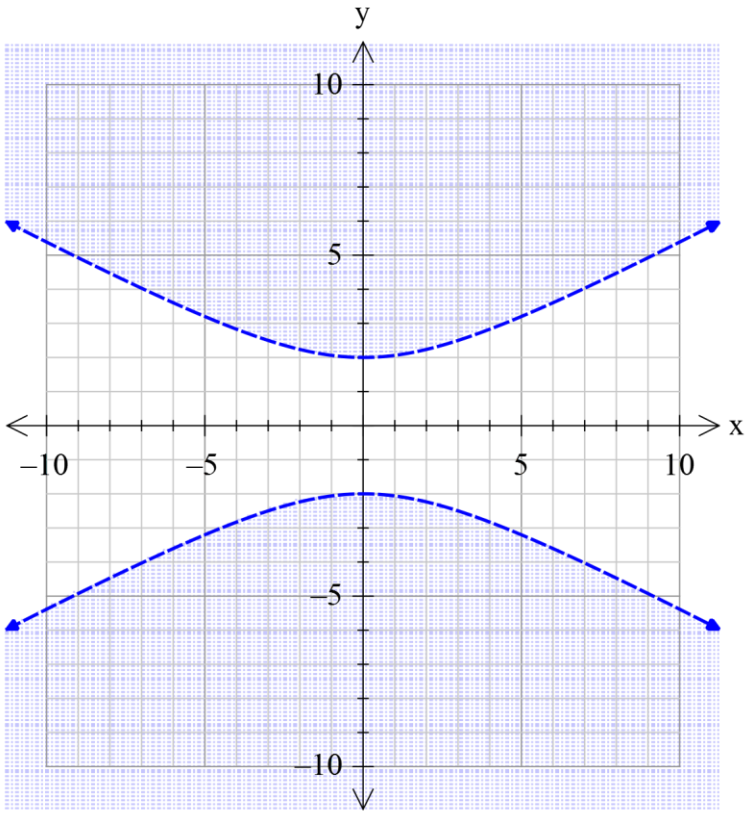
پاسخ – معادله مربوطه $۴y^۲ = x^۲ + ۱۶$ و یا $\frac{y^۲}{۴} - \frac{x^۲}{۱۶} = ۱$ است که یک هذ لولی است. هذلولی را با منحنی نقطه چین Dashed Curve رسم می کنیم زیرا نماد $>$ داریم. یعنی نمودار $۴y^۲ > x^۲ + ۱۶$ شامل نمودار $۴y^۲ = x^۲ + ۱۶$ نمی باشد. این هذ لولی صفحه را به سه قسمت تقسیم می کند. برای هر منطقه ، یک نقطه آزمایشی انتخاب می کنیم. اما این نقطه های آزمایشی نباید روی خط مرزی باشند.

نقطه ازمایشی	نقطه ازمایشی	نقطه ازمایشی
$C \quad (۰,-۴)$	$B \quad (۰,۰)$	$A \quad (۰,۴)$
$۴y^۲ > x^۲ + ۱۶$	$۴y^۲ > x^۲ + ۱۶$	$۴y^۲ > x^۲ + ۱۶$
$۴(-۴)^۲ > (۰)^۲ + ۱۶$	$۴(۰)^۲ > (۰)^۲ + ۱۶$	$۴(۴)^۲ > (۰)^۲ + ۱۶$
$۶۴ > ۱۶$	$۰ > ۱۶$	$۶۴ > ۱۶$
صحیح	غلط	صحیح

پس نمودار مجموعه جواب ها، قسمت های سایه دار C و A هستند.



دانلود از سایت ریاضی سرا



در بخش های قبل ، نمودار دستگاه های نا معادلات خطی را رسم کردیم. به خاطر دارید که نمودار یک دستگاه نا معادلات ، فصل مشترک Intersection نمودار آن نا معادلات است.

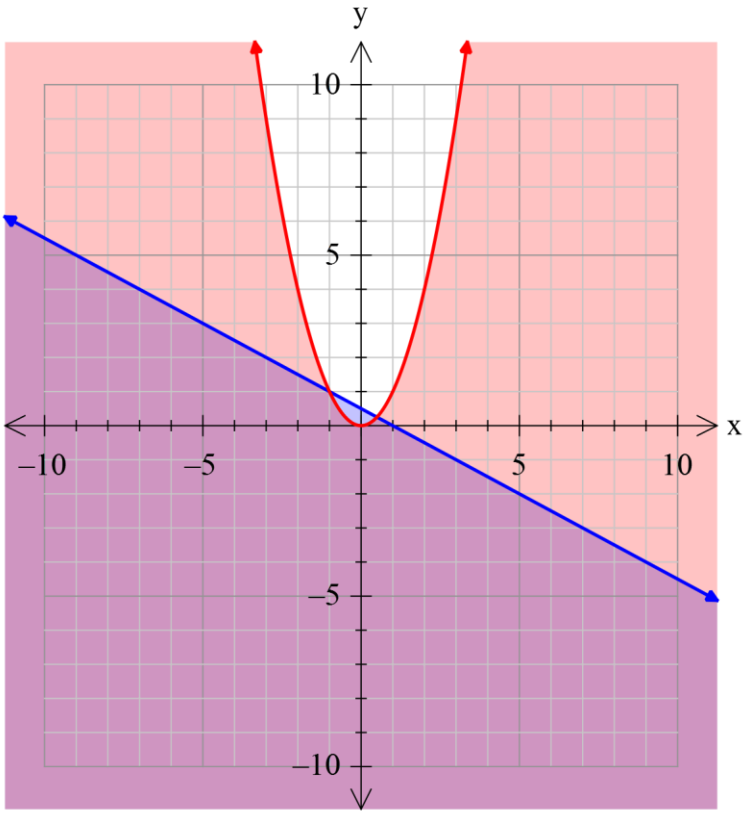
مثال ۳ – نمودار دستگاه زیر را رسم کنید.

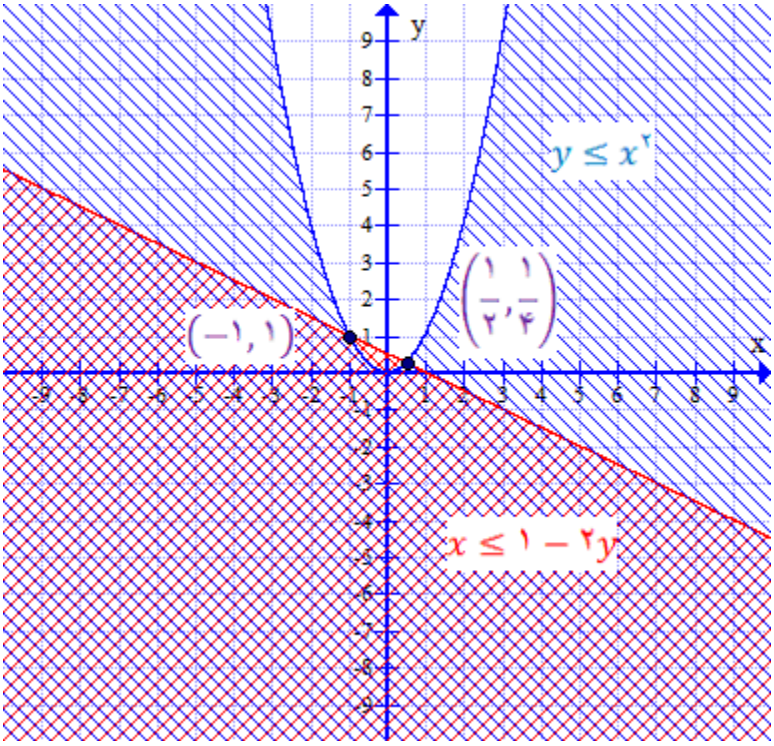
$$\begin{cases} x \leq ۱ - ۲y \\ y \leq x^۲ \end{cases}$$

پاسخ –هر یک از نا معادلات را روی همان صفحه مختصات رسم می کنیم. فصل مشترک ، قسمت سایه تیره تر است همراه با خطوط مرزی. مختصات نقاط تلاقی می توان با حل دستگاه معادلات مربوط به آن یعنی دستگاه زیر بدست آورد.

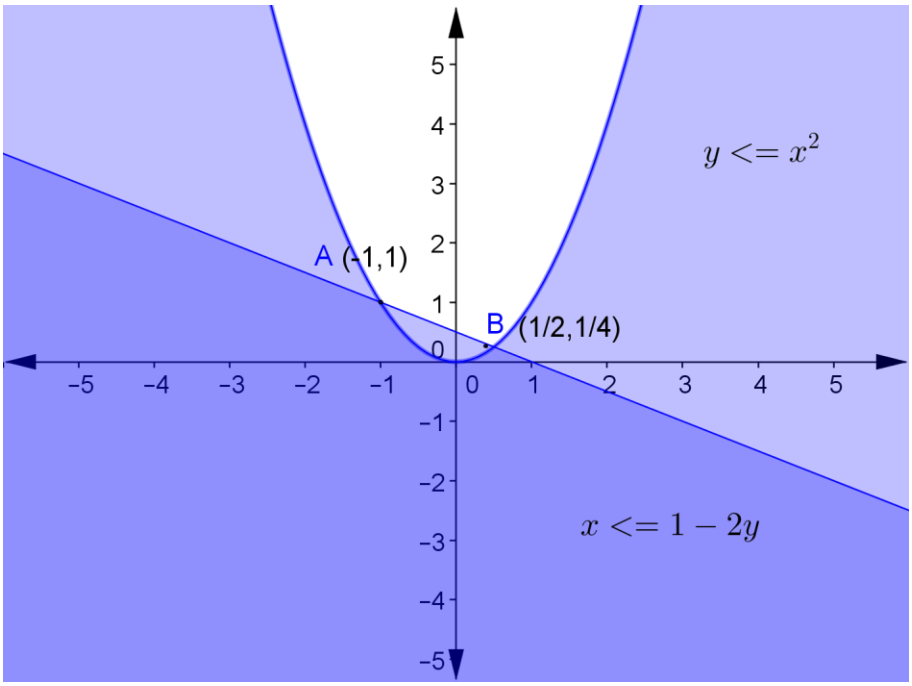
$$\begin{cases} x = ۱ - ۲y \\ y = x^۲ \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا





دانلود از سایت ریاضی سرا



مثال ۴ – نمودار دستگاه زیر را رسم کنید.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ < ۲۵ \\ \frac{x^۲}{۹} - \frac{y^۲}{۲۵} < ۱ \\ y < x + ۳ \end{cases}$$

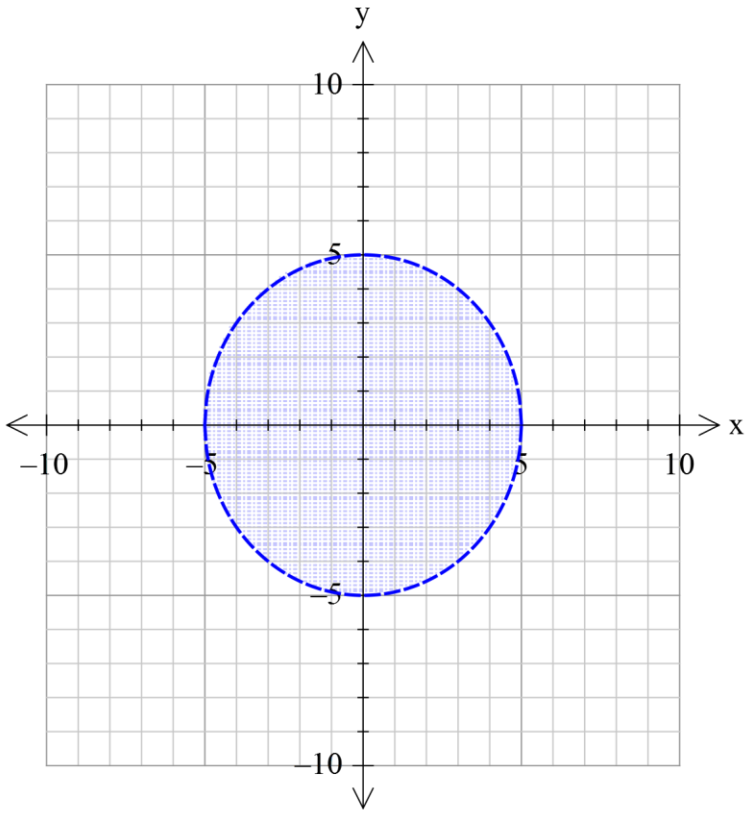
پاسخ – برای درک بهتر ، اول هر کدام از نا معادله ها را روی یک شفهه مختصات جدا رسم می کنیم. نمودار $x^۲ + y^۲ < ۲۵$ شامل نقاطی است **داخل** دائره با مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۵.

نمودار $\frac{x^۲}{۹} - \frac{y^۲}{۲۵} < ۱$ شامل منطقه بین دو شاخه هذ لولی با مرکز $(۰,۰)$ که محور x را در نقاط ۳ و ۳– قطع می کند. نمودار $y < x + ۳$ شامل منطقه زیر خط با شیب ۱ و تقاطع با محور y در نقطه $(۰,۳)$

نمودار مجموعه جواب های تمام دستگاه شامل فصل مشترک نمودار های هر سه نا معادله که با سایه تیره تر نشان داده می شود.

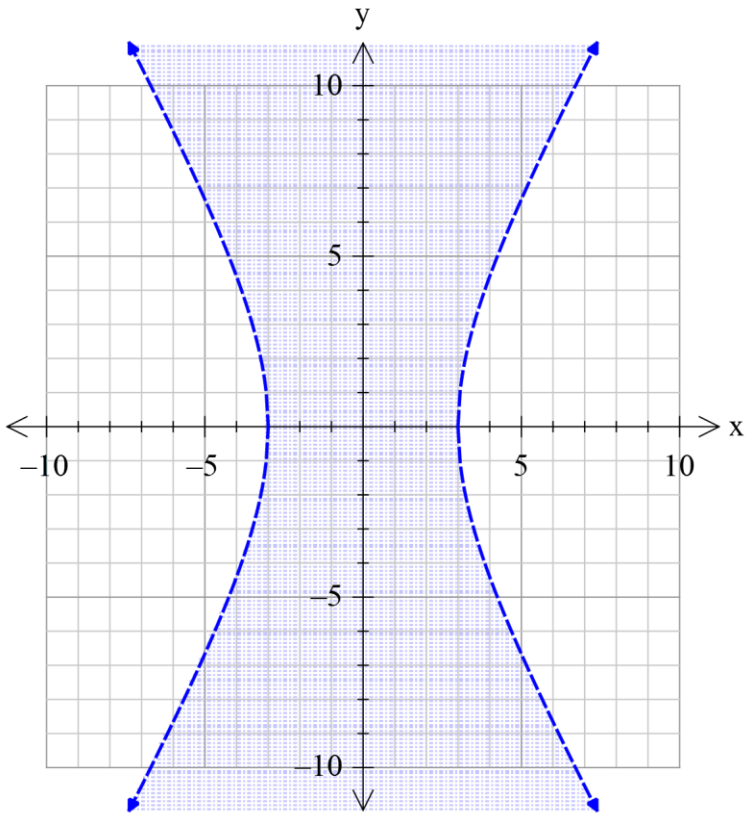
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x^{۲} + y^{۲} < ۲۵$$



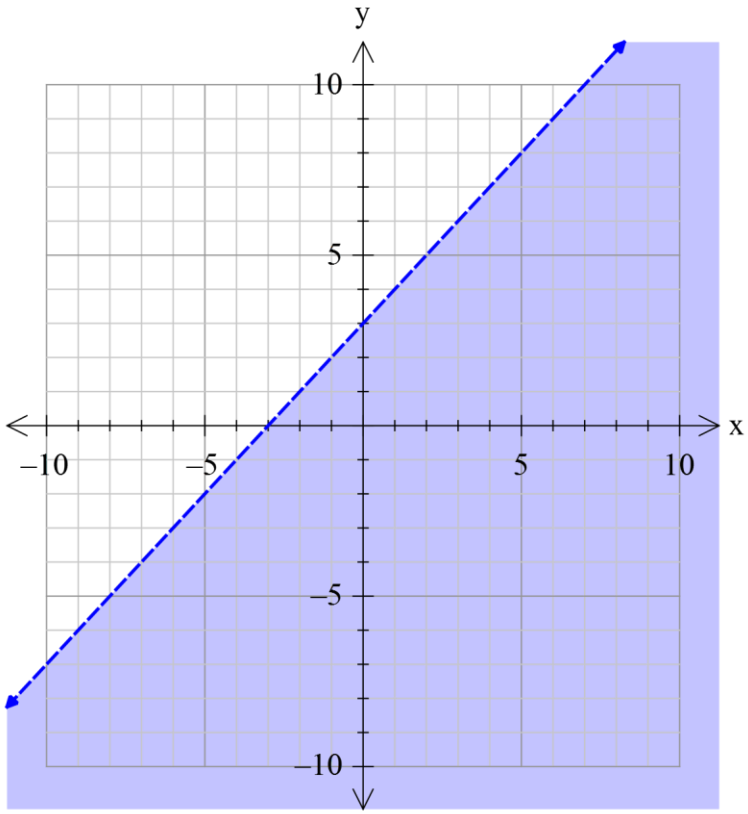
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\frac{x^{۲}}{۹} - \frac{y^{۲}}{۲۵} < ۱$$



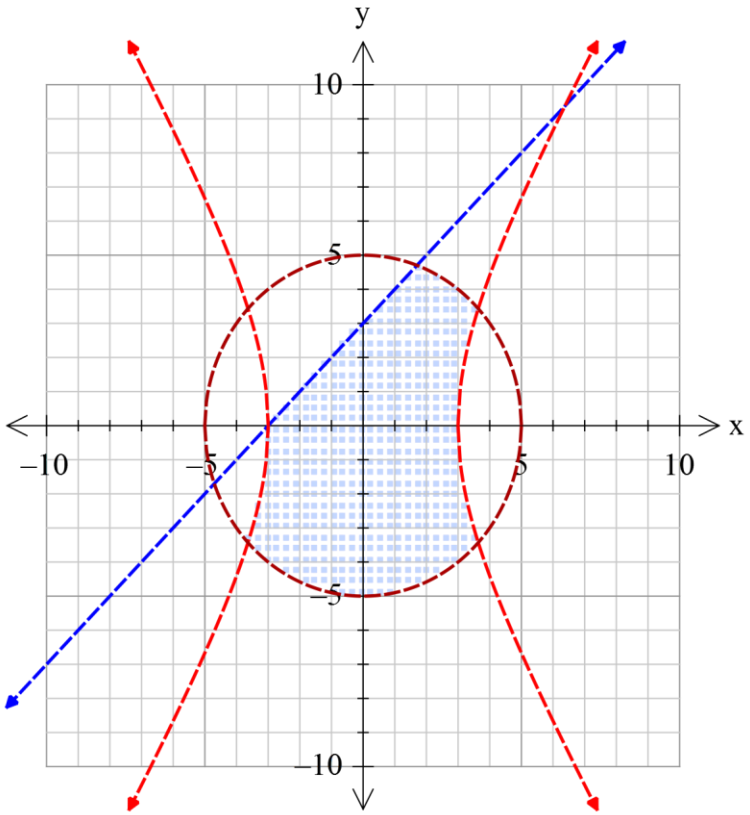
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y < x + ۳$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

و در نهایت فصل مشترک هر سه نا معادله.



دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرینات ۹.۵

نمودار هر یک از نا معادله ها را رسم کنید.

۱) $y < x^{۲}$

۲) $y < -x^{۲}$

۳) $x^{۲} + y^{۲} \geq ۱۶$

۴) $x^{۲} + y^{۲} < ۳۶$

۵) $\frac{x^{۲}}{۴} - y^{۲} < ۱$

۶) $x^{۲} - \frac{y^{۲}}{۹} \geq ۱$

۷) $y > (x - ۱)^{۲} - ۳$

۸) $y > (x + ۳)^{۲} + ۲$

۹) $x^{۲} + y^{۲} \leq ۹$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰) $x^{۲} + y^{۲} > ۴$

۱۱) $\frac{x^{۲}}{۴} + \frac{y^{۲}}{۹} \leq ۱$

۱۲) $\frac{x^{۲}}{۲۵} + \frac{y^{۲}}{۴} \geq ۱$

۱۳) $\frac{y^{۲}}{۴} - x^{۲} \leq ۱$

۱۴) $\frac{y^{۲}}{۱۶} - \frac{x^{۲}}{۹} > ۱$

نمودار دستگاه های زیر را رسم کنید.

۱۵) $\begin{cases} ۴x + ۳y \geq ۱۲ \\ x^{۲} + y^{۲} < ۱۶ \end{cases}$

۱۶) $\begin{cases} ۳x - ۴y \leq ۱۲ \\ x^{۲} + y^{۲} < ۱۶ \end{cases}$

۱۷) $\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} \leq ۹ \\ x^{۲} + y^{۲} \geq ۱ \end{cases}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۸) $\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} \geq ۹ \\ x^{۲} + y^{۲} \geq ۱۶ \end{cases}$

۱۹) $\begin{cases} y > x^{۲} \\ y \geq ۲x + ۱ \end{cases}$

۲۰) $\begin{cases} y \leq -x^{۲} + ۳ \\ y \leq ۲x - ۱ \end{cases}$

۲۱) $\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} > ۹ \\ y > x^{۲} \end{cases}$

۲۲) $\begin{cases} x^{۲} - y^{۲} \geq ۱ \\ y \geq ۰ \end{cases}$

۲۳) $\begin{cases} x^{۲} - y^{۲} \geq ۱ \\ x \geq ۰ \end{cases}$

۲۴) $\begin{cases} x + y \geq ۱ \\ ۲x + ۳y < ۱ \\ x > -۳ \end{cases}$

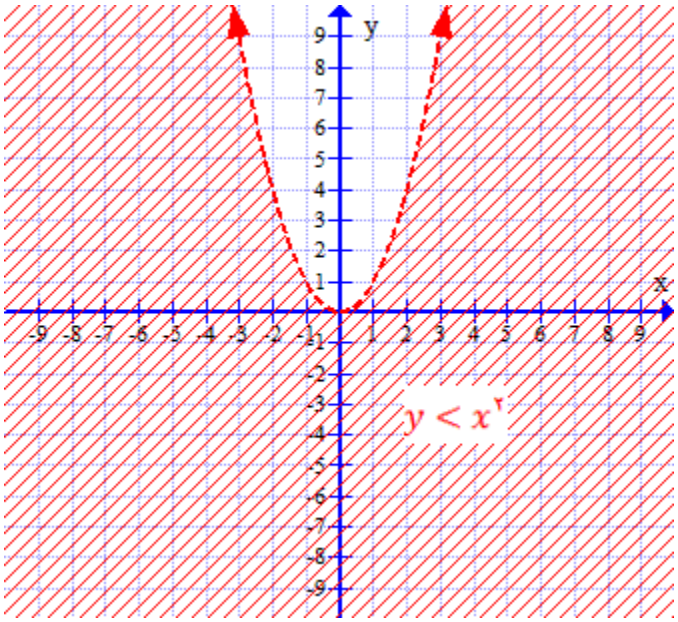
۲۵) $\begin{cases} x^{۲} - y^{۲} < ۱ \\ \frac{x^{۲}}{۱۶} + y^{۲} \leq ۱ \\ x \geq -۲ \end{cases}$

دانلود از سایت ریاضی سرا

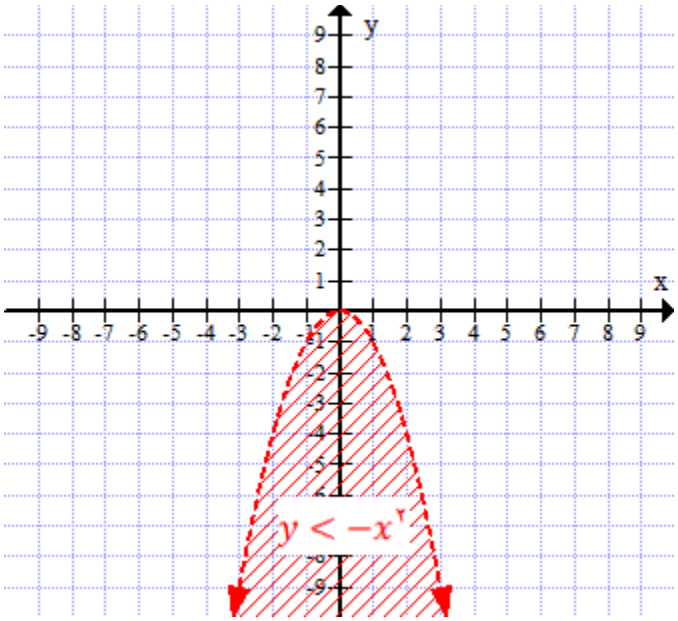
پاسخ تمرینات ۹.۵

نمودار هر یک از نا معادله ها را رسم کنید.

۱) $y < x^{۲}$

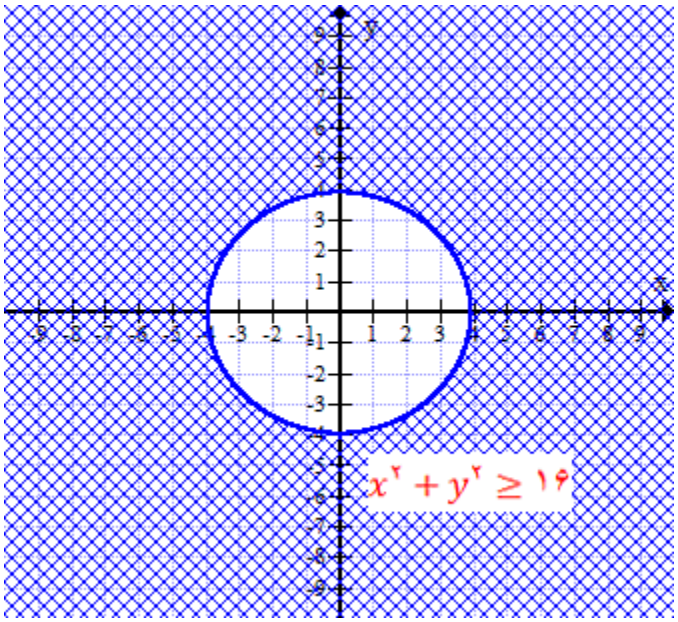


۲) $y < -x^{۲}$

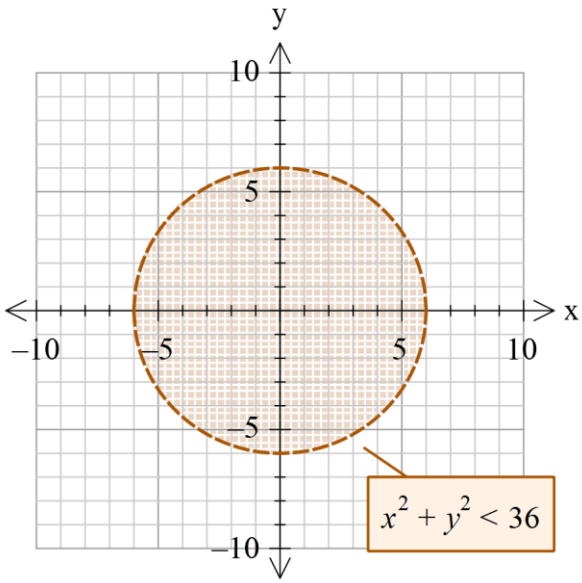


دانلود از سایت ریاضی سرا

۳) $x^۲ + y^۲ \geq ۱۶$

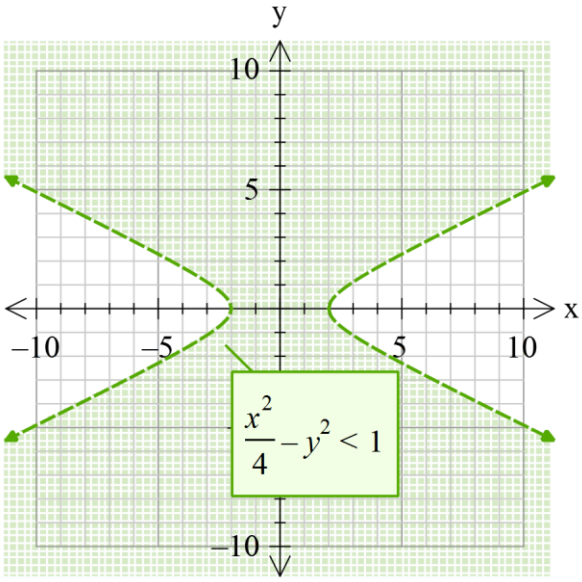


۴) $x^۲ + y^۲ < ۳۶$

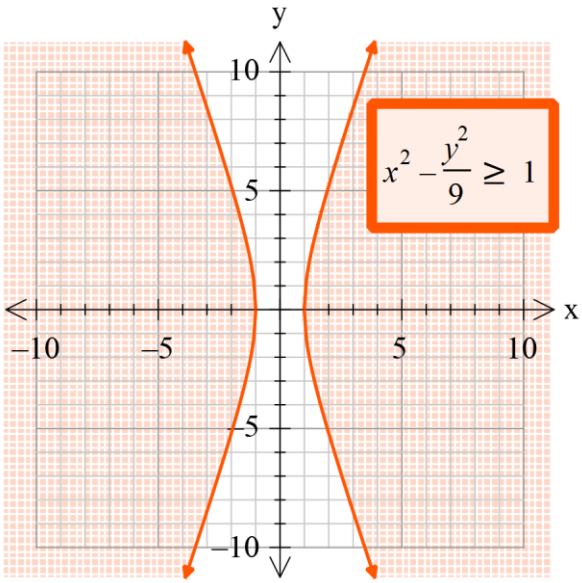


دانلود از سایت ریاضی سرا

۵) $\frac{x^۲}{۴} - y^۲ < ۱$

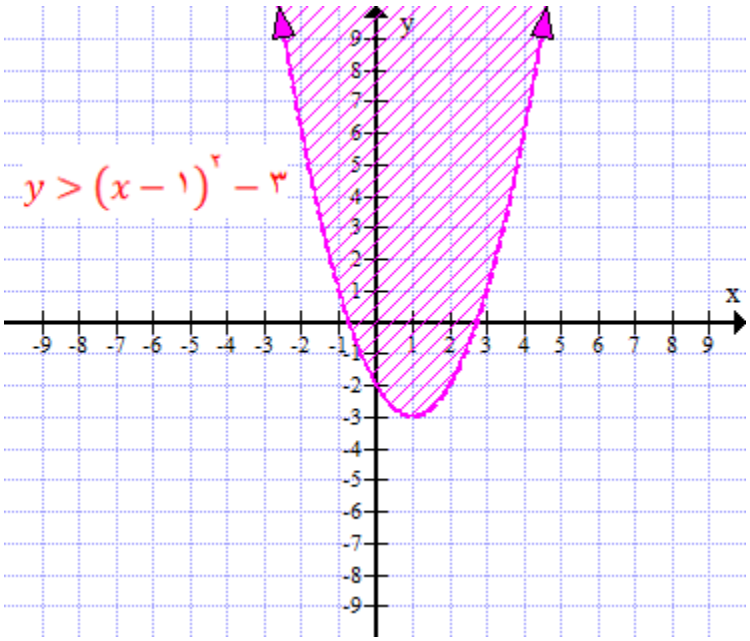


۶) $x^۲ - \frac{y^۲}{۹} \geq ۱$

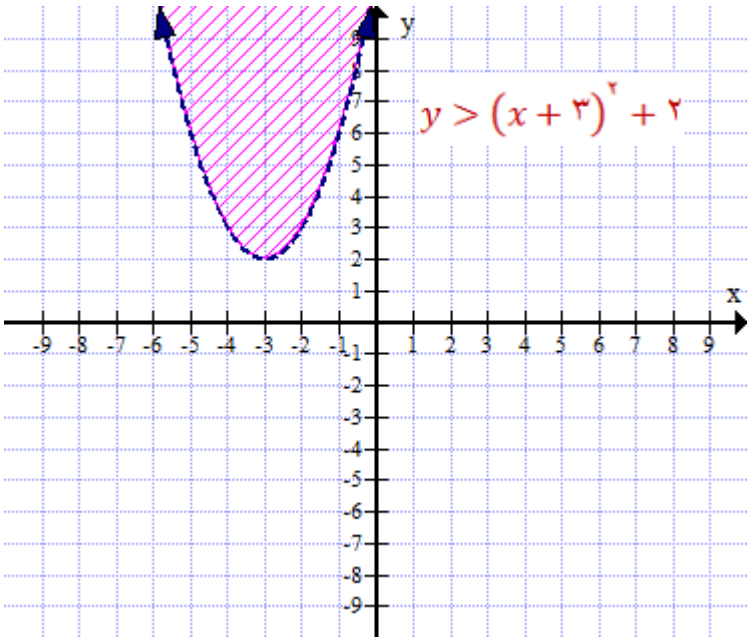


دانلود از سایت ریاضی سرا

۷) $y > (x-۱)^۲ - ۳$

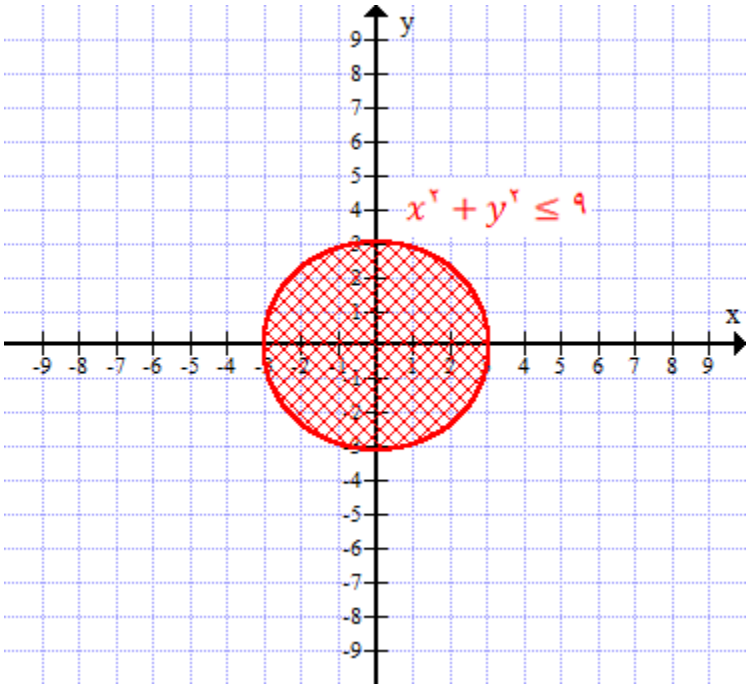


۸) $y > (x+۳)^۲ + ۲$

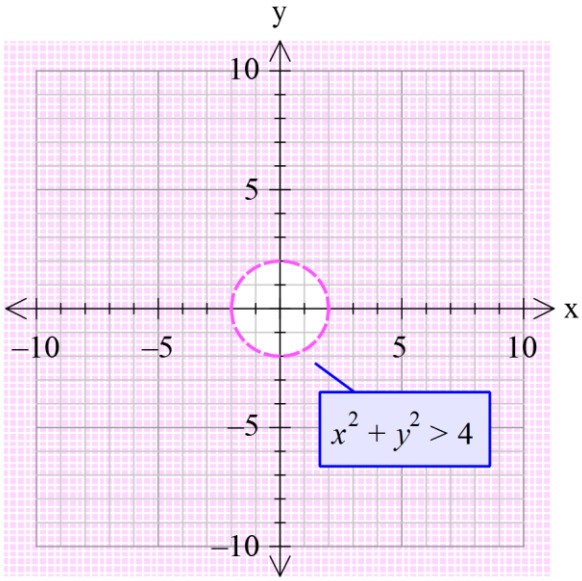


دانلود از سایت ریاضی سرا

۹) $x^۲ + y^۲ \leq ۹$

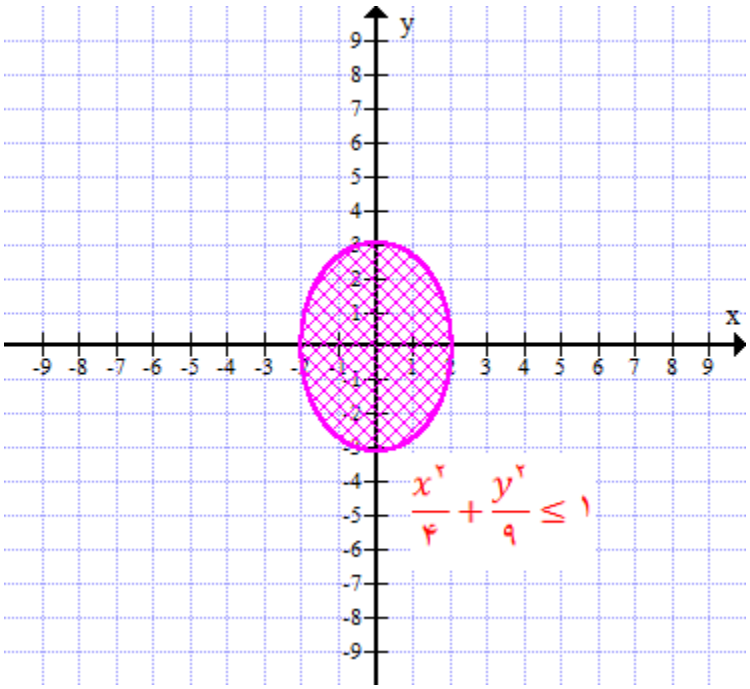


۱۰) $x^۲ + y^۲ > ۴$

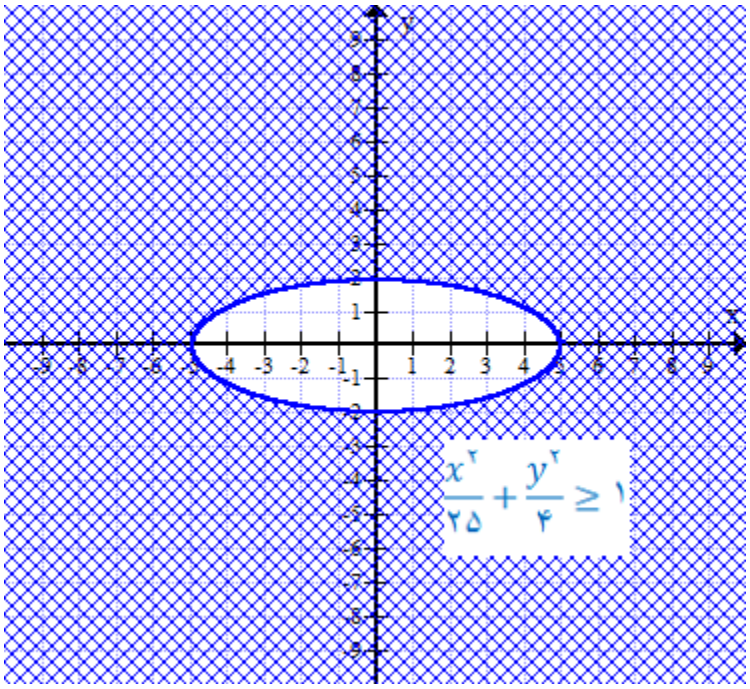


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱) $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}\leq ۱$

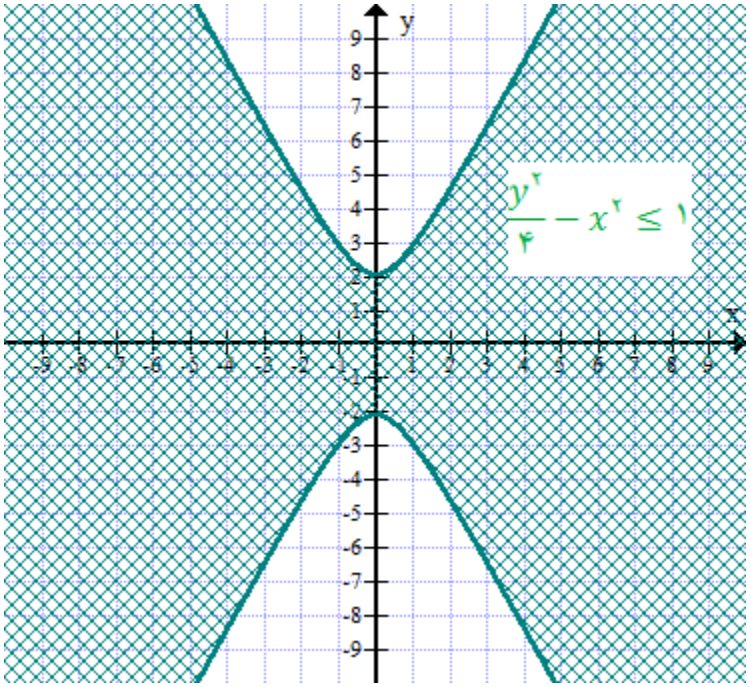


۱۲) $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۴}\geq ۱$

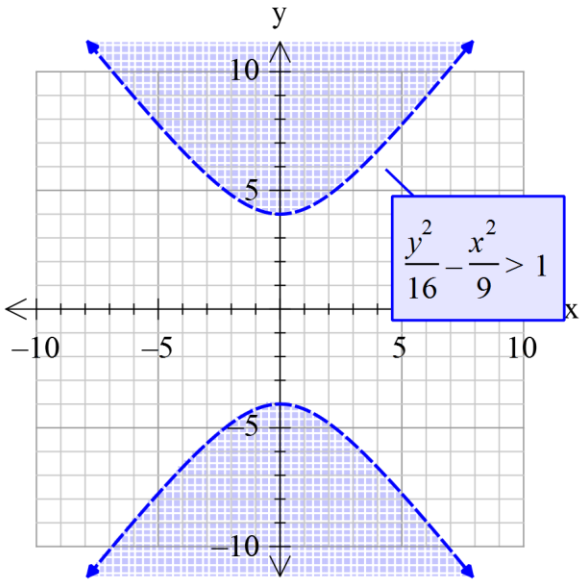


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳) $\frac{y^۲}{۴} - x^۲ \leq ۱$



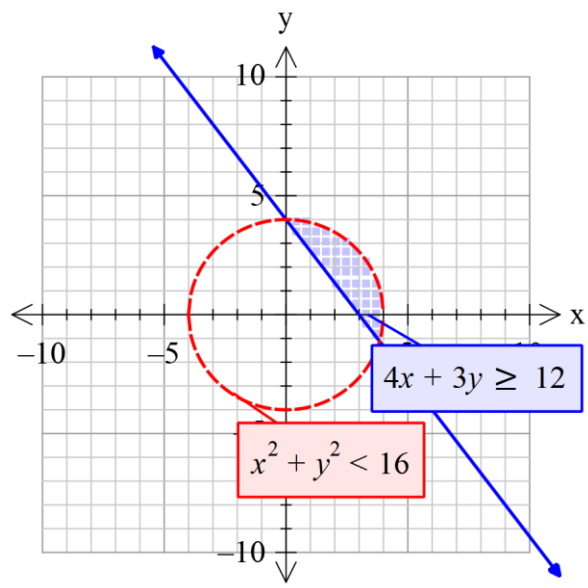
۱۴) $\frac{y^۲}{۱۶} - \frac{x^۲}{۹} > ۱$



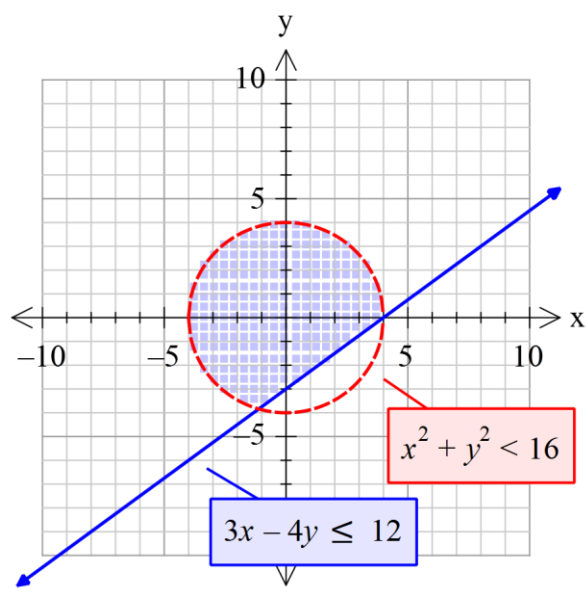
دانلود از سایت ریاضی سرا

نمودار دستگاه های زیر را رسم کنید.

۱۵) $\begin{cases} ۴x + ۳y \geq ۱۲ \\ x^۲ + y^۲ < ۱۶ \end{cases}$

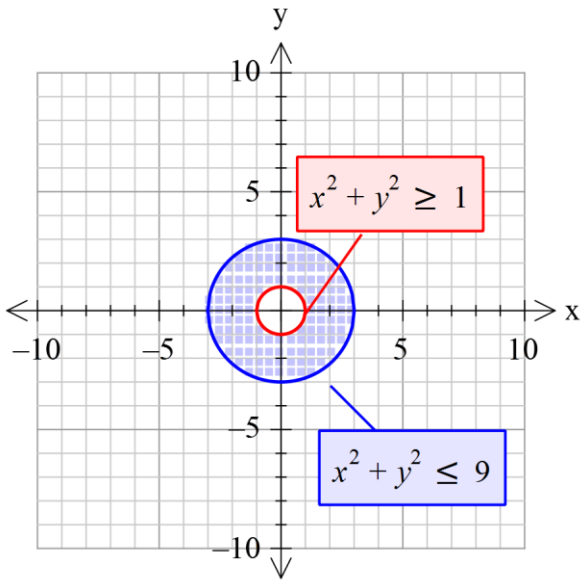


۱۶) $\begin{cases} ۳x - ۴y \leq ۱۲ \\ x^۲ + y^۲ < ۱۶ \end{cases}$

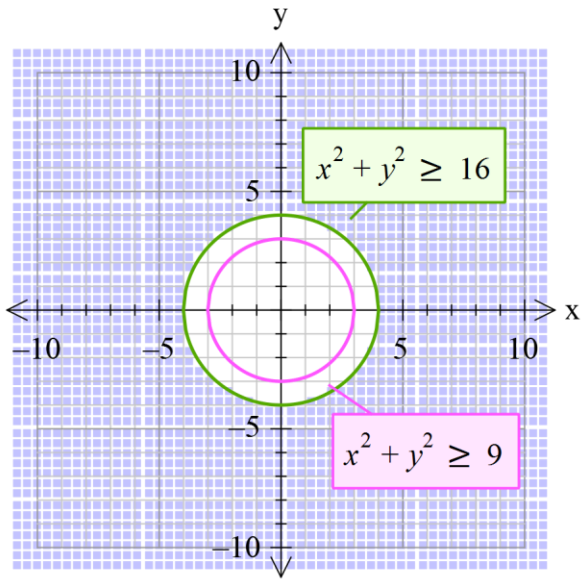


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۷) $\begin{cases} x^۲ + y^۲ \leq ۹ \\ x^۲ + y^۲ \geq ۱ \end{cases}$

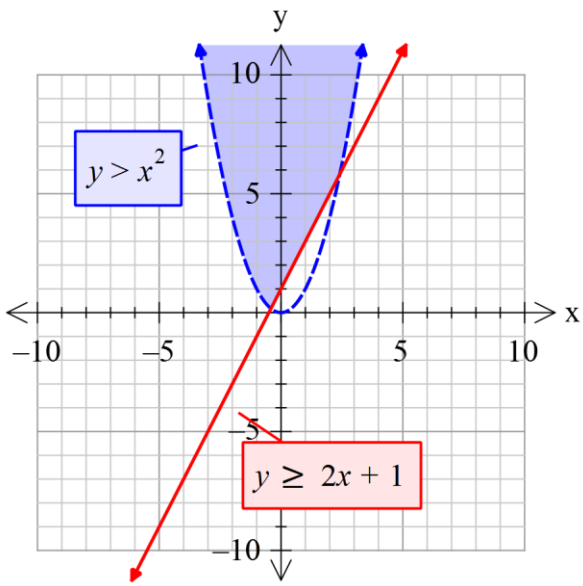


۱۸) $\begin{cases} x^۲ + y^۲ \geq ۹ \\ x^۲ + y^۲ \geq ۱۶ \end{cases}$

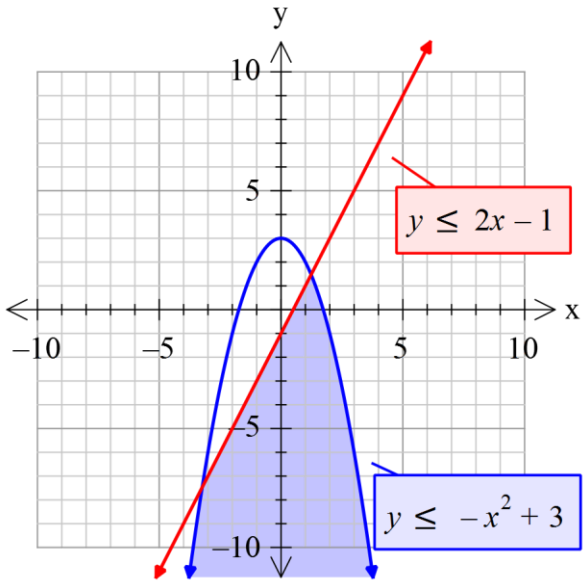


دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۹) $\begin{cases} y > x^{۲} \\ y \geq ۲x + ۱ \end{cases}$

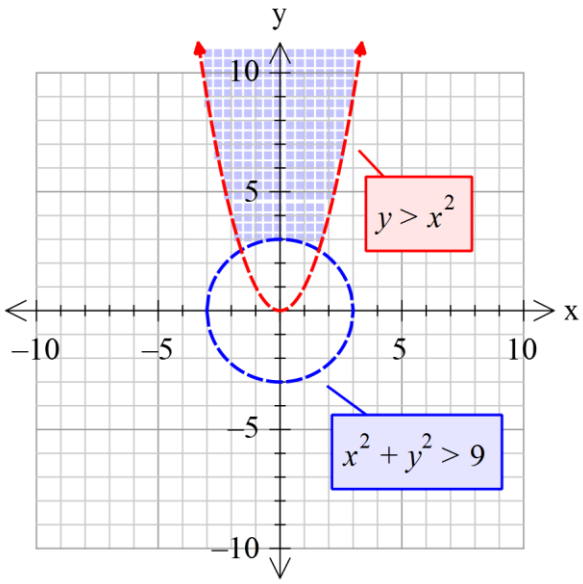


۲۰) $\begin{cases} y \leq -x^{۲} + ۳ \\ y \leq ۲x - ۱ \end{cases}$

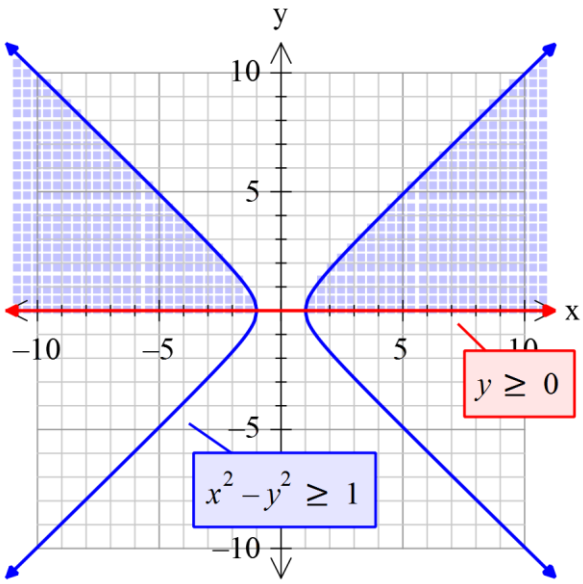


دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۱) $\begin{cases} x^۲ + y^۲ > ۹ \\ y > x^۲ \end{cases}$

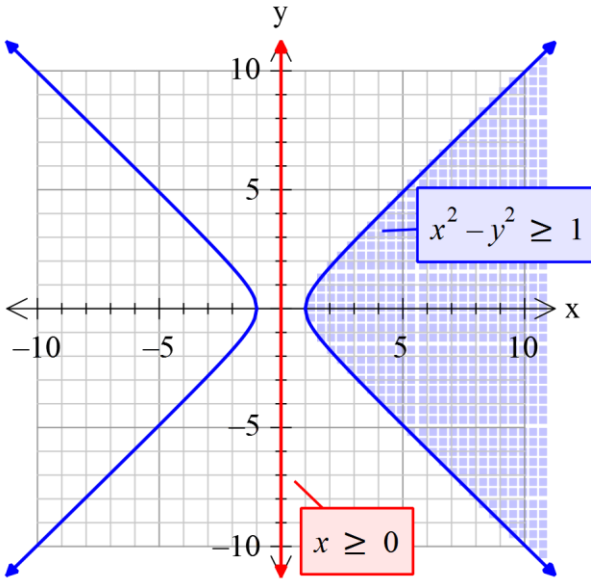


۲۲) $\begin{cases} x^۲ - y^۲ \geq ۱ \\ y \geq ۰ \end{cases}$

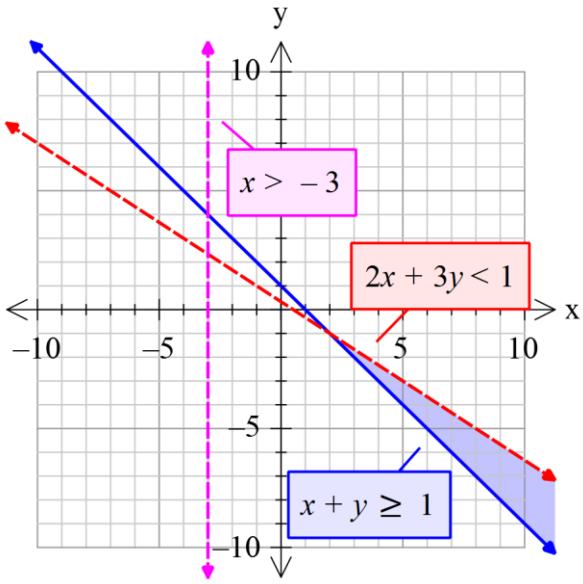


دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۳) $\begin{cases} x^{۲} - y^{۲} \geq ۱ \\ x \geq ۰ \end{cases}$

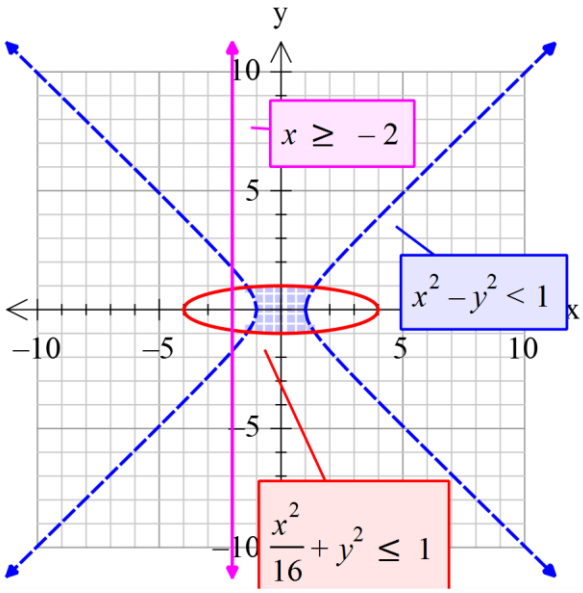


۲۴) $\begin{cases} x + y \geq ۱ \\ ۲x + ۳y < ۱ \\ x > -۳ \end{cases}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

۲۵) $\begin{cases} x^{۲} - y^{۲} < ۱ \\ \dfrac{x^{۲}}{۱۶} + y^{۲} \leq ۱ \\ x \geq -۲ \end{cases}$



دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara (@riazisara)