



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

ریاضیات یازدهم

فصل دوم رشته علوم تجربی
مهندس غلامی



09387189869

ترسیم هندسی

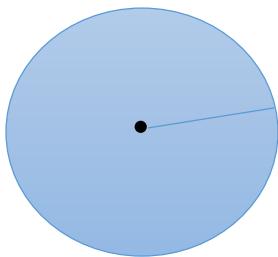
قرار است با هم اولین بخش از فصل دوم بررسی کنیم. متما کتاب درسی خوب مطالعه کردید و الان اینباید. همون طور که از مطالعه کتاب و صحبت های دبیرتون متوجه شدید این قسمت بیشتر روی ترسیم ها کار شده. (شما نقاشی تون هم خوب همیشه !!)

من هم وظیفه دارم برای شما روش های ترسیم رو توضیح بدم ولی شما لطف میکنید به نکته ها بیشتر توجه می کنید. شاید با ترسیمات زیاد کاری نداشته باشیم ولی برای حل تست ها به نکته ها ارادت داریم.

از قبل میدونستید که دایره رو به کمک پرگار رسم میکنیم و دهانه پرگار رو به اندازه شعاع باز میکردید اینک سوزن پرگارو کجا میذاشتید برمیگرده به فیلی سال پیش !! که انشاالله شما یادتون نرفته و الان بلدید دایره با شعاع مشخص رسم کنید.

ترسیم دایره

می دانیم که دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله شان از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطه ثابت مرکز دایره و مقدار ثابت اندازه شعاع دایره نامیده می شود. درحقیقت، دایره یک بیضی است که کانون های آن بر همدیگر منطبق اند.



$$\text{محیط دایره} = 2\pi r$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2$$

- ✓ وتر پاره خطی ست که دو نقطه متمایز از یک دایره را به هم پیوند می دهد.
- ✓ قطر وتری ست که از مرکز دایره می گذرد.
- ✓ هر قطر، دایره را به دو کمان 180 درجه مساوی تقسیم می کند.

دایره صفحه را به سه بخش اِفران می‌کند:

- ✓ **داخل دایره** مجموعه نقطه‌هایی که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، کمتر از شعاع دایره است.
- ✓ **روی دایره** مجموعه نقطه‌هایی که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.
- ✓ **خارج دایره** مجموعه نقطه‌هایی که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، از شعاع دایره بیشتر است.

معادله دایره

❖ معادله دایره‌ای به مرکز (a, b) و شعاع r به این صورت است :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

✎ مثال : آیا نقطه $(2, 3)$ روی محیط دایره‌ای به شعاع 5 سانتی متر و مرکز $(0, -2)$ قرار دارد؟

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$(-2 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 16 + 9 = 25 \quad \checkmark$$

◀ ترسیم عمود منصف

اگر موافقید سری بزیم به فاطرات ابتدایی تون .

عمود منصف پاره خط چیست ؟ عمود منصف پاره خط ؛ خطی است که بر وسط پاره خط عمود شود.

تعریف دبیرستانی عمود منصف : حالا مثلا بیشتر می فهمیم !!!

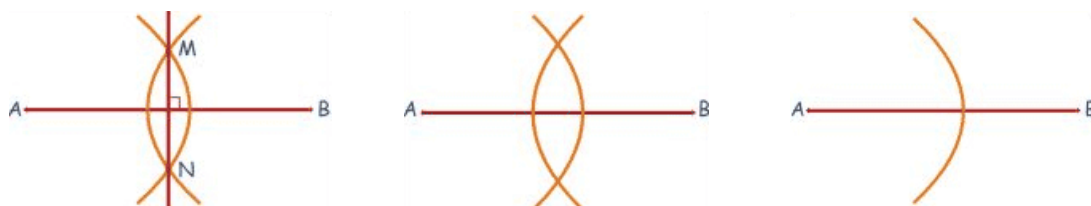
❖ عمود منصف مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله هستند.

نتایج مهم :

هر نقطه روی عمود منصف تا دو سر پاره خط به یک فاصله است.
 اگر فاصله ی نقطه ای تا دو سر پاره خط به یک اندازه باشد آن نقطه
 حتماً روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

رسم عمود منصف با خط کش و پرگار

دهانه ی پرگار را به اندازه ی بیش تر از نصف طول پاره خط باز کرده، به مرکزهای دو سر پاره خط، دو کمان می زنیم. خط گذرا از نقاط تلاقی این دو کمان، عمود منصف پاره خط مزبور است.

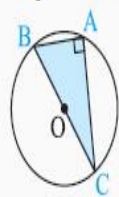


محل تلاقی عمود منصف ها در مثلث:

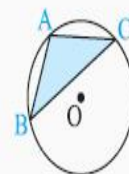
- ۱ مثلث حاده الزاویه: اگر در مثلث ABC هر سه زاویه حاده باشد، محل تلاقی عمود منصف ها داخل مثلث است.
 - ۲ مثلث قائم الزاویه: اگر مثلث قائم الزاویه باشد، محل تلاقی عمود منصف ها دقیقاً وسط وتر است.
 - ۳ مثلث منفرجه الزاویه: در مثلث های منفرجه الزاویه محل تلاقی عمود منصف ها نقطه ای در خارج از مثلث است.
- توجه: محل تلاقی سه عمود منصف از سه رأس مثلث به یک فاصله است و لذا این نقطه مرکز دایره ی محیطی مثلث است.



ABC حاده الزاویه



ABC قائم الزاویه

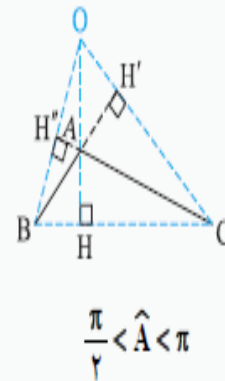
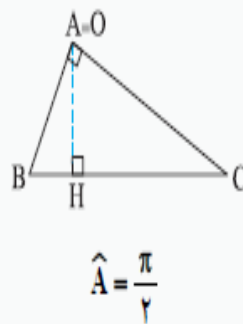
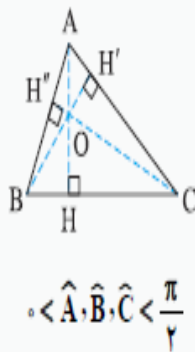


ABC منفرجه الزاویه

دایره ی محیطی یک چند ضلعی محدد دایره ای است که از رأس های آن می گذرد.

محل تلاقی ارتفاع ها در مثلث:

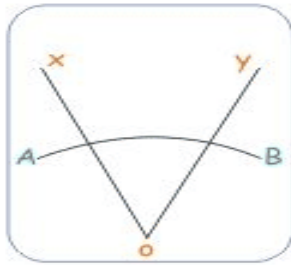
- ۱ مثلث حاده الزاویه: اگر در مثلث ABC هر سه زاویه حاده باشد، محل تلاقی سه ارتفاع داخل مثلث است.
- ۲ مثلث قائم الزاویه: اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، محل تلاقی سه ارتفاع رأس قائمه است.
- ۳ مثلث منفرجه الزاویه: اگر مثلث ABC منفرجه الزاویه باشد، محل تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است.



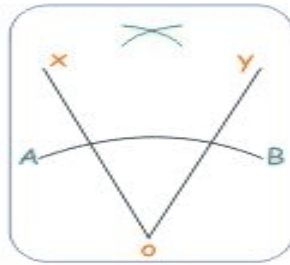
ترسیم نیمساز

۱. از رأس زاویه کمان دلخواهی می زنیم تا اضلاع زاویه را در دو نقطه قطع کند.
۲. سوزن پرگار را روی این دو نقطه گذاشته و دو کمان می زنیم.
۳. محل برخورد دو کمان را به رأس زاویه وصل می کنیم.

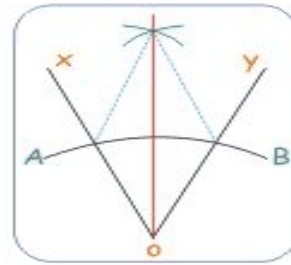
🤔 (دندون هاتون رو اونجوری فشار ندید میدونم پیش پا افتادست این ها رو ابتدایی فوندید ولی فب گفتنی ها رو باید گفت!!)



(۱)

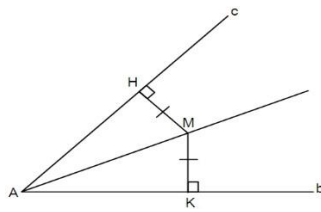


(۲)



(۳)

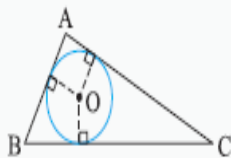
✏ نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه ای در صفحه ی آن زاویه است که فاصله ی آن از دو ضلع زاویه یکساں باشد.



$$HM = KM$$

◀ محل تلاقی نیمساز ها در مثلث:

محل تلاقی سه نیمساز داخلی همواره داخل مثلث است و با توجه به این که هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، لذا محل تلاقی سه نیمساز داخلی هر مثلث از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

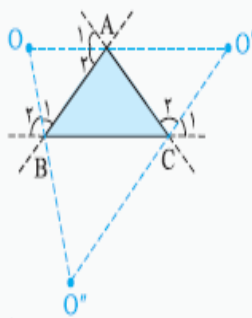


🔊 **توجه:** محل تلاقی سه نیمساز داخلی مثلث ABC (که از هر سه ضلع به یک فاصله است) مرکز دایره ی محاطی داخلی مثلث می باشد.

📖 **تعریف:** دایره ی محاطی داخلی مثلث ABC (که در فصل دایره به طور مفصل درباره ی آن صحبت می کنیم) دایره ای است که بر سه ضلع مثلث مماس باشد.

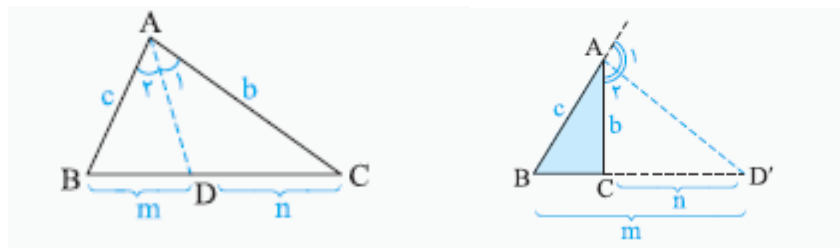
محل تلاقی نیمسازهای خارجی مثلث

با توجه به این که نیمساز خارجی هر زاویه ی مثلث از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر آن به یک فاصله است، لذا محل تلاقی نیمسازهای خارجی هر مثلث از اضلاع و امتداد آن ها به یک فاصله است.



🔊 **توجه:** محل تلاقی نیمسازهای خارجی، مرکز دایره های محاطی خارجی مثلث ABC است. این دایره ها به یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس می شوند.

حالا فرض کنید میخوایم طول نیمساز پیدا کنیم برای به دست آوردن AD کافیه شما فرمول های زیر رو بلد باشید. بچه ها به حروف کوچک بزرگ این فرمول دقت کنید .



$$AD^2 = bc - mn$$

$$AD'^2 = mn - bc$$

توضیحی بسیار مهم: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند. یا به عبارتی:

$$BD = cx \quad \leftarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \rightarrow \quad DC = bx$$

میرسیم به تمرین های آخر این درس. حالا که ترسیمات تموم شد کتاب درسی به شما سوالاتی در خصوص رسم مثلث هاداره که متاسفانه توضیحی هم در متن نبود.

لازمه این نکته رو بدونید برای رسم یک مثلث باید سه جزء مستقل از هم معلوم باشد. به عنوان مثال سه زاویه مثلث، سه جزء مستقل از هم محسوب نمی شوند، چون با معلوم بودن دو تا از آن ها سومی نیز معلوم می شود. ولی سه ضلع مثلث مستقل از هم می باشند. البته مسأله های مربوط به رسم مثلث بسیار زیاد و متنوع هستند و برای حل آن ها توضیحاتی بسیار از هندسه مورد استفاده قرار می گیرد. به همین دلیل نمی توان روش کلی برای حل آن ها بیان کرد.

۱ با معلوماتی که دو مثلث با هم برابر می‌شوند (ض ض ض، ض ض ز، ز ض ز و همچنین دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر) تنها یک مثلث منحصر به فرد مشخص می‌شود.

رسم مثلث با معلومات دو ضلع و زاویه‌ی غیربین

اگر از مثلثی دو ضلع و زاویه‌ی غیربین معلوم باشد دو حالت امکان‌پذیر است:

۲ زاویه‌ی داده شده روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است: در این حالت تنها یک مثلث قابل رسم است، چون این حالت جزء حالت تساوی دو مثلث است.

۳ زاویه‌ی داده شده روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است: در این حالت برای پیدا کردن تعداد حالات ممکن از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم مثلاً اگر a و b و \hat{B} معلوم باشد، می‌نویسیم:

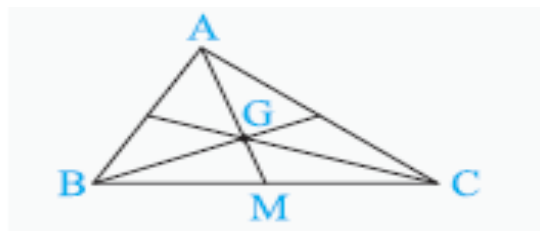
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{a \sin \hat{B}}{b} \begin{cases} > 1 & \text{هیچ مثلث} \\ = 1 & \text{یک مثلث} \\ < 1 & \text{دو مثلث} \end{cases}$$

قضیه‌ی وجود مثلث:

هرگاه سه عدد حقیقی مثبت داریم بررسی می‌کنیم اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد، آن‌گاه مثلثی با این اضلاع وجود دارد.

محل تلاقی میانه‌ها در مثلث:

$$\begin{cases} AG = \frac{2}{3} AM \\ GM = \frac{1}{3} AM \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{محل تلاقی میانه‌های هر مثلث مرکز ثقل مثلث است، در ضمن میانه‌های هر مثلث} \\ \text{همدیگر را به نسبت } \frac{2}{3} \text{ از رأس و } \frac{1}{3} \text{ از پای میانه قطع می‌کنند.} \end{array}$$



سوالات امتحانی

۱. نقطه A در فاصله 4 سانتی متری از خط d مفروض است نقاطی روی صفحه پیدا کنید که فاصله اش از خط d و نقطه A برابر 5 سانتی متر باشد. سوال چند جواب دارد؟

•

۲. نقطه ای از مثلث را بیابید که فاصله اش از هر سه ضلع مثلث با هم برابر است؟

۳. پاره خط AB به طول 8 سانتی متر مفروض است. نقطه ای روی صفحه بیابید که فاصله اش از A, B به ترتیب 4 و 5 سانتی متر باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۴. یک لوزی با طول ضلع 5 و قطر 6 سانتی متر رسم کنید.

۵. مثلثی با اضلاع زیر رسم کنید. کدام قسمت جواب ندارد؟

أ) $AB=3, BC=5, AC=4$

ب) $AB=8, BC=4, AC=4$

ج) $AB=4, BC=3, AC=4$

د) $AB=10, BC=5, AC=4$

در عشق تو گم شدم به یکبار سرگشته همی دوم فلک واد

گر نقطهی دل به جای بودی سرگشته نبودمی چو پرگار