فصل اول

احتمال و پدیده های تصادفی

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

یادآوری ترکیبیات

اصل ضرب در ترکیبیات یکی از اصول اساسی شمارشی است . یک بیان ساده از این اصل این است که اگر برای انجام کاری a طریق و برای انجام کاری دیگر b طریق وجود داشته باشد ، برای انجام هر دو کارباهم a.b طریق وجود خواهد داشت .

مثال ۱

۱) بین دو شهر A و B سه جاده و بین دو شهر B و C دو جاده وجود دارد . به چند طریق می توان از شهر A به شهر C رفت ؟

۲) به کمک اصل ضرب ، بگویید چند عدد ۳ رقمی داریم ؟

تمرین :

۱) با استفاده از حروف a و b و c چند رشته ی (کلمه ی) چهار حرفی می توان ساخت ؟

۲) با استفاده از چهار رنگ آبی ، قرمز ، سبز و نارنجی به چند طریق می توان دو مربع را رنگ کرد ؟

۳) چندعدد ۴ رقمی فرد بدون ارقام ۲ و ۶ و ۸ داریم ؟

جایگشت :

تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر با !n است ، یعنی n چیز مختلف را به !n طریق می توان کنار هم چید .

مثال ۲

۱) جایگشت های سه حرف c , b , a را بنویسید .

۲) با پنج حرف e , d , c , b , a چند رشته ی (کلمه ی) پنج حرفی با حروف متمایز می توان ساخت ؟

تمرین :

۴) با چهار حرف d , c , b , a چند کلمه ی چهار حرفی با حروف متمایز می توان ساخت طوری که a و b کنار هم باشند .

۵) با پنج حرف e , d , c , b , a چند کلمه ی سه حرفی با حروف متمایز می توان ساخت ؟

۶) چند رشته ی (کلمه ی) سه حرفی با حروف متمایز انگلیسی می توان ساخت ؟

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی math۳۰۲۰۱۰@

ترکیب :

تا این جای کار در مسائلی که مطرح کردیم ، ترتیب مهم بود . مثلا در نوشتن اعداد دو رقمی با ۲ و ۴ ، دو عدد ۲۴ و ۴۲ با هم فرق داشتند، اما در بعضی مسئله ها ترتیب مهم نیست . مثلا اگر زیر مجموعه های دو عضوی{۴ , ۳ , ۲ , ۱}با اعضای زوج را بخواهیم ، {۴ , ۲}و {۲ , ۴} فرقی با هم ندارند . به این گونه انتخاب ها ترکیب می گوییم ، یعنی اگر k شیء از n شیء متمایز انتخاب کنیم ، بدون آن که ترتیب انتخاب مهم باشد ، ترکیبی k تایی از آن n شیء داریم . این ترکیب را با C (n , k) یا $\binom{n}{k}$ نشان می دهیم (بخوانید انتخاب k از n) و برابر است با :

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال ۳

تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی { ۱۰ , ۹ , ... , ۳ , ۲, ۱ } چند تاست ؟

تمرین :

۷) از میان ۸ دانش آموز دوم و ۱۰ دانش آموز سوم به چند طریق می توان ۷ نفر را انتخاب کرد طوری که ۲ دانش آموز دوم و ۵ دانش آموز سوم باشند ؟

۸) در یک آپارتمان ۹ خانوار زندگی می کنند و قرار است یک شورای ۵ نفره متشکل از ساکنان آن تشکیل شود ، از هر خانواده تنها زن یا شوهر می تواند عضو شورا شود . به چند طریق ممکن است شورای موردنظر تشکیل شود ؟

نکته : به صورت قرار داد داریم: $0!=1$ بنابراین

برای ترکیب $\binom{n}{k}$ به وضوح داریم : $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

پدیده قطعی :

پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش به طور یقین و قطع مشخص شده باشد .

پدیده تصادفی :

پدیده ای که نتیجه آن را قبل از وقوع آزمایش نمی توان پیش بینی نمود .

فضای نمونه ای :

مجموعه همه حالتهای ممکن را در به وقوع پیوستن یک پدیده تصادفی ، فضای نمونه آن پدیده تصادفی می گوییم . فضای نمونه ای را معمولا با S و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نشان می دهیم .

نکته : اگر اعضای S قابل شمارش باشند ، S را فضای نمونه ای گسسته می گوییم .

مثال : مانند تعداد افراد حاضر در یک کلاس

نکته : اگر اعضای S غیر قابل شمارش باشند ، S را فضای نمونه ای پیوسته می گوییم .

مثال : طول یک مستطیل یا مساحت یک ناحیه

مثال ۴

۱) به پدیده هایی که از به وقوع پیوستن آن ها اطمینان نداشته باشیم .... می گوییم .(۰/۲۵ نمره)

(سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۹۱)

۲) اگر اعضای نمونه قابل شمارش باشند آن را یک فضای نمونه .... می نامیم . (۰/۲۵ نمره)

(سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۹۱)

۳) الف) اگر یک پدیده ی تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه ای این پدیده یا آزمایش باشد هر زیر مجموعه ی S را یک .... در فضای نمونه ای S می نامیم.

ب) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \cap B = \varnothing$ در این صورت A و B را دو پیشامد .... می نامیم . (۰/۵ نمره)

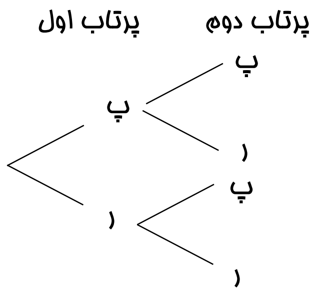
(سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۳)

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

برای نوشتن فضای نمونه می توانیم از روش نوشتن مجموعه یا از روش درختی استفاده کنیم .

نمونه : یک سکه را دو بار پرتاب می کنیم ، فضای نمونه این آزمایش تصادفی شامل چند عضو است ؟

حل : S = {(ر , پ) و (پ , ر) و (پ, پ) و (ر , ر)} یا



نکته : اگر مجموعه S فضای نمونه پرتاب n سکه یا n بار پرتاب یک سکه باشد ، آن گاه داریم : $n(s) = ۲^{n}$

مثال ۵

۱) خانواده ای دارای ۳ فرزند است . فضای نمونه این خانواده را مشخص کنید . (۰/۲۵ نمره) [(سوال ۲ نهایی شهریور ماه ۹۲) (سوال ۲ نهایی شهریور ماه ۹۱)]

۲) هر یک از اعداد زوج طبیعی کوچکتر از ۲۰ را روی یک کارت نوشته و یکی از کارت ها را به تصادف بر می داریم . مطلوب است تعیین فضای نمونه این آزمایش . (۰/۵نمره) (سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۰)

۳) ۳ سکه را با هم می اندازیم . فضای نمونه این آزمایش دارای .... عضو است . (۰/۲۵نمره) (سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۲)

تمرین :

۹) خانواده ای دارای ۴ فرزند است . فضای نمونه این خانواده را مشخص کنید . (۰/۲۵نمره) (سوال ۱ نهایی دی ماه ۸۹)

۱۰) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم . فضای نمونه این آزمایش تصادفی را بنویسید . (۰/۵نمره) [(سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۹۲) (سوال ۲ نهایی دی ماه ۹۲) (سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۱)]

پیش آمد تصادفی :

اگر یک پدیده تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه این پدیده یا آزمایش تصادفی باشد ، هر زیر مجموعه S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه ای S می نامیم .

نکته : اگر $A=\phi$ پیشامد را نشدنی و اگر $A=S$ پیشامد را حتمی می گوییم .

نمونه : یک تاس و یک سکه را با هم می اندازیم پیشامد آن را بنویسید که عدد روی تاس بزرگتر از ۵ باشد . (۰/۵نمره)

(سوال ۱ نهایی شهریور ماه ۹۰)

S = {(ر , ۱) (ر , ۲) (ر , ۳) (ر , ۴) (ر , ۵) (ر , ۶) (پ , ۱) (پ , ۲) (پ , ۳) (پ , ۴) (پ , ۵) (پ , ۶)}

پیشامد آن که عدد روی تاس بزرگتر از ۵ باشد = A = {(ر , ۶) (پ , ۶)}　　　n(A) = ۲

نکته : تعداد اعضای پیشامد تصادفی A را با n(A) نمایش می دهند .

نمونه : هر یک از اعداد زوج طبیعی کوچکتر از ۲۰ را روی یک کارت نوشته و یکی از کارت ها را به تصادف بر می داریم .

مطلوب است پیشامد A که در آن عدد روی کارت ، عدد اول یا مضرب ۳ باشد . (۰/۵نمره)　　　(سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۰)

A = { ۲ , ۳ , ۵ , ۶ , ۷ , ۹ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۵ , ۱۷ , ۱۸ }　　　n(A) = ۱۲

مثال ۶

۱) پیشامد $A=\phi$ را پیشامد .... و پیشامد $A=S$ را .... می نامیم . (۰/۵ نمره)　　　(سوال ۴ نهایی دی ماه ۹۰)

۲) هر زیر مجموعه ی فضای نمونه ای را یک .... می نامیم . (۰/۲۵نمره)　　　(سوال ۱ نهایی شهریور ماه ۹۱)

۳) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم.مطلوب است تعیین پیشامد A که در آن تاس عدد فرد بیاید. (۰/۵نمره)

(سوال ۲ نهایی دی ماه ۹۲)

۴) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم . مطلوب است پیشامد آن که سکه رو یا تاس ۵ بیاید . (۰/۷۵نمره)

(سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۹۲)

تمرین :

۱۱) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم . مطلوب است پیشامد آن که در آن تاس زوج یا سکه پشت بیاید .

(۰/۷۵نمره)　　　(سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۱)

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

۱۲) خانواده ای دارای ۳ فرزند است . اگر A پیشامد هم جنس بودن دو فرزند اول و B پیشامد وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد . آن گاه پیشامد A و B رامشخص کنید . (۰/۵نمره) (سوال ۲ نهایی شهریور ماه ۹۲)

۱۳) در فضای نمونه ای پرتاب یک تاس ، پیشامد رو شدن عددی بزرگتر از ۶ ، پیشامدی .... است . (۰/۲۵نمره)

(سوال ۱ نهایی شهریور ماه ۹۲)

اعمال روی پیشامدها

متمم یک پیشامد : اگر S فضای نمونه ای یک پدیده تصادفی و $A \subseteq S$ پیشامدی در این فضای نمونه ای باشد ، متمم پیشامد A را با A' نمایش می دهیم .

نکته : نتایج زیر از تعریف بالا ، حاصل می شوند .

الف) $A \cup A' = S$ ب) $A \cap A' = \phi$ ج) $n(A') = n(S) - n(A)$

اجتماع دو پیشامد :

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند ، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دورخ دهند .

اشتراک دو پیشامد :

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند ، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند .

تفاضل دو پیشامد :

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند ، پیشامد $A - B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد .

مثال ۷

۱) اگر $A \subseteq S$ و A' متمم A باشد ، آن گاه $A \cup A' =$ .... و $A \cap A' =$ .... (۰/۵نمره)

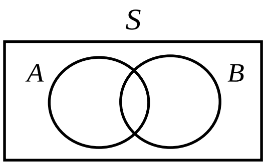
(سوال ۲ نهایی شهریور ماه ۹۰)

۲) در پرتاب یک تاس دو پیشامد متمم تعریف کنید .

۳) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید . (۰/۲۵نمره) (سوال ۱ نهایی شهریور ماه ۹۲)

اگر A' متمم پیشامد A باشد ، آن گاه A' زمانی رخ می دهد که A رخ ندهد .

۴) با توجه به شکل زیر، پیشامد $(A \cap B)'$ را هاشور بزنید. (۰/۵ نمره) (سوال ۲ نهایی دی ماه ۹۳)



پیشامدهای ناسازگار :

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \cap B = \phi$، در این صورت آن ها را دو پیشامد ناسازگار می نامیم .

در واقع اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند ، امکان رخ دادن هم زمان آن ها وجود ندارد .

نمونه :

۱) در پرتاب ۲ تاس ، (یا پرتاب متوالی ۲ بار برای یک تاس) پیشامدهای A و B که پیشامدهای زیر هستند :

پیشامد آن که عدد رو شده ۴ باشد = A و عدد رو شده اول باشد = B دو پیشامد ناساز گار است .

۲) در پرتاب یک سکه ، امکان رو آمدن وپشت آمدن سکه به طور همزمان وجود ندارد . لذا دو پیشامد رو آمدن وپشت آمدن ، ناسازگارند .

۳) در تولد یک نوزاد ، پسر بودن یا دختر بودن دو پیشامد ناسازگارند .

مثال ۸

۱) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \cap B = \phi$،در این صورت A و B را دو پیشامد .... می نامیم.

(۰/۲۵نمره)

(سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۹۱) و (سوال ۱ نهایی شهریور ماه ۹۱)

(سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۲) و (سوال ۲نهایی شهریور ماه ۹۰)

۲) خانواده ای دارای ۳ فرزند است .اگر A پیشامد هم جنس بودن دو فرزند اول و B پیشامد وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد ، مطلوب است : (۱/۷۵نمره) (سوال ۲ نهایی شهریور ماه ۹۲)

الف) فضای نمونه

ب) پیشامدهای A و B

ج) آیا A و B ناسازگارند ؟ چرا ؟

۳) درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. (۰/۵ نمره) (سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۹۴)

الف) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، رابطه ی $A \cap B \neq \varnothing$ برقرار است .

ب) اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ی S باشند ، پیشامد A-B زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد .

تمرین :

۱۴) ۳ سکه را با هم (یا یک سکه را سه بار) پرتاب می کنیم . مطلوب است :

الف)پیشامد A که در آن سکه اول رو بیاید .

ب) پیشامد B که در آن دو سکه پشت بیاید .

ج) پیشامد A'

د) آیا دو پیشامد A' و B ناسازگارند ؟ چرا ؟

احتمال

تعریف احتمال :

اندازه ی شانس وقوع یک پیشامد ، احتمال رخداد آن پیشامد خواهد بود .

احتمال رخداد پیشامد تصادفی A در فضای نمونه S ، به صورت زیر تعریف می شود :

فرمول احتمال :

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد A}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}$$

نکته : ۱) احتمال رخداد هر پیشامدی (به طور مثال A) حداقل برابر صفر و حداکثر برابر یک است . $0 \le p(A) \le 1$

۲) احتمال رخداد پیشامد نشدنی برابر صفر است . $p(\phi)=۰$

۳) احتمال رخداد پیشامد حتمی برابر یک است . $p(S)=۱$

قانون جمع احتمالات :

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند داریم :

اصل شمول : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

نمونه :

وقتی دو تاس پرتاب می شوند ، با چه احتمالی مجموع اعداد رو شده برابر ۷ است ؟ $n(S)=۶\times۶=۳۶$

$A=\{(۶,۱)(۱,۶)(۵,۲)(۲,۵)(۴,۳)(۳,۴)\}$ و $n(A)=۶$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

نتیجه : برای حل مسائل مربوط به احتمال ، باید تعداد اعضای فضای نمونه و پیشامد را تعیین کرده و سپس از دستور احتمال استفاده کنیم .

نمونه :

در یک کلاس ۳۰٪ دانش آموزان والیبال و ۷۰٪ فوتبال و ۹۵٪ حداقل یکی از ورزشها را انجام می دهند ، یک دانش آموز را به تصادف انتخاب می کنیم . با چه احتمالی هر دو ورزش را انجام می دهد ؟

$p(A)=۰/۳$ و $p(B)=۰/۷$ و $p(A\cup B)=۰/۹۵$

$$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)\Rightarrow p(A\cap B)=\frac{۳۰}{۱۰۰}+\frac{۷۰}{۱۰۰}-\frac{۹۵}{۱۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰}=\%۵$$

احتمال پیشامد متمم :

اگر A پیشامدی از فضای نمونه S و A' متمم آن باشد ، داریم : $p(A')=۱-p(A)$

احتمال پیشامدهای ناسازگار :

اگر A و B ناسازگار باشند و $A \cap B = \phi$ و $P(\phi) = ۰$ آن گاه داریم : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

مثال ۹

اگر $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ آن گاه $p(A \cap B) =$ .... (۰/۲۵نمره) (سوال۴ نهایی دی ماه ۹۰)

پیشامد مستقل :

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S بوده و اتفاق افتادن هر کدام تأثیری در اتفاق افتادن دیگری نداشته باشد ، این دو پیشامد را مستقل می نامیم و در صورت مستقل بودن داریم : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

نمونه : دو تاس را می ریزیم ، فرض کنید پیشامد A به صورت " پیشامد آن که تاس اول ۴ بیاید " و پیشامد B به صورت " پیشامد آن که مجموع دو تاس ۹ باشد " تعریف شده باشد . مستقل بودن یا نبودن A و B را هم از طریق تعریف و هم با استفاده از تساوی $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ بررسی کنید.

حل : واضح است که اگر تاس اول ۴ نیاید (A رخ ندهد) و مثلا ۱ یا ۲ یا ۳ بیاید ، چون تاس دوم حداکثر ۶ هم که بیاید مجموع دو تاس ۹ نخواهد شد پس عدم رخداد A روی B اثر دارد پس A و B مستقل نیستند ، واما به کمک فرمول :

$$\left.\begin{array}{l} A = \{(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶)\} \Rightarrow p(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶} \\ B = \{(۶,۳)(۳,۶)(۵,۴)(۴,۵)\} \Rightarrow p(B) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹} \\ A \cap B = \{(۴,۵)\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{۱}{۳۶} \end{array}\right\} \Rightarrow p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$$

لذا A و B مستقل نیستند

مثال ۱۰

سوال قبل را برای دو پیشامد A و B حل کنید .

A = تاس اول ۴ بیاید

B = مجموع دو تاس ۷ باشد

نکته : برای بررسی مستقل بودن یا نبودن یک پیشامد فقط و منحصرا از قانون $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ استفاده می کنیم .

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

مثال ۱۱

سکه سالمی را سه بار پرتاب می کنیم ، اگر A پیشامد برآمدهایی باشد که در آن دومین پرتاب " رو " است و B پیشامد برآمدهایی باشد که در آن فقط "دو رو" به صورت متوالی ظاهر شده است . آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند ؟ چرا ؟

(۱/۵نمره) (سوال ۲ نهایی خرداد ماه ۹۰)

تمرین :

۱۵) یک تاس و یک سکه با هم پرتاب می شوند . اگر A پیشامد آن باشد که تاس عدد فرد بیاید و B پیشامد آن باشد که در آن سکه رو وتاس عدد کوچکتر از ۵ بیاید ، آیا A و B مستقل اند ؟ چرا ؟ (۰/۵نمره) (سوال ۲ نهایی دی ماه ۹۲)

دسته بندی سوالات احتمال

دسته ی اول

احتمال پرتاب سکه و یا تولد فرزند (دو حالتی)

نکته : تعداد اعضای فضای نمونه پرتاب n سکه یا n بار پرتاب یک سکه و یا تولد n فرزند برابر با 2^n است .

مثال ۱۲

۱) سه سکه را با هم می اندازیم .فضای نمونه این آزمایش تصادفی دارای.......... عضو است.(۰/۲۵نمره)(سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۲)

۲) خانواده ای دارای ۳ فرزند است . (۲نمره) (سوال ۲ نهایی شهریور ماه ۹۱)

الف) فضای نمونه ای آن را بنویسید . ب) احتمال آن که خانواده فقط یک دختر داشته باشد را محاسبه کنید .

ج) احتمال آن که خانواده حداقل دو پسر داشته باشد را محاسبه کنید .

۳) خانواده ای دارای ۳ فرزند است. (۱/۲۵نمره) (سوال ۲ نهایی خرداد ماه ۹۴)

الف) تعداد اعضای فضای نمونه ی این آزمایش را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن فرزند سوم پسر باشد را مشخص کنید.

ج) پیشامد B که در آن حداکثر یک فرزند دختر باشد را مشخص کنید.

تمرین :

۱۶) خانواده ای دارای ۴ فرزند است . پیشامد آن که حداقل دو فرزند این خانواده پسر باشد را نوشته و احتمال آن را محاسبه کنید . (۱نمره) (سوال ۱ نهایی دی ماه ۸۹)

۱۷) ۳ سکه را با هم پرتاب می کنیم .مطلوب است احتمال اینکه :

الف) هر سه سکه رو بیاید . ب) یکی از سکه ها رو بیاید ودوتای دیگر پشت بیاید .

ج) حداقل دو تا از سکه ها پشت بیاید . د) فقط یک سکه پشت بیاید .

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

دسته ی دوم

احتمال در پرتاب تاس

نکته : ۱) در پرتاب یک تاس ، اگر یک تاس را n بار پرتاب کنیم یا اینکه n تاس را با هم بریزیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر با ۶^n خواهد بود .

۲) اگر تاسی را n بار و سکه ای را m بار پرتاب کنیم فضای نمونه برابر با $۶^n \times ۲^m$ خواهد بود .

مثال ۱۳

تاسی را ۳ بار پرتاب می کنیم . مطلوب است احتمال آن که مجموع اعداد رو شده سه تاس کوچکتر از ۵ باشد . (۱نمره)

(سوال ۴ نهایی دی ماه ۹۰)

تمرین :

۱۸) دو تاس را با هم می ریزیم . مطلوب است احتمال آن که :

الف) هر دو فرد باشند . ب) هر دو برابر باشند . ج) مجموعشان بزرگتر از ۳ باشد .

د) مجموعشان ۷ باشد . ه) حداقل یکی از آن ها ۶ بیاید .

دسته ی سوم

پرتاب تاس و سکه با هم

پرتاب تاس و سکه دو پیشامد مستقل از هم می باشند ، لذا برای حل سوالات این بخش می توان از رابطه ی زیر کمک گرفت .

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

نکته : اگر در سوالات احتمال از کلمه " یا " استفاده شود ، می توانیم از اجتماع دو پیشامد استفاده کنیم و اگر از کلمه " و " استفاده شود ، می توان آن را به اشتراک " $\cap$" تبدیل کرد .

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

مثال ۱۴

۱) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم . احتمال آن که سکه پشت یا تاس ۴ بیاید را بیابید . (۰/۵ نمره)

(سوال ۱ نهایی شهریور ماه ۹۰)

۲) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم . (۱/۵نمره) (سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۹۲)

الف) فضای نمونه این تجربه تصادفی را بنویسید .

ب) پیشامد آن که سکه رو یا تاس ۵ بیاید را مشخص کنید .

۳) یک تاس و یک سکه را با هم می اندازیم . (۱/۵نمره) (سوال ۳ نهایی دی ماه ۹۳)

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد رو شده ی تاس، عددی اول باشد را مشخص کنید.

ج) پیشامد B که در آن سکه پشت بیاید را مشخص کنید.

تمرین :

۱۹) یک تاس ویک سکه را با هم پرتاب می کنیم . (۱/۲۵نمره) (سوال ۱ نهایی دی ماه ۹۱)

الف) فضای نمونه این تجربه تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامدی را بنویسید که در آن تاس زوج یا سکه پشت بیاید .

دسته ی چهارم

احتمال ساختن یک عدد خاص یا یک کلمه خاص

برای حل سوالات مربوط به این دسته ، ابتدا با توجه به نکات گفته شده در ابتدای فصل (جایگشت ها) تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می کنیم . سپس با توجه به شرایط مسئله ، تعداد اعضای پیشامد A را نیز حساب کرده و سپس احتمال را حساب می کنیم .

نکته :

۱) شرط زوج بودن عدد ، یعنی یکان عدد باید زوج باشد .

۲) عددی مضرب ۳ است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخشپذیر باشد .

۳) عددی بر ۵ بخشپذیر است که یکان آن صفر یا ۵ باشد .

مثال ۱۵

با ارقام ۲ , ۷ , ۰ , ۸ عددی دو رقمی و بدون تکرار می نویسیم . مطلوب است :

الف) احتمال آن که عدد نوشته شده زوج باشد .

ب) احتمال آن که عدد نوشته شده زوج یا بزرگتر از ۵ باشد .

ج) احتمال آن که عدد نوشته شده مضرب ۵ باشد .

تمرین :

۲۰) با ارقام ۲ , ۴ , ۰ , ۷ , ۹ عددی ۴ رقمی می نویسیم مطلوب است احتمال آن که :

الف) عدد نوشته شده زوج یا مضرب ۵ باشد .

ب) عدد نوشته شده زوج و مضرب ۵ باشد .

دسته ی پنجم

محاسبه احتمال در جایگشت ها

تعداد حالاتی که n نفر می توانند کنار هم در یک صف یا ردیف بایستند (n شیء متمایز) برابر با $n!$ است .

مثال ۱۶

۱) ۴ برادر در یک صف کنار هم ایستاده اند .

الف) با چه احتمالی بزرگترین و کوچکترین برادر همواره کنار هم هستند .

ب) با چه احتمالی بزرگترین و کوچکترین برادردر اول و اخر صف واقع می شوند .

۲) ۵ نفر که دو نفر آنها خواهر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می ایستند، چقدر احتمال دارد : (۱نمره)

الف) دو خواهر کنار هم قرار گرفته باشند. (سوال ۳ نهایی خرداد ماه ۹۴)

ب) دو خواهر در اول و آخر صف واقع شده باشند.

دسته ی ششم

احتمال مضرب بودن یا بخشپذیری

نکته : اگر بخواهیم تعداد مضارب عددی مانند k را بیابیم (بین اعداد ۱ تا n) کافی است n را به k تقسیم کنیم ، خارج قسمت این تقسیم ، برابر با تعداد مضارب خواهد بود .

نمونه : تعداد مضارب ۲ ، بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ چند تاست ؟ ۵۰ مضرب وجود دارد $\Longrightarrow$ $\frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰$

مثال ۱۷

از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ ، عددی را انتخاب می کنیم . با چه احتمالی :

الف) مضرب ۲ است . ب) مضرب ۳ نیست .

تمرین :

۲۱) از بین اعداد ۱ تا ۲۵۰ عددی را به تصادف انتخاب می کنیم . با چه احتمالی :

الف) عدد انتخاب شده مضرب ۳ است . ب) مضرب ۵ نیست .

دسته ی هفتم

احتمال تولد

تعداد اعضای فضای نمونه ای برای n نفر در ماه های سال برابر ۱۲^{n} و برای روزهای سال برابر ۳۶۵^{n} است .

مثال ۱۸

۱) چقدر احتمال دارد در یک تیم والیبال ۶ نفره :

الف) همه در ماه خرداد متولد شده باشند .

ب) هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند .

۲) در یک کلاس ۲۵ نفره چقدر احتمال دارد که روز تولد هیچ دو نفری یکسان نباشد . (۰/۵ نمره) (سوال ۳ نهایی خرداد ماه ۹۰)

تمرین :

۲۲) چقدر احتمال در یک تیم کوهنوردی ۳ نفره : (۲۵/۰نمره) (سوال ۴ نهایی خرداد ۹۳)

الف) همه در ماه تیر متولد شده باشند .

ب) هیچ دو نفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند.

۲۳) مطلوب است احتمال آن که از میان سه نفر ، حداقل دو نفر در یک روز هفته متولد شده باشند .

دسته ی هشتم

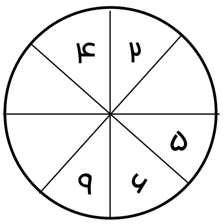
احتمال در عقربه

نکته : اگر مساحت ناحیه ها با یکدیگر برابر باشند ، فضای نمونه ای برابر تعداد ناحیه هاخواهد بود .

اگر مساحت ناحیه ها برابر نباشند ، احتمال هر ناحیه را حساب کرده و با توجه به آنچه در سوال خواسته شده است ، پاسخ می دهیم .

مثال ۱۹

۱) عقربه ای مطابق شکل رو به رو ، پس از به حرکت در آمدن روی یکی از ۸ ناحیه ی شکل می ایستد و عددی را نشان می دهد . چقدر احتمال دارد که :

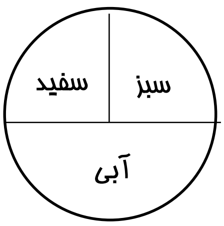


الف) عقربه عددی اول را نشان دهد .

ب) عقربه عددی اول یا فرد را نشان دهد .

ج) عقربه روی مضرب ۳ بایستد .

۲) در دستگاه مقابل عقربه ای را می چرخانیم . مطلوب است احتمال اینکه :



الف) عقربه در ناحیه سفید بایستد .

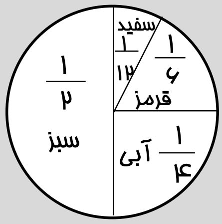
ب) عقربه در ناحیه سفید یا سبز بایستد .

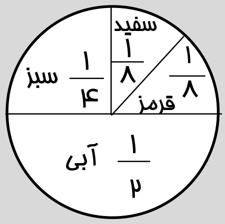
تمرین :

۲۴) در دستگاههای مقابل دو عقربه را با هم می چرخانیم . احتمال اینکه :

الف) هر دو عقربه در ناحیه سفید بایستد چقدر است .

ب) احتمال اینکه هر دو عقربه در قسمت های همرنگ بایستد چقدر است .





دسته ی نهم

احتمال انتخاب از یک ظرف (یک جعبه یا یک گروه)

یاد آوری : می دانیم که تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء به طوری که ترتیب انتخاب مهم نباشد برابر است با $\binom{n}{r}$

و داریم :

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

در مسائل دسته ی نهم ، سه حالت انتخاب داریم که ممکن است در مسائل از ما بخواهند :

حالت اول :

انتخاب r شیء از n شیء که برابر است با : $\binom{n}{r}$

نمونه :

می خواهیم از بین ۶ نفر کارمند ، ۲ نفر را به عنوان سرپرست انتخاب کنیم . این کار به چند طریق امکان پذیر است ؟

حل :

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!۴!}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$

حالت دوم :

انتخاب r شیء ، که یکی را پس از دیگری انتخاب می کنیم و بدون جایگذاری این کار را انجام می دهیم .

نمونه :

می خواهیم ۲ مهره را از بین ۶ مهره بدون جایگذاری و یکی پس از دیگری انتخاب کنیم . این کار به چند طریق امکان پذیر است ؟ حل : $\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۱}=۳۰$

حالت سوم :

انتخاب r شیء یکی پس از دیگری و با جایگذاری از بین n شیء

نمونه :

می خواهیم ۲ مهره از بین ۶ مهره انتخاب کنیم ، به این صورت که پس از انتخاب مهره اول ، دوباره آن را به جعبه مهره ها باز می گردانیم . این کار به چند طریق امکان پذیر است ؟ حل : $\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۱}=۳۶$

مثال ۲۰

۱) از جعبه ای شامل ۴ مهره سفید ، ۳مهره سبز و ۲مهره سیاه ، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم . مطلوب است احتمال اینکه : (۲نمره) (سوال ۲ نهایی خرداد ماه ۹۱)

الف) فقط ۲ مهره سفید باشد .

ب) حداکثر ۲ مهره سبز باشد .

۲) در کیسه ای ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد . از این کیسه ۲ مهره به تصادف انتخاب می کنیم ، احتمال آن که هر دو مهره همرنگ باشندرا به دست آورید . (۱/۲۵ نمره) (سوال ۲ نهایی دی ماه ۹۰)

۳) از جعبه ای که حاوی ۱۰ سیب سالم و ۴ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف بر می داریم. مطلوب است احتمال آنکه : (۱/۵نمره) (سوال ۴ نهایی دی ماه ۹۳)

الف) هرسه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب سالم و یکی خراب باشد.

ج) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های خراب بیشتر باشد.

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

تمرین :

۲۵) برای تشکیل تیمی ، ۵ دانش آموز سال سوم و ۴ دانش آموز سال اول داوطلب شده اند به تصادف ۳ دانش آموز انتخاب می کنیم . احتمال آن را پیدا کنید که : (۱/۲۵ نمره) (سوال ۱ نهایی خرداد ماه ۹۰)

الف) حداکثر یک نفر سال اولی باشد .

ب) هیچ کدام از ۳ نفر دانش آموز انتخاب شده ، سال سومی نباشند .

۲۶) در جعبه ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب موجود است . ۳ لامپ به تصادف و همزمان خارج می کنیم . احتمال آن که لامپ ها از یک نوع باشند را بیابید . (۱ نمره) (سوال ۴ نهایی شهریور ماه ۹۰)

۲۷) از کیسه ای که شامل ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سبز می باشد ، ۲ مهره به تصادف انتخاب می کنیم . مطلوب است احتمال اینکه هر دو مهره همرنگ باشند . (۱/۵ نمره) (سوال ۳ نهایی شهریور ماه ۹۱)

۲۸) می خواهیم از بین ۵ مرد و ۳ زن ، کمیته ای ۳ نفره انتخاب کنیم . مطلوب است احتمال اینکه : (۱/۵ نمره)

الف) حداکثر یک مرد انتخاب شود . (سوال ۲ نهایی خرداد ماه ۹۲)

ب) هرسه مرد باشند .

۲۹) از بین ۴ دانش آموز سال سوم و ۶ دانش آموز سال دوم ف سه نفر را به تصادف انتخاب می کنیم . احتمال آن که حداکثر یک نفر سال سوم باشد چقدر است ؟ (۱ نمره) (سوال ۳ نهایی دی ماه ۹۲)

دسته ی د هم

انتخاب ظرف (گروه یا جعبه) ، سپس انتخاب مهره (عضو یا فرد)

اگر چند ظرف (یا گروه) داشته باشیم و بخواهیم ابتدا یکی از ظرف ها را انتخاب کرده سپس به انتخاب مهره اقدام نماییم ، ابتدا احتمال انتخاب ظرف را محاسبه کرده و سپس به احتمال انتخاب مهره ها بپردازیم . بهترین روش در این گونه مسائل ، نمودار درختی است .

مثال ۲۱

۱) در جعبه ی A ، ۴ مهره ی قرمز و ۳مهره ی آبی و در جعبه ی B ، ۳ مهره ی قرمز و ۲ مهره ی آبی وجود دارد.یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره به تصادف از آن جعبه خارج می کنیم . چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد. (۱/۲۵نمره) (سوال ۳ نهایی دی ماه ۸۹)

۲) در جعبه ی A ، ۵ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه و در جعبـه ی B ، ۴ مهره ی سفید و ۲ مهره ی سیاه وجـود دارد . یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره به تصادف از آن جعبه خارج می کنیم . چقدر احتمال دارد این مهره سیاه باشد . (۱/۲۵نمره) (سوال ۳ نهایی شهریور ماه ۹۰)

دسته ی یازد هم

احتمال درصدی (اعشاری)

فرمو لهای لازم در این مبحث :

اصل شمول : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

احتمال پیشامد متمم : اگر A پیشامدی از فضای نمونه ای S وA'متمم آن باشد داریم : $p(A)=1-p(A')$

مثال ۲۲

۱) احتمال آن که دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود ۰/۷ و احتمال اینکه در درس شیمی قبول شود ۰/۸ و احتمال آن که در هر دو درس قبول شود ۰/۶ است. احتمال آن که حداقل در یکی از دروس ریاضی و شیمی قبول شود چقدر است؟

(۰/۷۵ نمره) (سوال ۴ نهایی خرداد ماه ۹۰)

۲) احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود ۰/۶ و احتمال آن که علی در کنکور قبول شود ۰/۳ می باشد ، احتمال اینکه حداقل یکی از آن ها در کنکور قبول شود ، را به دست آورید . (۱ نمره) (سوال ۳ نهایی خرداد ماه ۹۱)

۳) اگر $p(A')=0/3$ و $p(B)=0/7$ و $p(A\cup B)=0/9$ آن گاه حاصل $p(A\cap B)$ را به دست آورید .

(۰/۷۵ نمره) (سوال ۴ نهایی دی ماه ۹۲)

مولف: حمید اصلانی ۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹ پرسش هرگونه سوال ریاضی @math۳۰۲۰۱۰

۴) احتمال قبولی علی در کنکور ۰/۳ و احتمال قبولی حسن در کنکور ۰/۴ است . احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شود ، چقدر است ؟ (۱ نمره) (سوال ۲ نهایی دی ماه ۹۱)

۵) احتمال آن که شخص A در آزمون رانندگی قبول شود ۰/۷ و احتمال اینکه شخص B در آزمون رانندگی قبول شود ۰/۳ است . احتمال آن که حداقل یکی از آن ها در آزمون رانندگی قبول شود را به دست آورید . (سوال ۶ مجموعه مدارس دانش)

تمرین :

۳۰) احتمال قبولی علی و محمد در المپیاد زیست شناسی به ترتیب ۰/۸۰ و۰/۶۰ است . احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید . (۱ نمره) (سوال ۳ نهایی خرداد ماه ۹۲)

الف) هر دوی آن ها در المپیاد قبول شوند .

ب) حداقل یکی از ان ها در المپیاد قبول شود .

۳۱) احتمال آن که دانش آموزی در درس ریاضی قبول نشود ۰/۴ و احتمال اینکه در درس فیزیک قبول شود ۰/۷ و احتمال آن که در هر دو درس قبول شود ۰/۵ است . احتمال آن که حداقل در یکی از دروس ریاضی و فیزیک قبول شود چقدر است ؟ (۱/۲۵ نمره) (سوال ۲ نهایی دی ماه ۸۹)

۳۲) احتمال اینکه شخصی گروه خونی B^+ داشته باشد ۳۰ ٪ است و احتمال اینکه او ناراحتی کلیه داشته باشد ۱۵ ٪ است.

چقدر احتمال دارد : (۱/۲۵نمره) (سوال ۴ نهایی خرداد ماه ۹۴)

الف) این شخص گروه خونی B^+ و ناراحتی کلیه داشته باشد .

ب) این شخص گروه خونی B^+ یا ناراحتی کلیه داشته باشد .