فصل ۱

درس‌نامه

در زندگی روزمره، از کلماتی نظیر دسته، گروه، مجموعه و ... برای مشخص کردن اشیاء، افراد و ... خاصی که دارای ویژگی مشخصی هستند استفاده می‌کنیم.

در ریاضیات از مجموعه برای بیان اشیاء مشخص و متمایز استفاده می‌کنیم.

نکته ۱

همه‌ی افراد از یک عبارت معرفی کننده مجموعه باید برداشت یکسانی داشته باشند، در غیر این صورت این عبارت، معرف یک مجموعه در ریاضیات نمی‌باشد.

مثال ۱

مجموعه‌ی «حروف سه نقطه فارسی» بیان کننده‌ی یک مجموعه از نظر ریاضی است، که عبارتند از حروف «پ، ث، چ، ژ، ش».

مجموعه‌ی «انسان‌های باهوش» معرف یک مجموعه نیست، زیرا هر کس معیار متفاوتی از باهوش بودن دارد.

قرارداد. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A، B، C و ... نشان می‌دهند.

اشیائی که ویژگی مورد نظر مجموعه را دارا هستند، «عضو» مجموعه می‌نامند. از نماد «$\in$» برای عضو بودن و از نماد «$\notin$» برای عضو نبودن استفاده می‌کنیم.

توجه

اعضای یک مجموعه ممکن است ویژگی خاصی نداشته باشند، مثلاً $T = \{\Delta, ۳, \text{خورشید}\}$ یک مجموعه است و $\Delta \in T$، $۳ \in T$ و $\text{خورشید} \in T$.

مثال ۲

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج یک‌رقمی عبارت است از:

$$A = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$$

۴ عضو این مجموعه است و می‌نویسیم «$۴ \in A$»، ۵ عضو این مجموعه نیست و می‌نویسیم «$۵ \notin A$».

توجه

۱. در یک مجموعه ترتیب نوشتن عضوها اهمیتی ندارد و تغییر در ترتیب نوشتن عضو باعث تغییر مجموعه نمی‌شود.

۲. تکراری نوشتن یک یا چند عضو در مجموعه باعث ایجاد مجموعه‌ی جدید نمی‌شود.

مثال ۳

۱. دو مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۲,۵,۱,۴,۳\}$ مشخص کننده‌ی یک مجموعه هستند.

۲. مجموعه‌های $A=\{۱,۲,(-۱)^۲,\frac{۳}{۳},\frac{۶}{۳}\}$ یک مجموعه‌ی ۲عضوی است. این مجموعه را می‌توان به صورت $A=\{۱,۲\}$ نیز نوشت، زیرا:

$$\frac{۳}{۳}=(-۱)^۲=۱\quad,\quad\frac{۶}{۳}=۲$$

نکته ۲

وقتی می‌گوییم یک شیئی عضو یک مجموعه است، باید آن شئ یا یک شئ مساوی با آن، عیناً بدون کاستی و یا اضافه‌ای عضو آن مجموعه باشد.

مثال ۴

با توجه به مجموعه‌ی $K=\{\frac{۲}{۵},-۱,\frac{۴}{۷},\sqrt{۴}\}$، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

آ. $۲\in A$ ب. $-۲\in A$ پ. $۰/۴\notin A$

ت. $\sqrt{۱}\in A$ ث. $\frac{۳}{-۳}\in A$ ج. $(-۱)^۲\notin A$

پاسخ.

آ. $۲\in A$ صحیح است، زیرا $۲=\sqrt{۴}\in A$.

ب. $-۲\in A$ صحیح نیست، زیرا چنین عضوی در مجموعه‌ی A وجود ندارد.

پ. $۰/۴\notin A$ صحیح نیست، زیرا $۰/۴=\frac{۲}{۵}\in A$.

ت. $\sqrt{۱}\in A$ صحیح نیست، زیرا $\sqrt{۱}=۱$ و $۱\notin A$.

ث. $\frac{۳}{-۳}\in A$ صحیح است، زیرا $\frac{۳}{-۳}=-۱\in A$.

ج. $(-۱)^۲\notin A$ صحیح است، زیرا چنین عضوی در مجموعه‌ی A وجود ندارد.

مثال ۵

مجموعه‌ی $S=\{\{۱,۲\},۱,۳\}$ یک مجموعه‌ی سه‌عضوی است و اعضای آن عبارتند از:

$$۱\in S\ ,\ ۳\in S\ ,\ \{۱,۲\}\in S$$

توجه کنیم که طبق نکته‌ی (۲) $۲\notin S$.

مجموعه‌های خاص

در ریاضیات مجموعه‌هایی وجود دارند که به دلیل پرکاربرد بودن آن‌ها، هر کدام یک حرف لاتین اختصاصی ثابت دارند.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی : $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$

مجموعه‌ی اعداد حسابی : $\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\}$

مجموعه‌ی اعداد صحیح : $\mathbb{Z} = \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج : $\mathbb{E} = \{۲, ۴, ۶, \cdots\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد : $\mathbb{O} = \{۱, ۳, ۵, \cdots\}$

مجموعه‌ی اعداد گویا : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}\ ,\ b \neq ۰\}$

مجموعه‌ی اعداد گنگ : $\mathbb{Q}^c$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی : $\mathbb{R}$

نمایش مجموعه‌ها

مجموعه‌ها را می‌توان به یک یا چند تا از روش‌های زیر نمایش داد:

آ. کلامی:

در این شیوه با بیان ویژگی‌های مشترک اعضای مجموعه به زبان معیار (فارسی، عربی، انگلیسی، ...) مجموعه‌ی مورد نظر را معرفی می‌کنند.

مثال ۶

$A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ را می‌توان به صورت کلامی «مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک‌رقمی فرد» بیان کرد.

ب. نوشتن اعضا:

در این روش عضوهای مجموعه را بین دو علامت { } قرار داده و هر دو عضو را به وسیله‌ی علامت «،» یا «و» جدا می‌کنند.

مثال ۷

مجموعه‌ی اعداد اول یک‌رقمی را به صورت $B = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$ نمایش می‌دهند.

نکته ۳

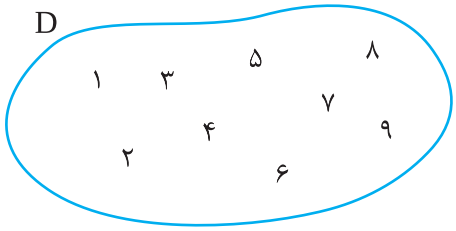
در مجموعه‌هایی که اعضای مجموعه را بتوان با الگویی خاص به ترتیب نوشت، پس از چند جمله که مشخص کننده‌ی الگو است، نماد « ... » را استفاده می‌کنیم.

مثال ۸ مجموعه‌ی $D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ را می‌توان به صورت $D = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۹\}$ نمایش داد.

پ. نمایش هندسی یا نمودار ون:

در این شیوه همه‌ی اعضای مجموعه را در داخل یک منحنی بسته یا یک خط شکسته‌ی بسته قرار می‌دهند.

مثال ۹ مجموعه‌ی D در مثال ۸ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:



ت. نمادین (نمایش با نمادهای ریاضی):

در این شیوه به کمک یک یا چند متغیر و ارتباط ریاضی بین متغیرها اعضای مجموعه را مشخص می‌کنیم.

مثال ۱۰ مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد کوچک‌تر از ۲۰ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$C = \{۲n - ۱ | n \in \mathbb{N} , n \leq ۱۰\}$$

معمولاً می‌توان مجموعه‌ها را به صورت نمادین با صورت‌های مختلفی نمایش داد، مثال اخیر به صورت زیر نیز بیان می‌شود:

$$C = \{۲n + ۱ | n \in \mathbb{W} , n \leq ۹\}$$

در ساخت برخی مجموعه‌ها، از مجموعه‌های دیگر کمک می‌گیریم، مثلاً برای ساخت مجموعه اعداد طبیعی زوج می‌توان از مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمک بگیریم:

$$E = \{۲n | n \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی را مولد مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج می‌گویند.

نکته ۴

در نوشتن عضوهای یک مجموعه که به صورت نمادهای ریاضی معرفی شده است، باید مراحل زیر را انجام دهیم.

۱. چنین مجموعه‌هایی یک مجموعه‌ی مولد دارند، که ابتدا باید آن را بشناسیم.

۲. با جایگذاری عضوهای مجموعه‌ی مولد، در رابطه‌ی جبری این مجموعه اعضای آن را مشخص کنیم.

مثال ۱۱

مجموعه‌ی $V = \{3x - 2 | x \in \mathbb{Z} \, , \, -3 < x < 2\}$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

پاسخ. مجموعه‌ی مولد این مجموعه، عبارت است از $\{-2, -1, 0, 1\}$، بنابراین اگر این اعداد را در رابطه‌ی جبری $3x - 2$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$3 \times (-1) - 2 = -5 \qquad 3 \times (-2) - 2 = -8$$
$$3 \times 1 - 2 = 1 \qquad 3 \times (0) - 2 = -2$$
$$\Rightarrow \; V = \{-8, -5, -2, 1\}$$

مجموعه‌ی تهی

برخی از مجموعه‌هایی که به صورت کلامی یا ریاضی معرفی می‌کنیم هیچ عضوی ندارند. چنین مجموعه‌ای را تهی می‌نامیم و با نماد ϕ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۲

مجموعه‌ی اعداد اول زوج دورقمی، مجموعه‌ی تهی را مشخص می‌کند، زیرا تنها عدد اول زوج ۲ است که یک‌رقمی است.

مثال ۱۳

مجموعه‌ی $A = \{x | \, x \in \mathbb{N} \, , \, 5 < x < 6\}$ نیز معرف یک مجموعه‌ی تهی است.

زیرمجموعه

اگر همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A، عضو مجموعه‌ی B نیز باشند، در این صورت A زیرمجموعه‌ی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$.

مثال ۱۴

مجموعه‌ی $C = \{1, 2\}$، زیرمجموعه‌ی، مجموعه‌ی $B = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ می‌باشد، در حالی که $D = \{2, 3, 4\}$ زیرمجموعه‌ی B نیست زیرا $3 \in D$ است در حالی که $3 \notin B$ یا $4 \in D$ در حالی که $4 \notin B$.

نکته ۵

۱. مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها است.
۲. هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است.

نکته ۶

تعداد عضوهای یک مجموعه:

تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را عدد اصلی A می‌نامیم و آن را به صورت $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۵

مجموعه‌ی $A = \{\{۱, ۲, ۳, \cdots\}\}$ چند عضو دارد.

پاسخ. **یک عضو دارد و $n(A) = ۱$.**

اصل ضرب

اگر آزمایشی دارای دو بخش باشد، که بخش اول به m حالت و بخش دوم به n حالت صورت پذیرد، این آزمایش به $m \times n$ حالت انجام می‌پذیرد.

مثال ۱۶

علی سه بلوز به رنگ‌های آبی، قرمز و سفید دارد. او ۲ شلوار نیز به رنگ‌های آبی و مشکی دارد. علی برای حضور در یک مهمانی به چند طریق می‌تواند از این لباس‌ها استفاده کند.

پاسخ. **طبق اصل ضرب داریم:**

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \text{حالت‌های بلوز} \times \text{حالت‌های شلوار} = ۳ \times ۲ = ۶$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی nعضوی

اگر مجموعه‌ی nعضوی A به صورت

$$A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\} \quad (\text{اشیاء متمایز هستند } a_n \text{ ، ... ،} a_۲ \text{ ،} a_۱)$$

باشد، در تشکیل هر زیرمجموعه برای هر عضو دو حالت وجود دارد:

۱. **عضو زیر مجموعه است.**

۲. **عضو زیرمجموعه نیست.**

عضوها	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$\cdots$	a_n
حالتها	۲	۲	۲	$\cdots$	۲

طبق اصل ضرب، تعداد کل حالت‌های عضویت n شئ، یعنی تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $۲ \times ۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲ = ۲^n$ است.

نکته ۷

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی nعضوی که p عضو مشخص عضو زیرمجموعه‌ها باشد و q عضو مشخص عضو زیرمجموعه‌ها نباشد، برابر است با $۲^{n-(p+q)}$.

مثال ۱۷

مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۹\}$ چند زیرمجموعه دارد که شامل ۲ و ۴ باشد ولی ۳ و ۹ عضو آن‌ها نباشد.

پاسخ. طبق نکته‌ی (۷) تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با: $۲^{۹-(۲+۲)} = ۲^{۵} = ۳۲$.

نکته ۸

۱. تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی و $n-۱$ عضوی یک مجموعه‌ی nعضوی برابر n است.

۲. تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی و $n-۲$ عضوی یک مجموعه‌ی nعضوی برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است.

۳. تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی و $n-k$ عضوی یک مجموعه‌ی nعضوی با هم برابر است.

مثال ۱۸

در یک مجموعه‌ی nعضوی تعداد زیرمجموعه‌های ۷عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی برابر است. این مجموعه چند زیرمجموعه‌ی ۲عضوی دارد؟

پاسخ. چون $۲ = ۹ - ۷$ است و طبق نکته‌ی (۸) تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی برابر $n-k$ عضوی است بنابراین $n = ۹$ است.

حال طبق نکته‌ی (۸)

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی} = \frac{۹ \times ۸}{۲} = ۳۶$$

مثال ۱۹

سه مجموعه‌ی $n+۳$ عضوی، $n+۱$ عضوی و $n-۲$ عضوی روی هم ۱۶۴ زیرمجموعه دارند. مقدار n چقدر است؟

پاسخ.

$$۲^{n+۳} + ۲^{n+۱} + ۲^{n-۲} = ۱۶۴ \Rightarrow (۲^{n-۲})(۲^{۵} + ۲^{۳} + ۱) = ۱۶۴$$

$$\Rightarrow ۲^{n-۲} \times (۳۲ + ۸ + ۱) = ۱۶۴ \Rightarrow ۲^{n-۲} \times ۴۱ = ۱۶۴$$

$$\Rightarrow ۲^{n-۲} = ۴ = ۲^{۲} \Rightarrow n = ۴$$

زیرمجموعه‌ی محض

همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه، به جز خود مجموعه را زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه می‌نامند.

نکته ۹

تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی nعضوی برابر $2^n - 1$ است.

مجموعه‌ی توانی یک مجموعه

اگر همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند A را در یک مجموعه‌ی جدید قرار دهیم، آن را مجموعه‌ی توانی A نامیده و با $p(A)$ نشان می‌دهند.

مثال ۲۰

اگر A یک مجموعه‌ی ۳عضوی باشد، مقدار $n(p(p(A)))$ چقدر است؟

پاسخ. چون $n(A) = 3$، بنابراین $n(p(A)) = 2^3 = 8$ است. در نتیجه اگر مجموعه‌ی توانی یک مجموعه‌ی ۸عضوی را در نظر بگیریم:

$$n(p(p(A))) = 2^8 = 256$$

در واقع $n(p(p(A))) = 2^{2^3}$.

نکته ۱۰

$n\big(\underbrace{p(p(\cdots p}_{k\text{تا}}(A)\cdots))\big) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{n(A)}}}}}}$. تعداد ۲ها نیز برابر تعداد pها می‌باشد.

مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی

اگر تعداد اعضای یک مجموعه را بتوان شمرد، آن را متناهی و در غیر این صورت آن را نامتناهی می‌نامند.

مثال ۲۱

مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$، $B = \{a, b, c\}$، ϕ و ... متناهی هستند و مجموعه‌های عددهای طبیعی، عددهای صحیح، عددهای گویا و ... نامتناهی هستند.

اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، اجتماع دو مجموعه A و B، مجموعه‌ای است که شامل همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A و B است و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهند.

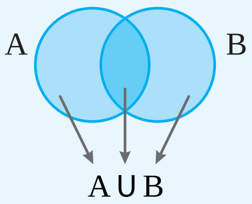
$A \cup B$ را با نماد ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$A \cup B = \{x |\ x \in A \ \text{یا}\ x \in B\}$$

مثال ۲۲

اگر $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ **و** $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ **باشد، آن‌گاه** $A\cup B=\{۲,۴,۶,۸,۱,۳,۵\}$.

نکته ۱۱



در نمودار ون برای نشان دادن $A\cup B$، هر دو مجموعه را هاشور می‌زنیم، ناحیه‌ای که حداقل یک بار هاشور خورده است برابر $A\cup B$ می‌باشد.

نکته ۱۲

در مورد اجتماع مجموعه‌ها نکات زیر همواره برقرار است:

۱. $A\cup\phi=A$

۲. $A\cup A=A$

۳. اگر $A\subseteq B$ باشد، در این صورت اجتماع این دو مجموعه برابر مجموعه‌ی بزرگ‌تر است. $A\cup B=B$.

۴. اگر $A\cup B=B$ باشد، در این صورت $A\subseteq B$.

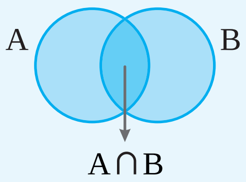
اشتراک دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، اشتراک دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای است که شامل همه‌ی عضوهایی است که هم عضو A و هم عضو B باشد و با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهند.

$A\cap B$ را با نماد ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$A\cap B=\{x|x\in A\ ,\ x\in B\}$$

نکته ۱۳



در نمودار ون برای نشان دادن $A\cap B$، هر دو مجموعه را هاشور می‌زنیم، ناحیه‌ای که دو بار هاشور می‌خورد برابر $A\cap B$ است.

نکته ۱۴

در مورد اشتراک مجموعه‌ها، نکات زیر برقرار است:

۱. $A\cap\phi=\phi$

۲. $A\cap A=A$

۳. اگر $A\subseteq B$ باشد، در این صورت اشتراک این دو مجموعه برابر مجموعه‌ی کوچک‌تر است. $A\cap B=A$.

۴. اگر $A\cap B=A$ باشد، در این صورت $A\subseteq B$.

مثال ۲۳

اگر $A_۱ = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۲۰\}$، $A_۲ = \{۲, ۳, ۴, \cdots, ۲۱\}$، $A_۳ = \{۳, ۴, ۵, \cdots, ۲۲\}$ **و** $\ldots$ **باشد تساوی‌های زیر برقرار است:**

$$A_۱ \cap A_۲ = \{۲, ۳, ۴, \cdots, ۲۰\}$$

$$A_۱ \cap A_{۲۰} = \{۲۰\}$$

$$A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_{۱۳۹۴} = \phi$$

هر یک از مجموعه‌های A_k دارای ۲۰ عضو است یعنی

$$A_k = \{k+۰, k+۱, k+۲, \cdots, k+۱۹\}$$

$$A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_{۱۳۹۴}$$

$$= \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۲۰\} \cup \{۲, ۳, \cdots, ۲۱\} \cup \cdots \{۱۳۹۴, ۱۳۹۴+۱, \cdots, ۱۳۹۴+۱۹\}$$

$$= \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۳۹۴, ۱۳۹۵, \cdots, ۱۴۱۳\}$$

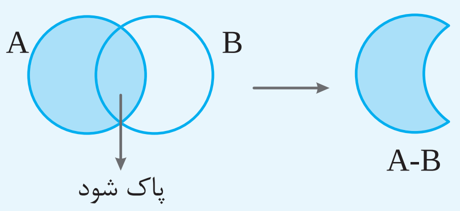
تفاضل دو مجموعه

$A-B$ مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی از مجموعه‌ی A که عضو مجموعه‌ی B نباشد، نمایش ریاضی تفاضل $A-B$ به صورت زیر است:

$$A - B = \{x | x \in A \ , \ x \notin B\}$$

نکته ۱۵

برای نمایش نمودار ون $A-B$، ابتدا نمودار ون A را هاشور می‌زنیم و سپس مجموعه‌ی B را کاملاً پاک می‌کنیم، قسمت‌های باقی‌مانده A برابر $A-B$ است.



نکته ۱۶

اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، نکات زیر در مورد تفاضل دو مجموعه برقرار است:

۱. $A - \phi = A \ , \ \phi - A = \phi$

۲. $A - B \subseteq A$

۳. $A - B = A - (A \cap B) \ , \ A - B = (A \cup B) - B$

۴. اگر $A - B \subseteq B$ باشد، در این صورت $A - B = \phi$.

۵. اگر $A - B = \phi$ باشد، در این صورت $A \subseteq B$ و برعکس اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A - B = \phi$ است.

۶. اگر $A \cap B = \phi$ باشد، در این صورت $A - B = A$ و $B - A = B$.

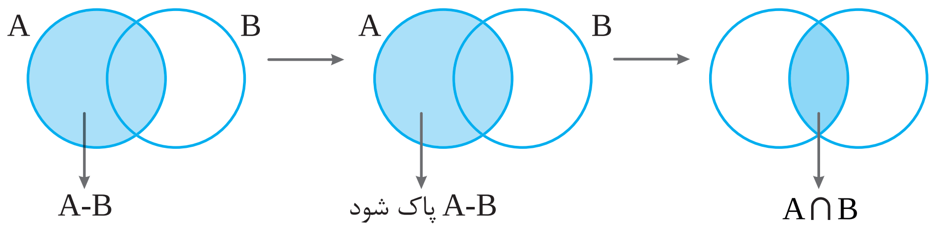
مثال ۲۴

طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

۱) $A - (A - B) =$ ۲) $(A - B) - B =$

پاسخ.

۱) $A - (A - B) = A \cap B$



چون $(A - B) \cap B = \phi$ است، بنابراین طبق نکته‌ی (۱۶) داریم $(A - B) - B = A - B$.

دو مجموعه‌ی جدا از هم

اگر A و B دو مجموعه باشند که $A \cap B = \phi$، در این صورت A و B را جدا از هم می‌نامند.

نکته ۱۷

اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، در این صورت

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

مثال ۲۵

اگر $A = \{۴, ۶, ۸\}$ و $B = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$ باشد، در این صورت $n(A \cup B) = ۷$ چون $A \cap B = \phi$، پس A **و B جدا از هم هستند و طبق نکته‌ی (۱۷)**

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = ۳ + ۴ = ۷$$

نکته ۱۸

اگر A، B و C سه مجموعه‌ی دلخواه باشند، در این صورت

۱) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

۲) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

مثال ۲۶

از میان دانش‌آموزان یک کلاس، ۱۲ نفر در کلاس تقویتی ریاضی و ۱۰ نفر در کلاس تقویتی علوم ثبت‌نام کرده‌اند. اگر ۶ نفر در هر دو کلاس ثبت‌نام کرده باشند، چند دانش‌آموز این کلاس در کلاس تقویتی ثبت‌نام کرده است؟

پاسخ. **اگر A، دانش‌آموزان ثبت‌نام کرده در ریاضی و B دانش‌آموزان ثبت‌نام کرده در علوم باشند:**

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲+۱۰-۶=۱۶$$

فضای نمونه‌ای

در یک آزمایش، مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را فضای نمونه‌ای می‌نامند.

مثال ۲۷

فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس برابر است با: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

پیشامد

هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد می‌گوییم.

فرمول احتمال

اگر $A\subseteq S$، یک پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال پیشامد A را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۲۸

در پرتاب یک تاس احتمال رو شدن عدد اول برابر $\frac{۱}{۲}$ است، زیرا اگر A پیشامد عدد اول باشد، در این صورت $A=\{۲,۳,۵\}$.

$$A=\{۲,۳,۵\}\ \Rightarrow\ n(A)=۳\ ,\ n(S)=۶\ \Rightarrow\ p(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

در سؤالات مربوط به احتمال، معمولاً در صورتی که نوشتن مجموعه‌ی فضای نمونه‌ای یا پیشامد زمان‌بر باشد، فقط کافی است تعداد اعضای آن‌ها را تشخیص دهیم. اصل ضرب معمولاً مفید می‌باشد.

مثال ۲۹

با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ یک عدد دورقمی (بدون تکرار ارقام) ساخته‌ایم. احتمال این‌که این عدد زوج باشد، چقدر است؟

پاسخ. **فضای نمونه‌ای کل اعداد دورقمی در این مثال، طبق اصل ضرب دارای $n(S) = ۵ \times ۴ = ۲۰$ عضو است. زیرا برای انتخاب رقم اول ۵ عدد در اختیار داریم، اما دومین رقم به دلیل غیرتکراری بودن فقط دارای ۴ انتخاب است.**

اگر A پیشامد زوج بودن عدد مورد نظر باشد، در این صورت $n(A) = ۴ \times ۳ = ۱۲$ است، زیرا ابتدا رقم یکان که ۳ انتخاب دارد را تعیین می‌کنیم (۲، ۴ و ۶) برای رقم دهگان علاوه بر این دو عدد باقی‌مانده (دو عدد از بین (۲، ۴ و ۶) اعداد ۳ و ۵ را نیز می‌توان انتخاب کرد) پس

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$$

نکته ۱۹

اگر A و B دو پیشامد باشند که وقوع یکی از آن‌ها تأثیری در دیگری نداشته باشد، در این صورت

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

مثال ۳۰

احتمال این‌که دانش‌آموزی در درس ریاضی نمره‌ی ۲۰ بگیرد برابر ۰/۲ و احتمال این‌که در درس علوم نمره‌ی ۲۰ بگیرد ۰/۳ است. احتمال این‌که این دانش‌آموز در هر دو درس نمره‌ی ۲۰ بگیرد چقدر است؟

پاسخ. **چون ۲۰ گرفتن در نمره‌ی درس‌ها ارتباطی به یکدیگر ندارد بنابراین طبق نکته‌ی (۱۹)**

$$p(A \cap B) = p(A).p(B) = ۰/۲ \times ۰/۳ = ۰/۰۶$$

A: پیشامد ۲۰ گرفتن در درس ریاضی و B: پیشامد ۲۰ گرفتن در درس علوم است.

نکته ۲۰

اگر A و B دو پیشامد باشد، $A \cup B$ پیشامد وقوع حداقل یکی از این دو پیشامد است و احتمال وقوع آن برابر است با:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

مثال ۳۱ با توجه به مثال ۳۰ احتمال این‌که دانش‌آموزی حداقل در یکی از این دو درس نمره‌ی ۲۰ بگیرد چقدر است؟

پاسخ. طبق نکته‌ی (۲۰) احتمال این‌که حداقل در یکی از دو درس نمره‌ی ۲۰ بگیرد برابر است با:

$$p(A\cup B)=۰/۲+۰/۳-۰/۰۶=\frac{۵}{۱۰}-\frac{۶}{۱۰۰}=\frac{۴۴}{۱۰۰}=۰/۴۴$$

مثال ۳۲ کیسه‌ی A دارای ۳ مهره‌ی سبز و ۵ مهره‌ی قرمز است. کیسه‌ی B دارای ۵ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز می‌باشد. اگر از هر کیسه یک مهره انتخاب کنیم:

آ. احتمال این‌که هر دو مهره سبز باشد چقدر است؟

ب. احتمال این‌که هر دو مهره قرمز باشد چقدر است؟

پ. احتمال این‌که این مهره‌ها هم‌رنگ باشند چقدر است؟

پاسخ. A' و B' پیشامد سبز بودن مهره‌ی انتخابی به ترتیب از کیسه‌های A و B می‌باشد. A'' و B'' پیشامد قرمز بودن مهره‌ی انتخابی، به ترتیب از کیسه‌های A و B می‌باشد.

آ. $p(B')=\frac{۵}{۷}$ ، $p(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۲}{۸}$

چون مهره‌های دو کیسه ارتباطی به هم ندارند پس طبق نکته‌ی ۱۹

$$p(A'\cap B')=p(A')\times p(B')=\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۱۵}{۵۶}$$

ب. همانند حالت (آ)

$$p(A'')=\frac{۵}{۸}\ ,\ p(B'')=\frac{۲}{۷}\ \Rightarrow\ p(A''\cap B'')=\frac{۱۰}{۵۶}$$

پ. احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره یعنی این‌که هر دو مهره سبز و یا هر دو مهره قرمز باشد، پس احتمال پیشامد $(A'\cap B')\cup(A''\cap B'')$ بنابر نکته‌ی ۲۰ برابر است با:

$$p\big((A'\cap B')\cup(A''\cap B'')\big)=p(A'\cap B')+p(A''\cap B'')=\frac{۱۵}{۵۶}+\frac{۱۰}{۵۶}=\frac{۲۵}{۵۶}$$

آزمون شماره ۱

۱ کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص کننده‌ی یک مجموعه <u>نمی‌باشد</u>؟

۱) همه‌ی مثلث‌ها با زاویه‌های مساوی
۲) بزرگ‌ترین عدد طبیعی منفی
۳) ۱۳۹۴تا شش‌ضلعی منتظم
۴) اعداد اول بزرگ‌تر از ۱۳۹۴

۲ مجموعه‌ی «مثلث‌هایی که سه ضلع برابر دارند» با کدام‌یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

۱) مثلث‌هایی که سه زاویه‌ی برابر دارند.
۲) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با طول عدد طبیعی
۳) برخی از مثلث‌های متساوی‌الساقین
۴) گزینه‌های ۱ و ۳

۳ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تک‌عضوی <u>نیست</u>؟

۱) $A = \{\{\phi\}, \phi\}$
۲) $B = \{\{\phi, \phi\}, \{\phi\}\}$
۳) $C = \{\phi\}$
۴) $D = \{\{\phi, \{\phi\}\}\}$

۴ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $A = \{\{۱, ۲\}, ۱, ۲, \{۱, ۲, ۳\}\}$ <u>نمی‌باشد</u>؟

۱) $B = \{۱, ۲\}$
۲) $C = \{۱, ۲, ۳\}$
۳) $D = \{\{۱, ۲\}\}$
۴) $E = \{\{۱, ۲\}, ۱\}$

۵ اگر $A = \{k\}$ و $B = \{۲x - ۵, ۲۵ - ۳x\}$ دو مجموعه‌ی مساوی باشند، مقدار k برابر کدام گزینه است؟

«آزمون ورودی»

۱) $\frac{۲۵}{۲}$
۲) ۷
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۵

۶ مجموعه‌ی $A = \{-۱, ۰, ۱\}$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر <u>است</u>؟

۱) $B = \{x | x \in \mathbb{Z} , x^۲ = x\}$
۲) $C = \{x | x \in N , x^۲ = x\}$
۳) $D = \{x | x \in \mathbb{Z} , x^۲ < ۲\}$
۴) $E = \{x | x \in \mathbb{Z} , x^۲ = ۱\}$

۷ مجموعه‌ی $A = \{x \in N | x(x - ۱)(x - ۲) = ۰\}$ دارای چند زیرمجموعه است؟ «آزمون ورودی»

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۸

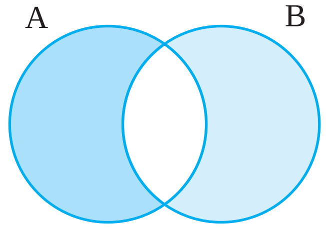
۸ اگر A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $p(A)$ مجموعه‌ی توانی A، در این صورت کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره صحیح است؟

۱) $A \subseteq p(A)$
۲) $A \in p(A)$
۳) $A \not\subseteq p(A)$
۴) هیچ‌کدام

۹ تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه‌ی $\{a, b, c, d\}$ کدام است؟ «آزمون ورودی»

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۰ کدام گزینه نمایش نمودار ون زیر نمی‌باشد؟



۱) $(A-B)\cup(B-A)$

۲) $(A\cup B)-(B\cap B)$

۳) $A\cup(B-A)$

۴) $(A-(A\cap B))\cup((A\cup B)-A)$

۱۱ اگر $A=\{x|x\in N\ ,\ x<۵\}$ و $B=\{x|x\in N\ ,\ ۲\leq x<۷\}$ باشد، مجموعه‌ی $A\cap B$ چند عضو دارد؟ «آزمون ورودی»

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۲ اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$ باشد، مجموعه‌ی $(A-B)-(B-A)$ برابر کدام‌یک از مجموعه‌های زیر است؟

۱) $\{۴\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{۳\}$ ۴) $\{-۳\}$

۱۳ اگر $A_۱=\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}$، $A_۲=\{۲,۳,۴,\cdots,۱۱\}$، $A_۳=\{۳,۴,۵,\cdots,۱۲\}$، ... باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی $A_۳\cap A_۴\cap A_۵\cap\cdots\cap A_۸$ چند عضو دارد؟ «آزمون ورودی»

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴ اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی دلخواه از اعداد طبیعی باشند، مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B\cap A))$ همواره برابر کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) ϕ

۱۵ برای دو مجموعه‌ی A و B، عبارت $(A-B)-A$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) B ۳) $B-A$ ۴) ϕ

۱۶ اگر $A=\{۱,۲,۳,\cdots,۳۰\}$، $B=\{۴n-۱|n\in A\}$ و $B\subseteq A$ باشد، مجموعه‌ی B چند عضو دارد؟ «آزمون ورودی»

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۲۹

۱۷ یک سکه را به همراه دو تاس پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۱۴ ۴) ۸

۱۸ دو وجه مکعبی سفید، دو وجه آن قرمز و دو وجه آن نیز سبز می‌باشد. این مکعب را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟ «آزمون ورودی»

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۱۹ در خانواده‌ای که چهار فرزند دارد، پیشامد «دقیقاً ۳ دختر» چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰ دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع اعداد رو شده در دو تاس برابر ۸ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۸}{۳۶}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

فصل ۲

درس اول: عددهای گویا

تعریف

اعداد گویا: مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نام‌گذاری می‌کنیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \ , \ b \neq ۰\}$$

به‌طور کلی: هر عددی که بتوان آن را به صورت کسر $\frac{a}{b}$ نوشت به طوری که صورت و مخرج آن متعلق به اعداد صحیح باشند و مخرج آن مخالف صفر باشد $(b \neq ۰)$ یک عدد گویا می‌گویند.

مثال ۱

در مجموعه‌ی مقابل، زیر اعداد گویا خط بکشید.

$$\{-\sqrt{۵}, \underline{-۲\frac{۱}{۷}}, \underline{(-۴)^۲}, \underline{۳/۵۷}, -\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \underline{\sqrt{۸۱}}, \underline{۱۰}\}$$

نکته ۱

تمام اعداد طبیعی و صحیح، گویا می‌باشند.

نوشتن چند کسر بین دو کسر گویا

همان طور که می‌دانید، بین دو عدد گویا می‌توان بی‌شمار عدد گویا نوشت، برای انجام این کار به چند روش اشاره می‌کنیم.

۱. روش هم‌مخرج کردن ۲. روش میانگین گرفتن ۳. روش ساده‌تر

۱. روش هم‌مخرج کردن

در این روش، ابتدا کسرها را هم‌مخرج کرده، سپس اعداد بین صورت را با مخرج‌های مشترک می‌نویسیم.

در مواقعی که بعد از هم‌مخرج کردن کسرها، صورت دو کسر دو عدد متوالی باشند و بین آن‌ها عددی طبیعی وجود نداشته باشد. برای به‌دست آوردن n کسر بین دو کسر، صورت و مخرج هر دو کسر را در عدد $(n+۱)$ ضرب می‌کنیم.

مثال ۲

بین دو کسر $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۵}$ سه کسر بنویسید.

پاسخ. ابتدا کسرها را هم‌مخرج می‌کنیم:

$$\frac{۳}{۵}, \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۹}{۱۵}, \frac{۱۰}{۱۵}$$

چون صورت دو کسر دو عدد متوالی است، بنابراین برای به‌دست آوردن سه کسر، باید صورت و مخرج هر دو کسر را در عدد ۴، $(۴ = ۱ + ۳)$ ضرب کنیم.

$$\frac{۹ \times ۴}{۱۵ \times ۴} = \frac{۳۶}{۶۰} < \frac{۳۷}{۶۰} < \frac{۳۸}{۶۰} < \frac{۳۹}{۶۰} < \frac{۱۰ \times ۴}{۱۵ \times ۴} = \frac{۴۰}{۶۰}$$

۲. روش میانگین گرفتن

میانگین دو کسر $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ عددی است که دقیقاً وسط دو کسر قرار دارد، پس داریم:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{۲} < \frac{c}{d}$$

برای به‌دست آوردن تعداد بیش‌تری کسر، این روش را با کسرهای جدید ادامه می‌دهیم.

مثال ۳

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۳}{۵}$، ۲ کسر بنویسید.

پاسخ.

$$\frac{۳}{۵} < \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۵} < \frac{\frac{۳}{۵} + \frac{۳}{۴}}{۲} < \frac{۳}{۴}$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۵} < \frac{\frac{۱۲+۱۵}{۲۰}}{۲} < \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۵} < \frac{۲۷}{۴۰} < \frac{۳}{۴}$$

$\frac{۲۷}{۴۰}$ کسری است که بین دو کسر داده شده قرار دارد. برای به‌دست آوردن یک کسر دیگر این کار را با $\frac{۲۷}{۴۰}$ و $\frac{۳}{۵}$ ادامه می‌دهیم:

$$\frac{۳}{۵} < \frac{۲۷}{۴۰} \Rightarrow \frac{۳}{۵} < \frac{\frac{۳}{۵} + \frac{۲۷}{۴۰}}{۲} < \frac{۲۷}{۴۰}$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۵} < \frac{\frac{۲۴+۲۷}{۴۰}}{۲} < \frac{۲۷}{۴۰}$$
$$\frac{۳}{۵} < \frac{\frac{۵۱}{۴۰}}{۲} < \frac{۲۷}{۴۰} \Rightarrow \frac{۳}{۵} < \frac{۵۱}{۸۰} < \frac{۲۷}{۴۰}$$

پس دو کسر $\frac{۲۷}{۴۰}$ و $\frac{۵۱}{۸۰}$ بین دو کسر $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ قرار دارند.

---

۳. روش ساده‌تر

به طور کلی اگر a، b، c و d چهار عدد صحیح دلخواه باشند $(b \neq ۰ \ , \ d \neq ۰)$ در این صورت داریم:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

مثال ۴

بین دو کسر $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۴}{۹}$ دو کسر بنویسید.

پاسخ.

$$\frac{۲}{۷} < \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{۲}{۷} < \frac{۲+۴}{۷+۹} < \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{۲}{۷} < \frac{۶}{۱۶} < \frac{۴}{۹}$$

$\frac{۶}{۱۶}$ کسری است که بین دو کسر داده شده قرار دارد، برای به‌دست آوردن یک کسر دیگر، این کار را با $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۶}{۱۶}$ ادامه می‌دهیم:

$$\frac{۲}{۷} < \frac{۶}{۱۶} \Rightarrow \frac{۲}{۷} < \frac{۲+۶}{۷+۱۶} < \frac{۶}{۱۶} \Rightarrow \frac{۲}{۷} < \frac{۸}{۲۳} < \frac{۶}{۱۶}$$

پس دو کسر $\frac{۶}{۱۶}$ و $\frac{۸}{۲۳}$ بین دو کسر $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۴}{۹}$ قرار دارند.

برای به‌دست آوردن تعداد بیش‌تری کسر، این روش را با کسرهای جدید ادامه می‌دهیم.

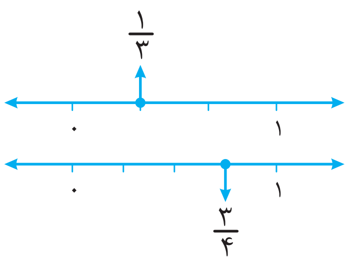
مقایسه‌ی عددهای گویا

برای مقایسه‌ی دو کسر روش‌های مختلفی وجود دارد.

آ. می‌توانیم کسرها را به صورت تقریبی بر روی محور اعداد نمایش دهیم. عدد سمت راست، بزرگ‌تر خواهد بود.

مثال ۵

دو کسر $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۳}{۴}$ را با هم مقایسه کنید. روی محور اعداد به صورت تقریبی داریم:



$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۳}{۴}$$

ب. می‌توانیم بین کسرها، مخرج مشترک گرفته و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کنیم.

مثال ۶

دو کسر $-\frac{۱}{۳}$ و $-\frac{۳}{۴}$ را با هم مقایسه کنید.

پاسخ.

$$-\frac{۱}{۳} \square -\frac{۳}{۴} \Rightarrow -\frac{۴}{۱۲} \square -\frac{۹}{۱۲} \Rightarrow -\frac{۴}{۱۲} > -\frac{۹}{۱۲}$$

پ. تبدیل کسر به عدد اعشاری

صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم و یک عدد اعشاری به‌دست می‌آید سپس آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

مثال ۷

دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۵}$ را با هم مقایسه کنید.

حل

$$\frac{۱}{۵} \square \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۰/۲ \square ۰/۷۵ \Rightarrow \frac{۱}{۵} < \frac{۳}{۴}$$

تبدیل کسر متعارفی به عدد اعشاری

با تقسیم صورت بر مخرج یک کسر می‌توان عدد اعشاری متناظر با آن را نوشت. اعداد اعشاری که از این کار به‌دست می‌آیند، به دو دسته تقسیم می‌شوند.

توجه: در تمام حالت‌ها ابتدا کسر داده شده را تا جایی که امکان دارد ساده می‌کنیم.

۱. اعداد اعشاری مختوم یا متناهی

اعدادی هستند که ارقام اعشاری آن‌ها پایان‌پذیر می‌باشند. (مانند: $۰/۷۳, ۸/۹۱۰۷, \cdots$) در مخرج این کسرها پس از ساده کردن فقط عامل‌های اول ۲ یا ۵ و یا هر دو وجود دارد:

$$\frac{۲۰}{۱۲۵} = \frac{۴}{۲۵} = \frac{۴}{۵^{۲}} = ۰/۱۶ \quad , \quad \frac{۷}{۲۰} = \frac{۷}{۲^{۲} \times ۵} = ۰/۳۵$$

۲. اعداد اعشاری متناوب

اگر در نمایش اعشاری کسری، یک یا چند رقم بعد از ممیز به طور پیوسته تا بی‌نهایت تکرار شوند. به آن عدد، عدد اعشاری متناوب گفته می‌شود.

اعداد اعشاری متناوب به دو دسته تقسیم می‌شوند:

آ. اعداد اعشاری متناوب ساده　　　**ب.** اعداد اعشاری متناوب مرکب

آ. اعداد اعشاری متناوب ساده: اعداد اعشاری هستند که ارقام اعشاری آن‌ها بلافاصله بعد از ممیز دارای رقم یا ارقامی است که پیوسته تکرار می‌شوند. مانند:

$$۰/۷۷۷۷\cdots = ۰/\overline{۷} \quad , \quad ۱/۴۱۴۱۴۱\cdots = ۱/\overline{۴۱}$$

در مخرج این کسرها، پس از ساده کردن، عامل‌های اولی به غیر از ۲ و ۵ وجود دارد. مانند:

$$\frac{۱۴}{۹} = \frac{۱۴}{۳^۲} = ۱/۵۵۵\cdots = ۱/\overline{۵}$$

ب. اعداد اعشاری متناوب مرکب: اعدادی هستند که پس از تقسیم صورت بر مخرج آن‌ها، بعد از ممیز بلافاصله دوره‌ی گردش شروع نمی‌شود، معمولاً بعد از یک یا دو رقم، دوره گردش شروع می‌شود. مانند: $۰/۸۳۳۳\cdots$ و $۰/۲۱۳۱۳\cdots$ که در اولی عدد ۸، رقم غیرمتناوب و عدد ۳، رقم دوره تناوب (یا گردش) و در دومی عدد ۲ رقم غیرمتناوب و عدد ۱۳ رقم دوره تناوب (یا گردش) می‌باشند و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$۰/۸۳۳۳\cdots = ۰/۸\overline{۳} \quad , \quad ۰/۲۱۳۱۳\cdots = ۰/۲\overline{۱۳}$$

نکته ۲

در تجزیه‌ی مخرج تمامی کسرهای بالا، علاوه بر عامل‌های اول ۲ یا ۵، ترکیبی از ۲ و یا ۵ و عامل‌های دیگر نیز وجود دارد.

تبدیل اعداد اعشاری به کسر متعارفی

۱. تبدیل عدد اعشاری مختوم به کسر متعارفی: این اعداد را همان طور که می‌خوانیم به صورت کسر می‌نویسیم.

مثلاً $۰/۵$ را می‌خوانیم (پنج دهم) و می‌نویسیم: $\frac{۵}{۱۰}$ و در حالت کلی: $\frac{\text{عدد بدون اعشار}}{۱۰^{(\text{تعداد ارقام اعشار})}}$

مثال ۸

اعداد اعشاری زیر را به کسر متعارفی تبدیل کنید.

$$۱)\ ۰/۳۲۱ = \frac{۳۲۱}{۱۰^۳} = \frac{۳۲۱}{۱۰۰۰} \qquad ۲)\ ۱/۲۳ = ۱\frac{۲۳}{۱۰^۲} = ۱\frac{۲۳}{۱۰۰} = \frac{۱۲۳}{۱۰۰}$$

۴. تبدیل عدد اعشاری متناوب به کسر متعارفی:

آ. اعداد اعشاری متناوب ساده:

مثال ۹

کسر مولد (تولید کننده) عدد $۰/\overline{۲۷}$ را به‌دست آورید.

راه‌حل ۱: کافی است عدد ۲۷ را در صورت کسر نوشته و در مخرج به تعداد ارقام دوره گردش ۹ قرار دهیم.

$$۰/\overline{۲۷} = \frac{۲۷}{۹۹} = \frac{۳}{۱۱}$$

فرمول کلی:

$$\text{عدد صحیح} + \frac{\text{رقم‌های گردش}}{\underbrace{99\ldots9}_{\text{به تعداد رقم‌های گردش}}}$$

راه‌حل ۲:

۱. عدد مورد نظر را مساوی x قرار می‌دهیم. $x = 0/\overline{27}$

۲. دو طرف تساوی را در 10^2 (۱۰ به توان تعداد ارقام دوره گردش) ضرب می‌کنیم.

۳. عبارت‌های مرحله (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم و معادله‌ی حاصل را حل می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} x = 0/272727\ldots \\ 100x = 27/2727\ldots \\ \hline 100x - x = 27/2727\ldots - 0/2727\ldots = 27 \\ 99x = 27 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11} \end{array}$$

ب. اعداد اعشاری متناوب مرکب:

مثال ۱۰

کسر مولد عدد $0/3\overline{6}$ را پیدا کنید.

راه‌حل ۱: استفاده از فرمول:

$$\text{عدد صحیح} + \frac{\text{عدد بعد از ممیز} - \text{دوره غیرگردش}}{\underbrace{99\ldots9}_{\text{به تعداد ارقام گردش}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{به تعداد ارقام غیرگردش}}}$$

$$0/3\overline{6} = 0 + \frac{36-3}{90} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$$

راه‌حل ۲:

۱. عدد مورد نظر را مساوی x قرار می‌دهیم. $xx = 3/\overline{6}$

۲. طرفین تساوی را در ۱۰ به توان تعداد دوره‌ی غیرگردش ضرب می‌کنیم.

۳. طرفین حاصل ایجاد شده از مرحله‌ی قبل را در ۱۰ به توان تعداد ارقام دوره گردش ضرب می‌کنیم.

٤. عبارت‌های دو مرحله‌ی قبل (۲ و ۳) را از هم کم کرده و معادله‌ی حاصل را حل می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} x = 0/3\overline{6} \\ 10x = 3/\overline{6} \\ 100x = 36/\overline{6} \\ \hline 100x - 10x = 36/\overline{6} - 3/\overline{6} \\ \Rightarrow \quad 90x = 33 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{33}{90} = \dfrac{11}{30} \end{array}$$

مثال ۱۱ اعداد اعشاری متناوب زیر را به کسر تبدیل کنید. (با استفاده از فرمول)

آ. $۳/\overline{۱۲}$ ب. $۲/۳\overline{۴}$

پاسخ.

آ. $$۳/\overline{۱۲} = ۳ + \frac{۱۲}{۹۹} = \frac{۳ \times ۹۹ + ۱۲}{۹۹} = \frac{۳۰۹}{۹۹} = \frac{۱۰۳}{۳۳}$$

ب. $$۲/۳\overline{۴} = ۲ + \frac{۳۴ - ۴}{۹۰} = ۲ + \frac{۳۱}{۹۰} = \frac{۲۱۱}{۹۰}$$

کسرهای تلسکوپی

اگر مخرج یک کسر برابر با حاصل‌ضرب دو عدد و صورت آن‌ها اختلاف و یا مجموع همان دو عدد باشد، برای محاسبه می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{a-b}{a\times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}; \qquad \frac{۱}{۳\times۴} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} \ ، \ \frac{۵}{۱۶\times۲۱} = \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲۱}$$

$$\frac{a+b}{a\times b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}; \qquad \frac{۷}{۳\times۴} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}$$

برخی مسئله‌ها را با استفاده از کسرهای تلسکوپی می‌توان ساده‌تر حل کرد.

مثال ۱۲ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۴}{۳\times۷} + \frac{۴}{۷\times۱۱} + \frac{۴}{۱۱\times۱۵} + \cdots + \frac{۴}{۳۹\times۴۳}$$

پاسخ.

$$\frac{۱}{۳} - \cancel{\frac{۱}{۷}} + \cancel{\frac{۱}{۷}} - \cancel{\frac{۱}{۱۱}} + \cancel{\frac{۱}{۱۱}} - \cancel{\frac{۱}{۱۵}} + \cdots + \cancel{\frac{۱}{۳۹}} - \frac{۱}{۴۳}$$
$$= \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴۳} = \frac{۴۳ - ۳}{۱۲۹} = \frac{۴۰}{۱۲۹}$$

کسر مسلسل

کسرهایی را که به صورت پلکانی به سمت پایین حرکت می‌کنند، کسر مسلسل می‌گوییم. در این نوع کسرها، باید عبارت کوتاه‌ترین خط کسری را حل کرد. (از انتها به ابتدا)

مثال ۱۳

حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\frac{۱}{۴}}}=$$

پاسخ.

$$۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\frac{۱}{۴}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\frac{۵}{۴}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\frac{۴}{۵}}=۱+\cfrac{۱}{\frac{۹}{۵}}=۱+\frac{۵}{۹}=\frac{۱۴}{۹}$$

مثال ۱۴

حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$\cfrac{۱}{۵+\cfrac{۱}{-۲+\frac{۱}{۳}}}$$

پاسخ.

$$\cfrac{۱}{۵+\cfrac{۱}{-\frac{۵}{۳}}}=\cfrac{۱}{۵-\frac{۳}{۵}}=\cfrac{۱}{\frac{۲۲}{۵}}=\frac{۵}{۲۲}$$

نوشتن یک کسر به صورت کسر مسلسل

اگر کسری مثل $\frac{a}{b}$ داشته باشیم، که بزرگ‌تر از واحد باشد، آن را به صورت عدد مخلوط و اگر کوچک‌تر از واحد باشد، آن را به صورت معکوس معکوس $\left(\frac{۱}{\frac{b}{a}}\right)$ می‌نویسیم و آن‌قدر این کار را ادامه می‌دهیم تا صورت کسر یک شود.

مثال ۱۵

کسر $\frac{۱۳}{۸}$ را به صورت کسر مسلسل بنویسید.

پاسخ.

$$\frac{۱۳}{۸}=۱+\frac{۵}{۸}=۱+\cfrac{۱}{\frac{۸}{۵}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\frac{۳}{۵}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\frac{۵}{۳}}}$$

$$=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\frac{۳}{۲}}}}=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}}}$$

کسرهای مسلسل نامتناهی

کسرهایی مانند کسر زیر را که تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد را کسر مسلسل نامتناهی می‌گویند.

$$A=۱+\cfrac{۲}{۱+\cfrac{۲}{۱+\cfrac{۲}{۱+\cfrac{۲}{\vdots}}}}$$

اگر دقت کنید، مشاهده می‌کنید که عبارت، مدام در حال تکرار است و چون این تکرار تا بی‌نهایت ادامه دارد، فرض می‌کنیم که درون این عبارت خود A وجود داشته باشد.

$$A = ۱ + \cfrac{۲}{۱ + \cfrac{۲}{۱ + \cfrac{۲}{۱ + \cfrac{۲}{\vdots}}}} \quad \Rightarrow \quad A = ۱ + \frac{۲}{A}$$

حال با حدس و آزمایش می‌توانیم مقدار A را به‌دست آوریم.

$$A = ۲ \quad \Rightarrow \quad ۲ = ۱ + \frac{۲}{۲} \quad \Rightarrow \quad ۲ = ۱ + ۱$$

کسر هندسی

این نوع عبارت‌های کسری هم نامتناهی هستند. مانند:

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۷} + \cdots$$

مثال ۱۶

مقدار A را به‌دست آورید.

$$A = ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \cdots$$

پاسخ. چون مخرج کسرها همگی در ۴ ضرب شده است، بنابراین دو طرف تساوی را در ۴ ضرب می‌کنیم.

$$۴A = ۴ + \frac{۴}{۴} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۴}{۶۴} + \cdots$$

$$۴A = ۴ + \underbrace{۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots}_{A}$$

$$۴A = ۴ + A \quad \Rightarrow \quad ۴A - A = ۴ \quad \Rightarrow \quad ۳A = ۴ \quad \Rightarrow \quad A = \frac{۴}{۳}$$

درس دوم: اعداد حقیقی

تعریف

اعداد گنگ: به اعداد اعشاری که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها نامتناهی و غیرمتناوب باشد، اعداد گنگ (اصم) می‌گویند.

مانند $\sqrt{۲}$، π، $۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱...$ و ... مجموعه‌ای که این اعداد را در بر می‌گیرد مجموعه اعداد گنگ می‌نامند و آن را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نشان می‌دهند.

نکته ۳

اعداد رادیکالی که مربع کامل نیستند، گنگ می‌باشند مانند: $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۰/۷}$، $\sqrt{۶/۵}$، ... (اعداد ۱، ۴، ۹، ... و نیز ۱/۲۱، ۱/۶۹، ۶/۲۵، ... مربع کامل هستند.)

نکته ۴

به طور کلی می‌توان گفت اگر x عددی مجذور (مربع) کامل نباشد در این صورت $\sqrt{x}$ گنگ است.

نکته ۵

بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

مثال ۱۷

بین هر دو عدد زیر، ۴ عدد گنگ بنویسید.

۱. $\sqrt{۴/۱}\ ,\ \sqrt{۲}$

۲. $۵\ ,\ -۲$

پاسخ.

۱. $\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۴/۱} \rightarrow \sqrt{۲/۱}, \sqrt{۲/۲}, \sqrt{۳}, \sqrt{۳/۱}$

۲. $-\sqrt{۴} < x < \sqrt{۵} \rightarrow -\sqrt{۳}, -\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}$

نکته ۶

۱. حاصل جمع یک عدد گنگ و یک عدد گویا، همیشه گنگ است.

$$\sqrt{۵}+۳\in\mathbb{Q}'$$

۲. حاصل ضرب هر عدد گویای غیرصفر در یک عدد گنگ، گنگ است.

$$۷\times\sqrt{۳}=۷\sqrt{۳}\in\mathbb{Q}'$$

۳. حاصل جمع و حاصل تفریق دو عدد گنگ، گویا یا گنگ می‌تواند باشد. (همواره عددی گنگ نمی‌باشد)
مانند: $\sqrt{۵}+(-\sqrt{۵})=۰\in\mathbb{Q}$ $\quad$ $\sqrt{۳}+\sqrt{۷}\in\mathbb{Q}'$

۴. حاصل ضرب و تقسیم دو عدد گنگ می‌تواند گنگ یا گویا باشد.

$$\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۰}\in\mathbb{Q}' \qquad \sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۹}=۳\in\mathbb{Q}$$

۵. کسرهایی به شکل $\frac{a\sqrt{x}+b}{c\sqrt{x}+d}$ به شرط $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$ گویا می‌باشند.

مثال ۱۸

به ازای کدام مقدار n، عبارت $\frac{۲\sqrt{۳}+۸}{\sqrt{۳}+n}$ عددی گویا است؟

$$\frac{۲}{۱}=\frac{۸}{n}\Rightarrow n=\frac{۸}{۲}=۴$$

روی محور نقاطی وجود دارند که متناظر با آن‌ها اعداد گویایی وجود ندارد (مانند: $\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۵},\sqrt{۱۰},\cdots$)
برای نمایش اعداد گنگ رادیکالی روی محور با کمک رابطه‌ی فیثاغورس می‌توان مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای رسم کرد که دو ضلع آن عدد طبیعی و وتر آن مثلث، عدد رادیکالی گنگ مورد نظر باشد.

نکته ۷

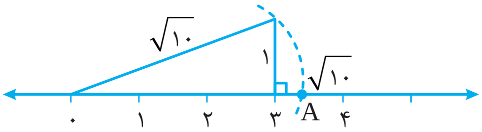
برای نشان دادن $a\pm\sqrt{b}$، رسم مثلث را به جای مبدأ از نقطه‌ی a شروع می کنیم.

مثال ۱۹

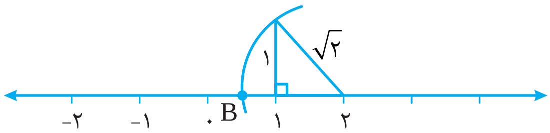
نقاط $A=\sqrt{۱۰}$ و $B=۲-\sqrt{۲}$ را روی محور نشان دهید.

پاسخ. **مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۱ و ۳ را در نظر بگیرید. وتر آن طبق رابطه‌ی فیثاغورس $\sqrt{۳^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۰}$ می‌باشد.**

دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی وتر باز کرده و از مبدأ (نقطه‌ی صفر) به سمت مثبت‌ها کمانی می‌زنیم، تا محور را قطع کند، آن نقطه $A=\sqrt{۱۰}$ است.



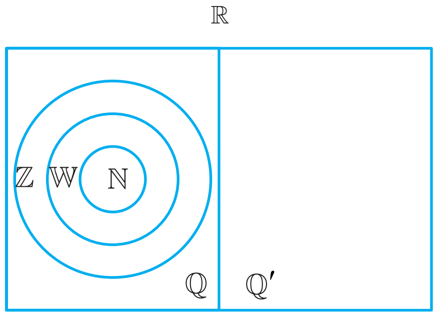
حال برای نمایش $B = ۲ - \sqrt{۲}$، کافی است از نقطه‌ی ۲ به سمت منفی‌ها مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن $\sqrt{۲}$ است را رسم کنیم. به مرکز نقطه‌ی ۲ و به شعاع وتر مثلث، یعنی $\sqrt{۲}$ کمانی می‌زنیم. نقطه‌ی برخورد با محور، نقطه‌ی B می‌باشد. $(B = ۲ - \sqrt{۲})$



تعریف

مجموعه اعداد حقیقی: اجتماع مجموعه‌ی عددهای گویا و عددهای گنگ (اصم) را مجموعه اعداد حقیقی نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. یعنی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ و داریم: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$.

نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا، اصم و حقیقی به صورت زیر است:



در نتیجه داریم: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

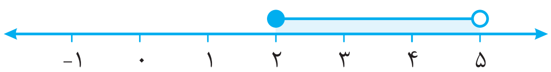
نکته ۸

- عددی که هم گویا باشد و هم گنگ وجود ندارد، یعنی اشتراک مجموعه اعداد گویا و گنگ (اصم) تهی است.
$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \phi$
- هر عددی که گنگ یا گویا باشد، یک عدد حقیقی است.
- هر نقطه‌ای که روی یک محور اعداد حقیقی انتخاب می‌شود، نشان دهنده‌ی یک عدد گنگ یا یک عدد گویا است.

مثال ۲۰

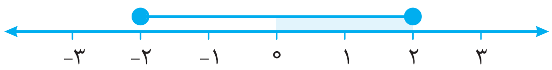
مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \leq x < ۵\}$ را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

پاسخ. چون اعضای مجموعه‌ی A اعداد حقیقی هستند، بنابراین باید تمامی اعداد بین ۲ تا ۵ و خود عدد ۲ را در نظر بگیریم. سپس به صورت زیر نمایش می‌دهیم. نقطه‌ی ۵ توخالی است یعنی عدد ۵ عضو مجموعه‌ی A نمی‌باشد.

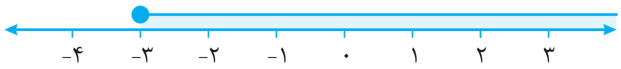


مثال ۲۱ **مجموعه‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.**

$A = \{x | x \in \mathbb{R} \, , \, x^{۲} \leq ۴\} \quad \Rightarrow$



$B = \{x | x \in \mathbb{R} \, , \, -۳ \leq x\} \quad \Rightarrow$



درس سوم: قدرمطلق و محاسبه‌ی تقریبی

تعریف فاصله‌ی نقطه‌ی نمایش عدد a را از مبدأ، قدرمطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ نمایش می‌دهیم.

به طور کلی برای قدرمطلق $|a|$ می‌توان نوشت:

$$|a| = \begin{cases} a & a > ۰ \\ ۰ & a = ۰ \\ -a & a < ۰ \end{cases}$$

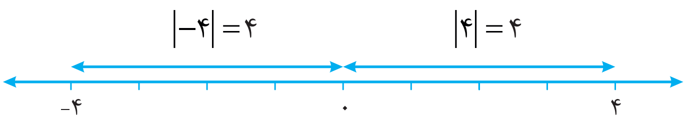
قدرمطلق اعداد مثبت، برابر با خود آن عدد است.

قدرمطلق صفر، همان عدد صفر است.

قدرمطلق هر عدد منفی، برابر با قرینه‌ی آن عدد است.

در محور زیر فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۴ و ۴− تا مبدأ برابر ۴ واحد است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$|-۴| = |۴| = ۴$$



مثال ۲۲ **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

۱) $|-۵-۲\times ۴+(-۳)^۲| =$

۲) $|(-۶)\times(-۳)-۳۴|-|-۳۵-۴۲| =$

۳) $|\sqrt{۵}-۲|$

پاسخ. **ابتدا طبق اولویت‌ها، حاصل داخل قدرمطلق‌ها را به‌دست می‌آوریم، سپس قدرمطلق را اعمال می‌کنیم.**

۱) $|-۵-۸+۹| = |-۱۳+۹| = |-۴| = ۴$

۲) $|(-۶)\times(-۳)-۳۴|-|-۳۵-۴۲| = |۱۸-۳۴|-|-۷۷|$

$$= |-۱۶|-۷۷ = ۱۶-۷۷ = -۶۱$$

$$۳)\ |\sqrt{۵} - ۲| = |\sqrt{۵} - \sqrt{۴}| = \sqrt{۵} - ۲$$

تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{(-۲)^۲} = \sqrt{۴} = ۲\ ,\qquad \sqrt{۲^۲} = ۲$$

$$\sqrt{(-۷)^۲} = \sqrt{۴۹} = ۷\ ,\qquad \sqrt{۷^۲} = ۷$$

نکته ۹

می‌توان نتیجه گرفت: $\sqrt{a^۲} = |a|$

مثال ۲۳

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید. $\sqrt{۵} \approx ۲{,}۲\ ,\quad \sqrt{۲} \approx ۱{,}۴$

$$\sqrt{(۳ - \sqrt{۵} - \sqrt{۲})^۲} = |\underbrace{۳ - \sqrt{۵} - \sqrt{۲}}_{\text{منفی}}| = -۳ + \sqrt{۵} + \sqrt{۲}$$

مثال ۲۴

اگر $۱ < x < ۴$ باشد حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$\sqrt{x^۲} - \sqrt{(x-۱)^۲} - \sqrt{(۴-x)^۲} = |x| - |\underbrace{x-۱}_{\text{مثبت}}| - |\underbrace{۴-x}_{\text{مثبت}}|$$

$$= \cancel{x} - \cancel{x} + ۱ - ۴ + x = x - ۳$$

نکته ۱۰

حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع دو عدد حقیقی نامنفی، همواره عددی نامنفی است.

$$a \geq ۰\ ,\ b \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ab \geq ۰ \\ a + b \geq ۰ \end{cases}$$

مانند:

$$a = ۴\ ,\ b = \sqrt{۵} \quad \Rightarrow \quad ab = ۴ \times \sqrt{۵} = ۴\sqrt{۵} \geq ۰$$

$$a + b = ۴ + \sqrt{۵} \geq ۰$$

نکته ۱۱

اگر a و b هر دو نامثبت $(a \leq ۰\ ,\ b \leq ۰)$ باشند، آن‌گاه $ab \geq ۰$ و $a + b \leq ۰$.

مانند:

$$a = -۳, b = -\sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ab = (-۳)(-\sqrt{۲}) = ۳\sqrt{۲} \geq ۰ \\ a + b = (-۳) + (-\sqrt{۲}) = -۳ - \sqrt{۲} \leq ۰ \end{cases}$$

نکته ۱۲

قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد، مساوی حاصل‌ضرب قدرمطلق آن‌ها است. $|ab| = |a|.|b$

مانند: $|-۲ \times ۹| = |-۲| \times |۹| = ۲ \times ۹ = ۱۸$

نکته ۱۳

قدرمطلق مجموع دو عدد از مجموع قدرمطلق آن دو عدد کوچک‌تر یا مساوی است.

$$|a+b| \leq |a| + |b| \qquad \text{(نامساوی مثلثی)}$$

مانند: $a = -۱ \,,\, b = ۲ \quad \Rightarrow \quad |۲ + (-۱)| < |۲| + |-۱| \quad \Rightarrow \quad ۱ < ۳$

نکته ۱۴

اگر a عددی نامنفی باشد، داریم: $|x| < a \quad \Rightarrow \quad -a < x < a$

مانند:

۱) $|x| < ۵ \quad \Rightarrow \quad -۵ < x < ۵$

۲) $|x+۴| < ۹ \quad \Rightarrow \quad -۹ < x+۴ < ۹ \quad \Rightarrow \quad -۱۳ < x < ۵$

نکته ۱۵

قدرمطلق حاصل تقسیم دو عدد برابر حاصل تقسیم قدرمطلق‌های آن دو عدد است. (مخرج نباید صفر باشد.)

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad , \quad (b \neq ۰)$$

مانند: $\left|-\frac{۵}{۷}\right| = \frac{|-۵|}{|۷|} \quad \Rightarrow \quad \frac{۵}{۷} = \frac{۵}{۷}$

نکته ۱۶

قدرمطلق هر عدد با قدرمطلق قرینه‌ی همان عدد برابر است.

مانند: $|a| = |-a| \quad \Rightarrow \quad |۵| = |-۵| \quad , \quad |\sqrt{۲}| = |-\sqrt{۲}|$

نکته ۱۷

هر عددی با قدرمطلقش جمع شود، حاصل همواره نامنفی است.

$$a + |a| \geq ۰$$

مانند: $۵ + |-۵| = ۵ + ۵ \geq ۰$

نکته ۱۸

اگر a یک عدد حقیقی باشد، داریم $|x| = |a| \quad \Rightarrow \quad x = +a \quad , \quad x = -a$

مثال ۲۵ **معادله‌های قدرمطلقی داده شده را حل کنید.**

۱. $|x| = ۵$ ۲. $|x + ۳| = ۸$ ۳. $|۲x - ۷| = ۲۰$ ۴. $|۵x - ۹| = |۲x + ۳|$

پاسخ.

۱) $|x| = ۵ \Rightarrow x = +۵ \,,\, x = -۵$

۲) $|x + ۳| = ۸ \Rightarrow x + ۳ = ۸ \Rightarrow x = ۵ \,,\, x + ۳ = -۸ \Rightarrow x = -۱۱$

۳) $|۲x - ۷| = ۲۰ \Rightarrow ۲x - ۷ = ۲۰ \,,\, ۲x - ۷ = -۲۰$

$$۲x = ۲۷ \Rightarrow x = \frac{۲۷}{۲} \,,\, ۲x = -۱۳ \Rightarrow x = -\frac{۱۳}{۲}$$

۴) $|۵x - ۹| = |۲x + ۳|$

$$۵x - ۹ = ۲x + ۳ \Rightarrow ۵x - ۲x = ۳ + ۹ \Rightarrow ۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

$$۵x - ۹ = -۲x - ۳ \Rightarrow ۵x + ۲x = -۳ + ۹ \Rightarrow ۷x = ۶ \Rightarrow x = \frac{۶}{۷}$$

آزمون شماره ۲

۱ به ازای چه مقدار a، عدد گویای $\frac{a}{۲۰}$ بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۵}$ قرار دارد؟ «آزمون ورودی»

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۲ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $\sqrt{۵}$، $۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰$ و π عددهای گویا هستند.

۲) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

۳) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

۴) $\sqrt{۲} + ۱ \in \mathbb{Q}$

۳ عدد اعشاری کدام‌یک از کسرهای زیر متناوب ساده است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۳۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴ اگر $a < ۰$ و $b > ۰$ باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $ab < ۰$ ۲) $a^۲b > ۰$ ۳) $|a||b| = a.b$ ۴) $ab^۲ < ۰$

۵ حاصل عبارت مقابل با کدام گزینه برابر است؟ $\dfrac{۲}{۲-\dfrac{۲}{۲-\dfrac{۲}{۲-\frac{۲}{۳}}}}$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۶ کدام عدد گنگ است؟

۱) $\sqrt{۲} - (\sqrt{۲} + ۱)$ ۲) $\dfrac{\frac{۳}{۵}\pi}{\pi}$ ۳) $\pi^۲$ ۴) $۳/۱۴$

۷ حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $|۳^۴ - ۱۲ \times (+۵) + ۲۴۰ \div (-۳)|$

۱) -۴۹ ۲) -۵۹ ۳) ۵۹ ۴) ۴۹

۸ به ازای کدام مقدار a عبارت $\sqrt{۳ - (a+۲)^۲}$ یک عدد حقیقی خواهد بود؟

۱) $a = -۴$ ۲) $a = ۲$ ۳) $a = ۳$ ۴) $a = -۲$

۹ کدام‌یک از گزینه‌های زیر بین دو کسر $-\frac{۱}{۵}$ و $-\frac{۱}{۴}$ می‌باشد؟

۱) $-\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $-\frac{۴}{۲۰}$ ۳) $-\frac{۹}{۴۰}$ ۴) $-\frac{۵}{۲۵}$

۱۰ عدد $-۴ + \sqrt{۱۷}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱) ۱ و ۰ ۲) -۲ و -۳ ۳) ۰ و -۱ ۴) ۲ و ۱

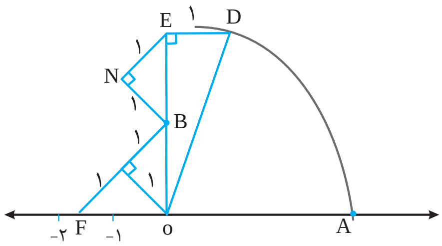
۱۱ ساده شده‌ی عبارت $|-\sqrt{۳}-۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۳}|$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $۲\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۲\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$

۱۲ اگر $a=\sqrt{(\sqrt{۳}-۲)^۲}$ و $b=\sqrt{(۴-\sqrt{۳})^۲}$ باشد، آن‌گاه $b-a$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $-۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۱۳ در شکل زیر نقطه‌ی A چه عددی را نمایش می‌دهد؟ (O مبدأ مختصات است) «المپیاد»



۱) $\sqrt{۵}$
۲) ۳
۳) $\sqrt{۶}$
۴) $\sqrt{۷}$

۱۴ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $۳<\sqrt{۱۳}<۴$ ۲) $\mathbb{R}\cap\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}$
۳) $\mathbb{R}\subseteq(\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}')$ ۴) $\frac{۵}{۳}\in\{x\in\mathbb{R}|x\geq ۲\}$

۱۵ اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R}\,,\,-۱\leq x<۲\}$، $B=\{x|x\in\mathbb{R}\,,\,x\leq ۱\}$ و $C=\{x|x\in\mathbb{R}\,,\,x\geq ۰\}$ باشد، مجموعه‌ی $(A\cap B)\cup C$ شامل چند عدد صحیح کوچک‌تر از ۲ خواهد شد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

۱۶ کدام گزینه نادرست است؟

۱) قدرمطلق هر عدد نامنفی، برابر خود آن عدد است.
۲) قدرمطلق هر عدد منفی، قرینه‌ی آن عدد است.
۳) قدرمطلق هر عدد منفی، منفی است.
۴) قدرمطلق قرینه‌ی هر عدد، برابر قدرمطلق خود آن عدد است.

۱۷ اگر $۱<x<۲$ باشد، حاصل عبارت $|x-۱|+|۳-x|-|۲x-۱|$ کدام است؟

۱) $۲x-۳$ ۲) $۲x+۳$ ۳) $-۲x+۳$ ۴) $۲x+۲$

۱۸ حاصل عبارت مقابل به ازای $a=-۱$، $b=۱$ و $c=۵$ برابر با، کدام گزینه است؟ $\frac{|a-b|\times c^۲}{|ab|}$

۱) -۵۰ ۲) $+۵۰$ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۹ اگر $\frac{a}{b}=\frac{۱}{۳+\frac{۲}{۴+\frac{۴}{۵}}}+۲$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۵۳ ۴) ۱۶۲

۲۰ کدام‌یک از نتایجی که مهسا از عبارت سمت چپ گرفته است، منطقی می‌باشد؟

۱) $a > 0 \ , \ b > 0 \quad \Rightarrow \quad |a+b| = -(a+b)$

۲) $a > 0 \ , \ b < 0 \quad \Rightarrow \quad |a+b| = -(a+b)$

۳) $a > 0 \ , \ b < 0 \quad \Rightarrow \quad |a+b| = a+(-b)$

۴) $a < 0 \ , \ b < 0 \quad \Rightarrow \quad |a+b| = -(a+b)$

آزمون شماره ۳

۱ چند مورد از عبارت‌های زیر مشخص کننده‌ی یک مجموعه <u>است</u>؟

آ. اعداد اول کوچک

ب. اعداد مرکب ۲۰۱۶ رقمی

پ. اعداد اول کوچک‌تر از ۲

ت. یک عدد طبیعی اول زوج

۱) یکی ۲) دو تا ۳) سه تا ۴) چهار تا

۲ با توجه به مجموعه‌ی $A = \{۲, ۴, \{۲, ۴\}, \{۲, ۴, ۶\}\}$ گزینه‌ی <u>نادرست</u> را تعیین کنید.

۱) $\{۲, ۴\} \in A$ ۲) $\{۲, ۴\} \subseteq A$ ۳) $\{۲, ۴, ۶\} \subseteq A$ ۴) $\phi \subseteq A$

۳ کدام مجموعه، زیرمجموعه‌ی سایر گزینه‌ها <u>است</u>؟

۱) $\{\{\phi\}\}$ ۲) $\phi \cup \{\phi\}$ ۳) $\phi \cap \{\phi\}$ ۴) $\{\phi, \{\phi\}\}$

٤ کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح <u>نمی‌باشد</u>؟

۱) $\phi \subseteq \phi$ ۲) $\phi \in \phi \cup \{۱\}$ ۳) $\phi \in P(\phi)$ ۴) $\phi \subseteq P(\phi)$

۵ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی $B = \{\frac{x}{۲x} | x \in A\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶ اگر $A = \{a, b\}$ باشد، مجموعه‌ی $P(P(P(A)))$ چند عضو دارد؟

۱) $۲^{۸}$ ۲) $۲^{۱۶}$ ۳) $۲^{۳۲}$ ۴) $۲^{۴}$

۷ اگر $B \cap C = C$ و $A \cap B = B$ باشد، کدام گزینه درست <u>است</u>؟ «آزمون ورودی»

۱) $A \subseteq B \subseteq C$ ۲) $C \subseteq B \subseteq A$ ۳) $A \subseteq C \subseteq B$ ۴) $A = B = C$

۸ اگر $A \subseteq B \subseteq C$ باشد، حاصل $(A \cup B) - (A \cup C)$ کدام است؟ «آزمون ورودی»

۱) ϕ ۲) A ۳) B ۴) C

۹ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$، $B = \{۳, ۶, ۷\}$ و $C = \{۱, ۳, ۵, ۶, ۷\}$ باشد، حاصل عبارت $((A-B) \cup (B-C)) \cap B$ کدام است؟

۱) $\{۷\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{۳, ۶, ۷\}$ ۴) ϕ

۱۰ ظرفی دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه است (همه‌ی مهره‌ها هم‌شکل هستند). فضای نمونه‌ای انتخاب یک مهره از این ظرف چند عضو دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۳ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱ عدد اعشاری حاصل از کسر $\frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۳}{۲}}$ چه نوع عددی است؟

۱) متناوب مرکب   ۲) متناوب ساده   ۳) مختوم   ۴) صحیح

۱۲ حاصل $۲/\overline{۱۲} + ۳/\overline{۶۵} - ۱/\overline{۷}$ کدام است؟

۱) $۴/\overline{۷}$ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) $۵/\overline{۷}$

۱۳ کدام گزینه گویا نیست؟

۱) $۳ + \sqrt{۱۲}$ ۲) $-\sqrt{۳۶} + ۱$ ۳) $\frac{۰}{۵}$ ۴) $۱۵ - \frac{۲}{۵}$

۱۴ طول و عرض یک مستطیل عددهای اصم هستند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) محیط مستطیل همواره عددی اصم است.

۲) مساحت مستطیل همواره عددی اصم است.

۳) محیط مستطیل ممکن است عددی اصم یا گویا باشد.

۴) جذر مساحت این مستطیل همواره عددی گنگ است.

۱۵ حاصل $\dfrac{۱ - \frac{۱}{۱ + \frac{۲}{۳}}}{۱ - \frac{۱}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) ۳

۱۶ روی محور اعداد، کدام‌یک از عددهای زیر در سمت چپ سایر اعداد قرار می‌گیرد؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\sqrt{۲} - ۱$ ۳) $۱ - \sqrt{۲}$ ۴) $-۲ + \sqrt{۲}$

۱۷ مقدار تقریبی عبارت $\dfrac{\sqrt{۴۹/۳} - \sqrt{\frac{۴۰}{۱۰}}}{۱/۰۱}$ کدام است؟

۱) ۵   ۲) -۵ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۱۸ حاصل $||-۱| - |-۲|| - |(-۱)^n|$ در صورتی که n عددی صحیح باشد، برابر است با:

۱) -۲ ۲) ۲   ۳) ۰   ۴) ۳

۱۹ اگر مخرج یک عدد گویای منفی را نصف کنیم، آن عدد:

۱) بزرگ‌تر می‌شود.   ۲) کوچک‌تر می‌شود.   ۳) چهار برابر می‌شود.   ۴) تغییر نمی‌کند.

۲۰ حاصل عبارت مقابل برابر است با:

$$\frac{۵}{۱ \times ۶} + \frac{۵}{۶ \times ۱۱} + \frac{۵}{۱۱ \times ۱۶} + \cdots + \frac{۵}{۴۱ \times ۴۶} =$$

۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۴۶}$ ۳) $\frac{۴۶}{۴۱ \times ۴۶}$ ۴) $\frac{۴۵}{۴۶}$