هندسه تحلیلی

معادله درجه۲ و تابع درجه۲

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

فرزانه بایمانی

درس اول: هندسه تحلیلی

یادآوری۱: از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می کند بنابراین با داشتن ۲ نقطه از یک خط می توان معادله خط را بدست آورد.

یادآوری۲: با داشتن معادله خط، می توان مختصات ۲ نقطه از آن را بدست آورد و نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

یادآوری۳: شیب یک خط که دو نقطه $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ به آن تعلق دارند از رابطه : $m_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ بدست می آید.

مثال: هر گاه خطی از دو نقطه $A\ (3,-1)$ و $B(1,-2)$ بگذرد معادله آن را بنویسید.

$$m = \frac{-2-(-1)}{1-3} = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

راه اول: $y = mx + h \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + h \xrightarrow[\text{صدق می دهیم}]{\text{نقطه } A \text{ را در آن}} -1 = \frac{1}{2}(3) + h$

$$\Rightarrow h = \frac{-1}{1} - \frac{3}{2} \Rightarrow h = \frac{-2-3}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

راه دوم: $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y+1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{1}{1} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

سوال: دو نقطه $A\ (2 , 4)$ و $B\ (6, 1)$ روی خط L قرار دارند. نمایش جبری خط L را بنویسید.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از $A(2,-1)$ بگذرد و دارای شیب $-\frac{1}{2}$ باشد.

راه اول: $y = mx + h \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + h \xrightarrow{A\ \text{صدق}} -1 = -\frac{1}{2}(2) + h$

$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$

راه دوم: $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = -\frac{1}{2}(x-2)$

$\Rightarrow y+1 = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از $A(-1,2)$ بگذرد و دارای شیب ۳ باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه ای به طول ۱- قطع کند و شیب آن ۳ باشد.

محور طولها را قطع می کند $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(-1,0)$

$y = mx + h \Rightarrow y = 3x + h \Rightarrow 0 = 3(-1) + h \Rightarrow h = 3 \Rightarrow y = 3x+3$

سوال: معادله خطی را بنویسید که محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند و دارای شیب ۱- باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه ای به طول ۲ و محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۳- قطع کند.

محور طولها را قطع می کند $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(2,0)$

محور عرضها را قطع می کند $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow B\,(0\,,-3)$

$$\Rightarrow m = \frac{-3-0}{0-2} \Rightarrow m = \frac{+3}{+2}$$

$$y = mx + h \xrightarrow{A\ \text{صدق}} 0 = \frac{3}{2} \times 2 + h \Rightarrow h = -3 \qquad \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه ای به طول ۱ و محور عرضها را در نقطه ای به عرض ۲- قطع کند.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $5x+2y=19$ و $4x+3y=18$ بگذرد و دارای شیب $\frac{1}{2}$ باشد.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases} \xrightarrow[5\times]{-4\times} \begin{cases} -20x - 8y = -76 \\ 20x + 15y = 90 \end{cases} \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow \quad y = 2$$

$$5x+2y=19 \xRightarrow{y=2} 5x+4=19 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow \quad x = 3 \qquad A(3,2)$$

$$y = mx + h \xrightarrow[\frac{1}{2}=\text{شیب}]{A\ \text{صدق}} 2 = \frac{1}{2}(3) + h \Rightarrow h = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $2x-3y=1$ و $x+5y=20$ بگذرد و دارای شیب ۳- باشد.

<u>یادآوری۴:</u> دو خط زمانی موازیند که شیب های برابر داشته باشند.

یادآوری۵: دوخط برهم عمودند هرگاه حاصل ضرب شیب های آنها برابر ۱- باشد به عبارت دیگر شیب هرکدام عکس و قرینه شیب دیگری باشد.

یادآوری۶: شیب محورطولها وهرخط موازی آن برابرصفر وشیب محور عرضها وهرخط موازی آن تعریف نشده است.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\ (1\ ,3)$ گذشته و با خط $2x+3y = 6$ موازی باشد.

$$2x+3y = 6 \Rightarrow m = \frac{-2}{3}$$

راه اول: $y = mx + h \xrightarrow[m=\frac{-2}{3}]{A\ \text{صدق}} 3= -\frac{2}{3} \times 1 + h \Rightarrow h = \frac{3}{1} + \frac{2}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

راه دوم: $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{3}{1} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

توجه: شیب خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $m= \frac{-x\ \text{ضریب}}{y\ \text{ضریب}}$ محاسبه می شود.

سوال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-1, 2)$ گذشته و با خط $- 4x+2y = 1$ موازی باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\ (\frac{1}{2}\ ,1)$ گذشته و بر خط $2x- 4y +3 = 0$ عمود باشد.

$$m= \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{عکس و قرینه}]{\text{عمود}} m' = -2$$

راه اول: $y = m'x + h \xrightarrow[m'=-2]{صدق\ A} 1 = -2 \times \frac{1}{2} + h \Rightarrow h = 2 \Rightarrow y = -2x+2$

راه دوم: $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -2\,(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y - 1 = -2x + 1$

$\Rightarrow y = -2x + 1 + 1 \Rightarrow y = -2x + 2$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\,(1,3)$ گذشته و بر خط $-3x+2y-1=0$ عمود باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات به موازات خط $3y-2x+4=0$ رسم شود.

$0(۰,۰)\ ,\ 3y-2x+4=۰ \Rightarrow m = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3}$

راه اول: $y = mx + h \xrightarrow[m=\frac{2}{3}]{صدق\ مبدأ} ۰ = \frac{2}{3} \times ۰ + h \Rightarrow h = ۰ \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$

راه دوم: $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$

توجه: معادله خطوطی که از مبدأ میگذرند به صورت $y = mx$ می باشد.

سوال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات به موازات خط $2y - 4x + 1 = 0$ رسم شود.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بر خط $x-2y+1=0$ عمود شود

$$x-2y+1=0 \Rightarrow m=\frac{-1}{-2} \xrightarrow[\text{عکس و قرینه}]{\text{عمود}} m' = -2$$

راه اول: $y = m'x + h \xrightarrow[m'=-2]{\text{صدق مبدأ}} 0= -2 \times 0 + h \Rightarrow h = 0 \Rightarrow y = -2x$

راه دوم: $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -2(x-0) \Rightarrow y = -2x$

راه سوم: $x-2y+1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2} \xrightarrow[\text{عکس و قرینه}]{\text{عمود}} m' = -2 \xRightarrow{\text{مبدأ}} y = -2x$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بر خط $3y - x = 2$ عمود شود

مثال: مقدار k را چنان تعیین کنید که خط های

$2kx - 2y = x - k$ و $3x+y=2-4x$ باهم موازی باشند

$$2kx - 2y - x + k = 0 \Rightarrow (2k-1)x - 2y + k = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-(2k-1)}{-2}, \; 3x + y - 2 + 4x = 0 \Rightarrow 7x + y - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-7}{1} = -7$$

شرط موازی بودن: $\frac{2k-1}{2} = -7 \Rightarrow 2k-1 = -14 \Rightarrow 2k = -13 \Rightarrow k = \frac{-13}{2}$

سوال: مقدار a را چنان تعیین کنید که خط های

$ax-3y=2x+a$ و $2x+y=5x-3$ باهم موازی باشند.

مثال: مقدار t را چنان تعیین کنید که دو خط

$tx + t = -4y - 3x$ و $3x-5y+2=0$ برهم عمود باشند.

$tx + t = -4y - 3x \Rightarrow \underline{tx} + t + 4y + \underline{3x} = 0 \Rightarrow (t+3)x + 4y + t = 0$

$\Rightarrow m = \frac{-(t+3)}{4}$, $3x-5y+2=0 \Rightarrow m' = \frac{-3}{-5} \xrightarrow[m=\frac{-1}{m'}]{\text{عمود}} \frac{-(t+3)}{4} = -\frac{5}{3}$

$\Rightarrow 3t + 9 = 20 \Rightarrow 3t = 11 \Rightarrow t = \frac{11}{3}$

سوال: مقدار k را چنان تعیین کنید که دو خط
$2x-4y=1$ و $kx+y=k+x$ برهم عمود باشند.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $2x+y=2$ و $4x-2y=2$ می گذرد و با خط $4x-8y+2=0$ موازی باشد.

$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow[\times 2]{} \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow 8x = 6 \Rightarrow \quad x = \frac{6}{8}$

$2x+y=2 \Rightarrow 2 \times \frac{6}{8} + y = 2 \Rightarrow \frac{6}{4} + y = 2 \Rightarrow 2 - \frac{3}{2} = y$

$\Rightarrow y = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$, $4x-8y+2=0 \rightarrow m = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - \frac{6}{8}) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $x+y=2$ و $x-2y=4$ می گذرد و با خط $3x+6y-2=0$ موازی است

مثال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $3x-y=11$ و $x+2y=6$ می گذرد و بر خط $-4x+2y-1=0$ عمود است

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x-y=11 \end{cases} \xrightarrow[\times 2]{} \begin{cases} x+2y=6 \\ 6x-2y=22 \end{cases} \Rightarrow 7x=28 \Rightarrow \quad x=4$$

$x+2y=6 \Rightarrow 4+2y=6 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1 \qquad \rightarrow (4,1)$

$-4x+2y-1=0 \ \rightarrow m=\frac{-(-4)}{2}=2 \xrightarrow[\text{عکس و قرینه}]{\text{عمود}} -\frac{1}{2}$

$y-1=-\frac{1}{2}(x-4) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2+1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+3$

سوال: معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $2x+6y=16$ و $3x-2y=2$ بگذرد و بر خط $2x-y=3$ عمود باشد.

مثال: مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با رأسهای $A(2,3)$ و $B(5,1)$ و $C(1,-3)$ را در نظر بگیرید و معادله ارتفاع وارد بر ضلع AC را محاسبه کنید.

چون ارتفاع وارد بر ضلع AC را میخواهیم پس از رأس $B(5,1)$ عمود رسم میشود

$A(2,3)\ ,\ C(1,-3) \Rightarrow m_{AC}=\frac{-3-3}{1-2}=\frac{-6}{-1}=6 \Rightarrow m'=-\frac{1}{6}$

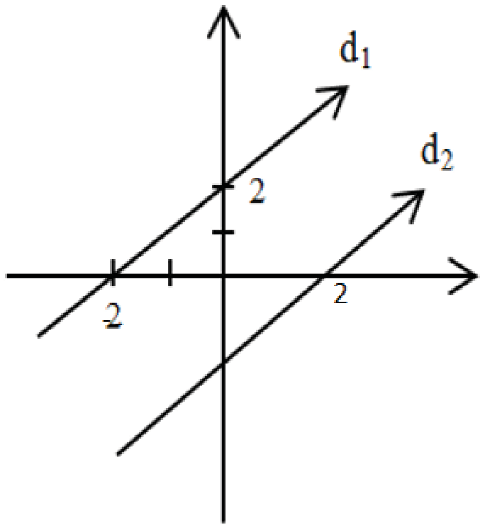
معادله ارتفاع: $y-y_1=m'(x-x_1) \Rightarrow y-1=-\frac{1}{6}(x-5)$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}+1 \Rightarrow y=-\frac{1}{6}x+\frac{11}{6}$

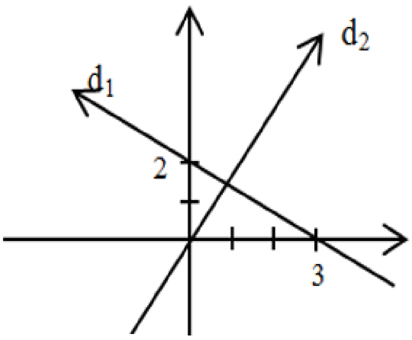
سوال: هرگاه $A(1,2)$ و $B(3,2)$ و $C(2,1)$ رأسهای یک مثلث باشند معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC را بنویسید.

سوال: معادله خط d_2 را در شکلهای زیر بنویسید

الف)



ب)



<u>توجه: درشکل ب دوخط برهم عمودند</u>

<u>فاصله دو نقطه:</u> هرگاه دو نقطه A و B روی محور طولها باشند:

به طورکلی ،بدون آنکه بدانیم از بین A و B کدام نقطه سمت چپ دیگری است داریم:

فاصله بینAوB $= |x_A - x_B|$

و بطورکلی هرگاه دو نقطه A و B روی محور عرضها باشند داریم:

فاصله بین A و B = $|y_A - y_B|$

توجه: از آنجا که فاصله همواره بزرگتر مساوی صفر است فاصله بین دو نقطه A و B یا طول AB را با نماد $|AB|$نشان می دهیم.

هرگاه دو نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$دو نقطه در صفحه مختصات باشند طول AB یا همان فاصله A تا B برابراست با:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال: اگر A(-3,4) و B(8,6) در صفحه محورهای مختصات قرار داشته باشند و O مبدا مختصات باشد نشان دهید: $OA^2+OB^2=AB^2$

$$OA=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$OB=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

$$AB=\sqrt{(8-(-3))^2+(6-4)^2}=\sqrt{11^2+2^2}=\sqrt{121+4}=\sqrt{125}$$

$$OA^2+OB^2=AB^2 \Rightarrow 5^2+10^2=\sqrt{125}^2 \Rightarrow 25+100=125$$

بنابراین رابطه درست است.

توجه: فاصله مبدأ مختصات از نقطه $A(x_1,y_1)$برابر است با: $OA=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$

سوال: سه نقطه A(0,-1) و B(3,1) وC(2,-4) سه رأس یک مثلث اند نوع مثلث را تعیین کنید.

مثال: مقدار k را چنان تعیین کنید که نقاط $A(k-1,2k+2)$ و $B(-1,3K+1)$ فاصله ای برابر $\sqrt{5}$ داشته باشند.

$$AB=\sqrt{(-1)-(K-1))^2+(3K+1-(2K+2))^2}\Rightarrow$$

$$AB=\sqrt{(-1)-K+1))^2+(3K+1-2K-2)^2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{5}=\sqrt{(-K)^2+(K-1)^2}\Rightarrow\sqrt{5}=\sqrt{K^2+K^2-2K+1}\Rightarrow$$

$$\sqrt{5}=\sqrt{2K^2-2K+1}\xrightarrow{\text{به توان } 2} 5=2K^2-2K+1\Rightarrow$$

$$2K^2-2K+1-5=0\Rightarrow 2K^2-2K-4=0\Rightarrow K^2-2K-8=0$$

$$\Rightarrow (K-4)(K+2)=0\Rightarrow\begin{cases} K-4=0\Rightarrow K=4\xrightarrow{\div 2}K=2\\ K+2=0\Rightarrow K=-2\xrightarrow{\div 2}K=-1\end{cases}$$

توجه: معادله $2K^2-2K-4=0$ را می توان از راه Δ نیز حل کردوهمین جوابهارابدست آورد.

سوال: هرگاه $A(k+1,3k+3)$ و $B(1, 2K+1)$فاصله ای برابر $\sqrt{7}$ داشته باشند مقدار K را محاسبه کنید.

مثال: نقطه ای در ناحیه اول دستگاه مختصات روی خط y = x پیدا کنید که فاصله آن تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{8}$باشد . (هماهنگ کشوری- خرداد۸۰)

چون نقطه روی خط y = x قراردارد پس طول و عرض آن برابرند $A(x_1,x_1)$و چون این نقطه در ناحیه اول است طول و عرض آن مثبتند پس:

$$OA=\sqrt{{x_1}^2+{x_1}^2}=\sqrt{2x^2}=|x|\sqrt{2}=x\sqrt{2}$$

$x\sqrt{2} = \sqrt{8} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

بنابراین : $A(2,2)$

سوال: اگر نقاط $A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ دو راس مجاور یک لوزی باشند محیط این لوزی را محاسبه کنید.

توجه: محیط لوزی = (طول ضلع) × ۴

<u>مختصات نقطه وسط پاره خط:</u>

هرگاه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از:

$m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

مثال: مثلث با رأس های $A(1,9)$ و $B(3,1)$ و $C(7,11)$ را در نظر بگیرید.

الف) طول میانه Am را حساب کنید. (کار در کلاس کتاب درسی)

ب) معادله میانه Am را بنویسید.

الف) میانه ضلع مقابل را نصف می کند بنابراین مختصات m برابر است با:

$m\left(\frac{7+3}{2}, \frac{11+1}{2}\right) \Rightarrow m(5,6)$

$Am = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

ب) $A(1,9)$, $m(5,6) \Rightarrow$ شیب $= \frac{6-9}{5-1} = \frac{-3}{4}$

$y = mx + h \xrightarrow[m \text{ را صدق}]{\text{به دلخواه}} 6 = \frac{-3}{4} \times 5 + h \Rightarrow h = \frac{6}{1} + \frac{15}{4} = \frac{24+15}{4} = \frac{39}{4}$

$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$

سوال: هرگاه $A(1,2)$ و $B(3,2)$ و $C(-2,1)$ رأسهای یک مثلث باشند.

الف) طول میانه وارد بر ضلع AB را بدست آورید.
ب) معادله میانه Cm را بنویسید.

<u>فاصله نقطه از خط:</u>

فاصله نقطه $A(x_1,y_1)$ از خط به معادله $ax+by+c=0$ برابر است با: $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

توجه: فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با: $d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

نکته: اگر دو خط موازی باشند ضرایب x و y دریک خط مضربی از ضرایب x و y در خط دیگر است به عبارت دیگر ابتدا x و y را در هر دو خط هم مضرب می کنیم و سپس از فرمول صفحه قبل استفاده می کنیم.

مثال: فاصله دو خط موازی $2x-4y+3=0$ و $4x-8y-5=0$ را محاسبه کنید.

$2x-4y+3=0 \overset{\times 2}{\Rightarrow} 4x-8y+6=0$, $4x-8y-5=0$

$$\Rightarrow d = \frac{|6-(-5)|}{\sqrt{4^2+(-8)^2}} = \frac{11}{\sqrt{16+64}} = \frac{11}{\sqrt{80}}$$

سوال: نشان دهید دو خط با معادلات $5x-12y+8 = 0$ و

$-10x+24y+10 = 0$ با یکدیگر موازی اند و سپس فاصله این دو خط را حساب کنید. (صفحه ۹ کتاب درسی)

مثال: روی محور y نقطه ای بیابید که فاصله اش از خط $2x+y-4=0$ برابر $\sqrt{5}$ باشد.

روی محور y ها $x=0 \Rightarrow (0,a)$

$$d = \frac{|2\times 0+a-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{|a-4|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |a-4| = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-4=5 \Rightarrow a=9 \Rightarrow (0,9) \\ a-4=-5 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow (0,-1) \end{cases}$$

دوتا نقطه داریم :

سوال: نقطه ای روی محور x ها بیابید که فاصله اش از خط $x-2y+2=0$ برابر $\sqrt{5}$ باشد.

مثال: هرگاه $A(1,2)$ و $B(3,2)$ و $C(2,1)$ رأسهای یک مثلث باشند اندازه ارتفاع وارد بر ضلع BC را محاسبه کنید.

باید معادله BC را بنویسیم و سپس فاصله A تا آنرا محاسبه کنیم.

$$\begin{matrix} B(3,2) \\ C(2,1) \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{1-2}{2-3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = mx + h \xrightarrow[B,M \text{ را صدق}]{\text{به دلخواه}} 2 = 1\times3+h \Rightarrow h=-1 \Rightarrow y = x-1 \Rightarrow x-y-1=0$$

اکنون فاصله A تا این خط رامحاسبه می کنیم: اندازه ارتفاع واردبر BC $d = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

سوال: در مثال فوق اندازه ارتفاع وارد بر ضلع AC را محاسبه کنید.

مثال:یکی از اضلاع مربعی بر خط $2y=3x+1$ واقع است. اگر $A(2,1)$ یکی از رئوس این مربع باشد محیط و مساحت آن را بدست آورید.

چون مختصات A در معادله خط صدق نمی کند پس A روی خط قرار ندارد به عبارت دیگر فاصله A تا خط ضلع مربع می شود:

$$2y-3x-1=0$$

$$d = \frac{|2\times1-3\times2-1|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}} = \frac{|2-6-1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

محیط: $4\times\frac{5\sqrt{13}}{13} = \frac{20\sqrt{13}}{13}$ مساحت: $\left(\frac{5\sqrt{13}}{13}\right)^2 = \frac{25\times13}{13^2} = \frac{25}{13}$

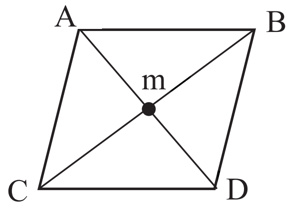
سوال: یکی از اضلاع مربعی برخط $y = 2x-1$ واقع است. اگر $A(3,0)$ یکی از رأسهای این مربع باشد مساحت آن را بدست آورید. (کتاب درسی صفحه۹)

سوال: خط $3x+2y+1=0$ بر دایره ای به مرکز $O(2,3)$ مماس است اندازه شعاع دایره را بیابید.

توجه: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.

مثال: نقاط $A(2,1)$ و $B(-2,-1)$ و $C(-1,-1)$ در صفحه xoy می باشند. مختصات D رأس چهارم متوازی الاضلاع ABCD را طوری تعیین کنید که AB و AC دو ضلع مجاور آن باشند.

میدانیم در متوازی الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می کنند



بنابراین:

$x_A+x_D=x_B+x_C \Rightarrow 2+x_D=-2-1 \Rightarrow x_D=-5 \qquad \rightarrow D(-5,-3)$

$y_A+y_D=y_B+y_C \Rightarrow 1+y_D=-1-1 \Rightarrow y_D=-3$

سوال: قرینه نقطه $M(-1,4)$ را نسبت به نقطه $C(1,2)$ بدست آورید. (کتاب درسی صفحه ۷)

توجه: قرینه نقطه $A(x_1,y_1)$ نسبت به نقطه $B(a,b)$ عبارت است از $A'(2a-x_1\,,\,2b-y_1)$

توجه: قرینه نقطه $A(x_1,y_1)$ نسبت به مبدأ عبارت است از $A'(-x_1\,,\,-y_1)$

سوال: قرینه نقطه $B(-1,3)$ را نسبت به نقطه $A(2,4)$ و همچنین نسبت به مبدأ بدست آورید.

نکات کلیدی:

۱- اگر شیب خطی مثبت باشد می توان نتیجه گرفت که خط با جهت مثبت محور x ها زاویه حاده می سازد . همچنین خط صعودی می باشد و نمودار خط از نواحی اول و سوم می گذرد.

۲- اگر شیب خط منفی باشد خط با جهت مثبت محور x ها زاویه منفرجه میسازد و خط نزولی می باشد . همچنین خط از نواحی دوم و چهارم میگذرد.

۳- شیب هر خط افقی برابر صفر است و برای هر خط قائم (موازی محور y ها) شیب تعریف نمی شود. مثلا شیب خط $y=2$ برابر صفر است و برای خط $x=2$ شیب تعریف نمی شود.

۴- برای بدست آوردن عرض از مبدأ یک خط در معادله خط مقدار x را برابر صفر قرار میدهیم.

۵- برای بدست آوردن طول از مبدأ یک خط در معادله خط مقدار y را برابر صفر قرار میدهیم.

۶- همه خطوطی که طول از مبدأشان مساوی باشد در نقطه ای واقع بر محور طولها همدیگر را قطع می کنند.

۷- همه خطوطی که عرض از مبدأشان مساوی باشد در نقطه ای واقع بر محور عرضها همدیگر را قطع می کنند.

۸- اگر حالت کلی معادله خط به صورت $ax+by+c=0$ باشد آنگاه :

طول از مبدأ $=\frac{-c}{a}$ عرض از مبدأ $=\frac{-c}{b}$

شیب $=\frac{-a}{b}$

۹- دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$:

الف) برهم منطبق اند هرگاه : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

ب) در یک نقطه متقاطعند هرگاه: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

ج) دو خط موازیند هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

۱۰- اگر شیب و طول از مبدأ دو خط برابر باشند آن دو خط برهم منطبق اند.

به عنوان مثال: دو خط $2x-4y+6 = 0$ و $3x-6y+9 = 0$ دارای شیب های برابر و طول از مبدأهای برابرند پس برهم منطبق اند.

۱۱- اگر شیب و عرض از مبدأ دو خط برابر باشند آن دو خط برهم منطبق اند.

به عنوان مثال: دو خط $4x-2y+1 = 0$ و $-12x+6y-3 = 0$ دارای شیب های برابر و عرض از مبدأهای برابرند پس برهم منطبق اند.

۱۲- اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط باهم برابر باشند آنگاه بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است به عنوان مثال: در خط $3x+3y-2 = 0$ طول از مبدأ و عرض از مبدأ باهم برابرند پس بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است.

۱۳- اگر طول از مبدأ و عرض ازمبدأ خطی قرینه باشند آنگاه بر نیمساز ربع دوم و چهارم عمود است. به عنوان مثال: در خط $2x-2y+3 = 0$ طول از مبدأ و عرض از مبدأ قرینه یکدیگرند پس بر نیمساز ربع دوم و چهارم عمود است.

۱۴- برای آنکه سه نقطه A و B و C بریک خط راست واقع باشند باید رابطه $m_{AB} = m_{BC}$ برقرار باشد.

۱۵- اگر زاویه بین دو خط که دارای شیب های m_1 و m_2 می باشند برابر $\propto$ باشد آنگاه مقدار این زاویه از رابطه $\tan\propto = \left|\frac{m_1-m_2}{1-m_1m_2}\right|$ بدست می آید.

۱۶- معادله خطی که طول از مبدأ آن a و عرض از مبدأ آن b باشد برابر است با:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

۱۷- دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ را در نظر می گیریم. معادله خطی که بین این دو خط و موازی هر دو و به یک فاصله از دو خط باشد از رابطه $ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$ بدست می آید.

۱۸- دو خط موازی $ax+by+c'=0$ و $ax+by+c=0$ را در نظر می گیریم.

فاصله این دو خط از رابطه $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ بدست می آید.

۱۹- فاصله مبدأ مختصات تا خط $ax+by+c=0$ برابر است با $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۲۰- اگر سه نقطه A و B و C تشکیل یک مثلث بدهند نقطه G محل برخورد میانه های آن برابر است با:
$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

۲۱- اگر نقاط A و B و C سه رأس یک مثلث باشند مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}\left|(x_A-x_B)(y_A-y_C)-(x_A-x_C)(y_A-y_B)\right|$$

یا

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

۲۲- اگر طول سه ضلع مثلث را محاسبه کنیم می توانیم از دستور هرون برای محاسبه مساحت مثلث استفاده کنیم. این دستور بیشتر برای زمانی بهتر است استفاده شود که اضلاع اعدادی صحیح یا گویا باشند چون محاسبات راحت تری دارد. اگر p را نصف محیط مثلث در نظر بگیریم آنگاه: $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

۲۳- مساحت مثلثی که از تقاطع یک خط با محورها ایجاد می شود:

$S=\frac{1}{2}\left|\text{عرض از مبدأ} \times \text{طول ازمبدأ}\right|$

۲۴- قرینه یک نقطه مثل $A:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

۱) نسبت به مبدأ مختصات برابر است با $A'\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$

۲) نسبت به محور x ها برابر است با $A'\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$

۳) نسبت به محور عرض ها برابر است با $A'\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$

۴) نسبت به خط $x=a$ برابر است با $A'\begin{bmatrix}2a-x\\y\end{bmatrix}$

۵) نسبت به خط $y=b$ برابر است با $A'\begin{bmatrix}x\\2b-y\end{bmatrix}$

۶) نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ برابر است با $A'\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$

۷) نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم $(y=-x)$ برابر است با $A'\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$

۲۵- مبدأ دستگاه xoy را به $o'(a,b)$ منتقل می کنیم اگر $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ در این دستگاه باشد مختصات آن در دستگاه جدید برابر است با : $\begin{bmatrix}x-a\\y-b\end{bmatrix}$

تست:

۱) به ازای کدام مقدار a نقاط (0,0) و (a,3)و (6,4a+1)روی یک خط راست قراردارند؟ (کنکورتجربی۸۸ خارج از کشور)

۱) $-2, \frac{9}{4}$ ۲) $-2, \frac{3}{4}$ ۳) $2, -\frac{3}{4}$ ۴) $2, -\frac{9}{4}$

باتوجه به نکته ۱۴ حل می کنیم: A(0,0) ,B(a,3) ,C(6,4a+1)

$$m_{AB}= m_{BC} \Rightarrow \frac{3-0}{a-0} = \frac{4a+1-3}{6-a} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{4a-2}{6-a} \Rightarrow 4a^2 -2a =18-3a$$

$$\Rightarrow 4a^2+a -18=0 \Rightarrow \Delta =289 \Rightarrow a = \frac{-1\pm 17}{8} \begin{cases} a = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4} \\ a = \frac{16}{8} = 2 \end{cases}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۲) دایره ای بر دوخط $5x-2y-3 = 0$ و $2y-5x-6 = 0$ مماس است کدام گزینه می تواند مرکز دایره باشد؟

۱) $(0, -\frac{3}{2})$ ۲) $(1, \frac{13}{4})$ ۳) $(\frac{13}{4}, 1)$ ۴) $(-\frac{3}{10}, 0)$

باتوجه به شیبها دوخط موازیند پس مرکز دایره برخطی مابین این دو و به فاصله یکسان و موازی هر دو خط قرار دارد که معادله این خط بنا به نکته۱۷ برابر است با:

$$5x-2y-3 = 0 \xrightarrow{\times -} 2y-5x+3 = 0 \Rightarrow 2y-5x+\frac{-6+3}{2} = 0 \Rightarrow 2y-5x-\frac{3}{2} = 0$$

در این معادله گزینه ۴ صدق می کند . در چنین سوالاتی بهتر است اول نقاطی را امتحان کنیم که یکی از مؤلفه های آنها صفر است.

۳) اگر دو خط $y = (m^2-4)x+1$ و $y = (m^2-5m+6)x$ با هم موازی باشند آنگاه با خط $y=x+1$ چه زاویه ای می سازند؟

۱) ۳۰　　۲) ۶۰　　۳) ۹۰　　۴) ۴۵

با توجه به نکته ۱۵ حل کنید.

راهنمایی: ابتدا با توجه به موازی بودن دو خط m را بدست آورید. جواب: گزینه ۴

۴) قرینه خط به معادله $3y-2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ خط d می نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(کنکور۹۷ تجربی)

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۲

باتوجه به نکات: ۴ و ۲۴ حل کنید. پاسخ : گزینه ۱

۵) فاصله نقطه $m(x,2)$ از نقطه $A(3,6)$ دوبرابر فاصله آن ازمبدأ مختصات است. x چه مقادیری می تواند داشته باشد؟

۱) ۳- و ۱-　　۲) ۱ و ۳-　　۳) ۳ و ۱-　　۴) ۱ و ۳

پاسخ : گزینه ۲

۶) نقطه $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق برخط معادله $2y-x=5$ می باشد مساحت این مربع کدام است؟ (کنکور تجربی خارج کشور۹۳)

۱) ۴۰ ۲) ۷۵ ۳) ۴۵ ۴) ۸۰

فاصله نقطه A ازخط $2y-x=5$ نصف اندازه ضلع مربع است بنابراین: $d = \frac{|2(-1)-3-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

اگر اندازه ضلع مربع a باشد پس:

$$d = \frac{a}{2} \Rightarrow a=2d \Rightarrow a=\frac{20}{\sqrt{5}} \Rightarrow S=\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

۷)شعاع دایره ای به مرکز (۱-،۲) و مماس برخط به معادله $x-y=1$ برابر است با :

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ ۴) 2

۸)مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2,5)$ و $B(3,0)$ و $C(0,3)$ کدام است؟(کنکور تجربی خارج کشور ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۶/۵
۳) ۷ ۴) ۷/۵

باتوجه به نکته ۲۱ حل کنید.

البته می توان شیب AB ، AC، BC را بدست آورد و اگر دوتا از آنها عکس و قرینه بودند یعنی برهم عمودند و از فرمول مساحت مثلث قائم الزاویه یعنی نصف حاصلضرب دو ضلع عمود هم مساحت را بدست آورد.

بهتر است هر دو را امتحان کنید. ☺

تمریناتی برای تلاش بیشتر:

۱- دونقطه $A\begin{bmatrix} a-1 \\ 2a \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} 3a+5 \\ a-1 \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید درصورتیکه شیب خط AB برابر ۱ باشد مقدار a را بدست آورید.

۲- نقاط $A\begin{bmatrix} a+1 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ مفروضند. در صورتیکه شیب خط AB با شیب خط BC برابر باشند مقدار a را تعیین کنید.

۳- مقدار kرا طوری بدست آوریدکه خط

$-3y+ax=2$ محورطولها رادرنقطه ای به طول۲- قطع کند.

۴- معادله خطی را بنویسید که خط $2x-y=3$ را در نقطه ای به طول ۲ و خط $-3y+x=1$ را در نقطه ای به عرض ۳ قطع کند.

۵- معادله خطی را بنویسید که از نقطه$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$گذشته و در ربع دوم با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۱ واحد تشکیل دهد.

۶- معادله خطی را بنویسید که از نقطه$A(-1,2)$ بگذرد و برخط گذرنده از دو نقطه $B(2,-1)$ و $C(-3,2)$ عمود باشد.

۷- معادله خطی را بنویسید که از نقطه ای به عرض $\frac{1}{2}$ واقع برخط $3x-2y=5$بگذرد و با خط $y=-2x+3$ موازی باشد.

۸- معادله خطی را بنویسید که بر محور xها عمود باشد و خط $x=3y+2$را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند

۹- خط $(a-1)x+(a+3)y+a-5$ را درنظر بگیرید. مقدار a را چنان تعیین کنید که این خط :

الف) موازی محور عرض هاباشد.
ب) موازی محور طولها باشد.

توجه: خط موازی محورعرضها به صورت $x=k$ وخط موازی محورطولها معادله آن به صورت $y=k$ می باشد.

۱۰- مقدار k را طوری تعیین کنید که نقاط $A(K+2,-4)$ و $B(-2,3K+1)$ روی خطی واقع شوند که برخط $x=-5$ عمود است.

۱۱- اگر $A(1,-2)$ و $B(-2,3)$ و $C(a+1,-4)$ سه رأس مثلث ABC باشند مقدار a را طوری بیابید که ضلع AB بر ضلع BC عمود باشد.

۱۲- فاصله نقطه (۱- و ۲) از خط به معادله

$5x-12y-m=0$ برابر ۵ واحد است مقدار m را بدست آورید.

۱۳- خطdبه معادله $3x-4y-10=0$مفروض است. چند نقطه روی خط $x+y+1=0$وجود دارد که فاصله آنها از خط d برابر ۵ باشد؟

۱۴- نقطه $A(-1,1)$ یک رأس و نقطه $m(2,1)$نقطه برخورد قطرهای یک مربع اند مختصات سه رأس دیگر مربع را پیدا کنید.

۱۵- نقاط $A(2,3)$و $B(3,5)$و$C(-1,7)$ سه رأس متوازی الاضلاع ABCD هستند. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.

۱۶- مساحت مثلثی را بدست آورید که خط $5x-2y=7$با محورهای مختصات می سازد.

۱۷-دایره ای از دونقطه(۱و۰)و(۰و۳)گذشته ومعادله یک قطرآن به صورت$x-y=2$ است.شعاع دایره را بدست آورید

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه۲

حل معادله: سال قبل حل معادلات درجه۲ رابه روشهای تجزیه، مربع کامل و روش کلی (Δ) آموختیم اما معادلاتی وجود دارند که درجه۲ نیستند ولی می توان آنها را تبدیل به معادله درجه۲ کرد و به شیوه معادلات درجه۲ حل نمود. این تبدیل معادلات به درجات پائینتر به نام روش تغییر متغیر معروف است.

مثال: معادله $x^4-8x^2+12=0$ رابه روش تغییرمتغیر حل کنید.

$$x^2 = u \Rightarrow x^4 = u^2 \quad \Rightarrow u^2-8u+12=0$$

$$\Rightarrow (u-6)(u-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} u-6=0 \Rightarrow u=6 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6} \\ u-2=0 \Rightarrow u=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

سوال: معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

الف) $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$

ب) $x^4-3x^2+2=0$

ج) $(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0$

$\frac{x^2}{3}-2=u \Rightarrow u^2-7u+6=0 \Rightarrow (u-1)(u-6)=0$

$$\begin{cases} u-1=0 \Rightarrow u=1 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{3}=3 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \\ u-6=0 \Rightarrow u=6 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-2=6 \Rightarrow \frac{x^2}{3}=8 \Rightarrow x^2=24 \Rightarrow x=\pm\sqrt{24} \end{cases}$$

د) $(4-x^2)^2-2(4-x^2)-15=0$

مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه۲:

معمولا مجموع دو ریشه را با S و حاصلضرب آنها را با p نمایش میدهیم.

اگر α و β ریشه های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه داریم:

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $1\pm\sqrt{3}$ باشد.

$\alpha+\beta=S=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$

$\alpha\beta=p=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-3=-2 \qquad \Rightarrow x^2-2x-2=0$

توجه: هرگاه α و β ریشه های یک معادله باشند آن معادله درجه ۲ را به صورت $x^2-Sx+p=0$ می نویسیم.

سوال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ باشد.

مثال: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم

$x^2-2x-1=0$ باشند معادله ای بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشند. (هماهنگ کشوری خرداد ۹۵ – حسابان)

$\propto+\beta= \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$, $\propto.\beta= \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} =-1$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{\propto+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{2+2}{-1+2+1} = 2 \\ p = \frac{1}{\propto+1} \times \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{1}{-1+2+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2-2x+\frac{1}{2}=0$$

مثال: بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه های معادلات زیر بحث کنید.

الف) $5x^2-7x-5=0 \Rightarrow$

معادله ۲ ریشه حقیقی دارد $\Delta=49+100=149>0$

عدد بزرگتر مثبت **است** $\Rightarrow \propto+\beta=\frac{7}{5} \Rightarrow$

دو ریشه دو علامت متفاوت دارند. $\alpha\beta=-1$

ب) $x^2+4x+4=0 \Rightarrow \Delta=16-16=0$ * معادله یک ریشه مضاعف دارد.

* (۲ریشه مثل هم هردو + یا هر دو –) $x_1x_2=4$

* ریشه مضاعف منفی است(دو ریشه مثل هم منفی اند). $x_1+x_2=-4$

سوال: بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه های معادلات زیر بحث کنید.

الف) $-x^2+3x-1=0$

ب) $x^2-7x+12=0$

سوال: بدون حل معادله و با استفاده از p، S و Δ در وجود وعلامت جوابهای معادله

$x^2+x-5=0$ بحث کنید. (هماهنگ کشوری شهریور ۹۴ – حسابان)

سوال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2-5x+3=0$ باشند بدون یافتن ریشه ها مقدار عددی $\frac{\propto}{\beta}+\frac{\beta}{\propto}$ را محاسبه کنید. (هماهنگ کشوری دی ۸۴ – حسابان)

مثال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2-2x+m=0$ باشند و داشته باشیم: $\frac{\propto}{\beta}+\frac{\beta}{\propto}=-\frac{1}{2}$

مقدار m را بیابید. (هماهنگ استانی خرداد ۸۳ – حسابان)

$$\frac{\propto}{\beta}+\frac{\beta}{\propto}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{2^2-2\times m}{m}=\frac{4-2m}{m}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -m=8-4m \Rightarrow 3m=8 \Rightarrow m=\frac{8}{3}$$

سوال: اگر α و β جواب های معادله $x^2-3x+1=0$ باشند معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن دو برابر ریشه های معادله درجه دوم فوق باشد. (حسابان – ایرانیان استانبول دی ۹۲)

مثال: در معادله $x^2+mx-2=0$ مقدار m را طوری تعیین کنید که بین ریشه ها رابطه $2\propto+\beta=0$ برقرار باشد.
(تهران - فروغ علم -خرداد ۸۶ - حسابان)

$$\propto+\beta=\frac{-b}{a}=-m\ ,\ \ 2\propto+\beta=0 \xRightarrow{\text{تفاضل}} -\alpha=-m \Rightarrow \alpha=m$$

یعنی m ریشه معادله است پس در معادله صدق می کند.

$$x^2+mx-2=0 \xRightarrow{x=m} m^2+m^2-2=0 \Rightarrow 2m^2=2 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm1$$

سوال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2-7x+1=0$ باشند بدون حل معادله مقدار عددی رابطه زیر را بدست آورید. (تبریز - غیرانتفاعی علوی - ۸۶)

$$(\propto-1)^2+\beta(\beta-2)=$$

سوال: معادله $x^2-5x+3=0$ مفروض است.مطلوب است معادله درجه دومی که ریشه های آن ازدو برابرقرینه ریشه های معادله مذکور یک واحد بیشتر باشند.(مرند- نمونه ابوریحان- ۸۶)

$$\propto+\beta=\frac{-b}{a}=5\ ,\ p=\frac{c}{a}=3$$

اکنون ریشه های معادله جدید $-2\propto+1$ و $-2\beta+1$ پس:

$$S=(-2\propto+1)+(-2\beta+1)=2-2(\propto+\beta)=2-2\times5=-8$$

$$p=(1-2\propto).(1-2\beta)=1-2(\propto+\beta)+4\propto\beta=1-2\times5+4\times3=3$$

$$\Rightarrow x^2-Sx+p=0 \Rightarrow x^2+8x+3=0$$

ماگزیمم و می نی مم سهمی:

سهمی باضابطه $y = ax^2+bx+c$ را در نظر می گیریم،نکات زیر رااز سالهای قبل به یاد داریم:

نکته۱ : طول رأس این سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ است.

نکته۲ : اگر $a>0$ ، دهانه سهمی رو به بالاست ∪ و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$کمترین (مینیمم) مقدار سهمی به دست می آید.

نکته۳: اگر $a<0$، دهانه سهمی رو به پائین است ∩ و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$بیشترین (ماکزیمم) مقدار سهمی حاصل می شود.

مثال:هرگاه مقدار منیمم $y = x^2-4x+a$ برابر <u>۸−</u> باشدمقدار aرا بدست آورید.(تهران-غیرانتفاعی احمدیه- ۸۶)

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{-(-4)}{2}=2$$

$$f(2)=2^2-4\times 2+a\Rightarrow f(2)=4-8+a=a-4 \Rightarrow a-4=-8 \Rightarrow a=-4$$

سوال: هرگاه مقدار ماکزیمم $f(x)=x^2-10x+k$ برابر <u>۴</u> باشد مقدار k را بدست آورید.

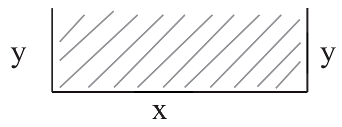
مثال: در معادله $12x^2-6x+3y=-5$ مقدار ماکزیمم یا منیمم تابع y را محاسبه کنید.

$$3y=-12x^2+6x-5 \Rightarrow y=-4x^2+2x-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2(-4)}=\frac{1}{4} \Rightarrow y=-4(\frac{1}{4})^2+2(\frac{1}{4})-\frac{5}{3}$$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{3} = \frac{-6+12-40}{24} = \frac{34}{24} = \frac{-17}{12}$

مثال: بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟

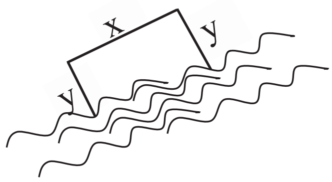


محیط: $x+2y \Rightarrow x+2y=120 \Rightarrow y = \frac{120-x}{2}$

$S= xy= x \times \frac{120-x}{2} = x(60- \frac{x}{2}) = - \frac{x^2}{2} +60x$

$\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-60}{2\times -\frac{1}{2}}=60 \Rightarrow y=\frac{120-60}{2}=30 \Rightarrow S= xy = 60\times 30 =1800$

سوال: ابعاد مستطیلی که کنار دریا لازم است سه ضلع آن با ۱۰۰ متر نرده محصور شود چقدر باشد تا مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد. (کتاب درسی کار در کلاس صفحه ۱۵)



سوال: کدام سهمی ماکزیمم و کدامیک مینیمم دارد؟ مقدار آن را محاسبه کنید.

الف) $f(x)= - (x+2)^2-1 \Rightarrow$

ب) $f(x)= x^2-6x +5\Rightarrow$

صفرهای تابع درجه۲:

محل برخورد نمودار تابع با محور x ها صفرهای تابع یا همان ریشه های معادله نامیده می شود که در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است. اگر نمودار $f(x)=0$، محور xها را در دو نقطه قطع کند ۲ جواب و اگر بر محور xها مماس باشد یک ریشه مضاعف دارد و در صورتیکه محور xها را قطع نکند جواب ندارد.

توجه: در تابع $y=ax^2+bx+c$ عدد ثابت c نشان دهنده محل برخورد نمودار آن با محور yهاست به عبارت دیگر اگر نمودار تابع محور yها را در قسمت مثبت دستگاه مختصات قطع کرد نتیجه می گیریم $c>0$ و اگر نمودار ، محور yها را در قسمت منفی دستگاه مختصات قطع کرد نتیجه میگیریم $c<0$ و اگر از مبدأ مختصات عبور کرد نتیجه می گیریم $c=0$.

توجه: در صورت داشتن نمودار برای نوشتن معادله سهمی از حالتهای زیر می توان بهره برد:

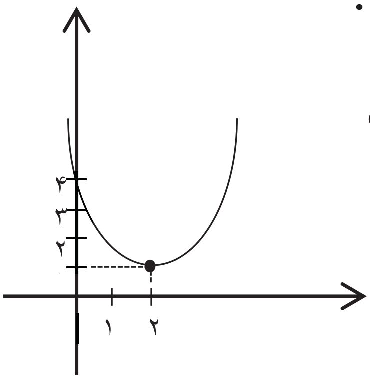
الف) اگر نمودار سهمی محور x ها را در دو نقطه x_1 و x_2 قطع کرده باشد از معادله $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ استفاده می کنیم و با قرار دادن مختصات نقطه ای دیگر مقدار a را محاسبه می کنیم.

ب) اگر نمودار سهمی از مبدأ مختصات بگذرد از معادله $f(x)=ax(x-x_1)$ استفاده کرده و با قرار دادن مختصات نقطه ای دیگر مقدار a را محاسبه می کنیم.

ج) اگر نمودار سهمی بر محور xها مماس باشد از معادله $f(x)=a(x-x_1)^2$ استفاده کرده و با قرار دادن مختصات نقطه ای دیگر مقدار a را محاسبه می کنیم.

د) اگر نمودار سهمی محور xها را قطع نکند باتوجه به نمودار ، مختصات نقاط مشخص را در نظر گرفته و از معادله $f(x)=ax^2+bx+c$ استفاده می کنیم.

مثال: معادله سهمی مقابل را بنویسید.



رأس سهمی : $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow 2=-\frac{b}{2a} \Rightarrow b=-4a$ ①

$$(2,1) \xrightarrow{f(x)=ax^2+bx+c} 1=4a+2b+c$$

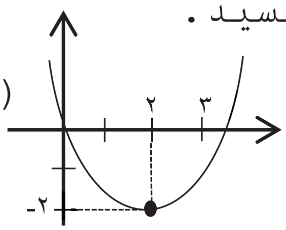
از طرفی چون نمودار محور y ها را در عرض ۴ قطع کرده است پس $c=4$

$$\Rightarrow 4a+2b+4=1 \overset{①}{\Rightarrow} 4a-8a+4=1 \Rightarrow -4a=-3$$

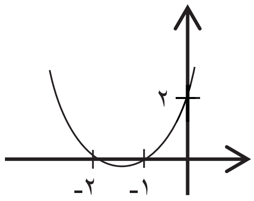
$$\Rightarrow a=\frac{-3}{-4} \quad , \quad b=-4\times\frac{3}{4}=-3 \qquad \Rightarrow f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+4$$

سوال: معادله سهمی های زیر را بنویسید.

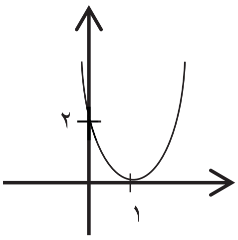
الف)



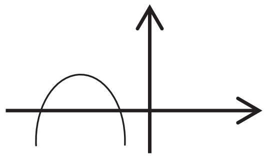
ب)



ج)



مثال: در شکل زیر سهمی به معادله $p(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. علامت ضرایب a وb و cوتعداد جواب های معادله $ax^2+bx+c=0$ راتعیین کنید. (حسابان خرداد ۹۲)



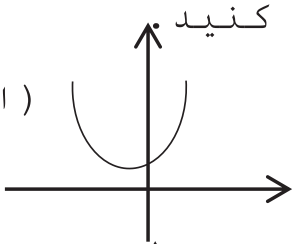
چون محور xها را در دو نقطه قطع کرده پس معادله ۲ جواب دارد. نمودار رو به پائین است بنابراین در نهایت محور yها در قسمت منفی ها قطع می شود یعنی $c<0$ ، نمودار ماکزیمم دارد پس $a<0$

چون رأس سهمی در قسمت منفی هاست (محور x ها) پس:

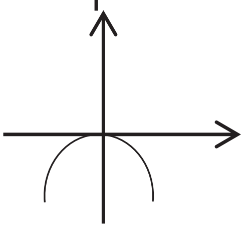
$$x=-\frac{b}{2a}<0 \xRightarrow[a<0]{} b<0$$

سوال: در سهمی های زیر علامت ضرایب a وb وc وتعداد جواب های معادله $ax^2+bx+c=0$ را تعیین کنید.

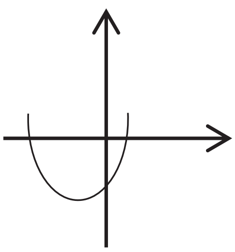
الف)



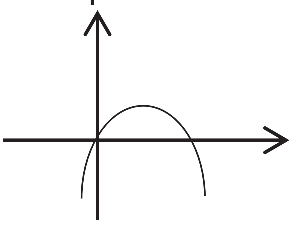
ب)



ج)



د)



نکات کلیدی:

۱) ویژگی های معادله درجه دوم : $ax^2+bx+c=0$

الف) اگر $c=0$ باشد یک ریشه صفر است و ریشه دیگر برابر $\frac{-b}{a}$ می باشد.

ب) اگر $b=0$ معادله ۲ ریشه قرینه دارد.

ج) اگر جای a و c را عوض کنیم ریشه ها عکس ریشه های معادله اصلی می شوند.

د) اگر جای a و c را عوض و هر دو را قرینه کنیم ریشه ها عکس و قرینه ریشه های معادله اصلی می شوند.

ه) اگر $a+b+c=0$ در اینصورت یکی از ریشه ها ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است.

ی) اگر $a+c=b$ در اینصورت یکی از ریشه ها ۱- و دیگری برابر $\frac{-c}{a}$ است.

۲) با توجه به نکته ۱ با فرض معادله $ax^2+bx+c=0$

الف) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش قرینه ریشه های آن معادله باشند کافیست علامت b را قرینه کنیم.

ب) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش عکس ریشه های آن معادله باشند جای a و c را عوض می کنیم.

ج) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش k برابر ریشه های آن معادله باشند ضریب x را در k و مقدار ثابت را در k^2 ضرب می کنیم.

د) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش k واحد بیشتر از ریشه های آن معادله باشند در معادله x را به x-k تبدیل می کنیم.

ه) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش k واحد کمتر از ریشه های آن معادله باشند در معادله x را به x+k تبدیل می کنیم.

ی) اگر بخواهیم معادله ای بنویسیم که ریشه هایش عکس و قرینه معادله اصلی شوند جای a و c را عوض می کنیم و علامت b را قرینه می کنیم یا اینکه : جای a و c را عوض و هر دو را قرینه می کنیم.

۳) هرگاه در معادله $ax^2+bx+c=0$ جمع و ضرب دو ریشه را به صورت S و p تعریف کنیم که $S=\frac{-b}{a}$ و $p=\frac{c}{a}$ بهتر است روابط زیر را به ذهن بسپاریم:

(a $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{S}{p}$

(b $\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=\frac{S^2-2P}{p^2}$

(c $x_1{}^2+x_2{}^2=S^2-2p$

(d $x_1{}^3+x_2{}^3=S^3-3pS$

(e $x_1{}^4+x_2{}^4=(S^2-2p)^2-2p^2$

(f $x_1{}^6+x_2{}^6=(S^3-3ps)^2-3p^3$

(g $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{p}}$

(h $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^2-4p}$

توجه: روابط a ، c ، d ، h کاربرد بیشتری دارند

۴) در سهمی $y=ax^2+bx+c$

الف) اگر $a>0$ سهمی رو به بالا و دارای مینیمم است.

ب) اگر $a<0$ سهمی رو به پائین و دارای ماکزیمم است.

پ) مختصات رأس سهمی $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ می باشد.

ت) اگر $\Delta=0$ و $a>0$ در اینصورت سهمی بالای محور x ها و برآن مماس است.

ث) اگر $\Delta=0$ و $a<0$ در اینصورت سهمی پائین محور x ها و برآن مماس است.

ج) اگر $\Delta<0$ و $a<0$ سهمی همواره پائین محور x هاست.

ح) اگر $\Delta<0$ و $a>0$ سهمی همواره بالای محور x هاست.

۵) هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد یعنی دو ریشه مختلف العلامه دارد پس از چهار ناحیه دستگاه مختصات عبور می کند.

۶) در حالتی که معادله سهمی به صورت $f(x)=a(x-h)^2+k$ باشد رأس سهمی یا همان نقطه ماکزیمم (یا مینیمم) برابر است با $S(h,k)$

۷) در حالتی که معادله سهمی به صورت

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ باشد رأس سهمی یا همان نقطه ماکزیمم (یا مینیمم) برابر است با $S(\frac{x_1+x_2}{2}, f(\frac{x_1+x_2}{2}))$

۸) هر گاه حاصلضرب ریشه های یک معادله درجه ۲ برابر ۱ باشد نتیجه میگیریم دو ریشه عکس یکدیگرند.

تست:

۱- به ازاي كدام مقاديرa معادله درجه دوم $2x^2+ax+a-\frac{3}{2}=0$ داراي دو ريشه حقيقي متمايز است؟ (كنكور تجربي۸۱)

۱) $a>6$ يا $a<2$ ۲) $a>4$ يا $a<3$ ۳) $2<a<6$
۴) $3<a<4$

گزينه ي ۱: $\Delta>0 \Rightarrow a^2-4(2)(a-\frac{3}{2})>0 \Rightarrow a^2-8a+12>0$

$a^2-8a+12=0 \Rightarrow (a-2)(a-6)=0 \begin{cases} a=2 \\ a=6 \end{cases}$

اگر جدول تعيين علامت را تصور كنيم بين دوريشه, مخالف يعني منفي مي شود و طرفين, مثبت مي شود كه مد نظر صورت سوال است $(\Delta>0)$يعني $a>6$ يا $a<2$

۲) به ازاي كدام مجموعه مقادير m، معادله درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ريشه حقيقي است؟
(كنكور تجربي خارج از كشور ۸۹)

۱) $-3<m<5$ ۲) $-3<m<4$ ۳) $-2<m<4$ ۴) $-1<m<5$

جواب : گزينه ۱

۳) معادله $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)=2$ چند ريشه حقيقي متمايز دارد؟ (كنكور رياضي۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب: گزينه ۳

۴) به ازاي كدام مقادير m، معادله درجه دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$ داراي دو ريشه حقيقي منفي است؟(كنكور تجربي ۹۷)

۱) $m<-6$ ۲) $m>3$ ۳) $0<m<3$ ۴) $3<m<6$

گزينه ٤: شرايط $0<\Delta$, $\frac{-b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$ را اعمال كنيد و بين ۳ مجموعه جواب بدست آمده اشتراك بگيريد.

۵)به ازاي كدام مقدار a معادله درجه دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$ داراي دو ريشه مثبت است؟(كنكور رياضي٩٦)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ٤) $5<a<14$

جواب:گزينه ٤

شرط هاي $\Delta>0$, $S>0$, $p>0$ را اعمال كنيد وبين۳ مجموعه جواب بدست آمده اشتراك بگذاريد.

۶)به ازاي كدام مقدارm مجموع جذرهردوريشه معادله $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ ميباشد؟(كنكور رياضي ٩٦)

۱) ۳ ۲) ٤ ۳) ٥ ٤) ٦

$k=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \Rightarrow k^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta \Rightarrow k^2=S+2\sqrt{p} \Rightarrow 4=\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}$

$\Rightarrow 4=\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m+1}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow m=6$

۷) مجموعه ريشه هاي حقيقي معادله $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ كدام است؟(كنكور تجربي ۹۰)

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ٤) ٤

$x^2+x=t \Rightarrow t^2-18t+72=0 \Rightarrow (t-12)(t-6)=0$

$t=12 \Rightarrow x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \Rightarrow x=-4 , x=3$

$t=6 \Rightarrow x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=-3 , x=2$

بنابراین: $-4+3-3+2=-2$

۸) درمعادله درجه دوم $2x^2+ax+9=0$ يك ريشه دو برابر ريشه ديگر است. مجموع دو ريشه مثبت كدام است؟ (كنكور تحربي خارج كشور ٨٤)

۱) ۳/۵ ٢) ٤ ۳) ۴/۵ ٤) ٥

$$x_1x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_1x_2=\frac{9}{2} \Rightarrow 2x_2x_2=\frac{9}{2} \Rightarrow x_2^2=\frac{9}{4}$$

$$\xRightarrow{\text{ریشه های مثبت}} x_2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_1=2\times\frac{3}{2}=3 \Rightarrow 3+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}=4/5$$

۹) اگر $\propto$ و β ريشه هاي معادله $x(5x+3)=2$ باشند به ازاي كدام مقدار k مجموعه جواب هاي معادله $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\{\frac{1}{\propto^2},\frac{1}{\beta^2}\}$ است (كنكورریاضی۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ٤) ۳۱

جواب: گزينه ۳

راهنمايي: ازنكته اقسمت ه وی استفاده كنيد.

۱۰) اگر $\propto$ و β ریشه های معادله $4x^2-12x+1=0$ باشندمقدار $\frac{1}{\sqrt{\propto}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟ (کنکور ریاضي ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ٤) ۶

جواب: گزینه ۳

۱۱) در معادله $x^2-8x+m=0$ یك ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است مقدار m کدام است؟ (کنکور ریاضي خارج کشور۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱٤ ٤) ۱۵

جواب: گزینه ۲

۱۲) بیشترین مساحت زمیني که مي توان توسط یك طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلي که یك طرف آن رودخانه است محصور نمود چندمتر مربع است؟
(کنکور ریاضي خارج کشور۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹٦۸ ۳) ۹۷۸ ٤) ۹۸۸

جواب: گزینه ۲

تمریناتي براي تلاش بيشتر:

۱) اگرαوβ ريشه هاي معادله $x^2+2x-5=0$باشند مقدار عددي $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$را محاسبه كنيد. (هماهنگ كشوري خرداد۸٤)

۲)در معادله درجه دوم $4x^2-16x+m=0$ يكي از ريشه ها دو واحد بيشتر از ريشه ديگر است مقدار m و هر دو ريشه معادله را بيابيد.(نهايي حسابان خرداد۸۷)

۳) اگر αوβ ريشه هاي معادله درجه دوم $x^2-4x+1=0$باشند بدون حل معادله مقدار عددي عبارت $\alpha^2+\frac{1}{\alpha}+\beta^2+\frac{1}{\beta}$راتعيين كنيد .(نهايي حسابان خرداد۸٦)

۴) اگر αوβ ريشه هاي معادله $mx^2-2x-(4m+1)=0$ باشند و داشته باشيم:
$\alpha(1+\alpha)+\beta(1+\beta)=11$مقدار m را بيابيد.(هماهنگ استان خوزستان حسابان خرداد ۸۲)

۵) اگرαوβريشه های معادله$x^2-7x+4=0$باشندبدون محاسبه αوβمقداد عددي $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$را تعيين كنيد
(استان تهران حسابان دي۸۲)

۶) اگرαوβ ريشه هاي معادله $x^2+4x-3=0$باشند بدون حل معادله حاصل عبارت $A=\frac{\alpha^3\beta+\alpha\beta^3}{(\alpha^2+4\alpha-2)(\beta^2+4\beta-2)}$ را بيابيد.
(قائم شهر فرزانگان خرداد۸٦ حسابان)

۷)معادله درجه دومي تشكيل دهيدكه ريشه های آن از۳برابرعكس ريشه های معادله $x^2+6x+2=0$ دوواحدبيشترباشد.

۸)در معادله درجه دوم$(m+1)x^2-(m+4)x+3m-1=0$ مقدار m را چنان تعيين كنيد كه ريشه هاي معادله معكوس يكديگر باشند.

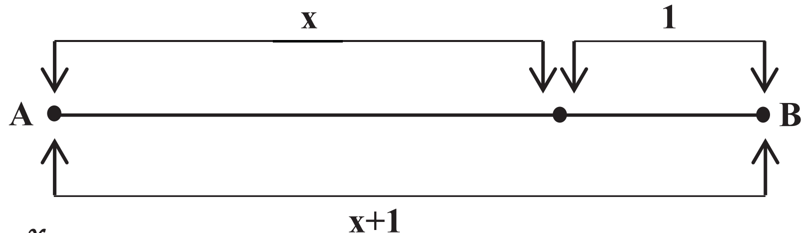
۹)معادله درجه دومي تشكيل دهيد كه ريشه هاي آن ٤ واحد بيشتر از ريشه هاي معادله $x^2-5x+6=0$ باشند.

۱۰)معادله زير راحل كنيد

$$9^x-10\times3^x+9=0$$

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی:

<u>نسبت طلایی:</u> (Golden ratio) : این نسبت در ریاضیات و هنر هنگامی رخ میدهد که نسبت بخش بزرگتر به بخش کوچکتر برابر با نسبت کل به بخش بزرگتر باشد.



$$\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1} \Rightarrow x^2=x+1 \Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow \Delta=5$$

$$x=\frac{+1\pm\sqrt{5}}{2}\begin{cases} x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{نسبت طلایی} \\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1/618$ به عدد طلایی معروف است.

<u>خواندنی:</u> عدد ۱/۶۱۸ یکی از زیبایی های دنیای ریاضی است که در گوشه و کنار این دنیای بزرگ از اندام های بدن انسان تا آثار برجسته و مشهور هنری و معماری در سطح دنیا و حتی نحوه ی رشد دانه های گل آفتابگردان می توان ردپایی از آن پیدا کرد. عدد طلایی یا نسبت طلایی ۱/۶۱۸ حاصل تلاش دانشمندانی از جمله اقلیدس ، لوکاپاچیولی و لئوناردو فیبوناتچی است. محققان بر این باورند زیباترین سطوح و اشکال آنهایی است که نسبت طلایی در آنها به کار رفته باشد. اجسام و اشیایی که با این نسبت ساخته می شوند دارای تقارن و زیبایی خاصی هستند که از نظر چشم انسان بسیار زیبا جلوه گر می شوند.

حوزه های مختلف وجود نسبت طلایی:

۱- اگر در پاره خطی ، نسبت قسمت بزرگتر به کوچکتر برابر با نسبت کل خط به قسمت بزرگ باشد این نسبت قطعا عدد طلایی و برابر ۱/۶۱۸ می باشد.

۲- تعریف دیگر از این قرار است که عددطلایی عددی (ثابت) مثبت است که اگر به آن یک واحد اضافه کنیم ، به مربع آن خواهیم رسید($a^2=a+1$) تعبیر هندسی این مورد مستطیل طلایی می باشد که عبارت

است از مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طول آن است.
۳- یکی دیگر از حوزه هایی که نشانی از نسبت طلایی در آن پیدا می کنید دنباله فیبوناتچی است. در این دنباله که عبارت است از
... و۲۱و۱۳و۸و۵و۳و۲و۱و۱
اگر اعداد پس از ۲ را در نظر بگیریم و هرکدام را به عدد ماقبل خود تقسیم کنیم شاهد اعدادی بسیار نزدیک به عدد نسبت طلایی یا ۱/۶۱۸ خواهیم بود. هرچه بیشتر این تقسیم را ادامه دهیم عدد حاصل به نسبت طلایی نزدیکتر می شود.

نحوه ترسیم مستطیل طلایی و مارپیچ طلایی یا فیبوناتچی: از رأس (گوشه) هر مربع یک کمان به شعاعی برابر ضلع آن مربع رسم می کنیم. به این مارپیچ به دست آمده اسپیرال لگاریتمی هم گفته می شود.

* در بسیاری از ساختارهای هستی از مارپیچ های دی ان ای گرفته تا مارپیچ گوش انسان ، حلزون ، ساختار مارپیچی کهکشان ها و تمام زیبایی های طبیعت از جمله برگ های درختان ، خطوط و نقش و رنگ روی پرهای طاووس و مارپیچ های آفتابگردان این نسبت رعایت شده است.

* این عدد در معماری باستان و معاصر ایران و جهان نیز کاربرد دارد. از جمله می توان به هرم جیزا در مصر ،برج آزادی در تهران ،قلعه دالاهو در کرمانشاه ، بنای بیستون کرمانشاه و مقبره ابن سینا در همدان اشاره کرد. برای مثال ابعاد بنای بیستون کرمانشاه پنج کیلومتر در سه کیلومتر ذکر شده که اعداد چهارم و پنجم دنباله فیبوناتچی اند. با تقسیم این دو عدد به عدد ۱/۶ می رسیم که بسیار نزدیک به عدد طلایی است.

* این عدد در بدن انسان نیز بسیار کاربرد دارد. زیبایی چهره ، زیبایی خنده ، تناسب اندام و خوش تیپی همه و همه از شاهکارهای الهی در آفرینش انسان است. اگر نگاهی به تاریخچه عدد طلایی بیندازید می بینید لئوناردو داوینچی اولین نفری است که نسبت دقیق استخوان های انسان را اندازه گیری و ثابت کرد این نسبت ضریبی از عدد طلایی است. در سنجش تناسب اندام خود می توانید فاصله انگشتان پا تا ناف را

بر فاصله ناف تا بالای سر تقسیم و حاصل را با عدد ۱/۶۱۸ مقایسه کنید. هرچه این عدد به ۱/۶۱۸ نزدیکتر باشد به این معنی است که تناسب اندام خوبی دارید. چنین نشانه هایی که در آنها می توان به نسبت طلایی رسید در بدن انسان بسیار زیاد است.

***کاربرد نسبت طلایی در معماری ایرانی:**

۱- برج و میدان آزادی : طول بنا ۶۳ و عرض آن ۴۲ است که $\frac{63}{42}=1.5$ و به عدد طلایی نزدیک می باشد. سبک معماری آن نیز طاق بزرگی است که تلفیقی از سبک هخامنشی و ساسانی و اسلامی است که منحنی آن با الهام از طاق کسری معماری ایران باستان را تداعی می‌نماید.

۲- قلعه دالاهو، کرمانشاه: خطی از استحکامات به طول دو و نیم کیلومتر و عرض چهار متر با قلوه و لاشه سنگ به همراه ملات دیوار گچ را می‌سازد. سرتاسر نمای خارجی این دیوار با مجموعه‌ای از برج‌های نیم دایره‌ای شکل تقویت شده است. می‌دانیم $\frac{4}{2/5}=1.6$ که همان عدد طلایی است.

۳-بیستون ازدوره هخامنشی: به طول ۵ کیلومتر و عرض ۳ کیلومتراست. که $\frac{5}{3}=1.6$ و ابعاد برجسته کاری ۱۸ در ۱۰ پاست که قامت داریوش ۵ پا و ۸ اینچ (۱۷۰cm) بلندی دارد که هر دو اعداد فیبوناتچی هستند.

۴- یکی از هنرهای معماری درتخت جمشید این است که نسبت ارتفاع سر درها به عرض آنها و همین‌طور نسبت ارتفاع ستون‌ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است. نسبت طلایی نسبت مهمی در هندسه است که در طبیعت وجود دارد. این نشانگر هنر ایرانیان باستان در معماری است.

۵- پل ورسک در مازندران: این پل بر روی رودخانه ورسک در مجاورت سواد کوه بنا شد. بلندی این پل ۱۱۰ متر است و طول قوس آن ۶۶ متر می‌باشد. ($\frac{110}{66}=1.6$)

۶- مقبره ابن سینا: آرامگاه در وسط تالاری مربع شکل قرارگرفته که پله مدور (مارپیچ فیبوناتچی) و پایه‌های دوازده‌گانه برج را احاطه کرده‌اند. سطح حیاط با سه پله سراسری به ایوان متصل است. ایوان با دری به ارتفاع ۳/۲ متر و عرض ۱/۹ متر به سرسرای آرامگاه متصل است (۳/۲÷۱/۹=۱/۶)

در دو طرف سرسرا دو تالار قرار دارد یکی در جنوب که تالار سخنرانی و اجتماعات است و یکی در شمال که کتابخانه آرامگاه است. طول تالار کتابخانه ۹/۴۵ متر و عرض آن ۵/۷۵ متر است(۹/۴۵÷۵/۷۵=۱/۶)

۷- ارگ بم: این بنا <u>۳۰۰</u> متر طول و <u>۲۰۰</u> متر عرض داشته و از <u>۲</u> قسمت تشکیل شده است. این دژ <u>۵</u> شیوه ساختاری از خشت خام دارد (۳ و ۲ و ۵ اعداد دنباله فیبوناتچی هستند).

۸- میدان نقش جهان و مسجد لطف‌الله: در کتب اخیر، نویسنده: جیسون الیوت بر این باور است که نسبت طلایی توسط طراحان میدان نقش جهان و در مجاورت مسجد لطف‌الله مورد استفاده قرار گرفته است.

۹- خوشنویی میرعماد حسنی: با بررسی اکثریت قاطع حروف و کلمات میرعماد متوجه می‌شویم که این نسبت به عنوان یک الگو در تار و پود حروف و واژه‌ها وجود دارد و زاویه ۶۳/۴۴۸ درجه که مبنای ترسیم مستطیل طلایی است در شروع قلم‌گذاری و ادامه رانش قلم، حضوری تعیین‌کننده دارد.

حل معادلات گویا: ابتدا مخرج ها را تجزیه می کنیم و سپس دو طرف تساوی را در کوچک ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج ها ضرب می کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود و سپس به شیوه های آموخته شده

(تجزیه ،Δ ، مربع کامل و ...) آن را حل می کنیم.

توجه:جواب های بدست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و همچنین این جوابها باید در معادله اولیه صدق کنند در غیر اینصورت قابل قبول نیستند.

توجه:می توان ابتدا دامنه معادله گویا را یافت و سپس اگر جواب معادله در دامنه وجود داشت قابل قبول و در غیر اینصورت قابل قبول نیست.

مثال: معادلات گویای زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$

ک م م : $(x-1)(x+1) \Rightarrow \cancel{(x-1)}(x+1)\frac{2x+3}{\cancel{x-1}} - \cancel{(x+1)}(x-1)\frac{2x-3}{\cancel{x+1}} =$

$\cancel{(x+1)(x-1)}\frac{10}{\cancel{(x-1)(x+1)}} \Rightarrow \cancel{2x^2}+\underline{2x+3x}\cancel{+3}\ \cancel{-2x^2}+\underline{2x+3x}\cancel{-3} = 10$

$10x=10 \Rightarrow x=1$

چون مخرج کسر اول را صفر می کند قابل قبول نیست.

ب) $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$ $\quad 2x-2=2(x-1)\ ,\ \ x^2-1=(x-1)(x+1)$

$2x+2=2(x+1) \Rightarrow$ ک م م : $2(x-1)(x+1)$

$\Rightarrow \cancel{2(x-1)}(x+1)\frac{2x+3}{\cancel{2(x-1)}} - \cancel{2(x-1)(x+1)}\frac{5}{\cancel{(x-1)(x+1)}} = \cancel{2}(x-1)\cancel{(x+1)}\frac{2x-3}{\cancel{2(x+1)}}$

$\Rightarrow \cancel{2x^2}+2x+3x\cancel{+3} -10 = \cancel{2x^2}-2x-3x\cancel{+3}$

$\Rightarrow 5x-10=-5x \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1\ ,\ 2(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \to x=1 \\ x+1=0 \to x=-1 \end{cases}$

$D=R-\{1,-1\}$

چون ۱ در دامنه وجود ندارد قابل قبول نیست.

ج) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

ک م م : $x(x-2) \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \quad \Rightarrow D=R-\{0,2\}$

$\cancel{x(x-2)}\frac{x^2-2x+2}{\cancel{x(x-2)}} - \cancel{x}(x-2)\frac{1+x}{\cancel{x}} = x\cancel{(x-2)}\frac{x-1}{\cancel{x-2}}$

$\Rightarrow \cancel{x^2}\cancel{-2x}+2\cancel{-x^2}\cancel{+2x}\cancel{-x}+2=\cancel{-x^2}-x \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

۲ چون در دامنه نیست قابل قبول نمی باشد و اگر دامنه را محاسبه نکرده باشیم چون عدد ۲ مخرج ۲ کسر را صفر می کند قابل قبول نیست.

سوال: معادلات گویای زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

(فجر ایرانیان استانبول حسابان دی۹۲)

ب) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$

ج) $\frac{3x-2}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{3x^2-7x}{x^2-4}$ (ریاضی(۲)- نهایی خرداد ۷۴)

مثال: به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب x=2 است؟

به جای x عدد ۲ قرار میدهیم:

$\frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{4+(a-2)^2}{2(a-2)} = \frac{a}{2} \Rightarrow$

$4+(a-2)^2=a(a-2) \Rightarrow 4+\cancel{a^2}-4a+4=\cancel{a^2}\cancel{-2a} \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4$

سوال: به ازای چه مقدارازk معادله $\frac{x-2}{5x}=\frac{1}{k}-\frac{4}{15x}$ دارای مجموعه جواب {۴} است؟

سوال: به ازای چه مقدار از k معادله $\frac{k}{3t}=\frac{t-5}{t^2-4t}$ دارای مجموعه جواب {۵} است؟

حل معادلات رادیکالی:

برای حل یک معادله رادیکالی می توانیم جملات را طوری در طرفین تساوی جابه جا کنیم که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله آن را از حالت رادیکالی خارج و معادله بدست آمده را حل کنیم.

توجه:ممکن است نیاز به بیش از یک بار استفاده از عمل توان رسانی باشد.

توجه:جواب های بدست آمده در صورت صدق در معادله اولیه قابل قبول اند و در غیر اینصورت قابل قبول نیستند

توجه:مثل معادلات گویا می توان از طریق دامنه قابل قبول بودن جواب را تشخیص داد اما بهترین راه برای معادلات رادیکالی با توجه به گستردگی حالت های متفاوت دامنه توابع رادیکالی همان صدق جواب در معادله اصلی است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$

$\sqrt{x+5}=5-\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x+5})^2=(5-\sqrt{x})^2 \Rightarrow x+5=25-10\sqrt{x}+x$

$\Rightarrow 10\sqrt{x}=20 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2=2^2 \Rightarrow x=4$

امتحان : $\sqrt{4}+\sqrt{4+5}=5 \Rightarrow 2+3=5$

بنابراین $x=4$ قابل قبول است.

ب) $\sqrt{x}-x=-20$

$\sqrt{x}=x-20 \Rightarrow \sqrt{x}^2=(x-20)^2 \Rightarrow x=x^2-40x+400$

$\Rightarrow x^2-41x+400=0 \Rightarrow (x-16)(x-25)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-16=0 \Rightarrow x=16 \\ x-25=0 \Rightarrow x=25 \end{cases}$

امتحان : $x=16 \Rightarrow \sqrt{16}-16=-20 \Rightarrow -12=-20$ غ ق ق

امتحان : $x=25 \Rightarrow \sqrt{25}-25=-20 \Rightarrow -20=-20$ ق ق

ج) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$ (تهران – دبیرستان کوثر دی ۷۷)

$$\sqrt{2+\sqrt{x-5}}^{2}=\sqrt{13-x}^{2} \Rightarrow 2+\sqrt{x-5}=13-x \Rightarrow \sqrt{x-5}=11-x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-5})^2=(11-x)^2 \Rightarrow x-5=121-22x+x^2 \Rightarrow x^2-23x+126=0$$

$$\Rightarrow (x-14)(x-9)=0 \begin{cases} x-14=0 \Rightarrow x=14 \\ x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{cases}$$

امتحان $(x=14) \Rightarrow \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{14-5}}_{9}}=\sqrt{13-14} \Rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{-1}$ غ ق ق

امتحان : $(x=9) \Rightarrow \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{9-5}}_{4}}=\sqrt{13-9} \Rightarrow 2=2$ ق ق

سوال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{2+\sqrt{x+3}}=\sqrt{5-x}$ (ریاضی (۲) – خرداد ۷۴)

ب) $x+\sqrt{x}=6$ **(**نهایی حسابان خرداد ۹۲**)**

ج) $2+\sqrt{1+x}=x-3$ (نهایی حسابان شهریور ۹۴)

سوال: بدون حل معادله توضیح دهید چرا مجموعه جواب $\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}+3=0$ تهی است؟

سوال: بدون حل معادله توضیح دهید چرا مجموعه جواب $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$ تهی است؟ (کاردرکلاس کتاب درسی صفحه ۲۳)

سوال: آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۲ باشد؟ (با راه حل)

تست کنکورتجربی۹۸: اگر $3a+\sqrt{(4a+2a^2)}=2$ عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

1) ۱/۵ 2) ۲/۵ 3) ۳/۵ 4) ۴/۵

پاسخ:گزینه۴

تمرینـاتی بـرای تـلاش بـیشتـر:

۱- معـادلات گـویـای زیـر را حل کـنید.

الف) $\frac{3}{3x^2-3x-28}=\frac{5}{5x^2-x-20}$

ب) $\frac{3y+5}{y^2+5y}+\frac{y+4}{y+5}=\frac{y+1}{y}$

ج) $2+\frac{5}{3k-1}=\frac{-2}{(3k-1)^2}$

د) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{-x^2+3}{x^2+x-2}$ (دبـیرسـتـان عرفـان خرداد۷۸)

۲- معـادلات رادیـکالـی زیـر را حل کـنید.

الف) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{625x}=2(1+\sqrt[4]{x})$

ج) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}=2$

ب) $x\sqrt{3}-\sqrt{6}=\sqrt{150}-x\sqrt{27}$

د) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x$

۳- معـادلات زیـر را حل کـنید. (بـه تـغـیـیـر مـتـغیر هم نـیـاز داریـد ☺)

الف) $\frac{x^2+3}{6x+2}+2=\frac{-6x-2}{x^2+3}$

ب) $\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^2+\frac{6}{x^2+1}-7=0$

ج) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$

د) $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$

(پـرورش اسـتـعـدادهـای درخشـان عـلامـه حـلـی دی