# ریاضی خور یازدهم (تجربی)

## به سبک آبادانی

- ✓ موشکافی مسائل کتاب درسی
- ✓ مسائلی از امتحانات نهایی آبادان و حومه!

قسمت سوم

نویسنده: حسین ایزن

# ریاضی خور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی

(نسخه دست نویس- بخش سوم)

- ✓ موشکافی مسائل کتاب درسی
- ✓ مسائلی از امتحانات نهایی آبادان و حومه!

حسین ایزن

مقدمه

به لطف خدا نوشتن قسمت اول کار جدید من یعنی ریاضی خور یازدهم (تجربی) به سبک آبادانی هم تموم شد بر خلاف کتاب های قبلی قصد دارم نسخه اولیه این کتاب رو به صورت دست نویس منتشر کنم این کارم هم چنتا دلیل داره:

اول اینکه نسخه آزمایشی کتاب ریاضی یازدهم تجربی به تازگی منتشر شده و نسخه نهایی هنوز بیرون نیومده

دوم اینکه بچه های زرنگی که می خوان درسای سال آینده رو پیش خوانی کنن منبعی واسه درس ریاضی ندارن

سوم اینکه به خاطر حجم زیاد مطالب ریاضی یازدهم، تایپ و صفحه آرایی کتاب زمان زیادی می بره و عملا کتاب به موقع به دست بچه ها نمیرسه

بنابراین من سعی می کنم هر دو سه هفته یکبار یک بخش از کتاب ریاضی خور رو پاکنویس و اسکن کنم و واستون بزارم روی اینترنت. هر چند کیفیت اسکن اونطور که می خواستم نشد ولی مطمئن باشید که از خوندن کتاب لذت می برید.

در مورد سبک نوشتن کتاب هم باید خدمتتون عرض کنم که حتی الامکان سعی کردم چهارچوب های کتاب درسی رو رعایت کنم یعنی اول از همه تمرین ها و مسائل کتاب درسی رو با هم بررسی می کنیم و در پایان هر درس هم قسمتی تحت عنوان مسائل امتحانات نهایی آبادان و حومه! قرار دادم که مخصوص بچه های زرنگ تر هست.

بعد از هر مبحث هم چنتا تمرین قرار دادم که می تونید راهنمایی و جواب تمرین ها رو در کانال تلگرام ریاضی خور @riazikhor ببینید. اگرم در مورد مطالب کتاب سوالی دارید از طریق تلگرام به همین شماره ای که دادم پیغام بدید.

مثل همیشه سعی کردم که حاصل کارم کم اشتباه از آب در بیاد امیدوارم این تلاش مورد قبول دانش آموزان سرزمینم و دبیران عزیز قرار بگیره. مشتاقانه پذیرای نظرات ارزشمند همه عزیزان هستم.

در آخر لازمه تشکر ویژه ای داشته باشم از مدیران محترم سایت های پی سی دانلود ، کنکور (http://konkur.in)، ریاضی سرا (http://riazisara.ir) کنکوریو (http://konkuru.ir)، کتابناک (http://ketabnak.com) و ... که زحمت انتشار کتابهای قبلی من رو بر عهده گرفتن.

و اما روشهای ارتباط:

کانال تلگرام ریاضی خور @riazikhor

SMS: 0938 572 5274

وبلاگ انتگرال خور: integralkhor.blogfa.com

ایمیل انتگرال خور: integralkhor@gmail.com

حسین ایزن

آبادان – ۴ تیرماه ۱۳۹۶

چون دوستان زیادی از من در مورد کتابهام سوال می کنن خدمتتون بگم که فعلا این سه کتاب از من چاپ شده که در زیر عکسشون رو ملاحظه می کنید و برای تهیه این کتابها کافیه به کتابفروشی های معتبر شهر خودتون مراجعه نکنید !! چون همشون به صورت رایگان در اینترنت در دسترس همه هستن. (بگذریم که عده ای این کتابها رو به اسم خودشون به ملت می فروشن!!)

اولین کتابم انتگرال خور (جلد اول ) هستش که حدود پنج سال پیش منتشر شده و در مورد انتگرال نامعین هست و بیشتر به کار دانش جوها میخوره البته دانش آموزای زرنگ و علاقمند هم چیزهای جالبی توی این کتاب پیدا می کنن. این کتاب علاوه بر ایران در افغانستان هم طرفدارای زیادی داره!


روشهای عدم موفقیت در کنکور اسم دومین کتاب من هست که چند ماهیه منتشر شده و البته به معروفیت انتگرال خور نیست. این کتاب در اصل برای دانش آموزای دبیرستانی که قصد شرکت در کنکور سراسری رو دارن نوشته شده و حاصل تجربیات من در زمینه کنکور هست. این کتاب به زبان طنز نوشته شده و میتونه واسه دانش جوهایی که میخوان کنکور ارشد بدن و کلا واسه کسایی که دنبال شیوه های مناسب مطالعه هستن مفید باشه.


و اما سومین کتاب من اسمش دنباله خور هست این کتاب در مورد دنبا له های حسابی و هندسی صحبت می کنه و برای دانش آموزای دبیرستانی و داوطلبان کنکور نوشته شده.

## درس دوم - تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم

همانطور که یادتونه (که مطمئن هستم یادتون نیست !...) توی ریاضی دهم با معادله درجه دوم و روشهای مختلف حل اون آشنا شدیم واسه همین در اینجا یه نگاه خیلی سریع به مباحث سال گذشته می‌ندازیم.

### یادآوری:

شکل کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2+bx+c=0$ هست $(a\neq 0)$ و منظور از ریشه یا جواب معادله عددی هست که اگر اون رو در عبارت بالا قرار بدیم حاصل عبارت برابر صفر بشه. مثلاً $x=3$ جواب معادله $x^2+2x-15=0$ هست چون داریم:

$$(3)^2+2(3)-15=9+6-15=0$$

از طرفی عددی مثل $x=1$ جواب معادله بالا نیست چون:

$$(1)^2+2(1)-15=1+2-15=-12\neq 0$$

باز هم یادتون هست که برای حل معادلات درجه دوم و بدست آوردن ریشه‌های معادله از ویژگی حاصل ضرب صفر استفاده می‌کنیم که به صورت زیر بیان میشه:

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=0$ آنگاه حداقل یکی از دو عبارت صفر است یعنی

$$AB=0 \begin{cases} A=0 \\ \text{یا} \\ B=0 \end{cases}$$

مثلاً اگر داشته باشیم $(x-1)(x-2)=0$ اونوقت داریم:

$$(x-1)(x-2)=0 \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

اما در مورد روشهای حل معادله درجه دوم:

## روش تجزیه و فاکتورگیری

یکی از روشهای مهم حل معادلات درجه دوم روش تجزیه و فاکتورگیری هست که برای این کار شما باید روی اتحادها به خصوص اتحاد مزدوج و جمله مشترک خوب تسلط داشته باشید. خب بریم به مثال دست گرمی جهت یادآوری با هم حل کنیم.

**مثال**: مطلوبست حل معادلات درجه دوم زیر:

الف) $2x^2-10x=0$

به فاکتورگیری ساده!

$$2x(x-5)=0 \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=5} \end{cases}$$

ب) $4x^2-9=0$

خب این که تابلو هست!

عبارتی به شکل $\square^2-\bigcirc^2=0$ از اتحاد مزدوج حل میشن

$4x^2-9=(2x)^2-(3)^2=(2x-3)(2x+3)=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

$\rightarrow x=-\frac{3}{2}$

ج) $x^2+4x-12=0$

حل: معادله سه جمله ای درجه دوم باید سریعاً شما رو یاد اتحاد جمله مشترک بندازه که داریم:

ضریب $x$ ← جمع دو عدد $=4$ ⇐ علامت عدد بزرگتر مثبت

عدد ثابت ← ضرب دو عدد $=-12$ ⇐ دو عدد غیر هم علامت

اول بریم سراغ ضرب دو عدد

$12 \rightarrow 12 \times -1 \Rightarrow$ جمع $=11$

$\rightarrow 6 \times -2 \Rightarrow$ جمع $=4$ ✓

$\rightarrow -3 \times 4 \Rightarrow$ جمع $=1$

دقت کنید چون ضرب دو عدد منفی شده پس حتماً یکی از عددها مثبت و دیگری منفی هست و چون جمع دو عدد مثبت شده پس حتماً عدد بزرگتر مثبت بوده.

$\Rightarrow (x+6)(x-2)=0$

$\rightarrow x+6=0 \Rightarrow x=-6$

$\rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

## روش ریشه گیری

اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، $b=0$ باشه معادله به صورت $ax^2+c=0$ در میاد که می تونیم خیلی راحت اون رو به شکل $x^2=d^2$ در بیاریم و با گرفتن ریشهٔ زوج از طرفین جواب رو به دست بیاریم مثلاً:

$$9x^2-4=0 \Rightarrow 9x^2=4 \xrightarrow{\div 9} x^2=\frac{4}{9} \xrightarrow{\sqrt{\ }} x=\pm\frac{2}{3}$$

* فقط حواستون باشه که معادلاتی به صورت $x^2+a^2=0$ ریشهٔ حقیقی ندارن مثلاً معادلهٔ $x^2+9=0$ ریشه نداره چون:

$$x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-9} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

همونطور که می دونید ما نمی تونیم از اعداد منفی ریشهٔ زوج بگیریم.

## روش مربع کامل

در روش مربع کامل سعی می کنیم معادله درجه دوم رو به صورت $(\ )^2=d^2$ بنویسیم بعد (مثل روش ریشه گیری) از طرفین جذر بگیریم تا جواب در بیاد. در قالب یه مثال این روش رو مرور می کنیم.

**مثال**: مطلوبست حل معادله زیر از روش مربع کامل

الف) $3x^2-12x+3=0$

اول از همه چون ضریب $x^2$ برابر یک نیست طرفین رو بر ضریب $x^2$ تقسیم می کنیم

$$\Rightarrow \frac{3x^2}{3}-\frac{12x}{3}+\frac{3}{3}=0 \Rightarrow x^2-4x+1=0$$

بعدش عدد ثابت رو به سمت راست معادله می بریم :

$$x^2 - 6x = -1$$

در قدم بعدی ضریب $x$ رو در نظر می گیریم و اول اون رو نصف کرده و بعد به توان ۲ می رسونیم.

$$x \text{ ضریب } = -6 \xrightarrow{\div 2} -3 \xrightarrow{\text{توان } 2} (-3)^2 = 9$$

و در آخر عدد بدست آمده یعنی ۹ رو به دو طرف معادلهٔ بالا اضافه می کنیم

$$x^2 - 6x + 9 = -1 + 9 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 8$$

حالا اگر دقت کنید سمت چپ عبارت بالا همون اتحاد مربع $(x-a)^2$ هست که $a=3$ هست (جذر ۹)

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 8$$

حالا از طرفین جذر می گیریم تا جواب در بیاد.

$$(x-3)^2 = 8 \Rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3 \pm 2\sqrt{2}}$$

## حل از روش دلتا $\Delta$ (فرمول کلی)

و اما روش کلی حل معادله درجه دوم که به روش $\Delta$ معروف هست و به صورت زیر بیان میشه:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}} \qquad \boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

خب اگه یادتون باشه سه حالت برای $\Delta$ داشتیم:

① اگر $\Delta>0$ باشه معادلهٔ درجه دوم دارای دو ریشهٔ متمایز است.

② اگر $\Delta=0$ باشه معادله درجه دوم دارای یک ریشهٔ مضاعف (یا دو ریشهٔ یکسان) می باشد.

③ اگر $\Delta<0$ معادله درجه دوم ریشهٔ حقیقی ندارد.

---

بریم سراغ مثال:

مثال: مطلوبست حل معادلات زیر به روش $\Delta$

الف) $x^2+15=8x$

حل: اول معادله درجه دوم رو به فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ درمیاریم. (همهٔ جملات رو می بریم سمت چپ) و $a$ و $b$ و $c$ رو مشخص می کنیم

$$\Rightarrow \quad x^2-8x+15=0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=15 \end{cases}$$

بعدش $\Delta$ رو تشکیل می دیم :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(15) = 4 > 0$$

چون $\Delta > 0$ پس معادله داده شده دو ریشه دارد.

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 5 \qquad x_2 = 3$$

ب) $x^2 - 4x + 4 = 0 \quad a = 1,\ b = -4,\ c = 4$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$$

چون $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه دارد.

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 \pm 0}{2} = 2 \qquad \boxed{x = 2}$$

ج) $x^2 - 2x = -3$

فرم استاندارد $\Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow a = 1 \quad b = -2 \quad c = 3$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$$

چون $\Delta < 0$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

## سایر روشها

به جز روشهای معمولی که گفتیم روشهای دیگری هم برای حل معادله درجه دوم وجود داره که برخی اوقات خیلی به کار میان ! مثل روش دسته بندی معادلات که توی "ریاضی خور سال دهم" مفصل راجع بهش صحبت کردیم که با یه مثال در اینجا یادآوری می کنیم.

**مثال** : مطلوبست حل معادله درجه دوم زیر:

$$2x^2+3x+1=0$$

**حل** : جمله $3x$ رو به صورت $2x+x$ می نویسیم

$$2x^2+\underbrace{2x+x}_{3x}+1=0$$

حالا جملات رو به صورت زیر دسته بندی می کنیم:

$$(2x^2+2x)+x+1=0$$

$$\Rightarrow 2x(x+1)+(x+1)=0 \quad \Rightarrow$$ از $x+1$ فاکتور می گیریم

$$(x+1)\left[2x+1\right]=0$$

$$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

$$2x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

خب قبول دارید که روش دسته‌بندی برای حل معادلات درجه دوم

یه مقدار دردسر داره واسه همین اگه بچه‌ها توی این روش مشکل دارن

سال گذشته در "ریاضی خوردهم" از تعمیم اتحاد جمله مشترک برای

ساده سازی روش دسته‌بندی استفاده کردیم.

آقا اجازه: بله یادمونه!

استاد: خدا رو شکر این یه قلم یادت نرفته!

پس من اینجا خیلی سریع بگمش:

همونطور که میدونید شکل کلی اتحاد جمله مشترک به صورت زیر هست:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

یعنی در اتحاد جمله مشترک باید ضریب $x^2$ برابر $1$ باشه. خب حالا اگه

ضریب $x^2$ یک نبود چی؟!

مثلاً $2x^2+3x+1=0$ رو چه کار کنیم؟!

خب ممکنه بگید که طرفین رو بر ضریب $x^2$ یعنی $2$ تقسیم می‌کنیم

در حالت کلی این روش درسته اما چون با این کار ضرایب معادله کسری

می‌شن این روش عموماً به مشکل می‌خوره و جواب نمیده!

به همین دلیل ما در اینجا از روشی به نام تعمیم اتحاد جمله مشترک

استفاده می‌کنیم که در ادامه با ذکر یه مثال توضیحش می‌دیم.

**مثال:** مطلوبست حل معادله درجه دوم زیر از روش دسته بندی

$$10x^2+17x+3=0$$

**حل:** برای حل این مسئله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

**قدم اول:** ضریب $x^2$ رو در عدد ثابت ضرب می‌کنیم

$$(10)(3)=30$$

حالا دوتا عدد پیدا می‌کنیم که ضرب اونها بشه ۳۰ و جمعشون بشه ضریب $x$ یعنی ۱۷ (اینجاش شبیه اتحاد جمله مشترک هست.)

$$\left.\begin{array}{l} \text{جمع} = 17 \\ \text{ضرب} = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \text{ و } 15$$

**قدم دوم:** ضریب $x$ یعنی ۱۷ رو به صورت جمع دو عدد بالا می‌نویسیم و بعد جملات رو دسته بندی می‌کنیم و معادله رو حل می‌کنیم.

$$10x^2+\underbrace{17x}+3=10x^2+\underbrace{15x+2x}+3=0$$

$$(10x^2+15x)+(2x+3)=5x(2x+3)+(2x+3)=0$$

$$(5x+1)(2x+3)=0 \longrightarrow x=-\frac{1}{5} \quad \Big| \quad x=-\frac{3}{2}$$

برای تمرین می‌تونید از روش $\Delta$ هم معادله رو حل کنید و به همین جواب برسید.

مثال: مطلوبست حل معادله زیر از روش دسته بندی

$$3x^2-8x-60=0$$

ضرب دو عدد $= (3)(-60) = \boxed{-180}$

جمع دو عدد $= \boxed{-8}$

چون ضرب دو عدد منفی هست ← یکی مثبت
← یکی منفی

چون جمع دو عدد منفی هست ← عدد بزرگتر علامت منفی داره

$$180\begin{cases} -90 \times (2) \\ -60 \times (3) \\ -45 \times (4) \\ -30 \times (6) \\ -20 \times (9) \\ 10 \times (-18) \Rightarrow \boxed{\text{جمع} = -8} \\ 5 \times (-36) \end{cases}$$

پس $-8x$ رو به صورت $-18x+10x$ می نویسیم:

$$3x^2-18x+10x-60=0$$

$$(3x^2-18x)+(10x-60)=0$$

$$3x(x-6)+10(x-6)=0$$

$$(3x+10)(x-6)=0 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

$$\boxed{x=-\frac{10}{3}}$$

## روش تغییر متغیر برای حل معادله درجه دوم

یکی از روشهای جالبی که برای حل معادلات درجه دوم استفاده میشه روش تغییر متغیر هست توی کتاب سال دهم یه اشارهٔ کوچیک به این روش شده اما در کتاب یازدهم مفصل تر به این روش پرداخته شده. خب در قالب چند مثال این روش رو باهم یاد می‌گیریم:

**مثال:** مطلوبست حل معادلات درجه دوم زیر:

الف) $(x+\frac{1}{x})^2+2(x+\frac{1}{x})=8$

**حل:** خب! در اینجا اگر بخوایم پرانتزها رو به توان برسونیم و ساده کنیم کلی باید دردسر بکشیم! پس با قرار دادن $u=x+\frac{1}{x}$ از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow u=x+\frac{1}{x} \Rightarrow u^2+2u-8=0 \Rightarrow (u+4)(u-2)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{u=-4} \quad , \quad \boxed{u=2}$$

حالا یه بار $x+\frac{1}{x}=2$ قرار میدیم و یه بار $x+\frac{1}{x}=-4$ و هر معادله رو جداگانه حل می‌کنیم. (راجع به عبارت $x+\frac{1}{x}$ توی سال قبل مفصل صحبت کردیم)

$$x+\frac{1}{x}=2 \xrightarrow{\text{ضرب در } x} x^2+1=2x \Rightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$x+\frac{1}{x}=-4 \xrightarrow{\text{ضرب در } x} x^2+1=-4x \Rightarrow x^2+4x+1=0$$

$$\text{مربع کامل} \Rightarrow x^2+4x=-1 \Rightarrow x^2+4x+4=-1+4=3$$

$$\Rightarrow (x+2)^2=3 \Rightarrow x+2=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{x=-2\pm\sqrt{3}}$$

ب) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

حل: معادله بالا درجه ۴ هست و ما نمی‌تونیم اون رو مستقیماً حل کنیم اما با تغییر متغیر $u = x^2$ معادله بالا به یک معادله درجه دوم برحسب $u$ تبدیل میشه.

$u = x^2 \Rightarrow 2u^2 - 7u - 4 = 0$

خب این معادله رو می تونیم از تعمیم جمله مشترک و دسته بندی حل کنیم

ضرب دو عدد $= 2(-4) = -8$
جمع دو عدد $= -7$
$1$ و $-8$

$\Rightarrow 2u^2 - 8u + u - 4 = 2u(u-4) + (u-4) = 0$

$(2u+1)(u-4) = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$ | $u = 4$

$u = x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ جواب ندارد

$u = x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

پس معادله درجه چهارم داده شده تنها دارای دو جواب می باشه.

توجه: هر معادله درجه چهارم به صورت $ax^4 + bx^2 + c = 0$ رو میشه از روش بالا به راحتی حل کرد.

یه مثال جالب از کتاب درسی

الف) یک معادله درجه چهارم بنویسید که ریشه نداشته باشد.

قبل از حل مسئله مطلبی رو از "ریاضی دهم" یادآوری می‌کنیم. در سال قبل خوندیم که :

معادلات درجه دوم به شکل $x^2+a^2=0$ ← ریشه حقیقی ندارند

" " " " $(x+a)^2$ ← یک ریشه حقیقی دارند.

" " " " $x^2-a^2=0$ ← دو ریشه حقیقی دارند

خب حالا می‌خوایم معادله درجه چهارمی بنویسیم که ریشه نداشته باشه. کافیه دو تا از عبارت های $x^2+a^2=0$ که ریشه ندارند رو در هم ضرب کنیم تا یه معادله درجه چهارم بدون ریشه بدست بیاد:

$$(x^2+4)(x^2+1)=0$$

معادله درجه چهارم بدون ریشه

ب) یک معادله درجه چهارم بنویسید که تنها یک ریشه داشته باشد.

$$\underbrace{(x^2+1)}_{\text{ریشه ندارد}}\ \underbrace{(x+3)^2}_{\text{یک ریشه دارد}}=0 \Rightarrow$$

معادله درجه چهارم با یک ریشه

ج) معادله درجه چهارمی بنویسید که تنها دو ریشه متمایز داشته باشد

$$\underbrace{(x^2+4)}_{\text{ریشه ندارد}}\ \underbrace{(x^2-9)}_{\text{دو ریشه دارد}}=0$$

معادله درجه چهارم با دو ریشه

اینطوری هم میشه نوشت:

$$\underbrace{(x+3)^2}_{\text{یک ریشه}}\ \underbrace{(x+4)^2}_{\text{یک ریشه}}=0$$

د) معادله درجه چهاری بنویسید که دقیقاً سه ریشه متمایز داشته باشد

$$\underbrace{(x+5)^2}_{\text{یک ریشه}}\ \underbrace{(x^2-4)}_{\text{دو ریشه}}=0$$

ث) معادله درجه چهاری بنویسید که چهار ریشه متمایز داشته باشد.

$$\underbrace{(x^2-1)}_{\text{دو ریشه}}\ \underbrace{(x^2-4)}_{\text{دو ریشه}}=0$$

هـ) آیا معادله درجه چهار می‌تواند بیش از چهار ریشه داشته باشد.

خیر هر معادله درجه $n$ حداکثر $n$ ریشه حقیقی دارد.

مثال: مطلوبست حل معادله زیر

$$\frac{3}{x^2+x+1}=3-x-x^2$$

حل: اول معادله رو به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{3}{(x^2+x)+1}=3-(x^2+x)$$

خب تغییر متغیر مناسب خودشو نشون داد!

$$\Rightarrow u=x^2+x \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{u+1}=3-u$$

$$\Rightarrow (u+1)(3-u)=3 \quad \Rightarrow \quad u^2-2u=0$$

$$\Rightarrow u=0 \quad , \quad u=2 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow u=0 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0$

$\Rightarrow x=0$ , $x=-1$

$u=2 \Rightarrow x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0$

$\Rightarrow (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=1$ , $x=-2$

پس معادله چهار جواب به صورت ۱ و ۰ و ۱- و ۲- = $x$ دارد.

---

## یه مثال جالب از کتاب درسی

مثال : مطلوبست حل معادلات زیر

الف) $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}-2=0$

حل : این مسئله جالبیه خیلی خوب دقت کنید

واضحه که داریم : $(x^{\frac{1}{4}})^2=x^{\frac{1}{2}}$

بنابراین قرار می‌دهیم : $u=x^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow u^2+u-2=0 \Rightarrow (u-1)(u+2)=0$

$u=1$ , $u=-2$

دقت کنید که طبق کتاب درسی دهم اگر $a<0$ در این صورت $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود. بنابراین تنها جواب $u=1$ قابل قبول است.

$u=1 \Rightarrow x^{\frac{1}{4}}=1 \Rightarrow (x^{\frac{1}{4}})^4=(1)^4=1$

$\Rightarrow x=1$

ب) $۲x^{\frac{۲}{۳}} + ۷x^{\frac{۱}{۳}} - ۴ = ۰$

در اینجا هم مثل مثال قبل قرار می دیم:

$u = x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow \boxed{۲u^۲ + ۷u - ۴ = ۰}$

معادله بالا رو می تونید از روش $\Delta$ یا روش دسته بندی حل کنید که ما در اینجا از روش دسته بندی استفاده می کنیم

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{ضرب} = (۲)(-۴) = -۸ \\ \text{جمع} = ۷ \end{array}\right\}$ $\boxed{۸ \text{ و } -۱}$

$\Rightarrow ۲u^۲ + ۸u - u - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲u(u+۴) - (u+۴) = ۰$

$\Rightarrow (۲u-۱)(u+۴) = ۰ \Rightarrow \boxed{u = \frac{۱}{۲}}$ $\boxed{u = -۴}$

طبق مطلبی که گفتیم فقط جواب مثبت قابل قبول هست

$u = x^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (x^{\frac{۱}{۳}})^۳ = (\frac{۱}{۲})^۳ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۸}}$

---

یادداشت: اگر این مسئله رو با نرم افزارهای ریاضی حل کنید دو تا جواب به شما می دن! که این اختلاف به این موضوع برمی گرده که برخی مؤلفان عباراتی به شکل $(-۲۷)^{\frac{۱}{۳}}$ رو تعریف شده در نظر می گیرن در واقع در این مورد بین علما اختلاف نظر هست!

## مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

به قول کتاب درسی برخی اوقات به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادله درجه دوم تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برایمان اهمیت دارد که در این صورت می‌توان این مقادیر را به راحتی محاسبه نمود.

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند مجموع دو ریشه رو با $S$ (مخفف sum به معنای مجموع) و حاصل ضرب ریشه‌ها رو با $P$ (مخفف Product به معنای حاصل ضرب) نشون می‌دیم.

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \alpha+\beta \\ P &= \alpha \cdot \beta \end{aligned}}$$

کار رو در قالب یک مثال ادامه می‌دیم:

**مثال:** در معادله زیر با محاسبه ریشه‌های معادله حاصل $S$ و $P$ را بدست آورید.

$$3x^2+5x-1=0$$

**حل:** اول از همه $\Delta$ رو تشکیل می‌دیم ببینیم اصلاً معادله ریشه داره یا نه!

$a=3$ $\quad$ $b=5$ $\quad$ $c=-1$

$$\Delta = b^2-4ac=(5)^2-4(3)(-1)=37>0$$

← معادله دو ریشه متمایز دارد.

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{37}}{6}$$

$$\beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{37}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad S = \alpha+\beta = \frac{-۵+\sqrt{۳۷}}{۶} + \frac{-۵-\sqrt{۳۷}}{۶} = \frac{-۱۰}{۶} = -\frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow \quad P = \alpha\cdot\beta = \left(\frac{-۵+\sqrt{۳۷}}{۶}\right)\left(\frac{-۵-\sqrt{۳۷}}{۶}\right) = \frac{(-۵)^۲-(\sqrt{۳۷})^۲}{۳۶}$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{۲۵-۳۷}{۳۶} = \frac{-۱۲}{۳۶} = \frac{-۱}{۳}$$

حالا به نظر شما چه رابطه‌ای بین ضرایب a و b و c و مقادیر S و P وجود داره ؟

اگر یکم دقت کنید می‌بینید که :

$$S = \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۵}{۳}$$

$$P = \alpha\cdot\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{۳}$$

حالا سؤال اینجاست که آیا این قضیه در حالت کلی درسته ؟

اگر فرمول کلی معادله درجه دوم رو بنویسیم داریم :

$$S = \alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = -\frac{۲b}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

به همین ترتیب :

$$P = \alpha\cdot\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right) = \frac{(-b)^۲-(\sqrt{\Delta})^۲}{۴a^۲}$$

$$= \frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲} = \frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲} = \frac{۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a}$$

بنابراین در حالت کلی می‌توان گفت اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ باشند آنگاه داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \alpha+\beta = -\frac{b}{a} \\ P &= \alpha\cdot\beta = \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

با استفاده از روابط بالا می‌تونیم بدون حل معادله مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم رو به دست بیاریم.

آقا اجازه: بدون حل از کجا بفهمیم که معادله داده شده ریشه داره که بعد حالا بخوایم S و P رو حساب کنیم؟

استاد: سؤال خوبی پرسیدی. در واقع راه‌های مختلفی برای این کار وجود داره یکی از این روشها که کتاب درسی به اون اشاره کرده این هست که اگر a و c مختلف العلامت باشند یعنی داشته باشیم $a.c<0$ آنگاه حتماً معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. البته دلیلش هم واضحه چون داریم:

$$\Rightarrow a.c<0 \Rightarrow -ac>0 \Rightarrow -4ac>0$$

$$\Rightarrow b^2-4ac>0 \Rightarrow \Delta>0$$

مثلاً معادله $3x^2+5x-1=0$ حتماً دو ریشه داره چون $ac=-3<0$

البته عکس این مطلب همیشه درست نیست یعنی اگر $ac>0$ نمی‌تونیم بگیم که معادله ریشه نداره.

**مثال**: در معادله‌ی $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله رو بیابید.

$a=-2$ | $b=1$ | $c=5$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

$$P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$$

دقت کنید چون $ac<0$ معادله حتماً دو ریشه دارد.

---

**مثال**: در معادله‌ی $2x^2-9x+c=0$ مقدار $c$ را طوری بیابید که یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشه (راهنمایی: اگر یکی از ریشه‌ها را $\alpha$ بنامیم ریشه‌ی دیگر به صورت $\beta=2\alpha$ خواهد بود)

خب اینجا هم راهنمای کتاب کار رو ساده کرده!

ریشه‌های معادله رو به صورت $\alpha$ و $2\alpha$ فرض می‌کنیم

$$S=\alpha+\beta=\alpha+2\alpha=3\alpha=\frac{-b}{a}=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{3}{2}$$

$$P=\alpha\cdot\beta=(\alpha)(2\alpha)=2\alpha^2=\frac{c}{a}=\frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{c}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}=\frac{c}{2} \Rightarrow c=9$$

یه مثال کلاسیک ولی مهم

مثال: اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $۴x^۲-۱۲x+۱=۰$ باشند مطلوبست محاسبهٔ

الف) $\alpha+\beta$    ب) $\alpha\cdot\beta$    ج) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

د) $\alpha^۲+\beta^۲$    و) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$    هـ) $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$

حل: این مثال خیلی مهمه! حواستون باشه که سر و کله این نوع مثال‌ها توی امتحانات و کنکور سراسری زیاد پیدا میشه!

الف) این که خیلی ماسته!    $a=۴$ | $b=-۱۲$ | $c=۱$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

ب) اینم که دوغه!

$$P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{۴}$$

ج) این هم آنونه فقط کافیه مخرج مشترک بگیرید در واقع ما باید عبارت $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ رو برحسب S و P که مقدارشون رو می‌دونیم بنویسیم

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}=\frac{S}{P}=\frac{۳}{\frac{1}{۴}}=۱۲$$

د) این قسمت هم جالبه خوب نگاه کنیم

$$\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}_{\text{این ایده خیلی مهمه‌ها...}}=S^۲-۲P=(۳)^۲-۲(\frac{1}{۴})=\frac{۱۷}{۲}$$

و) این قسمت خیلی مهمه هست خوب گوش کنید!

فرض کنید $k=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ با به توان ۲ رسوندن عبارت داریم:

$$\Rightarrow k^2=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$
$$=S+2\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow k^2=S+2\sqrt{P} \xRightarrow{\text{جذر}} \boxed{k=\sqrt{S+2\sqrt{P}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{3+2\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{4}=\boxed{2}$$

روش بدست آوردن $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ رو خوب یاد بگیرید.

هـ) این عبارت هم به راحتی با استفاده از قسمت قبل حل میشه فقط کافیه یه مخرج مشترک ساده بگیرید.

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{2}{\sqrt{1/4}}=\boxed{4}$$

**یادداشت:** خیلی از بچه‌ها عادت دارن روابطی مثل $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$ رو حفظ می‌کنن. توصیه من این هست که اگرهم این روابط رو حفظ می‌کنید اول خودتون روابط رو بدست بیارید و بعد اونها رو حفظ کنین همیشه یادتون باشه که یه تغییر کوچیک در صورت مسئله می‌تونه تمام محفوظات شمارو به باد بده!

مثال: در معادله $3x(5-x)=m$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بزرگتر باشد $m$ کدام است؟

این مسئله جالبه! خوب دقت کنید. اول معادله رو مرتب می‌کنیم

$$3x(5-x)=m \Rightarrow 3x^2-15x+m=0 \quad a=3,\ b=-15,\ c=m$$

دو ریشه رو به صورت $\alpha$ و $\beta=\alpha+2$ فرض می‌کنیم

$$S=\alpha+\beta=\alpha+\alpha+2=2\alpha+2=-\frac{b}{a}=\frac{15}{3}=5$$

$$\Rightarrow 2\alpha+2=5 \Rightarrow \alpha=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow P=\alpha\cdot\beta=\alpha(\alpha+2)=\frac{c}{a}=\frac{m}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+2\right)=\frac{m}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{m}{3} \Rightarrow m=\frac{63}{4}$$

---

مثال: اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+m+5=0$ مجذور دیگری باشد $m$ را بیابید

حل: ریشه‌های معادله رو به صورت $\alpha$ و $\beta=\alpha^2$ فرض می‌کنیم

$$S=\alpha+\beta=\alpha+\alpha^2=-\frac{b}{a}=4 \Rightarrow \alpha^2+\alpha-6=0 \quad \alpha=2,\ \alpha=-3$$

$$P=\alpha\cdot\alpha^2=\alpha^3=\frac{c}{a}=m+5 \Rightarrow \alpha^3=m+5$$

$$\alpha=2 \Rightarrow m+5=(2)^3=8 \Rightarrow m=3$$

$$\alpha=-3 \Rightarrow m+5=(-3)^3=-27 \Rightarrow m=-32$$

## نوشتن معادله درجه دوم با داشتن S و P

در قسمت قبلی با داشتن معادله درجه دوم و بدون حل معادله مجموع ریشه‌ها (یعنی S) و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (یعنی P) رو حساب کردیم. اما در برخی از مسائل وضعیت برعکس هست یعنی S و P رو به ما میدن و معادله درجه دوم رو از ما می‌خوان حالا می‌خوایم ببینیم که چطوری می‌تونیم با داشتن S و P معادله درجه دوم رو بنویسیم.

ابتدا شکل کلی معادله درجه دوم یعنی $ax^2+bx+c=0$ رو در نظر بگیرید با تقسیم طرفین معادله بر $a$ داریم:

$$ax^2+bx+c=0 \xRightarrow{\div a} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

خب دقت کنید که $\frac{c}{a}$ همون $P$ هست و چون $S=-\frac{b}{a}$ بنابراین $\frac{b}{a}$ میشه $-P$. پس معادله بالا رو می‌تونیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

این منفی رو حواستون باشه!

### به قول کتاب درسی:

معادله درجه دوم با مجموع ریشه‌های $S$ و حاصل‌ضرب ریشه‌های $P$ به صورت $x^2-Sx+P=0$ نوشته می‌شود.

بازم تاکید می‌کنم حواستون به منفی پشت سر $x$ باشه!

## چند مثال دست گرمی از کتاب

**مثال:** معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ باشند.

یه سوال ساده! ریشه‌های معادله به ما داده می‌شود پس خیلی راحت می‌تونیم S و P رو حساب کنیم

$$S=\alpha+\beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$P=\alpha\cdot\beta=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{3^2-(\sqrt{5})^2}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-3x+1=0$$

---

**مثال:** دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $-1.5$ و حاصل ضربشان $-7$ باشد.

**حل:** اگر دو عدد خواسته شده را ریشه‌های یک معادله در نظر بگیریم چون مجموع و حاصل ضرب دو عدد به ما داده شده در واقع S و P رو داریم:

$$S=-1.5 \quad P=-7 \Rightarrow x^2-Sx+P=0$$

حالا با داشتن S و P می‌تونیم معادله درجه دوم رو تشکیل بدیم و با حل معادله ریشه‌های اون رو بیابیم.

$$x^2+1.5x-7=0 \xRightarrow{\times 2} 2x^2+3x-14=0 \xRightarrow{\text{روش دسته‌بندی}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ضرب دو عدد} = -28 \\ \text{جمع دو عدد} = 3 \end{array}\right\} 7, -4 \Rightarrow 2x^2+7x-4x-14=0$$

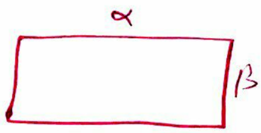
$$\Rightarrow x(2x+7)-2(2x+7)=0 \Rightarrow (x-2)(2x+7)=0$$

$$\Rightarrow x=2 \quad x=\frac{-7}{2}$$

**مثال**: آیا مستطیلی با محیط $11cm$ و مساحت $6cm^2$ وجود دارد اگر جواب مثبت است طول و عرض آن را مشخص کنید

روش اول

اگر طول و عرض مستطیل رو به ترتیب $\alpha$ و $\beta$ فرض کنیم طبق داده های مسئله داریم:




$$\text{محیط مستطیل} = 2(\alpha+\beta) = 11$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha+\beta = \frac{11}{2}}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \boxed{\alpha\cdot\beta = 6}$$

بنابراین مشابه مسئله قبل اگر $\alpha$ و $\beta$ رو ریشه های یک معادله درجه دوم فرض کنیم داریم:

$$\begin{cases} S = \frac{11}{2} & \text{جمع دو ریشه} \\ P = 6 & \text{ضرب دو ریشه} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 11x + 12 = 0 \qquad \left.\begin{matrix} \text{ضرب} = 24 \\ \text{جمع} = -11 \end{matrix}\right\} \boxed{-8 \text{ و } -3}$$

$$2x^2 - 8x - 3x + 12 = 0 \qquad 2x(x-4) - 3(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4} \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\underbrace{\alpha = 4}_{\text{طول مستطیل}} \quad \underbrace{\beta = \frac{3}{2}}_{\text{عرض مستطیل}}}$$

روش دوم : این مسئله رو میشه از یه روش دیگه هم حل کرد که خوبه یادش بگیریم :

بدست آوردیم :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{11}{2} \\ \alpha\beta = 6 \end{cases}$$

از رابطهٔ اول می‌نویسیم :

$$\beta = \frac{11}{2} - \alpha$$

حالا در رابطهٔ دوم به جای $\beta$ قرار میدیم $(\frac{11}{2} - \alpha)$ ؛

$$\Rightarrow \alpha\beta = 6 \Rightarrow \alpha\left(\frac{11}{2} - \alpha\right) = 6 \Rightarrow \frac{11}{2}\alpha - \alpha^2 = 6$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{11}{2}\alpha + 6 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 11\alpha + 12 = 0$$

خب این همون معادله‌ای هست که در روش اول بهش رسیدیم و ادامهٔ راه‌حل مسئله همون هست .

---

یه مثال جالب : مثال : معادله درجه دومی بنویسید که ضرایب آن صحیح بوده و یک ریشهٔ آن $۲-\sqrt{۳}$ باشد .

روش اول : ریشهٔ داده شده را برابر $x$ قرار میدیم سپس رابطه رو مرتب کرده و طرفین رو به توان ۲ می‌رسونیم تا عبارت رادیکالی از بین بره

$$x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x - 2 = -\sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

له برای چک کردن راه‌حل بهتره که معادله رو حل کنید و مطمئن بشید که یکی از جوابهای معادله $۲-\sqrt{۳}$ هست.

روش دوم: در این روش از این نکته استفاده می کنیم که اگر یک معادله درجه دوم با ضرایب صحیح ریشه ای به صورت $a+\sqrt{b}$ داشته باشد ریشه ی دیگر آن به صورت $a-\sqrt{b}$ است.

بنابراین ریشه ی دیگر معادله $2+\sqrt{3}$ است پس داریم:

$$S=\alpha+\beta = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4 \qquad P=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$$

$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-4x+1=0$$

---

مثال: معادله $x^2-3x-1=0$ مفروض است. معادله درجه دوم جدیدی بسازید که ریشه های آن نصف ریشه های معادله بالا باشد.

حل: این مثال جالبه خوب دقت کنید. اول مقادیر S و P رو بدست میاریم:
(ریشه های معادله رو $\alpha$ و $\beta$ می گیریم)

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=3$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$$

حالا طبق خواسته مسئله باید معادله درجه دومی تشکیل بدهیم که ریشه های اون نصف ریشه های معادله اولیه باشه. خب اگر ریشه های این معادله جدید رو با $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\beta}{2}$ نشون بدیم مقادیر S و P برای معادله جدید برابر میشه با:

$$S=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$$

$$P=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha\beta}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}=0$$

$$\xRightarrow{\times 4} 4x^2-6x-1=0$$

## تمرین‌های سری چهارم

۱) معادلات زیر را حل کنید

الف) $4x^6-5x^3+1=0$

ب) $x^4-8x^2+8=0$

ج) $(2x^2-1)^2=12x^2+1$

د) $(x+1)^4-13(x+1)^2+36=0$

۲) در معادله‌ی $4x^2-8x+c=0$ مقدار $c$ را به گونه‌ای بیابید که یکی از ریشه‌های آن ۳ واحد بزرگ‌تر از ریشه‌ی دیگر باشد.

۳) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $1+\sqrt{2}$ باشد.

۴) اگر معادله $x^2-2mx+m=0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت داشته باشد آنگاه محدوده مجاز $m$ چقدر است؟

۵) مجموع دو عدد $1$ و حاصل‌ضرب همین دو عدد $\sqrt{3}-3$ است آن دو عدد را بیابید.

۶) معادله‌ی $x^2-5x-2=0$ مفروض است معادله درجه دومی بسازید که ریشه‌هایش از نصف ریشه‌های این معادله ۲ واحد بیشتر باشد.

۷) اگر $\alpha$ و $\beta$ دو ریشه‌ی معادله $x^2-x+c=0$ باشند و داشته باشیم

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)=12$$

مقدار $c$ را بیابید.